Tema 6: *Aplicaciones II*

Microeconomía Avanzada II

Iñigo Iturbe-Ormaeche

U. de Alicante

2008-09

Modelo de Stackelberg

- Es un modelo de oligopolio (hay varias empresas) y las empresas deciden su producción (como en Cournot)
- La diferencia con Cournot es que ahora hay una asimetría entre los competidores. Uno de ellos ("el líder") elige su producción antes que los demás
- Lo modelamos como un juego en dos etapas:

1. El líder decide su producción
2. Las demás empresas ("seguidoras") determinan simultáneamente su producción, **conociendo la producción del líder**

Caso lineal

- Nos centramos en el caso lineal. Hay 2 empresas con los mismos costes $c_i(q_i) = cq_i$, para $i = 1, 2$
- La demanda también es lineal, $P(Q) = M - dQ$, donde $Q = q_1 + q_2$. Suponemos $M > c \geq 0$ y $d > 0$
- La empresa 1 es la líder y la 2 es la seguidora
- Vamos a ver cuáles son los espacios de estrategias

Ejemplo sencillo

- Supongamos que la empresa 1 sólo puede producir tres cantidades diferentes. En concreto, supongamos que $S_1 = \{100, 150, 300\}$
- Respecto a la empresa 2, sabemos que cuando decide su producción, ya conoce lo que va a hacer la empresa 1. Por lo tanto, una estrategia de la empresa 2 debe especificar **cuánto producirá para cada posible elección de la empresa 1**
- Si la empresa 1 puede producir 100, 150, o 300, una estrategia de la empresa 2 debe especificar **cuánto producirá si la 1 produce 100, cuánto producirá si la 1 produce 150 y cuánto producirá si la 1 produce 300**
- Volvemos al caso general en el que la empresa 1 puede elegir cualquier cantidad positiva. Es decir, $S_1 = [0, +\infty)$

Conjunto de estrategias del seguidor

- Una estrategia de la empresa 2 debe especificar cúanto producirá para cada posible producción de la 1. Para describir esto **necesitamos especificar una función**
- Por ejemplo, una estrategia de la empresa 2 puede ser:

$$q_2 = \begin{cases} 200 - 10q_1 & \text{para } q_1 \leq 20 \\ 0 & \text{para } q_1 > 20 \end{cases}$$

- Otra estrategia de la empresa 2 puede ser producir 200 si la 1 produce más de 100, y producir 150 si la 1 produce menos de 100

Equilibrio perfecto en subjuegos

- Buscamos un **equilibrio perfecto en subjuegos** aplicando la inducción hacia atrás
- La empresa 2 observa q_1. Elige la cantidad q_2 que maximiza:

$$\max_{q_2} (M - dQ)q_2 - cq_2$$

- La condición de primer orden es:

$$M - dq_1 - 2dq_2 = c$$

- La mejor respuesta de la empresa 2 es:

$$q_2^*(q_1) = \frac{M - c - dq_1}{2d}$$

Decisión del líder

- La empresa 1 anticipa que la empresa 2 usará su mejor respuesta. Por lo tanto, la empresa 1 elige q_1 que maximice:

$$P(q_1 + q_2^*(q_1))q_1 - cq_1$$

- Es decir, el líder maximiza:

$$\begin{aligned} & \left(M - d\left(q_1 + \frac{M - c - dq_1}{2d}\right)\right) q_1 - cq_1 \\ = \quad & \left(\frac{M - c}{2} - \frac{d}{2} q_1\right) q_1 \end{aligned}$$

- Resolviendo obtenemos:

$$q_1^* = \frac{M - c}{2d}$$

Equilibrio

- Hay un único equilibrio perfecto en subjuegos. En dicho equilibrio, la estrategia de la empresa 1 es:

$$q_1^* = \frac{M - c}{2d}$$

- La estrategia de la empresa 2 en el equilibrio es:

$$q_2^*(q_1) = \frac{M - c - dq_1}{2d}$$

- La producción de la empresa 2 en el equilibrio es:

$$q_2^*(q_1^*) = \frac{M - c - dq_1^*}{2d} = \frac{M - c}{4d}$$

- **IMPORTANTE:** Diferenciar en el caso de la empresa 2 entre la estrategia de equilibrio y la producción en el equilibrio

Comparación con Cournot

- En el equilibrio de Cournot $q_1^C = q_2^C = \frac{(M-c)}{3d}$. Por lo tanto, $Q^C = \frac{2(M-c)}{3d}$ y $P^C = \frac{M+2c}{3}$. Finalmente, calculamos los beneficios:
$$\pi_1^C = \pi_2^C = \frac{(M-c)^2}{9d}$$
- En el equilibrio de Stackelberg, $q_1^* = \frac{M-c}{2d}$ y $q_2^* = \frac{M-c}{4d}$. La producción total es $Q^* = \frac{3(M-c)}{4d}$ y el precio es $P^* = \frac{M+3c}{4}$. Los beneficios son:
$$\begin{aligned}\pi_1^* &= \frac{(M-c)^2}{8d}\\ \pi_2^* &= \frac{(M-c)^2}{16d}\end{aligned}$$

Comparación con Cournot II

- El líder obtiene un beneficio mayor que en Cournot. Esto se debe a que tiene una ventaja al ser el primero en decidir
- Una vez que el líder ha decidido su producción, si el seguidor se desvía y elije una cantidad diferente de su mejor respuesta se perjudicaría a si mismo
- Por ejemplo, si produce más que en su mejor respuesta, el precio se reduce lo que hace que bajen los beneficios
- El seguidor podría anunciar al líder antes del comienzo del juego que, a no ser que el líder elija la producción del equilibrio de Cournot, va a elegir una cantidad que reduzca tremendamente los beneficios del líder. Por ejemplo, imaginemos que le anuncia que va a seguir la estrategia:

$$q_2 = s_2(q_1) = \begin{cases} \frac{(M-c)}{3d} & \text{si } q_1 = \frac{(M-c)}{3d} \\ \frac{M}{d} & \text{si } q_1 \neq \frac{(M-c)}{3d} \end{cases}$$

Amenazas no creíbles

- La situación en la que la empresa líder elige $q_1 = \frac{(M-c)}{3d}$ y la empresa 2 usa la estrategia de arriba, ¿es un equilibrio de Nash?
- Pero, ¿es creíble la amenaza? Si lo fuera, lo óptimo para el líder sería elegir $q_1 = \frac{(M-c)}{3d}$
- No obstante, la amenaza no es creíble ya que en caso de ejecutarla el seguidor saldría también perjudicado. Una vez que el líder ha elegido su estrategia, el seguidor obtiene un beneficio mayor si actúa de acuerdo a su función de mejor respuesta (su función de reacción). Por lo tanto, la amenaza no es creíble
- ¿Y si las empresas se enfrentan a un juego infinito?

Negociación colectiva

- En una economía hay un sindicato y una empresa. El sindicato es el único proveedor de empleo y tiene poder exclusivo sobre el salario. Por su parte, la empresa es quien decide la cantidad de trabajo
- El objetivo del sindicato es maximizar wL, donde w es el salario y L la cantidad de trabajo que emplea la empresa
- La empresa sólo usa trabajo en la producción. Su objetivo es elegir el nivel de empleo L que maximiza su beneficio:

  $$\max_{L} \pi(w, L) \equiv pf(L) - wL,$$

  donde p es el precio de venta de su producto y $f(L)$ es la función de producción de la empresa
- Suponemos que $f(L)$ es creciente y cóncava. Para simplificar, fijamos $p \equiv 1$

Estructura del juego

- El juego transcurre de la siguiente manera
  1. El sindicato fija un salario w
  2. La empresa toma w como dado y elige L
  3. Los pagos son wL para el sindicato y $\pi(w, L)$ para la empresa
- Resolvemos el juego usando la inducción hacia atrás, por lo que empezamos por la decisión de la empresa

Segunda etapa

- En la segunda etapa la empresa toma w como dado y decide L que maximiza su beneficio. La cpo es:

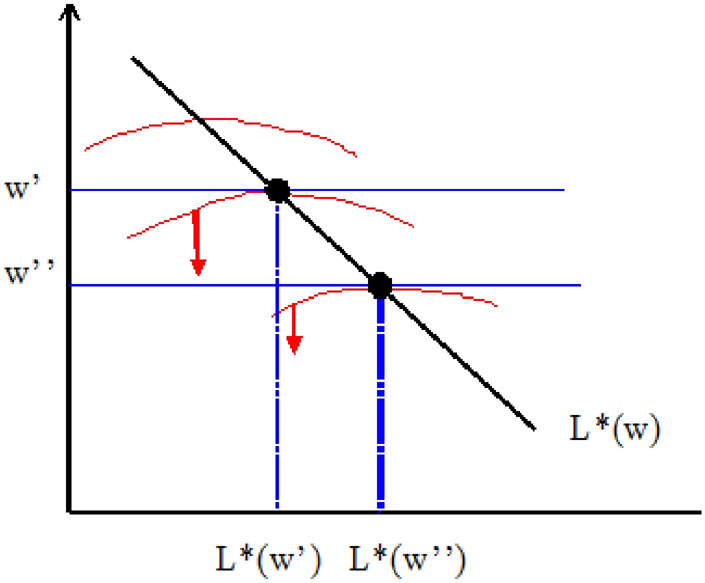
$$f'(L) = w.$$

- De ahí obtenemos la mejor respuesta de la empresa, $L^*(w)$. Nos indica la cantidad óptima de trabajo que empleará la empresa para cada posible salario que fije el sindicato
- Si aplicamos el teorema de la función implícita a la cpo:

$$\frac{\partial L^*(w)}{\partial w} = \frac{1}{f''(L)} < 0,$$

lo que significa que la empresa reduce la cantidad de trabajo cuando el salario aumenta

Mejor respuesta de la empresa



Primera etapa

- El sindicato anticipa que la empresa va a contratar de acuerdo a $L^*(w)$. Por tanto, el sindicato elige w para maximizar:

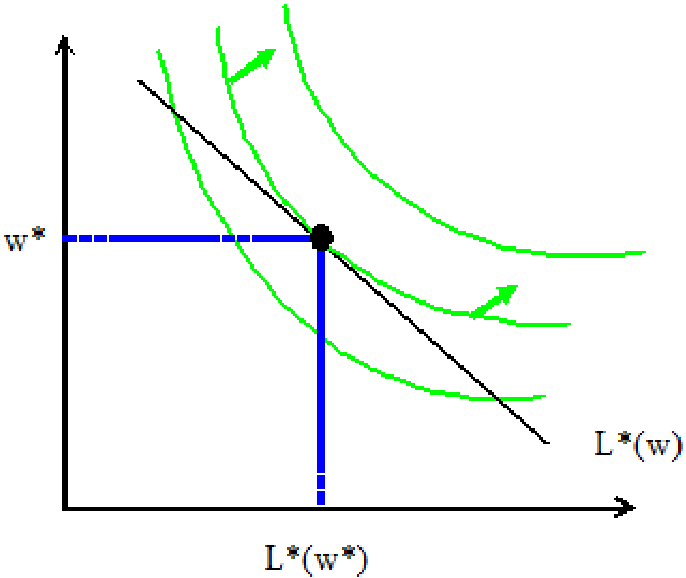
$$\max_{w} wL^*(w)$$

- La cpo es:

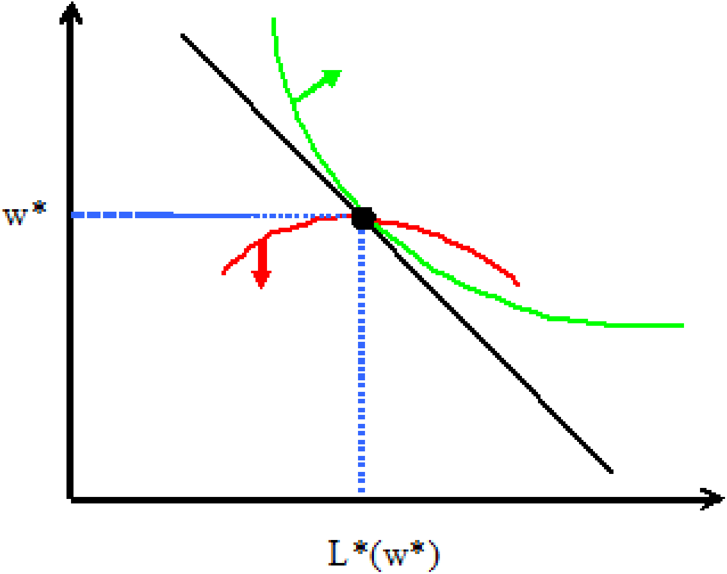
$$L^*(w) + w\frac{\partial L^*(w)}{\partial w} = 0$$

- La solución de este problema es w^*. Gráficamente, lo que hace el sindicato es elegir el punto de $L^*(w)$ en el que maximiza su objetivo wL
- Por lo tanto, el equilibrio de Nash es $(w^*, L^*(w))$, y la cantidad de empleo es $L^*(w^*)$

Representación gráfica del equilibrio



Ineficiencia del equilibrio



Dividir 1 euro

- Dos individuos tienen 1 euro y deben decidir cómo se lo reparten. Se han puesto de acuerdo en dedicar a lo sumo 3 días a negociar
- El primer día el jugador 1 hará una oferta. El jugador 2 puede aceptar la oferta o volver con una contraoferta al día siguiente. El jugador 1 puede aceptar la contraoferta o volver el tercer día con una oferta final. Si no se pueden poner de acuerdo en 3 días, ambos reciben cero
- Vamos a suponer que el jugador 1 descuenta los pagos futuros a la tasa α por día, mientras que el jugador 2 los descuenta a la tasa β por día. Es decir, 1 euro mañana para el jugador 1 equivale a recibir α euros hoy
- Para analizar el juego empezamos por el final, justo antes del último día

De atrás adelante

- El tercer día, lo óptimo para el jugador 1 es ofrecer al 2 la mínima cantidad que éste puede aceptar, esto es, 0. Por lo tanto, si el juego dura 3 días, el jugador 1 acabaría quedándose con todo el euro y el 2 se quedaría sin nada
- Ahora vamos al día anterior, que es cuando el 2 es quien propone. El 2 se da cuenta de que el 1 se puede asegurar 1 euro en el último día con sólo rechazar las ofertas del 2. Como 1 euro en el periodo siguiente es equivalente a α euros de este periodo, cualquier oferta por debajo de α euros será rechazada por el 1
- Para el 2 es mejor $1-\alpha$ ahora que 0 en el periodo siguiente. Entonces propondrá dar α al jugador 1, quien aceptará. Por tanto, si el juego acaba en el segundo día, el 1 se queda con α y el 2 con $1-\alpha$

Primera etapa

- El primer día es el 1 quien hace las ofertas
- El 1 se da cuenta de que el 2 puede conseguir $1-\alpha$ con sólo esperar hasta el día siguiente. El 1 debe ofrecer al 2 al menos una cantidad equivalente hoy a recibir $1-\alpha$ mañana
- En concreto, le ofrece $\beta(1-\alpha)$ y el 2 lo acepta
- El resultado final es que el juego acaba el primer día recibiendo el jugador 1 la cantidad $1-\beta(1-\alpha)$ y el jugador 2 la cantidad $\beta(1-\alpha)$
- Es importante ver que, a pesar de que hay 3 días, en el primero se acaba la negociación ya que el 2 acepta inmediatamente la oferta del 1
- Este juego se puede extender a cualquier número de días n. Obviamente el resultado se hace más complicado

Infinitos periodos

- Supongamos que n tiende a infinito. La interpretación es que no hay un periodo final a la negociación
- El reparto que surge del EPS (no lo vamos a probar) es:

$$\begin{aligned} \text{Pago del 1} &= \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} \\ \text{Pago del 2} &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta} \end{aligned}$$

- Vemos que si $\alpha = 1$ y $\beta < 1$, el 1 se lleva todo. Si $\beta = 1$ y $\alpha < 1$, ahora es el 2 el que se lleva todo. ¿Por qué?

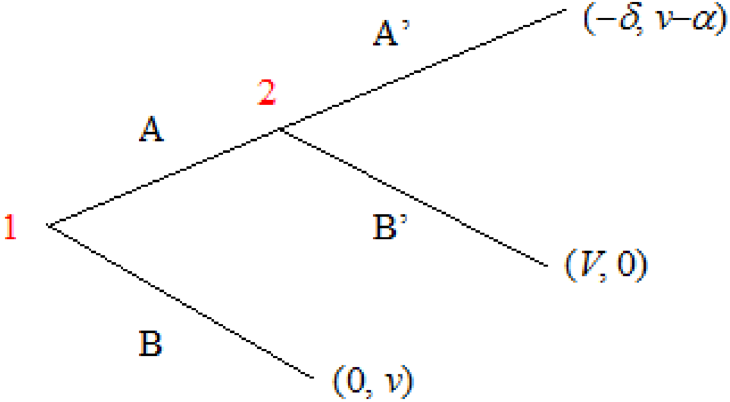
El problema

- Dos individuos reclaman un bien indivisible y un árbitro debe decidir a quién de los dos se le asigna
- El árbitro sabe que uno de los dos valora el objeto más que el otro y su interés es asignárselo a esa persona. El problema es que no sabe quién de los dos lo valora más
- Los individuos sí que saben quien es el que más lo valora
- Además el árbitro quiere conseguir su objetivo sin recibir nada a cambio y sin penalizar a ninguno de los dos
- ¿Qué puede hacer el árbitro para conseguir que se lo lleve quien más lo valora?
- Lo que va a hacer el árbitro es **diseñar un mecanismo** que le permita identificar a la persona que más valora el objeto

Ejemplo sencillo

- Suponemos que el conjunto de valoraciones posible es $\{V, v\}$, donde $V > v$. El planificador conoce los valores V y v pero no sabe qué individuo tiene la valoración V
- El planificador va a usar el siguiente mecanismo que consta de dos etapas
    1. Etapa 1: El individuo 1 debe decir si su valoración es la más alta (acción A) o no (acción B). Si elige B, el jugador 2 recibe el bien. Si elige A, se pasa a la siguiente etapa
    2. Etapa 2. El individuo 2 debe decir si acepta (acción B') o no (acción A') que el individuo 1 tiene la valoración más alta. Si elige B', el jugador 1 recibe el objeto. Si elige A', es el jugador 2 quien recibe el objeto a cambio de un pago α, donde $v < \alpha < V$. Además el jugador 1 debe pagar $\delta > 0$

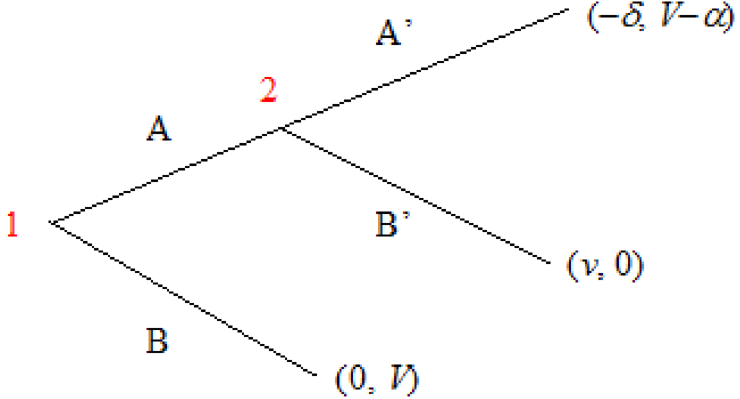
El 1 tiene la valoración alta V



Equilibrio perfecto

- En la segunda etapa, el jugador 2 (que es quien valora menos el objeto) prefiere elegir B', es decir, aceptar que es el 1 quien tiene la valoración más alta, ya que $0 > v - \alpha$
- En la primera etapa, el 1 anticipa que el 2 elegirá B', por lo que a su vez elige A, es decir, dice que es él quien tiene la valoración más alta
- Como vemos, en el equilibrio es el 1 quien recibe el objeto. Además nadie tiene que pagar nada

El 2 tiene la valoración alta V



Caso general

- Ahora el conjunto de valoraciones puede contener más de dos valores, aunque sigue siendo finito. Por ejemplo:

$$V = \{1, 3, 7, 14\}$$

- Hay 2 individuos y cada uno conoce su propia valoración $v_i \in V$ y la del contrario $v_j \in V$. Suponemos que $v_1 \neq v_2$
- Definimos η como la distancia mínima entre dos valoraciones:

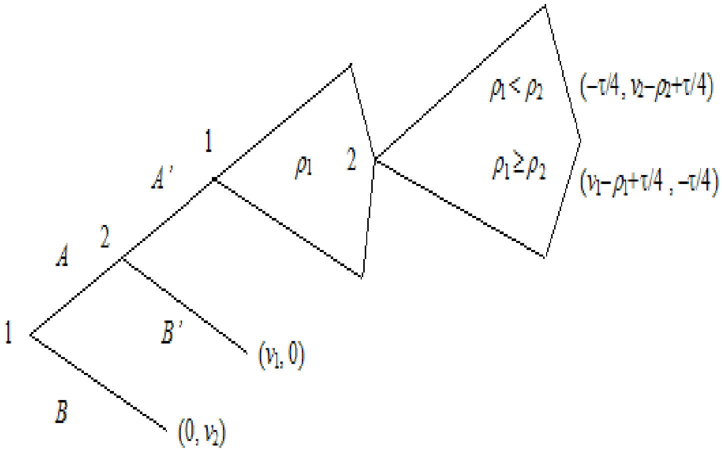
$$\eta = \min\{\mid v - v' \mid : v, v' \in V, v \neq v'\}$$

- En el ejemplo de arriba, $\eta = 2$
- Vamos a usar un mecanismo en 5 etapas

Mecanismo

- Etapa 1. El individuo 1 debe decir si su valoración es la más alta (acción A) o no (acción B). Si elige B, el jugador 2 recibe el bien. Si elige A, se pasa a la siguiente etapa
- Etapa 2. El individuo 2 debe decir si acepta (acción B') o no (acción A') que el individuo 1 tiene la valoración más alta. Si elige B', el jugador 1 recibe el objeto. Si elige A', se pasa a la siguiente etapa, y cada jugador debe pagar al árbitro la cantidad $\eta/4$ (que ya no se devuelve)
- Etapa 3. El individuo 1 anuncia una puja $\rho_1 \in V$
- Etapa 4. Conocido el valor ρ_1, el individuo 2 anuncia su propia puja $\rho_2 \in V$
- Etapa 5. El árbitro entrega el objeto al individuo que haya hecho la puja más alta. En caso de empate, se asigna al individuo 1. El que obtiene el bien tiene que pagar $\theta = \max\{\rho_1, \rho_2\} - \eta/2$

Forma extensiva del caso general



Etapa 4

- Los espacios de estrategias son $S_1 = \{A, B\} \times V$ y $S_2 = \{A', B'\} \times \{r : V \longrightarrow V\}$
- Definimos $\varphi(v) = \min\{v' \in V : v' > v\}$. Esto es, la valoración inmediatamente más alta que v
- Vamos a buscar el EPS empezando por la etapa 4
- El individuo 2 observa que el individuo 1 ha pujado ρ_1 ¿Qué es óptimo para el 2?
- Hay dos casos, dependiendo de si v_2 es menor o mayor que ρ_1

Etapa 4 (CASO 1)

- CASO 1: $\underline{v_2 \leq \rho_1}$. Aquí la puja del 1 ha sido muy elevada
- Si el individuo 2 puja $\rho_2 \leq \rho_1$, pierde la subasta y obtiene $-\eta/4$
- Si el individuo 2 puja $\rho_2 > \rho_1$, gana la subasta (pagando $\rho_2 - \eta/2$) y obtiene:

$$v_2 - (\rho_2 - \eta/2) - \eta/4 = v_2 - \rho_2 + \eta/4$$

- Como $v_2 \leq \rho_1$, para ganar la subasta debe pujar al menos $\varphi(v_2)$. Es decir, $\rho_2 \geq \varphi(v_2)$, o $-\rho_2 \leq -\varphi(v_2)$. Entonces, tenemos que:

$$v_2 - \rho_2 + \eta/4 \leq v_2 - \varphi(v_2) + \eta/4 \leq -\eta + \eta/4 = -3\eta/4,$$

ya que $\varphi(v_2) - v_2 \geq \eta$, o $v_2 - \varphi(v_2) \leq -\eta$

- En total, su mejor respuesta $r^*(\rho_1) \leq \rho_1$. Es decir, si $v_2 \leq \rho_1$, el individuo 2 prefiere **perder** la subasta

Etapa 4 (CASO 2)

- CASO 2: $\underline{v_2 > \rho_1}$
- Si el individuo 2 puja $\rho_2 \leq \rho_1$, pierde la subasta y obtiene $-\eta/4$
- Si el individuo 2 puja $\rho_2 > \rho_1$, gana la subasta y obtiene $v_2 - \rho_2 + \eta/4$. Esto es máximo cuando $\rho_2 = \varphi(\rho_1)$, es decir, cuando hace la mínima puja ganadora. Obtendría $v_2 - \varphi(\rho_1) + \eta/4$
- Como $v_2 - \varphi(\rho_1) + \eta/4 \geq \eta/4 > -\eta/4$, ahora prefiere **ganar** la subasta, y su mejor respuesta es $r^*(\rho_1) = \varphi(\rho_1)$
- Ahora pasamos a analizar la etapa 3, en la que el individuo 1 anticipa que el individuo 2 seguirá $r^*(\rho_1)$

Etapa 3

- En la etapa 3 el individuo 1 debe pensar qué puja hace anticipando que el 2 va a reaccionar de acuerdo a $r^*(\rho_1)$. En concreto, debe decidir si su puja es mayor o igual que v_2, lo que le permitiría ganar la subasta ya que el 2 no va a pujar por encima, o si por el contrario su puja es menor que v_2, con lo que anticipa que el 2 ganará
- Es decir, su elección se limita a decidir si $\rho_1 \geq v_2$ o si, por el contrario, $\rho_1 < v_2$
- En el primer caso, lo mejor es pujar $\rho_1 = v_2$, con lo que ganaría $v_1 - v_2 + \eta/4$. En el segundo caso obtiene $-\eta/4$. De nuevo hay dos casos, dependiendo de quien tiene la valoración más alta

El 1 tiene la valoración más alta

- En el caso en que $v_1 > v_2$, vemos que $v_1 - v_2 + \eta/4 > 0$, y el 1 prefiere ganar la subasta pujando $\rho_1^* = v_2$
- En la etapa 2 ambos individuos anticipan que, si se va a la subasta la ganará el jugador 1 haciendo una puja $\rho_1^* = v_2$
- Entonces, el 2 preferirá no ir a la subasta, es decir, elegirá B'
- En la etapa 1, el individuo 1 anticipa que el 2 no querrá ir a la subasta por lo que elegirá A. Es decir, el 1 empieza diciendo que su valoración es la más alta
- En resumen, con $v_1 > v_2$, un EPS es $\left[(A, v_2), (B', r^*(\cdot))\right]$, y el individuo 1 obtiene el objeto inmediatamente

El 2 tiene la valoración más alta

- Cuando $v_1 < v_2$ vemos que $v_1 - v_2 + \eta/4 \leq -\eta + \eta/4 = -3\eta/4 < -\eta/4$. Por lo tanto $\rho_1^* < v_2$, ya que el 1 prefiere ahora no ganar la subasta
- En la etapa 2, los individuos anticipan que, si se va a la subasta, el jugador 1 no la querrá ganar
- Como $\rho_1^* < v_2$, $v_2 - \varphi(\rho_1^*) + \eta/4 > 0$. Esto quiere decir que el 2 querrá ir a la subasta, ya que la va a ganar, por lo que elegirá A'
- El 1 anticipa esto y elige B, revelando que su valoración es la más baja
- Cuando $v_1 < v_2$, el EPS es $[(A', \rho_1^*), (B, r^*(\cdot))]$, y el individuo 2 obtiene el objeto inmediatamente

Conclusión

- En resumen, tanto si es el 1 como si es el 2 quien más valora el objeto, en cualquier EPS del juego el bien se adjudica al individuo con la valoración más alta, sin que al final se penalice a ningún jugador
- En ninguno de los dos casos se llega a la fase de subasta, ya que antes los individuos revelan quien es el que tiene la valoración más alta

Padre e hijo (Gary Becker)

- Un padre y un hijo participan en el juego siguiente. Primero el hijo elige una acción $A \geq 0$, que resulta en un ingreso para él, $I_H(A)$, y en un ingreso para el padre, $I_P(A)$. Por ejemplo, podríamos pensar que A es la educación que adquiere el hijo
- Suponemos que $I_H(A)$ y $I_P(A)$ son ambas estrictamente cóncavas y tienen un máximo en $A_H > 0$ y $A_P > 0$, respectivamente
- Posteriormente, el padre observa I_H y I_P y escoge qué herencia B le deja al hijo (positiva o negativa)
- La utilidad del hijo es $U(I_H + B)$. Es decir, el hijo es **"egoista"**
- La utilidad del padre es $V(I_P - B) + kU(I_H + B)$, con $k > 0$. Es decir, el padre es **"altruista"**
- Suponemos que U y V son estrictamente crecientes y estrictamente cóncavas

Segunda etapa (el padre)

- Vamos a probar que, en el equilibrio, el hijo escoge el valor de A que maximiza el ingreso **agregado** de la familia, $I_H(A) + I_P(A)$, a pesar de ser egoista
- Cuando el padre toma su decisión (la herencia) el valor de A está dado, ya que el hijo lo ha elegido con anterioridad. El padre resuelve:

$$\max_B V(I_P(A) - B) + kU(I_H(A) + B)$$

- La cpo del padre es:

$$-V'(I_P(A) - B^*) + kU'(I_H(A) + B^*) = 0,$$

de donde obtenemos $B^*(A)$, la mejor respuesta del padre

Primera etapa (el hijo)

- El hijo anticipa la respuesta óptima de su padre $B^*(A)$, y resuelve:

$$\max_A U(I_H(A) + B^*(A))$$

- La cpo del hijo es:

$$U'(I_H(A^*) + B^*(A^*)) \times (I_H'(A^*) + B^{*\prime}(A^*)) = 0$$

- Como $U' > 0$, la cpo del hijo es $I_H'(A^*) + B^{*\prime}(A^*) = 0$. ¿Qué hace el hijo si $B^{*\prime}(A^*) = 0$?
- Aplicando el Teorema de la función implícita en la cpo del padre:

$$B^{*\prime}(A^*) = -\left[\frac{-V'' I_P' + kU'' I_H'}{V'' + kU''}\right]$$

Equilibrio

- Si sustituimos en la cpo del hijo:

$$\begin{aligned} I_H'(A^*) + B^{*\prime}(A^*) &= I_H'(A^*) + \frac{V'' I_P' - kU'' I_H'}{V'' + kU''} = \\ \frac{V'' I_H' + V'' I_P'}{V'' + kU''} &= \frac{V''}{V'' + kU''}(I_H' + I_P') = 0 \end{aligned}$$

- Es decir, elige A^* tal que $I_H' + I_P' = 0$. A pesar de que el hijo es completamente egoista, elige A^* que maximiza el bienestar de la familia
- El padre ha conseguido dar los incentivos apropiados al hijo, al hacer depender la herencia del valor de A
- Según esto, ¿cuál sería el momento apropiado para dar la herencia al hijo?