Tema 2 *Juegos: marco teórico general*

Microeconomía Avanzada II

Iñigo Iturbe-Ormaeche

U. de Alicante

2008-09

El dilema del prisionero

- La Teoría de Juegos estudia la **interdependencia estratégica** que surge cuando varios individuos, con intereses en conflicto, interactúan tomando decisiones.
- Un juego es un **modelo** de dicha interacción
- **El dilema del prisionero**: Dos jugadores: Epi y Blas
- Dos estrategias: D (delatar al otro), N (no delatar al otro)
- Pagos: Negativo de los años de cárcel

El dilema del prisionero 2

- Matriz de pagos

1\2	**D**	**N**
D	$\mathbf{-10, -10}$	$\mathbf{0, -12}$
N	$\mathbf{-12, 0}$	$\mathbf{-1, -1}$

- Los dos individuos deciden **simultáneamente** (otra interpretación: deciden sin conocer la decisión del otro)
- **Predicción:** (D, D). Haga lo que haga el otro, D es mejor que N
  En el tema siguiente veremos que D es una **estrategia dominante**
- Problema: Con (N, N) ambos están mejor

El juego del bien público

- Dos jugadores cada uno con 100 euros
- Tienen que decidir cómo dividen los 100 euros entre una cuenta privada y una cuenta común. Cada euro puesto en la cuenta común produce 0,75 euros para **ambos**
- Si ambos ponen todo en la cuenta privada, cada uno acaba con 100
- Si ambos ponen 50 en la cuenta común, acaban con $50 + 75 = 125$
- Si ambos ponen 100 en la cuenta común, acaban con $200 * 0{,}75 = 150$

La batalla de los sexos

- Dos jugadores: Un chico y una chica
- Dos estrategias: C (ir de compras), F (ir al fútbol)
- Pagos: Ambos prefieren estar juntos, pero la chica prefiere C y el chico prefiere F

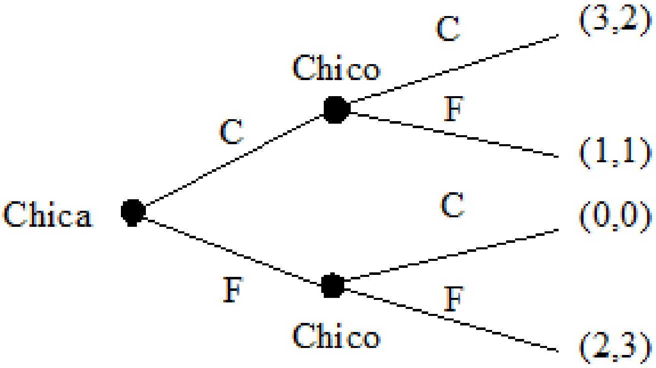
A\O	C	F
C	3, 2	1, 1
F	0, 0	2, 3

- **Predicción:** No hay una única predicción: (C, C) y (F, F)

La batalla de los sexos 2

- Igual que antes pero ahora la chica decide primero ir a uno de los dos lugares. Desde allí telefonea al chico
- Ahora es un juego secuencial y se representa mediante un árbol:
- **Predicción:** (C, C)

Representación



El juego de demandas de Nash

- Dos jugadores. Hay z euros para repartir entre ambos
- Cada uno pide una cantidad (lo hacen simultáneamente)
  Llamamos x a lo que pide el 1, y a lo que pide el 2
- Si $x + y \leq z$, cada uno recibe lo que ha pedido
  Si $x + y > z$, no reciben nada
- **PREDICCIÓN:** ??

Forma extensiva

- La forma extensiva trata de reflejar la estructura secuencial de un juego. Podemos distinguir entre juegos con información perfecta y juegos con información imperfecta
  1. **Juegos con información perfecta:** cuando un jugador debe decidir, conoce perfectamente todo lo que ha ocurrido anteriormente
  2. **Juegos con información imperfecta:** cuando un jugador debe decidir, puede que no conozca perfectamente todo lo que ha ocurrido antes
- Para representar un juego en forma extensiva necesitamos conocer: 1) el conjunto de jugadores; 2) el orden de los sucesos; 3) el orden de movimiento; 4) las acciones posibles; 5) los conjuntos de información; 6) los pagos.

Conjunto de jugadores y orden de sucesos

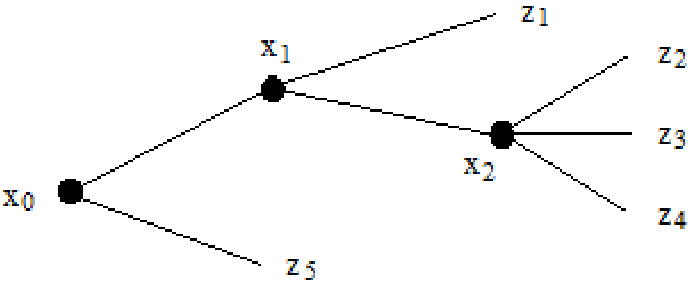
- **1. Conjunto de jugadores**

$$\mathbf{N = \{0, 1, 2, .., n\}}$$

El 0 representa la naturaleza (si interviene) y sirve para resolver la incertidumbre. Por ejemplo, cuando tiramos una moneda al aire para ver quién empieza a jugar

- **2. Orden de los sucesos**
  Se representa mediante un conjunto de nodos K sobre el que se define una **relación de precedencia** R

Nodos y relación de precedencia



- Aquí los nodos son $\mathbf{K} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_5\}$
- Aquí $\mathbf{x}_0 \mathbf{R} \mathbf{x}_2$ se lee como "x_0 precede o va antes de x_2"
- R es: i) IRREFLEXIVA, ii) TRANSITIVA

Precedencia inmediata

- Definimos la relación de precedencia **inmediata** P. Ahora $\mathbf{x}_0\mathbf{P}\mathbf{x}_1$ se lee como "x_0 va inmediatamente antes de x_1"
- Predecesores inmediatos de x :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}' \in \mathbf{K} : \mathbf{x}'\,\mathbf{P}\mathbf{x}\}$$

- Sucesores inmediatos de x :

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}' \in \mathbf{K} : \mathbf{x}\mathbf{P}\mathbf{x}'\,\}$$

- Dos propiedades:
  a) Existe un único nodo inicial (o raíz) x_0
  b) Para todo nodo x ($\neq x_0$) existe un único camino de predecesores que une a x con x_0 (entonces $P(x)$ tiene un único elemento)
- El conjunto de nodos finales es $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z} \in \mathbf{K} : \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{z}) = \varnothing\}$. Cada nodo final se interpreta como una posible **jugada** o **historia** del juego

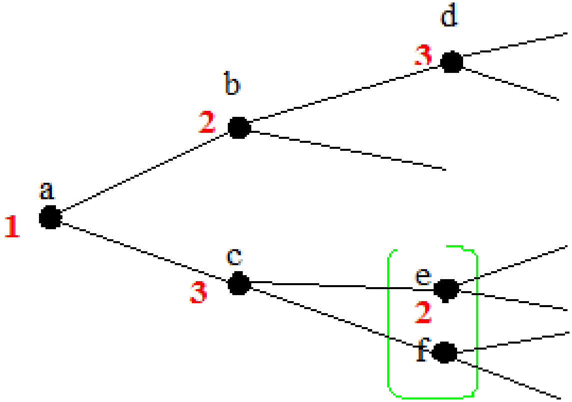
Orden de movimiento y acciones

- **3. Orden de movimiento**
  Se representa mediante una partición de $K - Z$ en subconjuntos $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, .., \mathbf{K}_n$
  K_i contiene los nodos en los que le corresponde al jugador i elegir una acción
- **4. Acciones posibles**
  $A(x)$: conjunto de acciones disponibles para el jugador que decide en x
  Sabemos que $A(x) = P^{-1}(x)$
  Es decir, las acciones son los nodos que siguen a x

Conjuntos de información

- **5. Conjuntos de información**
  Tratamos de representar la información de que dispone un jugador cada vez que tiene que tomar una decisión
- Para ello hacemos una partición de K_i a la que llamamos H_i
  Los elementos de H_i se llaman **conjuntos de información**
- Cada conjunto de información $h \in H_i$ está formado por nodos que el jugador no puede distinguir cuándo debe tomar una acción. Es decir, si $x, x' \in h$, entonces $A(x) = A(x')$

Ejemplo



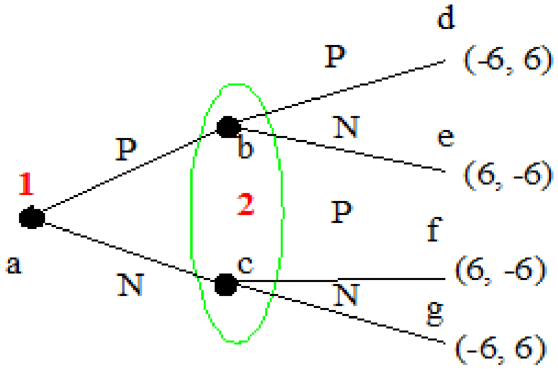
- Aquí tenemos $\mathbf{K}_1 = \{\mathbf{a}\}, \mathbf{K}_2 = \{\mathbf{b}, \mathbf{e}, \mathbf{f}\}, \mathbf{K}_3 = \{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$
- El individuo 2 tiene dos conjuntos de información:

$$\mathbf{K}_2 = \{\{\mathbf{b}\}, \{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}\}$$

Pagos

- **6. Pagos**
  Cada nodo final $\mathbf{z}_j \in \mathbf{Z}$ tiene asociado un vector de pagos $\pi^j \in \mathbf{R}^n$ (n jugadores)
  π_i^j es el pago del jugador i en el resultado $\mathbf{z}_j$
- **Ejemplo: Pares o nones**
  Dos jugadores eligen simultáneamente "pares" o "nones"
  Si los dos eligen lo mismo, el jugador 1 le paga 6 euros al jugador 2
  Si eligen diferente, es el 2 el que paga 6 euros al jugador 1

Representación



- Tenemos $N = \{1, 2\}$; $K_1 = \{a\}$, $K_2 = \{b, c\}$
- $A(a) = \{P, N\}$, $A(b) = A(c) = \{P, N\}$
- $H_1 = \{\{a\}\}, H_2 = \{\{b, c\}\}$
- $A(\{b, c\}) = \{P, N\}$

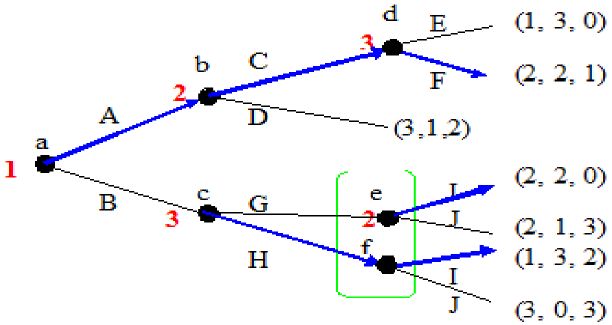
Concepto de estrategia

- Para un jugador una **estrategia** (pura) en un juego es un conjunto de reglas contingentes que prescriben qué acción debe tomar en cada uno de sus conjuntos de información
- Formalmente, una estrategia s_i del jugador i se define como:

$$s_i : H_i \longrightarrow A_i,$$

donde $A_i = \cup_{h \in H_i} A(h)$

Estrategias de los jugadores



- El 1 tiene 2 estrategias: $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$
- El 2 tiene dos conjuntos de información: $\{\mathbf{b}\}$ y $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$. En el primero elige entre **C** y **D**. En el segundo entre **I** y **J**. Por lo tanto tiene **cuatro** estrategias: $\{\mathbf{CI}, \mathbf{CJ}, \mathbf{DI}, \mathbf{DJ}\}$
- El 3 tiene 4 estrategias: $\{\mathbf{GE}, \mathbf{GF}, \mathbf{HE}, \mathbf{HF}\}$

Forma estratégica o normal

- Un juego se puede representar en forma estratégica como:

$$\{\mathbf{N}, \{\mathbf{S}_i\}_{i=0}^{n}, \{\pi_i\}_{i=1}^{n}\}$$

- Aquí $\mathbf{S}_i$ es el espacio de estrategias de **i**
  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 \times \mathbf{S}_1 \times .... \times \mathbf{S}_n$
- $\pi_i : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{R}$ es la función de pagos de i
  $\pi(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}_n)$ es el pago de **i** con la combinación de estrategias $(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}_n)$
- En el ejemplo anterior, ¿Cuántas estrategias hay en $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ y $\mathbf{S}_3$?
- Además vemos que **S** tiene 32 elementos. Es decir, hay 32 combinaciones posibles de estrategias
- ¿Cuáles son los pagos con la combinación $(\mathbf{A}, \mathbf{DI}, \mathbf{GF})$?

Estrategias mixtas

- En ocasiones nos encontraremos con situaciones en las que los jugadores eligen estrategia mediante un procedimiento aleatorio
- Por ejemplo, si mi espacio de estrategias es $\mathbf{S} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ puedo hacer lo siguiente. Lanzo una moneda al aire. Si sale cara, elijo **A**. Si sale cruz, elijo **B**
- En general, dado el conjunto $\mathbf{S}_i$ de estrategias puras de **i,** una **estrategia mixta** $\sigma_i : \mathbf{S}_i \longrightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ es una **distribución de probabilidad sobre las estrategias puras**
- La estrategia mixta σ_i asigna a cada estrategia pura $\mathbf{s}_i \in \mathbf{S}_i$ una probabilidad $\sigma_i(\mathbf{s}_i) \geq \mathbf{0}$ con la que será jugada. Por tanto:

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(\mathbf{s}_i) = \mathbf{1}$$

Función de pagos con estrategias mixtas

- Llamamos $\boldsymbol{\Sigma}_i$ al conjunto de estrategias mixtas de **i**
- Extendemos la función de pagos al conjunto de combinaciones de estrategias mixtas $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_1 \times .. \times \boldsymbol{\Sigma}_n$. Para cada $\sigma \in \boldsymbol{\Sigma}$ **:**

$$\pi_i\,(\sigma) = \sum_{s \in S} \underbrace{\sigma_0(\mathbf{s}_0)\sigma_1(\mathbf{s}_1)\ldots\sigma_n(\mathbf{s}_n)}_{\textbf{Probabilidad de jugar } (\mathbf{s}_1,..,\mathbf{s}_n)} \pi_i(\mathbf{s}),$$

es el pago del jugador i

Penalties (Ignacio Palacios-Huerta)

- Dos jugadores: el jugador que lanza el penalty y el portero que trata de pararlo
- El jugador puede lanzar al balón a la izquierda o a la derecha. El portero se puede tirar a la izquierda o a la derecha
- Ambos tienen el mismo conjunto de estrategias $\{\mathbf{I}, \mathbf{D}\}$
- Pagos:

J\P	**I**	**D**
I	$\mathbf{60, 40}$	$\mathbf{95, 5}$
D	$\mathbf{90, 10}$	$\mathbf{70, 30}$

- El primer número lo podemos interpretar como la probabilidad de acierto (y el segundo la de fallo)

Cómputo de los pagos

- Con sólo estrategias puras la función de pagos es: $\pi_J(\mathbf{I},\mathbf{I}) = \mathbf{60}$, $\pi_J(\mathbf{I},\mathbf{D}) = \mathbf{95}$, $\pi_J(\mathbf{D},\mathbf{I}) = \mathbf{90}$, $\pi_J(\mathbf{D},\mathbf{D}) = \mathbf{70}$; $\pi_P(\mathbf{I},\mathbf{I}) = \mathbf{40}$, $\pi_P(\mathbf{I},\mathbf{D}) = \mathbf{5}$, $\pi_P(\mathbf{D},\mathbf{I}) = \mathbf{10}$, $\pi_P(\mathbf{D},\mathbf{D}) = \mathbf{30}$
- Llamamos $(\sigma, \mathbf{1} - \sigma)$ a la estrategia mixta de **J** y $(\mu, \mathbf{1} - \mu)$ a la estrategia mixta de **P**
- El pago esperado de **J** si tira a la izquierda (si elige **I**) es:

$$\mathbf{60}\mu + \mathbf{95}(\mathbf{1} - \mu) = \mathbf{95} - \mathbf{35}\mu$$

- El pago esperado de **J** si tira a la derecha (si elige **D**) es:

$$\mathbf{90}\mu + \mathbf{70}(\mathbf{1} - \mu) = \mathbf{70} + \mathbf{20}\mu$$

Cómputo de los pagos 2

- Por lo tanto, el pago esperado de **J** jugando la estrategia mixta $(\sigma, 1-\sigma)$ es:

$$\begin{aligned} & \sigma(95-35\mu)+(1-\sigma)(70+20\mu) \\ = \;& 70+25\sigma+20\mu-55\sigma\mu \end{aligned}$$

- Por ejemplo, si $\sigma = \mu = 1/2$, el pago esperado para **J** es 78.75

Cómputo de los pagos 3

- También podemos calcular que el pago esperado de **P** si se tira a la izquierda es $\mathbf{40}\sigma + \mathbf{10}(\mathbf{1} - \sigma) = \mathbf{30}\sigma + \mathbf{10}$ y si se tira a la derecha es $\mathbf{5}\sigma + \mathbf{30}(\mathbf{1} - \sigma) = -\mathbf{25}\sigma + \mathbf{30}$
- Por lo tanto, jugando la estrategia mixta $(\mu, \mathbf{1} - \mu)$ el pago esperado del portero es:

$$\begin{aligned} & \mu(\mathbf{30}\sigma + \mathbf{10}) + (\mathbf{1} - \mu)(-\mathbf{25}\sigma + \mathbf{30}) \\ = \ & \mathbf{30} - \mathbf{25}\sigma - \mathbf{20}\mu + \mathbf{55}\sigma\mu \end{aligned}$$

- Si $\sigma = \mu = \mathbf{1/2}$, el pago esperado para el portero **P** es 21.25 (100-78.75)