

Capítulo V

Multiplicación en Precisión Variable

1. Multiplicación de números racionales
2. Instrumentación de la función multiplicación

Multiplicación de números racionales

Este operador se fundamenta de forma similar al planteamiento realizado para la suma. En primer lugar se desarrolla la función de multiplicación para operandos racionales representados en el formato de doble mantisa. Posteriormente se describe pormenorizadamente la instrumentación a bajo nivel que se propone en el marco de la arquitectura que se viene utilizando en este trabajo.

El método de cálculo de la multiplicación parte del algoritmo clásico para números en coma flotante desarrollado en numerosas investigaciones [Even y Müller, 2000], [Park et al, 1999], [Altwaijry, 1997], [Oklobdzija et al, 1996], [Bewick, 1994], [Bewick y Flynn, 1992]. La operatoria incorpora las características de la representación de los números racionales así como la metodología de operación propuesta en este trabajo y se apoya en un conjunto de teoremas referentes al producto de números racionales expresados en notación fraccionaria.

A continuación se formulan y demuestran los teoremas que se aportan, los cuales permiten conocer la cantidad y naturaleza de las cifras del

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,0010010000111111010101000100010001011010001100001000110100110001001100011001100010100010111000000011011100000111001101000100101001000000100101110000010001
0001010011001111100110001110100

resultado de las multiplicaciones en las que intervienen números racionales periódicos.

Teorema 1

El producto entre un número fraccionario periódico puro y un número fraccionario no periódico, ambos normalizados, presenta una dualidad con respecto a la cantidad de cifras periódicas de los números que se multiplican, siempre que la cantidad de cifras significativas de ambos números sea la misma.

$$\begin{aligned} \forall A, B \in [0, 1) \subset \mathbb{Q}, A = 0, m_{fA} \widehat{m}_{pA}, B = 0, m_{fB} \widehat{m}_{pB} / \\ / L(m_{fA})=0 \wedge m_{pA} \neq 0 \wedge L(m_{fB}) > 0 \wedge m_{pB} = 0 \wedge L(m_{pA}) = L(m_{fB}) \Rightarrow \\ \Rightarrow A \cdot B = A' \cdot B' / L(m_{fA'}) = L(m_{fB'}) \wedge m_{pA'} = 0 \wedge L(m_{fB'}) = 0 \wedge \\ \wedge L(m_{pB'}) = L(m_{pA}) \wedge m_{fA'} = m_{pA} \wedge m_{pB'} = m_{fB} \end{aligned} \quad [5.1]$$

Demostración:

$$\text{Sea } A \in [0, 1) \subset \mathbb{Q} / L(m_{fA}) = 0 \wedge m_{pA} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0, \widehat{m}_{pA} = \frac{m_{pA}}{\underbrace{(B-1) \cdots (B-1)}_{L(m_{pA})}}$$

$$\text{Sea } B \in [0, 1) \subset \mathbb{Q} / L(m_{fB}) > 0 \wedge m_{pB} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 0, m_{fB} = \frac{m_{fB}}{\underbrace{10 \cdots 0}_{L(m_{fB})}}$$

El producto de los números, donde $L(m_{pA}) = L(m_{fB})$, se calcula con las siguientes operaciones en notación simbólica:

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,00100100001111110101010001000100001011010001100001000110100110001001100011001100010100011100000001101110000011100110100010010100100000000010011100000010001
0001010011001111000110001110100

Ej.5: $A = 0,7$; $B = 0,417 \Rightarrow A \cdot B = 0,7 \cdot 0,417 = 0,2919$

Teorema 2

El producto de dos números racionales normalizados, donde un número es periódico y el otro es no periódico, contiene como máximo, la cantidad de cifras periódicas del número periódico inicial.

$$\forall A, B \in [0, 1) \subset \mathbb{Q} / m_{pA} \neq 0 \wedge m_{pB} = 0 \Rightarrow L(m_{pAB}) \leq L(m_{pA}) \quad [5.2]$$

Demostración:

Sea el número racional **A** periódico:

$$A \in [0, 1) \subset \mathbb{Q}, \exists x_a, y_a \in \mathbb{Z} / A = \frac{x_a}{y_a} \wedge \text{mcd}(x_a, y_a) = 1$$

$$L(m_{pA}) = \mathfrak{S}(y_a)$$

Sea el número racional **B** no periódico:

$$B \in [0, 1) \subset \mathbb{Q}, \exists x_b, y_b \in \mathbb{Z} / B = \frac{x_b}{y_b} \wedge \text{mcd}(x_b, y_b) = 1$$

$$L(m_{pB}) = \mathfrak{S}(y_b)$$

donde,

mcd: Máximo común divisor.

\mathfrak{S} : Función que determina la cantidad de cifras periódicas del número.

El producto de ambos números en notación de fracción se expresa como:

$$A \cdot B = \frac{x_a}{y_a} \cdot \frac{x_b}{y_b} = \frac{1}{y_b} \frac{x_a x_b}{y_a} \quad [5.3]$$

De la expresión [5.3] se conoce que:

Multiplicación de números racionales

11,001001000011111101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000001101110000011100110100010010100100000010001110000010001

$\frac{1}{y_b}$: Es un valor no periódico.

$\frac{x_a x_b}{y_a}$: El producto $x_a x_b$ puede incorporar nuevos factores divisores de y_b .

La cantidad de cifras periódicas de $\frac{x_a x_b}{y_a}$ se determina según el siguiente criterio:

- Si $\text{mcd}(x_a x_b, y_a) = 1 \Rightarrow$ La cantidad de cifras periódicas coincide con las del número periódico inicial: $L(m_{pAB}) = L(m_{pA}) = \zeta(y_a)$
- Si no si $\text{mcd}(x_a x_b, y_a) \neq 1 \Rightarrow$ La simplificación de la fracción produce un denominador y'_a , tal que, $y_a = m \cdot y'_a$, donde, de acuerdo con las reglas de la aritmética modular:

$$y_a = m \cdot y'_a \wedge \text{Base}^s \equiv 1 \pmod{y_a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Base}^s \equiv 1 \pmod{m} \wedge \text{Base}^s \equiv 1 \pmod{y'_a}$$

por tanto, si s y s' son los menores enteros que cumplen:

$$\text{Base}^{s'} \equiv 1 \pmod{y'_a} \wedge \text{Base}^s \equiv 1 \pmod{y_a}$$

entonces:

$$s' \leq s$$

luego, $L(m_{pAB}) = \zeta(y'_a) \leq L(m_{pA}) = \zeta(y_a)$

c.q.d. \square

Ejemplos:

En base 10

Ej.1: $A = 0,\widehat{7}$; $B = 0,4 \Rightarrow A \cdot B = 0,\widehat{31}$

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,001001000011111101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000000110111000001110011010001001010010000001001001110000010001
0001010011001111100110001110100

$$\text{Ej.2: } A = 0,1038 ; B = 0,4892 \Rightarrow A \cdot B = 0,05078403$$

$$\text{Ej.3: } A = 0,125 ; B = 0,121 \Rightarrow A \cdot B = 0,01515$$

Multiplicación de números racionales

11,00100100001111110101010001000100001011010001100001000110100110001001100011001100010100000011011100000110011010001001010010000001001001110000010001
000101001100111100110001110100

Corolario:

Si el número B no periódico tiene la forma $\frac{1}{y_b}$, es decir $x_b = 1$, entonces

la cantidad de cifras periódicas del producto es igual a la cantidad de cifras del factor periódico inicial.

Demostración:

La demostración es trivial a partir del teorema anterior ya que si el numerador de la fracción, $\frac{x_a x_b}{y_a}$ no incorpora nuevos divisores de y_a , la

longitud del periodo del número $A \cdot B$ será la misma que la de A .

Como se quiere demostrar. \square

Teorema 3

El producto de dos números periódicos unidad es un número periódico puro cuya cantidad de cifras periódicas es múltiplo de la cantidad de cifras periódicas de cada uno de los factores.

$$\begin{aligned} & \forall A, B \in [0, 1) \subset \mathbb{Q}, A = 0, \widehat{m}_{pA}, B = 0, \widehat{m}_{pB} / \\ & / A \text{ es periódico unidad de grado } L(m_{pA}) \wedge \\ & \wedge B \text{ es periódico unidad de grado } L(m_{pB}) \Rightarrow \\ & \Rightarrow A \cdot B = 0, \widehat{m}_{pAB} \wedge L(m_{pAB}) = \dot{L}(m_{pA}) \wedge L(m_{pAB}) = \dot{L}(m_{pB}) \end{aligned} \quad [5.4]$$

Demostración:

Sea $A \in [0, 1) \subset \mathbb{Q} / A$ es periódico unidad de grado $L(m_{pA})$,

$$\exists y_a \in \mathbb{Z} / A = \frac{1}{y_a} \wedge \text{mcd}(\text{Base}, y_a) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (L(m_{pA}) = s_A \Leftrightarrow (\text{Base}^{s_A} \equiv 1 \pmod{y_a}))$$

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,00100100001111110110101010001000100001011010001100001000110100110001001100011001100010100010111000000011011100000111001101000010010100100000010001110000010001
0001010011001111100110001110100

se cumple que,

$$\frac{\text{Base}^{\mathcal{S}_A}}{y_a} = C_A + \frac{1}{y_a} / C_A \in \mathbb{Z}$$

Sea $B \in [0, 1) \subset \mathbb{Q} / B$ es periódico unidad grado $L(m_{pB})$,

$$\exists y_b \in \mathbb{Z} / B = \frac{1}{y_b} \wedge \text{mcd}(\text{Base}, y_b) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (L(m_{pB}) = \mathcal{S}_B \Leftrightarrow (\text{Base}^{\mathcal{S}_B} \equiv 1 \pmod{y_b}))$$

de manera que,

$$\frac{\text{Base}^{\mathcal{S}_B}}{y_b} = C_B + \frac{1}{y_b} / C_B \in \mathbb{Z}$$

Sea R el producto de los números A y B : $R = A \cdot B$

$$R = \frac{x_a \cdot x_b}{y_a \cdot y_b}$$

y sea s_R la cantidad de cifras periódicas de R , se cumple que,

$$\text{mcd}(\text{Base}, y_a) = 1 \wedge \text{mcd}(\text{Base}, y_b) = 1 \Rightarrow \text{mcd}(\text{Base}, y_a \cdot y_b) = 1$$

La mantisa fija de la representación posicional de un número se produce por la existencia de factores comunes entre la base de la representación y el denominador de la fracción irreducible del número. De la expresión anterior se deduce que el producto es un número periódico puro. Además se tiene que:

$$s_R = L(m_{pR}) \Leftrightarrow (\text{Base}^{s_R} \equiv 1 \pmod{y_a \cdot y_b})$$

$$\frac{\text{Base}^{s_R}}{y_a y_b} = C_R + \frac{1}{y_a y_b} / C_R \in \mathbb{Z}$$

s_R es múltiplo de s_A y de s_B , es decir:

$$s_R = \dot{s}_A \wedge s_R = \dot{s}_B$$

Multiplicación de números racionales

11,00100100001111110101010001000100001010100011000010001101001100010011000110011000100100110000000110111000001100110100010010010000001001001110000010001
000101001100111100110001110100

Para comprobarlo se desarrolla la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Base}^{\text{SR}}}{y_a} &= \frac{\text{Base}^{\text{SR}}}{y_a} \cdot \frac{y_b}{y_b} = \\ &= y_b \cdot \frac{\text{Base}^{\text{SR}}}{y_a y_b} = y_b C_R + \frac{y_b}{y_a y_b} / C_R \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Observando la expresión resultante,

$$\frac{\text{Base}^{\text{SR}}}{y_a} = y_b C_R + \frac{1}{y_a} / y_b C_R \in \mathbb{Z}$$

se demuestra que la cantidad de cifras periódicas de \mathfrak{S}_R es congruente módulo 1 con y_a :

$$\text{Base}^{\text{SR}} \equiv 1 \pmod{y_a}$$

Conforme las reglas de la aritmética modular, este hecho sólo es posible si \mathfrak{S}_R es múltiplo de \mathfrak{S}_A , como se quiere demostrar. Análogamente es posible comprobar que \mathfrak{S}_R también es múltiplo de \mathfrak{S}_B . Por tanto, queda completada la demostración del teorema. c.q.d. \square

Ejemplos:

En base 2

Ej.1:

$$A = 0,\widehat{001} ; L(m_{pA}) = 3; \text{Periodo unidad de grado } 3 ;$$

$$B = 0,\widehat{0001} ; L(m_{pB}) = 4; \text{Periodo unidad de grado } 4 ;$$

$$A \cdot B = 0,\widehat{000000100111} , L(m_{pAB}) = 12;$$

Ej.2:

$$A = 0,\widehat{01} ; L(m_{pA}) = 2; \text{Periodo unidad de grado } 2 ;$$

$$B = 0,\widehat{001} ; L(m_{pB}) = 3; \text{Periodo unidad de grado } 3 ;$$

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,0010010000111111011010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000000110111000001110011010001001010010000001001001110000010001
0001010011001111100110001110100

$$A \cdot B = 0,000011, L(m_{pAB}) = 6;$$

Teorema 4

Los acarreos producidos, c_n , en el desarrollo de sumas de cada conjunto de cifras periódicas del resultado del producto de dos números periódicos unidad cumplen la siguiente relación:

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = n \quad [5.5]$$

Sean A y B dos números periódicos unidad. Su producto adquiere la forma siguiente:

$$A = 0, \underbrace{00 \cdots 01}_{L(m_{pA})} ; B = 0, \underbrace{00 \cdots 01}_{L(m_{pB})}$$

$$A \cdot B = 0, \underbrace{00 \cdots 01}_{L(m_{pA})} \cdot 0, \underbrace{00 \cdots 01}_{L(m_{pB})}$$

Debido a que cada uno de los factores periódicos se despliega en una cadena infinita de cifras fraccionarias, esta multiplicación adopta la estructura de un sumatorio infinito de productos.

$$0, \underbrace{00 \cdots 01}_{L(m_{pA})} \cdot 0, \underbrace{00 \cdots 01}_{L(m_{pB})} =$$

$$= 0, \underbrace{00 \cdots 01}_{L(m_{pA})} \cdot 0, \underbrace{00 \cdots 01}_{L(m_{pB})} +$$

$$+ 0, \underbrace{00 \cdots 01}_{L(m_{pA})} \cdot 0, \underbrace{00 \cdots 01}_{2 \cdot L(m_{pB})} + \quad [5.6]$$

$$+ 0, \underbrace{00 \cdots 01}_{L(m_{pA})} \cdot 0, \underbrace{00 \cdots 01}_{3 \cdot L(m_{pB})} +$$

$$\dots$$

Multiplicación de números racionales

11,001001000011111101101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101100000011011100000110011010001001010010000001001001110000010001
000101001100111100110001110100

Según se pronuncia el tercer teorema, el resultado de ese sumatorio es un número periódico puro,

$$A \cdot B = R = 0, \widehat{m}_p = 0, m_p m_p m_p m_p \dots$$

donde la cantidad de cifras periódicas de su periodo, $L(m_p)$, es múltiplo de la cantidad de cifras periódicas de cada uno de los factores. Sea φ la cantidad de cifras periódicas del resultado: $L(m_p) = \varphi$

$$\varphi = \dot{L}(m_{pA}) \wedge \varphi = \dot{L}(m_{pB}) \quad [5.7]$$

Cada uno de los productos del sumatorio de la expresión [5.6] corresponde con un desplazamiento del primer factor una cantidad de posiciones proporcional al grado del segundo factor, por tanto, los sumandos se pueden organizar mediante la siguiente estructura triangular.

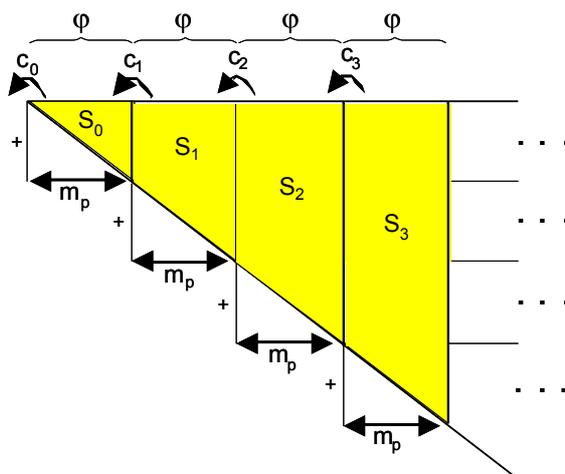


Figura 5-1: Organización de los sumandos en el desarrollo de sumas del producto de dos números periódicos

donde,

S_i : suma parcial de la columna i de φ cifras periódicas.

c_i : acarreo producido en la obtención de S_i .

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,001001000011111101101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000000110111000001110011010001001010010000001001001110000010001
0001010011001111000110001110100

El teorema 4 formula que los acarrees C_i que se producen en la suma S_i forman una progresión aritmética de diferencia uno.

Demostración:

Se emplea el principio de inducción completa sobre preórdenes bien fundados, llamado *principio de inducción Noetheriana* [Leckx y Sieber, 1984], sobre la relación [5.5].

- *Condición de aplicación del principio de inducción:* el conjunto de los números naturales con la relación de orden \leq forman un preorden bien fundado (\mathbb{N}, \leq) , donde el valor cero es el minimal del conjunto.
- *Base de Inducción:* se cumple la condición para los minimales del conjunto. Se comprueba que en el primer bloque no se genera acarreo debido a que el producto de dos números periódicos puros genera un número periódico sin mantisa fija.

$$c_0 = 0 \quad [5.8]$$

- *Hipótesis de Inducción:* se supone que para todo acarreo menor que n se cumple la relación.

$$\forall i \in \mathbb{N} / i < n, c_i = i \quad [5.9]$$

- *Paso de Inducción:* se demuestra que se cumple la relación para n .

De la estructura formada por el desarrollo del producto de los números periódicos unidad que muestra la figura 5-1 se extrae el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} m_p &= S_0 + c_1 - \text{Base}^p \cdot c_0 \\ m_p &= S_1 + c_2 - \text{Base}^p \cdot c_1 \\ &\dots \\ m_p &= S_i + c_{i+1} - \text{Base}^p \cdot c_i \\ &\dots \\ m_p &= S_{n-1} + c_n - \text{Base}^p \cdot c_{n-1} \\ &\dots \end{aligned} \quad [5.10]$$

Las ecuaciones anteriores relacionan los acarrees que se producen y las sumas de cada bloque. Reorganizando los términos se obtiene:

Multiplicación de números racionales

11,001001000011111101010100010001000010110100011000010001101001100010011000100110001001100010011000100110000000110111000001100110100010010010000001001001110000010001
000101001100111100110001110100

$$\begin{aligned}
 \text{Base}^{\varphi} \cdot c_0 &= S_0 + c_1 - m_p \\
 \text{Base}^{\varphi} \cdot c_1 &= S_1 + c_2 - m_p \\
 &\dots \\
 \text{Base}^{\varphi} \cdot c_{i-1} &= S_{i-1} + c_i - m_p \\
 &\dots \\
 \text{Base}^{\varphi} \cdot c_{n-1} &= S_{n-1} + c_n - m_p \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

La disposición periódica de las cifras del resultado provoca que para cada suma S_i , excepto para la primera, se cumpla la siguiente relación:

$$S_i = S_{i-1} + T_i \tag{5.12}$$

donde T_i es un conjunto de sumandos de φ cifras cada uno, tal y como se muestra en la siguiente figura:

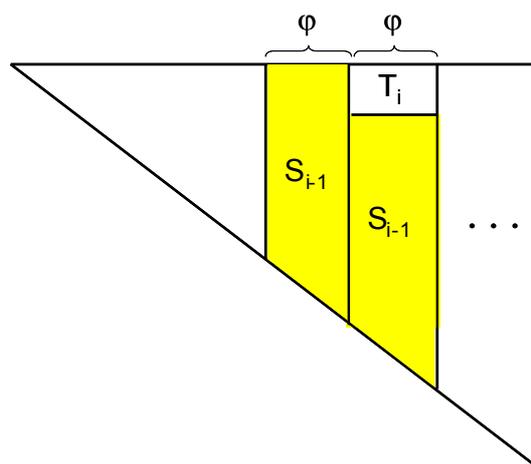


Figura 5-2: Relación entre la suma S_i y la anterior

Tomando las siguientes ecuaciones del conjunto [5.11]:

$$\begin{aligned}
 \text{Base}^{\varphi} \cdot c_{n-2} &= S_{n-2} + c_{n-1} - m_p \\
 \text{Base}^{\varphi} \cdot c_{n-1} &= S_{n-1} + c_n - m_p
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

Se realiza la sustitución de términos según la relación [5.12] para el índice $n-1$ en las dos ecuaciones anteriores,

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,001001000011111101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000000110111000001110011010001001010010000001001001110000010001
000101001100111100110001110100

$$S_{n-1} = S_{n-2} + T_{n-1}$$

y se obtiene:

$$\text{Base}^p \cdot c_{n-2} = S_{n-2} + c_{n-1} - m_p$$

$$\text{Base}^p \cdot c_{n-1} = S_{n-2} + T_{n-1} + c_n - m_p$$

[5.14]

Multiplicación de números racionales

11,001001000011111011010101000100010000101101000110000100011010011000100110001100110001010001011000000110111000001110011010001001010010000001001001110000010001
0001010011001111000110001110100

Por la *Hipótesis de Inducción*, se cumple que $\forall i < n, c_i = i$, por tanto:

$$c_{n-1} = n-1; c_{n-2} = n-2$$

Sustituyendo estos términos en la expresión [5.14]:

$$\begin{aligned} \text{Base}^\varphi \cdot (n-2) &= S_{n-2} + (n-1) - m_p \\ \text{Base}^\varphi \cdot (n-1) &= S_{n-2} + T_{n-1} + c_n - m_p \end{aligned} \quad [5.15]$$

Restando ambas ecuaciones resulta:

$$-\text{Base}^\varphi = n-1 - c_n - T_{n-1} \quad [5.16]$$

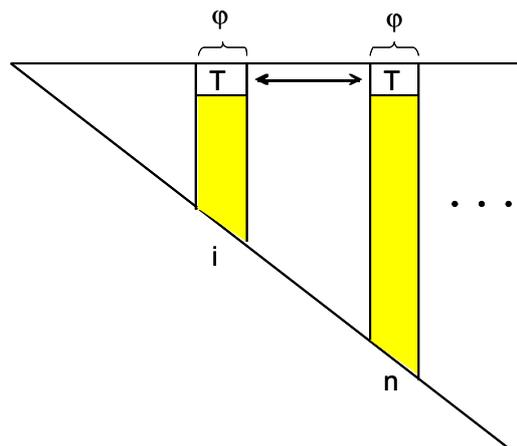
Reordenando los términos:

$$c_n = n - 1 + \text{Base}^\varphi - T_{n-1} \quad [5.17]$$

Debido a la estructura periódica de los bloques del resultado, cualquier conjunto de sumandos de la estructura se repite cada cierto número de bloques de φ cifras. Esta característica da lugar a la siguiente relación:

$$\forall T_n, \exists 0 < i < n / T_i = T_n \quad [5.18]$$

Es decir, el conjunto de sumandos T es el mismo cada cierto número de columnas de φ cifras. La figura siguiente ilustra esta relación:



Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,001001000011111101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000000110111000001110011010001001001000000100101110000010001
000101001100111100110001110100

Figura 5-3: Equivalencia entre sumas parciales

Tomando las siguientes ecuaciones del conjunto [5.11]:

$$\begin{aligned} \text{Base}^p \cdot c_{i-2} &= S_{i-2} + c_{i-1} - m_p \\ \text{Base}^p \cdot c_{i-1} &= S_{i-1} + c_i - m_p \end{aligned} \quad [5.19]$$

Por la *Hipótesis de Inducción*, se cumple que $\forall i < n, c_i = i$, por tanto:

$$\begin{aligned} \text{Base}^p \cdot (i-2) &= S_{i-2} + i - 1 - m_p \\ \text{Base}^p \cdot (i-1) &= S_{i-1} + i - m_p \end{aligned} \quad [5.20]$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores la relación [5.12] para el índice $i-1$,

$$S_{i-1} = S_{i-2} + T_{i-1}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Base}^p \cdot (i-2) &= S_{i-2} + i - 1 - m_p \\ \text{Base}^p \cdot (i-1) &= S_{i-2} + T_{i-1} + i - m_p \end{aligned} \quad [5.21]$$

Restando ambas ecuaciones resulta:

$$-\text{Base}^p = -1 - T_{i-1}$$

Reordenando los términos se forma la siguiente identidad:

$$T_{i-1} = \text{Base}^p - 1 \quad [5.22]$$

Observar que el valor de T_{i-1} es independiente de i . Sustituyendo este resultado en la ecuación [5.17] se tiene el valor de c_n siguiente:

$$c_n = n-1 + \text{Base}^p - T_n = n-1 + \text{Base}^p - \text{Base}^p + 1 = n$$

Por tanto, resulta que efectivamente:

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = n$$

Multiplicación de números racionales

11,0010010000111111010101000100010000101101000110000100011010011000100110001100110001001000101110000000110111000001110011010001001010010000001001001110000010001
0001010011001111100110001110100

c.q.d. \square

Descripción del método de multiplicar

Una vez establecida la base conceptual necesaria se está en condiciones de desarrollar el algoritmo de multiplicación propuesto. Se realizan las mismas consideraciones que en la operación de suma con respecto a la precisión de los resultados, la estructura de los operandos y el carácter variable de sus campos. En este aspecto adquiere especial importancia los algoritmos de suma y multiplicación descritos para números de longitud variable. La operación se realiza conforme a un esquema general y consta de las etapas que describe la siguiente figura.

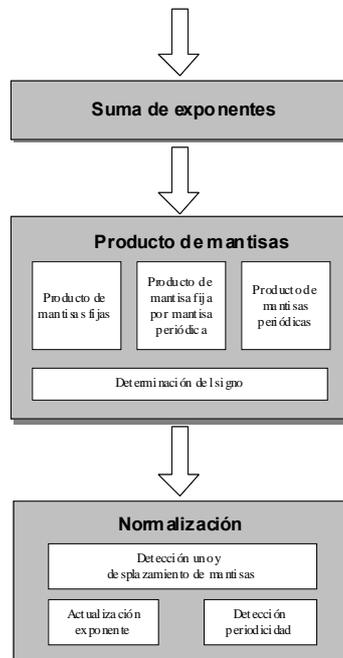


Figura 5-4: Etapas del producto en coma flotante para números racionales

El método de multiplicar que se propone presenta diferencias respecto al método clásico sobre números en coma flotante fundamentadas en el distinto formato de representación de los datos y la exactitud de los resultados. Sólo se considera su redondeo cuando las exigencias del problema impidan su representación sin error. En los siguientes apartados se detalla el procedimiento de cálculo de cada una de las

Multiplicación de números racionales

11,00100100001111110101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000001101110000011100110100010010010000001001001110000010001
000101001100111100110001110100

etapas de que consta la operación considerando, en toda la exposición, la estructura de los operandos que ilustra la figura 4-1.

Suma de exponentes

En esta etapa se calcula el orden de magnitud del resultado de la multiplicación mediante la suma de los exponentes de ambos operandos. Se tiene en cuenta la naturaleza de su representación para restar el sesgo al resultado que se obtiene.

El cálculo consiste en operaciones de suma entera de longitud variable que, debido a la naturaleza iterativa del algoritmo de suma, posee un retardo linealmente proporcional a la cantidad de cifras de los operandos. Asimismo, según el esquema de las etapas de la operación que muestra la figura 5-4 se admite su ejecución en paralelo con el producto de mantisas. La siguiente expresión formula la complejidad de la etapa en términos de las longitudes de los exponentes:

$$T_{\text{Suma_Exponentes}} \in O(L(e_A), L(e_B)) \quad [5.23]$$

Producto de mantisas

El procesamiento de esta etapa tiene en consideración la existencia de dos mantisas de distinta naturaleza. El método de cálculo que se describe se adapta a la presencia de mantisa periódica significativa y da lugar a tres posibilidades: producto de dos números fraccionarios no periódicos, producto de un número fraccionario periódico por otro no periódico y producto de dos números fraccionarios periódicos. En los siguientes subapartados se describe la operación de cada uno de los casos.

Producto de dos números no periódicos

La siguiente expresión indica las condiciones sobre la configuración de las mantisas de los números para este caso: $A, B \in \mathbb{Q}$.

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,001001000011111101010100010001000010110100010000100011010011000100110001100110001010001011100000001101110000011100110100010010010000000100101110000010001
0001010011001111100110001110100

$$\begin{aligned}
 \text{Sea } A = 0, m_{fA} \widehat{m}_{pA} \wedge m_{fA} = \alpha_{L(mfA)-1} \dots \alpha_0 \wedge m_{pA} = \gamma_{L(mpA)-1} \dots \gamma_0 / \\
 / L(m_{pA}) > 0 \wedge \forall i \in \{0..L(m_{pA})-1\}, \gamma_i = 0 \\
 \text{y } B = 0, m_{fB} \widehat{m}_{pB} \wedge m_{fB} = \alpha_{L(mfB)-1} \dots \alpha_0 \wedge m_{pB} = \gamma_{L(mpB)-1} \dots \gamma_0 / \\
 / L(m_{pB}) > 0 \wedge \forall i \in \{0..L(m_{pB})-1\}, \gamma_i = 0
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

El segundo teorema referente a la multiplicación de números racionales fraccionarios indica que el producto de dos cantidades no periódicas no contiene cifras periódicas. El resultado estará formado por el producto de las mantisas de los factores y tendrá una longitud igual a la suma de las longitudes de sus mantisas. Esta operación se realiza de acuerdo con el método de multiplicación de números enteros descrito en el capítulo tercero.

El coste del producto para este tipo de operandos pertenece a un orden de complejidad temporal equivalente al producto de la cantidad de cifras de ambos números, tal y como se dedujo en el apartado correspondiente al producto de números enteros de longitud variable. La expresión siguiente formula esta relación considerando los factores concretos de este caso. Se aprecia que si ambos operandos tienen la misma cantidad de dígitos el coste será cuadrático con el número de cifras.

$$T_{\text{Producto_Mantisas_a}} \in O(L(m_{fA}) \cdot L(m_{fB})) \tag{5.25}$$

Producto de un número no periódico por otro periódico

La configuración de las mantisas en este caso se especifica en la siguiente expresión: $A, B \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Sea } A = 0, m_{fA} \widehat{m}_{pA} \wedge m_{fA} = \alpha_{L(mfA)-1} \dots \alpha_0 \wedge m_{pA} = \gamma_{L(mpA)-1} \dots \gamma_0 / \\
 / L(m_{pA}) > 0 \wedge \forall i \in \{0..L(m_{pA})-1\}, \gamma_i = 0 \\
 \text{y } B = 0, m_{fB} \widehat{m}_{pB} \wedge m_{fB} = \alpha_{L(mfB)-1} \dots \alpha_0 \wedge m_{pB} = \gamma_{L(mpB)-1} \dots \gamma_0 / \\
 / L(m_{pB}) > 0 \wedge \exists i \in \{0..L(m_{pB})-1\}, \gamma_i \neq 0
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Multiplicación de números racionales

11,00100100001111110101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000000110111000001110011010001001010010000001001001110000010001
0001010011001111100110001110100

Según el segundo teorema formulado anteriormente, el resultado del producto puede tener tantas cifras periódicas como el factor periódico que interviene en la operación. Para el desarrollo de la exposición se consideran los siguientes valores racionales:

$$A, B \in \mathbb{Q} / A = 0, m_{fA} \wedge B = 0, m_{fB} \tilde{m}_{pB}$$

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,00100100001111110110101010001000010110100011000010001101001100011000110001100011000110001100011000000011011100000111001101000100101001000000001001110000010001
000101001100111100110001110100

Cuyo valor simbólico de fracción corresponde a:

$$A = 0, m_{fA} = \frac{m_{fA}}{\underbrace{10 \dots 0}_{L(m_{fA})}}$$

$$B = 0, m_{fB} \widehat{m}_{pB} = \frac{m_{fB} m_{pB} - m_{fB}}{\underbrace{(Base - 1) \dots (Base - 1)}_{L(m_{pB})} \underbrace{0 \dots 0}_{L(m_{fB})}}$$

Multiplicado ambos números se obtiene:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \frac{m_{fA}}{\underbrace{10 \dots 0}_{L(m_{fA})}} \cdot \frac{m_{fB} m_{pB} - m_{fB}}{\underbrace{(Base - 1) \dots (Base - 1)}_{L(m_{pB})} \underbrace{0 \dots 0}_{L(m_{fB})}} = \\ &= \frac{m_{fA} \cdot (m_{fB} m_{pB} - m_{fB})}{\underbrace{10 \dots 0}_{L(m_{fA})} \underbrace{0 \dots 0}_{L(m_{fB})}} \cdot \frac{1}{\underbrace{(Base - 1) \dots (Base - 1)}_{L(m_{pB})}} \end{aligned} \quad [5.27]$$

Sea C el resultado de la siguiente expresión:

$$C \equiv m_{fA} \cdot (m_{fB} m_{pB} - m_{fB}) \quad [5.28]$$

Conocida la relación entre el número periódico unidad y la fracción que lo genera,

$$\frac{1}{B^p - 1} = \frac{1}{\underbrace{(B - 1) \dots (B - 1)}_p} = 0, \underbrace{00 \dots 01}_p \quad [5.29]$$

Multiplicación de números racionales

11,001001000011111101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110001100010011000000011011100000110011010001001010010000001001110000010001

la multiplicación entre los números fraccionarios A y B se formula según las expresiones [5.30] y [5.31].

$$A \cdot B = \frac{m_{fA} \cdot (m_{fB} m_{pB} - m_{fB}) \cdot \text{Base}^{-(L(m_{fA}) + L(m_{fB}))}}{(\text{Base}^{L(m_{pB})} - 1)} \quad [5.30]$$

$$A \cdot B = C \cdot \underbrace{0,00 \dots 01}_{L(m_{pB})} \cdot \text{Base}^{-(L(m_{fA}) + L(m_{fB}))} \quad [5.31]$$

En la expresión [5.31] se observa que el producto se compone de tres factores: el valor C que aporta la parte significativa del resultado, el número periódico unidad de grado L(m_{pB}) que incorpora la componente periódica y un desplazamiento que contiene el orden de magnitud.

El producto de la componente significativa por la periódica se calcula mediante la siguiente expresión:

$$C \cdot 0, \underbrace{00 \dots 01}_{L(m_{pB})} = \frac{\left(\sum_{i=0}^h \text{DesplazarDer}(C, i \cdot L(m_{pB})) \right) + \text{Carry}_p}{\underbrace{10 \dots 0}_{L(m_{pB})}} \quad [5.32]$$

donde,

DesplazarDer(C, x): Desplazamiento del valor C, x posiciones a la derecha.

Carry_p: Acarreo producido a partir de la posición L(m_{pB})-1 de la operación:

$$\left(\sum_{i=0}^h \text{DesplazarDer}(C, i \cdot L(m_{pB})) \right) \quad [5.33]$$

h: $\lceil L(C) / L(m_{pB}) \rceil - 1.$ [5.34]

La expresión [5.32] consiste en una serie de sumas consecutivas entre valores enteros correspondientes a desplazamientos progresivos del

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,001001000011111101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000000110111000001110011010001001010010000000100100110000010001
000101001100111100110001110100

número inicial C más el acarreo producido desde la posición donde comienza el periodo. El valor C contendrá una cantidad de cifras mayor o igual a $L(m_{pB})$. Asimismo, el resultado final de la expresión será mixto y contendrá una mantisa fija y una periódica con una cantidad de dígitos limitada por el segundo teorema. El procedimiento de cálculo construye un resultado con una cantidad de cifras igual a las del factor periódico. Posteriormente se normalizará el número para eliminar redundancias en el periodo si fuera necesario. El desarrollo de la operatoria considera números racionales de longitud variable expresados en el formato de doble mantisa y cuyos campos tienen una longitud no acotada.

A continuación se describe un ejemplo que ilustra el algoritmo empleado para el cálculo de la expresión [5.32].

Sea el valor C compuesto por ocho cifras:

$$C = C_7 C_6 C_5 C_4 C_3 C_2 C_1 C_0$$

Y sean dos las cifras periódicas del número periódico: $L(m_{pB}) = 2$

Para este ejemplo, la expresión [5.32] se compone de una serie de sumandos desplazados:

$$\begin{aligned} C \cdot 0, \widehat{01} &= C \cdot 0, 01 01 01 01 01 01 01 01 01 \dots = \\ &= C \cdot 0,01 + C \cdot 0,00 01 + C \cdot 0,00 00 01 \dots \end{aligned}$$

En la siguiente figura se dispone la suma múltiple anterior verticalmente. La zona triangular sombreada muestra gráficamente las cifras implicadas en el cálculo de su valor, donde las $L(m_{pB})$ menos significativas forman el periodo. El acarreo que se produzca en su cálculo deberá ser considerado en las cifras fijas y periódicas.

Multiplicación de números racionales

11,001001000011111101010100010001000010110100011000010001101001100010011000100110001001100010011000100110000000110111000001100110100010010010000001001110000010001
000101001100111100110001110100

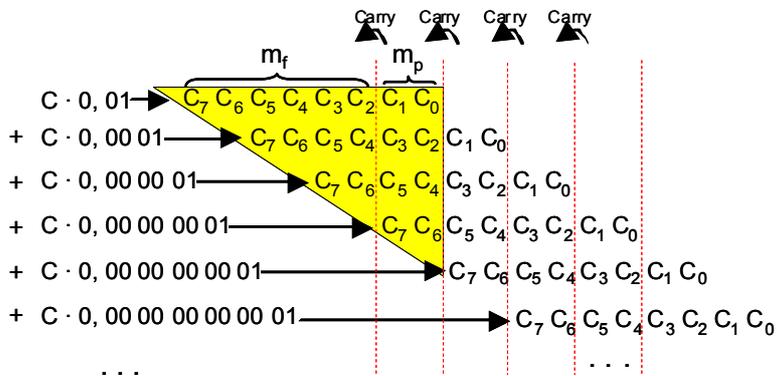


Figura 5-5: Ejemplo de desarrollo del producto periódico mediante una suma múltiple

Hasta ahora todos los cálculos producen resultados enteros sin cifras fraccionarias. La incorporación del orden de magnitud mediante divisiones entre la unidad seguida de ceros se procesa de una forma inmediata desplazando las cifras hacia la derecha de la coma, lo que da lugar a las mantisas fraccionarias del resultado. Esta acción se pospone a la etapa de normalización. De las expresiones [5.30] y [5.32] se deduce que el desplazamiento a realizar corresponde al que muestra la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\underbrace{10 \dots 00}_{L(m_{fA})} \underbrace{00 \dots 00}_{L(m_{fB})} \underbrace{00 \dots 0}_{L(m_{pA})}} \Rightarrow \text{Desplaz.} = L(m_{fA}) + L(m_{fB}) + L(m_{pA}) \quad [5.35]$$

El cálculo del valor C consta de una multiplicación y una suma entre operandos enteros de longitud variable. Como decisión de diseño se plantea la disyuntiva entre su cálculo serie o paralelo mediante un esquema segmentado. A modo de ejemplo, se presenta en la figura siguiente el modelo segmentado con la partición de los operandos en partes manejables del mismo tamaño. El cálculo se desarrolla de derecha a izquierda según los métodos de suma y producto de números enteros de longitud variable.

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,001001000011111101101010001000100001011010001100001000110100110001001100011001100010100010111000000011011100000110011010001001010010000001001001110000010001

0001010011001111000110001110100

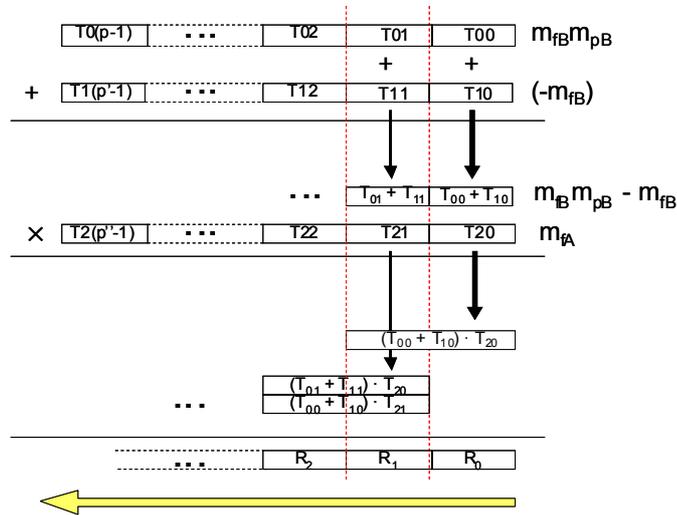


Figura 5-6: Esquema de ejecución de la suma y el producto segmentado

La expresión [5.32] da lugar a un procesamiento más elaborado. Este cálculo contiene una cantidad de sumas de longitud variable proporcional al número de cifras de C entre el número de cifras de la mantisa periódica. A su vez, cada suma se realiza entre valores de un tamaño similar al resultado de la operación producto.

Un posible método de cálculo de esa expresión considera los sumandos desde una perspectiva vertical. De este modo el valor del resultado se obtiene mediante la suma de la sucesión de cantidades de longitud igual al periodo correspondientes a porciones sucesivas del valor C de la misma longitud. La figura 5-7 describe esquemáticamente este proceso, donde las flechas indican el orden de las sumas. Observar que en cada columna sólo hay que hacer una operación de adición, ya que la suma de los demás sumandos es el resultado completo de la columna anterior.

Multiplicación de números racionales

11,0010010000111111010101000100010000101101000110000100011010011000100110001100110001010001011000000011011100000110011010001001010010000001001001110000010001
000101001100111100110001110100

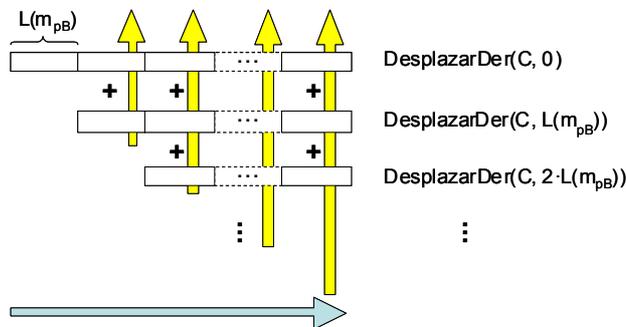


Figura 5-7: Orden de ejecución de las sumas sucesivas por columnas

La siguiente figura muestra este proceso para las cifras del ejemplo anterior. Se observa que todas esas operaciones son de una longitud igual a la cantidad de cifras periódicas $L(m_{pB})$.

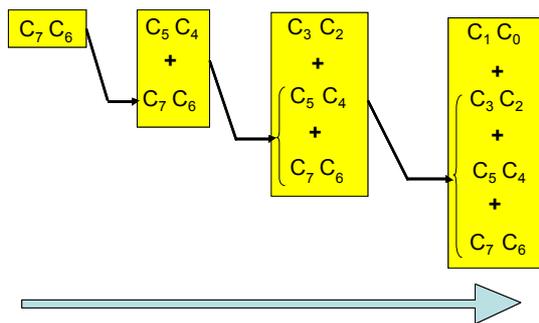


Figura 5-8: Sumas sucesivas por columnas para $L(C) = 8$; $L(m_{pB}) = 2$

La propagación del acarreo generado se realiza a través de otro conjunto de operaciones de suma similares a las anteriores que comienzan desde las posiciones menos significativas. Se considera acarreo a la cantidad formada por las cifras que excedan de la longitud del periodo, $L(m_{pB})$, en cada una de estas sumas. Las cifras que conforman el periodo del resultado reciben un tratamiento especial, ya que si después de sumar su acarreo se obtuviera uno nuevo, tendría que volver a ser considerado. Por este motivo, como describe la figura siguiente, se obtiene en la misma operación la suma y su sucesor.

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,0010010000111111010101000100010000101101000110000100011010011000100110001100110001010001011100000001101110000011100110100010010100100000010010111000001000110000010001

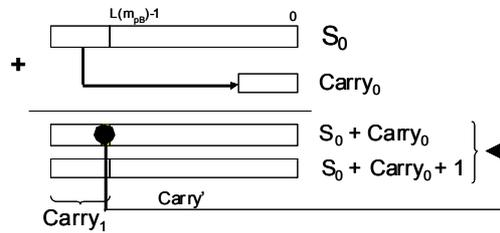


Figura 5-9: Gestión del acarreo en las cifras periódicas del resultado

A partir de ahí y para el resto de partes, el procesamiento consiste en sumar sucesivamente los acarreos producidos al bloque posterior tal y como se observa en la figura siguiente:

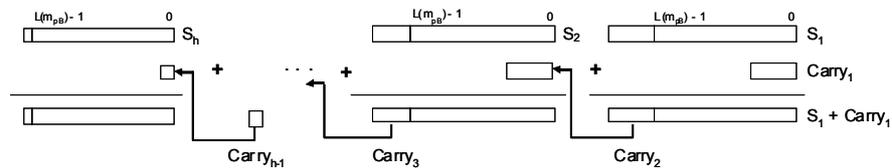


Figura 5-10: Propagación del acarreo

El coste temporal de esta etapa viene dado por el retardo de dos sumas y un producto de longitud variable de una cantidad de cifras similar a la suma de todas las cifras de los operandos. Cada operación de suma tiene un coste lineal con la cantidad de dígitos mientras que el producto tiene una complejidad proporcional al producto de las cifras de los operandos implicados. Aplicando la regla del máximo de la suma de complejidades, el coste temporal asintótico del producto de mantisas corresponde a la expresión siguiente, el cual, sigue siendo cuadrático y proporcional al producto de las cifras que componen los números.

$$T_{\text{Producto_Mantisas_b}} \in O((L(m_{fA}) \cdot (L(m_{fB})+L(m_{pB}))) \quad [5.36]$$

Producto de dos números periódicos

Los factores tienen mantisa periódica significativa: $A, B \in \mathbb{Q}$.

$$\text{Sea } A = 0, m_{fA} \widehat{m}_{pA} \wedge m_{fA} = \alpha_{L(m_{fA})-1} \dots \alpha_0 \wedge m_{pA} = \gamma_{L(m_{pA})-1} \dots \gamma_0 /$$

$$/ L(m_{pA}) > 0 \wedge \exists i \in \{0..L(m_{pA})-1\}, \gamma_i \neq 0$$

Multiplicación de números racionales

11,001001000011111101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000100101100000001101110000011001101000100100100000010001110000010001
000101001100111100110001110100

$$y \ B = 0, m_{fB} \widehat{m}_{pB} \wedge m_{fB} = \alpha_{L(m_{fB})-1} \dots \alpha_0 \wedge m_{pB} = \gamma_{L(m_{pB})-1} \dots \gamma_0 / \\ / L(m_{pB}) > 0 \wedge \exists i \in \{0..L(m_{pB}) - 1\}, \gamma_i \neq 0 \quad [5.37]$$

El resultado del producto será un número periódico que, de acuerdo con el tercer teorema del producto de números racionales fraccionarios, tendrá una cantidad de cifras periódicas múltiplo de las cifras periódicas de ambos factores.

La representación simbólica de los factores adopta la expresión general de fracción de los números racionales:

$$A = 0, m_{fA} \widehat{m}_{pA} = \frac{m_{fA} m_{pA} - m_{fA}}{\underbrace{(Base - 1) \dots (Base - 1)}_{L(m_{pA})} \underbrace{0 \dots 0}_{L(m_{fA})}}$$

$$B = 0, m_{fB} \widehat{m}_{pB} = \frac{m_{fB} m_{pB} - m_{fB}}{\underbrace{(Base - 1) \dots (Base - 1)}_{L(m_{pB})} \underbrace{0 \dots 0}_{L(m_{fB})}}$$

El producto de las fracciones anteriores da lugar a la expresión siguiente:

$$A \cdot B = \frac{(m_{fA} m_{pA} - m_{fA}) \cdot (m_{fB} m_{pB} - m_{fB})}{\underbrace{(Base - 1) \dots (Base - 1)}_{L(m_{pA})} \underbrace{(Base - 1) \dots (Base - 1)}_{L(m_{pB})} \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0}_{L(m_{fA}) + L(m_{fB})}} \quad [5.38]$$

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,0010010000111111010101000100010000101101000110000100011010011000100110001100110001010001011100000011011100000111001101000100101001000000100101110000010001
000101001100111100110001110100

Reordenando los términos que intervienen en la fracción se obtiene:

$$A \cdot B = \frac{(m_{fA} m_{pA} - m_{fA}) \cdot (m_{fB} m_{pB} - m_{fB}) \cdot \text{Base}^{-(L(m_{fA}) + L(m_{fB}))}}{(\text{Base}^{L(m_{pA})} - 1) \cdot (\text{Base}^{L(m_{pB})} - 1)} \quad [5.39]$$

Sean las identidades siguientes:

$$C = (m_{fA} m_{pA} - m_{fA}) \cdot (m_{fB} m_{pB} - m_{fB}) \quad [5.40]$$

$$D = \frac{1}{(\text{Base}^{L(m_{pA})} - 1) \cdot (\text{Base}^{L(m_{pB})} - 1)} \quad [5.41]$$

Sustituyendo [5.40] y [5.41] en [5.39] la operación adopta la siguiente forma:

$$A \cdot B = C \cdot D \cdot \text{Base}^{-(L(m_{fA}) + L(m_{fB}))} \quad [5.42]$$

De acuerdo con esta expresión, la multiplicación de dos números racionales periódicos se descompone en el producto de tres factores característicos: una cantidad C no periódica que contiene la componente significativa de los números, un valor D que aporta la componente periódica y un desplazamiento que contiene su orden de magnitud. Esta descomposición transforma la multiplicación de dos números racionales periódicos en el producto desplazado de un número no periódico, C , por un número periódico, D . Por consiguiente, conocido el valor de C y D , este caso se puede calcular a partir del método expuesto para el producto de un número no periódico por uno periódico. El desplazamiento se abordará en la etapa de normalización.

El cálculo de C se realiza directamente sobre los operandos mediante operaciones de suma y producto de números enteros de longitud variable. Un posible procedimiento para su cálculo consiste en un esquema segmentado similar al descrito en el caso anterior, en el que se obtiene progresivamente y , de forma alternada, resultados parciales de

Multiplicación de números racionales

11,00100100001111110101010001000100001011010001100001000110100110001001100010011000110011000101000100110000000110111000001100110100010010010000001001110000010001
000101001100111100110001110100

cada operación de suma que serán multiplicados en paralelo con los obtenidos en una iteración anterior.

El procesamiento del factor D requiere de una operatoria más elaborada. La expresión siguiente muestra D en términos de un producto de números periódicos unidad:

$$D = \frac{1}{(\text{Base}^{L(m_{pA})} - 1) \cdot (\text{Base}^{L(m_{pB})} - 1)} = \underbrace{0,00 \dots 01}_{L(m_{pA})} \cdot \underbrace{0,00 \dots 01}_{L(m_{pB})} \quad [5.43]$$

De la figura 5-1 se extraen las ecuaciones que determinan el valor de las cifras periódicas de D conforme las expresiones [5.10] y [5.11].

El cuarto teorema del producto de números racionales periódicos formula que los acarreo generados entre los bloques siguen una progresión aritmética de diferencia uno que comienza desde el valor cero para el primero de ellos, es decir: $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = n$

A partir de los resultados obtenidos por este teorema, la organización de sumas de la figura 5-1 que produce el desarrollo del producto de los números periódicos se puede expresar mediante una estructura de conjuntos de sumandos T y P tal como se muestra en la siguiente figura:

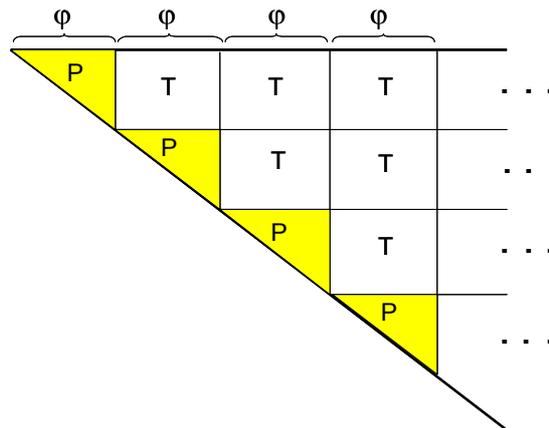


Figura 5-11: Estructura periódica del producto de dos números periódicos

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,0010010000111111011010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101100000001101110000011100110100010010010001000100100110000010001
0001010011001111100110001110100

Como ya se indicó en la expresión [5.22], el valor de cada uno de los bloques T de la figura anterior tiene un valor igual a la base de la representación elevada al número de cifras periódicas menos uno, es decir: $T = \text{Base}^{\phi} - 1$

La figura 5-12 muestra que los sumandos T de una columna, más el acarreo generado por la columna siguiente producen un número potencia de la base más uno. Este valor, más los sumandos residuales P que no constituyen un bloque completo, conforman la cantidad periódica que se repite indefinidamente y da lugar al número racional periódico.

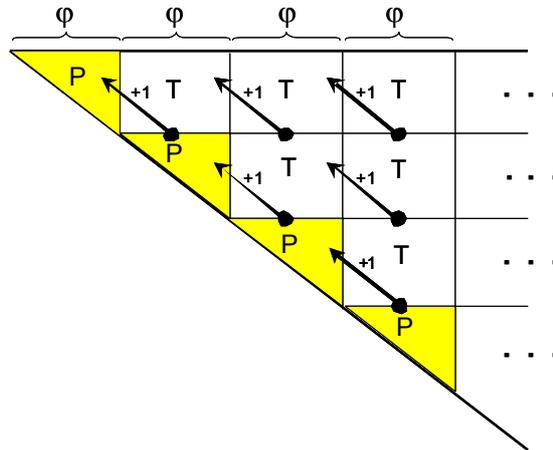


Figura 5-12: Propagación de acarreos producidos

Como consecuencia de esta situación, la cantidad que forma el periodo del número m_{pD} está formada por las sumas de P más uno: $m_{pD} = P+1$.

La longitud del periodo, ϕ , será aquella para la que la suma de las sucesivas rotaciones de la mantisa del primer número periódico puro, una cantidad de veces múltiplo de la longitud de la mantisa del segundo número, sea igual a la base elevada al número de cifras menos dos. La siguiente expresión describe esta relación:

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,00100100001111110101010001000100010110100110000100010101001100010011000110011000101000101110000001101110000011001101000100101001000000100101110000010001
000101001100111100110001110100

$$D = \left(\sum_{i=0}^h \text{DesplazarDer}(p'_A, i \cdot L(m_{pB})) \right) + 1 \quad [5.45]$$

donde,

p'_A : $\varphi - L(m_{pB})$ cifras más significativas de la parte fraccionaria de $[\text{Base}^{L(m_{pA})} - 1]^{-1}$.

DesplazarDer(y, x): desplazamiento del valor y, x posiciones a la derecha.

h : $\lceil \varphi / L(m_{pB}) \rceil - 1$. [5.46]

El método propuesto para el cálculo del factor D calcula las cifras del periodo directamente sin tener que calcular previamente su cantidad de cifras. Las continuas rotaciones de la mantisa unidad del primer número periódico corresponden con secuencias de cifras correlativas de longitud $L(m_{pB})$ pertenecientes a la expansión periódica de dicho operando. La siguiente figura muestra esta observación gráficamente, donde p_A es el desarrollo del número periódico unidad del primer factor.

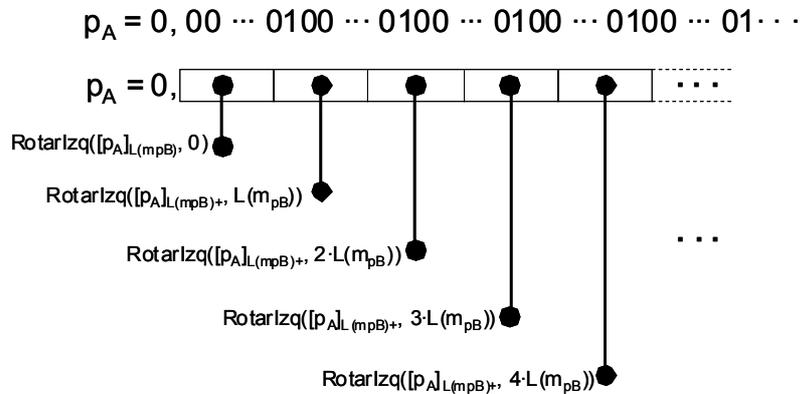


Figura 5-14: Rotaciones sucesivas de la mantisa periódica

Las sumas sucesivas de tales rotaciones corresponden verticalmente con las $L(m_{pB})$ cifras de menor peso de las sumas desplazadas en el cálculo del periodo. Esta observación permite calcular directamente y de forma gradual la mantisa del número periódico D siguiendo el siguiente

Multiplicación de números racionales

11,00100100001111110101010001000100001010100011000010001101001100010001100010001100110001000100010111000000110111000001110011010001001001000000100101110000010001110000010001
0001010011001111100110001110100

procedimiento iterativo: tomando como primer término una secuencia de $L(m_{pB})$ ceros, se concatenan los resultados de las sumas entre el valor anterior y la sucesiva rotación hacia la izquierda de un número periódico unidad de grado igual a $L(m_{pA})$. El proceso termina cuando tras una suma se alcanza el valor $\text{Base}^{L(m_{pB})} - 1$. Esa cantidad no se concatena al resultado, en su lugar se incrementa en una unidad el anterior valor obtenido.

La siguiente figura muestra que los resultados de esas sumas forman parte del periodo. En cada suma se obtiene una nueva porción de $L(m_{pB})$ cifras de D de forma incremental. Debido a la naturaleza del valor límite no hay posibilidad de que se produzca acarreo durante el procedimiento y solo en la última iteración se suma uno al resultado.

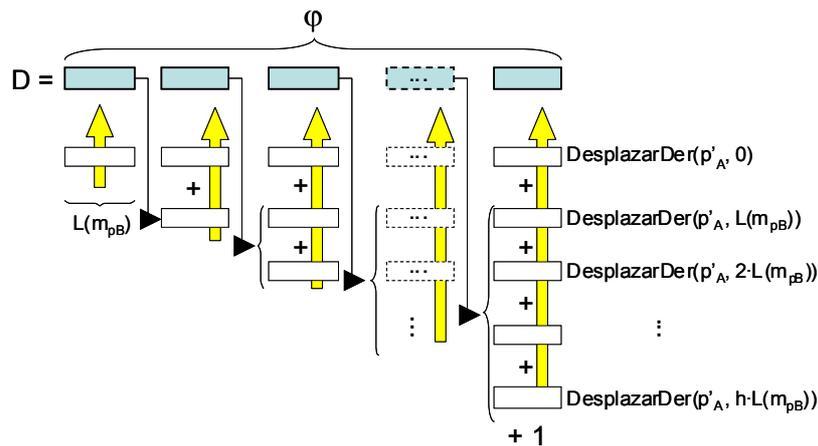


Figura 5-15: Sumas sucesivas por columnas

Una vez obtenido el valor de C y D se multiplican entre sí según el procedimiento de multiplicación de un número periódico por otro no periódico. Con respecto al orden de magnitud del resultado, será en la etapa de normalización donde se ajuste según la magnitud y el sentido del desplazamiento.

Las sumas y productos que intervienen en el cálculo de los factores C y D son operaciones de longitud variable y se realizan según los algoritmos que se han descrito para ellas. La complejidad temporal de

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,00100100001111110101010001000100001011010001100001000110100110001001100011000110001010001011000000011011100000111001101000100100100000000100101110000010001
000101001100111100110001110100

este apartado está en función del tiempo empleado en el cálculo de C y D y de su multiplicación.

- *Cálculo de C* : el coste resulta proporcional a la cantidad de cifras de los operandos:

$$T_{\text{Producto_Mantisas_c1}} \in O(L(m_A) \cdot L(m_B)) \quad [5.47]$$

- *Cálculo de D* : la sucesión de rotaciones y sumas necesaria para su cálculo es proporcional a la cantidad de cifras del periodo, el cual a su vez es múltiplo de las longitudes de los periodos de ambos números.

$$T_{\text{Producto_Mantisas_c2}} \in O(L(m_{pA}) \cdot L(m_{pB})) \quad [5.48]$$

- *Producto $C \cdot D$* : esta multiplicación tiene un coste asintótico proporcional al producto de la cantidad de cifras de C y D , es decir, lineal con la cantidad total de cifras fijas de las mantisas y cuadrático con las periódicas.

$$T_{\text{Producto_Mantisas_c3}} \in O((L(m_A) + L(m_B)) \cdot L(m_{pA}) \cdot L(m_{pB})) \quad [5.49]$$

Las expresiones anteriores se combinan mediante la regla del máximo de complejidades, y queda una complejidad asintótica temporal según se muestra en la siguiente expresión:

$$T_{\text{Producto_Mantisas_c}} \in O((L(m_A) + L(m_B)) \cdot L(m_{pA}) \cdot L(m_{pB})) \quad [5.50]$$

Determinación del signo

El signo del resultado dependerá únicamente de los signos de los operandos y se obtiene mediante el método tradicional para el producto. Su cálculo se puede realizar en cualquier momento durante toda la operación y en paralelo con otra etapa de la misma.

Como se observa en las expresiones de la complejidad, el coste total de la etapa de producto de mantisas depende de la naturaleza de los operandos iniciales. En ello, existen tantas variables independientes como campos significativos tienen los números, lo que impide una

Multiplicación de números racionales

11,0010010000111111010101001000100001011010001100001000110100110001100110001100110001010001011100000011011100000111001101000100100100000001001001110000010001
000101001100111100110001110100

expresión sencilla de la complejidad de la operación completa. De las expresiones [5.25], [5.36] y [5.50] se deduce que el retardo de esta etapa corresponde a la siguiente expresión:

$$T_{\text{Producto_Mantisas}} \in O((L(m_A) \cdot L(m_B)), (L(m_A) + L(m_B)) \cdot L(m_{pA}) \cdot L(m_{pB})) \quad [5.51]$$

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,00100100001111110110101010001000100001011010001100001000110100110001100110001100110001010001011100000001101110000011100110100010010100100000000100101110000010001
000101001100111100110001110100

Normalización

En esta etapa se procesa la mantisa y el exponente generados en las etapas anteriores para adecuarlos al formato propuesto en este trabajo y evitar ambigüedades de la representación. Se realizan las mismas tareas que en la operación de suma, sin embargo, al no existir compensación entre los dos operandos en esta operación, la búsqueda del primer uno significativo necesitará de un menor tiempo de procesamiento. Por otra parte, la actualización del exponente debe tener en cuenta no sólo los desplazamientos originados por la detección del primer uno sino también los movimientos pendientes tras el producto de mantisas.

La complejidad temporal de estas operaciones para el producto tendrá una expresión similar a la de la suma.

$$T_{\text{Normalización}} \in O(L(e_A), L(e_B), (L(m_A) + L(m_B)) + L(m_{pA}) \cdot L(m_{pB})) \quad [5.52]$$

Coste total de la operación de multiplicación

Las etapas de cálculo que forman la operación de multiplicación pueden ordenarse según distintos criterios de diseño. Desde un punto de vista de las dependencias entre los datos su ejecución se puede realizar en serie o bien en paralelo, en concreto el cálculo de los exponentes junto con el producto de mantisas. Sin embargo, el coste asintótico de la operación completa no se ve afectado por estas decisiones y tomará el máximo coste de las etapas que intervienen.

La independencia en la longitud de los campos que constituyen el número provoca una expresión en términos condicionales. La complejidad temporal del producto de números racionales de longitud variable corresponde a la que se muestra en la expresión siguiente:

$$T_{\text{multiplicación-Q}} \in O(T_1, T_2, T_3) \quad [5.53]$$

donde,

$$T_1 \in O(L(e_A), L(e_B))$$

Multiplicación de números racionales

11,00100100001111110101010010001000010110100011000010001101001100010011000110011000100100010111000000011011100000111001101000100100100000001001001110000010001
000101001100111100110001110100

$$T_2 \in O((L(m_A) \cdot L(m_B)), (L(m_A) + L(m_B)) \cdot L(m_{pA}) \cdot L(m_{pB}))$$

$$T_3 \in O(L(e_A), L(e_B), (L(m_A) + L(m_B)) + L(m_{pA}) \cdot L(m_{pB}))$$

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,0010010000111111010101000100010001011010001000010001101001100010011000110011000101000101110000001101110000011100110100010010100100000010001110000010001
000101001100111100110001110100

Ejemplo del producto de dos números periódicos

Con el objetivo de clarificar el procedimiento de multiplicación de dos números racionales periódicos se desarrollan dos ejemplos para números en decimal y en binario.

Ejemplo 1: Base 10

Sea:

$$A = 0,9\widehat{020} \rightarrow m_{fA} = 90; m_{pA} = 20; L(m_{fA}) = 2; L(m_{pA}) = 2$$

$$B = 0,6\widehat{7} \rightarrow m_{fB} = 6; m_{pB} = 7; L(m_{fB}) = 1; L(m_{pB}) = 1$$

Cálculo de C:

$$C = (9020 - 90) \cdot (67 - 6) = 544730$$

Cálculo de D:

$$D = \frac{1}{99 \cdot 9} = 0,0\widehat{1} \cdot 0,1$$

De acuerdo con el tercer teorema del producto de números periódicos, la cantidad de cifras que componen el periodo será múltiplo de dos. A continuación se presenta el proceso de cálculo del factor D, según el procedimiento expuesto.

El método consiste en realizar sumas sucesivas sobre las rotaciones del periodo de A y comprobar, tras cada operación, su igualdad con el patrón $\text{Base}^{L(m_{pB})} - 1$. Cada suma parcial obtenida, excepto la última, pasará a formar parte del valor D hasta que se cumpla la condición de finalización y se sume uno al resultado. El número así constituido por la concatenación de tales sumas corresponde con la mantisa periódica de D.

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,00100100001111110110101010001000100001011010001100001000110100110001001100011001100010100010111000000110111000001110011010001001010010000001001001110000010001
000101001100111100110001110100

Figura 5-17: Desarrollo de sumas para la obtención de D en el ejemplo decimal

En la figura anterior se observa cómo se forma el valor del periodo a partir de los sumandos señalados por el triángulo de la izquierda de la figura. Se marcan los conjunto de sumas T , cuyo valor es de $10^0 - 1$.

La operación se transforma en un producto entre un número no periódico y un número periódico:

$$A \cdot B = 544730 \cdot \overbrace{0,001122334455667789} \cdot 10^{-3}$$

Esta operación se realiza según el procedimiento descrito para ella que ilustra la siguiente figura:

$$544730 \cdot 1122334455667789 = 611369248035914701970$$

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{611369248035914701970}^{\varphi} \\
 + \quad \underbrace{}_{\triangleleft} \\
 \hline
 611369248035914702581 \\
 \underbrace{}_{\varphi}
 \end{array}$$

Figura 5-18: Cálculo del producto de un número periódico por otro no periódico en el ejemplo decimal

Finalmente, se normaliza el resultado según el desplazamiento requerido y la posición de la primera cifra mayor que cero.

$$R = A \cdot B = 0,\overbrace{611369248035914702581}$$

donde,

$$m_{fR} = 611; m_{pR} = 369248035914702581; L(m_{fR}) = 3; L(m_{pR}) = 18$$

Multiplicación de números racionales

11,001001000011111101010100010001000010110100011000010001101001100010011000100110001001100010011000000011011100000110011010001001001000000100101110000010001
0001010011001111000110001110100

Ejemplo 2: Base 2:

Sea:

$$A = 0,10\overline{1001} \rightarrow m_{fB} = 10; m_{pB} = 1001; L(m_{fB}) = 2; L(m_{pB}) = 4$$

$$B = 0,1100\overline{011} \rightarrow m_{fA} = 1100; m_{pA} = 011; L(m_{fA}) = 4; L(m_{pA}) = 3$$

Cálculo de C:

$$C = (101001 - 10) \cdot (1100011 - 1100) = 110101000001$$

Cálculo de D:

$$D = \frac{1}{1111 \cdot 111} = 0,\overline{0001} \cdot 0,\overline{001}$$

La cantidad de cifras que componen el periodo será múltiplo de tres y de cuatro, es decir, múltiplo de doce.

Al igual que en el ejemplo, anterior se obtiene el valor de D según el método propuesto. En este caso el valor límite es de:

$$\text{Base}^{L(m_{pB})} - 1 = 2^3 - 1 = 111_2$$

En la figura siguiente se muestra todo el proceso de formación de D:

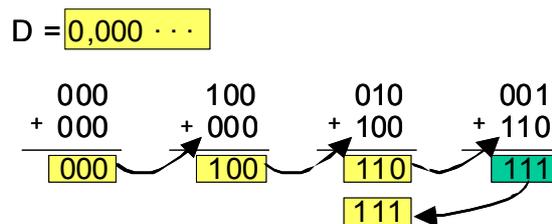


Figura 5-19: Composición de las cifras del valor D en el ejemplo binario

De esta forma:

$$D = 0,\overline{000000100111}$$

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,001001000011111101101010001000100010110100011000010001101001100010011000110001100010100010110000000110111000001110011010001001001000000010010111000001000110000010001

El producto queda:

$$A \cdot B = 110101000001 \cdot 0,000000100111 \cdot 2^{-6}$$

La siguiente figura muestra la estructura de sumas generada para la formación de D. Se observan los conjuntos de sumas T y los sumandos que constituyen las cifras periódicas.

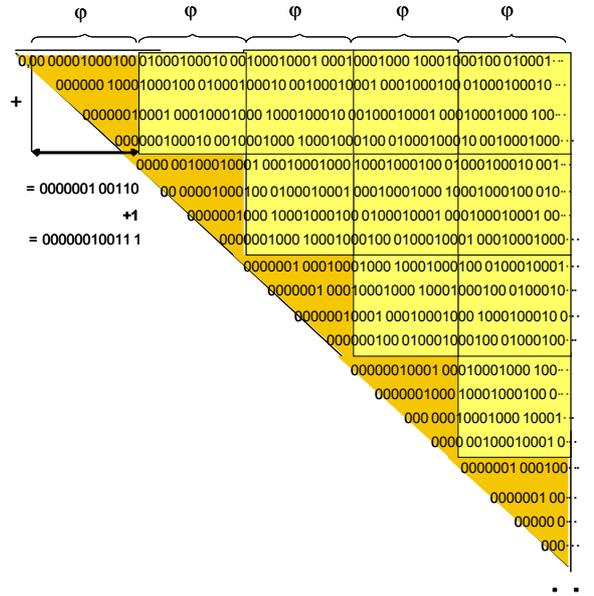


Figura 5-20: Desarrollo de sumas para la obtención de D en el ejemplo binario

Realizando el producto del número periódico por el no periódico:

$$110101000001 \cdot 100111 = 10000010011100111$$

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{10011100111}^{\phi} \\
 + \\
 \hline
 100000 \overbrace{10100000111}^{\phi}
 \end{array}$$

Figura 5-21: Cálculo del producto de un número periódico por otro no periódico en el ejemplo binario

Y finalmente, tras la normalización se obtiene el resultado:

Instrumentación de la función multiplicación

Conocido el procedimiento para multiplicar dos números racionales expresados en el formato propuesto, a continuación se describe la instrumentación de la función multiplicación en precisión variable que tiene en cuenta restricciones acerca de la cantidad de cifras significativas del resultado. Posteriormente se analizan experimentalmente algunos aspectos del método de multiplicación y de su complejidad y se comprueba la calidad de los resultados de otros métodos de multiplicar convencionales mediante su comparación con los resultados exactos que produce el método propuesto.

La función en precisión variable admite control sobre la cantidad de cifras mediante un parámetro adicional a los factores, lo que permite distintos grados de aproximación al valor exacto según describe la siguiente expresión:

$$|\Gamma_{\text{producto}}^{\text{VP}}(\bar{x}, \bar{d}) - \text{producto}(\bar{x})| \leq \varepsilon \quad [5.54]$$

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,00100100001111110101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101100000001101110000011100110100010010010000000100101110000010001
000101001100111100110001110100

El perfil de la instrumentación $\Gamma_{\text{producto}}^{\text{VP}}(\bar{x}, \bar{d})$ tiene la siguiente formulación:

$$\Gamma_{\text{producto}}^{\text{VP}}(\bar{x}, \bar{d}) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \quad [5.55]$$

donde los parámetros mantienen el mismo significado que en la función anterior:

$$\begin{aligned} \bar{x} &\equiv (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ \bar{d} &\equiv \langle d_{L(e)}, d_{L(m)} \rangle, \text{ con } d_{L(e)} \in \mathbb{N} \wedge d_{L(m)} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Como se ha comprobado en la primera parte de este capítulo, la función obtiene el resultado exacto del producto de factores racionales expresados en el formato propuesto con un tamaño de registro finito, tal como se formula en la siguiente expresión:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \exists \bar{d} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \Gamma_{\text{producto}}^{\text{VP}}(x, y, \bar{d}) = \text{producto}(x, y) \quad [5.56]$$

En los siguientes apartados se presenta la instrumentación de la función producto, $\Gamma_{\text{producto}}^{\text{VP}}$ donde se describe la propuesta de diseño de cada una de las etapas del algoritmo con el mismo criterio que el empleado para la suma. Se vigila el crecimiento de los números para proveer un valor aproximado en caso de que no sea posible alcanzar el resultado sin error. Los operadores elementales de suma y multiplicación que intervienen se construyen mediante lógica almacenada por coherencia con el resto del modelo. Los factores mantienen la estructura que muestra la figura 4-14 para la suma.

Suma de exponentes

La operación se realiza mediante el método propuesto en este trabajo y calcula la suma y su sucesor. La resta del sesgo del resultado se implementa complementando el bit más significativo del sucesor de la suma de exponentes, tal como se muestra en la siguiente figura:

Instrumentación de la función multiplicación

11,00100100001111110101010001000100001011010001100001000110100110001001100011001100010100010111000000110111000011100110100010010100100000100111000001000110000010001
000101001100111100110001110100

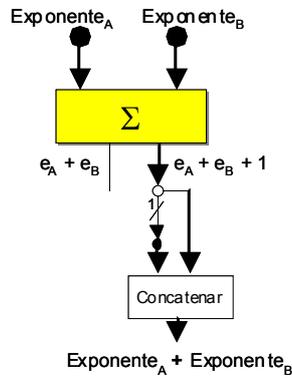
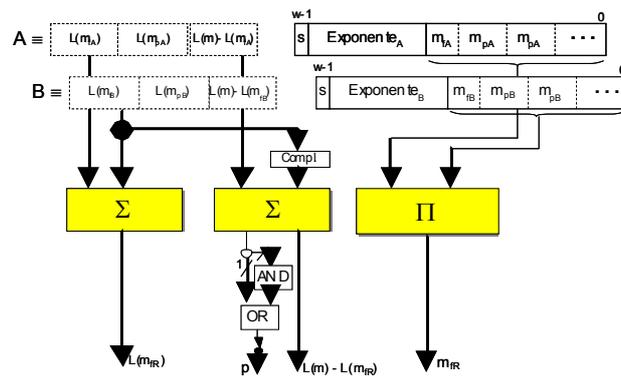


Figura 5-22: Esquema de la etapa del cálculo de la suma de exponentes

Producto de mantisas

En el producto de dos números no periódicos, la multiplicación de las mantisas de ambos factores conforma directamente la mantisa del resultado. La instrumentación basada en el formato de representación que se propone debe calcular también su longitud así como la separación entre la parte fija y periódica, para lo cual son necesarias sendas operaciones de suma sobre los valores correspondientes de los operandos. En el caso de que el resultado sobrepase la zona dedicada a contenerlo, el indicador p de exactitud marcará la presencia de un resultado aproximado. En la figura siguiente se aprecia el diagrama funcional de esta etapa.



Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,00100100001111110110101010001000100001011010001100001000110100110001100110001100110001010001011100000001101110000011100110100010010100100000001001001110000010001
0001010011001111100110001110100

Figura 5-23: Esquema de la etapa del producto de mantisas en la multiplicación de dos números no periódicos

La instrumentación del producto de un número no periódico por otro periódico considera el carácter cíclico de las cifras de uno de los operandos. En primer lugar se separan las mantisas fijas de las periódicas y se colocan en la zona menos significativa de los registros mediante desplazamientos hacia la derecha. La multiplicación de su producto por la componente periódica del número se implementa a través de una estructura iterativa que va calculando progresivamente el valor de la expresión [5.33] y del acarreo producido a partir de las cifras periódicas. Éste cálculo se realiza en otra estructura de suma paralela dentro de la iteración anterior.

Como se deduce de figura 5-24, la instrumentación que se propone difiere ligeramente del método de cálculo que se ha presentado para operar con números de longitud variable, algo esperado al manipular registros de longitud fija. En relación con el mantenimiento de las longitudes de los registros, tan sólo se precisa la longitud del periodo, ya que los otros datos serán calculados en la etapa de normalización.

Instrumentación de la función multiplicación

11_00100100000111110110101010001000100001011010001100001000110100110001001100011001100010100010111000000011011100000111001101000100101001000000100101110000010001110000010001

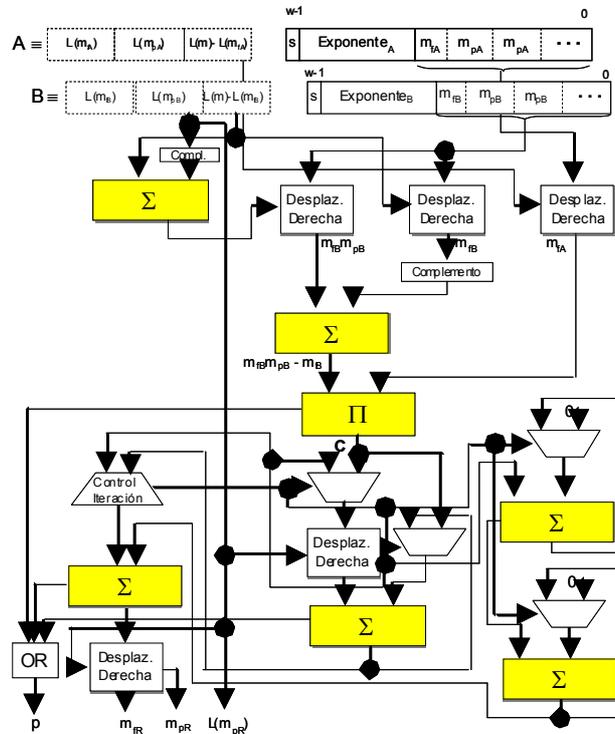


Figura 5-24: Esquema de la etapa de producto de mantisas en la multiplicación de un número no periódico y otro periódico

En la figura anterior se observa que la gestión de la precisión está presente en los módulos que implican crecimiento del contenido de los registros. El operador de multiplicación incorpora un indicador que avisa de la existencia de desbordamiento, aunque su activación no impide continuar con el resto del proceso hasta completar el registro con el propósito de obtener el mejor resultado. En las operaciones de suma se considera el acarreo que se produzca en la misma medida.

Finalmente, el producto de dos números periódicos debe resolver la instrumentación de la ecuación [5.42] para convertir la operación en la multiplicación de un número no periódico por otro periódico. El cálculo del factor no periódico emplea los operadores de suma y producto entre datos alojados en registros de longitud fija. Para la obtención del factor periódico se emplea una estructura que sigue fielmente el

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,00100100001111110110101000100010000101101001100001000110100110001100110001010001011010000001101110000011100110100010010100000010010111000010001
000101001100111100110001110100

procedimiento que ilustra la figura 5-15. En su construcción se utiliza un módulo de generación de periodo unidad, un desplazador, un sumador, un concatenador de cifras en un registro y un módulo de control para terminar el proceso y vigilar el desbordamiento. La siguiente figura ilustra la organización de todos los componentes necesarios que obtienen el valor de los factores mencionados.

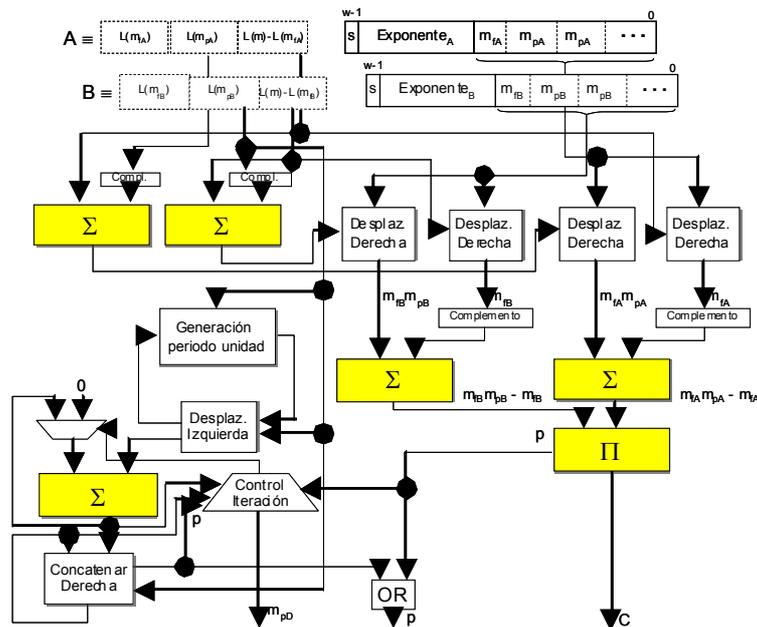


Figura 5-25: Esquema de la etapa de producto de mantisas en la multiplicación de dos números periódicos

La gestión de la precisión sigue un procedimiento similar al del caso anterior. Su control es necesario en las operaciones de multiplicación y en la generación de la mantisa periódica, ya que las sumas que intervienen no producen acarreo ni desbordamiento. Cuando no sea posible mantener el resultado en los registros disponibles se activa el indicador de exactitud y se detiene el proceso de cálculo de la parte periódica del resultado.

Normalización

Instrumentación de la función multiplicación

11,001001000011111101101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000000110111000001110011010001001010010000000001001001110000010001
0001010011001111100110001110100

Las acciones que se realizan en esta etapa son iguales a las que se ejecutan en la operación de suma por lo que se mantiene la instrumentación que muestra la figura 4-19.

Evaluación empírica

Los experimentos sobre la multiplicación se realizan en las mismas condiciones de entorno que en las pruebas anteriores de las funciones identidad y suma. Se sigue el mismo esquema que en esta última operación al clasificar las pruebas en tres conjuntos en función de su ámbito de estudio.

Experimentos I

Este primer conjunto de experimentos se centra en estudiar la frecuencia de simplificación de las mantisas periódicas y de eliminación de submantisas periódicas en la mantisa fija del resultado. Se consideran distintos intervalos de generación de valores racionales.

El perfil de este conjunto de pruebas es el siguiente:

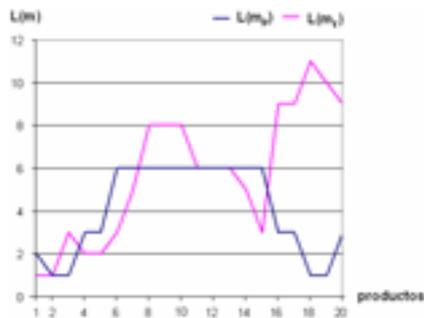
- Producto de números racionales periódicos representados en el formato propuesto.
- Los valores pertenecen al intervalo $(0, 256]$, donde cada número se construye mediante la fracción $\frac{a}{b}$, siendo a, b números enteros aleatorios generados en intervalos crecientes:
 $a, b \in [1..i]$, para $i = \{16, 32, 64, 128, 256\}$
- Realización de 10^6 productos independientes en cada intervalo.

Instrumentación de la función multiplicación

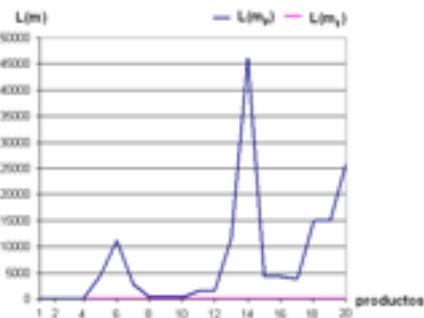
11,00100100001111110101010100010001000101101000110000100011010011000100110001100110001010001011100000011011100000110011010001001010010000010001110000010001
000101001100111100110001110100

- Los valores pertenecen al intervalo $(0, 80]$, donde cada número se construye mediante la fracción $\frac{a}{b}$, siendo a, b números enteros aleatorios generados en intervalos crecientes:
 $a, b \in [1..i]$, para $i = \{10, 20, \dots, 80\}$
- Realización de 20 multiplicaciones sucesivas en cada intervalo.

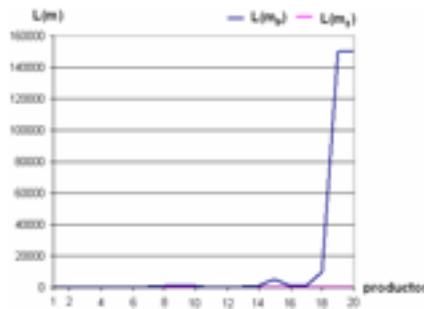
Los resultados obtenidos se muestran en las gráficas de la figura 5-26. En cada gráfica se muestra conjuntamente el crecimiento de la mantisa fija y periódica para el intervalo de generación indicado.



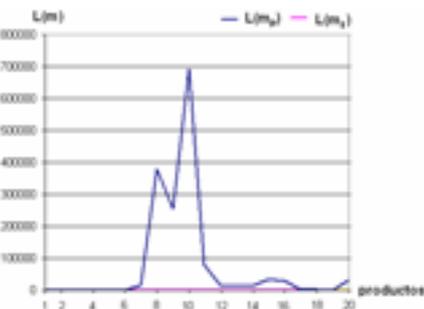
$a, b \in [1..10]$



$a, b \in [1..20]$



$a, b \in [1..30]$



$a, b \in [1..40]$

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,001001000011111101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000000110111000001110011010001001001000000001001110000010001
000101001100111100110001110100

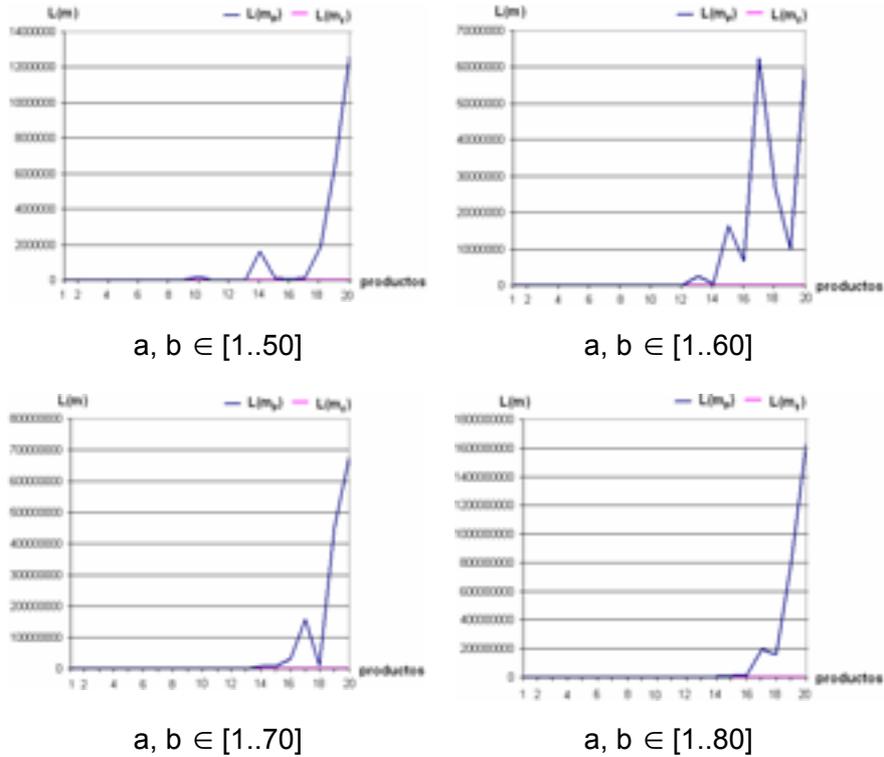


Figura 5-26: Crecimiento de la longitud de las mantisas del resultado de operaciones encadenadas

Se observa que el crecimiento de las mantisas fijas es significativamente menor que el de las mantisas periódicas. Éstas presentan un crecimiento que está en relación directa con el tamaño del intervalo de generación de los números y de cantidad de multiplicaciones que se realicen. Se producen notables disminuciones y aumentos bruscos de tamaño que se deben a las frecuentes simplificaciones en la etapa de normalización que reducen la longitud de la mantisa periódica.

En todos los casos, para un pequeño número de multiplicaciones sucesivas, el tamaño de la mantisa periódica se mantiene en unos límites reducidos independientemente del rango de generación de los factores.

Experimentos III

El objetivo de estas pruebas es el de comprobar la calidad de los resultados que proporciona el método de multiplicar convencional sobre operandos representados en el formato estándar IEEE-754 para secuencias de multiplicaciones encadenadas. Las pruebas comparan la desviación que produce el método convencional con el resultado exacto. Para contemplar el mayor número de casos se consideran múltiples escenarios de generación de los factores que combinen los aspectos de redondeo, precisión y cantidad de operaciones sucesivas.

El perfil de los experimentos es el siguiente:

- Realización de multiplicaciones sucesivas mediante el método de multiplicar propuesto para operandos racionales y mediante la multiplicación de acuerdo con la representación IEEE-754 en simple y doble precisión. La relación entre la cantidad de multiplicaciones de cada secuencia corresponde con una progresión geométrica de razón 10 según la siguiente expresión:

$$R_Q = \prod_{i=1}^{10^t} q_i, \text{ donde } t \in \{0..7\} \quad [5.57]$$

- Los números pertenecen al intervalo $(0, 50]$ y se construyen mediante una fracción $\frac{a}{b}$, donde a, b son valores enteros en el rango $[1..50]$.
- Realización de 10^3 pruebas de cada caso.

El crecimiento de la complejidad espacial de los sucesivos resultados parciales de las multiplicaciones sugiere orientar la generación aleatoria de los factores para mantener el tamaño de los números dentro de unos límites manejables. La sucesión de los factores de cada secuencia de operaciones se genera con el siguiente criterio:

$$q_1 = \frac{a_1}{b_1}, \text{ donde } a_1 \text{ y } b_1 \text{ son aleatorios en el rango } [1..50].$$

$$q_2 = \frac{a_2}{b_2}, \text{ donde } a_2 = b_1 \text{ y } b_2 \text{ es aleatorio en el rango } [1..50].$$

...

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,001001000011111101101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000000110111000001110011010001001010010000001001001110000010001
000101001100111100110001110100

$$q_i = \frac{a_i}{b_i}, \text{ donde } a_i = b_{i-1} \text{ y } b_i \text{ es aleatorio en el rango } [1..50].$$

...

$$q_t = \frac{a_t}{b_t}, \text{ donde } a_t = b_{t-1} \text{ y } b_t = a_1.$$

Con este método de generación de los operandos, el resultado de la expresión [5.58], independientemente del número de factores que contenga, es siempre igual a 1. Se ha comprobado experimentalmente que en todos los casos el método propuesto alcanza este número exactamente. Para medir la calidad de los métodos convencionales se comparan sus resultados con el valor esperado en cada caso. La siguiente tabla muestra el promedio de la posición de la primera cifra incorrecta en los resultados.

Instrumentación de la función multiplicación

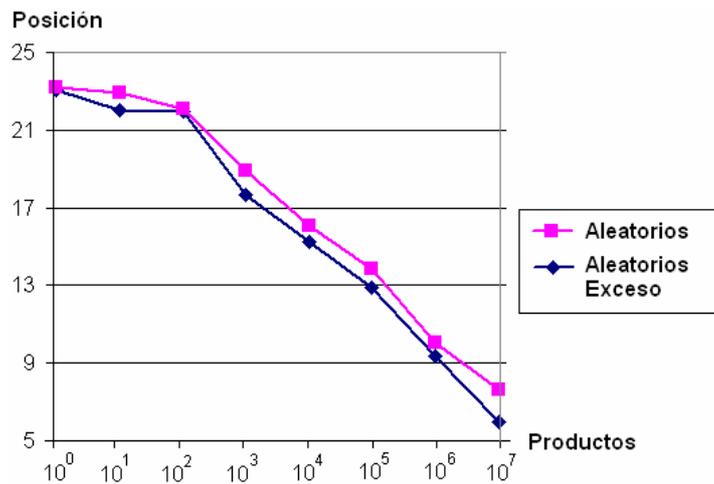
11,001001000011111101010100010001000001011010001100001000110100110001000110001100010001100010001100010001100000001101110000011001101000100100100000000100100110000010001

Simple precisión:

IEEE-754 simple precisión				
Número de operaciones	Números aleatorios		Números aleatorios con redondeo por exceso	
	Posición	σ	Posición	σ
10^0	23,23	10,43	23,09	10,35
10^1	22,91	8,8	22,01	8,74
10^2	22,11	8,83	21,98	8,56
10^3	18,89	7,95	17,63	7,83
10^4	16,09	7,04	15,21	8,046
10^5	13,87	7,38	12,92	6,65
10^6	10,07	6,48	9,34	6,00
10^7	7,62	5,23	5,99	5,78

Tabla 5-2: Primera posición incorrecta en operaciones sucesivas con el formato IEEE-754 en simple precisión

En la figura siguiente se muestran gráficamente los resultados de la tabla anterior.



Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,001001000011111101101010100010001000010110100011000010001101001100010011000110011000101000101110000000110111000001110011010001001010010000001001001110000010001
000101001100111100110001110100

Figura 5-27: Primera posición incorrecta en operaciones sucesivas con el formato IEEE-754 en simple precisión

Doble precisión:

IEEE-754 doble precisión				
Número de operaciones	Números aleatorios		Números aleatorios con redondeo por exceso	
	Posición	σ	Posición	σ
10^0	51,87	16,32	51,74	16,10
10^1	51,23	15,49	51,05	16,45
10^2	50,16	15,36	49,78	15,37
10^3	48,34	14,93	47,34	15,28
10^4	45,93	14,13	45,11	14,35
10^5	43,13	14,05	42,34	13,48
10^6	39,81	13,53	38,67	13,25
10^7	36,21	13,07	34,85	12,58

Tabla 5-3: Primera posición incorrecta en operaciones sucesivas con el formato IEEE-754 en doble precisión

En la figura siguiente se muestran gráficamente los resultados de la tabla anterior.

Instrumentación de la función multiplicación

11,0010010000111111011010101000100010000010110100011000010001101001100010001100011000100010001011000000011011100000110011010001001010010000001000110000010001
000101001100111100110001110100

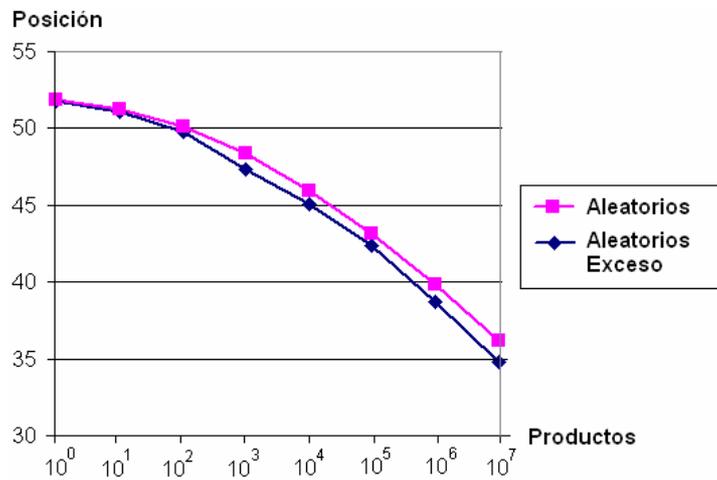


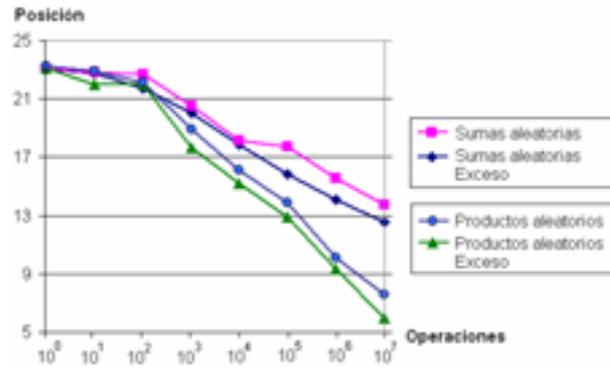
Figura 5-28: Primera posición incorrecta en operaciones sucesivas con el formato IEEE-754 en doble precisión

Los resultados que muestran las tablas 5-2 y 5-3 y que ilustran las figuras 5-27 y 5-28 verifican que la posición de la primera cifra diferente se aleja de la precisión establecida por el formato conforme aumenta la cantidad de operaciones y cada vez adquiere mayor pendiente. En todos los casos, las multiplicaciones de números representados con un redondeo en exceso producen un resultado de peor calidad que el producto de valores con un redondeo arbitrario.

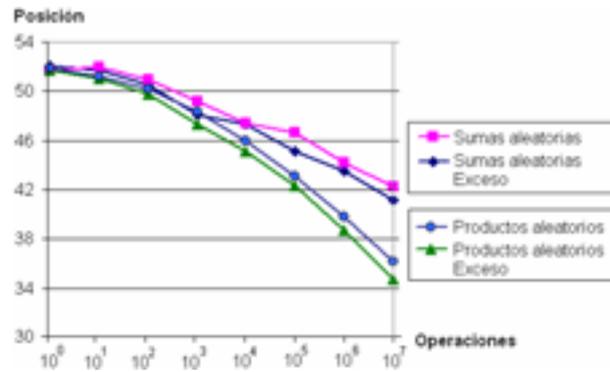
En la comparación de los datos de la multiplicación con los de la operación de suma se observa que con la misma cantidad de operaciones la desviación que se produce en una secuencia de multiplicaciones es mucho mayor que en una secuencia de sumas. En la siguiente gráfica se muestra la tendencia comparada para números en simple y doble precisión.

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,00100100001111110101010100010001000101010011000010001101001100010011000110001000101011000000011011100000110011010000100100100000000100101110000010001



(a)



(b)

Figura 5-29: Comparación de la primera posición incorrecta en operaciones sucesivas con el formato IEEE-754. (a) simple precisión; (b) doble precisión

Las siguientes tablas y figuras muestran la dimensión del error cometido en relación con el valor exacto del resultado.

Para datos en *simple precisión*:

IEEE-754 simple precisión				
Número de operaciones	Números aleatorios		Números aleatorios con redondeo por exceso	
	Posición	σ	Posición	σ
10 ⁰	2,991 · 10 ⁻⁸	1,429 · 10 ⁻¹³	3,001 · 10 ⁻⁸	8,284 · 10 ⁻¹²

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,001001000011111101010100010001000010110100010000100011010011000100110001100010001000101110000000110111000001110011010001001001000100000100101110000010001

10^0	$5,589 \cdot 10^{-17}$	$8,582 \cdot 10^{-28}$	$5,891 \cdot 10^{-17}$	$1,627 \cdot 10^{-32}$
10^1	$2,661 \cdot 10^{-16}$	$9,187 \cdot 10^{-21}$	$3,477 \cdot 10^{-16}$	$3,192 \cdot 10^{-20}$
10^2	$7,940 \cdot 10^{-16}$	$6,425 \cdot 10^{-16}$	$9,029 \cdot 10^{-16}$	$2,664 \cdot 10^{-16}$
10^3	$1,645 \cdot 10^{-15}$	$6,151 \cdot 10^{-15}$	$5,465 \cdot 10^{-15}$	$4,813 \cdot 10^{-15}$
10^4	$2,826 \cdot 10^{-14}$	$1,917 \cdot 10^{-14}$	$7,768 \cdot 10^{-14}$	$6,510 \cdot 10^{-14}$
10^5	$3,235 \cdot 10^{-13}$	$5,433 \cdot 10^{-13}$	$8,459 \cdot 10^{-13}$	$1,854 \cdot 10^{-13}$
10^6	$7,005 \cdot 10^{-12}$	$1,087 \cdot 10^{-12}$	$1,231 \cdot 10^{-11}$	$8,909 \cdot 10^{-11}$
10^7	$6,617 \cdot 10^{-11}$	$5,983 \cdot 10^{-11}$	$2,127 \cdot 10^{-10}$	$2,336 \cdot 10^{-10}$

Tabla 5-5: Error promedio en operaciones sucesivas con el formato IEEE-754 en doble precisión

El crecimiento del error se ilustra en la siguiente figura:

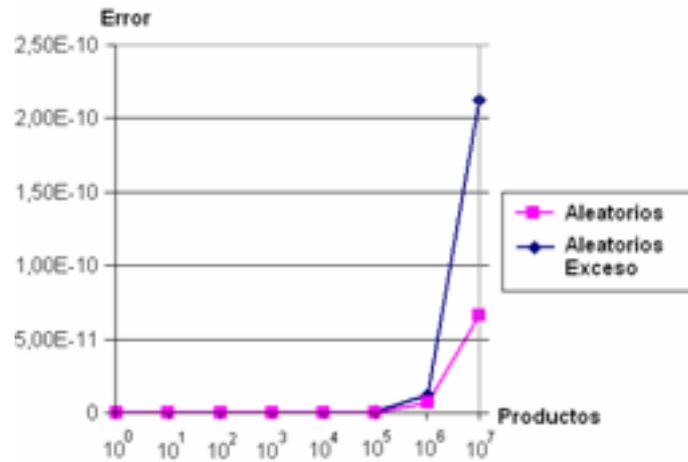


Figura 5-31: Error promedio en operaciones sucesivas con el formato IEEE-754 en doble precisión

Los resultados que se muestran referentes al tamaño del error corroboran las observaciones realizadas sobre la primera posición incorrecta. Con una cantidad reducida de operaciones el error se mantiene en una cota cercana al límite de precisión del formato. Se observa que la desviación que comete el procesamiento de los números con redondeo en exceso está un orden de magnitud por encima de los

Instrumentación de la función multiplicación

11,0010010000111111010101010001000100001011010001100001000110100110001000110001100011000110001100011000110001100000011011100000110011010001001001000000100100110000010001
000101001100111100110001110100

otros casos de prueba. Al igual que pasaba en la operación de suma, la no compensación de los restos en el redondeo provoca una mayor desviación respecto al valor exacto.

El error crece a un ritmo proporcional a la cantidad de operaciones encadenadas que se ejecuten. Para una mayor claridad en los resultados la figura 5-32 muestra gráficamente la evolución del error en escala logarítmica.

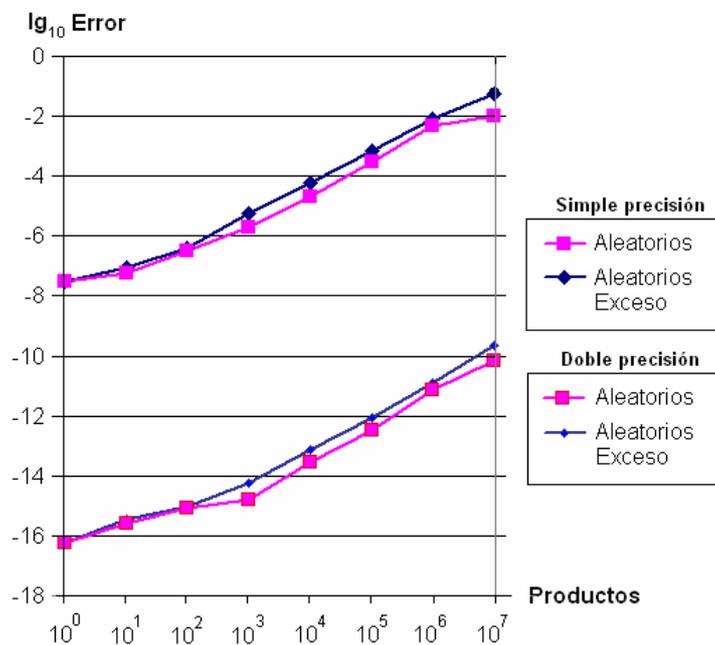
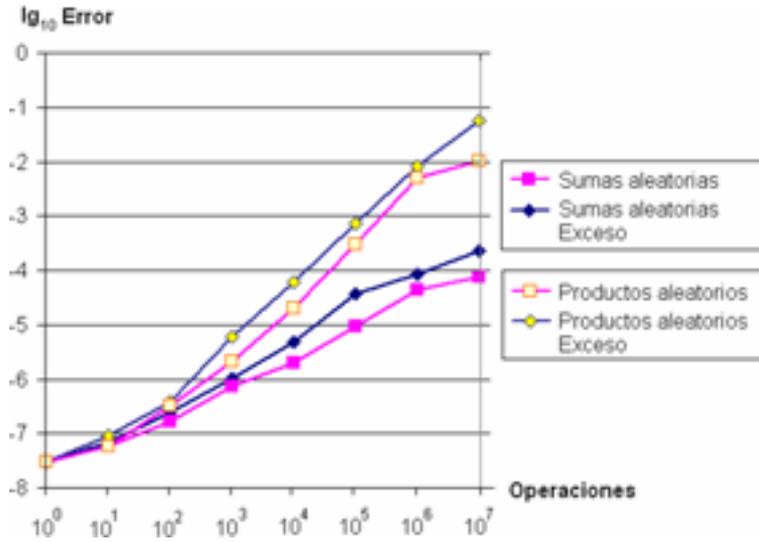


Figura 5-32: Comparación del logaritmo del error promedio de las multiplicaciones en operaciones sucesivas con el formato IEEE-754 en simple y doble precisión

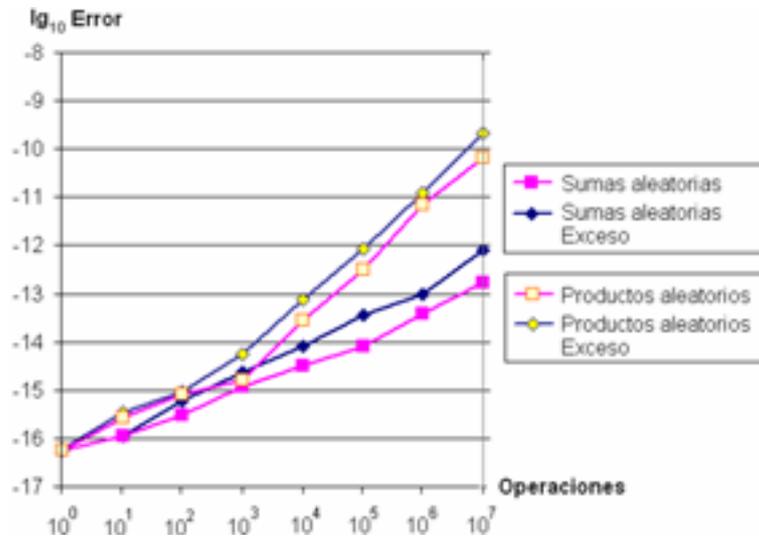
La comparación con la operación de suma pone de manifiesto que el error que se comete en el caso de sucesiones de multiplicaciones es mayor que en el caso de sucesiones de sumas. Las siguientes figuras muestran esta circunstancia en escala logarítmica.

Capítulo V. Multiplicación en Precisión Variable

11,00100100001111110101010001000100001011010001100001000110100110001001100010011000100100010111000000011011100000111001101000100101001000000100101110000010001
00010100110011110011001110100



(a)



(b)

Figura 5-33: Comparación del logaritmo del error promedio en secuencias de operaciones de suma y producto con el formato IEEE-754. (a) simple precisión; (b) doble precisión

Instrumentación de la función multiplicación

11,0010010000111111011010101000100010000010110100011000010001101001100010001100011000110001100010100000011011100000110011010001001010010000001001001110000010001
0001010011001111100110001110100

Los resultados anteriores muestran los errores que comete el cálculo aritmético mediante el formato de representación IEEE-754. En secuencias de operaciones sucesivas, las desviaciones van adquiriendo progresivamente una dimensión considerable que terminará por afectar a toda la parte significativa del número. Ante esta situación se debe estudiar la conveniencia de utilizar las técnicas convencionales de representación y cálculo en aquellos problemas con exigencias de precisión.

Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un procedimiento de cálculo para efectuar la operación de multiplicación sobre operandos racionales del que se extraen las siguientes conclusiones:

- Se realiza una evaluación exacta de la función de multiplicación para números racionales expresados en el formato propuesto.
- La expresión de la complejidad temporal de la operación mantiene una relación cuadrática con el tamaño de los operandos al igual que el algoritmo clásico.
- La operatoria considera la estructura de los factores descrita en la instrumentación de la función identidad. En su procesamiento se hace uso de la metodología de operación desarrollada en este trabajo basada en lógica almacenada y estructuras iterativas.
- El procesamiento contempla elementos de control de la longitud de los resultados. El desarrollo del cálculo para un resultado aproximado es similar al clásico de coma flotante.
- La comparativa con los métodos de multiplicar convencionales pone de manifiesto la cuantía de los errores que éstos producen.