Tema 4: *Aplicaciones del equilibrio de Nash*

Microeconomía Avanzada II

Iñigo Iturbe-Ormaeche

U. de Alicante

2008-09

Basado en Osborne (2004)

- Un grupo de **n** personas observa un crimen. Todos querrían que la policía reciba el aviso, pero prefieren que otro haga la llamada de teléfono
- En concreto, **v** es el valor que para cada individuo tiene el que la policía reciba el aviso. El coste de hacer la llamada es **c**. Suponemos que $\mathbf{v} > \mathbf{c} > \mathbf{0}$
- Esta situación se puede modelar como un juego en forma estratégica en el que los jugadores son las **n** personas, las estrategias puras son {T, NT}, donde T es "telefonear a la policía" y NT "no telefonear a la policía". Los pagos son 0 si nadie llama, $\mathbf{v} - \mathbf{c}$ para quien hace la llamada y **v** para quien no hace la llamada (si la hace otro)

Matriz de pagos cuando n=2

- En el caso **n = 2** podemos representar los pagos en una matriz:

1\2	T	NT
T	v-c, v-c	v-c, v
NT	v, v-c	0, 0

- Vemos que hay dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (T, NT) y (NT, T). En cada uno de ellos sólo una persona llama
- Para el caso general, hay **n** equilibrios en estrategias puras, en cada uno de los cuales llama una sola persona
- Todos ellos son equilibrios asimétricos y cuál de ellos se produce puede depender de las normas sociales. Por ejemplo, hace la llamada la persona de más edad

Equilibrio en estrategias mixtas

- Este juego tiene un equilibrio (simétrico) en estrategias mixtas en el que cada uno hace la llamada con la misma probabilidad $\mathbf{p}$
- En este equilibrio, el pago esperado de T debe ser igual al de NT
- El pago esperado de T es $\mathbf{v-c}$. El de NT es:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{Pr}\{\text{alguno de los otros llama }\} +$$
$$+\mathbf{0} \times \mathbf{Pr}\{\text{ninguno de los otros llama}\}$$

- Pero la probabilidad de que ninguno de los otros llame es $(\mathbf{1-p})^{\mathbf{n-1}}$. ¿Por qué?
- Por lo tanto, el pago esperado de NT es $\mathbf{v} \times (\mathbf{1} - ((\mathbf{1-p})^{\mathbf{n-1}}))$
- Al igualar ambos pagos, obtenemos que $\mathbf{c/v} = (\mathbf{1-p})^{\mathbf{n-1}}$, o que $\mathbf{p}^* = \mathbf{1} - (\mathbf{c/v})^{\mathbf{1/(n-1)}}$

Interpretación del equilibrio

- En el equilibrio cada uno llama con probabilidad $\mathbf{p^* = 1 - (c/v)^{1/(n-1)}}$. Es fácil ver que $\mathbf{p^*}$ disminuye con el tamaño del grupo **n.** ¿Por qué?
- Pero, ¿qué ocurre con la probabilidad de que nadie llame?
- Esta probabilidad es $\mathbf{(1 - p^*)^n} = \mathbf{(c/v)^{n/(n-1)}}$. Lo sorprendente es que esta probabilidad, ¡crece con el tamaño del grupo **n**! Cuanto mayor es el tamaño del grupo, más probable es que la policía no sea informada del crimen
- Por ejemplo, si $\mathbf{c = 1, v = 3}$, la probabilidad de que nadie llame es 1/9=0.11 cuando $\mathbf{n = 2}$, es de 0.19 cuando $\mathbf{n = 3}$, es de 0.295 cuando $\mathbf{n = 10}$ y es de 0.329 cuando $\mathbf{n = 100}$

Qué es un oligopolio

- Un oligopolio es una estructura de mercado que se encuentra entre el monopolio y la competencia perfecta
- Hay un número pequeño de empresas, y cada una de ellas puede afectar al precio de mercado
- Por lo tanto, cada empresa sabe que puede afectar al precio de mercado, pero también sabe que las demás también lo pueden afectar
- La empresa tiene que pensar, no sólo cómo responderán los consumidores a sus decisiones de producción, sino también cómo responderán las otras empresas. Por lo tanto, tendremos que modelar la interacción estratégica entre las empresas

Modelo de Cournot

- En el modelo de Cournot las empresas deciden simultáneamente la cantidad que quieren producir. El precio es el que vacía el mercado
- Si hay dos empresas (duopolio) que producen $\mathbf{q_1}$ y $\mathbf{q_2}$, el precio de mercado es $\mathbf{P(Q)}$ donde $\mathbf{Q = q_1 + q_2}$.
- Suponemos que las dos empresas tienen la misma función de costes $\mathbf{c(q_i)}$
- Vamos a ver cómo es el problema de maximización de cada empresa. Es importante recordar que cada empresa elige su producción para maximizar sus beneficios, tomando como dada la producción de la otra empresa

Problema de maximización

- La empresa 1 resuelve el problema:

$$\max_{\mathbf{q_1}} \mathbf{P(q_1+q_2)q_1 - c(q_1)}$$

- La empresa 2 resuelve el problema:

$$\max_{\mathbf{q_2}} \mathbf{P(q_1+q_2)q_2 - c(q_2)}$$

- En el formato de Teoría de Juegos tenemos un juego en forma estratégica:
  1. Jugadores: las 2 empresas
  2. Estrategias: $\mathbf{S_i} = [\mathbf{0}, +\infty)$
  3. Pagos: las funciones de beneficios

Condiciones de primer orden

- Resolvemos el problema de la primera empresa y obtenemos la CPO:
$$\mathbf{P}'(\mathbf{q}_1^*+\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_1 + \mathbf{P}(\mathbf{q}_1^*+\mathbf{q}_2) = \mathbf{c}'(\mathbf{q}_1^*)$$
- Esta condición es diferente de la que obteníamos en competencia perfecta por el primer término de la izquierda. Ahora la empresa tiene en cuenta que un aumento de la producción reduce el precio de venta
- A partir de aquí podríamos obtener la función de mejor respuesta de la empresa 1, $\rho_1(\mathbf{q}_2)$ (la de la 2 se obtiene de forma similar)
- En un equilibrio de Nash, cada jugador debe elegir una mejor respuesta a la estrategia de su rival. Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^* &= \rho_1(\mathbf{q}_2^*) \\ \mathbf{q}_2^* &= \rho_2(\mathbf{q}_1^*) \end{aligned}$$

Caracterización del equilibrio de Nash

- Si sustituimos las cantidades óptimas en las CPO, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(\mathbf{q}_1^*+\mathbf{q}_2^*)\mathbf{q}_1^* + \mathbf{P}(\mathbf{q}_1^*+\mathbf{q}_2^*) &= \mathbf{c}'(\mathbf{q}_1^*) \\ \mathbf{P}'(\mathbf{q}_1^*+\mathbf{q}_2^*)\mathbf{q}_2^* + \mathbf{P}(\mathbf{q}_1^*+\mathbf{q}_2^*) &= \mathbf{c}'(\mathbf{q}_2^*) \end{aligned}$$

- Si $\mathbf{q}_1^* = \mathbf{q}_2^* = \mathbf{q}^*$, entonces:

$$\mathbf{P}'(2\mathbf{q}^*)\mathbf{q}^* + \mathbf{P}(2\mathbf{q}^*) = \mathbf{c}'(\mathbf{q}^*)$$

- Si sólo hubiese una empresa (monopolio), la producción óptima $\mathbf{q}^{\mathbf{M}}$ sería:

$$\mathbf{P}'(\mathbf{q}^{\mathbf{M}})\mathbf{q}^{\mathbf{M}} + \mathbf{P}(\mathbf{q}^{\mathbf{M}}) = \mathbf{c}'(\mathbf{q}^{\mathbf{M}})$$

- ¿Qué relación hay entre la producción total y los precios del duopolio y los del monopolio?
- ¿Y con la producción total y el precio de competencia perfecta?

Relación con monopolio

- Vemos que $\mathbf{2q^* > q^M}$ y, por tanto, $\mathbf{P(2q^*) < P(q^M)}$. Primero probamos que $\mathbf{2q^* \geq q^M}$.
- Supongamos que $\mathbf{2q^* < q^M}$. Entonces una de las empresas, p. ej. la 1, podría aumentar su producción a $\mathbf{\widehat{q}_1 = q^M - q^*}$ obteniendo más beneficios, ya que los beneficios máximos totales corresponden a la producción de monopolio. Como esto además reduce el precio, la empresa 2 estará peor. Por tanto, $\mathbf{2q^* \geq q^M}$
- Ahora vemos que $\mathbf{2q^* \neq q^M}$ y, por tanto, $\mathbf{2q^* > q^M}$. Si $\mathbf{2q^* = q^M}$, sustituyendo en la ecuación de arriba:

$$\mathbf{P'(q^M)\frac{q^M}{2} + P(q^M) = c'(\frac{q^M}{2})},$$

contradiciendo la CPO del monopolio. Por tanto, $\mathbf{2q^* > q^M}$ y $\mathbf{P(2q^*) < P(q^M)}$

Ejemplo lineal

- Suponemos una demanda lineal $\mathbf{P(Q) = M - dQ}$ y costes lineales $\mathbf{c(q_i) = cq_i}$
- La empresa 1 resuelve el problema:

$$\max_{\mathbf{q_1}} (\mathbf{M - d(q_1 + q_2))q_1 - cq_1}$$

- La empresa 2 resuelve el problema:

$$\max_{\mathbf{q_2}} (\mathbf{M - d(q_1 + q_2))q_2 - cq_2}$$

- La CPO de la empresa 1 es:

$$\mathbf{-dq_1^* + M - d(q_1^* + q_2^*) = c}$$

- La CPO de la empresa 2 es:

$$\mathbf{-dq_2^* + M - d(q_1^* + q_2^*) = c}$$

Computando el equilibrio

- Resolvemos las dos condiciones y obtenemos $\mathbf{q_1^* = q_2^* = \frac{M-c}{3d}}$
- La cantidad total producida es $\mathbf{Q}^* = \mathbf{q_1^* + q_2^* = \frac{2(M-c)}{3d}}$. El precio es $\mathbf{P}^* = \mathbf{\frac{M+2c}{3}}$
- En comparación, en competencia perfecta $\mathbf{Q}^{CP} = \mathbf{\frac{M-c}{d}}$ y $\mathbf{P^{CP} = c}$
- Si fuese un monopolio, la producción sería $\mathbf{q^M = \frac{M-c}{2d}}$ y el precio $\mathbf{P^M = \frac{M+c}{2}}$

Competencia en precios

- Ahora en lugar de suponer que las empresas eligen cuánto producir, vamos a suponer que eligen sus precios, y el mercado determina la cantidad de forma que el mercado se vacía
- Puede parecer un cambio pequeño, pero el equilibrio de Nash cambia radicalmente
- Suponemos que hay dos empresas con los mismos costes $\mathbf{c(q_i) = cq_i}$
- Tenemos que ver qué precios ponen las empresas en el equilibrio. Ahora, si una empresa pone un precio más bajo que su rival se lleva todos los consumidores
- Vamos a ver que el único equilibrio es $\mathbf{p_1^* = p_2^* = c}$

Equilibrio

- Si ambos eligen $\mathbf{p_1^* = p_2^* = c}$, ambos tienen beneficios cero
- Obviamente, a ninguna le interesa cambiar a $\mathbf{p < c}$
- Por otro lado, si alguna cambia a $\mathbf{p > c}$ también obtiene un beneficio de cero, ya que nadie le va a comprar
- Dado que nadie puede mejorar estrictamente eligiendo otro precio, $\mathbf{p_1^* = p_2^* = c}$ es un equilibrio
- Para ver que es único, supongamos que las empresas eligen los precios $\mathbf{p_1 \leq p_2}$. Obviamente $\mathbf{p_1 \geq c}$. Pero si $\mathbf{p_1 = c + \alpha}$, con $\mathbf{\alpha > 0}$, esto nunca puede ser un equilibrio. ¿Por qué?
- Por lo tanto, la que pone el precio más bajo debe poner el precio igual a $\mathbf{c}$
- ¿Puede ser un equilibrio $\mathbf{p_1 = c}$ y $\mathbf{p_2 = c + \beta}$?

Bertrand con n empresas

- Ahora suponemos que hay n empresas con la misma función de costes $\mathbf{c(q_i) = cq_i}$
- La demanda es $\mathbf{F(p)}$
- Una combinación de estrategias es:

$$\mathbf{p \equiv (p_1, p_2, .., p_n)}$$

- Los consumidores compran a quien vende más barato. En caso de empate, la demanda se reparte entre todas las empresas con el precio más bajo
- Definimos $\theta(\mathbf{p}) = \text{mín}\,\{\mathbf{p_1, p_2, .., p_n}\}$
- El beneficio de la empresa **i** es:

$$\pi_{\mathbf{i}}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{p_i} > \theta(\mathbf{p}) \\ (\mathbf{p}_i - \mathbf{c}) \dfrac{\mathbf{F}(\theta(\mathbf{p}))}{\#\{\mathbf{j} \in \mathbf{N} : \mathbf{p}_j = \theta(\mathbf{p})\}} & \text{si } \mathbf{p_i} = \theta(\mathbf{p}) \end{cases}$$

Equilibrio con n empresas

- El equilibrio de Bertrand es una combinación de estrategias $(\mathbf{p_1^*}, .., \mathbf{p_n^*})$ tal que se cumplen dos condiciones:
  1. $\theta(\mathbf{p}^*) = \mathbf{c}$
  2. $\#\{\mathbf{j} \in \mathbf{N} : \mathbf{p_j^*} = \theta(\mathbf{p}^*)\} \geq \mathbf{2}$
- En el equilibrio los beneficios de todas las empresas son cero. La competencia en precios es tan fuerte que se llega al equilibrio competitivo
- Para este resultado sólo hacen falta dos empresas
- ¿Qué ocurriría si las empresas tienen limitada su capacidad de producción?

Productos diferenciados

- Hay dos empresas con la misma función de costes $\mathbf{c(q_i) = cq_i}$
- La demanda inversa de la empresa 1 es $\mathbf{p_1(q_1, q_2) = M - q_1 - b\, q_2}$ y la de la empresa 2 es $\mathbf{p_2(q_1, q_2) = M - q_2 - b\, q_1}$, donde $\mathbf{b} \in \mathbf{(-1, +1)}$ es un parámetro que mide el grado en que ambos productos son **sustitutivos**
- Podemos obtener la función de demanda de la empresa 1 (la de la 2 es similar) como:

$$F_1(p_1, p_2) = \frac{M}{1+b} - \frac{1}{1-b^2}p_1 + \frac{b}{1-b^2}p_2$$

- Los beneficios de la empresa 1 son:

$$\mathbf{\pi_1(p_1,p_2) = (p_1 - c)F_1(p_1,p_2)}$$

Equilibrio

- Si derivamos respecto a $\mathbf{p_1}$ obtenemos la función de mejor respuesta de la empresa 1 (la de la 2 es similar):

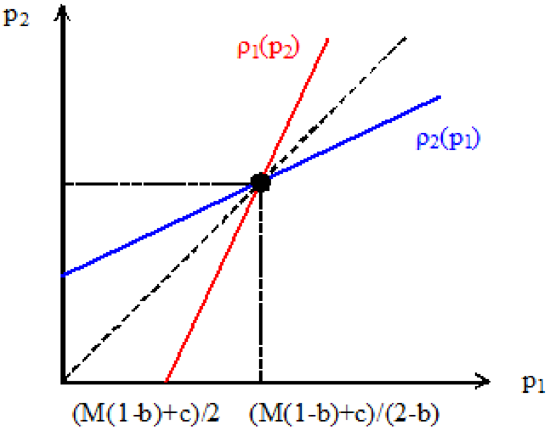
$$\rho_1(\mathbf{p_2}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left[\mathbf{M}(\mathbf{1}-\mathbf{b})+\mathbf{c}+\mathbf{b}\mathbf{p}_2\right]$$

- Resolviendo, computamos el equilibrio:

$$\mathbf{p_1^*} = \mathbf{p_2^*} = \frac{\mathbf{M}(\mathbf{1}-\mathbf{b})+\mathbf{c}}{\mathbf{2}-\mathbf{b}}$$

- Si son sustitutos perfectos $(\mathbf{b}=\mathbf{1})$, tenemos $\mathbf{p_1^*} = \mathbf{p_2^*} = \mathbf{c}$
- Si no son sustitutos perfectos $(\mathbf{b}<\mathbf{1})$, entonces $\mathbf{p_1^*} = \mathbf{p_2^*} > \mathbf{c}$

Caso b>0



Bienes públicos

- Un bien público es un bien que tiene dos características:
  1. No existe **rivalidad** en el consumo, ya que el consumo de un bien público por un individuo no reduce las posibilidades de consumo de otros individuos
  2. No son **excluyentes**, porque cuesta mucho excluir a cualquier individuo del disfrute de las ventajas de un bien público
- Ejemplos clásicos: la defensa nacional, la vista de un paisaje, un faro, el alumbrado público, etc
- Hay un grupo de N personas que quieren invertir en un bien público
- Suponemos que el bien produce un beneficio G si se invierte c(G) en él. Suponemos $c''(G)>0$
- Vamos a ver cuánto se invierte en el bien público

Eficiencia

- Primero vemos cuál es la cantidad eficiente de bien público
- La cantidad eficiente es la que maximiza los beneficios totales netos para la sociedad:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{G}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G} - \mathbf{C}(\mathbf{G}) \\ = \ & \max_{\mathbf{G}} \mathbf{NG} - \mathbf{C}(\mathbf{G}) \end{aligned}$$

- La solución óptima es $\mathbf{C}'(\mathbf{G}^*) = \mathbf{N}$
- Ahora vamos a ver cuál es la solución si cada individuo decide de forma individual cuánto invierte en el bien público

Equilibrio de Nash

- En el equilibrio de Nash, cada uno decide cuánto invertir, tomando como dado lo que hacen los demás
- Consideramos al individuo $\mathbf{i}$. La contribución de todos los demás es $\mathbf{G_{-i}}$. El individuo $\mathbf{i}$ resuelve:

$$\max_{\mathbf{g}} (\mathbf{g} + \mathbf{G_{-i}}) - \mathbf{C}(\mathbf{g} + \mathbf{G_{-i}})$$

- La CPO es $\mathbf{C}'(\mathbf{g}^* + \mathbf{G_{-i}}) = \mathbf{1}$
- Si todos invierten lo mismo en el bien público, entonces $\mathbf{G_{-i}} = (\mathbf{N}-\mathbf{1})\mathbf{g}^*$, por lo que tenemos $\mathbf{C}'(\mathbf{N}\mathbf{g}^*) = \mathbf{1}$, y la cantidad total de bien público es $\widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{N}\mathbf{g}^*$ que cumple $\mathbf{C}'(\widehat{\mathbf{G}}) = \mathbf{1}$. Obviamente $\widehat{\mathbf{G}} < \mathbf{G}^*$
- Este es el problema del polizón ("free-rider"). Cada individuo no piensa en el beneficio que el bien público da a los demás, por lo que no invierte suficiente en él