Rosabel Roig-Vila (Ed.)

Investigación e innovación en la Enseñanza Superior

Nuevos contextos, nuevas ideas

universidad

Octaedro

Rosabel Roig-Vila (Ed.)

Investigación e innovación en la Enseñanza Superior. Nuevos contextos, nuevas ideas

Octaedro

Investigación e innovación en la Enseñanza Superior. Nuevos contextos, nuevas ideas

EDICIÓN:
Rosabel Roig-Vila

Revisión y maquetación: ICE de la Universidad de Alicante

Primera edición: octubre de 2019

Ediciones OCTAEDRO, S.L.
C/ Bailén, 5 – 08010 Barcelona
Tel.: 93 246 40 02 – Fax: 93 231 18 68

www.octaedro.com – octaedro@octaedro.com

ISBN: 978-84-17667-23-8

Producción: Ediciones Octaedro

59. Un experimento de enseñanza utilizando un modelo de progresión en el aprendizaje de la comparación de razones para la estructuración de la mirada profesional

Monje Parrilla, Javier[1]; Pérez-Tyteca, Patricia[2]

[1]*Universidad de Alicante, monjejavier@ua.es;* [2]*Universidad de Alicante, patricia.perez@ua.es*

RESUMEN

La mirada profesional sobre el pensamiento matemático de los alumnos es una competencia a desarrollar en los programas de formación para profesor de matemáticas. Esta competencia implica dar sentido a las producciones de los estudiantes desde el punto de vista del aprendizaje matemático; involucra la identificación de evidencias matemáticas presentes en sus producciones; la interpretación de las producciones con elementos teóricos sobre cómo aprenden los estudiantes y la toma de decisiones a partir de estas interpretaciones que permitan un progreso en el aprendizaje de los estudiantes. En este trabajo abordamos el diseño de materiales docentes que contribuyan a la estructuración de la mirada profesional de los futuros profesores de secundaria en el dominio particular de la comparación de razones. Este dominio se engloba dentro del razonamiento proporcional, contenido tanto del currículum de primaria como de secundaria y que se ha demostrado (Valverde y Castro, 2012) que los futuros docentes no dominan como debieran.

PALABRAS CLAVE: mirada profesional, experimento de enseñanza, futuros profesores de matemáticas, comparación de razones.

1. INTRODUCCIÓN

Investigaciones precedentes ligadas al desarrollo profesional del profesor de matemáticas destacan la importancia de que los profesores adquieran la competencia docente “mirar profesionalmente” las situaciones de enseñanza-aprendizaje para identificar los aspectos relevantes en situaciones de enseñanza-aprendizaje, interpretar estos aspectos y tomar decisiones basadas en estas interpretaciones que ayuden a los estudiantes a progresar en el aprendizaje (van Es y Sherin, 2002). En particular, poniendo el foco en el pensamiento matemático de los estudiantes y de acuerdo con Jacobs, Lamb y Philipp (2010), la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, se caracteriza mediante tres destrezas: (i) identificar en las respuestas de los estudiantes los elementos matemáticos importantes; (ii) interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes teniendo en cuenta los elementos matemáticos identificados; y (iii) tomar decisiones basadas en dicha interpretación que permita el progreso conceptual del estudiante.

Actualmente, el análisis de la adquisición de esta competencia docente en los programas de formación constituye una importante línea de investigación dentro de la cual se han abordado diferentes dominios matemáticos, como son: el reconocimiento de figuras geométricas (Bernabeu, Moreno, y Llinares, 2018); el concepto de límite (Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno y Callejo, 2018); las fracciones (Ivars, González-Forte, y Fernández, 2017) o el de problemas aritméticos elementales (Buforn, Zorrilla y Fernández, 2017). Dentro del dominio de razón y proporción, un aspecto en el que ese ha profundizado poco es la comparación de razones. En particular nos centraremos en situaciones de comparación numérica con cantidades intensivas.

De manera general, en cuanto a la competencia “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los alumnos, predominan los estudios centrados en el nivel de educación primaria (Krupa, Huey, Lesseig, Casey y Monson, 2017), siendo escasos los trabajos que focalizan su atención en la adquisición, por parte de los profesores de secundaria de dicha competencia (Nickerson, Lamb, y LaRochelle, 2017; Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016). Esto puede ser debido a la falta de respuestas de estudiantes y la dificultad de encontrar modelos teóricos que ayuden en una progresión en su aprendizaje. Nuestro trabajo es una aportación en esta línea, ya que se desarrollará dentro de un programa de formación de futuros profesores de secundaria.

De acuerdo con Levin, Hammer y Coffey (2009), proporcionar un modelo teórico que ayude a centrar la mirada en aspectos relevantes del pensamiento matemático de los estudiantes puede favorecer la adquisición de la mirada profesional de los futuros docentes. En este sentido, Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington (2012) consideran que el uso de un modelo teórico puede ayudar a describir el pensamiento matemático de los estudiantes dotándolo de significado y a dar respuesta a las actuaciones de estos. Por este motivo, para centrar la mirada profesional de los futuros profesores, se aportará como guía un documento teórico que presenta información de un modelo de progresión en el aprendizaje de la comparación de razones.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, el objetivo de este estudio es diseñar una propuesta de aula que contribuya a la estructuración de la mirada profesional de los futuros profesores de secundaria en el dominio particular de la comparación de razones. Como producto de esta propuesta se obtendrán una serie de materiales docentes susceptibles de ser incorporados en los programas de formación de profesores de matemáticas de secundaria.

2. MÉTODO

Dado que nuestro objetivo es diseñar una propuesta de aula, como método se ha usado el diseño de un experimento de enseñanza (Design-Based Research). Los experimentos de enseñanza nos brindan un escenario donde la práctica de formar profesores y la investigación sobre el aprendizaje del profesor se interrelacionan (Llinares, 2014), ya que “el diseño de ambientes de aprendizaje sirve como contexto para la investigación y, a su vez, tanto los análisis continuados que se van realizando como el análisis retrospectivo de la misma informan sobre el diseño permitiendo su mejora” (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011, p.76).

Un experimento de enseñanza está formado por ciclos de investigación, cada uno de los cuales contempla tres fases: la preparación, la experimentación y el análisis retrospectivo de los datos (Cobb y Gravemeijer, 2008). En la primera fase (la preparación) se diseña y planifica la instrucción donde se establecen los objetivos de aprendizaje a alcanzar, se diseñan las tareas que facilitan el logro de los objetivos y se explicita la trayectoria hipotética de aprendizaje. En la segunda fase (la experimentación) se lleva a cabo la implementación donde se ponen en práctica las tareas diseñadas. Y en la tercera fase (análisis retrospectivo) se observa y se analiza la experiencia, sustentando este análisis mediante los fundamentos teóricos que apoyan la trayectoria hipotética de aprendizaje. Este análisis puede llevar a la modificación de las tareas propuestas permitiendo una mejora del entorno de aprendizaje.

Considerando este método, se obtienen como resultado una serie de tareas con información de cómo se han de llevar a cabo y a su vez conocimiento e información de la instrucción que se convierte en material docente (Penalva, Roig y del Río, 2009).

A continuación, se describe el experimento de enseñanza formado por un ciclo de investigación. Como resultado de este ciclo de investigación se presenta una tarea profesional.

Primera fase. La preparación

Como objetivo de aprendizaje del experimento se pretende contribuir a la estructuración de la mirada profesional en el dominio particular de la comparación de razones. Concretamente, hemos planificado 2 sesiones de 2 horas cada una centradas en la enseñanza-aprendizaje de los problemas de comparación numérica con cantidades intensivas.

En la primera sesión se introducen los elementos matemáticos presentes en la comparación de razones a través de distintos ejemplos y actividades para que se familiaricen con los mismos. La comparación de razones involucra el manejo de los diferentes significados de razón y el uso de métodos o estrategias que permitan visualizar las razones del mismo modo para poder compararlas. Así los distintos elementos matemáticos aluden a la interpretación o no del descuento como una cantidad relativa; el enfoque (escalar o funcional) de la relación multiplicativa empleada (Vergnaud, 1983); los razonamientos basados en los esquemas parte-todo o parte-parte (Singer y Resnick, 1992); la relación entre cantidades empleada para unificar los referentes (pago/compro; descuento/compro o descuento/pago) y la técnica de normalización empleada: uso del algoritmo del producto cruzado, estrategia de la fracción, cociente, razón unitaria, construcción progresiva y sus métodos asociados para comparar razones, como son el método de la unidad y el método del común múltiplo (Cramer y Post, 1993; Fernández, 2009; Hoffer, 1988).

Tabla 1. Modelo de progresión en el aprendizaje de la comparación de razones

Nivel 0. Incoherente En este nivel se incluyen las respuestas imprecisas o no identificadas, es decir, el estudiante no deja suficientes rastros para interpretar su resolución. También se incluyen aquellas respuestas en blanco o con anotaciones inconexas que carecen de sentido.
Nivel 1. Respuestas no relativas En este nivel se incluyen las respuestas de los estudiantes que no relativizan, o bien porque comparan diferencias de cantidades absolutas o bien porque se centran en una sólo en una parte de los datos. **Nivel 1. A. Comparan diferencias** Miran las diferencias entre cantidades de la misma variable, por ejemplo, el dinero que me ahorro en cada oferta o al hacer toda la compra o en un ítem, estas diferencias son las que compara para dar respuesta a la tarea. **Nivel 1. B. Ignoran parte de la información** Se centran sólo en una variable (como el número de ítems) ignorando el resto de información que aporta el enunciado o en aspectos afectivos o subjetivos para dar respuesta a la tarea.
Nivel 2. Tendencia relativa En este nivel se incluyen las respuestas de los estudiantes que pese a interpretar el descuento como una cantidad relativa, no tienen éxito en su tentativa de comparar cantidades relativas. Tropiezan con dificultades ligadas al referente (del descuento o del pago) o a la elección de los ítems y/o precios. **Nivel 2. A. Dificultades con el referente** Cuando comparan cantidades relativas no se percatan de que la unidad de referencia del descuento es distinta, pierden de vista el conjunto total de ítems que intervienen en cada oferta. **Nivel 2. B. Dificultades en la elección de los ítems y/o precios** Se incluyen aquí las respuestas de los estudiantes para los que, o bien la elección inadecuada del número de ítems o bien la unificación de los precios, actúan como condicionantes en la comparación de los descuentos, lo que desvirtúa la ventaja de alguna oferta.
Nivel 3. Respuestas relativas En este nivel los estudiantes interpretan el descuento como una cantidad relativa estableciendo comparaciones relativas exitosas.

Para la segunda sesión se ha diseñado una tarea profesional que consta de nueve respuestas de estudiantes a un problema de comparación de razones. Para cada una de estas respuestas los futuros profesores tendrán que identificar los elementos matemáticos implicados, interpretar la comprensión del alumno y proponer una tarea que le pueda ayudar a avanzar conceptualmente, apoyándose en un documento teórico -adaptado de Monje (2017) - que recoge información sobre un modelo de progresión en el aprendizaje de la comparación de razones con referentes distintos (Tabla 1).

Segunda fase. La experimentación

Este experimento de enseñanza se ha impartido en la asignatura *Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria* perteneciente al *Máster de Profesorado de Educación Secundaria* de la Universidad de Alicante en la especialidad de matemáticas. La asignatura está dividida en varios módulos de aprendizaje que tienen como objetivo, entre otros, desarrollar la competencia mirar profesionalmente en los futuros profesores de matemáticas. El experimento se lleva a cabo dentro de uno de estos módulos en el que se aborda el razonamiento proporcional. Este módulo consta de 8 sesiones de 2 horas cada una. Para la experimentación se emplean las últimas dos sesiones (sesiones 7 y 8) centradas en la enseñanza y aprendizaje de los problemas de comparación numérica con cantidades intensivas. En las sesiones anteriores, estos futuros profesores trabajan a su vez otros contextos y tipos de problemas involucrados en el estudio del razonamiento proporcional.

Los participantes han sido 18 sujetos matriculados en el curso 2017/2018. Entre los sujetos se encuentran matemáticos, ingenieros y economistas. Estos sujetos trabajaban en las sesiones del módulo tanto de forma colaborativa, en grupos de 4-5 personas, como también de manera individual discutiendo en gran grupo sus opiniones en el aula.

Tercera fase. Análisis retrospectivo

Los datos de este trabajo son las respuestas de los futuros profesores a la tarea profesional planteada en la segunda sesión de la experimentación (sesión 8 del módulo). El análisis de datos sigue un procedimiento de carácter inductivo (Strauss y Corbin, 1994), centrando nuestra atención en los elementos matemáticos identificados por los futuros profesores en las resoluciones de los alumnos; la interpretación de las diferentes resoluciones atendiendo a los elementos matemáticos identificados y la propuesta de acción basada en dichas interpretaciones. El análisis se ha triangularizado entre varios investigadores-profesores de modo que se puedan refinar las discrepancias y permitir el rediseño en futuras intervenciones.

3. RESULTADOS

Se presenta como resultado de este ciclo de investigación la tarea profesional diseñada en la segunda sesión de la experimentación, correspondiente a la sesión 8 del módulo sobre razonamiento proporcional.

La tarea profesional consta de un problema de comparación de razones en un contexto de ofertas comerciales (Figura 1), que previamente resolvieron individualmente en clase, y de 9 resoluciones de estudiantes a este mismo problema que los futuros profesores debían interpretar con apoyo del documento teórico descrito en la Tabla 1.

El problema utilizado muestra tres ofertas comerciales con los descuentos normalizados de manera diferente (una como fracción, otra como porcentaje y otra como razón compuesta) y con distinto referente en que se debe de determinar qué descuento es mejor. La oferta del “3x2” se diferencia de las otras dos por el referente: por una parte, el referente alude al número ordinal de la unidad a la que se aplica el descuento, ya sea la segunda o la tercera botella; por otra parte, el referente está relacionado con el número cardinal de botellas: mientras en la primera oferta están involucradas tres botellas en las restantes sólo se incluyen dos.

Figura 1. Problema de comparación de razones

Para cada una de las 9 resoluciones, los futuros profesores tenían que responder a las siguientes cuestiones en relación a las destrezas de la competencia mirar profesionalmente:

a) *Analiza cada una de las actuaciones de los diferentes estudiantes atendiendo a los niveles del documento. Justifica el nivel indicando los conceptos y los elementos matemáticos implicados.*

b) *Si fueras el profesor de cada uno de estos estudiantes, ante las respuestas no relativas y de tendencia relativa que has considerado, ¿qué tarea/s propondrías para que el estudiante progrese en su comprensión? Justifica tu respuesta.*

La cuestión planteada en el primer apartado hace referencia a las destrezas de identificar en las respuestas de los estudiantes los elementos matemáticos importantes e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes teniendo en cuenta los elementos matemáticos identificados. La cuestión planteada en el segundo apartado hace referencia a la destreza de tomar decisiones basadas en dicha interpretación que permita el progreso conceptual del alumno.

Las nueve resoluciones de estudiantes hacen alusión a distintos estadios del nivel de comprensión señalados del documento teórico: respuestas no relativas, tendencia relativa y respuestas relativas. Éstas se organizan aleatoriamente en la tarea profesional. A continuación, mostramos las diferentes resoluciones de alumnos que conforman la tarea profesional:

Cuatro de las resoluciones son respuestas relativas, es decir, el alumno interpreta el descuento como una cantidad relativa y presenta comparaciones exitosas con razones (Figura 3). Tres de estas respuestas (estudiantes 1, 8 y 9) comparten la naturaleza de la relación multiplicativa empleada al usar razones internas (enfoque escalar) y el esquema utilizado es parte-todo. Los estudiantes 1 y 8 utilizan la relación descuento/compro para unificar los referentes y la técnica de normalización empleada para poder comparar las razones es el uso del cociente. El estudiante 9, en cambio, la relación que presenta para unificar el referente es pago/compro y emplea la técnica de la fracción para normalizar las razones y así poder compararlas. A diferencia de las tres respuestas anteriores, la resolución del estudiante 3 utiliza el enfoque funcional al usar razones externas. La relación entre cantidades presentada es pago/compro y la técnica de normalización empleada o método para comparar estas razones es la construcción progresiva, a través de la búsqueda de un múltiplo común de botellas a comprar.

Estudiante 1

Respuesta a la tarea.

En la oferta del "3x2": -100%→100:3=33,3% por botella
En la oferta de "-70% en la segunda unidad": -70%→ 70%: 2 = 35%
En la oferta de "2ª unidad a mitad de precio": -50%→ 50%: 2 = 25%
El mayor descuento es "-70% en la segunda unidad"

Estudiante 3

Respuesta a la tarea.

Si la botella cuesta 10€.
- *"3x2" significa que te llevas 3 y pagas 2, es decir: 3 botellas por 20€, 6 botellas por 40€, 9 botellas por 60€, etc.*
- *"-70% en la segunda unidad", 70% de 10€ son 7€, entonces segunda botella (3€), entonces: 2 botellas por 13€, 4 botellas por 26€, 6 botellas por 39€, 8 botellas por 52€, etc.*
- *"2ª unidad al 50% de descuento (mitad de precio)", 50% de 10€ son 5€, entonces segunda botella (5€), entonces: 2 botellas por 15€, 4 botellas por 30€, 6 botellas por 45€, 8 botellas por 60€, etc.*

Entre la "3x2" y la 2ª a mitad de precio, mejor la "3x2", sin embargo, la mejor es la de "-70% en segunda unidad".

Estudiante 8

Respuesta a la tarea.

En el "3x2" te regalan 1 de 3 productos. Por cada 1 te descuentan ⅓
En " -70% en la 2ª unidad" te regalan 0.7 de 2 productos. Por cada 1 te descuentan 0.35
En "segunda unidad a mitad de precio" te regalan 0.5 de 2 productos, por cada 1 te descuentan 0.25
Observamos que el mayor descuento tiene lugar en la oferta del -70% en la 2ªunidad, puesto que es en la que mayor importe te regalan por cada producto.

Estudiante 9

Respuesta a la tarea.

"3x2"	"-70% en la segunda unidad"	"2ª unidad a mitad de precio"
$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{40}{60}$	$\frac{13}{20} \rightarrow \frac{39}{60}$	$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{45}{60}$

El mejor descuento es "-70% en la segunda unidad"

Figura 3: Respuestas relativas

Cuatro resoluciones de la tarea profesional son de tendencia relativa (Figura 4). La característica común en estas resoluciones es que, a pesar de interpretar el descuento como una cantidad relativa, no se tiene éxito en su tentativa de comparar cantidades relativas. Una resolución (estudiante 4) presenta dificultades con la unidad de referencia del descuento ya que no identifica que la unidad de referencia del descuento es distinta. Las otras tres resoluciones (estudiantes 5, 6 y 7) presentan dificultades con la elección de ítems y/o precios, la elección inadecuada de ítems y/o precios en estos casos actúa como condicionante en la comparación de los descuentos.

Estudiante 4

Respuesta a la tarea.

"3x2"	*"-70% en la segunda unidad"*	*"2ª unidad a mitad de precio"*
5.58×3=16.77 *3.72×3=11.16* *16.77→100%* *11.16→66.54%* *33.45% de descuento*	*→70%*	*→50%*

El mejor descuento es -70% en la 2ª unidad porque en la primera oferta sólo es un 33% de descuento y en la tercera un 50%.

Estudiante 5

Respuesta a la tarea.

Tomamos el mismo precio en cada una de las ofertas (5,58€), entonces:

En la oferta del "3x2" el precio de la unidad al comprar 3 productos es 3,72€.

En la oferta del "-70%" el precio de la unidad al comprar 3 productos es 4,27€.

En la oferta de la "segunda unidad a mitad de precio" el precio de la unidad al comprar 3 productos es 4,65€.

Por tanto, el mejor descuento es el "3x2"

Estudiante 6

Respuesta a la tarea.

"3x2"	*"-70% segunda unidad"*	*"2ª unidad a mitad de precio"*
5.58×2=11.16€ 11.16÷3=3.72€ 3.72€/unidad	70% de 5.58€=3.906 5.58-3.906=1.674 5.58+1.674=7.254 7.254÷2=3.62 €/unidad	50% de 9.74=4.87 9.74-4.87=4.87 9.74+4.87=14.61 14.61÷2= 7.305€/unidad

El mejor descuento es "-70% en segunda unidad"

Estudiante 7

Respuesta a la tarea.

Tomamos el mismo precio en las ofertas (20€)

En la oferta del "3x2", si me llevo 3 pago 40€.

En la oferta de "2ª unidad al -70%", pagamos 26€ y sólo me llevo 2.

En la oferta de "2ª unidad a mitad de precio", pagamos 30€ y sólo me llevo 2.

El mejor descuento es el "3x2"

Figura 4: Resoluciones de tendencia relativa

Por último, se ha utilizado una respuesta no relativa (Figura 5). En esta resolución el estudiante 2 en cada oferta compara diferencias entre cantidades de la misma variable interpretando el ahorro o descuento como una cantidad no relativa.

Estudiante 2
Respuesta a la tarea.

"3x2"	"-70% en la segunda unidad"	"2ª unidad a mitad de precio"
(Precio: 5.58€)	(Precio: 9.74€)	(Precio: 9.74€)
5.58×3=16.76	9.74×2=19.48	9.74×2=19.48
3.72×3=11.16	9.74+2.84=12.58	9.74+4.87=14.61
16.76-11.16=5.6€ ahorro	19.48-12.58=6.9€ ahorro	19.48-14.61=4.87€ ahorro

El mayor ahorro se consigue con la oferta del "-70% en la segunda unidad"

Figura 5: Resolución no relativa

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

De acuerdo con Buforn, Zorrilla y Fernández (2017), el uso de tareas profesionales centradas en el desarrollo de la mirada profesional constituyen un contexto adecuado para la generación de materiales docentes.

El experimento de enseñanza diseñado nos ha permitido la elaboración de materiales docentes dentro de un programa de formación para futuros profesores de matemáticas. Así, hemos dado respuesta a un reclamo de la comunidad investigadora, que defiende la necesidad de aumentar el número de trabajos que aborden la mirada profesional de los futuros profesores de secundaria, al ser estos escasos (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016).

El material docente elaborado está compuesto de un modelo de progresión en el aprendizaje de la comparación de razones (documento teórico) y de una tarea profesional donde los futuros profesores tienen que interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y proponer decisiones de acción que ayuden a los estudiantes para avanzar en su aprendizaje. El hecho de proporcionar a los estudiantes la progresión del aprendizaje en forma de documento teórico que les sirva de guía está en coherencia con las afirmaciones de Levin, Hammer y Coffey (2009) y Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington (2012), que defienden la utilidad de este tipo de recursos al contribuir a formar la mirada profesional de los futuros docentes. Por otro lado, la tarea profesional nos permite obtener información de cómo se va adquiriendo esta competencia ante diferentes situaciones con las que los profesores pueden encontrarse en las aulas.

Como indica Monje (2017), el uso de las cantidades estableciendo comparaciones no relativas para dar respuesta a ciertas situaciones que implican el manejo de razones son tipos de respuestas que los futuros profesores pueden encontrarse en las producciones de los estudiantes. Dar respuesta a estas producciones es una de las competencias que el futuro profesor debiera desarrollar para dar solución en el aula. Este trabajo es un aporte en esta línea, ya que con el uso de la tarea profesional trabajamos la competencia mirar profesionalmente el pensamiento de los alumnos en el domino particular de la comparación de razones.

Además, un aspecto fundamental y novedoso de nuestro diseño es haberlo hecho en torno a un problema que permite numerosas resoluciones correctas que el futuro profesor debe conocer y dominar y que además produce en los alumnos algunas dificultades con las que los docentes deben estar familiarizados para poder guiar a sus discentes para que las superen.

Por tanto, consideramos que este trabajo aporta un material docente que es susceptible de ser llevado a las aulas para contribuir y mejorar la formación tanto inicial como permanente de los profesores de matemáticas de secundaria, al contribuir a la formación y adquisición de una de las competencias profesionales fundamentales que es necesario promover (van Es y Sherin, 2002): ser capaz de mirar profesionalmente diferentes situaciones de aula.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se enmarca en el programa de Redes-I3CE de investigación en docencia universitaria del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Alicante (convocatoria 2018-19). Ref.: 4464. Además, esta investigación ha sido realizada, en parte, con el apoyo del proyecto Prometeo/2017/135 y GV/2018//066 de la Generalitat Valenciana.

5. REFERENCIAS

Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2018). Cómo estudiantes para maestro/a anticipan posibles respuestas de niños/as en actividades de reconocimiento de figuras geométricas. En R. Roig-Vila (Ed.), *El compromiso académico y social a través de la investigación e innovación educativas en la Enseñanza Superior* (pp. 59-68). Barcelona: Ediciones Octaedro.

Buforn, A., Zorrilla, C., & Fernández, C. (2017). Un experimento de enseñanza: Mirar profesionalmente el pensamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas realistas. En R. Roig-Vila (Ed.), *Investigación en docencia universitaria. Diseñando el futuro a partir de la innovación educativa* (pp. 88-96). Octaedro.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria*. Valencia: Universitat de València.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., & Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias 36*(1), 143-162.

Hoffer, A. (1988). Ratios and proportional thinking. En T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods* (pp. 285-313). Boston: Allyn and Bacon.

Ivars, P., González-Forte, J. M., & Fernández, C. (2017). Un experimento de enseñanza para aprender a mirar profesionalmente usando una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones. En R. Roig-Vila (Ed.), *Investigación en docencia universitaria. Diseñando el futuro a partir de la innovación educativa* (pp. 294-304). Barcelona: Ediciones Octaedro.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Krupa, E. E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S., & Monson, D. (2017). Investigating secondary preservice teacher noticing of studets' mathematical thinking. En E.O. Schack et al. (Eds.), *Teacher* *noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 49-72). Springer. Recuperado de https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_4

Levin, D. M., Hammer, D., & Coffey, J. E. (2009). Novice teachers' attention to student thinking. *Journal of Teacher Education, 60*(2), 142-154. Recuperado de https://doi.org/10.1177/0022487108330245

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, Nº extraordinario marzo*, 31-51.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Monje, J. (2017). La re-constitución del objeto mental "relativamente" en futuros maestros (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.

Nickerson, S., Lamb, L., & LaRochelle, R. (2017). Challenges in measuring secondary mathematics teachers' professional noticing of students' mathematical thinking. En E. O. Schack, M. H. Fisher, & J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 381-398). London: Springer. Recuperado de https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_22

Penalva, M. C., Roig, A. I., & del Río, M. (2009). Experimento de enseñanza: Tareas de aprendizaje de la geometría en la formación de maestros de Educación Infantil. En M. T. Tortosa, J. D. Álvarez, & N. Pellín, (Coords.), *VII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria. La calidad del proceso de enseñanza/aprendizaje universitario desde la perspectiva del cambio*, (pp. 130-136). Universidad de Alicante: Alicante.

Singer, J. A., & Resnick, L. B. (1992). Representations of proportional relationships: are children part-part or part-whole reasoners?. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 231-246. Recuperado de https://doi.org/10.1007/bf02309531

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. Mathematics Education, 48*(1-2), 1-27. Recuperado de https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y

Strauss, A., & Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology. En N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 217-285). Thousand Oaks, Sage Publications.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher, 41*(5), 147–156. Recuperado de https://doi.org/10.3102/0013189x12442801

Valverde, G., & Castro, E. (2012). Prospective Elementary School Teachers Proportional Reasoning. *PNA, 7*(1), 1-17.

van Es, E., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10,* 571-596.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh, & M. Landau (Eds.), Acquisitions of mathematics concepts and processes (pp. 127-174). Nueva York: Academic Press.