Capítulo 3

DINAMICA DE FLUIDOS Y FLUIDOS REALES

1. Estudio del flujo de los fluidos

2. Ecuación de continuidad

3. Teorema de Bernouilli

4. Viscosidad

5. Ley de Poiseuille. Pérdida de carga

6. Ley de Stokes

7. Regímenes laminar y turbulento. Número de Reynolds

1.- ESTUDIO DEL FLUJO DE LOS FLUIDOS

La Dinámica de Fluidos es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento o flujo de los fluidos. En el caso del agua se habla de *Hidrodinámica*, y para los gases de *Aerodinámica*.

Un fluido discurre en **régimen estacionario** cuando su velocidad en cada punto es siempre la misma, aunque varíe de unos puntos a otros, es decir, en un punto dado del fluido la velocidad no depende del tiempo. En el fluido hay definido un campo vectorial que recibe el nombre de **campo de velocidades** y que es estacionario, aunque sí que depende del punto (x, y, z) considerado.

Se llama **línea de corriente** o **línea de flujo** a la trayectoria descrita por una partícula determinada del fluido en movimiento. Se trata de las líneas de campo del campo de velocidades y son tangentes a la velocidad de la partícula en cada uno de sus puntos. Una partícula del fluido, en régimen estacionario, sigue la trayectoria marcada por las líneas de corriente.

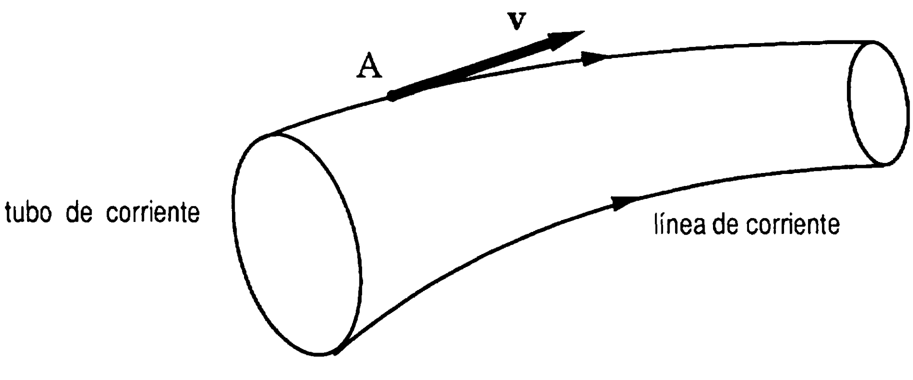
Un **tubo de corriente** es el espacio limitado por las líneas de corriente que pasan por un contorno de una superficie, situada en el seno del líquido.

En un fluido ideal que se mueve en régimen estacionario, las líneas de corriente no se entrecruzan y todos los puntos de una pequeña sección perpendicular a un tubo de corriente se mueven con la misma velocidad. Cuando esto sucede se dice que el régimen de movimiento es el de Bernouilli o **régimen sin rozamiento.**

El régimen estacionario es de Poiseuille o **laminar** cuando las capas de fluido se deslizan unas sobre otras, como si se tratase de verdaderas láminas fluidas, de la misma forma como se extiende una baraja de naipes al deslizarse sobre una mesa. En este régimen se tiene presente la viscosidad del fluido.

Finalmente, si el rozamiento interno es muy elevado (debido a que la variación de velocidad, en una sección transversal a la corriente, es muy notable) las líneas de corriente se entrecruzan, formándose *torbellinos* o *remolinos* en el seno del fluido, y el régimen recibe el nombre de **turbulento** o de Venturi. Evidentemente, este régimen es no estacionario.

Salvo que se indique lo contrario consideraremos que los fluidos están en régimen estacionario.

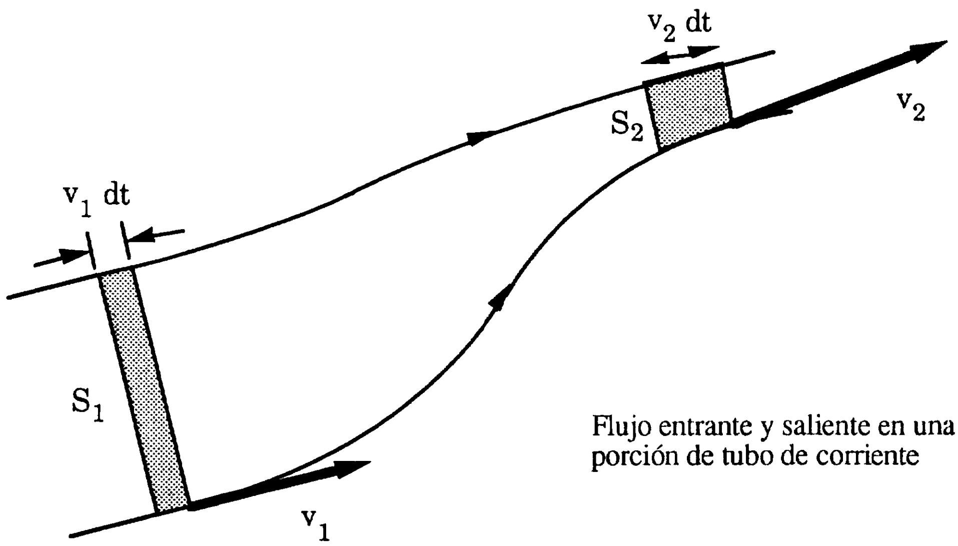


El vector velocidad es tangente
en cada punto a la línea de corriente

2.- ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Consideremos una línea cerrada en el seno del fluido que delimita una superficie S que tomamos como referencia. Se llama **gasto** del fluido, Q, al volumen de fluido que atraviesa la superficie S en la unidad de tiempo. Si consideramos un tubo de corriente como el de la figura siguiente, el volumen de fluido que penetra en el tubo por la sección S_1 en un intervalo de tiempo dt es el contenido en un cilindro de base S_1 y altura $v_1\,dt$, donde v_1 es la velocidad del fluido en la sección S_1, es decir, $S_1\,v_1\,dt$. Si la densidad del fluido es constante (el fluido es incompresible) y vale ρ, la masa dm que penetra es:

$$dm = \rho\, S_1\, v_1\, dt$$



Flujo entrante y saliente en una porción de tubo de corriente

Como la masa que entra en el tubo de corriente debe ser igual a la que sale, y ésta es:

$$dm = \rho\, S_2\, v_2\, dt$$

queda:

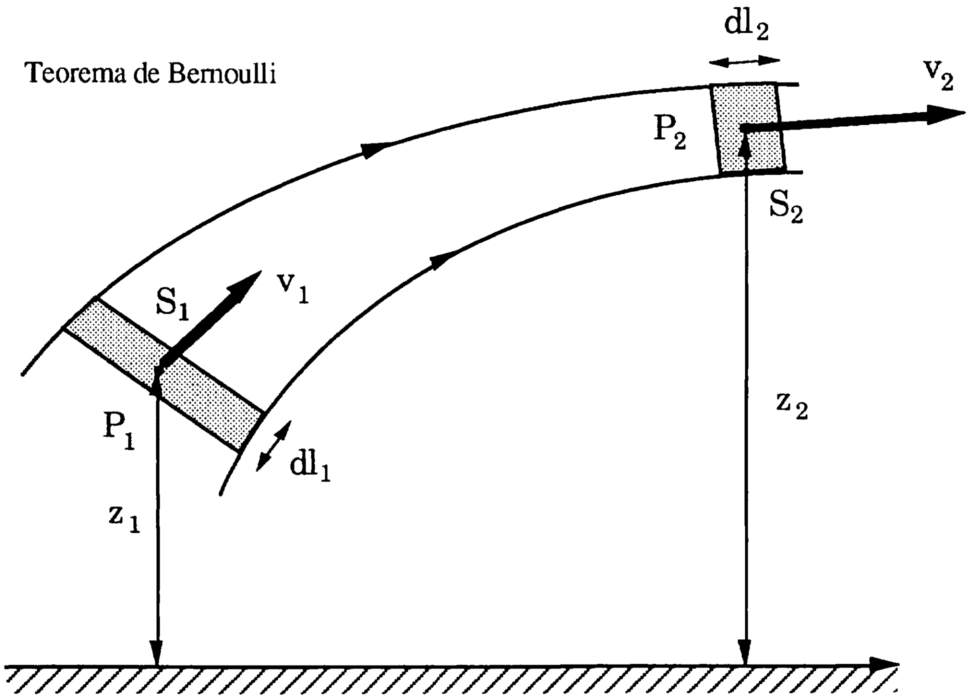
$$S_1\, v_1 = S_2\, v_2$$

el producto Sv permanece constante a lo largo de un tubo de corriente (**ecuación de continuidad**). De ello se deduce que cuando disminuye la sección de un tubo de corriente, la velocidad aumenta.

Es evidente que el **gasto** del fluido es $Q = Sv$, y, por tanto, Q permanece constante a lo largo de un tubo de corriente.

3.- TEOREMA DE BERNOULLI. APLICACIONES

Consideremos un tubo de corriente como el de la figura, de modo que en un intervalo de tiempo dt se ha trasladado una porción de fluido, en la parte de la izquierda (de sección S_1, velocidad v_1 y con una presión p_1), dl_1, y en la de la derecha (de sección S_2, velocidad v_2 y con una presión p_2), dl_2. Las porciones sombreadas tendrán igual volumen debido a la conservación de la masa. Suponemos que las secciones del tubo son lo suficientemente pequeñas para que en ellas el valor de la velocidad no varíe.



Vamos a aplicar el principio de conservación de la energía a los dos puntos 1 y 2 del fluido, recordando que la variación de la energía (cinética y potencial) es igual al trabajo de las fuerzas exteriores. Calculemos este trabajo así como las variaciones en la energía cinética y potencial.

1º) Las fuerzas (presión x superficie) que actúan sobre las secciones 1 y 2 habrán realizado unos trabajos:

$$\text{Punto 1} \qquad dW_1 = p_1 S_1 dl_1$$

Punto 2 $\qquad dW_2 = -p_2\ S_2\ dl_2$

el signo menos indica que la fuerza y el desplazamiento tienen sentidos contrarios. El trabajo total realizado, dW, es:

$$dW = p_1\, S_1\, dl_1 - p_2\, S_2\, dl_2$$

2º) La variación de energía potencial, dE_p, del fluido contenido en el volumen $S_1\, dl_1 = S_2\, dl_2$, cuyo valor es la diferencia de la energía potencial en el estado final (peso x z_2) menos la inicial (peso x z_1), es:

$$dE_p = S_2\ \rho\ dl_2\ g\, z_2 - S_1\ \rho\ dl_1\ g\, z_1$$

donde ρ es la densidad y g la aceleración de la gravedad.

3º) La variación de energía cinética, dE_c, al pasar tal masa de fluido de la velocidad inicial v_1 a la finalv_2, será:

$$dE_c = \frac{1}{2}\, S_2\, dl_2\, \rho\, v_2^2 - \frac{1}{2}\, S_1\, dl_1\, \rho\, v_1^2$$

Siendo el trabajo de las fuerzas exteriores igual a la variación de la energía:

$$dW = dE_p + dE_c$$

se deberá verificar la relación:

$$p_1\, S_1\, dl_1 - p_2\, S_2\, dl_2 = S_2\, dl_2\, \rho\, g\, z_2 - S_1\, dl_1\, \rho\, g\, z_1 + \frac{1}{2}\, S_2\, dl_2\, \rho\, v_2^2 - \frac{1}{2}\, S_1\, dl_1\, \rho\, v_1^2$$

Agrupando términos correspondientes a los puntos inicial (1) y final (2), y considerando que el volumen desplazado, dV, es:

$$dV = S_1\, dl_1 = S_2\, dl_2$$

obtenemos:

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Expresión que constituye el **Teorema de Bernoulli:** La suma de la presión estática, p, la presión debida a la velocidad, $\rho v^2/2$, y la presión debida a la altura, $\rho g z$, permanece constante a lo largo de una línea de corriente (o un tubo si su sección no es muy grande). La suma de las dos primeras presiones (la estática y la debida a la velocidad) se denomina **presión hidrodinámica.**

Es frecuente escribir el Teorema de Bernoulli de forma que figuren alturas en lugar de presiones. En este caso toma la forma:

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = constante$$

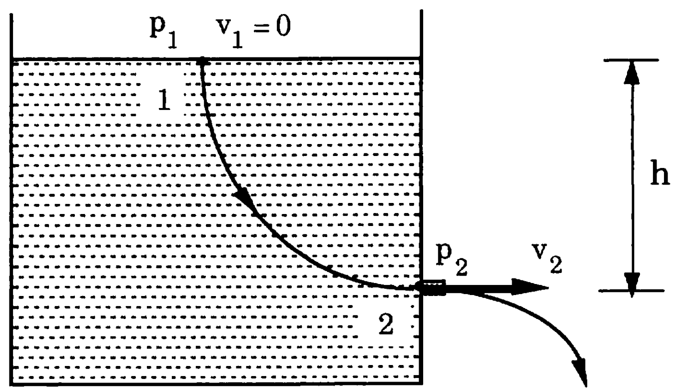
$p/\rho g$ recibe el nombre de **altura piezométrica**, $v^2/2g$ es la **altura cinética** y z es la **altura geométrica.** Con frecuencia, en el *lenguaje ingenieril*, en lugar de alturas se les da el nombre de **cargas**: carga de presión, carga cinética, ...

Veamos a continuación algunas **aplicaciones del Teorema de Bernoulli.**

(a) Teorema de Torricelli

Consideremos una vasija con un orificio de sección muy pequeña en comparación con la superficie libre del líquido que contiene. Al salir líquido por el orificio podremos considerar con suficiente aproximación que la superficie libre está en reposo y su velocidad es, por tanto, nula.

Teorema de Torricelli



Aplicando el Teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2 obtenemos:

$$\left(p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2\right) - \left(p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\right) = \rho g (z_1 - z_2)$$

p_1 y p_2 son las presiones atmosféricas en los puntos 1 y 2, y por tanto iguales; v_1 es la velocidad de la superficie libre que es nula y $h = z_1 - z_2$. Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = \rho g h \qquad \rightarrow \qquad v_2 = \sqrt{2gh}$$

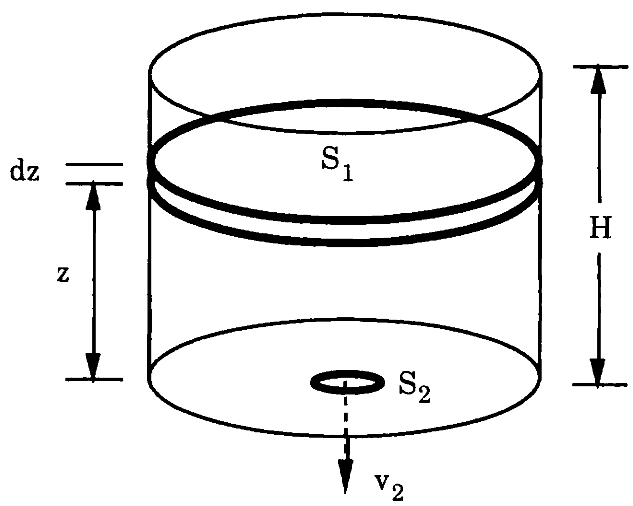
Ecuación que indica que:

"La velocidad de salida de un líquido en vasija abierta, por un orificio practicado en pared delgada, es la que tendría un cuerpo cualquiera cayendo libremente en el vacío desde el nivel del líquido hasta el centro de gravedad del orificio". (Teorema de Torricelli).

Es importante darse cuenta que esta velocidad de salida no depende de la densidad del líquido.

(b) Cálculo del tiempo de vaciado de un depósito

Consideremos un depósito cilíndrico que inicialmente está lleno de líquido hasta una altura H y deseamos saber cuánto tiempo tardará en vaciarse por un pequeño orificio circular situado en su base.



Si la sección del orificio es S_2 y la de la superficie libre del depósito S_1, al descender el nivel en una cantidad dz en un intervalo de tiempo dt, el gasto Q que sale por el orificio será:

$$Q = S_1 \left(- \frac{dz}{dt} \right) = S_2 \sqrt{2 g z}$$

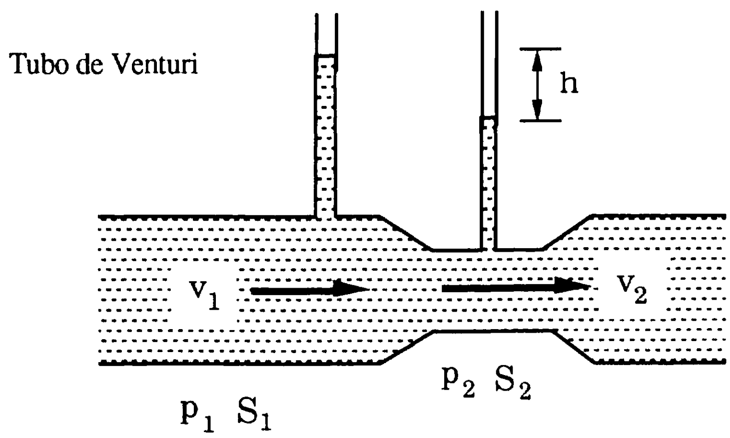
donde el signo menos indica que z decrece. Además hemos escrito $v_1 = - dz/dt$. Luego:

$$dt = - \frac{S_1 \, dz}{S_2 \sqrt{2 g z}} \quad \rightarrow \quad t = - \frac{S_1}{S_2 \sqrt{2 g}} \int_H^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2 S_1}{S_2} \sqrt{\frac{H}{2 g}}$$

(c) <u>Medidor de Venturi</u>

Es un dispositivo empleado para medir gastos o caudales y velocidades de fluidos en tuberías.

Básicamente consiste en un tubo horizontal que tiene un estrechamiento, con dos tubos verticales abiertos por su parte superior, uno en la zona de sección ancha y el otro en el estrechamiento.



Aplicando el Teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, el primero en la parte ancha de sección S_1, velocidad v_1 y presión p_1, y el segundo en el estrechamiento, con sección S_2, velocidad v_2 y presión p_2, teniendo en cuenta que $z_1 = z_2$:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

De la ecuación de continuidad:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

y por tanto:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right] = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_2^2}$$

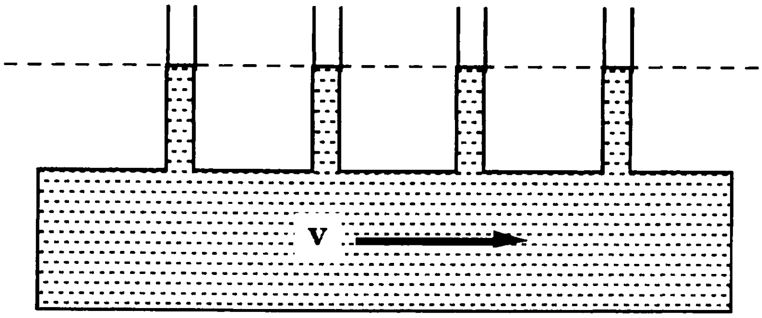
de donde el gasto es:

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$$

recordando que $\Delta p = \rho g h$, es posible calcular el gasto y/o la velocidad del fluido midiendo la diferencia de nivel en los dos tubos verticales, h.

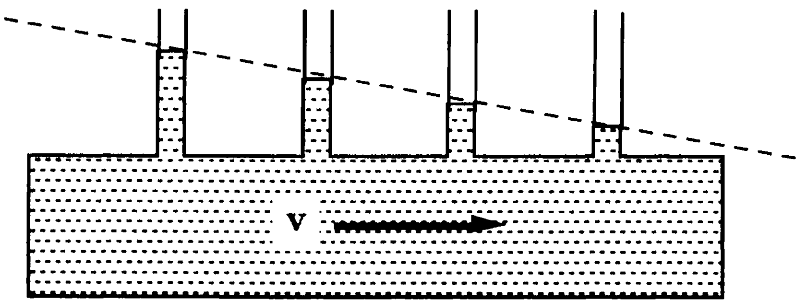
4.- VISCOSIDAD

Los fluidos ideales se caracterizan por no existir fuerzas de rozamiento en el fluido, en cambio, en los fluidos reales existen fuerzas de rozamiento que implican un comportamiento diferente. Así por ejemplo, el teorema de Bernoulli asegura que si un fluido ideal se mueve a través de una tubería horizontal de sección constante, su velocidad será constante y además la presión será la misma, tal y como muestra la figura siguiente.



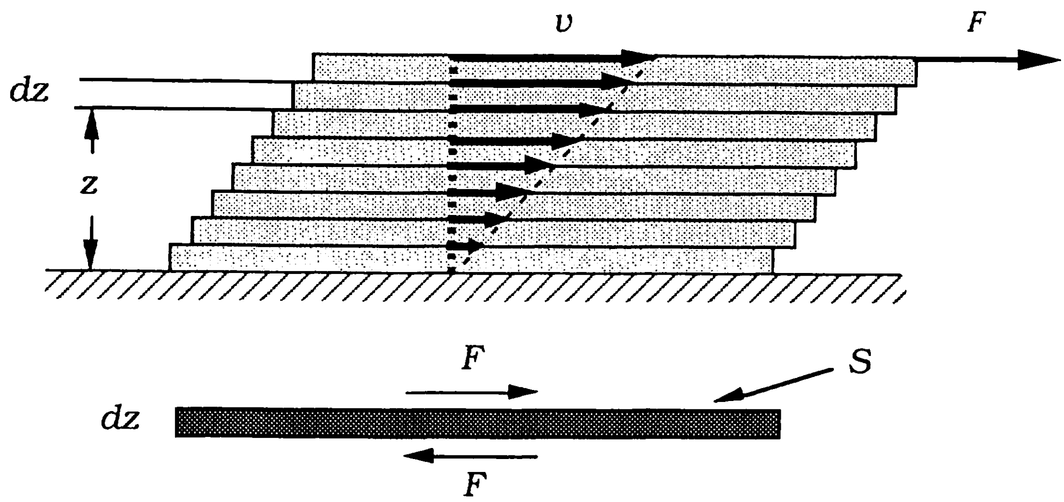
Desplazamineto de un fluido ideal
por una tubería de sección constante

Sin embargo, si se hace la misma experiencia pero con un fluido real, se encuentra que en los distintos tubos verticales la altura del fluido va decreciendo conforme el fluido se desplaza. Esto implica una pérdida de presión debida a que las fuerzas de presión tienen que realizar un trabajo para vencer las fuerzas de rozamiento interno en el fluido, lo cual implica una pérdida de carga, tal y como se observa en la figura siguiente.



Pérdida de carga de un fluido real por una tubería de
sección constante debido a la viscosidad

El rozamiento en los fluidos se manifiesta en una propiedad denominada **viscosidad.** La viscosidad se origina por las fuerzas de rozamiento interno entre las partículas del fluido y entre éstas y las paredes de los conductos o tuberías. Como toda fuerza de rozamiento, las fuerzas de origen viscoso se manifiestan cuando hay movimiento, por ello no tiene sentido su estudio hidrostático. Estas fuerzas de viscosidad que aparecen en el movimiento de los fluidos reales son fuerzas tangenciales que se oponen al deslizamiento de unas capas de fluido sobre otras. La existencia de estos rozamientos internos supone que las capas líquidas contiguas se mueven con velocidad distinta, como se ve en la figura siguiente, donde en el fondo de la conducción la velocidad es prácticamente nula por efecto de la adherencia y va aumentando hacia arriba hasta alcanzar el máximo valor en la superficie del líquido. Es decir, a lo largo del eje verzical Z existe un *gradiente de velocidad.* Supongamos una lámina de fluido, en el seno de él, a una altura z sobre el fondo, de espesor dz y área S.



La fuerza tangencial que se ejerce sobre esta capa viene dada por:

$$F = \eta S \frac{dv}{dz}$$

siendo η el **coeficiente de viscosidad** y dv/dz el gradiente de velocidad.

La unidad de viscosidad en el sistema CGS es el **poise** (P):

$$1 \ \mathrm{P} = 1 \ \mathrm{g \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1}} = 1 \ \mathrm{dina \cdot s \cdot cm^{-2}}$$

En el Sistema Internacional la unidad es:

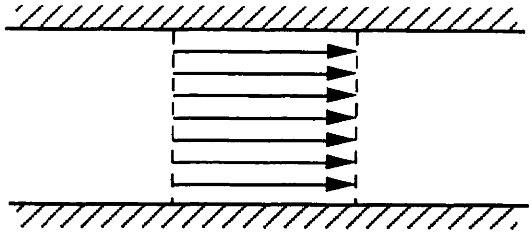
$$1 \ \mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}} = 10 \ \mathrm{P}$$

La viscosidad del agua es a 20° C, aproximadamente, 1 centipoise (1 cP).

5.- LEY DE POISEUILLE. PÉRDIDA DE CARGA

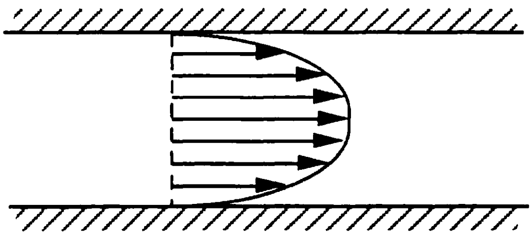
En un fluido ideal que circula en régimen estacionario por el interior de un conducto la velocidad es la misma para todas las partículas de la misma sección transversal. El perfil de velocidades es el que se muestra en la figura.

Perfil de velocidades típicas de un fluido ideal en el interior de una tubería



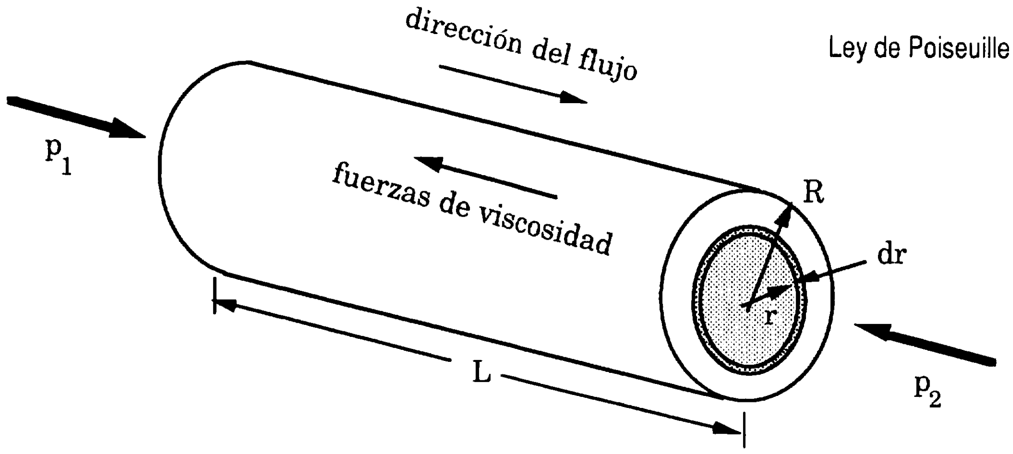
En un fluido viscoso que circula por el interior de un conducto la velocidad en los puntos de cada sección transversal es diferente. Cuando la velocidad no rebasa un cierto límite el movimiento se realiza por capas superpuestas que no se entremezclan, siguiendo las líneas de corriente caminos aproximadamente paralelos a las paredes. Se dice entonces que el fluido sigue un **régimen laminar** y el perfil típico de velocidades es el de la figura que se muestra a continuación:

Perfil de velocidades típicas de un fluido viscoso en el interior de una tubería (régimen laminar)



Asi pues, debido a la viscosidad la velocidad de un fluido viscoso que pasa a través de una tubería no es la misma en todos los puntos de una sección transversal. Las paredes del tubo ejercen una fuerza de resistencia sobre la capa más externa del fluido, que a su vez actúa sobre la capa inmediata y así sucesivamente. Como consecuencia de esto *la velocidad es máxima en el centro del tubo y disminuye hasta anularse en las paredes.* El flujo resulta análogo al de un cierto número de tubos unidos telescópicamente que deslicen uno dentro del otro.

Consideremos un tubo cilíndrico de longitud L y sección circular de radio *R*, como se ve en la figura, a través del cual fluye un líquido de coeficiente de viscosidad η. Sean p_1 y p_2 las presiones en los extremos del tubo.



Un pequeño cilindro de radio *r* se encuentra en equilibrio (moviéndose con velocidad constante) bajo la acción de la fuerza impulsora originada por la diferencia de presión entre sus extremos, menos la fuerza retardadora de viscosidad, que actúa sobre su superficie lateral. La fuerza impulsora es (diferencia de presiones por superficie):

$$(p_1 - p_2)\,\pi r^2$$

La fuerza de viscosidad será:

$$-\eta S \frac{dv}{dr} = -\eta\, 2\pi r L \frac{dv}{dr}$$

donde dv/dr es el gradiente de velocidad a una distancia radial *r* del eje. El signo negativo se debe a que v disminuye cuando *r* aumenta. Igualando ambas fuerzas se obtiene la ecuación:

$$(p_1 - p_2)\,\pi r^2 = -\eta\, 2\pi r L \frac{dv}{dr}$$

$$-\frac{dv}{dr} = (p_1 - p_2)\frac{r}{2\eta L} \quad \Rightarrow \quad -dv = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L}\, r\, dr$$

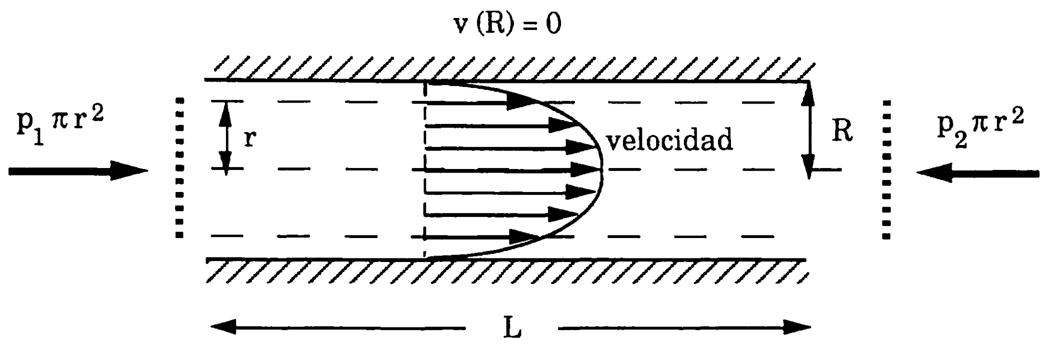
Integrando:

$$-\int_v^0 dv = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L}\int_r^0 r\, dr$$

de donde, la velocidad v en función de r es:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

que es la ecuación de una parábola. La curva de la figura siguiente es la gráfica de esta ecuación, siendo el valor de la velocidad el dado por la longitud de las flechas. El gradiente de velocidad, dv/dr, para un radio cualquiera es la pendiente de esta curva medida respecto a un eje vertical. Se dice que el flujo tiene un **perfil de velocidad parabólico.**



Para hallar el gasto Q consideramos un elemento de área $dS = 2\pi r dr$. Como el gasto es el producto de la velocidad por el área, el gasto dQ que corresponde al elemento dS, es:

$$dQ = v\,dS = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)\,2\pi r\,dr$$

e integrando:

$$Q = \frac{2\pi(p_1 - p_2)}{4\eta L}\int_0^R (R^2 - r^2)\,r\,dr$$

es decir:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(p_1 - p_2)$$

Esta relación recibe el nombre de **ley de Poiseuille.** Como puede verse el gasto es inversamente proporcional a la viscosidad. El cociente $(p_1 - p_2)/L$ recibe el nombre de **pérdida de carga** por unidad de longitud, y representa la disminución de presión conforme el fluido circula por la tubería. Puede verse como la disminución de presión $\Delta p = p_1 - p_2$ ("pérdida de carga") es proporcional a la longitud L recorrida por el fluido:

$$\Delta p = \frac{8\,\eta\, Q}{\pi\, R^4}\, L$$

La pérdida de carga también se expresa como una disminución de la altura debida a la presión en la ecuación del Teorema de Bernoulli. En este caso, y en dimensiones de longitud, la pérdida de carga es $\Delta p/\rho g$.

6.- LEY DE STOKES

"La resistencia al movimiento, F_r, de cuerpos esféricos en un fluido viscoso, en régimen laminar, es directamente proporcional al radio del cuerpo, r, a su velocidad, v, y al coeficiente de viscosidad del medio, η".

$$F_r = 6\,\pi\, v\, \eta\, r$$

La fuerza que hace caer a un cuerpo esférico de radio r y densidad ρ en un fluido de densidad ρ_o, es su peso P menos el empuje E del fuido, y esta fuerza es:

$$P - E = \frac{4}{3}\pi\, r^3\, (\rho - \rho_o)\, g$$

Esta fuerza da lugar a un movimiento de caída acelerado. Sin embargo, al aumentar la velocidad aumenta la fuerza de resistencia al movimiento F_r de manera que llegará un momento que esta fuerza sea lo sufientemente grande para que compense a $P - E$, en cuyo caso la aceleración se hace nula y el cuerpo se mueve con velocidad constante. Si llamamos v_L a esa velocidad, se cumplirá:

$$\frac{4}{3}\pi\, r^3\, (\rho - \rho_o)\, g = 6\,\pi\,\eta\, v_L\, r$$

de donde:

$$v_L = \frac{2}{9}\,\frac{r^2\,(\rho - \rho_o)\, g}{\eta}$$

v_L recibe el nombre de **velocidad límite.**

7.- REGÍMENES LAMINAR Y TURBULENTO. NÚMERO DE REYNOLDS

Cuando la velocidad de un fluido en régimen laminar que circula por una tubería excede de un cierto **valor crítico**, v_c, (dependiente de las propiedades del fluido y del diámetro del tubo), la naturaleza del flujo deja de ser laminar y se hace extremadamente complicada. Dentro de una capa muy delgada contigua a las paredes del tubo, denominada **capa límite**, el flujo es todavía laminar. Su velocidad en la capa límite es nula en las paredes del tubo y aumenta uniformemente a través de ella. Las propiedades de la capa límite son de la máxima importancia para determinar la resistencia a fluir, y la transferencia de calor hacia o desde el fluido móvil.

Fuera de la capa límite, el movimiento es sumamente irregular. En el interior del fluido se producen, al azar, corrientes locales circulares denominadas **vórtices** o **torbellinos**, que originan un aumento considerable de la resistencia al movimiento. Un flujo de esta clase se dice que tiene un **régimen turbulento**. La experiencia indica que hay una combinación de cuatro factores que determina si un flujo es laminar o turbulento. Esta combinación se denomina **número de Reynolds**, N_R, y se define mediante la expresión:

$$N_R = \frac{\rho\, v_m\, D}{\eta}$$

donde ρ es la densidad del fluido, v_m su velocidad media hacia adelante, η el coeficiente de viscosidad y D el diámetro del tubo. (La velocidad media se define como la velocidad uniforme que ocasionaría el mismo gasto). El número de Reynolds es un número adimensional.

Todos los experimentos demuestran que si el número de Reynolds es inferior a **2000**, el flujo es **laminar**, mientras que por encima de **3000** es **turbulento**. Entre 2000 y 3000 es inestable y puede pasar de un régimen a otro.

Para $N_R = 2000$ la velocidad del fluido es la **velocidad crítica**, v_c, cuyo valor será:

$$v_c = \frac{2000\, \eta}{\rho\, D}$$

BIBLIOGRAFIA

*AGUILAR, J. "**Curso de Termodinámica**". Alhambra (Madrid). 1981.*

*CATALÁ, J. "**Física**". Saber (Valencia). 1988.*

*DE JUANA, J. M. "**Física General**" (tomo I). Alhambra (Madrid). 1985.*

*FERNÁNDEZ, J. y PUJAL, M. "**Iniciación a la Física**" (tomo I). Reverté (Barcelona). 1985.*

*GETTYS, W. E., KELLER, F. J. y SKOVE, M. J. "**Física clásica y moderna**". McGraw-Hill (Madrid). 1991.*

*IBÁÑEZ, J. A. y ORTEGA, M. R. "**Lecciones de Física: Termología**". Editan los autores (Barcelona). 1987.*

*MARÍN, F. "**Cerca de la Física**". Alhambra (Madrid). 1977.*

*RESNICK, R. y HALLIDAY, D. "**Física**" (tomo I). CECSA (México). 1984.*

*SEARS, F. W. "**Fundamentos de Física**" (tomo I: Mecánica, calor y sonido). Aguilar (Madrid). 1975.*

*SEARS, F. W. y ZEMANSKY, M. W. "**Física**". Aguilar (Madrid). 1979.*

*SERWAY, R. A. "**Física**". Interamericana (México). 1985.*