Tema 3 *Conceptos básicos de solución*

Microeconomía Avanzada II

Iñigo Iturbe-Ormaeche

U. de Alicante

2008-09

Introducción

- Vamos a estudiar la cuestión de si existe una predicción obvia de cómo van a jugar los jugadores y, por tanto, de cuál será el resultado del juego
- Para ello suponemos que los jugadores son **racionales**
  ¿Cuál es el significado de racionalidad?
- *"El comportamiento de una persona es racional si es en su mejor interés, dada su información"*
  Robert Aumann, premio Nobel 2005
- En un juego la mejor acción de un jugador depende, en general, de las acciones que eligen los demás

El dilema del prisionero

- Vemos una variante del dilema del prisionero

1\2	C	N
C	2,2	0,3
N	3,0	1,1

- El jugador 1: si elige C obtiene 2 o 0. Si elige N obtiene 3 o 1
- Por tanto, para el jugador 1 la estrategia N es mejor que C tanto si el 2 elige C como si elige N
- Es decir, N es mejor para el jugador 1 haga lo que haga el jugador 2

Estrategia dominante

- La estrategia $\mathbf{s}_i$ es una **estrategia estrictamente dominante** para el jugador **i** si para toda combinación de estrategias del resto de jugadores $\mathbf{s}_{-i} \in \mathbf{S}_{-i}$, donde $\mathbf{S}_{-i} \equiv \mathbf{S}_0 \times .. \times \mathbf{S}_{i-1} \times \mathbf{S}_{i+1} \times .. \times \mathbf{S}_n$:

$$\pi_i(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) > \pi_i(\mathbf{s}_i', \mathbf{s}_{-i}), \text{ para toda } \mathbf{s}_i' \in \mathbf{S}_i \ .$$

- Esto es, para cualquier cosa que hagan los demás, esa estrategia le proporciona un pago mayor
- **Predicción:** Si todos y cada uno de los jugadores tienen una estrategia dominante, todos ellos la emplearán
- Esto se llama **equilibrio en estrategias dominantes**
  En el dilema del prisionero, el EED es (N,N)
- **Problema:** en la mayor parte de los juegos los individuos no tienen una estrategia dominante, por lo que no existe en general un EED

Estrategias dominadas

- Una estrategia está dominada si existe otra estrategia que es mejor para el jugador, independientemente de lo que hagan los demás
- **Definición:** La estrategia $\mathbf{s}_i$ es una **estrategia estrictamente dominada** para el jugador **i** si existe otra estrategia $\mathbf{s}'_i$ tal que, para toda combinación de estrategias del resto de jugadores $\mathbf{s}_{-i} \in \mathbf{S}_{-i}$:
$$\pi_i(\mathbf{s}'_i, \mathbf{s}_{-i}) > \pi_i(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_{-i}).$$
- **Predicción:** Un jugador nunca usará una estrategia estrictamente dominada

Ejemplo 1

- ¿Cuál es nuestra predicción en este juego?

		2 A	2 B	2 C
	X	2,2	4,4	5,3
1	Y	4,4	7,7	6,2
	Z	3,5	2,6	8,8

- Ambos tienen una estrategia dominada (X para el 1 y A para el 2)

Ejemplo 2

- ¿Y ahora?

		2		
		A	B	C
	X	5,2	1,1	0,3
1	Y	4,4	7,2	6,1
	Z	3,5	2,6	4,3

- Aquí sólo el 1 tiene una estrategia dominada (Z)

Ejemplo 3

- ¿Y aquí?

		2: A	2: B
1	X	1,2	1,0
1	Y	3,4	0,2
1	Z	0,5	3,6

- Parece que ninguna estrategia está dominada. No obstante, X está dominada por la estrategia mixta (0,1/2,1/2)
- Jugando X, el 1 obtiene 1 si el 2 juega A y 1 si el 2 juega B
- Jugando (0,1/2,1/2) el 1 obtiene (1/2)*3+(1/2)*0=3/2 si el 2 juega A y (1/2)*0+(1/2)*3=3/2 si el 2 juega B
- Si la estrategia $\mathbf{s}_i$ está dominada, también lo está cualquier estrategia mixta que asigna a $\mathbf{s}_i$ probabilidad positiva

Eliminación iterativa

- En general la eliminación de estrategias dominadas no nos lleva muy lejos. A veces podemos usar un procedimiento que nos puede llevar más allá. Se llama **eliminación iterativa de estrategias dominadas**
- Para poder aplicar este procedimiento necesitamos el supuesto de **conocimiento común de racionalidad** ("common knowledge of rationality")

Ejemplo 4

- Vemos un juego con dos jugadores, Epi y Blas

		Blas		
		A	B	C
	X	2,0	1,3	0,10
Epi	Y	4,4	7,2	4,1
	Z	3,5	5,7	10,4

- ¿Qué juega Epi si cree que Blas elige al azar? ¿Y Blas?
- Si Epi es un jugador racional, nunca elegirá X
- Si Blas sabe que Epi es un jugador racional, puede descartar X. Pero entonces Blas descarta C
- Si Epi sabe que Blas sabe que Epi es racional, puede anticipar que Blas no jugará C. Ahora Epi descarta Z
- Si Blas...., puede anticipar que Epi no jugará Z. Ahora Blas descarta B. Resultado (Y,A)

Conocimiento común de racionalidad

- El supuesto de conocimiento común de racionalidad es un supuesto muy exigente. Una cierta información (por ejemplo, que Epi es racional) es conocimiento común si:
  - todos los jugadores lo saben
  - y todos los jugadores saben que todos los jugadores lo saben
  - y todos los jugadores saben que todos los jugadores saben que todos los jugadores lo saben
  - y todos los jugadores......
- Conocimiento común no es simplemente que cierto hecho sea conocido por todos, sino también que todos saben que el hecho es conocido por todos, etc.

Ejemplo 5

- Dos ejércitos aliados en colinas opuestas preparados para atacar a un enemigo que se encuentra en el valle. Ninguno de los dos generales ordenará el ataque hasta estar seguro de que el otro atacará al mismo tiempo
- El general del Este envía un mensajero al general del Oeste con el mensaje:
  "Atacaré mañana a las 9"
- El trayecto del mensajero es peligroso y puede ser atrapado antes de entregar el mensaje. Supongamos que llega a la otra colina y entrega el mensaje
- ¿Estamos seguros de que ambos atacarán a las 9:00?
- Conocimiento común significa no sólo que ambos tienen cierta información, sino también que están seguros de que los demás lo saben, ...

Equilibrio de Nash

- El equilibrio de Nash es el concepto central de equilibrio en Teoría de Juegos
- **Definición:** Dado un juego en forma estratégica, una combinación de estrategias $\mathbf{s}^* \equiv \left(\mathbf{s}_1^*, \mathbf{s}_2^*, ..., \mathbf{s}_n^*\right)$ es un **equilibrio de Nash** (en estrategias puras) si para todo $\mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \mathbf{n}$ y para toda estrategia $\mathbf{s}_i \in \mathbf{S}_i$:

$$\pi_\mathbf{i}\left(\mathbf{s}_\mathbf{i}^*, \mathbf{s}_{-\mathbf{i}}^*\right) \geq \pi_\mathbf{i}\left(\mathbf{s}_\mathbf{i}, \mathbf{s}_{-\mathbf{i}}^*\right)$$

- En un equilibrio de Nash nadie cuenta con una desviación **unilateral** beneficiosa. Dadas las estrategias de los demás en el equilibrio, ninguna estrategia alternativa le da a ese jugador un pago mayor

Ejemplo 6: batalla de los sexos

- Volvemos al ejemplo del chico y la chica:

A\O	C	F
C	3,2	1,1
F	0,0	2,3

- Hay cuatro combinaciones de estrategias puras: (C,C),(C,F),(F,C) y (F,F)
- Hay dos equilibrios de Nash: (C,C) y (F,F)
- Vemos cuál es la mejor respuesta de un jugador para las estrategias del otro
- Si el chico hace C, la mejor respuesta es C. Si hace F, la mejor respuesta es F
- Si la chica hace C, la mejor respuesta es C. Si hace F, la mejor respuesta es F

Ejemplo 7: pares o nones

- De nuevo el ejemplo de pares y nones:

1\2	P	N
P	-6,6	6,-6
N	6,-6	-6,6

- Hay 4 combinaciones de estrategias puras: (P,P),(P,N),(N,P) y (N,N)
- Ninguna de ellas es un equilibrio de Nash en estrategias puras
- No obstante, sí que existe un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. En él, ambos juegan la estrategia mixta (1/2,1/2). Es un equilibrio porque a ningún jugador le interesa desviarse

Interpretaciones del Equilibrio de Nash

- Es una condición necesaria de consistencia. Si hacemos una predicción que no es un equilibrio de Nash siempre hay al menos un jugador con incentivos a desviarse
- Es una condición necesaria si hay una forma obvia de jugar. Si todos los jugadores están de acuerdo en que existe una combinación de estrategias que es la forma obvia de jugar, entonces debe ser un equilibrio de Nash
- Es un **acuerdo creíble**. Puede que los jugadores se comuniquen antes de jugar y lleguen a un acuerdo sobre cómo jugar. Si no están obligados a cumplirlos, los acuerdos deben contar con la característica de que los individuos no tengan incentivos a desviarse unilateralmente. Si lo que han acordado es un equilibrio de Nash, no tienen interés en desviarse del acuerdo

Existencia de equilibrio de Nash

- **Teorema** (Nash, 1951): Todo juego finito en forma estratégica tiene un equilibrio de Nash
- Finito se refiere a N y S
- **Problema:** Es posible que se trate de un equilibrio en estrategias mixtas
- Cuando el juego es sencillo, podemos comprobar todas las combinaciones de estrategias posibles para buscar un equilibrio. Cuando el juego es más complejo, es muy útil usar el concepto de **mejor respuesta**
- **Definición:** La correspondencia de mejor respuesta del jugador **i** es $\boldsymbol{\rho}_i : \boldsymbol{\Sigma}_{-i} \longrightarrow \boldsymbol{\Sigma}_i$ tal que:

$$\boldsymbol{\rho}_i(\boldsymbol{\sigma}_{-i}) = \{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{i}}^* \in \boldsymbol{\Sigma}_i\text{:}\ \boldsymbol{\pi}_i\ (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{i}}^*, \boldsymbol{\sigma}_{-i}) \geq \boldsymbol{\pi}_i\ (\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i})\ \}$$

$$\text{para toda } \boldsymbol{\sigma}_i \in \boldsymbol{\Sigma}_i$$

Mejor respuesta y equilibrio de Nash

- En el ejemplo de la batalla de sexos, $\rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{C}) = \{\mathbf{C}\}$ y $\rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}) = \{\mathbf{F}\}$ (lo mismo para el chico)
- Hemos introducido las correspondencias de mejor respuesta por el siguiente resultado:
  Una combinación de estrategias $\sigma^* \equiv (\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*)$ es un equilibrio de Nash si:

$$\sigma_i^* \in \rho_i\left(\sigma_{-i}^*\right) \text{ para todo } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \mathbf{n}$$

- Es decir, cada jugador usa una estrategia que es una mejor respuesta a las estrategias de los demás jugadores
- Si tenemos sólo dos individuos, esto es simplemente:
  Una combinación de estrategias (σ_1^*, σ_2^*) es un equilibrio de Nash si:

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &\in \rho_1\left(\sigma_2^*\right) \\ \sigma_2^* &\in \rho_2\left(\sigma_1^*\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 8

- Dos individuos deben decidir cuánto esfuerzo ponen en un trabajo común. Si ambos ponen más esfuerzo, ambos están mejor
- Los niveles de esfuerzo son $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \geq \mathbf{0}$. Además $\mathbf{c} > \mathbf{0}$
- Los pagos son:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &= \mathbf{a}_1(\mathbf{c} + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \\
\mathbf{u}_2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &= \mathbf{a}_2(\mathbf{c} + \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)
\end{aligned}
$$

- Es decir, para un nivel dado de esfuerzo del otro, tu pago primero crece y luego decrece. En concreto, dado $\mathbf{a}_2$, el pago del 1 crece para $\mathbf{a}_1 < (\mathbf{c} + \mathbf{a}_2)/\mathbf{2}$ y decrece para $\mathbf{a}_1 > (\mathbf{c} + \mathbf{a}_2)/\mathbf{2}$
- Cada jugador tienes infinitas acciones posibles, por lo que no podemos representar este juego en una matriz. Vamos a usar las correspondencias de mejor respuesta

Ejemplo 8 (continuación)

- Para un valor dado de $\mathbf{a}_2$, la mejor respuesta del 1 es:

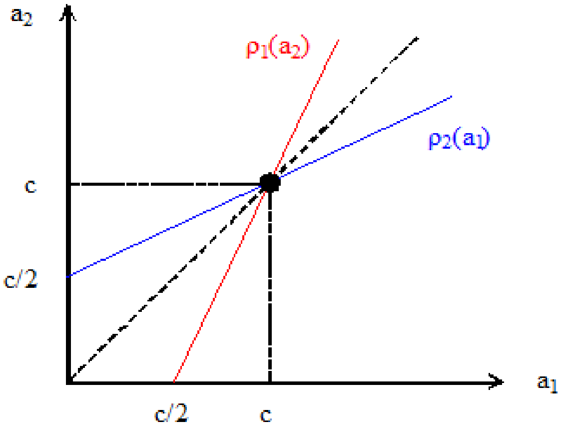
$$\rho_1(\mathbf{a}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a}_2)$$

- De la misma forma, la mejor respuesta del 2 para un $\mathbf{a}_1$ dado es:

$$\rho_2(\mathbf{a}_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a}_1)$$

- Vamos a dibujarlas en un gráfico en el que $\mathbf{a}_1$ lo representamos en el eje horizontal y $\mathbf{a}_2$ lo representamos en el eje vertical
- El punto en el que se cortan ambas será un equilibrio de Nash, ya que en ese punto ambos están eligiendo una acción que es una mejor respuesta a lo que hace el otro

Representación gráfica



Ejemplo 8 (final)

- Para calcular el equilibrio de Nash buscamos $(\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*)$ para el cual se cumpla que $\mathbf{a}_1^* = \boldsymbol{\rho}_1(\mathbf{a}_2^*)$ y que $\mathbf{a}_2^* = \boldsymbol{\rho}_2(\mathbf{a}_1^*)$
- Por lo tanto, $(\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*)$ tiene que cumplir:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^* &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{c} + \mathbf{a}_2^*) \\ \mathbf{a}_2^* &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{c} + \mathbf{a}_1^*) \end{aligned}$$

- Finalmente obtenemos $\mathbf{a}_1^* = \mathbf{a}_2^* = \mathbf{c}$

Batalla de los sexos

- Los pagos eran:

A\O	C	F
C	3,2	1,1
F	0,0	2,3

- Computamos todos los equilibrios de Nash. Llamamos $(\sigma_A, 1-\sigma_A)$ a la estrategia de la chica y $(\sigma_O, 1-\sigma_O)$ a la del chico
- Si la chica juega C, gana $3\sigma_O + 1 - \sigma_O = 2\sigma_O + 1$. Si juega F, gana $2(1-\sigma_O)$. Vemos que:

$$2\sigma_O + 1 \geq 2(1-\sigma_O) \iff \sigma_O \geq 1/4$$

- La correspondencia de mejor respuesta de la chica es:

$$\rho_A(\sigma_O) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } \sigma_O > 1/4 \quad (\text{gana } 2\sigma_O + 1) \\ [0,1] & \text{si } \sigma_O = 1/4 \quad (\text{gana } 3/2) \\ \{0\} & \text{si } \sigma_O < 1/4 \quad (\text{gana } 2(1-\sigma_O)) \end{cases}$$

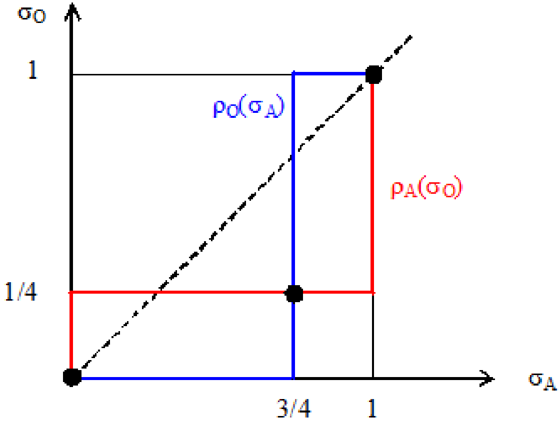
Batalla de los sexos 2

- La correspondencia de mejor respuesta del chico es:

$$\rho_O(\sigma_A) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } \sigma_A > 3/4 \quad (\text{gana } 2\sigma_A) \\ [0,1] & \text{si } \sigma_A = 3/4 \quad (\text{gana } 3/2) \\ \{0\} & \text{si } \sigma_A < 3/4 \quad (\text{gana } 3 - 2\sigma_A) \end{cases}$$

- En este juego hay 3 equilibrios de Nash. Gráficamente son los puntos en los que se cruzan las correspondencias de mejor respuesta de ambos jugadores:
  1. $(\sigma_A = 1, \sigma_O = 1)$
  2. $(\sigma_A = 0, \sigma_O = 0)$
  3. $(\sigma_A = 3/4, \sigma_O = 1/4)$

Representación gráfica



Pares o nones

- Matriz de pagos:

1\2	P	N
P	-6,6	6,-6
N	6,-6	-6,6

- En el único equilibrio de Nash ambos usan la estrategia mixta (1/2,1/2)
- Sup. 2 usa (2/3,1/3). La mejor respuesta del 1 es N. Es decir, jugar la estrategia mixta (0,1). ¿Por qué?
- Jugando P gana (2/3)(-6)+(1/3)(6)=-2. Jugando N gana (2/3)(6)+(1/3)(-6)=2. Jugando P con probabilidad σ_1 y N con probabilidad $1-\sigma_1$ gana:

$$-2\sigma_1+2(1-\sigma_1)=2-4\sigma_1$$

- Lo mejor que puede hacer es $\sigma_1=0$. Es decir, jugar la estrategia pura N (o estrategia mixta $(0,1)$)

Pares o nones 2

- Pero si el 1 juega N, la mejor respuesta del 2 no es la estrategia mixta (2/3,1/3), sino jugar N (estrategia mixta $\mathbf{(0,1)}$)
- Para que sea un equilibrio de Nash cada uno de ellos debe estar jugando una estrategia que sea una mejor respuesta a la estrategia del otro
- Las correspondencias de mejor respuesta son:

$$\rho_1(\sigma_2) = \begin{cases} \{\mathbf{1}\} & \text{si } \sigma_2 < \mathbf{1/2} \quad (\text{gana } \mathbf{6} - \mathbf{12}\sigma_2) \\ [\mathbf{0},\mathbf{1}] & \text{si } \sigma_2 = \mathbf{1/2} \quad (\text{gana } 0) \\ \{\mathbf{0}\} & \text{si } \sigma_2 > \mathbf{1/2} \quad (\text{gana } \mathbf{12}\sigma_2 - \mathbf{6}) \end{cases}$$

$$\rho_2(\sigma_1) = \begin{cases} \{\mathbf{1}\} & \text{si } \sigma_1 > \mathbf{1/2} \quad (\text{gana } \mathbf{12}\sigma_1 - \mathbf{6}) \\ [\mathbf{0},\mathbf{1}] & \text{si } \sigma_1 = \mathbf{1/2} \quad (\text{gana } 0) \\ \{\mathbf{0}\} & \text{si } \sigma_1 < \mathbf{1/2} \quad (\text{gana } \mathbf{6} - \mathbf{12}\sigma_1) \end{cases}$$

- Si las dibujamos vemos que el único equilibrio es $\sigma_1 = \sigma_2 = \mathbf{1/2}$

Equilibrio en estrategias mixtas

- **Una propiedad interesante y muy útil:** En todo juego finito en forma estratégica se cumple que, si en un equilibrio de Nash un jugador usa una estrategia mixta que asigna a dos o más estrategias puras una probabilidad positiva, entonces **el jugador debe tener el mismo pago esperado con cada una de dichas estrategias puras**
- **Ejemplo de pares o nones**:
  El jugador 1 con P gana $\mathbf{6 - 12\sigma_2}$, mientras que con N gana $\mathbf{12\sigma_2 - 6}$.
- Si en el equilibrio juega ambas (P y N) con probabilidad positiva:

$$\mathbf{6 - 12\sigma_2 = 12\sigma_2 - 6 \Longleftrightarrow \sigma_2 = 1/2}$$

- Esto no es una propiedad suficiente para un equilibrio de Nash, pero si una propiedad **necesaria.** Es muy útil para computar equilibrios en estrategias mixtas

Piedra, papel, tijera

- Calculamos el equilibrio de este juego:

		Jugador 2		
		Piedra	Papel	Tijera
	Piedra	0, 0	-1, 1	1, -1
Jugador 1	Papel	1, -1	0, 0	-1, 1
	Tijera	-1, 1	1, -1	0, 0

- No hay equilibrio de Nash en estrategias puras. Si el jugador 2 juega piedra, papel, tijera con probabilidades $\mathbf{1 - q_1 - q_2}$, $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$, respectivamente
- Los pagos esperados para el 1 de usar piedra, papel, tijera deben ser iguales. Por lo que $\mathbf{q_1 = q_2 = 1/3}$

Lanzamiento de penalties

- Los pagos eran:

J\P	I	D
I	60,40	95,5
D	90,10	70,30

- Estrategias mixtas $(\sigma, 1-\sigma)$ y $(\mu, 1-\mu)$
- J gana $95 - 35\mu$ si tira a la izquierda o $70 + 20\mu$ si tira a la derecha
- P gana $10 + 30\sigma$ si se lanza a la izquierda o $30 - 25\sigma$ si se lanza a la derecha
- En un equilibrio, debe ocurrir:

$$95 - 35\mu = 70 + 20\mu \iff \mu = 5/11 (\approx 45\,\%)$$
$$10 + 30\sigma = 30 - 25\sigma \iff \sigma = 4/11 (\approx 36\,\%)$$

Dilema del prisionero (¡de nuevo!)

- A un resultado de un juego le llamamos resultado **cooperativo** si ningún jugador puede garantizarse un resultado mejor para sí mismo. En general un resultado cooperativo NO es un equilibrio. Es el resultado de un acuerdo
- En el dilema del prisionero el resultado en el que nadie confiesa es un resultado cooperativo.
- Vemos otro ejemplo, de nuevo con Epi y Blas:

	Aceptar	**C**astigar
Reparto **J**usto	10, 10	0, 0
Reparto **C**odicioso	100, 1	0, 0

- Epi decide entre un reparto justo (10 para cada uno) o un reparto codicioso
- Blas debe decidir si acepta el reparto o no. En este segundo caso Blas opta por algo que les perjudica a ambos

Los contratos favorecen la cooperación

- El resultado **(J,A)** es un resultado cooperativo, ya que ningún jugador puede garantizarse más para sí mismo. No obstante, no es un equilibrio
- Los resultados cooperativos son interesantes porque, aunque no sean un equilibrio, pueden ser alcanzados por medio de un acuerdo en aquellos contextos en que los acuerdos sean de obligado cumplimiento
- Si los contratos son de obligado cumplimiento Epi y Blas pueden obtener el resultado cooperativo **(J,A).** Si no es así, **(J,A)** no es posible de obtener

La repetición favorece la cooperación

- Si el juego de antes se juega una sola vez, Epi preferirá C y Blas se conformará con A. A Blas no le gustará mucho, pero no puede hacer nada para evitarlo
- Ahora imaginemos que lo jueguen un número indeterminado de veces. Por ejemplo, todos los días
- Ahora Blas puede **amenazar** a Epi con castigarle (elegir C para siempre), si en alguna ocasión Epi elige C. Ahora esto es un equilibrio de Nash. Las estrategias en concreto son:
    - Para Epi: Jugar J siempre
    - Para Blas: Jugar A mientras Epi juegue J; si Epi juega C alguna vez, jugar C para siempre
- Ahora lo que mantiene el equilibrio es la amenaza del castigo. Bob Aumann lo llama "MAD: Mutual assured destruction"

La tasa de descuento

- Para que esto funcione hace falta que la tasa de descuento no sea muy alta. Si Epi tiene una tasa de descuento muy elevada, da muy poca importancia a las ganancias futuras y sólo se preocupa por el presente
- Si la tasa de descuento es δ, jugando J siempre Epi gana $\mathbf{10/(1-\delta)}$. Si, por el contrario, elige C su ganancia es 100. Por lo tanto, si $\delta < \mathbf{9/10}$ la cooperación es imposible. A pesar de que Blas le va a castigar para siempre, Epi prefiere elegir J