Rosabel Roig-Vila (Ed.)

La docencia en la Enseñanza Superior

Nuevas aportaciones desde la investigación e innovación educativas

universidad

Octaedro

Rosabel Roig-Vila (Ed.)

La docencia en la Enseñanza Superior. Nuevas aportaciones desde la investigación e innovación educativas

Octaedro
Editorial

La docencia en la Enseñanza Superior. Nuevas aportaciones desde la investigación e innovación educativas

Edición:
Rosabel Roig-Vila

Comité científico internacional
Prof. Dr. Julio Cabero Almenara, Universidad de Sevilla
Prof. Dr. Antonio Cortijo Ocaña, University of California at Santa Barbara
Profa. Dra. Floriana Falcinelli, Università degli Studi di Peruggia
Profa. Dra. Carolina Flores Lueg, Universidad del Bío-Bío
Profa. Dra. Chiara Maria Gemma, Università degli studi di Bari Aldo Moro
Prof. Manuel León Urrutia, University of Southampton
Profa. Dra. Victoria I. Marín, Universidad de Oldenburgo
Prof. Dr. Enric Mallorquí-Ruscalleda, Indiana University-Purdue University, Indianapolis
Prof. Dr. Santiago Mengual Andrés, Universitat de València
Prof. Dr. Fabrizio Manuel Sirignano, Università degli Studi Suor Orsola Benincasa di Napoli
Profa. Dra. Mariana Gonzalez Boluda, Universidad de Birmingham
Prof. Dr. Alexander López Padrón, Universidad Técnica de Manabí

Comité técnico:
Jordi M. Antolí Martínez, Universidad de Alicante
Gladys Merma Molina, Universidad de Alicante

Revisión y maquetación: ICE de la Universidad de Alicante

Primera edición: octubre de 2020

© De la edición: Rosabel Roig-Vila

© Del texto: Las autoras y autores

© De esta edición:
Ediciones OCTAEDRO, S.L.
C/ Bailén, 5 – 08010 Barcelona
Tel.: 93 246 40 02 – Fax: 93 231 18 68
www.octaedro.com – octaedro@octaedro.com

ISBN: 978-84-18348-11-2

Producción: Ediciones Octaedro

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

NOTA EDITORIAL: Las opiniones y contenidos de los textos publicados en esta obra son de responsabilidad exclusiva de los autores.

134. Caracterización de trayectorias hipotéticas de aprendizaje para el diseño de viñetas en la formación de maestros de primaria

González-Forte, Juan Manuel; Zorrilla, Cristina; Ivars, Pedro; Fernández, Ceneida

Universidad de Alicante

RESUMEN

Investigaciones recientes muestran la relevancia del uso de trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA), entendidas como tendencias esperables en la progresión de la cognición de los estudiantes, en los programas de formación de maestros. Las THA ayudan a los estudiantes para maestro a reconocer evidencias de la comprensión de conceptos matemáticos de los estudiantes de educación primaria para establecer objetivos de aprendizaje y diseñar propuestas de enseñanza. En esta línea de investigación se subraya la importancia de diseñar THA de diferentes conceptos matemáticos y cómo convertirlas en herramientas utilizables por los estudiantes para maestro. El número racional es uno de los contenidos matemáticos que mayores dificultades origina. Una de las posibles causas es el uso inapropiado del conocimiento sobre los números naturales cuando se está aprendiendo los números racionales. Con el objetivo de obtener información para el diseño de una THA sobre cómo los estudiantes comprenden los números racionales, y en particular, cómo comprenden su magnitud, se ha realizado un estudio con 1262 estudiantes de educación primaria y secundaria. En este estudio se han obtenido diferentes formas de razonar sobre la magnitud de los números racionales que proporcionan información para el diseño de la THA. En esta investigación mostramos el diseño de una viñeta para la formación de maestros de primaria que gira en torno a la THA diseñada.

PALABRAS CLAVE: sesgo del número natural, fracciones, trayectoria hipotética de aprendizaje, viñeta, formación maestros de primaria.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha desarrollo una agenda de investigación centrada en el aprendizaje de los estudiantes para maestro sobre aspectos relativos al aprendizaje de matemáticas de los estudiantes de primaria, que les permite justificar las propuestas de enseñanza (Sztajn & Wilson, 2019). Esta línea de investigación está vinculada con las nuevas perspectivas educativas que han propuesto un cambio en la manera de afrontar las interacciones en las aulas (NCTM, 2014). Estas perspectivas subrayan la necesidad de que los maestros sean flexibles para atender las necesidades cognitivas de los estudiantes durante las interacciones. Esta flexibilidad requiere que los maestros desarrollen la capacidad de ser conscientes de lo que ocurre en sus clases para tomar decisiones de enseñanza de manera efectiva: competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (van Es & Sherin, 2008).

Las investigaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes para maestro, y en particular, sobre el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente, han identificado diferentes contextos favorables para su desarrollo en los programas de formación inicial (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls, & Callejo, 2018; Stahnke, Schueler, & Roesken-Winter, 2016). Uno de estos contextos es el uso de trayectorias hipotéticas de aprendizaje que se han mostrado herramientas capaces de apoyar a los estudiantes para maestro a mejorar sus resultados de aprendizaje (Clements, Sarama, Wolfe, &

Spitler, 2013), ya que les proporciona un lenguaje matemático con el que describir el pensamiento de los estudiantes (Ivars, Fernández, Llinares, & Choy, 2018; Wickstrom, Baek, Barrett, Cullen, & Tobias, 2012), y les ayuda a reconocer evidencias de la comprensión de conceptos matemáticos de los estudiantes de educación primaria, para establecer objetivos de aprendizaje y diseñar propuestas de enseñanza (Ivars, Fernández, & Llinares, 2020; Wilson, Sztajn, Edgington, & Myers, 2015).

Aunque las trayectorias hipotéticas de aprendizaje se han conceptualizado desde diferentes perspectivas (Lobato & Walters, 2017) una de las características comunes es que proporciona un modelo de la progresión en el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares. Por tanto, pueden ser entendidas como tendencias esperables en la progresión de la cognición de los estudiantes (Battista, 2011). Es decir, rutas por las que puede desarrollarse el aprendizaje cuando los estudiantes progresan hacia el objetivo de aprendizaje pretendido.

En nuestro estudio usamos la conceptualización de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje aportada por Simon (1995) considerando que está formada por tres componentes: (i) el objetivo de aprendizaje, (ii) el proceso hipotético de aprendizaje entendido como una predicción de cómo evolucionará el pensamiento matemático del estudiante y (iii) un conjunto de posibles actividades que pueden apoyar dicha progresión del aprendizaje. Por tanto, las THA son un instrumento con la capacidad de aportar referencias a los estudiantes para maestro para identificar diferentes grados de comprensión, y proponer tareas con las que seguir la instrucción centradas en la progresión conceptual del estudiante en un determinado concepto matemático.

Por tanto, una cuestión importante que se genera en la investigación sobre el aprendizaje del maestro es el diseño de THA de contenidos matemáticos particulares y cómo convertirlas en herramientas utilizables por los futuros maestros (Daro, Mosher, & Corcoran, 2011). Para ello, es necesario realizar estudios sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos de estudiantes de primaria y secundaria. Los resultados de estos estudios proporcionan información para el diseño de THA que pueden formar parte del contenido de los programas de formación de maestros.

1.1. Diseño de viñetas en la formación de maestros

Otro de los focos de atención en la investigación sobre el aprendizaje del maestro es cómo diseñar prácticas educativas innovadoras que permitan, en los programas iniciales de formación, vincular los conocimientos teóricos con los conocimientos prácticos necesarios para afrontar la práctica docente (Llinares, 2013; Oonk, Verloop, & Gravemeijer, 2015). Para ello se utilizan representaciones de la práctica, también llamadas "viñetas", como medio para ayudar a los estudiantes para maestro a reflexionar sobre diferentes aspectos de la enseñanza-aprendizaje. El uso de viñetas en los programas de formación de maestros estimula la reflexión y discusión de situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y permite a los maestros proporcionar interpretaciones alternativas y vincular las reflexiones generales sobre la práctica docente con evidencias empíricas (Buchbinder & Kuntze, 2018; Lampert & Ball, 1998; Oonk, Goffree, & Verloop, 2004).

Las viñetas se pueden analizar múltiples veces, son sencillas de almacenar y se pueden compartir, facilitando a los maestros el acceso a los elementos de análisis de las situaciones de aula (Kuntze, 2018). Dependiendo del objetivo de aprendizaje, se pueden diseñar e implementar viñetas para facilitar el desarrollo profesional de los maestros de contenidos específicos. En los programas de desarrollo profesional del maestro y profesor de matemáticas, las viñetas se han utilizado con diferentes propósitos y diferentes formatos: videoclips de situaciones reales de aula (van Es & Sherin, 2008); viñetas de cómic (cartoons) con imágenes, diálogos e información del contexto (Friesen & Kuntze, 2018; Samkova, 2018); o como descripciones escritas de una situación de aula (Skilling & Stylinia-des, 2019; Ivars et al., 2020).

Los resultados obtenidos por estas investigaciones señalan que las viñetas pueden ayudar a superar la brecha existente entre los contenidos teóricos y los objetivos en la educación matemática y los requisitos de situaciones específicas del aula (Buchbinder & Kuntze, 2018; Fernández et al., 2018; Llinares, 2013). En particular, en este estudio consideramos las viñetas como representaciones de la práctica docente que permiten a los estudiantes para maestro vincular la información proporcionada en una THA sobre la comprensión de la magnitud de las fracciones de los estudiantes de primaria con situaciones específicas de aula.

1.2. Objetivos

Este estudio tiene dos objetivos: (i) diseñar una THA sobre la comprensión de la magnitud de las fracciones en estudiantes de primaria y secundaria (y en particular, sobre cómo determinar si una fracción es mayor o menor), y (ii) diseñar una viñeta en torno a esta THA para los programas de formación de maestros de primaria.

2. MÉTODO: ESTUDIO SOBRE CÓMO LOS ESTUDIANTES COMPRENDEN LA MAGNITUD DE LAS FRACCIONES

El número racional es uno de los contenidos matemáticos que mayores dificultades origina en estudiantes de educación primaria y secundaria (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985). Una de las posibles causas de estas dificultades se debe al uso inapropiado del conocimiento sobre los números naturales cuando se está aprendiendo los números racionales (sesgo del número natural; Ni & Zhou, 2005; Van Dooren, Lehtinen, & Verschaffel, 2015). Es decir, algunos estudiantes suponen, implícita o explícitamente, que las propiedades de los números naturales pueden aplicarse a los números racionales. En el caso particular de determinar la magnitud de una fracción, el uso del conocimiento sobre el número natural se evidencia mediante la creencia de que una fracción es mayor cuando su numerador, denominador o ambos son mayores (por ejemplo, 18/24 es mayor que 12/20 “porque 18 es mayor que 12 y 24 mayor que 20”) (González-Forte, Fernández, & Van Dooren, 2020; Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Para indagar sobre la medida en la que el conocimiento sobre el número natural interfiere en la comprensión de la magnitud de las fracciones, estudios previos han utilizado ítems de comparación de fracciones que pueden ser congruentes o incongruentes con el conocimiento de los números naturales. En los ítems congruentes, la fracción mayor tiene el numerador y el denominador mayores (3/4 vs. 7/8), por lo que un razonamiento centrado en la ordenación de los números naturales permitiría obtener una respuesta correcta (“7 es mayor que 3 y 8 es mayor que 4 por lo que 7/8 es mayor que 3/4”). En los ítems incongruentes, la fracción mayor tiene el numerador y denominador menores (2/3 vs. 4/9), por lo que un razonamiento centrado en la ordenación de los números naturales llevaría a una respuesta incorrecta (“4 es mayor que 2 y 9 es mayor que 3 por lo que 4/9 es mayor que 2/3”). Los resultados de estos estudios han mostrado que los estudiantes de educación primaria y secundaria resuelven correctamente los ítems congruentes, pero tienen dificultades en los ítems incongruentes (DeWolf & Vosniadou, 2015; González-Forte et al., 2020), poniendo de manifiesto el uso inapropiado del conocimiento de los números naturales cuando comparan fracciones.

Sin embargo, estudios recientes han mostrado el posible uso de otros razonamientos incorrectos cuando los estudiantes de primaria y secundaria comparan fracciones, ya que se ha identificado a estudiantes con un alto nivel de éxito en ítems incongruentes y un bajo rendimiento en los congruentes

(DeWolf & Vosniadou, 2015; Gómez & Dartnell, 2019). Un posible razonamiento es el razonamiento inverso, que se basa en la comparación de los denominadores, considerando como fracción mayor aquella con el denominador menor (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Este razonamiento, centrado en la idea de que los denominadores más pequeños indican que la cantidad dividida tiene partes más grandes, lleva a los estudiantes a considerar que 2/3 es mayor que 3/5 porque 3 piezas son más grandes que 5 (Pearn & Stephens, 2004). Otro posible razonamiento es el razonamiento en diferencias (Pearn & Stephens, 2004), que se centra en comparar la diferencia (absoluta) entre numerador y denominador en ambas fracciones. En este sentido, una fracción se considera mayor si la diferencia entre el numerador y el denominador es menor (ej.: 2/3 es mayor que 7/9 "porque de 2 a 3 hay una diferencia de uno y de 7 a 9 hay una diferencia de dos") (Pearn & Stephens, 2004; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Sin embargo, hay pocos estudios centrados en el sesgo del número natural que hayan considerado ítems que tengan en cuenta otras formas de razonamiento incorrecto y que comprendan diferentes cursos a lo largo de la educación primaria y secundaria.

2.1. Participantes e instrumento

Con el objetivo de obtener información sobre las formas de razonar de los estudiantes de primaria y secundaria cuando comparan fracciones y su evolución a lo largo de los cursos, se llevó a cabo un estudio con 1262 estudiantes (Tabla 1).

Tabla 1. Participantes del estudio

	5.º Primaria	6.º Primaria	1.º ESO	2.º ESO	3.º ESO	4.º ESO
Número	205	219	221	209	198	210

Los participantes respondieron un cuestionario con 25 ítems de comparación de fracciones, adaptados del estudio de Van Hoof, Verschaffel y Van Dooren (2015). Los ítems fueron específicamente diseñados para detectar respuestas basadas en el sesgo del número natural, razonamiento en diferencias o razonamiento inverso. De esta manera, había ítems congruentes con un razonamiento centrado en el número natural (ej.: 5/8 vs. 2/7), ítems incongruentes con un razonamiento centrado en el número natural (ej.: 2/3 vs. 3/7), ítems donde el razonamiento en diferencias lleva a la respuesta correcta (ej.: 3/7 vs. 7/9), e ítems donde este razonamiento lleva a una respuesta incorrecta (ej.: 5/9 vs. 1/3). Además, el uso de ítems congruentes e incongruentes con el conocimiento sobre el número natural también permite examinar la presencia del razonamiento inverso, pues este razonamiento permite resolver correctamente los ítems incongruentes e incorrectamente los congruentes. Además, algunos de los participantes fueron entrevistados con el objetivo de evidenciar sus razonamientos.

2.2. Análisis y perfiles identificados

Mediante un análisis *TwoStep Cluster* con el programa SPSS se determinaron cuatro perfiles de estudiantes que nos dan información sobre diferentes formas de razonar (González-Forte, Fernández, Van Hoof, & Van Dooren, 2019a):

- **Razonamiento correcto**: Estudiantes que respondieron a todos (o casi todos) los ítems correctamente.
- **Razonamiento centrado en el sesgo del número natural**: Estudiantes que resolvieron incorrectamente todos los ítems incongruentes y resolvieron correctamente los ítems congruentes.

Estos estudiantes se basaron en la ordenación de los números naturales, considerando que, si el numerador y el denominador son mayores, la fracción es mayor.

- **Razonamiento en diferencias**: Estudiantes que resolvieron de manera incorrecta únicamente los ítems en los que un razonamiento en diferencias llevaba a la respuesta incorrecta. Estos estudiantes se basaron en la diferencia entre el numerador y el denominador, considerando que cuanto menor es la diferencia, mayor es la fracción.
- **Razonamiento inverso**: Estudiantes que resolvieron de manera incorrecta los ítems congruentes y resolvieron correctamente los incongruentes. Estos estudiantes se basaron en el tamaño del denominador, considerando que la fracción mayor es aquella con menor denominador.

Estos perfiles fueron validados en un estudio cualitativo que aporta evidencias de los razonamientos usados por los estudiantes de cada perfil mediante entrevistas (González-Forte, Fernández, Van Hoof, & Van Dooren, 2019b).

La figura 1 proporciona información sobre la evolución de cada razonamiento a lo largo de los cursos. El razonamiento centrado en el sesgo del número natural es predominante en 5.º y 6.º de educación primaria y 1.º ESO. Además, aunque este razonamiento decrece a lo largo de los cursos, no desaparece en 4.º de la ESO. Esta disminución se corresponde con el aumento no solo de un razonamiento correcto sino de otras formas de razonar incorrectas: razonamiento en diferencias y razonamiento inverso (este último razonamiento aumenta en 3.º ESO). Este resultado parece indicar que cuando se supera el sesgo del número natural, le siguen errores cualitativamente diferentes antes de alcanzar la comprensión.

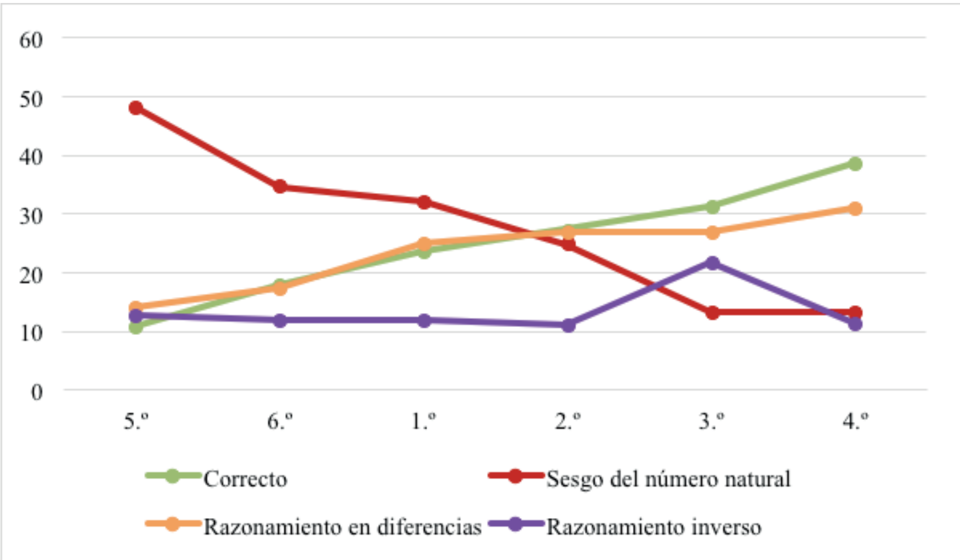

Figura 1. Evolución de los razonamientos identificados desde 5.º de educación primaria hasta 4.º de educación secundaria

3. RESULTADOS

3.1. Diseño de la THA

La THA está centrada en el aprendizaje de cómo determinar qué fracción es mayor o menor. Las diferentes formas de razonar identificadas en el anterior estudio y su evolución a lo largo de los cursos caracterizan un proceso hipotético de aprendizaje, es decir, una predicción de cómo evoluciona el pensamiento matemático del estudiante.

El razonamiento centrado en el sesgo del número natural usa el conocimiento sobre la ordenación de números naturales para comparar numerador y denominador separadamente, por lo que los considera como dos números independientes entre los que no existe ninguna relación. Sin embargo, cuando los estudiantes razonan en diferencias, identifican una relación aditiva (en lugar de multiplicativa) entre numerador y denominador. Se podría decir que esta forma de razonar ya es un paso adelante en el desarrollo de la comprensión de los números racionales, ya que se está viendo a la fracción como relación entre dos naturales. Sin embargo, se necesita dar un paso más para comprender esa relación de forma multiplicativa. Y en este último paso aparece otra forma incorrecta de razonar -razonamiento inverso- centrado en la idea de que los denominadores más pequeños indican que las partes en las que se divide "un todo" son más grandes y por tanto la fracción será mayor. Este razonamiento inverso se centra en el uso de un elemento importante para la comprensión de la comparación de fracciones: el tamaño de una parte es menor cuando el número de partes aumenta. Sin embargo, la forma en la que se está usando el elemento en el razonamiento es incorrecta ya que no se considera el tamaño de los numeradores.

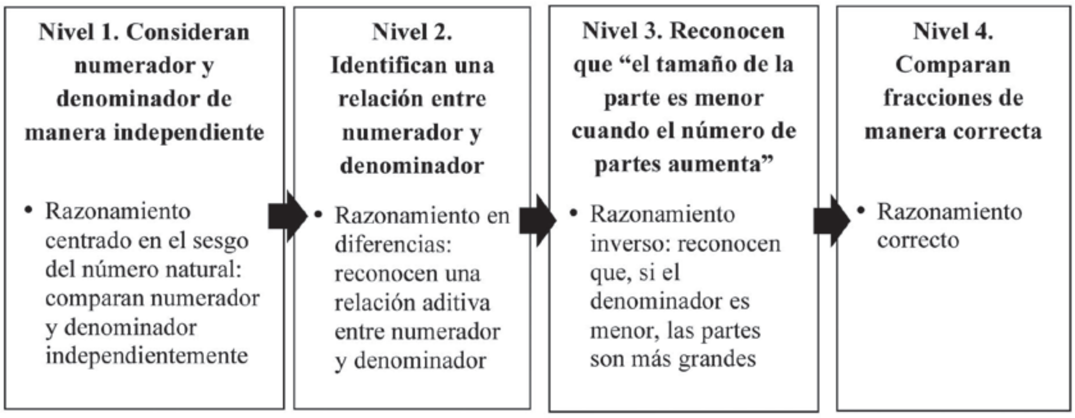

Figura 2. Proceso hipotético de aprendizaje

En la THA diseñada, cada uno de estos niveles es ejemplificado con respuestas de estudiantes de educación primaria a distintas actividades de comparación y ordenación de fracciones. Además, se presentan ejemplos de actividades que pueden apoyar la transición de los estudiantes hacia niveles superiores de razonamiento.

3.2. Diseño de la viñeta

La viñeta está formada por una actividad de comparar fracciones, las respuestas dadas por cuatro estudiantes de 5.º curso de educación primaria a la actividad y un diálogo con el maestro (Figura 3) donde se observa su manera de razonar, y las siguientes tres cuestiones:

- Describe cómo ha resuelto cada estudiante la actividad, identificando las dificultades que ha tenido.
- ¿En qué nivel del proceso hipotético de aprendizaje situarías a cada estudiante? Justifica tu respuesta.
- Teniendo en cuenta el nivel del proceso hipotético de aprendizaje en el que has situado a cada estudiante, define un objetivo de aprendizaje y propón una actividad para ayudar a los estudiantes a progresar en su aprendizaje.

Respuestas de Rubén

Ítems
2/3 vs. 7/9
4/5 vs. 5/8
4/7 vs. 1/3
2/3 vs. 3/7

Maestro: ¿Por qué escoges 4/5 como fracción mayor que 5/8?
Rubén: Porque el 5 es más pequeño que el 8.
Maestro: Y si comparas 2/3 y 3/7, ¿qué fracción es mayor?
Rubén: 1/3 es mayor porque me fijo en el denominador, es decir, en el 3 y en el 7. Como el 3 es más pequeño que el 7, marco 1/3.
Maestro: Entonces, si tienes que comparar fracciones, ¿qué observas para seleccionar la fracción mayor?
Rubén: Si el denominador es más pequeño que el otro, marco la fracción que tenga el denominador más pequeño.

Respuestas de Iván

Ítems
2/3 vs. 7/9
4/5 vs. 5/8
4/7 vs. 1/3
2/3 vs. 3/7

Maestro: Dices que 3/7 es mayor que 2/3, ¿por qué?
Iván: Porque el 3 y el 7 son números mayores.
Maestro: Y si las fracciones a comparar son 4/7 y 1/3, ¿qué fracción es mayor?
Iván: 4/7 es mayor.
Maestro: ¿Podrías explicar cómo seleccionas la fracción mayor?
Iván: Mi criterio es que, si el numerador y el denominador son números mayores, la fracción es mayor. Entonces, cuanto mayor sea el numerador y el denominador, mayor es la fracción.

Respuestas de Celia

Ítems
2/3 vs. 7/9
4/5 vs. 5/8
4/7 vs. 1/3
2/3 vs. 3/7

Maestro: ¿Qué fracción es mayor: 2/3 o 7/9?
Celia: 2/3 es mayor porque a 2/3 le quedaría 1 y a 7/9 le quedaría 2.
Maestro: Y si comparas, 2/3 y 3/7, ¿qué fracción es mayor?
Celia: 2/3 es mayor porque de 2 a 3 sólo hay 1, y en cambio de 3 a 7 hay 4. Es decir, a 2/3 le quedaría 1, y a 3/7 le quedaría 4.
Maestro: ¿En qué te basas para marcar la fracción mayor?
Celia: Me basé en la distancia para marcar la fracción mayor. Cuanto menos quede, mayor es la fracción.

Respuestas de María

Ítems
2/3 vs. 7/9
4/5 vs. 5/8
4/7 vs. 1/3
2/3 vs. 3/7

Maestro: Si comparas las fracciones 2/3 y 7/9, ¿qué fracción es mayor?
María: 7/9 es mayor.
Maestro: ¿Cómo sabes que 7/9 es mayor que 2/3?
María: Porque 2/3 es dos terceras partes y 7/9 supera las dos terceras partes, que serían 6/9.
Maestro: Y en el caso de las fracciones 4/5 y 5/8, ¿podrías justificar cuál de las dos es mayor?
María: 4/5 es mayor porque 4/5 supera mucho la mitad y 5/8 muy poco. Utilizo la mitad para comparar.

Figura 3. Actividad, respuestas de los estudiantes de primaria y diálogo con el maestro

La actividad de comparar fracciones está formada por cuatro pares de fracciones y el alumno de primaria debía identificar la fracción mayor en cada par de fracciones dadas, justificando su respuesta. Por un lado, los pares de fracciones 2/3 vs. 7/9 y 4/7 vs. 1/3, son compatibles con un razonamiento centrado en el sesgo del número natural, pero incompatibles con un razonamiento en diferencias o un razonamiento inverso. Por otro lado, los pares de fracciones 4/5 vs. 5/8 y 2/3 vs. 3/7 son compatibles con un razonamiento en diferencias y un razonamiento inverso, pero incompatibles con un razonamiento fundamentado en el sesgo del número natural.

Las respuestas de Rubén se centran en un razonamiento inverso porque hace alusión a la magnitud de las fracciones fijándose en los denominadores (nivel 3). Esto le lleva a responder correctamente los pares de fracciones compatibles con un razonamiento inverso (4/5 vs. 5/8 y 2/3 vs. 3/7) e incorrectamente los incompatibles con este (2/3 vs. 7/9 y 4/7 vs. 1/3). Las respuestas de Iván se basan en un razonamiento centrado en el sesgo del número natural porque compara numerador y denominador independientemente (nivel 1). Esto le lleva a responder correctamente el par de fracciones compatibles con un razonamiento centrado en el sesgo del número natural (2/3 vs. 7/9 y 4/7 vs. 1/3) e incorrectamente los incompatibles (4/5 vs. 5/8 y 2/3 vs. 3/7). Las respuestas de Celia se basan en un razonamiento en diferencias porque sus justificaciones se basan en la diferencia entre numerador y denominador (nivel 2). Esto le lleva a responder correctamente el par de fracciones compatibles con un razonamiento en diferencias (4/5 vs. 5/8 y 2/3 vs. 3/7) e incorrectamente los incompatibles con este razonamiento (2/3 vs. 7/9 y 4/7 vs. 1/3). Finalmente, María responde correctamente a todos los pares de fracciones usando un razonamiento correcto (nivel 4).

Para resolver la viñeta, los estudiantes para maestro disponen de la información teórica proporcionada en la THA como documento teórico.

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El desarrollo de la competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es posible en los programas de formación inicial de los maestros. Sin embargo, este desarrollo es complicado sin un marco de referencia que ayude a los estudiantes para maestro a estructurar su mirada (Wilson, Mojica, & Confrey, 2013). Además, el desarrollo de esta competencia se vincula a las características de las representaciones de la práctica (viñetas) diseñadas en los programas de formación y a las referencias teóricas que se presentan a los estudiantes para maestro para ayudarles a estructurar su mirada e interpretarlas (Llinares, Ivars, Buforn, & Groenwald, 2020).

En este estudio hemos presentado el diseño de una THA, basada en los resultados empíricos obtenidos sobre cómo los estudiantes de primaria y secundaria razonan al comparar fracciones, que proporciona a los estudiantes para maestro un marco de referencia con el que interpretar la comprensión de los estudiantes. Además, presentamos el diseño de una viñeta, centrada en el modelo de progresión del aprendizaje de los estudiantes, para apoyar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente. Esta viñeta requiere la interpretación por parte de los estudiantes para maestro de las distintas formas de razonar de los estudiantes de primaria. Así, se genera un contexto favorable para que los estudiantes para maestro aprendan a identificar aspectos relevantes de una situación específica de enseñanza-aprendizaje y a interpretarlos usando un vocabulario específico vinculado a la información teórica proporcionada (Ivars et al., 2018).

El conocimiento que los estudiantes para maestro deben aprender a usar para dotar de sentido a esta viñeta, entendida como una representación de la práctica sobre la enseñanza de las matemáticas, les permite vincular los conocimientos teóricos del programa de formación inicial con conocimientos prácticos que caracterizan la práctica docente (Llinares, 2013; Oonk et al., 2015), y empezar así a desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente.

Por otra parte, la viñeta diseñada permite hacer visibles algunos aspectos de la enseñanza de las matemáticas, pero no todos. En este sentido, somos conscientes de las diferentes características y limitaciones que puede presentar la elección de un tipo de diseño de representación de la práctica respecto de otras (videos, cómic, transcripciones…). Sin embargo, desde la perspectiva del aprendizaje de los estudiantes para maestro, parece no haber diferencias en el tipo de viñeta usada (Friesen & Kunze, 2018; Herbst & Kosko, 2014).

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo del Programa de Redes-I3CE de investigación en docencia universitaria del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Alicante (convocatoria 2019-20) (Ref.: 4646) y con el apoyo del Programa de la Unión Europea Erasmus+ (project coReflect@maths, 2019–1–DE01–KA203–004947). El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.

5. REFERENCIAS

Battista, M. T. (2011). Conceptualizations and issues related to learning progressions, learning trajectories, and levels of sophistication. *The Mathematics Enthusiasts, 8*(3), 507-570.

Buchbinder, O., & Kuntze, S. (2018). Representations of practice in teacher education and research – Spotlights on Different Approaches. En O. Buchbinder, & S. Kuntze (Eds.), *Mathematics teachers engaging with representations of practice. A dynamically evolving field* (pp. 1–8). Cham, Switzerland: Springer.

Clements, D. H., Sarama, J., Wolfe, C. B., & Spitler, M. E. (2013). Longitudinal evaluation of a scale-up model for teaching mathematics with trajectories and technologies. *American Educational Research Journal*, *50*(4), 812-850.

Daro, P., Mosher, F. A., & Corcoran, T. B. (2011). Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction. *Consortium for Policy Research in Education (CPRE*) *Research Report #RR-68*. Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education. doi: 10.12698/cpre.2011.rr68

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction, 37*, 39-49.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances en Investigación Matemática AIEM, 13,* 39-61.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Friesen, M., & Kuntze, S. (2018). Competence assessment with representations of practice in text, comic and video format. En O. Buchbinder, & S. Kuntze (Eds.), *Mathematics teachers engaging with representations of practice. A dynamically evolving field* (pp. 113–130). Cham, Switzerland: Springer.

Gómez, D. M., & Dartnell, P. (2019). Middle schoolers' biases and strategies in a fraction comparison task. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(6), 1233-1250.

González-Forte, J. M., Fernández, C., & Van Dooren, W. (en prensa). Is there a gap or congruency effect? A cross-sectional study of students' performance in fraction comparison. *Studia Psychologica*.

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2019a). Various ways to determine rational number size: an exploration across primary and secondary education. *European Journal of Psychology of Education*, *35*, 549–565.

González-Forte, J. M., Fernández, C., & Van Dooren, W. (2020). Is there a gap or congruency effect? A cross-sectional study in students' fraction comparison. *Studia Psychologica*, *62*(2), 109-122.

Herbst, P., & Kosko, K.W. (2014). Using representations of practice to elicit mathematics teachers' tacit knowledge of practice: a comparison of responses to animations and videos. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(6), 515-537.

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2020). A learning trajectory as a scaffold for pre-service teachers' noticing of students' mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*, 529–548.

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., & Choy, B.H. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(11), em1599.

Kuntze, S. (2018). Representations of practice in a video-based in-service teacher professional development project and in its evaluation. En O. Buchbinder, & S. Kuntze (Eds.), *Mathematics teachers engaging with representations of practice. A dynamically envolving field* (pp. 47–70). Cham, Switzerland: Springer.

Lampert, M., & Ball, D. (1998). *Teaching, multimedia, and Mathematics: Investigations of real practice*. New York: Teachers College Press.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus-Journal of Education*, *1*(3), 76-93.

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, À., & Groenwald, C. (2020). «Mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Lobato, J., & Walters, C. D. (2017). A taxonomy of approaches to learning trajectories and progressions. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp.74-101). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all*. Reston, VA: NCTM

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Oonk, W., Goffree, F., & Verloop, N. (2004). For the enrichment of practical knowledge. Good practice and useful theory for future primary teachers. En J. Brophy (Ed.), *Using video in teacher education. Advances in research on teaching* (pp. 131–168). New York, NY: Elsevier Science.

Oonk, W., Verloop, N., & Gravemeijer, K. (2015). Enriching practical knowledge: Exploring student teachers' competences in integrating theory and practice of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 559–599.

Pearn, C., & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. En I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millenium: Towards 2010 Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 430–437). Sydney, Australia: MERGA.

Samkova, L. (2018). Concept cartoons as a representation of practice. En O. Buchbinder, & S. Kuntze (Eds.), *Mathematics teachers engaging with representations of practice. A dynamically evolving field* (pp. 71–93). Cham, Switzerland: Springer.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Skilling, K., & Stylianides, G. (2019). Using vignettes in educational research: a framework for vignette construction. *International Journal of Research and Method in Education.*

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503-518.

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education, 48*(1-2), 1-27.

Sztajn, P., & Wilson, P. H. (2019). *Learning trajectories for teachers: Designing effective professional development for math instruction.* Nueva York, NY: Teachers' College Press.

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. Learning and Instruction, *37*, 1-4.

Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, *24*(2), 244–276.

Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: Characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics, 90*(1), 39-56.

Wickstrom, M., Baek, J., Barrett, J. E., Cullen, C. J., & Tobias, J. M. (2012). Teacher's noticing of children's understanding of linear measurement. En L. R. Van Zoest, J. J. Lo, & J. L. Kratky (Eds.), *Thirty-fourth annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education*. Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Wilson, P. H., Mojica, G. F., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 103–121.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., & Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, *66*(3), 227-244.