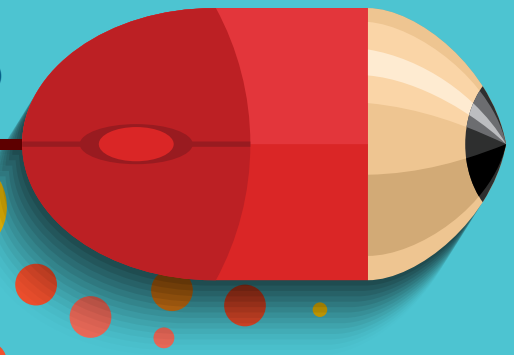
REDES DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EN DOCENCIA UNIVERSITARIA

VOLUMEN 2020

XARXES D'INVESTIGACIÓ I INNOVACIÓ EN DOCÈNCIA UNIVERSITÀRIA

VOLUM 2020



Roig Vila, Rosabel (Coordinación)
Antolí Martínez, Jordi M.
Díez Ros, Rocío
Pellín Buades, Neus (Eds.)

UA UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
ICE Institut de Ciències de l'Educació
Instituto de Ciencias de la Educación

Redes de Investigación e Innovación en Docencia Universitaria. Volumen 2020

ROSABEL ROIG-VILA (COORD.),
JORDI M. ANTOLÍ MARTÍNEZ, ROCÍO DÍEZ ROS & NEUS PELLÍN BUADES
(EDS.)

UA | UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
ICE Institut de Ciències de l'Educació
Instituto de Ciencias de la Educación

2020

Redes de Investigación e Innovación en Docencia Universitaria. Volumen 2020

Edició / Edición: Rosabel Roig-Vila (Coord.), Jordi M. Antolí Martínez, Rocío Díez Ros & Neus Pellín Buades (Eds.)

Comité editorial internacional:

Prof. Dr. Julio Cabero Almenara, Universidad de Sevilla

Prof. Dr. Antonio Cortijo Ocaña, University of California at Santa Barbara

Profa. Dra. Floriana Falcinelli, Università degli Studi di Peruggia

Profa. Dra. Carolina Flores Lueg, Universidad del Bío-Bío

Profa. Dra. Chiara Maria Gemma, Università degli studi di Bari Aldo Moro

Profa. Dra. Mariana Gonzalez Boluda, Universidad de Birmingham

Prof. Manuel León Urrutia, University of Southampton

Prof. Dr. Alexander López Padrón, Universidad Técnica de Manabí

Profa. Dra. Victoria I. Marín, Universidad de Oldenburgo

Prof. Dr. Enric Mallorquí-Ruscalleda, Indiana University-Purdue University, Indianapolis

Prof. Dr. Santiago Mengual Andrés, Universitat de València

Prof. Dr. Fabrizio Manuel Sirignano, Università degli Studi Suor Orsola Benincasa di Napoli

Revisió i maquetació: ICE de la Universitat d'Alacant/ Revisión y maquetación: ICE de la Universidad de Alicante

Revisora tècnica/ Revisora técnica: Neus Pellín Buades

Primera edició: octubre 2020

© De l'edició/ De la edición: Rosabel Roig-Vila, Jordi M. Antolí Martínez, Rocío Díez Ros & Neus Pellín Buades

© Del text: les autores i autors / Del texto: las autoras y autores

© D'aquesta edició: Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la Universitat d'Alacant / De esta edición: Instituto de Ciencias de la Educación (ICE) de la Universidad de Alicante

ice@ua.es

ISBN: 978-84-09-20703-9

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només pot ser realitzada amb l'autorització dels seus titulars, llevat de les excepcions previstes per la llei. Adreceu-vos a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necessiteu fotocopiar o escanejar algun fragment d'aquesta obra. / Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Producció: Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la Universitat d'Alacant / Producción: Instituto de Ciencias de la Educación (ICE) de la Universidad de Alicante

EDITORIAL: Les opinions i continguts dels textos publicats en aquesta obra són de responsabilitat exclusiva dels autors. / Las opiniones y contenidos de los textos publicados en esta obra son de responsabilidad exclusiva de los autores.

84. Taller de matemáticas. Superficies en 3D

García Monera, María

Universitat de València, monera2@uv.es

RESUMEN

Desde el año 2011 llevamos a cabo en la Universitat de València una línea de investigación dedicada a la creación de material manipulativo para el aula de matemáticas. A través del estudio de superficies en geometría nos dimos cuenta que conocer las secciones de una superficie aporta una gran cantidad de información, como conocer curvas especiales o puntos singulares contenidos en la misma. No sólo eso, sino que, en muchos casos, conocer las secciones nos puede ayudar a reproducir y construir el modelo en 3D. Desde entonces, investigamos de qué manera podemos seccionar una superficie para que posteriormente esto nos ayude a reproducir un modelo real de la misma y que luego podamos realizar con estudiantes. Ese mismo año pusimos en marcha un taller didáctico en la facultad de matemáticas de la Universitat de València en colaboración con la Unitat de cultura i innovació de la Universitat de València enfocado a alumnos de secundaria y bachiller. El principal objetivo del taller era ayudar a los estudiantes a familiarizarse con la geometría espacial y en particular con las superficies, muchas de las cuales no conocen por no estar incluidas en el currículo actual.

PALABRAS CLAVE: geometría, matemáticas, superficies, taller.

1. INTRODUCCIÓN

De todas las asignaturas que se imparten en los colegios e institutos, quizá las matemáticas es una de las que más aplicaciones tenga nuestro día a día. Comprobar el cambio al hacer la compra o calcular la medida de los ingredientes a la hora de hacer una receta son actos que habitualmente hacemos y que, quizá sin saberlo, llevan de forma intrínseca el uso de las matemáticas. En el caso de la geometría, su uso también está totalmente extendido, actividades como colgar un cuadro con una inclinación determinada o introducir los elementos en la bolsa de la compra de manera que aprovechemos al máximo el espacio posible son un claro ejemplo del uso de la geometría en nuestra vida diaria.

Si bien es cierto que existen una gran cantidad de métodos de enseñanza de las matemáticas, y en particular de la geometría, la mayoría de ellos tienen un nexo común, el uso de recursos y materiales manipulativos dentro y fuera del aula. Uno de los primeros sentidos que desarrollamos y que nos ayuda a conocer nuestro entorno es el tacto. Si nos dicen que el fuego quema, quizá con el tiempo se nos olvide, pero si en algún momento nos hemos quemado, casi a ciencia cierta es algo que nunca vamos a olvidar. Por ello no es de extrañar que el uso de material manipulativo dentro del proceso enseñanza-aprendizaje del alumno esté totalmente extendido, sobre todo en los primeros cursos de infantil y primaria.

En particular, con el uso de materiales manipulativos se intenta solventar el problema de las matemáticas, que en algunas ocasiones pueden tener una excesiva abstracción para los alumnos y que pueden llegar a ocasionar cierta sensación de agobio en ellos. Ahora bien, la elección del material debe ser adecuado al nivel y a los contenidos que se están trabajando, así como también es importante saber cuándo se va a hacer uso de él.

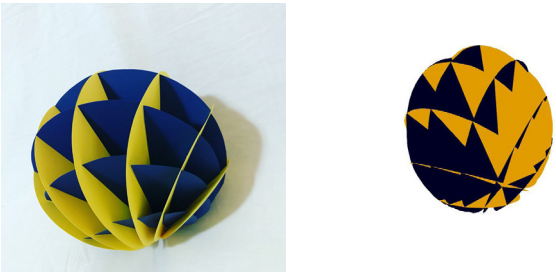
Existen diferentes formas de clasificar los recursos y materiales. Cascallana (1988) clasifica los materiales manipulativos en dos tipos, estructurados y no estructurados. Los materiales no estructurados son aquellos que el alumno puede encontrar en su entorno en el día a día y que le pueden ayudar en su desarrollo cognitivo y en el aprendizaje de las matemáticas, mientras que los materiales estructurados son aquellos diseñados específicamente para la enseñanza de las matemáticas.

Aunque el uso de materiales manipulativos, estructurados o no, en los primeros cursos de infantil y primaria es muy común y existe una gran cantidad de materiales diseñados específicamente para la enseñanza de las matemáticas (tangram, geoplanos, bloques multibase…) su uso no está tan generalizado en la etapa secundaria y el bachillerato. Una de las principales razones por las que podría ocurrir esto es porque quizá su uso ya no sea tan necesario en el proceso de aprendizaje del estudiante. Otra de las razones podría ser el currículum, que en algunos casos es muy extenso y no permite dedicar tiempo dentro del aula al uso de estos materiales. Para estas etapas existe también material específico, como por ejemplo en los prismas, poliedros y algunas superficies específicas,

como el cono, la esfera y el cilindro para el estudio de áreas y volúmenes.

El uso de material manipulativo dentro del aula de matemáticas en la etapa universitaria es algo que podría considerarse totalmente obsoleto, aunque es cierto que la situación años atrás era bien diferente. La idea de construir modelos reales de superficies es muy antigua, de hecho, hace más de 100 años ya se construían modelos a mano. La dificultad de los estudiantes a la hora de imaginarse las superficies o curvas que se estaban explicando en clase creó la necesidad de llevar al aula modelos reales para que los estudiantes entendieran lo que se estaba explicando. A finales del S.XIX Felix Klein (1849-1925) y Alexander von Brill (1842-1935) desarrollaron una gran cantidad de modelos geométricos junto a sus estudiantes. Las superficies estaban construidas en diferentes materiales, como alambre, escayola o papel y les ayudaban a visualizar las superficies que estaban estudiando. Con el paso del tiempo, y quizá por la aparición de los ordenadores, el uso de material manipulativo dentro del aula cayó en desuso y los modelos quedaron relegados a un segundo plano. Desde entonces, se han desarrollado una gran cantidad de materiales recreativos sobre la construcción de superficies (Chatani y Nakazawa (1994) y Cundy y Rollett (1951)). A finales del siglo pasado John Sharp diseñó una gran variedad de superficies utilizando la misma técnica que tiempo atrás habían usado F. Klein y A. von Brill, Sharp la llamó *Sliceform* o forma seccionada (Sharp (1995) y Sharp (2004)). Esta técnica consiste en intersecar la superficie con dos familias de planos paralelos, dependiendo de cómo cortes la superficie con estos planos se obtienen diferentes curvas geométricas. Por ejemplo, si cortamos un cilindro con un plano sin inclinación, la curva es una circunferencia, pero dándole cierta inclinación al plano obtenemos una elipse. De cada familia de planos obtenemos una familia de curvas, y usando piezas de papel, cartón o similares cuyo contorno coincida con cada una de estas curvas, podemos construir un modelo real de la figura con dos familias de piezas.

Figura 1: Modelo virtual y real de una esfera hecha con círculos usando Sliceforms



Los materiales que diseñamos están basados en el trabajo previo de F. Klein, A. von Brill y J. Sharp, y durante casi 10 años se han utilizado dentro de un taller didáctico organizado en la Universitat de València. El taller está enfocado a alumnos que actualmente están cursando los últimos cursos de secundaria o bachillerato, pero, adaptando el contenido, también se han realizado talleres especiales con alumnado universitario. El material utilizado son modelos reales de superficies cuyas piezas se han obtenido mediante técnicas similares a la desarrollada por J. Sharp (ver Monera y Monterde (2011), Monera (2013) y Monera (2019)).

2. OBJETIVOS

Con el estudio de la geometría espacial, los estudiantes tienen su primer contacto en los últimos cursos de primaria viendo algunas superficies sencillas, como el cono o la esfera. Más tarde, los contenidos se amplían ya en la etapa secundaria, donde los alumnos calculan áreas y volúmenes de cuerpos geométricos como los prismas, las pirámides, etc. Pero no es hasta segundo de bachillerato cuando se estudia en profundidad la geometría en el espacio con el cálculo de ecuaciones de rectas y planos y sus posiciones relativas. Es por ello que nos planteamos desarrollar un tipo de material manipulativo que fuera de fácil manejo y que los estudiantes de estas últimas etapas pudieran utilizar para ampliar o reforzar sus conocimientos sobre la materia. Nuestros principales objetivos fueron dos:

a) Introducir a los alumnos algunas superficies no incluidas en el currículo oficial, pero de nivel accesible para ellos.

b) Enseñarles a los alumnos que las curvas planas que ellos estudian pueden encontrarse también en el espacio contenidas en superficies, o bien moverse en el espacio generando algunas superficies particulares, como las de revolución o las superficies regladas.

3. DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

El taller didáctico tiene una duración aproximada de 2h y se lleva a cabo en un aula de la universidad con una cantidad aproximada de 40 estudiantes de secundaria o bachillerato, generalmente. Previamente a la realización del mismo es necesario tener el material preparado que, en nuestro caso, son tijeras y cartulinas en diferentes colores. Cada modelo de superficie está construido en dos colores diferentes, por ello, una vez adquiridas las cartulinas las distribuimos en pares de colores para imprimir las piezas. El tamaño final de la superficie dependerá del tamaño de la cartulina que vayamos a utilizar, en nuestro caso, utilizamos generalmente cartulinas de tamaño DinA-3 por dos razones. Por un lado, estas cartulinas se pueden imprimir directamente en el departamento y, por otro lado, podemos construir los modelos de una altura aproximada de 15cm., un tamaño bastante aceptable para que luego los alumnos se lo puedan llevar a casa. Además, cada familia de piezas se imprime en una cartulina dinA-3, por lo que al final, el modelo requiere únicamente dos cartulinas de colores diferentes.

3.1. Importancia de las secciones de una superficie

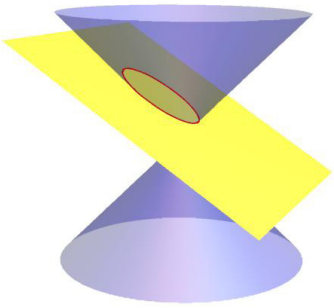
La primera parte del taller está dedicada a la importancia del estudio de secciones. Hay campos donde es de gran importancia esta técnica, como por ejemplo en medicina con los TAC o más general en la estereología, campo interdisciplinario que estudia cuerpos tridimensionales a través de sus secciones y que nos permite aproximar áreas y volúmenes de cuerpos tridimensionales. También es interesante el estudio de secciones en la arquitectura, donde conocer las secciones nos puede ayudar a construir un edificio.

Figura 2: Edificio Setas de Sevilla

3.2. **Introducción a las superficies en matemáticas**

La segunda parte del taller está dedicada al estudio de las superficies de revolución. Comenzamos hablando de las cónicas como sección del cono y posteriormente vemos en el programa Mathematica© cómo, haciendo girar estas curvas alrededor de un eje en el espacio, las curvas generan lo que se conoce como superficie de revolución. Lo mismo ocurre con la recta (generatriz), que moviéndose en el espacio mientras se apoya en una curva dada (directriz) genera una superficie reglada. Finalmente, acabamos esta parte del taller viendo en detalle algunas de estas superficies.

Figura 3: La elipse como sección cónica



Una vez los estudiantes se han relacionado con estos nuevos conceptos, y después de ver algunos ejemplos del uso de estas superficies en la vida real, realizamos un *Kahoot* con preguntas relaciones con todo lo visto anteriormente.

3.3. **Construcción real de los modelos**

Finalmente, la última parte del taller está dedicada a la construcción de los modelos. Cada uno de los modelos está formado por aproximadamente 18 piezas, por lo que un solo estudiante tardaría cerca de 2h en recortar todas las piezas. Es por ello que, en la última parte del taller, distribuimos a los alumnos en grupos de 2-3 personas y les hacemos entrega de tijeras y las dos cartulinas necesarias para

construir el modelo. En esta parte del taller los estudiantes son totalmente autónomos, únicamente les damos unas indicaciones previas sobre cómo tienen que recortar las piezas y luego montar los modelos.

Figura 4: Alumnos enseñando el modelo 3D recién construido

4. RESULTADOS

Desde la puerta en marcha en el año 2011, cerca de 3000 estudiantes de diferentes edades ha acudido a realizar el taller, aumentando cada año el número de solicitudes de centros que desean acudir a la universidad. Sólo el año pasado se realizaron 12 talleres con un total de 451 estudiantes asistentes. En el posterior cuestionario entregado a los profesores se obtuvo una valoración del 91,67% de satisfacción. Aunque, a priori, se puede pensar que los contenidos pueden ser algo elevados para el nivel de los alumnos, con respecto a la adecuación de los contenidos al nivel de los estudiantes, los profesores valoraron positivamente con un 83,33%. Con respecto al *Kahoot* realizado a los estudiantes al acabar la explicación oral, la media fue de un 76% de aciertos en las preguntas, lo que muestra el interés del alumnado a lo largo del taller sobre los modelos explicados.

5. CONCLUSIONES

Si bien es cierto que todo el material utilizado a lo largo del taller está disponible de manera gratuita en la web www.uv.es/monera2, los centros siguen mostrando su interés en acudir a la universidad a realizar el taller, aumentando cada año el número de solicitudes de centros. Esto hace que el taller continúe formando parte de las actividades de divulgación de la ciencia que cada año oferta la Unitat de Cultura Científica i Innovació de la Universitat de València.

Por otro lado, los buenos resultados obtenidos tanto en el cuestionario del profesorado, como en el *Kahoot* realizado a los estudiantes animan a seguir trabajando en la misma línea, tendiendo puentes entre la enseñanza no universitaria y la enseñanza superior.

6. **REFERENCIAS**

Libros:

Cascallana, M. T. (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: Santillana.

Chatani, M., & Nakazawa, K. (1994). *Geometric Origami*. Japan: Ondorisha publishers, LTD.

Cundy, H.M., & Rollett, A.P. (1951). *Mathematical models*. Inglaterra: Oxford University Press.

Sharp, J. (1995). *Sliceforms: Mathematical models from paper sections*. Inglaterra: Tarquin publications.

Sharp, J. (2004). *Sliceforms: explorations with sliceforms*. Inglaterra: Tarquin publications.

Artículo en revista impresa:

Monera, M.G., & Monterde, J. (2011). Building a torus with Villarceau sections. *Journal of Geometry and Graphics*, *15*, 41-47.

Monera, M.G. (2013). Slicing surfaces with Mathematica. *Koninklijke Vlaamse Academie Van Belgie Voor Wetenschappen En Kunsten, Math Art Summit Proceedings*, 49-46.

Artículo en revista digital:

Monera, M.G. (2019). Superficies seccionadas. *XIII Jornadas de educación matemática de la Comunidad Valenciana*, 92-102. Recuperado de [https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/98657/1/LLIBRE_JORNADES_MATEMATIQUES_08.pdf]