



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

**Esta tesis doctoral contiene un índice que enlaza a cada uno de los capítulos de la misma.**

**Existen asimismo botones de retorno al índice al principio y final de cada uno de los capítulos.**

**[Ir directamente al índice](#)**

**Para una correcta visualización del texto es necesaria la versión de [Adobe Acrobat Reader 7.0](#) o posteriores**

**Aquesta tesi doctoral conté un índex que enllaça a cadascun dels capítols. Existeixen així mateix botons de retorn a l'índex al principi i final de cadascun dels capítols .**

**[Anar directament a l'índex](#)**

**Per a una correcta visualització del text és necessària la versió d' [Adobe Acrobat Reader 7.0](#) o posteriors.**



UNIVERSIDAD DE ALICANTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Análisis Matemático



**DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS  
RELATIVAS**

Ana África Cerdán Sala  
2005





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



# DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS RELATIVAS

por  
Ana África Cerdán Sala

Alicante, Septiembre 2005

Memoria de tesis realizada en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Alicante bajo la dirección y supervisión de Salvador Segura Gomis, Profesor Titular de Universidad de la Universidad de Alicante, por Ana África Cerdán Sala, para optar al Grado de Doctor.

VºBº El Director de la Tesis

Fdo.: Salvador Segura Gomis

VºBº El Director del Departamento

Fdo.: Gaspar Mora Martínez



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## AGRADECIMIENTOS

A Salvador Segura, mi Director de Tesis: no podría resumir en pocas palabras todo lo que tengo que agradecerle en estos años de doctorado: gracias por confiar en mí, introducirme en el mundo de la investigación y por todo lo que me has enseñado, por transmitirme esa pasión por las matemáticas y por enseñarme a superarme día a día para ser mejor investigador, pero sobre todo gracias por estar siempre ahí.

A M<sup>a</sup> Angeles, gracias por tu ayuda en tantas y tantas ocasiones, muchas gracias por todo.

A Cinzia, hemos pasado muy buenos momentos juntas, para mí ha sido estupendo tener una compañera con la que trabajar y me alegro mucho que tu elección fuese Alicante cuando decidiste realizar el doctorado en España. Gracias por tu ayuda y sobre todo por tu amistad.

A mi hermana, por ser un gran modelo a seguir.

A mis padres, por apoyarme en todas mis decisiones y por su cariño. Sin ellos nunca hubiera llegado hasta donde estoy.

A todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático.

A mis compañeras de la carrera, gracias por estar siempre ahí, por esos buenos momentos que hemos pasado, y especialmente por vuestra amistad.

A Javi, por aguantar muchas horas hablando de matemáticas y apoyarme en todo momento.



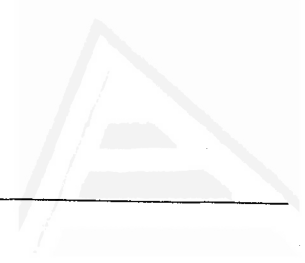
Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

A mi abuelo





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1. Conceptos Básicos . . . . .	7
1.2. Magnitudes Geométricas Absolutas y Relativas . . . . .	13
<b>2. Desigualdades Geométricas Relativas Comparando el Perímetro Relativo con el Diámetro Relativo</b>	<b>17</b>
2.1. Propiedades de los Conjuntos Extremales y los Maximizadores . . . . .	21
2.2. Ejemplos de Particular Interés . . . . .	26
2.2.1. Ejemplos concretos de maximizadores . . . . .	27
2.2.2. Ejemplos concretos de conjuntos extremales . . . . .	30
2.3. Estimadores Globales: Caracterización de los Conjuntos Planos de Anchura Constante . . . . .	32
2.4. Observaciones . . . . .	35
<b>3. Desigualdades Geométricas Relativas Comparando el Perímetro Relativo con el Inradio Relativo</b>	<b>39</b>
3.1. Inradio Relativo Mínimo . . . . .	39
3.2. Inradio Relativo Máximo . . . . .	49
<b>4. Desigualdades Isodiamétricas Relativas</b>	<b>51</b>
4.1. Desigualdades isodiamétricas relativas comparando el volumen relativo con el diámetro relativo mínimo . . . . .	52
4.1.1. Minimizar $\frac{V(E,G)}{d_m(E,G)^n}$ . . . . .	52
4.1.2. Maximizar $\frac{V(E,G)}{d_m(E,G)^n}$ . . . . .	55

4.2. Desigualdades isodiamétricas relativas comparando el volumen relativo con el diámetro relativo máximo . . . . .	56
4.2.1. Minimizar $\frac{V(E,G)}{d_M(E,G)^n}$ . . . . .	57
4.2.2. Maximizar $\frac{V(E,G)}{d_M(E,G)^n}$ . . . . .	58
<b>5. Desigualdades Geométricas Relativas Comparando el Volumen Relativo con los Inradios Relativos</b>	<b>63</b>
5.1. Inradio Relativo Mínimo . . . . .	63
5.2. Inradio Relativo Máximo . . . . .	69
<b>6. Desigualdades Geométricas Relativas Comparando el Volumen Relativo con las Anchuras Relativas</b>	<b>71</b>
6.1. Anchura Relativa Mínima . . . . .	72
6.2. Anchura Relativa Máxima . . . . .	75
<b>7. Desigualdades Geométricas Relativas en Superficies Compactas</b>	<b>79</b>
7.1. Diámetro Relativo Máximo . . . . .	81
7.2. Diámetro Relativo Mínimo . . . . .	86
<b>8. Aplicaciones</b>	<b>91</b>
8.1. Teoremas de Inmersión para Espacios de Sobolev . . . . .	91
8.2. Desigualdades Isoperimétricas en la Geometría de Números . . . . .	92
8.3. La Complejidad del Cálculo del Volumen de un Cuerpo Convexo . . . . .	95
8.4. Otras Aplicaciones . . . . .	96
<b>A. Desigualdades Isoperimétricas Relativas</b>	<b>99</b>
A.1. Desigualdades Isoperimétricas Relativas en el Plano . . . . .	99
A.2. Desigualdades Isoperimétricas Relativas en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	112
<b>Bibliografía</b>	<b>117</b>



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Introducción

La desigualdad isoperimétrica plana -conocida desde hace muchos siglos (aunque su demostración rigurosa no se obtuvo hasta finales del siglo XIX)- establece que entre todos los dominios del plano con frontera rectificable de perímetro fijo  $L$ , el que encierra mayor área es el disco. Esta desigualdad se enuncia como sigue:

“Si  $E$  es un dominio del plano con frontera rectificable de área  $A$  y perímetro  $L$ :

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

donde la igualdad se alcanza si y sólo si  $E$  es un disco.”

A lo largo del siglo XX se descubrieron numerosas variantes de esta desigualdad y generalizaciones a dimensiones superiores, desarrollándose un gran campo de desigualdades geométricas que comparaban el valor de diferentes magnitudes geométricas de un conjunto, buscándose también determinar aquellos conjuntos -extremales ó maximizadores/minimizadores- para los que se verificaba la igualdad.

En paralelo a estas desigualdades fueron apareciendo numerosas desigualdades isoperimétricas relativas. En éstas se buscaba comparar el área (o el volumen en dimensiones superiores a dos) de un conjunto  $E$  con el perímetro relativo, entendiéndose por éste la medida de parte de la frontera de  $E$ , en particular la parte de la frontera que estaba incluida en otro conjunto  $G$  abierto (frontera relativa).

La primera de estas desigualdades vino asociada al problema de Dido, que se describirá en el primer capítulo. Esta desigualdad se puede deducir por un argumento de reflexión a partir de la desigualdad isoperimétrica clásica, pero también se puede demostrar independientemente utilizando el cálculo de variaciones ([66]).

Después del problema de Dido la teoría de desigualdades isoperimétricas relativas se fue desarrollando en diferentes direcciones:

1) En la dirección de la Geometría Discreta; esta dirección fue desarrollada por la escuela húngara, y se obtuvieron numerosos resultados (K. Bezdek [7], K. Bezdek y A. Bezdek [6], L. Fejes Toth [28], [29], L. Fejes Toth y A. Heppes [30],...).

Estos autores consideran una colección finita de regiones convexas y buscan una disposición de las mismas de modo que entre todas ellas incluyan una región de área máxima. Este problema tiene relación con el método de las cuatro bisagras, que es el primero que utilizó Steiner para intentar obtener una demostración de la desigualdad isoperimétrica.

2) En la dirección de la Teoría Geométrica de la Medida (H. Federer y W.H. Fleming [27], D. Burago y V.A. Zalgaller [13],...). Este planteamiento tiene su origen en el estudio de las condiciones de compacidad y acotación de los operadores de inclusión de los espacios de Sobolev.

3) En la dirección de la Física Matemática, ya que las desigualdades de este tipo son útiles para obtener cotas en las ecuaciones diferenciales elípticas con condiciones mixtas de contorno. La principal impulsora en esta dirección ha sido C. Bandle ([1],[2])

4) En la dirección de la Geometría Convexa, ya que si  $G$  es un conjunto convexo abierto, se obtienen resultados mucho más precisos que proporcionan información geométrica sobre el mejor modo de subdividir un conjunto convexo  $G$ . En esta dirección ha habido numerosas aportaciones (H. Hadwiger [37], A. Cianchi [18], C. Peri [52],[53], J. Bokowski y E. Sperner [9],[10], M. Dyer y A. Frieze [23], R. Kannan, L. Lovász y M. Simonovits [38],...)

Es en esta última dirección en la que se sitúa esta Memoria, en la que se desarrolla un punto de vista más general, ya que el concepto de desigualdad isoperimétrica relativa se extiende a la noción más general de desigualdad geométrica relativa, entendida como cualquier desigualdad que compara dos magnitudes geométricas relativas: No sólo el volumen y el perímetro relativo, sino también el diámetro relativo, el inradio relativo y la anchura relativa.

Se obtienen así numerosas desigualdades que proporcionan una información geométrica mucho más amplia sobre el modo de subdividir un conjunto convexo en dos partes. Se determinan -en muchos casos- los conjuntos para los que se alcanza la mejor cota posible.

La palabra *relativa* que describe estas desigualdades se refiere por un lado a que son desigualdades que no proporcionan una información independiente (absoluta) del conjunto  $E$ , si no de su relación con otro conjunto ambiente más grande. Por otro lado, y de un modo más particular, la palabra *relativa* tiene también un significado topológico, ya que cuando se considera el perímetro *relativo*, se está tratando de la medida de la frontera *relativa* en el sentido de que es la frontera de  $E$  en la topología *relativa* que induce el espacio ambiente  $G$ .

Algunas de estas desigualdades tienen aplicaciones a problemas de la vida real. Por ejemplo en el caso de la parcelación urbana, aquellas parcelas que resulten de la

división de una parcela mayor, no deben ser demasiado alargadas, ya que eso dificultaría su posible uso para construir, dada la separación que debe existir entre la vía pública y la superficie construida. La legislación a este respecto contempla una cota entre el área relativa y el inradio relativo. También en legislación medioambiental se consideran estas cotas. El diámetro relativo mínimo aparece por su parte de un modo natural en la localización de industrias que debido a los inconvenientes que ocasionan (ruidos, malos olores, contaminación, ...) se deber situar en el punto más lejano posible de los núcleos urbanos.

Además de estas aplicaciones mencionadas en el párrafo anterior, también se obtienen aplicaciones matemáticas, ya que estas cotas permiten obtener nuevas caracterizaciones de determinadas familias de conjuntos de especial interés geométrico, como los conjuntos de anchura constante.

Los problemas geométricos relativos no sólo tienen sentido cuando el conjunto ambiente es un abierto del espacio Euclídeo, sino que también se puede considerar como conjunto ambiente una superficie compacta y convexa. Existen antecedentes históricos de este enfoque: En 1978 en un conocido artículo de carácter expositivo sobre la desigualdad isoperimétrica, Osserman ([49]) comenta que la desigualdad isoperimétrica sobre la esfera obtenida por Bernstein ([5]) en 1905 ( $L^2 \geq 4\pi A - \frac{A^2}{R^2}$ ) es equivalente a afirmar que si una curva simple cerrada en la esfera de radio  $R$  tiene longitud menor o igual que  $2\pi R$ , el área de la región más pequeña (área relativa) se maximiza cuando la curva es una circunferencia de longitud  $L$ . Recientemente ha habido varias publicaciones en torno a desigualdades isoperimétricas relativas sobre superficies compactas ([19], [48]).

Esta Memoria se encuentra estructurada en ocho capítulos.

El primero de ellos comienza con una descripción del problema más antiguo conocido asociado a este tipo de desigualdades, el problema de Dido, para pasar a introducir las nociones básicas que se utilizarán posteriormente en el estudio de las desigualdades geométricas relativas. También en este capítulo se proporcionan las definiciones de las magnitudes geométricas relativas que se utilizan en los capítulos siguientes.

A partir de este momento y hasta el capítulo siete se introducen las aportaciones originales. Se van a tratar nuevas desigualdades geométricas relativas (variando las magnitudes geométricas relativas que se comparan) y se va a realizar un estudio de cotas inferiores y superiores así como de conjuntos extremales, maximizadores y minimizadores de cada una de ellas.

En los capítulos 2 y 3 se compara el perímetro relativo con los diámetros y los inradios relativos en el plano:



En el segundo capítulo se determina la existencia y características geométricas de los conjuntos extremales y de los maximizadores al comparar el perímetro relativo con el diámetro relativo mínimo y se prueba –como aplicación– una caracterización de los conjuntos convexos planos de anchura constante en términos de la constante geométrica correspondiente. También en la última sección se detalla qué sucede cuando se compara el perímetro relativo con el diámetro relativo máximo.

El tercer capítulo trata la razón entre el perímetro relativo y el inradio relativo. Para el inradio relativo mínimo se demuestra la existencia de conjuntos extremales y maximizadores y se proporciona una descripción de la frontera relativa de dichos conjuntos. El inradio relativo máximo también se estudia en la última sección.

Desde el cuarto capítulo hasta el sexto se sustituye el perímetro relativo por el volumen relativo, que también se va a comparar con los diámetros e inradios relativos. Además también se comparará con las anchuras relativas.

Las desigualdades geométricas que comparan el volumen relativo con los diámetros relativos se denominan desigualdades isodiamétricas relativas. En el cuarto capítulo se tratan estas desigualdades diferenciando entre el diámetro relativo mínimo y el máximo.

En el quinto se estudian desigualdades en las que se compara el volumen relativo con los inradios relativos máximo y mínimo de un subconjunto de un conjunto abierto, convexo y acotado, obteniendo las cotas inferiores y superiores de la razón entre dichas magnitudes y los conjuntos para los cuales se alcanza la igualdad (maximizadores y minimizadores).

El mismo objetivo se alcanza en el sexto capítulo en el que las desigualdades geométricas relativas que se tratan comparan el volumen relativo con las anchuras relativas.

En el capítulo séptimo se mencionan algunos resultados históricos importantes relativos a desigualdades isoperimétricas relativas obtenidas en superficies compactas y se presentan nuevos resultados sobre desigualdades que comparan tanto el área como el perímetro relativo con los diámetros relativos máximo y mínimo en la superficie de la esfera y en la del cubo.

El capítulo octavo expone una serie de aplicaciones de las desigualdades geométricas relativas, tanto a otras disciplinas como a la vida real. Se muestran tres ejemplos de aplicaciones de las desigualdades isoperimétricas relativas: en los teoremas de inversión para espacios de Sobolev, en la geometría de números y en el análisis de un algoritmo que calcula el volumen de un cuerpo convexo. Y a continuación, se mencionan con brevedad otras aplicaciones.

Para dar una visión más completa de las desigualdades geométricas relativas, se incorpora un apéndice en el que se expone un resumen de los principales resultados que se habían obtenido hasta la realización de esta Memoria para las desigualdades isoperimétricas relativas, tanto en el plano como en dimensiones superiores. El contenido de este apéndice es por tanto de carácter histórico y no incluye ninguna aportación original.

Aunque el estudio que se hace de las desigualdades geométricas relativas es muy amplio, no es en absoluto exhaustivo. Quedan pendientes numerosos problemas abiertos que son el objetivo de la investigación que estamos realizando ahora.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# Capítulo 1

---

## Preliminares

---

### 1.1. Conceptos Básicos

Cuando se tiene un subconjunto  $G$  del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , se puede considerar una subdivisión de  $G$  en dos subconjuntos conexos y estudiar algunas magnitudes que proporcionen información geométrica del subconjunto  $E$ , no de un modo absoluto sino en su relación con el conjunto total  $G$  o con su complementario respecto de  $G$ ,  $G \setminus E$ . Tales magnitudes se llaman *magnitudes geométricas relativas* y son funcionales que proporcionan información sobre el modo en que se ha subdividido  $G$  en dos subconjuntos.

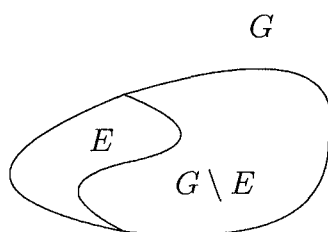


FIGURA 1.1

El principal objetivo de esta Tesis Doctoral es realizar un estudio detallado de las desigualdades geométricas relativas, que son aquellas desigualdades que comparan magnitudes geométricas relativas.

El ejemplo más antiguo que se conoce de este tipo de desigualdades es el problema de Dido:

Este problema tiene un origen legendario, que lo vincula a la fundación de la ciudad de Cartago. Tras una guerra civil en la ciudad fenicia de Tiro en la que el rey Pigmalión vence y da muerte al sumo sacerdote Acerbas, Dido –hermana del rey Pigmalión y esposa de Acerbas– sale huyendo con sus partidarios atravesando el Mediterráneo en una embarcación. Al llegar a las costas del actual Túnez, deciden establecerse allí. Dido solicita entonces al rey local tierras para fundar una ciudad y éste, reacio a la intrusión, les concede la porción de tierra que pudiesen abarcar con una piel de buey. Pero Dido, que era muy ingeniosa, corta la piel en tiras muy finas y las une para formar una larga cuerda, con la que delimita un terreno de gran extensión. Dido debía resolver entonces la siguiente situación:

Sea  $H$  un semiplano euclídeo abierto –que corresponde en la historia de Dido al mar–,  $\partial H$  la frontera de  $H$ , que es la línea de costa, y  $\Gamma$  una cuerda de longitud fija  $L$  (*la frontera relativa*); el problema entonces era maximizar el área de la región  $R$  comprendida por  $\Gamma$  y  $\partial H$ .

Obsérvese que  $\Gamma$  es la intersección de la frontera de  $R$  con el interior del semiplano  $H$ . A la longitud de  $\Gamma$  se le denomina *perímetro relativo*. Se está comparando entonces el área de  $R$  con su perímetro relativo.

La desigualdad isoperimétrica clásica en el plano y un argumento de reflexión demuestran que dicha área será máxima si  $\Gamma$  es un semicírculo. Este resultado se puede escribir como:

$$L^2 \geq 2\pi A,$$

o equivalentemente

$$\frac{A}{L^2} \leq \frac{1}{2\pi},$$

donde la igualdad se da si y sólo si  $\Gamma$  es un semicírculo.

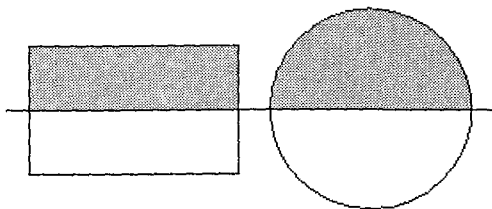


FIGURA 1.2

Debido al gran interés que ha suscitado el problema isoperimétrico, en los últimos 30 años se han publicado numerosos resultados acerca de desigualdades que

comparan el volumen relativo (área relativa) con el área (perímetro) relativo de la frontera. Tales desigualdades se llaman *desigualdades isoperimétricas relativas*.

En esta Memoria se considerarán -además del área y el volumen relativo- otras magnitudes geométricas relativas. Se empezará con una definición precisa del concepto de desigualdad geométrica relativa:

**Definición 1.1.** *Sea  $G$  un conjunto abierto en el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  con interior no vacío y frontera rectificable tal que tanto él como su complementario son conexos. Una desigualdad geométrica relativa es una desigualdad del tipo:*

$$C_1 \leq \frac{\mu(E, G)}{\gamma(E, G)^\alpha} \leq C_2,$$

donde  $\mu(E, G)$  y  $\gamma(E, G)$  son medidas geométricas relativas que se pueden definir sobre un subconjunto  $E$  de  $G$  y  $C_1$ ,  $C_2$  y  $\alpha$  son constantes no negativas.

**Observación 1.** *En el caso del perímetro relativo  $P(E, G)$ , ésta es una medida  $(n-1)$ -dimensional apropiada de  $\partial E \cap G$ . Si  $\partial E$  es una hipersuperficie diferenciable de  $\mathbb{R}^n$ , su medida  $(n-1)$ -dimensional se puede definir a partir de la métrica riemanniana sobre  $\partial E$ . Si la hipersuperficie no es diferenciable, esta definición deja de tener sentido y se requiere una nueva; esta nueva definición se puede obtener a partir de la teoría geométrica de la medida utilizando el contenido de Minkowski o la medida de Hausdorff.*

El exponente  $\alpha \in ]0, \alpha_0]$ , donde  $\alpha_0$  es el número real positivo que hace que el cociente  $\frac{\mu(E)}{\gamma(E)}$  sea invariante bajo dilataciones.

En muchas ocasiones se considerará precisamente el exponente  $\alpha_0$ , ya que en este caso se obtiene una información sobre la forma de los conjuntos determinados porque la razón es invariante por dilataciones y no influye por tanto el tamaño del conjunto.

Otras veces interesará considerar exponentes  $\alpha < \alpha_0$ , y en ese caso se obtienen resultados con un significado económico, pues al dar diferentes valores de  $\alpha$  se puede ponderar la importancia de maximizar o minimizar una de las magnitudes frente a la otra.

La razón por la cual debe cumplirse que  $\alpha \leq \alpha_0$  es que en otro caso no existirían cotas inferiores y superiores finitas. Por ejemplo, en el caso que  $\mu(E) = A(E)$  y  $\gamma(E) = P(E)$ , tomando discos de radio  $\varepsilon$  tan pequeños como se quiera contenidos en  $G$ ,  $B_\varepsilon$ , se prueba que el cociente  $\frac{A(B_\varepsilon)}{P(B_\varepsilon)^\alpha}$  tiende a infinito cuando  $\varepsilon$  tiende a 0:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(B_\varepsilon)}{P(B_\varepsilon)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(B_\varepsilon)}{P(B_\varepsilon)^{\alpha_0} P(B_\varepsilon)^{\alpha - \alpha_0}} = C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{P(B_\varepsilon)^{\alpha - \alpha_0}} = \infty,$$



donde  $C = A(B_\varepsilon)/P(B_\varepsilon)^{\alpha_0}$  es una constante que no depende de  $\varepsilon$  y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\alpha - \alpha_0}} = \infty.$$

Para un conjunto  $G$  y un exponente  $\alpha$  fijos, existen unas cotas inferior y superior óptimas. A estas cotas se les denomina constantes geométricas:

**Definición 1.2.** Las constantes geométricas  $C_s(G, \alpha)$  y  $C_i(G, \alpha)$  son respectivamente el ínfimo y el supremo de las razones  $\frac{\mu(E, G)}{\gamma(E, G)^\alpha}$  para todos los subconjuntos  $E$  de  $G$  considerados en la definición 1.1:

$$C_s(G, \alpha) = \sup_{E \in G} \left\{ \frac{\mu(E, G)}{\gamma(E, G)^\alpha} \right\}$$

y

$$C_i(G, \alpha) = \inf_{E \in G} \left\{ \frac{\mu(E, G)}{\gamma(E, G)^\alpha} \right\}.$$

Ejemplos conocidos de constantes geométricas son los siguientes:

Para el caso isoperimétrico, se conoce la constante isoperimétrica de la bola unidad  $B$  en  $\mathbb{R}^n$  cuando  $\alpha = n/(n-1)$  ([13]):

$$C_s(B, \frac{n}{n-1}) = \frac{\kappa_n}{2(\kappa_{n-1})^{\frac{n}{n-1}}}.$$

Mientras que para el cubo unidad,  $Q = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ , dicha constante es conocida para  $\alpha = 1$  ([37]):

$$C_s(Q, 1) = \frac{1}{2}.$$

En este caso  $C_s(Q, 1)$  es una constante universal ya que es independiente de la dimensión del espacio.

El objetivo de los capítulos siguientes será obtener los valores de las constantes geométricas (las mejores cotas inferiores y superiores) así como los subconjuntos  $E$  para los cuales se alcanza la igualdad, denominados *maximizadores* y *minimizadores*, y las propiedades de dichos conjuntos. También se buscarán las características y propiedades geométricas de conjuntos extremales, definiendo estos conjuntos como sigue:

**Definición 1.3.** Sea  $G$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Un conjunto extremal es un subconjunto  $E_0$  de  $G$  tal que entre todos los subconjuntos  $E \subset G$  que satisfacen  $\mu(E, G) = \mu(E_0, G)$ , nos proporciona el valor mínimo de  $\gamma(E, G)$ :

$$\gamma(E, G) \geq \gamma(E_0, G).$$

Pero no siempre es posible garantizar la existencia de conjuntos extremales, maximizadores y minimizadores. Por ejemplo, si  $G$  es no acotado, en el problema isoperimétrico relativo determinado por  $G = H$  y  $\alpha = 1$ , todos los semicírculos centrados en la frontera de  $\Gamma$  son conjuntos extremales, sin embargo no hay maximizadores ya que el cociente  $A(E, G)/P(E, G)$  tiende a infinito cuando  $r$  tiende a infinito ( $r$  es el radio del semicírculo):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A(E, G)}{P(E, G)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{\pi r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2} = \infty.$$

Debido a ello, se exige con frecuencia que el conjunto  $G$  sea acotado, lo que permite utilizar argumentos de compacidad para garantizar la existencia tanto de maximizadores y minimizadores como de conjuntos extremales. Aún así, hay ocasiones en las que la hipótesis de que  $G$  sea acotado no es suficiente, y entonces se utiliza la hipótesis adicional de que  $G$  sea convexo.

Los maximizadores –cuando existen– son siempre conjuntos extremales, pero en general no todos los conjuntos extremales son maximizadores. Por ejemplo, el problema de Dido es un problema geométrico relativo en el cual  $G$  es el semiplano Euclídeo,  $\alpha = 2$ ,  $\mu(E, G) = A(E, G)$ , área relativa de  $E$ , y  $\gamma(E, G) = P(E, G)$ , perímetro relativo de  $E$ . En este caso particular, todos los conjuntos extremales son maximizadores. Sin embargo, si en este mismo problema se toma  $G$  como un cuadrado abierto, los conjuntos extremales son:

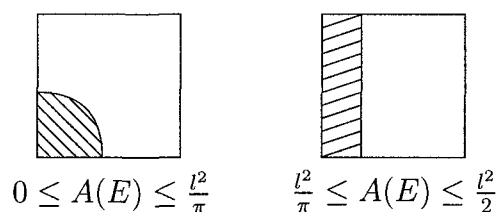


FIGURA 1.3

Pero el único maximizador es:

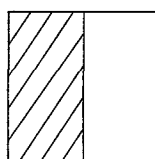


FIGURA 1.4

En muchos casos también se tratará de obtener *estimadores globales* para este tipo de desigualdades, entendiendo por estimador global al valor que nos proporciona una cota superior (inferior) óptima de la desigualdad geométrica relativa que depende sólo de las magnitudes geométricas consideradas y del exponente  $\alpha$ , y que es válida por tanto para cualquier conjunto  $G$  de  $\mathbb{R}^n$ . En esas ocasiones interesa también determinar cuáles son los conjuntos  $G$  para los que se alcanza dicha estimación global.

En la introducción se ha indicado que una línea de investigación en las desigualdades isoperimétricas relativas era la enfocada a la geometría discreta. Esta formulación se remonta a la década de 1960 cuando Fejes-Toth se preguntó –entre otras cosas– qué hubiera hecho la reina Dido si sus tiras de cuero hubiesen perdido flexibilidad y se hubieran endurecido hasta convertirse en segmentos rígidos de línea recta. Se puede encontrar referencia de este planteamiento en los siguientes artículos: ([5], [6], [28], [29], [30], [64], [65],...)

La formulación más precisa de este problema se puede plantear como sigue:

Sea  $E$  una colección finita de segmentos de línea recta situados en  $\mathbb{R}^2$ . Se puede definir el área encerrada por  $E$  del siguiente modo:

Sea  $U$  la unión de las componentes acotadas de  $\mathbb{R}^2 \setminus E$ . Sea  $W$  la clausura del conjunto de puntos definido por  $U$ . Se define el área de  $E$  como el área encerrada por  $W$ .

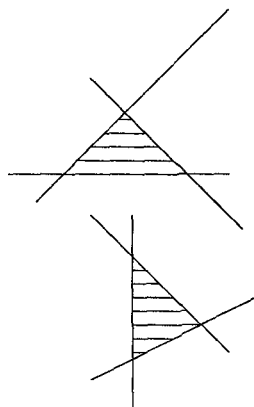


FIGURA 1.5

El problema geométrico relativo consistiría en probar que el área encerrada por una configuración arbitraria de segmentos  $E$  no puede exceder el área del mayor polígono posible cuyos lados no son más largos que la longitud de los segmentos de  $E$ .

## 1.2. Magnitudes Geométricas Absolutas y Relativas

En esta sección se van a introducir las definiciones de las magnitudes geométricas relativas que se utilizarán en capítulos posteriores.

En primer lugar se va a recordar las definiciones clásicas de las magnitudes geométricas absolutas que intervienen:

**Definición 1.4.** Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$ . Se define el diámetro de  $K$  como la máxima de las distancias entre dos puntos cualesquiera de  $K$ , es decir:

$$D(K) = \max_{x,y \in K} \{d(x,y)\}.$$

Por otro lado, si se considera el mismo cuerpo convexo  $K$  y  $\vec{u}$  un vector unitario de  $\mathbb{R}^n$ , entonces también se puede definir el diámetro de  $K$  como el máximo de las secciones rectilíneas de  $K$  en cada dirección  $\vec{u}$ , es decir:

$$D(K) = \max_{\vec{u} \in \mathbb{S}^{n-1}} \sigma(K, \vec{u}),$$

donde  $\sigma(K, \vec{u})$  es la sección de  $K$  en la dirección  $\vec{u}$ , que se define como la máxima de las longitudes de las cuerdas paralelas a  $\vec{u}$  de  $K$ , siendo ésta una dirección cualquiera de  $\mathbb{S}^1$ .

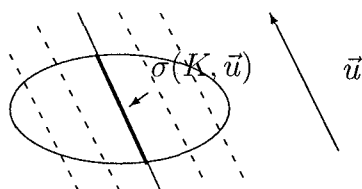


FIGURA 1.6

Ambas definiciones son equivalentes.

**Definición 1.5.** Sea  $K$  un cuerpo convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Se define el inradio de  $K$ ,  $\rho(K)$ , como el radio de la mayor de las bolas  $n$ -dimensionales contenidas en  $K$ .

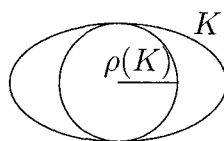


FIGURA 1.7

**Definición 1.6.** Sea  $K$  un cuerpo convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Se define la anchura mínima de  $K$ ,  $\omega(K) = \min_u \sigma(K, u)$ , como la longitud mínima de entre todas las cuerdas de longitud máxima.

Se pasa ya a definir las magnitudes geométricas relativas. Para ello sea  $G \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, acotado y convexo y  $E \subset G$  un subconjunto de  $G$  tal que tanto  $E$  como su complementario  $G \setminus E$  son conexos y tienen interior no vacío, y sea  $\partial E \cap G$  una hipersuperficie topológica. Se define:

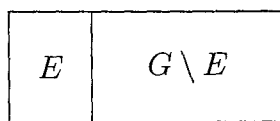
(i) El *perímetro relativo* de  $E$ ,  $P(E, G)$ , como la medida  $(n-1)$ -dimensional de la frontera relativa de  $E$ ,  $\partial E \cap G$ , que es la parte de la frontera de  $E$  que está contenida en  $G$ . (Fig 1.8).



FIGURA 1.8

(ii) el *volumen relativo* como el mínimo entre el volumen de  $E$  y el volumen de su complementario:

$$V(E, G) = \min\{V(E), V(G \setminus E)\},$$



$$V(E, G) = V(E)$$

FIGURA 1.9

(iii) El *diámetro relativo mínimo* de  $E$  como:

$$d_m(E, G) = \min\{D(E), D(G \setminus E)\},$$

donde  $D(\cdot)$  es el funcional diámetro.

(iv) El *diámetro relativo máximo* de  $E$  como:

$$d_M(E, G) = \max\{D(E), D(G \setminus E)\}.$$

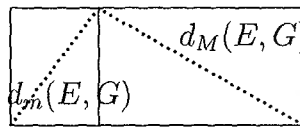


FIGURA 1.10

(v) El *inradio relativo mínimo* como el mínimo entre el inradio de  $E$  y el de su complementario:  $\rho_m(E, G) = \min\{\rho(E), \rho(G \setminus E)\}$ .

(vi) El *inradio relativo máximo* como el máximo entre el inradio de  $E$  y el de su complementario:  $\rho_M(E, G) = \max\{\rho(E), \rho(G \setminus E)\}$ .

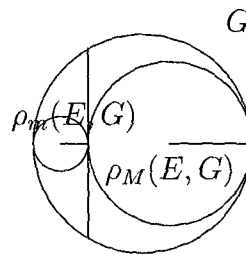


FIGURA 1.11

(vii) la *anchura relativa mínima* como el mínimo entre la anchura de  $E$  y la de su complementario:

$$\omega_m(E, G) = \min\{\omega(E), \omega(G \setminus E)\},$$

y

(viii) la *anchura relativa máxima* como el máximo entre la anchura de  $E$  y la de su complementario:

$$\omega_M(E, G) = \max\{\omega(E), \omega(G \setminus E)\}.$$

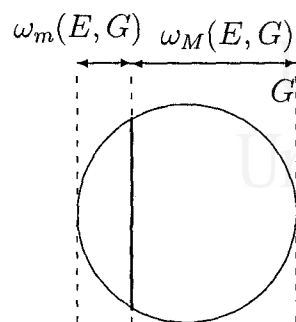


FIGURA 1.12

La razón por la que a la hora de considerar las magnitudes geométricas relativas se considera sólo el volumen relativo mínimo, y no el máximo, es que al ser el volumen una medida, es aditivo respecto de la unión disjunta, y el volumen relativo máximo queda totalmente determinado como el volumen del total del conjunto  $G$  menos el volumen relativo mínimo; la noción de volumen relativo máximo no añade por tanto ninguna información geométrica nueva. No este el caso de los otros funcionales, ya que tanto el diámetro como la anchura y el inradio son solamente subaditivos, y por tanto la introducción de los conceptos de máximo y mínimo aporta información geométrica significativa sobre la subdivisión del conjunto. Dado que es igual optar por el volumen relativo máximo que por el mínimo, se ha elegido este último por razones históricas.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 2

---

# Desigualdades Geométricas Relativas Comparando el Perímetro Relativo con el Diámetro Relativo

---

En este capítulo se van a obtener desigualdades geométricas relativas en las que se compara el perímetro relativo con el diámetro relativo mínimo de conjuntos convexos planos acotados. En la sección de observaciones se considerará también el caso del diámetro relativo máximo.

Sea  $G$  un conjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^2$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  con interior no vacío y frontera rectificable tal que tanto  $E$  como su complementario  $G \setminus E$  son conexos, y  $\partial E \cap G$  es un arco de curva continua.

Se van a obtener por tanto desigualdades del tipo:

$$C'_i(G, \alpha) \leq \frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \leq C'_s(G, \alpha),$$

donde  $C'_i(G, \alpha)$  y  $C'_s(G, \alpha)$  son constantes no negativas y  $\alpha \in (0, \alpha_0]$ .

En este caso  $\alpha_0 = 1$ , ya que éste es el valor que mantiene el cociente  $D(E)/P(E)$  invariante por dilataciones.

Las constantes geométricas relativas serán:

$$C_s(G, \alpha) = \sup \left\{ \frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \right\}$$

y

$$C_i(G, \alpha) = \inf \left\{ \frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \right\}.$$

Se empieza estudiando las características y propiedades geométricas de conjuntos extremales y maximizadores. Pero antes de comenzar hay que ver bajo qué hipótesis sobre el conjunto  $G$  se puede garantizar la existencia de tales conjuntos:

Como ya se ha visto en el capítulo anterior, si  $G$  no es acotado, no siempre se puede garantizar la existencia de extremales y maximizadores. Aun así, la acotación de  $G$  tampoco es siempre suficiente, como muestra el siguiente contraejemplo:

**Ejemplo 2.1.** *Existen conjuntos  $G$  tales que  $\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \rightarrow \infty, \forall \alpha \in (0, 1]$ .*

Sea  $G = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, |(x, y)| \geq 1, |(x, y + 1)| \leq 2\}$ . Y sean  $P = (\cos \theta, \sin \theta)$  y  $Q = \lambda P$ , donde  $Q$  es la intersección de  $\overline{0P}$  y la circunferencia de centro  $(0, -1)$  y radio 2.

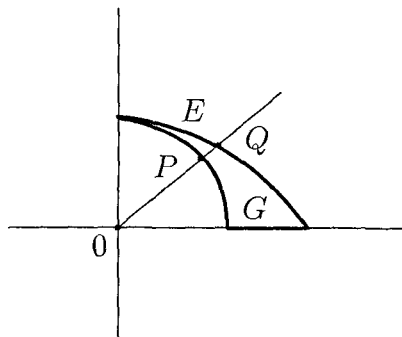


FIGURA 2.2

Mediante cálculos elementales se tiene que:

$$\lambda = \sqrt{4 - (\cos \theta)^2} - \sin \theta$$

Sea  $E$  el subconjunto de  $G$  que está acotado por el segmento  $\overline{PQ}$  y los dos arcos circulares de  $(0, 1)$  a  $P$  y de  $(0, 1)$  a  $Q$  respectivamente.

Se sigue que:

$$P(E, G) = |P - Q| = \lambda - 1 = \sqrt{4 - (\cos \theta)^2} - \sin \theta - 1$$

y

$$D(E) = |(0, 1) - Q|^2 = |(\lambda \cos \theta - 1, \lambda \sin \theta)|^2 = (\lambda)^2 + 1 - 2\lambda \cos \theta.$$

Por tanto:

$$\left\{ \frac{d_m(E, G)}{P(E, G)} \right\}^2 = \frac{(\lambda)^2 + 1 - 2\lambda \cos \theta}{(\lambda)^2 + 1 - 2\lambda} = 1 + 2\lambda \frac{1 - \sin \theta}{(\lambda - 1)^2}$$

Y aplicando la ley de L'Hopital se prueba que  $\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)} \rightarrow \infty$  cuando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

Sin embargo, si se incluye la hipótesis de que  $G$  sea convexo para que  $\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)}$  esté acotado superiormente por un número positivo se puede garantizar la existencia de maximizadores.

La demostración de la existencia de maximizadores sigue un procedimiento largo. A continuación se probarán algunos lemas que se necesitarán en las demostraciones principales:

El primer lema proporciona una cota superior para el cociente entre el mínimo diámetro relativo y el perímetro relativo con exponente  $\alpha$ . La cota obtenida depende del diámetro del conjunto  $G$ , del exponente  $\alpha$  y de su anchura mínima,  $\omega(G)$ .

**Lema 2.2.** ([14]) *Sea  $G \subset \mathbb{R}^2$  convexo y sea  $E$  un subconjunto de  $G$ . Entonces:*

$$\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \leq D(G)^{1-\alpha} \cdot \left( 1 + \left( \frac{D(G)}{\omega(G)} \right)^2 \right)^{\alpha/2}, \quad (2.1)$$

donde  $\omega(G)$  es la anchura mínima de  $G$ .

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad sea  $d := d_m(E, G) = D(E)$ . Sean  $P, Q \in E$  con  $|P - Q| = d$  y sea  $\overline{RT}$  la cuerda de longitud máxima de  $G$  que es ortogonal a  $\overline{PQ}$ . La distancia de  $P$  a  $\overline{RT}$  es como máximo  $D := D(G)$ . Dado que  $G$  es convexo, la cuerda paralela que pasa por  $Q$  tiene longitud  $q \geq d/D \cdot |R - T| \geq d/D \cdot \omega(G)$ .

Si se supone que  $Q \in \text{conv}\{P, R, T\}$ , entonces  $Q$  divide la intersección de la cuerda con  $\text{conv}\{P, R, T\}$  en dos partes de longitud  $a$  y  $b$ .

$P(E, G)$  es al menos la suma de las distancias de  $Q$  a las rectas  $\overline{PR}$  y  $\overline{PT}$ , entonces:

$$P(E, G) \geq \frac{ad}{a^2 + d^2} + \frac{bd}{b^2 + d^2}.$$

Minimizando esta función bajo la condición  $a + b = q$  se obtiene que  $P(E, G) \geq d \cdot q / \sqrt{q^2 + d^2}$  y por tanto:

$$\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \leq \frac{d}{d^\alpha} \sqrt{1 + (d/q)^2}^{2\alpha} \leq D^{1-\alpha} \cdot \left(1 + \left(\frac{d}{q}\right)^2\right)^{\alpha/2} \leq D^{1-\alpha} \cdot \left(1 + \left(\frac{D}{\omega(G)}\right)^2\right)^{\alpha/2}.$$

□

El segundo lema dice que dados 3 puntos, siempre es posible definir un cuarto tal que la suma de las distancias a los otros puntos sea mínima:

**Lema 2.3.** ([14]) Sean  $P, A, B$  tres puntos y  $d > 0$ . Entonces existe un punto  $Q$  tal que  $|P - Q| = d$  y que proporciona el mínimo valor de  $|A - Q| + |B - Q|$ . Además, los ángulos  $\angle AQP$  y  $\angle BQP$  son congruentes.

**Demostración.** La existencia de  $Q$  se demuestra utilizando un argumento estándar de compacidad.  $Q$  es la solución del siguiente problema de optimización: minimizar  $|x - A| + |x - B|$  bajo la restricción  $|x - P| = d$ . La función de Lagrange correspondiente es  $|x - A| + |x - B| + \lambda(|x - P| - d)$ . Se sigue que  $Q$  satisface la ecuación  $0 = (Q - A)/|Q - A| + (Q - B)/|Q - B| + \lambda \cdot (Q - P)/|Q - P|$ . Entonces existe un valor  $\mu$  tal que  $Q - P = \mu((Q - A)/|Q - A| + (Q - B)/|Q - B|)$ . Esto significa que  $P$  se encuentra en la parte de la bisección de ángulo  $\angle AQB$ .

□

El último de los lemas, expuesto a continuación, garantiza bajo la hipótesis de que  $G$  sea acotado la existencia de conjuntos extremales con diámetro  $d_m(E, G) = d$  para cualquier valor de  $d$  entre 0 y el diámetro de  $G$ .

**Lema 2.4.** ([14]) Sea  $G \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto acotado con diámetro  $D(G)$ . Entonces, para cada  $d \in ]0, D(G)[$  existe un conjunto extremal  $E \subset G$  tal que  $d_m(E, G) = d$ .

**Demostración.** Sea  $0 < d < D(G)$  y  $p_0 := \inf\{P(E, G) : E \subset G, d_m(E, G) = d\}$ . Existe una sucesión  $E_n \subset G$  tal que  $d_m(E_n, G) = d, \forall E_n$ , con  $P(E_n, G) \rightarrow p_0$ . La sucesión  $\{\overline{E_n}\}$  de conjuntos compactos tiene una subsucesión convergente con límite  $E \subset G$ . Se sigue que  $d_m(E, G) = d$  y  $P(E, G) = p_0$  y por tanto  $E$  es un conjunto extremal.

□

## 2.1. Propiedades de los Conjuntos Extremales y los Maximizadores

En esta nueva sección se prueba la existencia de conjuntos extremales y maximizadores, y se describen sus propiedades geométricas.

Se acaba de demostrar la existencia, para cualquier valor  $d$  entre 0 y el diámetro del conjunto original  $G$ , de conjuntos extremales con diámetro relativo mínimo  $d$ . La pregunta que se puede plantear ahora es, ¿cuál es la forma de dichos conjuntos?

El primero de los teoremas muestra una descripción de la frontera de los conjuntos extremales: ésta consiste en un segmento de recta y parte de la frontera del conjunto  $G$ .

**Teorema 2.5.** ([14]) *Sea  $G \subset \mathbb{R}^2$  convexo y acotado y sea  $E \subset G$  un conjunto extremal. Entonces la frontera relativa de  $E$  es un segmento de recta.*

**Demostración.** Sea  $E \subset G$  un conjunto extremal tal que  $d_m(E, G) = d$  y alcanza el mínimo valor de  $P(E, G) \leq d$ . Sea  $\gamma$  la frontera relativa de  $E$  con extremos  $A$  y  $B$ . Entonces, existen puntos  $Q$  y  $Q'$  en los semiplanos correspondientes a la línea  $\overline{AB}$  con distancia máxima a  $\overline{AB}$ . Como  $E$  es extremal, se ve que  $Q$  y  $Q'$  junto con dos puntos  $P$  y  $P'$  en los lados opuestos forman los diámetros de  $E$  y de  $G \setminus E$  respectivamente, es decir,  $|P - Q| = D(E) =: d_1$  y  $|P' - Q'| = D(G \setminus E) =: d_2$  (sin pérdida de generalidad se puede suponer  $d_2 \geq d_1 = d$ ). Por tanto, de la extremalidad de  $E$  se sigue que  $\gamma$  está compuesta por tres segmentos de recta:  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{QQ'}$  y  $\overline{Q'B}$ .

Se distinguen dos casos:

(1) Si  $d_1 < d_2$  entonces  $Q' = B$  (si no fuese así, se podría disminuir  $P(\cdot, G)$  sin variar  $d_m(\cdot, G)$ ). Sean  $h_A, h_B$  dos rectas soporte de  $G$  que pasan por  $A$  y  $B$  respectivamente. Como  $E$  es extremal, se puede suponer que  $h_A$  es perpendicular a  $\overline{AQ}$ ,  $h_B$  es perpendicular a  $\overline{BQ}$  y  $h_A$  y  $h_B$  se intersectan en el semiplano determinado por  $\gamma$  que contiene a  $E$ . Entonces  $Q$  proporciona el menor valor para la suma de las distancias a  $h_A$  y  $h_B$  entre todos los puntos de  $G$  con distancia  $d_1$  a  $P$ . Se puede ver por tanto que  $Q = A$  o  $Q = B$  y en conclusión,  $\gamma$  es un segmento.

(2) Ahora sea  $d_1 = d_2 = d$ . Como ocurría en el caso (1), se puede suponer que  $Q \neq A$  y  $Q' \neq B$ . Sea  $S$  la intersección de dos círculos con centros  $P$  y  $P'$  y radio  $d$ . Entonces,  $A, B, Q, Q'$  están contenidos en  $S \cap G$ . Ahora sea  $h_Q$  la recta que pasa por  $Q$  y es perpendicular a  $\overline{PQ}$  y  $h_{Q'}$  la recta que pasa por  $Q'$  y es perpendicular a  $\overline{P'Q'}$ . Además, sea  $h_A$  la recta que pasa por  $A$  y es perpendicular a  $\overline{QA}$  y  $h_B$  la recta que pasa por  $B$  y es perpendicular a  $\overline{Q'B}$ . Como  $E$  es extremal, se sigue que  $h_A$  y  $h_B$  son rectas soporte de  $G$ .

Entonces, aplicando el Lema 2.4, se tiene que  $\angle AQP = \angle PQQ' =: \varphi$ , y  $\angle BQ'P' = \angle P'Q'Q =: \psi$ .

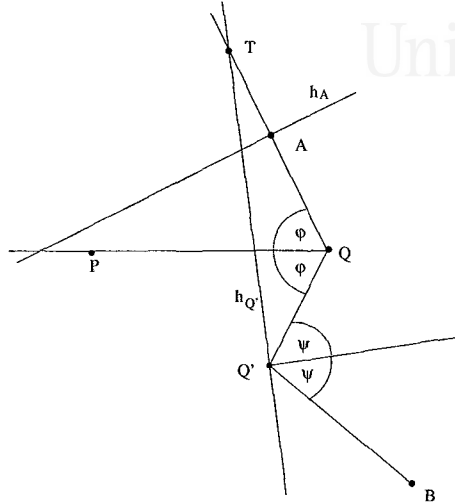


FIGURA 2.3

Sean  $a = |A - Q|$ ,  $q = |Q - Q'|$  y  $b = |Q' - B|$ . Se define la elipse  $Z := \{X : |X - A| + |X - Q'| \leq a + q\}$  con focos  $A$  y  $Q'$  y ejes  $(a + q)/2$  y  $\sqrt{aq} \cos \varphi$ , y el círculo  $K = \{X : |X - P| \leq d\}$  con centro  $P$  y radio  $d$ . De la extremalidad de  $E$  se puede concluir que existe un entorno  $U$  de  $Q$  tal que  $U \cap Z \subset U \cap K$ . Se tiene pues que  $d$  es mayor o igual que el radio de curvatura de  $\partial Z$  en  $Q$ . Por tanto:

$$d \geq \frac{2aq}{(a + q)\cos \varphi} \quad (2.2)$$

Por otro lado, como  $P$  se encuentra en el mismo lado de  $h_A$  que  $Q$ , el ángulo  $\angle PAQ$  es acutángulo, y de aquí se deduce que:

$$d \leq a/\cos \varphi \quad (2.3)$$

Entonces, de (2.2) y (2.3) se sigue que  $a \geq q$ .

Finalmente, considerando el triángulo de vértices  $Q, Q'$  y  $T$ , donde  $T$  es el punto intersección de las rectas  $h'_Q$  y  $\overline{QA}$ , se sigue que, como  $|T - Q| > |A - Q| = a \geq q$ ,  $\angle QQ'T > \angle Q'TQ$ , y por tanto:

$$\frac{\pi}{2} - \psi > \pi - 2\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right),$$

o equivalentemente:

$$\psi < \varphi.$$

## 2.1 PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS EXTREMALES Y LOS MAXIMIZADORES 23

Sin embargo, realizando el mismo argumento pero intercambiando los papeles de  $A$  y  $B$ ,  $Q$  y  $Q'$ , y  $\varphi$  y  $\psi$ , se tiene que:

$$\varphi < \psi,$$

lo cual lleva a una contradicción. □

Una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente corolario. Dicho corolario proporciona una descripción de la frontera relativa de los maximizadores, en el caso de que existan.

**Corolario 2.6.** ([14]) *Sea  $G$  un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces:*

$$C_s(G, \alpha) = \sup \left\{ \frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} : E = G \cap H^+, H^+ \text{ semiplano} \right\},$$

*es decir, es suficiente considerar conjuntos  $E$  cuya frontera relativa sea un segmento de recta.*

En conclusión, a la hora de encontrar el maximizador o maximizadores, en el caso de que existan, bastará considerar subdivisiones del conjunto  $G$  realizadas con segmentos de recta.

A continuación se prueba otro resultado que ofrece una nueva propiedad de los maximizadores. El siguiente teorema demuestra que en el caso de existir maximizadores, habrá al menos uno que cumpla que el diámetro de dicho conjunto coincide con el de su complementario con respecto al conjunto  $G$ .

**Teorema 2.7.** ([14]) *Sea  $G$  un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces:*

$$C_s(G, \alpha) = \sup \left\{ \frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} : E \subset G, D(E) = D(G \setminus E) \right\}.$$

**Demostración.** Sea  $E \subset G$  tal que  $d_1 := D(E) < D(G \setminus E) =: d_2$ . Bastará probar que existe un subconjunto  $E' \subset G$  tal que  $D(E') = D(G \setminus E')$  y

$$\frac{d_m(E', G)}{P(E', G)^\alpha} \geq \frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha}. \quad (2.4)$$

Aplicando el Corolario 2.6, se puede suponer que la frontera relativa de  $E$  es un segmento  $\overline{AB}$ . Entonces, sean  $P, Q \in E$  tales que  $|P - Q| = d_1$  y  $P', Q' \in G \setminus E$  tales que  $|P' - Q'| = d_2$ . Sean  $a$  y  $b$  dos rectas soporte a  $G$ , que pasan por  $A$  y



$B$  respectivamente. Si  $a$  y  $b$  fuesen paralelas o se intersectasen en el semiplano con respecto a  $\overline{AB}$  que contiene a  $G \setminus E$ , entonces se podría trasladar paralelamente  $\overline{AB}$  hasta que  $d_1 = d_2$  sin disminuir  $d_m(\cdot, G)$  y sin incrementar  $P(\cdot, G)$ . Por tanto, se puede suponer que  $a$  y  $b$  se intersectan en el semiplano con respecto a  $\overline{AB}$  que contiene a  $E$ .

$Q$  debe ser uno de los puntos  $A$  o  $B$ . Si no fuese así, definiendo  $g$  la recta paralela a  $\overline{AB}$  que pasa por  $Q$ , y  $A', B'$  sus puntos de intersección con  $\overline{PA}$  y  $\overline{PB}$ , se tendría que:

$$|P - Q| \leq \max\{|P - A'|, |P - B'|\} \leq \max\{|P - A|, |P - B|\},$$

lo cual es imposible.

Por tanto, sea  $Q = A$ .

Como  $D(E) < D(G \setminus E)$ , se puede tomar una cuerda  $\overline{A'B'}$  paralela a  $\overline{AB}$  en el lado de  $\overline{AB}$  opuesto a  $P$ , la cual divide a  $G$  en dos subconjuntos  $E'$  y  $G \setminus E'$  con igual diámetro:  $d'_1 = d'_2 \geq d_1$ .

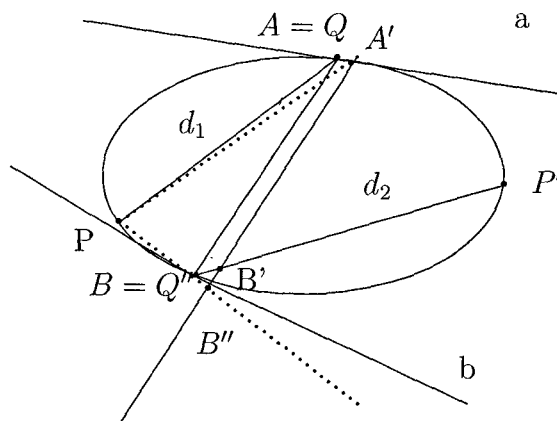


FIGURA 2.4

Entonces, sean  $\varphi = \angle APB$  y  $\psi = \angle PBA$ . Como  $|P - Q| \geq |Q - B|$ , se sigue que  $\varphi \leq \psi$ . En particular,  $\varphi \leq \pi/2$ . Se define ahora  $B''$  como la intersección de  $\overline{A'B'}$  con  $\overline{PB}$  y sea  $\varphi' = \angle A'PB''$ . Obviamente,  $\varphi' \leq \varphi \leq \pi/2$ .

Finalmente, aplicando el Teorema del seno queda probada la desigualdad (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{d_m(E', G)}{P(E', G)^\alpha} &\geq d_m(E', G)^{1-\alpha} \cdot \left( \frac{|P - A'|}{|A' - B'|} \right)^\alpha \geq d_m(E', G)^{1-\alpha} \cdot \left( \frac{|P - A'|}{|A' - B''|} \right)^\alpha = \\ &= d_m(E', G)^{1-\alpha} \cdot \left( \frac{\sin \psi}{\sin \varphi'} \right)^\alpha \geq d_m(E', G)^{1-\alpha} \cdot \left( \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \right)^\alpha = \end{aligned}$$

$$= d_m(E', G)^{1-\alpha} \cdot \left( \frac{|P-A|}{|A-B|} \right)^\alpha = d_m(E', G)^{1-\alpha} \cdot \frac{d_m(E, G)^\alpha}{P(E, G)^\alpha} \geq \frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha}.$$

□

El siguiente corolario garantiza la existencia de al menos un maximizador siempre que  $G$  sea convexo.

**Corolario 2.8.** ([14]) *Sea  $G$  un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces existe un conjunto convexo  $E_0 \subset G$  tal que:*

$$\frac{d_m(E_0, G)}{P(E_0, G)^\alpha} = C_s(G, \alpha).$$

**Demostración.** Sea  $\{E_n\}$  una sucesión de subconjuntos de  $G$  tales que:

$$\frac{d_m(E_n, G)}{P(E_n, G)^\alpha} \rightarrow C_s(G, \alpha).$$

Por el Corolario 2.6, se puede suponer que  $E_n$  es la intersección de  $G$  con un semiplano generado por una cuerda  $\overline{AB}$ . De la misma manera, aplicando el Teorema 2.7,  $D(E_n) = D(G \setminus E_n)$ ,  $\forall n$ . En particular,  $D(E_n) \geq D(G)/2$ .

Del Lema 2.3 se sigue que  $P(E_n, G) \geq c > 0$  para todo  $n$ , donde  $c$  es una constante que depende únicamente de  $G$ . Entonces, aplicando el Teorema de Bolzano-Weierstrass, de las sucesiones  $\{A_n\}$  y  $\{B_n\}$  se puede extraer una subsucesión convergente. Se puede suponer por tanto que  $A_n \rightarrow A_0$  y  $B_n \rightarrow B_0$ . Ahora, si  $E_0$  es la intersección de  $G$  con el semiplano determinado por  $\overline{A_0B_0}$ , entonces  $E_0$  es un conjunto convexo,

$$D(E_0) = D(\lim E_n) = \lim D(E_n)$$

y

$$D(G \setminus E_0) = D(\lim G \setminus E_n) = \lim D(E_n).$$

Por tanto:

$$d_m(E_0, G) = \lim d_m(E_n, G).$$

Además,

$$P(E_0, G) = |A_0 - B_0| = \lim |A_n - B_n| = \lim P(E_n, G) > 0.$$

En conclusión,  $E_0$  es no vacío y se cumple que:

$$\frac{d_m(E_0, G)}{P(E_0, G)^\alpha} = \lim \frac{d_m(E_n, G)}{P(E_n, G)^\alpha} = C_s(G, \alpha).$$

## 2.2. Ejemplos de Particular Interés

Los resultados obtenidos en la sección anterior proporcionan un procedimiento efectivo para determinar los maximizadores. En el caso particular en que  $G$  sea un conjunto centralmente simétrico, se tiene el siguiente resultado:

**Corolario 2.9.** ([14]) Sea  $G \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto convexo y centralmente simétrico. Entonces existe un conjunto convexo  $E_0 \subset G$  que satisface  $G \setminus E_0 = -E_0$  y tal que:

$$\frac{d_m(E_0, G)}{P(E_0, G)^\alpha} = C_s(G, \alpha).$$

Es decir, este corolario garantiza, bajo las hipótesis dadas, la existencia de al menos un maximizador tal que la frontera relativa de dicho conjunto pasa por el centro de simetría.

**Demostración.** Del Teorema 2.7 y el Corolario 2.8, se sigue que existe un conjunto convexo  $E \subset G$  tal que:

$$\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} = C_s(G, \alpha) \text{ y } D(E) = D(G \setminus E).$$

Vamos a proceder por reducción al absurdo:

Si  $0$  no pertenece al segmento  $\overline{AB}$ , entonces se puede suponer sin restricción que  $0 \in \text{int}(G \setminus E)$ . Sean  $P, Q \in E$  tales que  $|P - Q| = D(E)$  y se supone que  $Q$  está contenido en  $\overline{AB}$ . (Si no fuese así se podría trasladar paralelamente  $\overline{AB}$  hacia  $P$  sin disminuir  $d_m(\cdot, G)/P(\cdot, G)^\alpha$ ). Entonces, sin pérdida de generalidad, sea  $Q = A$ .

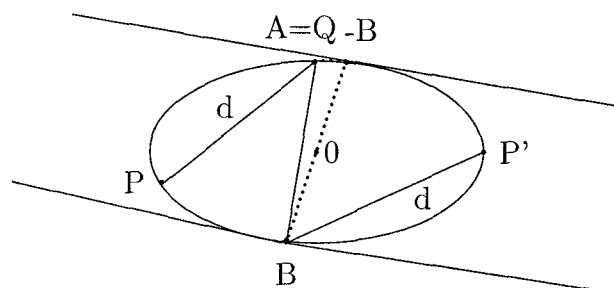


FIGURA 2.5

Por otro lado,  $G$  tiene una recta soporte que pasa por  $B$  la cual es ortogonal a  $\overline{AB}$  (si no, se podría fijar  $d_m$  y mejorar  $P(E, G) = |A - B|$  localmente). Se sigue

pues que  $G$  está contenido en la franja generada por las dos rectas paralelas que pasan por  $B$  y  $-B$ . Se tiene por tanto que  $\angle PA(-B) \geq \pi/2$  y consecuentemente  $|P - (-B)| > D(E)$ . Pero esto lleva a una contradicción, ya que entonces:

$$D(E) = D(G \setminus E) \geq |(-P) - B| = |P + B| > D(E).$$

□

De esta forma, en el caso particular en que  $G$  sea un conjunto convexo centralmente simétrico, la determinación de maximizadores se reduce a un problema uniparamétrico. Basta considerar todas las cuerdas que pasan por el centro de simetría de  $G$  y ver cuál es el ángulo que proporciona un valor mejor de  $\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha}$ .

Se muestran a continuación algunos ejemplos concretos en los que por simplicidad se considera el caso  $\alpha = 1$ :

### 2.2.1. Ejemplos concretos de maximizadores

(1) Si  $G$  es un disco, entonces  $C_s(G, 1) = 1$ .

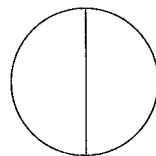


FIGURA 2.6

En la figura 2.6 se muestra un maximizador del disco  $G$  que satisface  $D(E) = D(G \setminus E)$  y tal que su frontera relativa es un segmento de recta que pasa por el centro de simetría.

(2) Si  $G$  es un cuadrado de lado unidad, entonces  $C_s(G, 1) = \frac{1}{2}\sqrt{3 + \sqrt{5}} = 1,144\dots$  y el único maximizador se muestra en la figura 2.7:

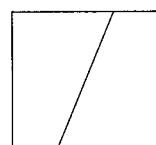


FIGURA 2.7

Sea  $G = \text{conv}\{\pm(1,1), \pm(1,-1)\}$ . Además, sea  $A = (1, x)$ ,  $B = -A$  y  $E_x$  el correspondiente conjunto. Entonces  $d_m(E_x, G) = \sqrt{4 + (x+1)^2}$  y  $P(E_x, G) = 2\sqrt{1+x^2}$ . Realizando una serie de cálculos elementales se prueba que  $d_m(E_x, G)/P(E_x, G)$  alcanza su máximo valor  $\sqrt{3 + \sqrt{3}}$  en  $x = \sqrt{5} - 2$  ( $A$  divide el lado  $\overline{(-1,1), (1,1)}$  en la razón aurea).

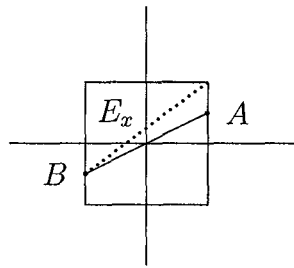


FIGURA 2.8

(3) Si  $G$  es una elipse con ejes de longitud  $a$  y  $b$ , entonces  $C_s(G, 1) = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})$ .

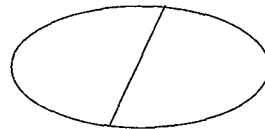


FIGURA 2.9

(4) Si  $T$  es un triángulo, entonces  $C_s(T, 1) = \frac{1}{\text{sen}\beta}$ , donde  $\beta$  es el menor de los ángulos de  $T$ . Además,

$$\inf_{T \in \mathbb{T}} C_s(T, 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

da la mejor cota inferior global de  $C_s(T, 1)$  y se alcanza para el triángulo equilátero (Fig 2.10).

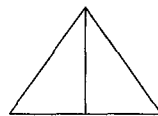


FIGURA 2.10

La demostración de este resultado la proporciona la siguiente proposición:

**Proposición 2.10.** *Sea  $T$  un triángulo cualquiera. Entonces:*

$$\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)} \leq \frac{1}{\sin \beta},$$

donde  $\beta$  es el menor de los ángulos del triángulo.

**Demostración.** Sea  $T$  un triángulo cualquiera. Se busca una subdivisión de  $T$  en dos subconjuntos de manera que se obtenga un maximizador. Aplicando el Corolario 2.6 y el Teorema 2.7, se tiene que la frontera de los maximizadores es un segmento de recta y que  $D(E) = D(T \setminus E)$ . Considérese la subdivisión de  $T$  mediante una recta; evidentemente uno de los dos subconjuntos,  $E$  o  $G \setminus E$  es un triángulo; se puede considerar sin pérdida de generalidad que este triángulo es  $E$ . Uno de los ángulos de  $E$  lo es también de  $T$ , sea  $\theta$  dicho ángulo, y el diámetro de  $E$  es el lado más largo de  $E$ . Sea  $\gamma$  el ángulo opuesto a  $d_m(E, T)$  (Fig 2.11).

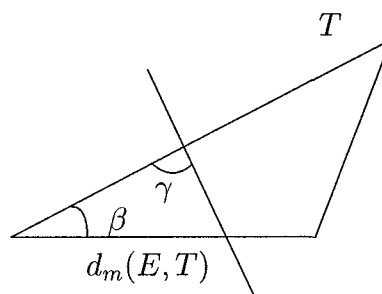


FIGURA 2.11

Aplicando el Teorema del seno se obtiene que:

$$\frac{d_m(E, T)}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{P(E, T)}{\operatorname{sen} \theta} \Leftrightarrow \frac{d_m(E, T)}{P(E, T)} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \theta}.$$

Por tanto el mayor valor de la razón  $\frac{d_m(E, T)}{P(E, T)}$  se alcanza cuando el ángulo de  $\operatorname{sen} \gamma$  sea el máximo posible para el ángulo  $\theta$  fijo. Como el valor máximo posible de  $\operatorname{sen} \gamma$  es 1 (este caso se da cuando el ángulo  $\gamma$  sea de  $\pi/2$ ), se tiene que:

$$\frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \theta} \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}.$$

Hay tres elecciones posibles para  $\theta$ : el mayor valor se alcanza cuando  $\theta$  es el menor ángulo de  $T$ , que se representa por  $\beta$ . Por tanto:

$$\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \theta} \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \beta}.$$

### 2.2.2. Ejemplos concretos de conjuntos extremales

(1) Sea  $G$  un disco de  $\mathbb{R}^2$ :

A la hora de buscar conjuntos extremales, aplicando el teorema 2.5, bastará limitarse a aquellos conjuntos cuya frontera relativa sea un segmento de recta. Se prueba entonces que en este caso los conjuntos extremales son los segmentos circulares: Si se fija el perímetro relativo y se busca maximizar el diámetro relativo mínimo, éste será máximo cuando coincida con el perímetro relativo, hecho que ocurre en cualquier segmento circular.

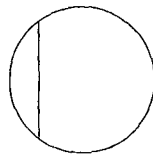


FIGURA 2.12

Además, aquí se cumple que todos los conjuntos extremales son maximizadores, ya que  $C_s(G, 1) = 1$  para cualquier conjunto extremal.

(2) Sea  $G$  un cuadrado de lado unidad en  $\mathbb{R}^2$ :

Por el teorema 2.5, es suficiente considerar los conjuntos cuya frontera relativa sea un segmento de recta. En este ejemplo se diferencian tres casos dependiendo de la longitud del diámetro relativo mínimo:

i)  $0 \leq d_m(E, G) \leq 1$ . En este caso los conjuntos extremales son de la forma:



FIGURA 2.13

Los extremos de la frontera relativa se apoyan en lados contiguos del cuadrado, como muestra la figura 2.13.

ii)  $1 \leq d_m(E, G) \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ . En este caso los conjuntos extremales son de la forma:

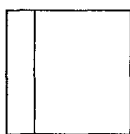


FIGURA 2.14

La frontera relativa debe apoyarse en lados opuestos del cuadrado. Si se fija el valor de  $d_m(E, G)$ , el mínimo valor del perímetro relativo se obtendrá cuando  $\partial E \cap G$  sea perpendicular a la base del cuadrado.

iii)  $\frac{\sqrt{5}}{2} \leq d_m(E, G) \leq \sqrt{2}$ .

En este caso, fijando el diámetro relativo mínimo, se prueba que el menor valor para el perímetro relativo se obtiene cuando  $D(E) = D(G \setminus E)$ , tal como muestra la figura 2.15:

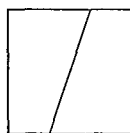


FIGURA 2.15



### 2.3. Estimadores Globales: Caracterización de los Conjuntos Planos de Anchura Constante

Se representa por  $\mathcal{C}$  la familia de los conjuntos convexos, abiertos y acotados de  $\mathbb{R}^2$ .

Para cada  $G$  de  $\mathcal{C}$ ,  $C_s(G, 1)$  es finito (Corolario 2.8). Sin embargo, eligiendo  $G$  de modo conveniente en  $\mathcal{C}$ ,  $C_s(G, 1)$  puede tomar valores arbitrariamente grandes, como muestra el siguiente ejemplo:

#### Ejemplo 2.11.

Sea el rectángulo abierto  $R(1, 2n) = ]0, 1[x]0, 2n[$ .

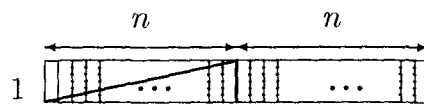


FIGURA 2.16

$$C_s(R(1, 2n), 1) = \sup_{E \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{d_m(E, R(1, 2n))}{P(E, R(1, 2n))} \right\} \geq \frac{\sqrt{1+n^2}}{1},$$

y esta cantidad tiende a infinito cuando  $n$  tiende a infinito.

Sin embargo  $C_s(G, 1) \geq 1$ ; se dice que 1 es una cota inferior global de la constante geométrica y de hecho es la mayor cota inferior:

$$\inf_{G \in \mathcal{C}} C_s(G, 1) = 1$$

Para probar que  $C_s(G, 1) \geq 1$  basta subdividir  $G$  por un segmento de recta cuyos extremos  $A$  y  $B$  se apoyen en  $\partial G$ .

Obviamente:

$$P(E, G) = \overline{AB} \text{ y } d_m(E, G) \geq \overline{AB}$$

Por tanto:

$$\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)} \geq \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1.$$

Se sabe (ejemplo (1) en la sección 2.2.1) que si  $G$  es un disco, se verifica que  $C_s(G, 1) = 1$ . Una cuestión interesante es estudiar si el disco es el único conjunto convexo que cumple que  $C_s(G, 1) = 1$ . En el teorema que viene a continuación se prueba que existe una clase de cuerpos convexos que cumplen esta propiedad. Pero antes de esto es necesario introducir la siguiente notación:

Una cuerda  $AB$  de un conjunto convexo  $G$  se llama *normal en  $A$*  si existe un hiperplano soporte de  $G$  que pasa por  $A$  el cual es ortogonal a  $AB$ .

Un conjunto  $G$  se dice que es de anchura constante si  $\omega(G, u_i) = \omega(G, u_j)$ ,  $\forall u_i, u_j$  direcciones de  $\mathbb{S}^1$ . Ejemplos de conjuntos de anchura constante son las circunferencias, los polígonos de Reuleaux, ...

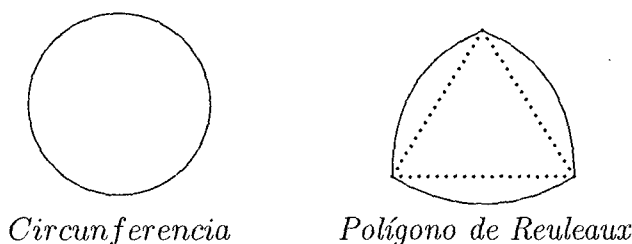


FIGURA 2.17

A continuación se enuncia una conocida caracterización de conjuntos convexos de anchura constante que se utilizará para caracterizar los conjuntos  $G$  tales que  $C_s(G, 1) = 1$  ([21]):

**Proposición 2.12.** *Sea  $G$  un conjunto convexo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i)  $G$  es de anchura constante.
- (ii) Cualquier cuerda  $AB$  de  $G$  es normal en  $A$  y normal en  $B$ .
- (iii) Para cualquier par  $H_1, H_2$  de planos paralelos soporte de  $G$  existen puntos  $A \in H_1$  y  $B \in H_2$  tales que  $AB$  es ortogonal a  $H_1$  y  $H_2$ .

Ya se puede pues demostrar la caracterización de los conjuntos convexos planos de anchura constante:

**Teorema 2.13.** ([14]) *Sea  $G \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto convexo. Entonces  $C_s(G, 1) = 1$  si y sólo si  $G$  es de anchura constante.*

**Demostración.**  $\rightarrow$  Sea  $G$  un conjunto de anchura constante. Aplicando reducción al absurdo:

Si se supone que  $C_s(G, 1) > 1$ , entonces aplicando el Corolario 2.8, existe un subconjunto  $E \subset G$  tal que  $d_m(E, G)/P(E, G) = C_s(G, 1) > 1$ . Por el Teorema 2.5, se puede suponer que  $E$  es la intersección de  $G$  con el semiplano generado por una cuerda  $\overline{AB}$ . Sean  $P, Q \in E$  tales que  $|P - Q| = D(E)$  y  $P', Q' \in G \setminus E$  con  $|P' - Q'| = D(G \setminus E)$ . Como  $d_m(E, G) > P(E, G)$ , se puede suponer que  $P$  y  $P'$  no pertenecen al segmento  $\overline{AB}$ . De la optimalidad de  $E$  se sigue que  $\overline{PQ}$  y  $\overline{P'Q'}$  son normales en  $P$  y  $P'$  respectivamente. De acuerdo con la Proposición 2.11, las cuerdas  $\overline{PQ}$  y  $\overline{P'Q'}$  de  $E$  son también normales en  $Q$  y  $Q'$ . En particular, ambos diámetros son iguales a la anchura constante,  $D(E) = \omega$ . Se tiene pues que  $|A - B| < \omega$  y entonces, aplicando la Proposición 2.11,  $\overline{AB}$  no puede ser normal en cualquier punto que no sea uno de los extremos  $A$  ó  $B$ . Por tanto, estos puntos no pueden moverse a lo largo de  $\partial G$  sin variar  $d_m(E, G)$ .

Se supone entonces que  $Q = A$  y  $Q' = B$ . Entonces:

$$G \setminus E \subset T := \{Z : |Z - P| \leq \omega, |Z - A| \leq \omega\} \cap H^+,$$

donde  $H^+$  es el semiplano definido por  $\overline{PA}$  que contiene a  $B$ . Se observa que  $T$  tiene diámetro  $\omega$  y éste se alcanza para tres pares de puntos  $(P, A)$ ,  $(P, S)$  y  $(A, S)$ , donde  $S$  es la intersección de los dos arcos circulares que definen  $T$ . Como  $A \neq B$ , se tiene que  $Q' = B = P$  ó  $B = S$ . En ambos casos, se obtiene que:

$$P(E, G) = |A - B| = \omega,$$

lo cual es una contradicción.

$\leftarrow$  Ahora sea  $C_s(G, 1) = 1$ , y hay que probar que  $G$  es de anchura constante. Sean  $h_1, h_2$  dos rectas soporte paralelas de  $G$  con vector normal  $\vec{u}$ . Cualquier cuerda en la dirección  $\vec{u}$  divide a  $G$  en dos partes  $E_1$  y  $E_2$ . Entonces, aplicando el Teorema del Valor Medio, existe una cuerda  $\overline{AB}$  en la dirección  $\vec{u}$  tal que  $D(E_1) = D(E_2)$ .

Por hipótesis, sea  $\overline{AB}$  tanto el diámetro de  $E_1$  como el de  $E_2$ . Se sigue entonces que  $C = E_1 \cup E_2$  está contenido en la banda generada por las rectas  $h_A$  y  $h_B$  paralelas a  $h_1$  y  $h_2$  que pasan por  $A$  y  $B$  respectivamente. Por tanto,  $AB$  es la cuerda requerida en la Proposición 2.11 (iii). Finalmente, como  $h_1$  y  $h_2$  fueron elegidas arbitrariamente, aplicando la Proposición 2.11 se obtiene que  $G$  es de anchura constante.

□

## 2.4. Observaciones

Quedan todavía algunas cuestiones abiertas en el estudio de las desigualdades geométricas relativas que se tratan en este capítulo. En esta sección se darán respuestas a dichas cuestiones:

1) Con respecto al cálculo de cotas inferiores de la desigualdad geométrica relativa que se está estudiando, hay que señalar en primer lugar que esta razón es obviamente no negativa, además es posible encontrar subdivisiones del conjunto  $G$  tal que la cota es tan pequeña como se quiera. Para demostrar esto bastará con considerar  $G$  acotado y la longitud de la frontera relativa tan grande como se quiera. Entonces:

$$0 < \frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \leq \frac{D(G)}{P(E, G)^\alpha} \rightarrow 0 \text{ cuando } P(E, G) \text{ tiende a infinito.}$$

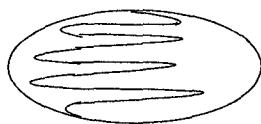


FIGURA 2.18

Por tanto,  $C_i(G, \alpha) = 0 \forall G$ , y  $\sup_{G \in \mathcal{C}} \{C_i(G, \alpha)\} = 0$ .

A la hora de encontrar  $C_i(G, \alpha)$  y los minimizadores de la razón dada cuando se realiza la subdivisión con segmentos de recta, la siguiente proposición proporciona una cota global del cociente así como una descripción de los conjuntos para los cuales se alcanza la igualdad:

**Proposición 2.14.** *Sea  $G$  un conjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^2$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  con interior no vacío y frontera rectificable tal que tanto  $E$  como su complementario  $G \setminus E$  son conexos, y  $\partial E \cap G$  es un segmento de recta. Entonces:*

$$\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \geq 1,$$

dándose la igualdad para los subconjuntos  $E$  de  $G$  que satisfacen  $d_m(E, G) = P(E, G)$ , como por ejemplo la circunferencia, el cuadrado, ...

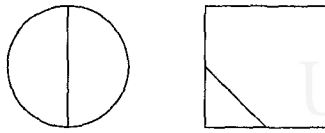


FIGURA 2.19

**Demostración.** Como la frontera relativa de  $E$  es un segmento de recta, entonces:  $d_m(E, G) \geq P(E, G)$ . Por tanto se tiene que  $d_m(E, G)^\alpha \geq P(E, G)^\alpha$ .

Además,  $0 < \alpha \leq 1$ , entonces  $d_m(E, G) \geq d_m(E, G)^\alpha$ . Por tanto:

$$\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \geq \frac{d_m(E, G)^\alpha}{P(E, G)^\alpha} \geq \frac{P(E, G)^\alpha}{P(E, G)^\alpha} = 1.$$

□

Además, realizando la subdivisión por el propio diámetro de  $G$  se comprueba que  $C_i(G, 1) = 1 \forall G$ , por tanto 1 es una cota global.

2) Si se considera la razón entre el diámetro relativo máximo y el perímetro relativo:  $\frac{d_M(E, G)}{P(E, G)}$ , se observa que al igual que ocurría en el caso anterior (diámetro relativo mínimo) cuando se realiza el corte por curvas generales, la razón se puede hacer tan pequeña como se quiera (basta con hacer tender la longitud de la frontera relativa a infinito):

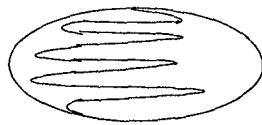


FIGURA 2.20

Por tanto, si se denota por  $C'_i(G, \alpha) = \inf\{\frac{d_M(E, G)}{P(E, G)^\alpha}\}$ , se tiene que  $C'_i(G, \alpha) = 0 \forall G$ .

En el caso particular en que la subdivisión se realice por cortes con segmentos de recta, se tiene que:

$$\frac{d_M(E, G)}{P(E, G)} \geq 1,$$

ya que  $d_M(E, G) \geq P(E, G)$ .

Por tanto, si se realiza la subdivisión por el propio diámetro de  $G$ ,  $C'_i(G, 1) = 1$ .

A la hora de buscar el supremo de esta razón, el siguiente ejemplo muestra que sea cual sea  $G \in \mathbb{R}^2$  abierto, acotado y convexo, es posible encontrar una subdivisión de  $G$  tal que:

$$\frac{d_M(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \rightarrow \infty.$$

Sea  $G$  un conjunto acotado y convexo de  $\mathbb{R}^2$ . Si se considera  $E_n(r)$  una sucesión de subconjuntos de  $G$  obtenidos al dividir  $G$  por arcos de circunferencia de radio  $r$  apoyados en la frontera de  $G$  (fig 2.21), se tiene que  $d_M(E_n(r), G)$  tenderá al diámetro de  $G$  cuando  $r$  tienda a 0, mientras que el perímetro relativo tenderá a 0. Por tanto:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d_M(E_n(r), G)}{P(E_n(r), G)^\alpha} = \infty.$$

Por tanto:

$$C'_s(G, \alpha) = \sup \left\{ \frac{d_M(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \right\} = \infty.$$

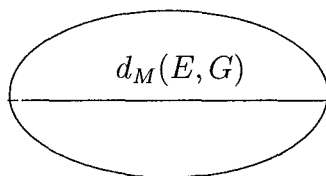


FIGURA 2.21

Se obtendrá el mismo resultado al hacer la subdivisión por segmentos de recta de longitud cada vez más pequeña.

DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS RELATIVAS COMPARANDO EL PERÍMETRO  
38 RELATIVO CON EL DIÁMETRO RELATIVO

---

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 3

---

# Desigualdades Geométricas Relativas Comparando el Perímetro Relativo con el Inradio Relativo

---

### 3.1. Inradio Relativo Mínimo

Continuando con el estudio de las desigualdades geométricas relativas, en este capítulo se tratarán principalmente desigualdades en las que se comparan el perímetro relativo con el mínimo de los inradios relativos. En la última sección se estudiará que sucede con el inradio relativo máximo.

Si se considera  $G$  un conjunto abierto, acotado, convexo y plano y  $\psi$  la familia de subconjuntos  $E \subset G$  con interior no vacío y frontera rectificable tal que tanto  $E$  como  $G \setminus E$  son conexos, y  $\partial E \cap G$  es un arco de curva continua, entonces una desigualdad geométrica relativa comparando el perímetro relativo con el inradio relativo mínimo se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\rho_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \leq C,$$

donde  $C$  es una constante no negativa y  $\alpha \in (0, \alpha_0]$

En este caso también se cumple  $\alpha_0 = 1$ , ya que este es el valor para el cual el cociente  $\frac{\rho(E)}{P(E)}$  permanece invariante bajo dilataciones.

Las constantes geométricas relativas para cualquier  $\alpha \in (0, 1]$  se expresan como:

$$C_i(G, \alpha) = \inf \left\{ \frac{\rho_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} : E \in \psi \right\}.$$

$$C_s(G, \alpha) = \sup \left\{ \frac{\rho_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} : E \in \psi \right\}.$$

Si se comienza el estudio de esta desigualdad geométrica relativa buscando el valor de  $C_i(G, \alpha)$ , se observa que es posible encontrar subdivisiones de  $G$  –sea cual sea  $G \in \mathcal{C}$ – para las cuales la razón dada es tan pequeña como se quiera: para cualquier valor del inradio relativo, se puede considerar el perímetro relativo tan grande como se pretenda, es decir,  $C_i(G, \alpha) = 0 \forall G \in \mathcal{C}$ .



FIGURA 3.1

Cabe añadir que incluso si se considera el caso particular en que la subdivisión de  $G$  se realiza con segmentos de recta, existen ejemplos que demuestran que el valor de  $C_i(G, \alpha)$  sigue siendo 0. Para probarlo se distinguen dos casos:

1)  $G$  posee un segmento de recta en su frontera:

Sea  $G$  el rectángulo con lados de longitudes  $a$  y  $b$ ,  $a < b$ . Se considera la subdivisión de  $G$  mediante una recta  $r$  paralela a la base  $b$ . Si sucesivamente se va trasladando de modo paralelo la recta  $r$  hacia el semiplano que contiene al subconjunto de menor inradio, se tiene que el inradio relativo mínimo tiende hacia 0 mientras que el perímetro relativo vale siempre  $b$ . Por tanto la razón dada tenderá a 0.

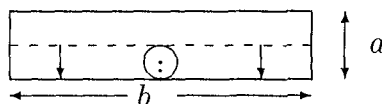


FIGURA 3.2

2)  $G$  es estrictamente convexo:

Sea  $G$  una bola de radio  $r$ . Si se considera la subdivisión de  $G$  por un segmento de recta, se obtiene un segmento circular. Sean  $A$  y  $B$  los extremos de la frontera relativa y  $C$  y  $D$  los extremos del segmento de recta ortogonal a  $\overline{AB}$  que pasa por su punto medio. Sea  $\beta$  el ángulo  $\angle CAD$  (fig 3.3).

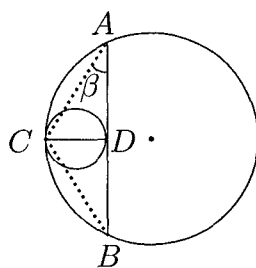


FIGURA 3.3

Entonces, mediante una serie de cálculos se obtiene que:

$$\frac{\rho_m(E, G)}{P(E, G)} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{4}.$$

Si se considera ahora una sucesión de rectas paralelas a  $\overline{AB}$  hacia  $E$ , el ángulo  $\beta$  tenderá hacia 0, por tanto el cociente  $\frac{\rho_m(E, G)}{P(E, G)} \rightarrow 0$ .

A partir de este momento el estudio se va a centrar en acotar superiormente la desigualdad dada, así como es determinar cómo son los conjuntos extremales y maximizadores, intentando establecer propiedades y características de tales conjuntos.

En primer lugar se puede establecer una cota superior para la constante geométrica relativa en el caso particular en que  $\alpha = 1$ :

**Proposición 3.1.** *Sea  $G$  un conjunto abierto, acotado, convexo y plano y sea  $\alpha = 1$ . Entonces:*

$$C_s(G, 1) \leq \frac{1}{2},$$

dándose la igualdad para muchos conjuntos, por ejemplo un rectángulo tal que las longitudes de los lados miden  $a$  y  $b$ ,  $b \geq 2a$ :



FIGURA 3.4

**Demostración.** Sea  $G$  un conjunto abierto, acotado, convexo de  $\mathbb{R}^2$  y  $E \in \psi$  un subconjunto de  $G$ . Sin pérdida de generalidad sea  $\rho(E) = \rho_m(E, G)$ . Además, sean  $B_{\rho(E)}$  y  $B_{\rho(G \setminus E)}$  las inbolas de los subconjuntos  $E$  y  $G \setminus E$ . Si se considera la envoltura convexa de ambas inbolas,  $G' = \text{conv}(B_{\rho(E)}, B_{\rho(G \setminus E)})$ , este nuevo conjunto está completamente contenido en  $G$ . ( $\partial G'$  está formada por una parte de la frontera de ambas inbolas y dos segmentos de recta tangentes a las dos inbolas). Sean  $P$  y  $Q$  los puntos de corte de la frontera relativa con  $\partial G'$  y sea  $r$  el segmento de recta que une estos dos puntos. Es fácil ver entonces que  $P(E, G) \geq \text{long}(r)$ . (Fig 3.5).

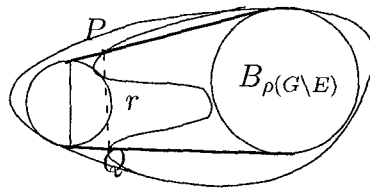


FIGURA 3.5

Ahora bien, como una inbola es menor que la otra, la longitud de  $r$  debe ser mayor que el diámetro de la menor de las inbolas:  $\text{long}(r) \geq 2\rho(E) = 2\rho_m(E, G)$ . Por tanto:  $P(E, G) \geq 2\rho_m(E, G)$  y en conclusión:

$$\frac{\rho_m(E, G)}{P(E, G)} \leq \frac{\rho(E)}{2\rho(E)} = \frac{1}{2}.$$

□

Para determinar el ínfimo de la constante geométrica relativa  $C_s(G, 1)$  es necesario obtener una descripción de la frontera relativa de conjuntos extremales y maximizadores. Pero para ello se debe garantizar en primer lugar su existencia.

El siguiente lema proporciona un importante resultado, ya que garantiza la existencia de conjuntos extremales para cualquier  $G \in \mathcal{C}$ :

**Lema 3.2.** ([14]) Sea  $G \subset \mathbb{R}^2$  convexo y  $\rho_0 = \sup\{\rho_m(E, G) : E \in \psi\}$ . Entonces, para cada  $\rho \in (0, \rho_0)$  existe un conjunto extremal  $E \in \psi$  con  $\rho_m(E, G) = \rho$ .

**Demostración.** Sea  $0 < \rho < \rho_0$  y  $p_0 := \inf\{P(E, G) : E \in \psi, \rho_m(E, G) = \rho\}$ . Existe una sucesión  $E_n \in \psi$  con  $P(E_n, G) \rightarrow p_0$ . La sucesión  $\{\overline{E_n}\}$  de conjuntos compactos tiene una subsucesión convergente con límite  $E_0 \subset G$ .  $\rho$  es continuo y  $P(\cdot, G)$  es semicontinua inferiormente. Por tanto  $\rho_m(E_0, G) = \rho$  y  $P(E_0, G) \leq p_0$  y entonces  $E_0$  es un conjunto extremal.

□

Una vez garantizada la existencia de conjuntos extremales para cualquier valor del inradio relativo mínimo, se van a establecer propiedades sobre dichos conjuntos. El siguiente teorema proporciona una descripción de la frontera relativa de los conjuntos extremales:

**Teorema 3.3.** ([14]) Sea  $G \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto convexo y sea  $E \in \psi$  un conjunto extremal con respecto a  $C(G, \alpha)$  y con inradio  $\rho \in (0, \rho_0)$ . Entonces  $E$  y  $G \setminus E$  contienen bolas  $B_1, B_2$  con radio  $\rho$  interiores y tangentes a  $\partial G$ .

La frontera relativa de  $E$  consiste de como máximo 5 partes:

- 2 segmentos tangentes a  $B_1, B_2$  y ortogonales a  $\partial G$ ;
- dos arcos circulares de  $\partial B_1$  y  $\partial B_2$ ;
- un segmento tangente a  $B_1$  y  $B_2$  que une los dos arcos circulares.

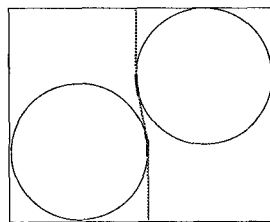


FIGURA 3.6

**Demostración.** Sea  $E$  un conjunto extremal con inradio relativo mínimo  $\rho$ . Existen entonces dos bolas  $B_1 \subset E$  y  $B_2 \subset G \setminus E$  con radio  $\rho$ . La frontera relativa de  $E$  con respecto a  $G$  es una geodésica en  $G \setminus (B_1 \cup B_2)$ . Por tanto, dicha frontera consiste en segmentos de recta y arcos de  $\partial B_1$  o  $\partial B_2$ . Debido a que cualquier parte es un segmento de geodésica, existe como máximo un arco conexo en cada una de las fronteras de  $B_1, B_2$ . De la minimalidad de  $P(E, G)$  se sigue que los segmentos de recta que unen  $\partial G$  y  $\partial B_1$  (o  $\partial B_2$ ) son ortogonales a  $\partial G$  en uno de sus extremos y tangente a  $B_1$  (o  $B_2$ ) en el otro extremo:

La inbola de los conjuntos extremales debe ser tangente a  $\partial G$  en al menos un punto, ya que si no fuese así se podría trasladar la frontera de  $G$  hasta que tocara la inbola manteniendo el mismo inradio relativo y minimizando el perímetro relativo, por tanto el conjunto no sería extremal. Si la inbola es tangente a  $\partial G$  en más de un punto, se denomina  $x$  al primer punto de tangencia e  $y$  al último. Es fácil probar que la frontera del conjunto extremal incluye el punto medio  $x_0$  en el arco de la frontera de la inbola determinado por  $x$  e  $y$ . Considérese para cada una de las bolas  $B_1$  y  $B_2$  la familia de todas las involutas partiendo de  $x_0$ : cada involuta de la inbola partiendo de  $x_0$  se determina desenrollando una cuerda de longitud  $s \in [0, +\infty[$  de la inbola. Uno de los extremos de la cuerda es el punto  $x_0$  y el lugar geométrico de la posición del otro extremo es la involuta. Parte de la cuerda  $s$  es un arco de la frontera de la inbola y la otra parte es un segmento de recta tangente a la inbola y ortogonal a la involuta. Cada una de estas involutas es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano cuya distancia intrínseca a  $x_0$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus B_1$  ( $\mathbb{R}^2 \setminus B_2$ ) es constante. La familia de todas las involutas partiendo de  $x_0$  es una familia que depende de forma continua del parámetro  $s$  y está contenida continuamente en  $\mathbb{R}^2 \setminus B_1$  ( $\mathbb{R}^2 \setminus B_2$ ). Como  $\partial G$  es diferenciable a trozos y existen involutas que intersectan a la frontera de  $G$  y otras que no, es posible garantizar que existen precisamente dos involutas tangentes a  $\partial G$ . Por tanto, existe un segmento de recta tangente a la frontera de la inbola y ortogonal tanto a la frontera de  $G$  como a la involuta. Además, cualquier otra curva que se encuentre con la frontera de  $G$  tiene que traspasar la involuta y por tanto se cortará con  $\partial G$  en un punto cuya distancia intrínseca a  $x_0$  sea mayor que  $s$ .

Análogamente, el posible segmento de recta que une  $\partial B_1$  y  $\partial B_2$  es tangente a los arcos circulares.

□

**Observaciones 1.** (1) Como muestra la figura 3.6, la frontera de un conjunto extremal puede tener cinco arcos. En el caso en que  $\rho(E) \neq \rho(G \setminus E)$ , dicha frontera está formada únicamente por tres: el arco circular de una sola inbola y dos segmentos (Fig. 3.7).

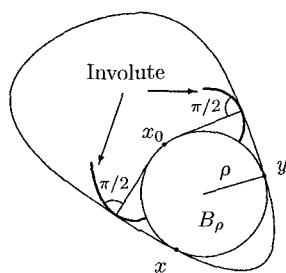


FIGURA 3.7

(2) Sea  $E \subset G$  y  $\varphi$  el ángulo entre las dos rectas soporte de  $E$  que pasan por los extremos de la frontera relativa. Entonces  $P(E, G) \geq \rho_m(E, G) \cdot (2 + \varphi)$ .

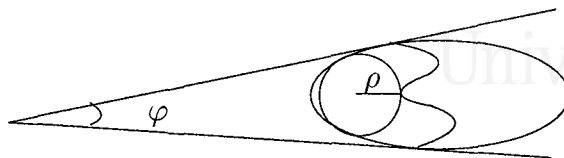


FIGURA 3.8

La demostración de la existencia de maximizadores para cada valor de  $\alpha \in (0, 1]$  la proporciona el siguiente teorema:

**Teorema 3.4.** ([14]) Sea  $G \subset \mathbb{R}^2$  convexo. Entonces, para cada  $\alpha \in (0, 1]$  existe un conjunto extremal  $E_\alpha \subset G$  que también es maximizador.

**Demostración.** Sea  $\{E_n\}$  la sucesión de conjuntos extremales con  $E_n \in \psi$  y  $\rho_m(E_n, G)/P(E_n, G)^\alpha \rightarrow C_s(G, \alpha)$ . Dado que la sucesión  $\{\overline{E_n}\}$  es de conjuntos compactos, tiene una subsucesión convergente con límite  $E_0 \subset G$ .

Si  $\rho(E_0) > 0$  entonces  $E_0$  es un maximizador, ya que  $\rho$  es continua y  $P(\cdot, G)$  es semi-continua inferiormente.

Se prueba que se puede excluir el caso en que  $\rho(E_0) = 0$ . En este caso,  $E_0$  es un punto  $x_0 \in \partial G$ . Si  $\alpha < 1$  entonces  $\rho_m(E_n, G)/P(E_n, G)^\alpha \leq P(E_n, G)^{1-\alpha}/2 \rightarrow 0$ , para  $n \rightarrow \infty$ , lo cual es una contradicción.

Por tanto, bastará considerar  $\alpha = 1$ . Sea  $\varphi = 2\pi \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(G \cap B_\epsilon(x_0))/A(B_\epsilon(x_0))$  el ángulo interior de  $G$  en  $x_0$ . De la observación anterior se sigue que  $P(E_n, G) \geq \rho_m(E_n, G)(2 + \varphi)$  para infinitos  $n$ , consecuentemente,  $C_s(G, 1) \leq 1/(\varphi + 2)$ .

Por otro lado, se puede elegir una bola  $B \subset G$  con radio (suficientemente pequeño)  $\rho$  la cual toca a ambos arcos de  $\partial G$  en los puntos  $y_0$  y  $z_0$ . Sean  $h_y, h_z$  las rectas soporte de  $G$  a través de  $y_0$  y  $z_0$ ,  $C$  el cono que forman  $h_y$  y  $h_z$ , y  $\phi$  el ángulo de  $C$  en su vértice. Además, sea  $E$  el subconjunto de  $G$  que contiene a  $B$  cuya frontera relativa está formada por un arco de  $\partial B$  y dos segmentos ortogonales a  $\partial C$  y tangentes a  $\partial B$ . Entonces  $P(E, G) \leq \rho \cdot (2 + \phi)$ . Dado que  $\phi \leq \varphi$ , se concluye que  $\rho_m(E, G)/P(E, G) \geq 1/(\phi + 2) \geq C_s(G, 1)$ . Por tanto,  $E$  es un maximizador.

□



### Ejemplos de maximizadores:

Una vez que ya se conoce la forma de la frontera relativa de los maximizadores, es posible determinar para ciertos conjuntos  $G \in \mathcal{C}$  el maximizador y el valor de  $C_s(G, 1)$ :

(1) Sea  $B(r)$  la bola de radio  $r$ . En este caso  $C_s(B(r), 1) = \frac{1}{4}$  y el maximizador es de la forma:

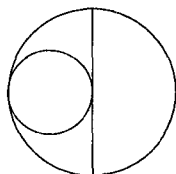


FIGURA 3.9

Sea  $B(r)$  la bola de radio  $r$ . Por el Teorema 3.3 la frontera relativa de los conjuntos extremales está formada por como máximo 5 partes: dos segmentos tangentes a las inbolas de  $E$  y  $B(r) \setminus E$  y ortogonales a  $\partial B(r)$ , dos arcos de la frontera de las inbolas y un segmento de recta tangente a ambas inbolas que une los dos arcos. Si se calcula el valor del perímetro relativo dependiendo de  $\rho$  se obtiene que:

$$P(E, B(r)) = 2\left[1 - \sqrt{1 - 2\rho} + \rho \arctan \frac{\sqrt{1 - 2\rho}}{\rho}\right].$$

Entonces:

$$\frac{\rho_m(E, B(r))}{P(E, B(r))} = \frac{\rho}{2\left[1 - \sqrt{1 - 2\rho} + \rho \arctan \frac{\sqrt{1 - 2\rho}}{\rho}\right]}.$$

Derivando esta función con respecto a  $\rho$  e igualando a 0 se obtiene que el máximo se alcanza para  $\rho = 1/2$  y el valor de la función es  $1/4$ . Por tanto los maximizadores son los semicírculos.

(2) Sea  $Q$  el cuadrado de lado unidad. En este caso  $C_s(Q, 1) = 0,2928\dots$  y el maximizador es de la forma:

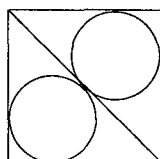


FIGURA 3.10

(3) Sea  $T$  un triángulo cualquiera de  $\mathcal{T}$ , siendo  $\mathcal{T}$  la familia de todos los triángulos. En este caso se cumple que, para todo conjunto extremal  $E_0 \in T$ :

$$\frac{\rho_m(E_0, T)}{P(E_0, T)} = \frac{\rho}{2\rho + \beta\rho} = \frac{1}{2 + \beta},$$

donde  $\beta$  es el menor de los ángulos del triángulo.

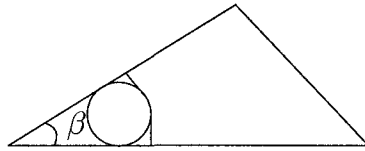


FIGURA 3.11

Por tanto, como la razón no depende del inradio relativo mínimo  $\rho$ , todos los conjuntos extremales son maximizadores.

Además se cumple que:

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} C_s(T, 1) = \frac{1}{2 + \pi/3},$$

alcanzándose el supremo para el triángulo equilátero.

(4) Sea  $G$  el hexágono de lado  $l$ . En este caso  $C_s(G, 1) = 0,252\dots$  y el maximizador es de la forma:

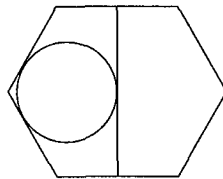


FIGURA 3.12

Ahora ya se puede establecer una cota inferior para  $C_s(G, 1)$ :

**Proposición 3.5.** Sea  $G$  un conjunto abierto, acotado, convexo y plano y sea  $\alpha = 1$ . Entonces:

$$\inf_{G \in \mathcal{C}} C_s(G, 1) = \frac{1}{4},$$

dándose la igualdad cuando  $G$  es una circunferencia:

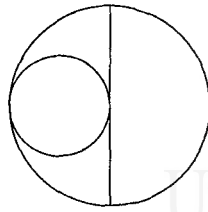


FIGURA 3.13

**Demostración.** Se va a buscar el conjunto  $G \in \mathcal{C}$  para el cual el valor de  $C_s(G, 1)$  sea el mínimo posible.

Sea  $G$  un conjunto cualquiera de  $\mathcal{C}$  y sea  $E$  el maximizador. Se denota por  $A$  y  $B$  a los extremos de la frontera relativa de  $E$  y  $h_A$  y  $h_B$  las rectas tangentes a  $\partial G$  en  $A$  y  $B$ . Sea  $\alpha$  el ángulo que forman las rectas  $h_A$  y  $h_B$ . Si se considera una recta  $r$  tangente a  $\partial G$  que corte a  $h_A$  y a  $h_B$ , se obtiene un triángulo  $T$  que contiene a  $G$  y en el cual  $\alpha$  es el menor de sus ángulos (si no fuese así,  $E$  no sería maximizador).

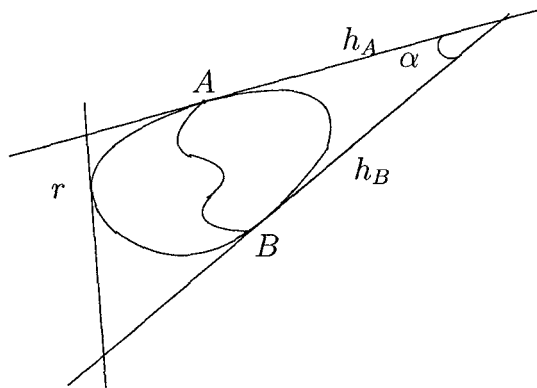


FIGURA 3.14

Por tanto:

$$C_s(G, 1) = C_s(T, 1) = \frac{1}{2 + \alpha} \geq \frac{1}{2 + \frac{\pi}{3}} \geq \frac{1}{4}.$$

### 3.2. Inradio Relativo Máximo

En esta sección se va a tratar la razón entre el diámetro relativo máximo y el perímetro relativo:  $\frac{d_M(E,G)}{P(E,G)}$ . Se observa que al igual que ocurría en el caso anterior (inradio relativo mínimo) cuando se realiza el corte por curvas generales, la razón se puede hacer tan pequeña como se quiera (basta con hacer tender la longitud de la frontera relativa a infinito):



FIGURA 3.15

Por tanto, si se denota por  $C'_i(G, \alpha) = \inf\{\frac{\rho_M(E,G)}{P(E,G)^\alpha}\}$ , se tiene que  $C'_i(G, \alpha) = 0 \forall G$ .

En el caso particular en que la subdivisión se realice por cortes con segmentos de recta, se tiene que:

$$\frac{\rho_M(E, G)}{P(E, G)} \rightarrow 0 \forall G,$$

como muestra el siguiente ejemplo:

Sea  $G$  un conjunto cualquiera de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $r$  una recta que divide a  $G$  en dos subconjuntos,  $E$  y  $G \setminus E$ . Se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $\rho_M(E, G) = \rho(G \setminus E)$ . Si se considera una sucesión de rectas  $r_n$  paralelas a  $r$  en la dirección del semiplano que contiene a  $E$ , se obtiene una sucesión de subconjuntos de  $G$ ,  $E_n$  tal que  $\rho_M(E_n, G) \rightarrow \rho(G)$  y  $P(E_n, G) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_M(E_n, G)}{P(E_n, G)} = \infty.$$

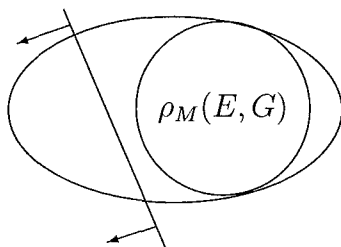


FIGURA 3.16

DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS RELATIVAS COMPARANDO EL PERÍMETRO  
RELATIVO CON EL INRADIO RELATIVO

---

50

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 4

---

# Desigualdades Isodiamétricas Relativas

---

La desigualdad isodiamétrica clásica, cuya demostración se debe a Bieberbach ([8]), dice que, entre todos los cuerpos convexos en el espacio euclídeo  $n$ -dimensional con volumen fijo, la bola es la que tiene menor diámetro:

$$\frac{V}{\omega_n} \leq \left(\frac{D}{2}\right)^n,$$

donde  $\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$  es el volumen de la bola unitaria  $n$ -dimensional y  $\Gamma$  es la función Gamma de Euler.

A lo largo de este capítulo se pretende obtener resultados sobre las desigualdades isodiamétricas relativas, en las que se compara el volumen (área) con el diámetro, pero no de todo el conjunto  $G$  sino de un subconjunto suyo en relación con el conjunto total  $G$  o con su complementario respecto de  $G$ . Más formalmente:

Sea  $G \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, acotado y convexo y  $E \subset G$  un subconjunto de  $G$  tal que tanto  $E$  como su complementario  $G \setminus E$  son conexos y tienen interior no vacío, y sea  $\partial E \cap G$  una hipersuperficie topológica.

Las desigualdades isodiamétricas relativas por tanto son aquellas que proporcionan una cota superior o inferior de las siguientes razones:

$$\frac{V(E, G)}{d_m(E, G)^n} \text{ o } \frac{V(E, G)}{d_M(E, G)^n}.$$



La razón por la cual se compara el volumen relativo con la  $n$ -ésima potencia de los diámetros relativos, siendo  $n$  la dimensión del espacio ambiente, es que este cociente es invariante por dilataciones, y así se obtiene información geométrica de la subdivisión: las estimaciones no dependen del tamaño del conjunto sino de su forma.

El interés, al igual que en capítulos anteriores, no recae únicamente en obtener desigualdades isodiamétricas relativas, sino también en determinar los maximizadores y minimizadores para los cuales se alcanza la igualdad.

En numerosas ocasiones resultará interesante estudiar más a fondo el caso particular en el que la subdivisión del conjunto  $G$  se realiza mediante cortes con hiperplanos, ya que se puede obtener resultados diferentes al caso general.

Este capítulo está estructurado en dos partes, dependiendo si se compara el volumen relativo con el diámetro relativo mínimo o máximo:

## 4.1. Desigualdades isodiamétricas relativas comparando el volumen relativo con el diámetro relativo mínimo

Como ya se ha avanzado anteriormente, el propósito de esta sección es maximizar y minimizar la razón entre el volumen relativo y la potencia  $n$ -ésima del diámetro relativo mínimo de un subconjunto  $E$  de  $G$ , así como encontrar los subconjuntos para los cuales se alcanza la igualdad (maximizadores y minimizadores) cuando sea posible.

### 4.1.1. Minimizar $\frac{V(E,G)}{d_m(E,G)^n}$

En primer lugar se va a tratar de minimizar la razón dada. La primera proposición garantiza 0 es el ínfimo de la razón  $\frac{V(E,G)}{d_m(E,G)^n}$ :

**Proposición 4.1.** ([15]) *Sea  $G$  un conjunto abierto, acotado y convexo y  $E$  un subconjunto de  $G$  tal que  $E$  y  $G \setminus E$  son conexos. Entonces  $\frac{V(E,G)}{d_m(E,G)^n}$  es obviamente no negativa y se pueden encontrar subdivisiones de  $G$  para las cuales dicha razón es tan pequeña como se quiera.*

La demostración de esta proposición está basada en encontrar un subconjunto  $E$  de  $G$  para el cual el cociente entre el volumen relativo y el diámetro relativo mínimo sea 0:

**Demostración.** Sea  $G$  un conjunto acotado y convexo cualquiera y se considera una sucesión de hipersuperficies  $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$  tan próxima como se quiera a la frontera de  $G$ , tal que ambos extremos del diámetro de  $G$  pertenezcan a  $S_i \forall i \in \mathbb{N}$ , y el volumen de las regiones  $E_i$  determinadas por  $S_i$  tienda a cero.

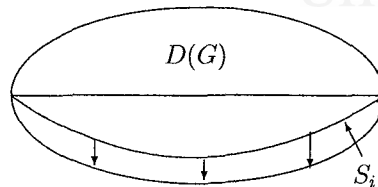


FIGURA 4.1

Entonces, si se calcula el límite del cociente cuando  $i$  tiende a infinito, se concluye que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{V(E_i, G)}{d_m(E_i, G)^n} = \frac{0}{D(G)^n} = 0.$$

□

En esta ocasión, es interesante preguntarse si se obtiene el mismo ínfimo cuando se realiza una restricción al caso particular en el cual la subdivisión de  $G$  se realiza mediante cortes con hiperplanos. La respuesta a esta cuestión es sí, como muestra la siguiente proposición:

**Proposición 4.2.** ([15]) *Sea  $G$  un conjunto abierto, acotado y convexo y  $E$  un subconjunto de  $G$  obtenido mediante cortes con hiperplanos. Entonces  $\frac{V(E, G)}{d_m(E, G)^n}$  es obviamente no negativa y se pueden encontrar subdivisiones de  $G$  mediante hiperplanos para las cuales dicha razón es tan pequeña como se quiera.*

**Demostración.** Se distinguen dos casos:

Caso 1:  $G$  es estrictamente convexo:

Sean  $x$  un punto regular de la frontera de  $G$ ,  $\partial G$ ,  $\nu(x)$  el vector normal exterior de  $\partial G$  en  $x$  y  $T_x \partial G$  el espacio tangente de  $\partial G$  en  $x$ .

Además, sea  $\Pi_0$  un hiperplano paralelo a  $T_x \partial G$  el cual intersecta a  $G$  y sea  $E_0$  el subconjunto obtenido de intersectar  $G$  con el semi-espacio determinado por  $\Pi_0$  y que contiene a  $\nu(x)$ . Se puede elegir  $\Pi_0$  de manera que  $V(E_0) \leq \frac{V(G)}{2}$  y  $d_m(E_0, G) = D(E_0)$ .

Si se aplica la simetrización de Schwarz con respecto a la línea determinada por  $\nu(x)$  al subconjunto  $E_0$ , se obtiene un nuevo conjunto  $E'_0$  de revolución con el mismo volumen que  $E_0$ ; la imagen de la frontera relativa de  $E_0$  en el hiperplano  $\Pi_0$

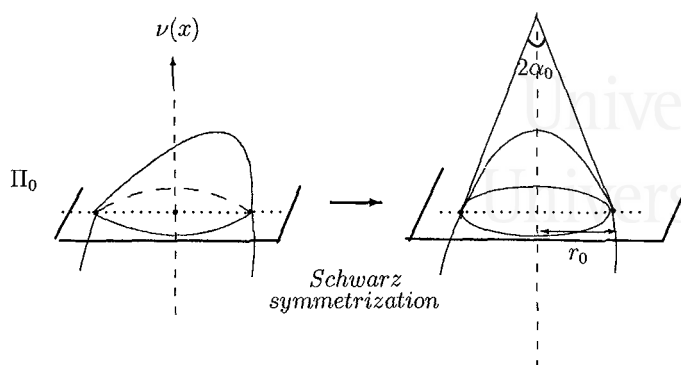


FIGURA 4.2

bajo la simetrización de Schwarz es una bola  $(n - 1)$ -dimensional con radio  $r_0$ . Esta simetrización no incrementa el diámetro, por tanto,  $D(E_0) \geq D(E'_0)$ .

Entonces,

$$\frac{V(E_0, G)}{d_m(E_0, G)^n} = \frac{V(E_0)}{D(E_0)^n} \leq \frac{V(E'_0)}{(2r_0)^n}. \quad (4.1)$$

Es posible entonces elegir una sucesión de hiperplanos  $\{\Pi_i\}_{i=1}^{\infty}$  paralelos a  $\Pi_0$  y tales que la intersección de  $E_0$  con los semi-espacios determinados por  $\Pi_i$  que contienen a  $\nu(x)$  forman una sucesión contractiva de conjuntos convexos  $\{E'_i\}_{i=1}^{\infty}$ , que satisfacen  $\lim_{i \rightarrow \infty} V(E'_i) = 0$ , y tales que los hiperplanos soporte en las  $(n - 2)$ -esferas determinadas por la intersección de  $\Pi_i$  con la frontera de  $E'_0$  proporcionan una sucesión de conos  $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ . Además, los ángulos de los vértices de dichos conos son  $2\alpha_i$ . Se puede escoger esta sucesión de manera que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = \frac{\pi}{2}$ .

Sea  $r_i$  el radio de la  $(n - 1)$ -bola que es base del cono  $C_i$ .

Para cada uno de estos conos  $C_i$  se cumple que:

$$\frac{V(E'_i)}{(2r_i)^n} \leq \frac{V(C_i)}{(2r_i)^n} = \frac{\frac{1}{n}V(B(r_i)^{n-1})r \cot \alpha_i}{(2r_i)^n} = \frac{\pi^{\frac{(n-1)}{2}} \cot \alpha_i}{n2^n \Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)}. \quad (4.2)$$

Tomando el límite cuando  $i \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\pi^{\frac{(n-1)}{2}} \cot \alpha_i}{n2^n \Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} = 0. \quad (4.3)$$

Entonces, aplicando (4.1), (4.2) y (4.3) se obtiene que:

$$0 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{V(E_i, G)}{d_m(E_i, G)^n} \leq 0,$$

y por tanto:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{V(E_i, G)}{d_m(E_i, G)^n} = 0.$$

Caso 2:  $G$  no es estrictamente convexo:

Si  $G$  no es estrictamente convexo, existe un segmento de recta  $t$  en la frontera de  $G$  (figura 4.3).

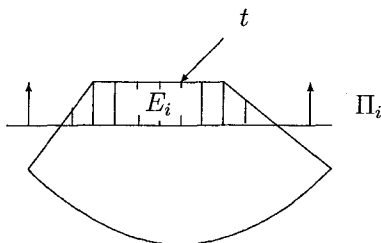


FIGURA 4.3

Si se considera una sucesión de hiperplanos  $\Pi_i$  paralelos a  $t$  tal que el volumen de los subconjuntos  $E_i$  determinados por las intersecciones de  $G$  con  $\Pi_i$  tiende a cero, entonces:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{V(E_i, G)}{d_m(E_i, G)^n} \leq \frac{0}{(\text{longitud}(t))^n} = 0.$$

□

#### 4.1.2. Maximizar $\frac{V(E, G)}{d_m(E, G)^n}$

Continuando con el estudio de las desigualdades isodiamétricas relativas, en esta sección se trata de maximizar y por tanto encontrar el supremo para la razón entre el volumen relativo y la potencia  $n$ -ésima del diámetro relativo mínimo.

La siguiente proposición proporciona el supremo así como los conjuntos para los cuales se alcanza la igualdad (maximizadores) utilizando la desigualdad isodiamétrica clásica:

**Proposición 4.3.** ([15]) Sea  $G$  un conjunto abierto, acotado y convexo y  $E$  un subconjunto de  $G$  tal que  $E$  y  $G \setminus E$  son conexos. Entonces:

$$\frac{V(E, G)}{d_m(E, G)^n} \leq \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})2^n}.$$

**Demostración.** Sea  $B^n(r)$  una bola con radio  $r$  contenida en  $G$  (figura 4.4) tal que:

$$V(B^n(r)) \leq \frac{V(G)}{2} \iff r \leq \left( \frac{V(G)}{2\omega_n} \right)^{1/n}$$

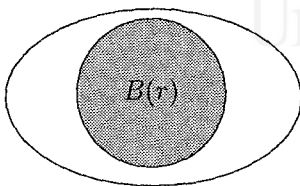


FIGURA 4.4

Aplicando la desigualdad isodiamétrica clásica ([8]), para cualquier subconjunto  $E$  de  $G$  se tiene que:

$$\frac{V(E)}{D(E)^n} \leq \frac{V(B^n(r))}{(2r)^n},$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si  $E = B^n(r)$ . Entonces,

$$\frac{V(E, G)}{d_m(E, G)^n} \leq \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})2^n}.$$

Los maximizadores en este caso son las bolas  $n$ -dimensionales de radio  $r$  contenidas en  $G$  tales que su volumen es menor o igual que la mitad del volumen de  $G$ .

□

## 4.2. Desigualdades isodiamétricas relativas comparando el volumen relativo con el diámetro relativo máximo

En esta nueva sección se va a continuar con el estudio de las desigualdades isodiamétricas relativas, pero en este caso se comparará el volumen relativo con la potencia  $n$ -ésima del diámetro relativo máximo de un subconjunto  $E$  de un conjunto  $G$  acotado y convexo.

De la misma manera que en la sección anterior, se estudiará, además del caso general en el que la subdivisión de  $G$  se realiza con hipersuperficies cualesquiera, el caso particular en que la frontera relativa es un hiperplano.

#### 4.2.1. Minimizar $\frac{V(E,G)}{d_M(E,G)^n}$

La primera proposición de esta sección demuestra que es posible encontrar subconjuntos de  $G$  para los cuales la razón buscada se aproxima a 0:

**Proposición 4.4.** ([15]) *Sea  $G$  un conjunto abierto, acotado y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  tal que  $E$  y  $G \setminus E$  son conexos. Entonces  $\frac{V(E,G)}{d_M(E,G)^n}$  es obviamente no negativa y se pueden encontrar subdivisiones de  $G$  para las cuales dicha razón es tan pequeña como se quiera.*

**Demostración.** Sea  $G$  un conjunto abierto, acotado y convexo en el espacio Euclídeo. Se supone sin pérdida de generalidad que  $0 \in G$ . Sea  $\{E_i\}_{i=2}^{\infty}$  una sucesión que satisface  $E_i = \frac{1}{i}G$ .

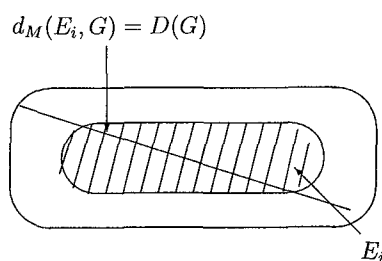


FIGURA 4.5

Si se calcula el cociente entre el volumen relativo y la potencia  $n$ -ésima del diámetro relativo máximo, el límite de este cociente es 0 cuando  $i \rightarrow \infty$ . En efecto, el volumen relativo tiende a 0 y  $d_M(E_i, G) = D(G \setminus E_i)$  es el diámetro de  $G$  para todo  $i$ :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{V(E_i, G)}{d_M(E_i, G)^n} = \frac{0}{D(G)^n} = 0.$$

□

Como ya se ha avanzado anteriormente, es interesante realizar un estudio aparte para el caso en que se realiza la subdivisión de  $G$  mediante hiperplanos, ya que, aunque en este caso el ínfimo es el mismo que en el caso general, para llegar hasta esta solución se utilizan argumentos diferentes:

**Proposición 4.5.** ([15]) Sea  $G$  un conjunto abierto, acotado y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  obtenido dividiendo  $G$  mediante hiperplanos. Entonces  $\frac{V(E,G)}{d_M(E,G)^n}$  es obviamente no negativa y se pueden encontrar subdivisiones de  $G$  para las cuales dicha razón es tan pequeña como se quiera.

**Demostración.** Sea  $\{\Pi_i\}_{i=1}^\infty$  una sucesión de hiperplanos paralelos al diámetro de  $G$ , y tales que el volumen de los subconjuntos  $E_i$  determinados por las intersecciones de  $G$  con  $\Pi_i$  tiende a cero (figura 4.6). Entonces:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{V(E_i, G)}{d_M(E_i, G)^n} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{V(E_i, G)}{D(G)^n} = 0.$$

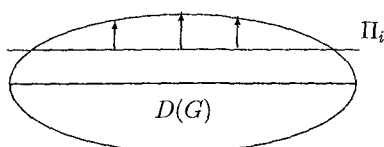


FIGURA 4.6

□

#### 4.2.2. Maximizar $\frac{V(E,G)}{d_M(E,G)^n}$

A la hora de obtener el supremo así como los maximizadores de la razón dada en este caso, se utilizarán resultados conocidos de los llamados *problemas de vallado* (*fencing problems*). En estos problemas se trata la maximización de la razón entre el volumen (área) relativo y el diámetro relativo máximo, al igual que se está estudiando en esta sección, pero con la hipótesis adicional de que la subdivisión del conjunto original  $G$  se realiza en dos partes de igual volumen (área)—una bisección de  $G$ —mediante un hipersuperficie (curva continua).

El método que se utilizará por tanto para encontrar el supremo del cociente  $\frac{V(E,G)}{d_M(E,G)^n}$  será reducir el problema al caso de los *fencing problems* y utilizar resultados conocidos de estos problemas que proporcionarán dicha cota.

Por tanto es necesario enunciar los resultados sobre estos problemas de vallado que se utilizarán posteriormente:

**Teorema A.** ([44]) Sea  $K$  un conjunto plano, acotado, convexo y centralmente simétrico con área  $A$ . Para cualquier subdivisión que se pueda considerar de  $K$  en

dos partes de igual área ( $E, K \setminus E$ ) mediante una curva continua, el diámetro relativo máximo satisface la siguiente desigualdad:

$$d_M(E, K) \geq C\sqrt{A},$$

donde  $C \cong 0,8815$ .

La igualdad se alcanza para la subdivisión del cuerpo óptimo (sombreado) descrito en la figura 4.7.

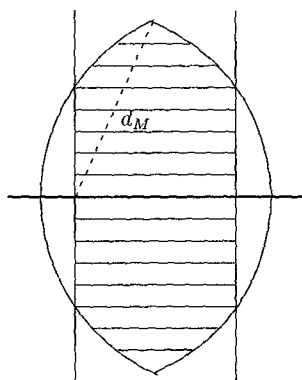


FIGURA 4.7

**Teorema B.** ([45]) En la clase de los conjuntos convexos planos con área  $A$ , el mínimo de  $d_M$  con respecto a cortes con segmentos de rectas se alcanza para los conjuntos centralmente simétricos.

La siguiente proposición proporciona el supremo de la razón en estudio en el caso particular en que  $G$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  y la subdivisión de  $G$  se realiza mediante cortes con segmentos de recta.

**Proposición 4.6.** ([15]) Sea  $G$  un conjunto plano, acotado y convexo y  $E$  un subconjunto de  $G$  obtenido mediante cortes con segmentos de recta. Entonces:

$$\frac{A(E, G)}{d_M(E, G)^2} \leq 1,2869\dots$$

**Demostración.** Sea  $l$  una recta que divide  $G$  en dos regiones  $E$  y  $G \setminus E$ , y se supone que  $A(E) \leq A(G \setminus E)$ . Es posible considerar dos casos: (1)  $d_M(E, G) = D(G \setminus E)$  y (2)  $d_M(E, G) = D(E)$ .

(1) Si  $d_M(E, G) = D(G \setminus E)$  y  $A(E) < A(G \setminus E)$ , se puede trasladar  $l$  hasta otra recta  $l'$  determinando una nueva subdivisión de  $G$  en dos regiones  $E'$  y  $G \setminus E'$ , de modo que ocurre una de las dos situaciones siguientes:



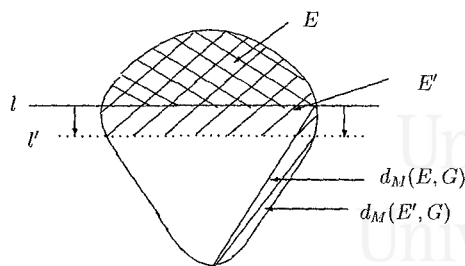


FIGURA 4.8

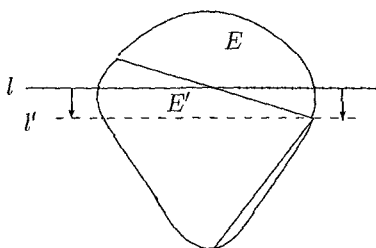
$$(1,1) \quad A(E') = A(G \setminus E') \text{ y } d_M(E', G) = D(G \setminus E').$$

En este caso  $A(E', G) = A(E') > A(E) = A(E, G)$  y  $d_M(E', G) < d_M(E, G)$  (figura 4.8) y  $E'$  determina un fencing problem. Entonces:

$$\frac{A(E, G)}{d_M(E, G)^2} \leq \frac{A(E')}{d_M(E', G)^2} \leq 1,2869\dots,$$

donde la última desigualdad se sigue de los teoremas A y B enunciados anteriormente.

$$(1,2) \quad A(E') < A(G \setminus E') \text{ y } d_M(E', G) = D(E') = D(G \setminus E').$$



$$d_M(E', G) = D(E') = D(G \setminus E')$$

FIGURA 4.9

En este caso se tiene que  $A(E, G) = A(E) \leq A(E') = A(E', G)$  y  $d_M(E, G) \geq d_M(E', G)$ , por tanto:

$$\frac{A(E, G)}{d_M(E, G)^2} = \frac{A(E)}{D(G \setminus E)^2} \leq \frac{A(E')}{D(E')^2}, \quad (4.4)$$

pero  $D(E') = D(G \setminus E')$ , entonces también se cumple que:

$$\frac{A(E, G)}{d_M(E, G)^2} \leq \frac{A(G \setminus E')}{D(G \setminus E')^2}. \quad (4.5)$$

Sean  $P$  y  $Q$  los puntos obtenidos al intersectar  $l'$  con  $\partial G$ .

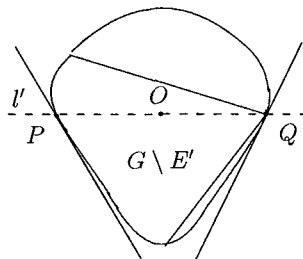


FIGURA 4.10

Se denomina  $E''$  a  $E'$  o  $G \setminus E'$ , dependiendo de cual sea el que cumple que las rectas soporte en  $P$  y  $Q$  forman ángulos internos cuya suma es menor o igual que  $\pi$ . Sea  $E'''$  el conjunto simétrico a  $E''$  con respecto al punto medio  $O$  del segmento  $PQ$ .

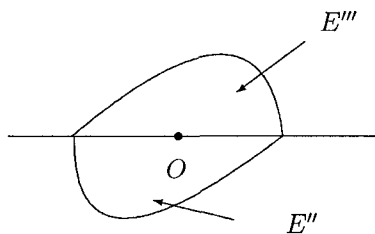


FIGURA 4.11

$E'' \cup E'''$  es un conjunto convexo y centralmente simétrico con área  $2A(E'')$  (figura 4.11). Es posible ver entonces que:

$$D(E''') = D(E'') = d_M(E', G) = D(E') = D(G \setminus E').$$

Y por tanto, aplicando (4.4) y (4.5) se obtiene que:

$$\frac{A(E, G)}{d_M(E, G)^2} \leq \frac{A(E'')}{D(E'')^2} \leq 1,2869\dots,$$

donde la desigualdad se da como consecuencia del Teorema A.

(2) Supóngase que  $d_M(E, G) = D(E)$ .

Entonces,

$$\frac{A(E, G)}{d_M(E, G)^2} = \frac{A(E)}{D(E)^2},$$

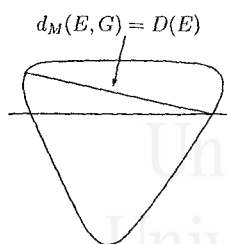


FIGURA 4.12

y además:

$$\frac{A(E, G)}{d_M(E, G)^2} \leq \frac{A(G \setminus E)}{D(G \setminus E)^2}.$$

Se denomina  $E'$  a uno de los dos subconjuntos  $E$  o  $G \setminus E$ , dependiendo de cual sea el que cumpla que las rectas soporte en  $P$  y  $Q$  forman ángulos internos cuya suma es menor o igual que  $\pi$ . Utilizando un argumento similar al del caso 1.2 se concluye que:

$$\frac{A(E, G)}{d_M(E, G)^2} \leq \frac{A(E')}{D(E')^2} \leq 1,2869\dots$$

□

En esta proposición se ha demostrado que  $C_s(G, 2)$  está acotado superiormente por el valor 1,289.... Es evidente que  $C_s(G, 2) \geq 0$ , pero cabe preguntarse si existen conjuntos para los cuales esta cota es 0 o el ínfimo es otro valor. El siguiente ejemplo muestra que se alcanza el 0:

Sea  $R$  el rectángulo de lados  $a$  y  $b$ ,  $b > a$ . Se divide  $R$  por una recta paralela a  $a$  en dos partes de igual área.

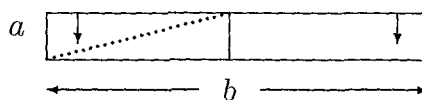


FIGURA 4.13

Entonces si se hace tender  $a$  a 0 se tiene que el área relativa tenderá a 0 mientras que el diámetro relativo máximo tenderá a  $b/2$ . Por tanto:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{A(E_a, R)}{d_M(E_a, R)^2} = 0.$$



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 5

---

# Desigualdades Geométricas Relativas Comparando el Volumen Relativo con los Inradios Relativos

---

Siguiendo con el estudio de las desigualdades geométricas relativas, y dado el gran interés del volumen debido a sus múltiples aplicaciones, en este capítulo se va a seguir comparando el volumen relativo con otras magnitudes geométricas relativas, los inradios relativos mínimo y máximo.

El propósito de este capítulo es maximizar y minimizar la razón entre el volumen relativo y la potencia  $n$ -ésima del inradio relativo mínimo y máximo de un subconjunto de un conjunto abierto, acotado y convexo. Al igual que en el capítulo anterior se van a distinguir dos casos: cuando se compara el volumen relativo con el inradio relativo mínimo y cuando se compara con el inradio relativo máximo.

### 5.1. Inradio Relativo Mínimo

En este apartado se buscan el ínfimo y el supremo del cociente entre el volumen relativo y la potencia  $n$ -ésima del inradio relativo mínimo. La razón por la cual el exponente del denominador es  $n$  es que éste es el exponente que hace invariante por dilataciones el cociente  $V(E)/\rho(E)$ .

Se empezará por maximizar  $\frac{V(E,G)}{\rho_m(E,G)^n}$ :

El primer resultado que se ha obtenido de esta desigualdad geométrica relativa dice que es posible encontrar subconjuntos de  $G$  para los cuales la razón dada es tan grande como se quiera:

**Proposición 5.1.** ([16]) *Sea  $G$  un conjunto abierto acotado y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  tal que tanto él como su complementario  $G \setminus E$  son conexos, y  $\partial E \cap G$  es una hipersuperficie topológica. Entonces no existe cota superior para la razón:*

$$\frac{V(E, G)}{\rho_m(E, G)^n}$$

**Demostración.** Sea  $G$  el hipercubo  $n$ -dimensional unitario y se va a considerar una sucesión de hiperplanos  $\{\Pi_i\}$  paralelos a una de las caras, siendo  $x_i = 1/i$  la distancia de  $\Pi_i$  a la cara más cercana de  $G$  paralela a él,  $i \geq 2$  (Figura 5.1).

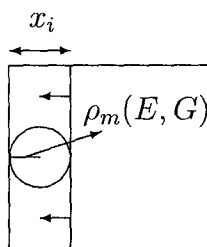


FIGURA 5.1

Entonces,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{V(E_i, G)}{\rho_m(E_i, G)^n} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i}{(x_i/2)^n} = \infty.$$

□

El resultado de esta proposición también es el mismo sea cual sea el exponente  $\alpha \in ]0, n[$ . Para  $\alpha \in ]1, n[$  sirve el mismo ejemplo de la demostración anterior, bastará sustituir  $n$  por  $\alpha$ . En el caso en que  $\alpha \in ]0, 1]$  el siguiente ejemplo lo probará:

Sea  $G$  un paralelepípedo en  $\mathbb{R}^n$  con lados de longitudes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tal que  $x_1 = \dots = x_{n-1} = 1$ , y se va a considerar una subdivisión por un hiperplano paralelo al lado de longitud  $x_n$  tal que  $V(E) = V(G \setminus E)$  (Figura 5.2).

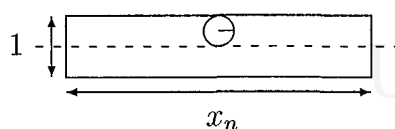


FIGURA 5.2

Si se calcula  $V(E, G) = x_n/2$  y  $\rho_m(E, G) = 1/4$ , se obtiene que:

$$\frac{V(E, G)}{\rho_m(E, G)^\alpha} = \frac{x_n/2}{(1/4)^\alpha}.$$

Ahora bien, si se hace tender  $x_n$  a infinito, se tiene que:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{V(E, G)}{\rho_m(E, G)^\alpha} = \infty.$$

A la hora de minimizar el cociente  $\frac{V(E, G)}{\rho_m(E, G)^\alpha}$  se va a distinguir entre el caso general y el particular en el que la subdivisión de  $G$  se realiza con un hiperplano. El motivo de realizar esta distinción es que el resultado varía dependiendo de la subdivisión.

La siguiente proposición establece una cota inferior óptima para la razón dada en el caso en que se divide  $G$  con una hipersuperficie cualquiera. Además, también proporciona los conjuntos para los cuales se alcanza la igualdad, es decir los minimizadores.

**Proposición 5.2.** ([16]) *Sea  $G$  un conjunto abierto acotado y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  tal que tanto él como su complementario  $G \setminus E$  son conexos, y  $\partial E \cap G$  es una hipersuperficie topológica. Entonces:*

$$\frac{V(E, G)}{\rho_m(E, G)^n} \geq \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

**Demostración.** Sea  $G$  un conjunto abierto, acotado y convexo y sea  $E$  un subconjunto de  $G$  obtenido al dividir  $G$  con una hipersuperficie general. Si se considera la inbola de  $E$ , esta bola tiene el mismo inradio que  $E$  y menor volumen, por tanto:

$$\frac{V(E, G)}{\rho_m(E, G)^n} \geq \frac{V(B, G)}{\rho_m(B, G)^n} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$



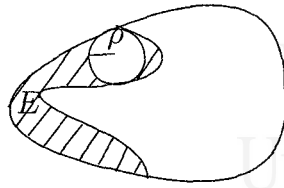


FIGURE 5.3

□

La última proposición de esta sección ofrece al igual que la anterior una cota inferior óptima de la razón y el minimizador, pero en el caso en que la subdivisión se realiza con un hiperplano.

**Proposición 5.3.** ([16]) *Sea  $G$  un conjunto abierto acotado y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  obtenido dividiendo  $G$  mediante un hiperplano. Entonces:*

$$\frac{V(E, G)}{\rho_m(E, G)^n} \geq \frac{\pi^{n/2}}{2\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} + 2^{n-1},$$

donde la igualdad se alcanza para el conjunto optimal descrito en la figura 5.4.

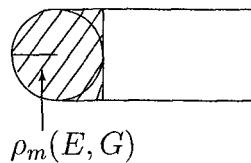


FIGURA 5.4

**Demostración.** Se van a distinguir dos casos:

1)  $\rho_m(E, G) = \rho(E)$  y  $V(E, G) = V(E)$ .

Sea  $E$  un subconjunto de  $G$  obtenido al dividir  $G$  con un hiperplano  $\Pi$  tal que  $\rho_m(E, G) = \rho(E)$ , y sea  $B(\rho)$  la inbola de  $E$ . Esta inbola toca en al menos dos puntos a la frontera de  $G$ . Sean  $P$  y  $Q$  estos dos puntos. Si se consideran los hiperplanos soporte de la inbola en  $P$  y  $Q$ ,  $h_P$  y  $h_Q$ , estos se intersectan en el semiespacio determinado por  $\Pi$  que contiene a  $E$ ,  $h_t(E)$  (si no fuese así,  $\rho_m(E, G) \neq \rho(E)$ ). Por tanto, existen al menos dos puntos diametralmente opuestos de la inbola en

el interior de  $E$ ,  $A$  y  $B$ , y se pueden tomar dos hiperplanos paralelos,  $h_A$  y  $h_B$ , tangentes a la inbola en  $A$  y  $B$ . Si se considera ahora el conjunto  $G'$  determinado por la frontera de la inbola,  $h_A$ ,  $h_B$  y  $G$ , y  $E'$  es el subconjunto obtenido al dividir  $G'$  por el hiperplano  $\Pi$  (Figura 5.5), entonces:

$$\rho_m(E', G') = \rho(E') = \rho(G' \setminus E') = \rho_m(E, G) \text{ y } V(E', G') = V(E') \leq V(E).$$

Por tanto:

$$\frac{V(E, G)}{\rho_m(E, G)^n} \geq \frac{V(E', G')}{\rho_m(E', G')^n}.$$

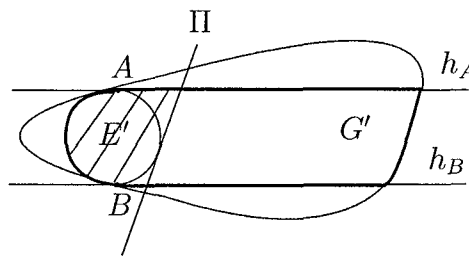


FIGURA 5.5

Si ahora se divide  $G'$  por un hiperplano  $\Pi'$  perpendicular a  $h_A$  y  $h_B$ , entonces se obtiene un nuevo subconjunto  $E''$  con el mismo inradio que  $E'$  que satisface:

$$V(E'', G') = V(E'') \leq V(E').$$

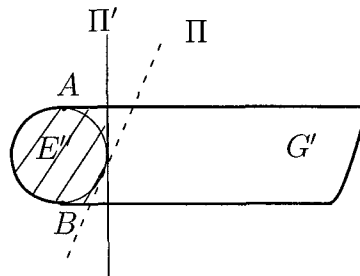


FIGURA 5.6

Por tanto:

$$\frac{V(E', G')}{\rho_m(E', G')^n} \geq \frac{V(E'', G')}{\rho_m(E'', G')^n} = \frac{\pi^{n/2}}{2\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} + 2^{n-1}.$$

Y esta cota no se puede mejorar.

$$2) \rho_m(E, G) = \rho(E) \text{ y } V(E, G) = V(G \setminus E).$$

En este caso es posible trasladar el hiperplano  $\Pi$  obteniendo un nuevo subconjunto  $E'$  tal que

$$V(E', G) = V(E') \leq V(E) \text{ y } \rho_m(E', G) = \rho(E') \geq \rho(G \setminus E).$$

Entonces se está de nuevo en el caso anterior y por tanto:

$$\frac{V(E, G)}{\rho_m(E, G)^n} \geq \frac{V(E', G)}{\rho_m(E', G)^n} \geq \frac{\pi^{n/2}}{2\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} + 2^{n-1}.$$

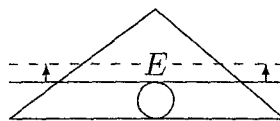


FIGURA 5.7

□

## 5.2. Inradio Relativo Máximo

A continuación se va a pasar a estudiar el problema de maximizar y minimizar la razón entre el volumen relativo y el inradio relativo máximo de un subconjunto de un conjunto acotado y convexo.

Si se empieza por maximizar el cociente  $\frac{V(E,G)}{\rho_M(E,G)^n}$ , la primera proposición demuestra que es posible encontrar subconjuntos de  $G$  para los cuales el cociente en estudio es tan grande como se quiera:

**Proposición 5.4.** ([16]) *Sea  $G$  un conjunto abierto acotado y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  tal que tanto él como su complementario  $G \setminus E$  son conexos, y  $\partial E \cap G$  es una hipersuperficie topológica. Entonces no existe cota superior para la razón:*

$$\frac{V(E,G)}{\rho_M(E,G)^n}.$$

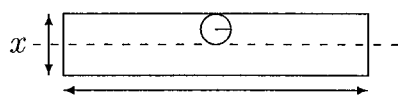
**Demostración.** Sea  $G$  un paralelotopo en  $\mathbb{R}^n$  con lados de longitudes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tal que  $x_1 = \dots = x_{n-1}$ , y se va a considerar una subdivisión por un hiperplano paralelo al lado de longitud  $x_n$  (Figura 5.8).

Entonces:

$$\frac{V(E,G)}{\rho_M(E,G)^n} = \frac{\frac{(x_1)^{n-1}x_n}{2}}{(x_1/4)^n} = \frac{4^n x_n}{2x_1}.$$

Si se fija ahora  $x_1$  y se hace tender  $x_n$  a  $\infty$ :

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{V(E,G)}{\rho_M(E,G)^n} = \lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{4^n x_n}{2x_1} = \infty.$$



$$\rho_M(E,G) = \rho(E) = \rho(G \setminus E)$$

FIGURA 5.8

□

**Observación 2.** Al igual que cuando se busca el supremo para la razón entre el volumen relativo y el inradio relativo mínimo, el mismo ejemplo utilizado demuestra que en este caso tampoco existe cota superior para la razón  $\frac{V(E,G)}{\rho_M(E,G)^\alpha}$ , para cualquier  $\alpha \in ]0, n[$ .

Por último, a la hora de encontrar una cota inferior óptima para la razón dada, la siguiente proposición dice que es posible encontrar una subdivisión de  $G$  para la cual 0 es la cota inferior óptima.

**Proposición 5.5.** ([16]) Sea  $G$  un conjunto abierto acotado y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  tal que tanto él como su complementario  $G \setminus E$  son conexos, y  $\partial E \cap G$  es una hipersuperficie topológica. Entonces, la razón  $\frac{V(E,G)}{\rho_M(E,G)^n}$  es obviamente no negativa y es posible encontrar subdivisiones de  $G$  para las cuales es tan pequeña como se quiera.

**Demostración.** Bastará considerar el caso en que  $V(E, G) = V(E)$  y  $\rho_M(E, G) = \rho(G \setminus E)$ .

Sea  $\Pi$  un hiperplano que intersecta el subconjunto  $G \setminus E$  sólo en puntos de la frontera relativa (Figura 5.9). Entonces se obtiene un nuevo subconjunto  $E'$  tal que  $V(E') \leq V(E)$  y  $\rho(G \setminus E') \geq \rho(G \setminus E)$ ; por tanto,

$$\frac{V(E, G)}{\rho_M(E, G)^n} = \frac{V(E)}{\rho(E)} \geq \frac{V(E')}{\rho(G \setminus E')}.$$

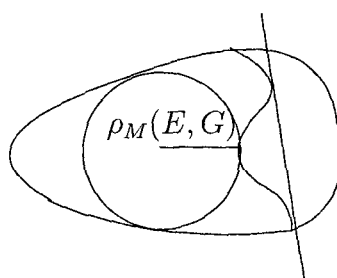


FIGURA 5.9

Ahora bien, si se traslada  $\Pi$  hacia el semiespacio determinado por sí mismo que no contiene al subconjunto  $G \setminus E$ , entonces:  $V(E, G) \rightarrow 0$  y  $\rho_M(E, G) \rightarrow c$ , donde  $c = \rho(G)$  es una constante. Por tanto:

$$\frac{V(E, G)}{\rho_M(E, G)^n} \rightarrow 0.$$

□



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 6

---

# Desigualdades Geométricas Relativas Comparando el Volumen Relativo con las Anchuras Relativas

---

En este nuevo capítulo, siguiendo en la línea del estudio de las desigualdades geométricas relativas en las que se compara el volumen relativo con otras magnitudes geométricas, se va a considerar ahora otro funcional geométrico, *la anchura mínima*, que para simplificar se le llamará anchura, y se va a comparar el volumen relativo con la potencia  $n$ -ésima de la anchura relativa mínima y máxima de un subconjunto de un conjunto abierto, acotado y convexo.

Debido a la relación existente entre el inradio y la anchura mínima,  $\omega \geq 2r$  (la igualdad se da en muchos conjuntos, por ejemplo los centralmente simétricos), en algunas de las demostraciones que se van a presentar a continuación los argumentos utilizados son análogos a los del capítulo anterior. No obstante, en otras demostraciones son totalmente diferentes, como por ejemplo la demostración de la Proposición 6.3 que se basa en el Teorema de Pal.

El objetivo de esta sección es obtener las estimaciones globales inferiores y superiores de las razones:

$$\frac{V(E, G)}{\omega_m(E, G)^n} \text{ y } \frac{V(E, G)}{\omega_M(E, G)^n}.$$



Se van a estudiar subdivisiones realizadas con hipersuperficies generales, pero también se van a tratar -en los casos en que las estimaciones sean diferentes- las subdivisiones con hiperplanos.

Al igual que en capítulos anteriores, éste se ha estructurado en dos partes: en la primera de ella se compara el volumen relativo con la anchura relativa mínima y en la segunda con la anchura relativa máxima.

## 6.1. Anchura Relativa Mínima

En esta sección se va a tratar de obtener el supremo y el ínfimo así como los maximizadores y minimizadores de la razón:

$$\frac{V(E, G)}{\omega_m(E, G)^n}$$

Del mismo modo que en otras desigualdades geométricas relativas ya estudiadas, el exponente del denominador es  $n$ . La razón de este exponente sigue siendo la misma que en los casos anteriores, es el que mantiene invariante por dilataciones el cociente  $V(E)/\omega(E)$ .

En primer lugar se ha tratado de encontrar el supremo de la razón dada, pero la siguiente proposición proporciona un ejemplo en el cual dicha razón no está acotada superiormente:

**Proposición 6.1.** ([16]) *Sea  $G$  un conjunto abierto acotado y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  tal que tanto él como su complementario  $G \setminus E$  son conexos, y  $\partial E \cap G$  es una hipersuperficie topológica. Entonces no existe una cota superior para la razón:*

$$\frac{V(E, G)}{\omega_m(E, G)^n}$$

**Demostración.** Sea  $Q$  el hipercono unitario  $n$ -dimensional y sea  $\{\Pi_i\}$  una sucesión de hiperplanos paralelos a una de las caras. Sea  $\{E_i\}$  la sucesión de subconjuntos de  $Q$  determinados por  $\Pi_i$ , y  $x_i = 1/i$  la distancia desde  $\Pi_i$  a la cara más cercana de  $Q$  paralela a él,  $i \geq 2$  (Figura 6.2).

Entonces, cuando  $i \rightarrow \infty$  se tiene que  $x_i \rightarrow 0$ , y por tanto:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{V(E_i, Q)}{\omega_m(E_i, Q)^n} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{x_i^{n-1}} = \infty.$$

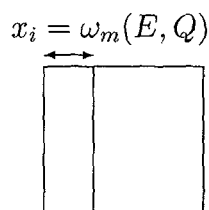


FIGURA 6.2

□

Una vez demostrado que para el cociente  $\frac{V(E,G)}{\omega_m(E,G)^n}$  no se puede encontrar una cota superior para cualquier  $G \in \mathbb{R}^n$ , la siguiente proposición dice que para el caso del ínfimo, si la subdivisión se realiza con hipersuperficies generales existen conjuntos  $G \in \mathbb{R}^n$  para los cuales dicha razón se aproxima a 0:

**Proposición 6.2.** ([16]) *Sea  $G$  un conjunto abierto acotado y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  tal que tanto él como su complementario  $G \setminus E$  son conexos, y  $\partial E \cap G$  es una hipersuperficie topológica. Entonces siempre es posible encontrar subconjuntos  $E$  de  $G$  para los cuales la razón  $\frac{V(E,G)}{\omega_m(E,G)^n}$  es tan pequeña como se quiera.*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad se va a suponer que  $0 \in G$ . Sea  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de subconjuntos de  $G$  tal que  $E_i = (1 - \frac{1}{i})G$ ,  $i \geq 2$  (Figura 6.3).

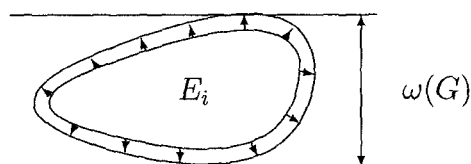


FIGURA 6.3

Entonces  $V(E_i, G) = V(G \setminus E_i)$  y  $\omega_m(E_i, G) = \omega(E_i)$ . Así pues, cuando  $i \rightarrow \infty$  se tiene que  $V(E_i, G) \rightarrow 0$  y  $\omega_m(E_i, G) \rightarrow \omega(G)$ . Por tanto,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{V(E_i, G)}{\omega_m(E_i, G)^n} = \frac{0}{\omega(G)^n} = 0.$$

□

Al igual que se estudió en el capítulo anterior, una cuestión interesante es saber si los resultados vistos hasta ahora se cumplirían para cualquier  $\alpha \in ]0, n[$ , en lugar de considerar únicamente el caso  $\alpha = n$ . La respuesta es sí, como se puede comprobar en el ejemplo de la demostración previa sustituyendo  $n$  por  $\alpha$ .

En el caso particular en que  $G$  es un conjunto plano y la subdivisión de  $G$  se realiza con un segmento de recta, sí es posible encontrar una cota inferior diferente de 0 de la razón  $A(E, G)/\omega_m(E, G)^2$ .

Para probar la proposición que viene a continuación es necesario el siguiente resultado:

**Teorema de Pal** ([51]) *Sea  $G$  un conjunto acotado y convexo de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces:*

$$A(G) \geq \frac{\omega(G)^2}{\sqrt{3}},$$

donde la igualdad se alcanza si y sólo si  $G$  es un triángulo equilátero.

**Proposición 6.3.** ([16]) *Sea  $G$  un conjunto abierto, acotado y convexo de  $\mathbb{R}^2$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  obtenido dividiendo  $G$  mediante un segmento de recta. Entonces,*

$$\frac{A(E, G)}{\omega_m(E, G)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $A(E, G) = A(E)$  y  $\omega_m(E, G) = \omega(E)$  (En otro caso se podría trasladar el segmento de recta que divide  $G$  para obtener un nuevo subconjunto  $E'$  de  $G$  tal que  $E'$  satisfaga los requerimientos dados). Entonces, como  $E$  está acotado y es convexo, aplicando el Teorema de Pal a este subconjunto se obtiene:

$$A(E) \geq \frac{\omega(E)^2}{\sqrt{3}} \text{ o equivalentemente } \frac{A(E)}{\omega(E)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Por tanto,

$$\frac{A(E, G)}{\omega_m(E, G)^2} = \frac{A(E)}{\omega(E)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

□

Este argumento no se puede extender a dimensiones superiores ya que el problema de Pal es todavía un problema abierto para  $n \geq 3$ .

## 6.2. Anchura Relativa Máxima

Finalmente, se va a maximizar y minimizar la razón entre el volumen relativo y la potencia  $n$ -ésima de la anchura relativa máxima de un subconjunto de un conjunto abierto, acotado y convexo.

Comenzando con la maximización de la razón dada, el siguiente teorema dice que no es posible encontrar una cota superior para todo  $G \in \mathbb{R}^n$ . La demostración se basa en encontrar un conjunto  $G$  para el cual la razón no esté acotada superiormente:

**Proposición 6.4.** ([16]) *Sea  $G$  un conjunto abierto acotado y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  tal que tanto él como su complementario  $G \setminus E$  son conexos, y  $\partial E \cap G$  es una hipersuperficie topológica. Entonces no existe una cota superior para la razón:*

$$\frac{V(E, G)}{\omega_M(E, G)^n}.$$

**Demostración.** Sea  $G$  un paralelotopo en  $\mathbb{R}^n$  con lados de longitud  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tal que  $x_1 = \dots = x_{n-1}$ , y se considera una subdivisión por un hiperplano paralelo al lado cuya longitud es  $x_n$  (Figura 6.4).

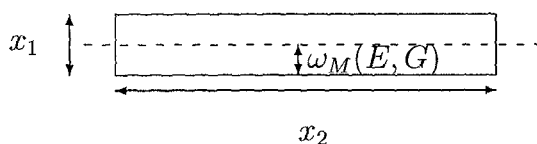


FIGURA 6.4

Entonces:

$$\frac{V(E, G)}{\omega_M(E, G)^n} = \frac{\frac{(x_1)^{n-1} x_n}{2}}{(x_1/2)^n} = \frac{2^{n-1} x_n}{x_1}.$$

Si ahora se fija  $x_1$  y se hace que  $x_n \rightarrow \infty$ , se tiene que:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{V(E, G)}{\omega_M(E, G)^n} = \lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} x_n}{x_1} = \infty.$$

□

Al igual que en el caso de la anchura relativa mínima, tampoco es posible establecer una cota inferior de la razón dada diferente de 0, como muestra la proposición que viene a continuación. La diferencia con la desigualdad anterior (anchura relativa mínima) es que en el caso particular en que la subdivisión de  $G$  se realiza con hiperplanos también se encuentra un ejemplo en el cual el cociente entre el volumen relativo y la anchura relativa máxima sea 0.

**Proposición 6.5.** *([16]) Sea  $G$  un conjunto abierto acotado y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto de  $G$  tal que tanto él como su complementario  $G \setminus E$  son conexos, y  $\partial E \cap G$  es una hipersuperficie topológica. Entonces la razón  $\frac{V(E,G)}{\omega_M(E,G)^n}$  es obviamente no negativa y es posible encontrar subdivisiones de  $G$  para las cuales es tan pequeña como se quiera.*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad se va a suponer que  $V(E, G) = V(E)$ . Es posible considerar un hiperplano  $\Pi$  tal que sólo intersecta al subconjunto  $G \setminus E$  en puntos de la frontera relativa (Figura 6.5). Entonces se obtiene un nuevo subconjunto  $E'$  tal que  $V(E', G) \leq V(E, G)$  y  $\omega_M(E', G) \geq \omega_M(E, G)$ . Por tanto,

$$\frac{V(E, G)}{\omega_M(E, G)^n} \geq \frac{V(E', G)}{\omega_M(E', G)^n}.$$

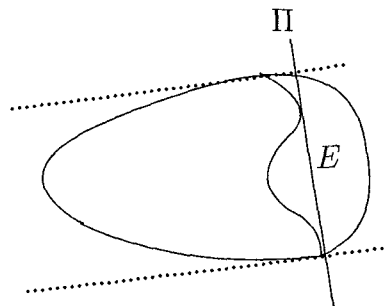


FIGURA 6.5

Si ahora se considera una sucesión de hiperplanos  $\{\Pi_i\}$  paralelos a  $\Pi$ , se obtiene una sucesión de subconjuntos  $\{E_i\}$  de  $G$  tal que  $V(E_i, G) \rightarrow 0$  y  $\omega_M(E_i, G) \rightarrow c$ , donde  $c \leq \omega(G)$ . Por tanto,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{V(E_i, G)}{\omega_M(E_i, G)^n} = 0.$$

□

También en este caso (anchura relativa máxima) cabe preguntarse qué ocurre para otros exponentes  $\alpha$  distintos de  $n$ ,  $\alpha \in ]0, n[$ . La respuesta es que los resultados no varían, como se puede comprobar sustituyendo  $n$  por  $\alpha$  en los ejemplos de ambas demostraciones.



DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS RELATIVAS COMPARANDO EL VOLUMEN  
RELATIVO CON LAS ANCHURAS RELATIVAS

---

78

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 7

---

# Desigualdades Geométricas Relativas en Superficies Compactas

---

Cualquier curva cerrada sobre una superficie compacta divide a la superficie en dos regiones. Entonces tiene sentido plantear problemas geométricos relativos en esa subdivisión. El primero de dichos problemas es la desigualdad isoperimétrica clásica sobre la esfera, que como Osserman comentaba, en realidad es un problema isoperimétrico relativo.

Recientemente ha habido numerosos resultados sobre otras superficies particulares: el cubo, otros poliedros, la superficie de un cilindro acotado,... ([19], [48]).

A modo de ejemplo se presenta un resultado sobre la desigualdad isoperimétrica en la superficie del cubo, en el que se determinan los conjuntos extremales:

**Teorema 7.1.** ([19]) *En la superficie del cubo unidad, las curvas descritas en la figura 7.1 determinan las regiones de menor perímetro (regiones extremales) que encierran un área relativa dada  $A$ :*

- Curvas del tipo (1) para  $0 < A \leq 1$ ;
- Curvas del tipo (2) para  $1 \leq A \leq 2$ ;
- Curvas del tipo (3) para  $2 \leq A \leq \frac{16}{\pi-3} (\approx 2,09)$ ; y
- Curvas del tipo (4) para  $\frac{16}{\pi-3} \leq A \leq 3$ .

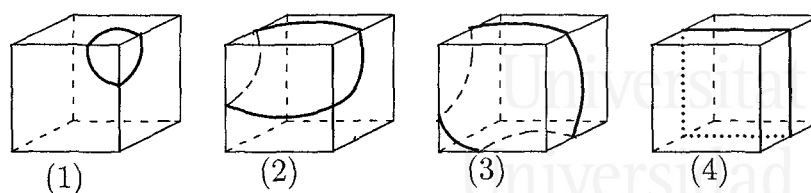


FIGURA 7.1

A continuación se presentan una serie de resultados originales sobre desigualdades en las que se compara tanto el área relativa como el perímetro relativo con los diámetros relativos máximo y mínimo.

Se va a definir en primer lugar el diámetro de una región de una superficie compacta  $S$ . Para ello se considera la *distancia intrínseca* entre dos puntos de  $S$ ,  $p$  y  $q$ :

$$d_i(p, q) = \inf\{L(\alpha(t)), \alpha(a) = p \text{ y } \alpha(b) = q\},$$

donde  $\alpha$  es una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ .

Se define entonces el diámetro de una región  $R \subset S$  como:

$$D(R) = \sup\{d_i(p, q), p, q \in R\}.$$

Sea entonces  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad y se va a considerar una subdivisión de la esfera en dos regiones simplemente conexas  $R$  y  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  por una curva simple cerrada. Al igual que en capítulos anteriores el objetivo es encontrar el supremo y el ínfimo de las razones:

$$\frac{A(R, \mathbb{S}^2)}{d_M(R, \mathbb{S}^2)^2}, \frac{A(R, \mathbb{S}^2)}{d_m(R, \mathbb{S}^2)^2}, \frac{d_M(R, \mathbb{S}^2)}{P(R, \mathbb{S}^2)} \text{ y } \frac{d_m(R, \mathbb{S}^2)}{P(R, \mathbb{S}^2)}.$$

También se obtendrán algunas desigualdades para la superficie del cubo.

Para varios de los resultados que se van a presentar, se necesitará el siguiente lema:

**Lema 7.2.** ([17]) *Sea  $S$  una superficie compacta convexa centralmente simétrica. Cualquier curva simple cerrada que divide a la superficie en dos regiones de igual área tiene al menos dos puntos antipodales.*

**Demostración.** Sea  $\gamma$  una curva simple cerrada que divide a  $S$  en dos partes de igual área. Como  $S$  es centralmente simétrica, es posible asociar a cada punto  $P$  de  $\gamma$  su punto antipodal  $P'$  con respecto al centro de simetría de  $S$ . Entonces se obtiene otra curva simple cerrada  $\gamma'$  (curva antipodal de  $\gamma$ ) determinada por todos los puntos  $P'$ . Las curvas  $\gamma$  y  $\gamma'$  se intersectan: Como  $S$  es convexa, es homeomorfa a la esfera, y por tanto si  $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$ , aplicando el teorema de la Curva de Jordan  $S$  estaría dividida en tres regiones disjuntas: la primera de ellas  $S_1$  acotada por  $\gamma$  con área  $A(S)/2$ , la segunda  $S_2$  acotada por  $\gamma'$  con área también  $A(S)/2$ , y la tercera entre  $\gamma$  y  $\gamma'$  con área estrictamente positiva, lo cual es una contradicción. Por tanto  $\gamma$  y  $\gamma'$  se intersectan en al menos dos puntos antipodales  $Q$  y  $Q'$ .

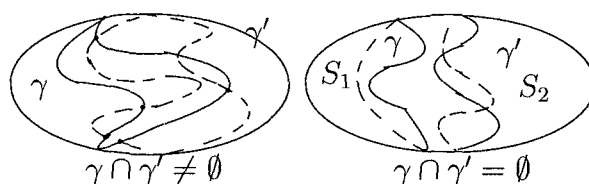


FIGURA 7.2

□

Este capítulo está estructurado en dos secciones, dependiendo si se compara con el diámetro relativo mínimo o máximo.

## 7.1. Diámetro Relativo Máximo

Se va a comenzar tratando de minimizar el cociente entre el área de superficie relativa y el diámetro relativo máximo:

**Proposición 7.3.** ([17]) *Sea  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad y sean  $R$  y  $S^2 \setminus R$  dos regiones simplemente conexas de la esfera obtenidas al subdividir  $S^2$  por una curva simple cerrada. Entonces  $\frac{A(R, S^2)}{d_M(R, S^2)^2}$  es obviamente no negativa y se pueden encontrar subdivisiones de  $S^2$  para las cuales dicha razón es tan pequeña como se quiera.*

**Demostración.** Sea  $\mathbb{S}^2$  la esfera unidad y sea  $R$  el casquete obtenido al cortar  $\mathbb{S}^2$  con un plano  $\Pi$  tal que la frontera relativa es una circunferencia de radio  $r \leq 1$  (Fig. 7.3).

Se tiene que  $d_M(R, \mathbb{S}^2) = \pi$ . Si ahora se considera una sucesión de planos paralelos a  $\Pi$  hacia el semiespacio que contiene a  $R$ , se obtiene una sucesión de subregiones  $\{R_n\}$  tal que  $A(R_n, \mathbb{S}^2)$  tenderá a 0 cuando  $n$  tienda a infinito mientras que  $d_M(R_n, \mathbb{S}^2) = \pi \forall n$ . Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(R_n, \mathbb{S}^2)}{d_M(R_n, \mathbb{S}^2)^2} = 0.$$

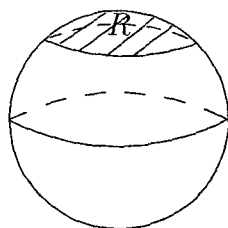


FIGURA 7.3

□

Se pasa ya a maximizar la razón dada.

**Proposición 7.4.** ([17]) Sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad y sean  $R$  y  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  dos regiones simplemente conexas de la esfera obtenidas al subdividir  $\mathbb{S}^2$  por una curva simple cerrada. Entonces:

$$\frac{A(R, \mathbb{S}^2)}{d_M(R, \mathbb{S}^2)^2} \leq \frac{2}{\pi},$$

dándose la igualdad para la semiesfera.

**Demostración.** Sea cual sea la región  $R$  de la esfera se tiene que  $d_M(R, \mathbb{S}^2) = \pi$ . En efecto: supóngase sin pérdida de generalidad que  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  es la región que tiene mayor área, entonces  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  contiene a otra región  $R'$  con área exactamente la mitad. Como consecuencia del Lema 7.2, en la frontera de  $R'$  hay dos puntos antipodales  $x$ ,  $y$ . Por tanto,  $x$  e  $y$  pertenecen a  $\mathbb{S}^2 \setminus R$ , y el diámetro máximo es  $d_M(R, \mathbb{S}^2) \geq d_i(x, y)$ . Además, como  $d_i(x, y) = \pi$  (al ser  $x$  e  $y$  dos puntos antipodales) se cumple que  $d_M(R, \mathbb{S}^2) = \pi$ .

Por tanto bastará encontrar la región para la cual se maximiza el área de superficie relativa. Ésta se alcanzará cuando  $A(R, \mathbb{S}^2) = A(\mathbb{S}^2)/2 = 2\pi$ . En conclusión:

$$\frac{A(R, \mathbb{S}^2)}{d_M(R, \mathbb{S}^2)^2} \leq \frac{2\pi}{\pi^2} = \frac{2}{\pi}.$$

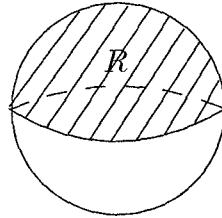


FIGURA 7.4

□

**Observación 3.** *El razonamiento de las proposiciones 7.3 y 7.4 se extiende a cualquier dimensión, por tanto para subdivisiones de la esfera  $\mathbb{S}^n$ :*

$$0 < \frac{A(R, \mathbb{S}^n)}{d_M(R, \mathbb{S}^n)^n} \leq (n+1) \frac{\pi^{\frac{1-n}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{n+1}{2})}.$$

Para la superficie del cubo unidad  $C$  se verifica análogamente al caso de la esfera la proposición 7.3, que proporciona el mejor valor posible para la cota inferior de la razón  $\frac{A(R, C)}{d_M(R, C)^2}$ .

En el caso de la cota superior se obtendrá en primer lugar una estimación que no es la mejor posible, y a continuación se proporcionará tanto la subdivisión maximizadora como la mejor cota.

**Proposición 7.5.** ([17]) *Sea  $C \subset \mathbb{R}^3$  la superficie del cubo unidad y sea  $R$  una región en  $C$  cuya frontera es una curva simple cerrada. Entonces:*

$$\frac{A(R, C)}{d_M(R, C)^2} \leq \frac{3}{4}.$$

**Demostración.** El mayor valor posible que puede tomar  $A(R, C) = \min\{A(R), A(C \setminus R)\}$  es  $A(C)/2 = 3$ . Por tanto:

$$A(C, R) \leq 3. \quad (7.1)$$

Para cualquier subdivisión de la superficie  $C$  por una curva simple cerrada de Jordan, se cumple siempre que  $d_M(R, C) \geq 2$ . En efecto: como consecuencia del Lema 7.2 la región  $R$  o  $C \setminus R$  que tiene mayor área, sea ésta por ejemplo  $C \setminus R$ , contiene a otra región  $R'$  con área exactamente la mitad y en  $R'$  hay por tanto dos puntos antipodales  $x$  e  $y$ ;  $x$  e  $y$  también pertenecen a  $C \setminus R$ ; el diámetro máximo es entonces  $d_M(R, C) \geq d_i(x, y)$ , y como la menor distancia entre dos puntos antipodales es 2, se cumple que:

$$d_M(R, C) \geq 2. \quad (7.2)$$

Como consecuencia de (7.1) y (7.2):

$$\frac{A(R, C)}{d_M(R, C)^2} \leq \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

□

La siguiente proposición da la cota más precisa:

**Proposición 7.6.** ([17]) *Sea  $C \subset \mathbb{R}^3$  la superficie del cubo unidad y sea  $R$  una región en  $C$  cuya frontera es una curva simple cerrada. Entonces:*

$$\frac{A(R, C)}{d_M(R, C)^2} \leq \frac{12}{17}.$$

**Demostración.** Al igual que en la proposición anterior, el mayor valor posible de  $A(R, C)$  es 3. El diámetro tanto de  $R$  como de  $C \setminus R$  tiene uno de sus extremos en un vértice de  $C$ . El menor valor posible de  $d_M(R, C)$  se alcanza con la distancia de un vértice del cubo al punto medio de una de las tres aristas más lejanas del vértice, cuyo valor es exactamente  $\sqrt{17}/2$ . Por tanto:

$$\frac{A(R, C)}{d_M(R, C)^2} \leq \frac{3}{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2} = \frac{12}{17}.$$

La igualdad se alcanza para la subdivisión obtenida por el corte de la superficie del cubo por un plano paralelo a dos de sus caras y equidistante de ambas:

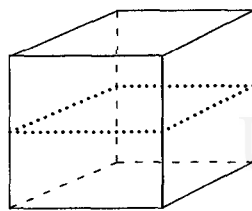


FIGURA 7.5

□

**Observación 4.** *Estos resultados del cubo también se pueden generalizar a dimensiones superiores.*

A continuación se obtienen dos estimaciones inmediatas de la razón entre el diámetro relativo máximo y el perímetro relativo:

**Proposición 7.7.** ([17]) *Sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad y sean  $R$  y  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  dos regiones simplemente conexas de la esfera obtenidas al subdividir  $\mathbb{S}^2$  por una curva simple cerrada. Entonces  $\frac{d_M(R, \mathbb{S}^2)}{P(R, \mathbb{S}^2)}$  es obviamente no negativa y se pueden encontrar subdivisiones de  $\mathbb{S}^2$  para las cuales dicha razón es tan pequeña como se quiera.*

**Demostración.** Basta considerar curvas simples cerradas de longitud arbitrariamente grande.

□

**Proposición 7.8.** ([17]) *Sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad y sean  $R$  y  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  dos regiones simplemente conexas de la esfera obtenidas al subdividir  $\mathbb{S}^2$  por una curva simple cerrada. Entonces  $\frac{d_M(R, \mathbb{S}^2)}{P(R, \mathbb{S}^2)}$  puede tomar valores arbitrariamente grandes.*

**Demostración.** Se utiliza una construcción análoga a la de la proposición 7.3.

□



## 7.2. Diámetro Relativo Mínimo

En esta sección se van a comparar el área y el perímetro relativo con el diámetro relativo mínimo de la esfera.

En primer lugar se demuestra que es posible encontrar subdivisiones de la esfera para las cuales la razón  $\frac{A(R, \mathbb{S}^2)}{d_m(R, \mathbb{S}^2)^2}$  es tan pequeña como se quiera:

**Proposición 7.9.** ([17]) *Sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad y sean  $R$  y  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  dos regiones simplemente conexas de la esfera obtenidas al subdividir  $\mathbb{S}^2$  por una curva simple cerrada. Entonces  $\frac{A(R, \mathbb{S}^2)}{d_m(R, \mathbb{S}^2)^2}$  es obviamente no negativa y se pueden encontrar subdivisiones de  $\mathbb{S}^2$  para las cuales dicha razón es tan pequeña como se quiera.*

**Demostración.** Sea  $R_\epsilon$  el tubo geodésico de radio  $\epsilon$  alrededor de un semimeridiano.

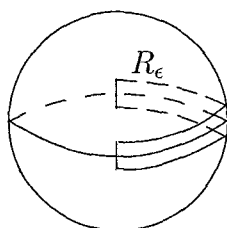


FIGURA 7.6

Si se hace tender  $\epsilon$  hacia 0 se tiene que el área de superficie de  $R_\epsilon$  tenderá a 0 mientras que el diámetro relativo mínimo tenderá a  $\pi$ . Por tanto la razón tenderá a 0.

□

La cota superior de la razón  $\frac{A(R, \mathbb{S}^2)}{d_m(R, \mathbb{S}^2)^2}$  es fácil de obtener en algunos casos particulares. El caso general corresponde a la desigualdad isodiamétrica en superficies compactas, problema todavía abierto y sobre el que Alexandrov ([43]) conjeturó que la mejor cota es  $\pi/4$  que coincide con la solución obtenida por Bieberbach ([8]) para el caso del plano.

**Proposición 7.10.** ([17]) *Sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad y sean  $R$  y  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  dos regiones simplemente conexas de la esfera obtenidas al subdividir  $\mathbb{S}^2$  por un plano de  $\mathbb{R}^3$ . Entonces:*

$$\frac{A(R, \mathbb{S}^2)}{d_m(R, \mathbb{S}^2)^2} < \frac{\pi}{4}.$$

**Demostración.** Sea  $C$  el casquete esférico obtenido al subdividir la esfera con un plano. Realizando los correspondientes cálculos se obtiene que:

$$A(C, \mathbb{S}^2) = 2\Pi(1 - \cos\alpha) \text{ y } d_m(C, \mathbb{S}^2) = 2\alpha,$$

donde  $\alpha \in (0, \pi/2]$  es el ángulo comprendido entre el eje de la esfera perpendicular al plano y la recta que une el centro de la esfera con cualquier punto de la frontera del casquete. (Fig 7.7).

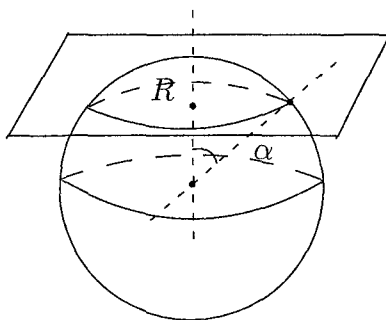


FIGURA 7.7

Entonces:

$$\frac{A(C, \mathbb{S}^2)}{d_m(C, \mathbb{S}^2)^2} = \frac{\pi(1 - \cos\alpha)}{2\alpha^2}.$$

Ésta es una función decreciente con respecto a  $\alpha$ , por lo que el máximo se alcanzará cuando  $\alpha \rightarrow 0$ .

Por tanto, calculando el límite se obtiene que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\pi(1 - \cos\alpha)}{2\alpha^2} = \frac{\pi}{4}.$$

□

**Proposición 7.11.** ([17]) Sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad y sean  $R$  y  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  dos regiones simplemente conexas de la esfera de igual área obtenidas al subdividir  $\mathbb{S}^2$  por una curva simple cerrada. Entonces:

$$\frac{A(R, \mathbb{S}^2)}{d_m(R, \mathbb{S}^2)^2} = \frac{2}{\pi}.$$

**Demostración.** Como consecuencia del Lema 7.2, la frontera de  $R$  tiene al menos dos puntos antipodales.  $d_m(R, \mathbb{S}^2) = \pi$ . El resultado es ahora inmediato.  $\square$

Para terminar este capítulo se va a comparar el diámetro relativo mínimo con el perímetro relativo.

**Proposición 7.12.** ([17]) Sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad y sean  $R$  y  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  dos regiones simplemente conexas de la esfera obtenidas al subdividir  $\mathbb{S}^2$  por una curva simple cerrada. Entonces  $\frac{d_m(R, \mathbb{S}^2)}{P(R, \mathbb{S}^2)}$  es obviamente no negativa y se pueden encontrar subdivisiones de  $\mathbb{S}^2$  para las cuales dicha razón es tan pequeña como se quiera.

**Demostración.** Basta considerar curvas simples cerradas de longitud arbitrariamente grande.  $\square$

**Proposición 7.13.** ([17]) Sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad y sean  $R$  y  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  dos regiones simplemente conexas de la esfera obtenidas al subdividir  $\mathbb{S}^2$  por una curva simple cerrada. Entonces:

$$\frac{d_m(R, \mathbb{S}^2)}{P(R, \mathbb{S}^2)} \leq \frac{1}{2},$$

y la igualdad se alcanza:

- a) Cuando  $R$  es un huso esférico, o
- b) en el caso degenerado en que  $R$  es un arco de circunferencia máxima.

**Demostración.** La demostración es consecuencia del hecho de que en la frontera de  $R$  existen dos puntos  $x_0$  e  $y_0$  tales que  $d_i(x_0, y_0) = d_m(R, \mathbb{S}^2)$ . En efecto: sean  $x$  e  $y \in R$  los extremos de un diámetro mínimo que tiene longitud  $d_m(R, \mathbb{S}^2) = d$ .

Supóngase que  $x \notin \partial R$ .

Si  $d < \pi$  como la geodésica que une  $x$  con  $y$  es minimizante hasta alcanzar la longitud  $\pi$ , se podría prolongar dicha geodésica más allá de  $x$  sin salir de  $R$  y la geodésica que une  $x$  con  $y$  no sería el diámetro en contra de lo supuesto, luego en ese caso  $x = x_0 \in \partial R$ .

Si  $d = \pi$ , por un argumento de continuidad se garantiza la existencia de un arco de geodésica de longitud  $\pi$  que une  $y$  con  $x_0 \in \partial R$  ya que si esto no fuera así todos los puntos de  $\partial R$  estarían a distancia mayor que  $\pi$  de  $y$  lo cual es imposible.

Se va a ver ahora que existe otro punto  $y_0$  también en  $\partial R$  tal que  $d_i(x_0, y_0) = d$ .

Análogamente al caso anterior si  $d < \pi$  e  $y$  estuviera en el interior de  $R$  como la geodésica que une  $x_0$  con  $y$  es minimizante hasta alcanzar la longitud  $\pi$ , se podría prolongar dicha geodésica más allá de  $y$  sin salir de  $R$  y la geodésica que une  $x_0$  con  $y$  ya no sería el diámetro.

Para analizar ahora el caso  $d = \pi$  conviene observar que todos los razonamientos anteriores también se pueden aplicar a la región  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  y que en ese caso  $\pi = d_m(R, \mathbb{S}^2) = d_M(R, \mathbb{S}^2)$ . Se estaría en la situación de que existen dos pares de puntos  $(x_0 \in \partial R, z_0 \in R)$  y  $(x_1 \in \partial R, z_1 \in \mathbb{S}^2 \setminus R)$  tales que  $d_i(x_0, z_0) = d_i(x_1, z_1) = \pi$ .

Considérese ahora la curva antipodal de  $\partial R$  —sea ésta  $C^-$ ;  $C$  pasa por  $R$  en el punto  $z_0$  y por  $\mathbb{S}^2 \setminus R$  en el punto  $z_1$ , luego por continuidad corta a  $\partial R$  en un punto  $y_0$  y en  $\partial R$  hay dos puntos antipodales que son los extremos de  $d_m(R, \mathbb{S}^2)$ .



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 8

---

### Aplicaciones

---

En este capítulo se van a ver una serie de aplicaciones de las desigualdades geométricas relativas. El primer ejemplo trata sobre las condiciones de compacidad de los operadores inclusión en los espacios de Sobolev. El segundo presenta una desigualdad de la geometría de números que proporciona una cota inferior para el número de puntos con coordenadas enteras (puntos del retículo entero) contenidos en un cuerpo convexo. En el tercero, una desigualdad isoperimétrica relativa juega un papel clave en el análisis de un algoritmo aleatorio que calcula el volumen de un cuerpo convexo. Finalmente se tratan con brevedad otras aplicaciones de las desigualdades geométricas relativas.

#### 8.1. Teoremas de Inmersión para Espacios de Sobolev

A continuación se va a estudiar la relación existente entre las desigualdades isoperimétricas de un dominio  $G \subset \mathbb{R}^2$  y los teoremas de embebimiento para espacios de funciones en  $G$ . Pero antes de esto se van a introducir una serie de notaciones:

Sea  $G$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Se representa por  $L_p(G)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , al espacio de las funciones medibles Lebesgue, definidas en  $G$ , para las cuales:

$$\|f\|_{L_p(G)} = \left( \int_G |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$



Si se llama  $\beta$  al vector de índices:  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , entonces  $|\beta| = \sum_j \beta_j$  y  $D^\beta = D_{x_1}^{\beta_1} \dots D_{x_n}^{\beta_n}$ , donde  $D_{x_i} = \partial/\partial x_i$ . Finalmente,  $\nabla_l = \{D^\beta\}$ , con  $|\beta| = l$  y  $\nabla_1 = \nabla$ .

Se representa por  $L_p^l(G)$  al espacio de las distribuciones con derivaciones de orden  $l$  en el espacio  $L_p(G)$  ([63]), equipado con la seminorma:

$$\|\nabla_l u\|_{L_p^l(G)} = \left( \int_G \left( \sum_{|\beta|=l} |D^\beta u(x)|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Entonces, se puede establecer en términos de propiedades isoperimétricas del dominio  $G$ , una condición de embebimiento para  $L_p^l(G)$  en los espacios  $L_p$ :

**Teorema 8.1.** ([41]) *Si  $G$  es un dominio con  $V(G) < \infty$ , entonces  $L_1^1(G)$  es embebido en  $L_q(G)$ ,  $q \geq 1$ , si y sólo si  $C(G, q) < \infty$ , donde  $C(G, q)$  es la constante isoperimétrica.*

El siguiente teorema proporciona una condición de compacidad para el teorema de embebimiento que se acaba de enunciar:

**Teorema 8.2.** ([41]) *Sea  $G$  un dominio con  $V(G) < \infty$ . Una condición necesaria y suficiente para garantizar la compacidad del embebimiento  $L_1^1(G) \subset L_q(G)$ , donde  $1 \leq q < n/(n-1)$ , es que:*

$$\limsup_{v \rightarrow 0} \frac{A(E)}{P(E, G)^\alpha} = 0,$$

donde el supremo se alcanza para todos los subconjuntos  $E \subset G$ , con frontera diferenciable, tales que  $A(E) \leq v$ .

Se pueden probar resultados similares para el espacio  $BA(G)$  de las funciones con gradiente de variación acotada ([41], [13]).

## 8.2. Desigualdades Isoperimétricas en la Geometría de Números

El campo de la Geometría de números fue creado por Minkowski en 1891 para estudiar problemas numérico-teóricos utilizando herramientas geométricas. La idea

básica era interpretar soluciones enteras de ecuaciones o inecuaciones como puntos del retículo entero ([26], [35], [36]).

Un *retículo* en  $\mathbb{R}^n$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}^n$  con respecto a la suma de vectores. Más precisamente, sea  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$ . El retículo con base  $\mathcal{B}$  es el conjunto  $\mathbb{L} = \{a_1v_1 + \dots + a_nv_n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$ . El *dominio fundamental* de un retículo  $\mathbb{L}$  es el paralelotopo  $P(\mathbb{L}) = \{a_1v_1 + \dots + a_nv_n : 0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1\}$ . La *celda de Dirichlet-Voronoi*  $C(\mathbb{L})$  del origen 0 es el conjunto de todos los puntos de  $\mathbb{R}^n$  que están más próximos a 0 que a cualquier otro punto del retículo. El *retículo entero*  $\mathbb{Z}^n$  es el retículo asociado a la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Una de las nociones principales de este campo es el *contador de puntos del retículo*,  $G_{\mathbb{L}}$  (lattice point enumerator), el cual asocia a cada subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  el número de puntos del retículo  $\mathbb{L}$  contenidos en  $S$ .

El resultado principal, que fue punto de partida de este campo, es el siguiente teorema que probó Minkowski en 1896:

**Teorema 8.3.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo que es simétrico con respecto al origen. Se supone que  $G_{\mathbb{L}}(\text{int}(K)) = 1$ . Entonces:*

$$V(K) \leq 2^n \det \mathbb{L}.$$

Generalmente, eliminando el supuesto  $G_{\mathbb{L}}(\text{int}(K)) = 1$  y la hipótesis de la simetría de  $K$ , se pueden buscar cotas para  $G_{\mathbb{L}}(K) = 1$  en términos de las funcionales geométricas continuas que describen  $K$ , como el volumen  $V(K)$  y el área de superficie  $S(K)$ .

En el caso particular del retículo entero, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 8.4.** *([12]) Sea  $\mathbb{L} = \mathbb{Z}^n$ . Entonces, para cualquier cuerpo convexo  $K$  se tiene que:*

$$V(K) - \frac{1}{2}S(K) \leq G_{\mathbb{Z}^n}(K). \quad (8.1)$$

**Demostración.** La prueba de este teorema está basada esencialmente en la siguiente desigualdad isoperimétrica relativa obtenida por Hadwiger:

Dado el cubo unidad  $Q = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ , la constante isoperimétrica para  $\alpha = 1$  es:

$$C(Q, 1) = \frac{1}{2}$$

Además, ésta es una constante independiente de la dimensión del espacio.

En primer lugar, se ve que la celda de Dirichlet  $C(\mathbb{Z}^n)$  del retículo entero es el cubo unidad  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$  centrado en el origen. Dado  $z_i \in \mathbb{Z}^n$  cualquiera, sea  $C_i$  el cubo obtenido de trasladar  $C(\mathbb{Z}^n)$  mediante una aplicación que lleva el origen al punto  $z_i$  dado. La familia  $\{C_i\}$  forma un cubrimiento del espacio  $\mathbb{R}^n$ , es decir, cualesquiera dos conjuntos  $C_i, C_j$ , con  $i \neq j$ , se cortan por lo menos en puntos pertenecientes a sus fronteras. Se define  $K_i = K \cap C_i$ . Se pueden dividir los conjuntos  $K_i$  en tres subclases:

- 1)  $z_i \in K_i, i = 1, \dots, r;$
- 2)  $z_i$  no pertenece a  $K_i$  y  $V(K_i) > 0, i = r + 1, \dots, s;$
- 3)  $z_i$  no pertenece a  $K_i$  y  $V(K_i) = 0, i > s.$

Entonces,  $G_{\mathbb{Z}^n}(K) = r$  y

$$V(K) = \sum_{i=1}^s V(K_i) \leq rV(C(\mathbb{Z}^n)) + \sum_{i=r+1}^s V(K_i)$$

o equivalentemente,

$$V(K) - \sum_{i=r+1}^s V(K_i) \leq G_{\mathbb{Z}^n}(K).$$

Para todo  $i = r + 1, \dots, s$ , de la convexidad de  $K$  y del supuesto de que  $z_i$  no pertenece a  $K_i$ , se sigue que  $V(K_i) \leq 1/2$ . Entonces, aplicando el resultado de Hadwiger mencionado anteriormente, se tiene que:

$$V(K_i) \leq \frac{1}{2}S_i(K), \quad i = r + 1, \dots, s,$$

donde  $S_i(K)$  representa el área de la frontera de  $K$  la cual está contenida en el interior de  $C_i$ . Por tanto, como  $\sum_{i=r+1}^s S_i(K) \leq S(K)$ , se cumple la desigualdad (8.1).

□

El paso siguiente sería extender la desigualdad (8.1) a retículos arbitrarios, pero este problema presenta algunas dificultades, como que la funcional  $S(K)$  no es invariante equi-afín. La siguiente generalización es una conjetura de J. Wills ([70]). Para un retículo  $\mathbb{L}$  con  $\det \mathbb{L} > 0$ , Wills introdujo los *determinantes mínimos*  $D_i$  de dicho retículo, definidos como:

$$D_i(\mathbb{L}) = \min\{|\det \mathbb{L}_i| : \mathbb{L}_i \text{ es un subretículo } i\text{-dimensional de } \mathbb{L}\},$$

(en particular,  $D_n(\mathbb{L}) = \det \mathbb{L}$ ) y conjeturó la siguiente desigualdad:

**Conjetura 8.5.** ([70]) Sea  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^n$  un retículo de dimensión  $n$ . Entonces, para cualquier cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{R}^n$  se tiene que:

$$\frac{V(K)}{D_n(\mathbb{L})} - \frac{S(K)}{2D_{n-1}(\mathbb{L})} \leq G_{\mathbb{L}}(K). \quad (8.2)$$

En el caso  $n = 2$ , se ha obtenido una prueba de la desigualdad (8.2) ([18],[61]), y también existen resultados parciales para dimensiones superiores ([59], [60], [61], [62]).

Sin embargo, el problema de encontrar cotas superiores aceptables para el contador de puntos del retículo sigue todavía abierto para el retículo entero ([35]).

### 8.3. La Complejidad del Cálculo del Volumen de un Cuerpo Convexo

En este apartado se va a discutir brevemente el problema de calcular el volumen de un cuerpo convexo cuando la dimensión del espacio es relativamente grande. Ésta es una materia básica que se utiliza en numerosos ámbitos, como por ejemplo en programación matemática, integración y extensiones lineales ([23], [39]).

En primer lugar, se ve que las aproximaciones clásicas, usando cálculos, solo parecen manejables para cuerpos con un alto grado de simetría, y la complejidad de las integraciones crece rápidamente con la dimensión. Incluso una aproximación al volumen es intratable si se limita a cálculos determinísticos. Recientemente, Dyer, Frieze y Kannan han propuesto una nueva aproximación basada en un algoritmo aleatorio ([22]). Nótese que no existe ninguna codificación finita estándar de un cuerpo convexo general: Un poliedro puede ser codificado como el conjunto de soluciones de un sistema de inecuaciones lineales, como en programación lineal, y otras subclases como conjuntos de nivel de funciones cóncavas. Una aproximación general “operacional” es asumir que se puede encontrar la información sobre el cuerpo convexo  $K$  preguntándole a un *oráculo*, es decir, un algoritmo que responde SI o NO a ciertas preguntas sobre el cuerpo convexo  $K$ . Los oráculos más utilizados son los *oráculos de pertenencia* (membership oracles), que responden SI o NO a la pregunta  $\{x \in K\}$ , y los *oráculos de separación*, que cuando se les suministra un cuerpo convexo  $K$  y un vector  $y \in \mathbb{Q}^n$ , deciden si  $y \in K$  o encuentran un vector  $d \in \mathbb{Q}^n$  tal que  $dx \subset dy$ ,  $\forall x \in K$ . Los oráculos de separación se pueden obtener a partir de un oráculo de pertenencia en tiempo polinómico.

La ventaja de trabajar con oráculos es que los algoritmos definidos pueden ser aplicados en gran variedad de ocasiones: para cambiar la clase de los cuerpos conve-

xos con los que se está trabajando, es suficiente cambiar el oráculo y no el algoritmo en sí mismo.

Barány y Füredi, ([3]), mejoraron un resultado de Elekes ([25]), demostrando que si el oráculo de separación es el que proporciona el cuerpo convexo, entonces cualquier algoritmo que aproxime el volumen con un factor de  $n^{o(n)}$  tiene que tomar necesariamente tiempo exponencial.

A diferencia de este resultado negativo, Dyer, Frieze y Kannan obtuvieron tiempo polinómico aleatorizando algoritmos para aproximar el volumen de un cuerpo convexo. Actualmente se han obtenido mejoras de este algoritmo ([23], [39]).

Finalmente, se va a describir brevemente este algoritmo sin entrar en detalles. El algoritmo tiene dos parámetros de entrada,  $\epsilon, \delta > 0$ , y calcula una variable aleatoria  $\zeta$  tal que, con probabilidad a lo sumo  $(1-\delta)$ , el volumen de un cuerpo convexo  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  se encuentra entre  $(1-\delta)\zeta$  y  $(1+\delta)\zeta$ . Este algoritmo consiste de dos fases principales: la primera es una operación “de redondeo”, la cual aplica una transformación afín, calculable en tiempo polinómico, a un cuerpo convexo  $K$  de modo que su imagen contiene al cubo unidad  $Q = [0, 1]^n$ . Entonces, se puede construir una sucesión de cuerpos  $K_0 = Q \subset K_1 \subset \dots \subset K_r = K$  de manera que el cociente entre los volúmenes de dos cuerpos consecutivos es como mucho 2. Para estimar el volumen de  $K$  será suficiente pues estimar esos cocientes suficientemente cerca. Esto es posible mediante el método Monte-Carlo, tomando una muestra de los  $K_{i+1}$  y contando con que frecuencia aparece  $K_i$ . El ingrediente clave es un algoritmo que genera un punto aleatorio de una distribución uniforme en un cuerpo convexo a través de una sucesión de paseos aleatorios en el retículo entero. El análisis del algoritmo es un poco complicado. Sin embargo, la clave para proporcionar una convergencia rápida de los paseos aleatorios es una desigualdad isoperimétrica relativa en un cuerpo convexo.

## 8.4. Otras Aplicaciones

Las desigualdades isoperimétricas relativas también tienen gran interés a la hora de obtener cotas en ecuaciones diferenciales elípticas con condiciones mixtas de frontera. Véase por ejemplo ([1], [2]).

También son de gran utilidad en el estudio de la geometría de las pompas de jabón. Por ejemplo, en las pompas de jabón planas es una desigualdad isoperimétrica relativa la que asegura que los arcos de curva que forman la frontera de las pompas dobles y triples son arcos de circunferencia ([31]).

Las desigualdades geométricas relativas concernientes al diámetro relativo y al inradio relativo tienen aplicaciones en la división de parcelas. Para determinados

problemas de división en parcelas se buscan valores altos del diámetro (inradio) de las parcelas y valores mínimos del perímetro relativo; esto es equivalente a buscar acotaciones de las razones:

$$\frac{d_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha} \text{ y } \frac{\rho_m(E, G)}{P(E, G)^\alpha},$$

en las que el exponente  $\alpha \in ]0, 1]$  permite ponderar la importancia de minimizar el perímetro frente a la maximización del diámetro o del inradio relativo.

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Apéndice A

---

# Desigualdades Isoperimétricas Relativas

---

En este apéndice se presentan las desigualdades geométricas relativas conocidas con anterioridad a la realización de esta memoria. No se detallan por tanto las demostraciones sino que se remite a los trabajos originales de los autores y en algún caso se proporciona una indicación de los argumentos principales.

### A.1. Desigualdades Isoperimétricas Relativas en el Plano

El estudio sistemático de las desigualdades isoperimétricas relativas en el plano se debe a Cianchi ([18]).

En general, si se considera un conjunto abierto y acotado  $G \subset \mathbb{R}^2$ , y  $E$  un subconjunto de  $G$  cualquiera, se define una *desigualdad isoperimétrica relativa* en el plano como:

$$\frac{\min[A(E), A(G \setminus E)]}{P(E, G)^\alpha} \leq C(G, \alpha), \quad (\text{A.1})$$

donde  $\alpha$  y  $C(G, \alpha)$  son dos constantes positivas,  $A(E)$  es el área de  $E$  y  $P(E, G)$  es el perímetro relativo de  $E$  con respecto a  $G$ .

La *constante isoperimétrica*  $C_s(G, \alpha)$  es el menor número para el cual (A.1) se cumple, es decir:

$$C_s(G, \alpha) = \sup\{R_\alpha(E) : 0 < A(E) \leq A(G)/2\}$$

donde

$$R_\alpha(E) = \frac{A(E)}{P(E, G)^\alpha}.$$

(suponiendo que  $\min[A(E), A(G \setminus E)] = A(E)$ ).

Obsérvese que (A.1) no se cumple si  $\alpha > 2$ , sea cual sea  $G$ . Por ejemplo, sea  $G$  una bola 2-dimensional. La constante isoperimétrica para este conjunto es un resultado clásico cuando  $\alpha = 2$ :

$$C_s(G, 2) = \frac{\pi}{8}.$$

Ahora bien, si se toma un  $\alpha > 2$  y se calcula:

$$R_\alpha(E) = \frac{\pi r^2}{2\pi r^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha \pi^{\alpha-1} r^{\alpha-2}},$$

donde  $r$  es el radio de  $B$ , entonces haciendo tender  $r$  a 0, el cociente  $R_\alpha(E)$  se hace tan grande como se quiera, y por tanto no se puede obtener una cota superior para él.

Otro hecho evidente es que  $G$  debe ser un conjunto conexo para poder cumplirse una desigualdad isoperimétrica relativa. Si no lo fuese, se podría tomar como  $E$  una componente conexa de  $G$  y se tendría que  $P(E, G) = 0$ , lo cual es imposible ( $P(E, G)$  debe ser estrictamente positivo).

Hay numerosos resultados que bajo ciertos supuestos de  $G$  garantizan la existencia de una desigualdad isoperimétrica relativa. Por ejemplo, si  $G$  es un cono conexo, entonces se cumple una desigualdad isoperimétrica relativa para  $\alpha = 2$ . En particular, también se cumple para  $\alpha = 2$  si la frontera de  $G$  es Lipschitziana. Una generalización de este resultado es el siguiente teorema:

**Teorema A.1.** ([18]) *Sea  $G \subset \mathbb{R}^2$  abierto, acotado y conexo cuya frontera es continua de Hölder con exponente  $\gamma$ . Entonces se cumple una desigualdad isoperimétrica relativa para cualquier exponente  $\alpha \leq 1 + \gamma$ .*

Se dice que una función  $f$ , definida sobre el dominio  $E$  de un espacio euclídeo  $n$ -dimensional, es *continua de Hölder* con exponente  $\gamma$  en el punto  $y \in E$ , donde  $0 < \gamma \leq 1$ , y con coeficiente  $A(y)$  si:

$$|f(x) - f(y)| \leq A(y)|x - y|^\gamma,$$

para todo  $x \in E$  suficientemente cercano a  $y$ .

En el caso en que  $f$  sea una función numérica de una variable real, la continuidad de Hölder con exponente  $\gamma$  se denomina *continuidad de Lipschitz* con exponente  $\gamma$ .

Para la demostración del Teorema A.1 es necesario establecer la siguiente notación:

En primer lugar, si  $G$  es un subconjunto abierto, acotado y conexo del espacio euclídeo, cuya frontera consiste en un número finito de curvas de Jordan disjuntas y  $E$  es un subconjunto cualquiera de  $G$ , se va a representar  $\partial E \cap G$  por  $\partial_G E$ .

Se define:

$$I(G, \alpha) = \limsup_{x \rightarrow 0^+} h_\alpha(\mu),$$

donde  $\alpha$  es un número positivo fijo y

$$h_\alpha(\mu) = \sup\left\{\frac{\mu}{P(D, G)^\alpha} : D \in \Delta, A(D) = \mu\right\},$$

siendo  $\Delta$  la clase de los subconjuntos de  $G$  cuya frontera relativa a  $G$  satisface las dos condiciones siguientes:

1)  $\partial_G E$  es un segmento de recta o un arco circular.

2) Sea  $T$  uno de los extremos de  $\partial_G E$ . Si  $\partial G$  tiene una recta tangente en  $T$ , entonces  $\partial_G E$  es ortogonal a  $\partial G$ ; si  $\partial G$  tiene una semirrecta tangente a la derecha o a la izquierda en  $T$ , entonces el ángulo entre  $\partial_G E$  y tal semirrecta tangente no es inferior a  $\pi/2$ .

También son necesarios los siguientes lemas técnicos:

**Lema A.2.** ([18]) *Sea  $G$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  abierto, acotado y conexo tal que  $\partial G$  es la unión disjunta de un número finito de curvas de Jordan. Sea  $1 < \alpha \leq 2$ . Entonces:*

(a) *Se cumple una desigualdad isoperimétrica relativa con exponente  $\alpha$  si y sólo si  $I(G, \alpha) < +\infty$ .*

(b) *Si  $I(G, \alpha) < +\infty$ , entonces existe un maximizador si y sólo si  $R_\alpha(H) \leq I(G, \alpha)$ , para algún subconjunto  $H$  de  $G$  tal que  $0 < A(H) \leq A(G)/2$ .*

**Lema A.3.** ([18]) *Sea  $G$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  acotado, conexo y abierto. Si se cumple una desigualdad isoperimétrica relativa con exponente  $\alpha$  y se considera un exponente  $\beta < \alpha$ . Entonces:*

(a) *Se cumple también una desigualdad isoperimétrica relativa con exponente  $\beta$  y existe un maximizador relativo a  $\beta$ .*

(b) Si  $E$  es un maximizador relativo a  $\alpha$  tal que  $A(E) = \frac{A(G)}{2}$ , entonces  $E$  es también un maximizador relativo a  $\beta$ .

**Demostración.** (Teorema A.1). El argumento principal que se utiliza a la hora de probar este teorema es construir una sucesión de subconjuntos  $D_n \in \Delta$  tales que el área de dichos conjuntos tienda a 0 y la razón  $R_\alpha(D_n)$  tienda a  $I(G, 1 + \gamma)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . De esta manera se habrá probado que  $I(G, \alpha) < +\infty$  si  $\alpha = 1 + \gamma$ . La generalización a cualquier exponente  $\alpha \leq 1 + \gamma$  es consecuencia del Lema A.3.

□

Una de las cuestiones de mayor relevancia en el estudio de las desigualdades isoperimétricas relativas es la existencia de maximizadores, es decir, ¿bajo qué condiciones es posible garantizar la existencia de un subconjunto  $E \subset G$  tal que  $C_s(G, \alpha) = R_\alpha(E)$ ? Y si tal conjunto existe, ¿cómo se puede caracterizar? A continuación se enuncian unos teoremas en los que se trata a fondo estas cuestiones:

**Teorema A.4.** ([18]) Sea  $G$  un conjunto de  $\mathbb{R}^2$  acotado, conexo y abierto tal que  $\partial G$  es una curva de Jordan. Si se supone que se cumple una desigualdad isoperimétrica relativa para algún  $\alpha \in ]1, 2]$  y que existe un maximizador  $E$ , entonces  $E$  tiene las siguientes propiedades:

(a)  $\partial_G E$  es un segmento de recta o un arco circular.

(b) Sea  $T$  uno de los extremos de  $\partial_G E$ . Si  $\partial G$  tiene una recta tangente en  $T$ , entonces  $\partial_G E$  es ortogonal a  $\partial G$ ; si  $\partial G$  tiene una semirrecta tangente a la derecha o a la izquierda en  $T$ , entonces el ángulo entre  $\partial_G E$  y tal semirrecta tangente no es inferior a  $\pi/2$ .

(c) Si  $A(E) < A(G)/2$  y  $\partial_G E$  no es un segmento de recta, entonces  $\partial_G E$  es cóncava hacia  $E$ .

En particular, el Teorema A.4 dice que si cualquier punto de  $\partial G$  es regular o un vértice, entonces los extremos de  $\partial_G E$  son necesariamente puntos regulares de  $\partial G$ .

En la demostración de este teorema se utiliza el hecho de que  $\partial_G E$  es una variedad analítica formada por arcos circulares, todos con el mismo radio, o por segmentos de recta ([34]). De esta manera, bastará probar que  $\partial_G E$  es conexo para demostrar el apartado (a). Esta demostración se lleva a cabo por reducción al absurdo.

Para probar (b) será suficiente verificar que, si  $T$  es un extremo de  $\partial_G E$  y  $\partial G$  tiene, por ejemplo, una semirrecta tangente  $t$  a la derecha de  $T$ , entonces el ángulo  $\omega$  entre  $\partial_G E$  y  $t$  no es menor que  $\pi/2$ .

También en este caso se argumentará por reducción al absurdo, produciendo una variación en  $E$  que preserve el área y disminuya el perímetro relativo y llegando así a la conclusión de que entonces  $E$  no sería el maximizador, lo cual es absurdo por hipótesis.

Finalmente, la propiedad (c) se demuestra fácilmente suponiendo que  $\partial_G E$  es cóncavo hacia  $G \setminus E$  y llegando a un absurdo.

**Teorema A.5.** ([18]) *Sea  $G$  un conjunto de  $\mathbb{R}^2$  acotado, convexo y abierto. Entonces:*

(a) *Para cualquier exponente  $\alpha \leq 2$  se satisface una desigualdad isoperimétrica relativa.*

(b) *Existe un maximizador convexo  $E$ , independiente de  $\alpha$ , con  $A(E) = \frac{1}{2}A(G)$ .*

(c) *Si  $1 < \alpha \leq 2$  y  $E$  es un maximizador, entonces ni  $E$  ni su complementario son un círculo. Además, o se cumple que  $A(E) = \frac{1}{2}A(G)$  o  $\alpha = 2$  y  $E$  es un sector circular con extremos en  $\partial G$ . En el último caso, existe otro maximizador  $E'$  que es un sector circular con extremos en  $\partial G$ , tiene el mismo vértice que  $E$  y satisface que  $A(E') = \frac{1}{2}A(G)$ .*

La demostración del apartado (a) de este nuevo teorema es consecuencia directa del Teorema A.1.

Para demostrar la segunda parte, aplicando el apartado (b) del Lema A.2 y el (a) del Lema A.3 se demuestra que existe un maximizador para cualquier  $\alpha \leq 2$ .

Por último, para la demostración del apartado (c), utilizando las siguientes desigualdades:

$$C_s(G, \alpha) \geq \frac{A(G)}{2\omega(G)^\alpha} \quad ([24])$$

y

$$2r \leq \omega(G),$$

junto con el Teorema de Pal ([51]) se prueba que  $E$  no es un círculo, y por la parte (c) del Teorema A.1,  $G \setminus E$  tampoco puede ser un círculo.

Para probar la segunda parte de este apartado se aplicará el Teorema A.4.

En el siguiente Teorema se obtiene una expresión explícita de  $C_s(G, \alpha)$  para conjuntos  $G$  centralmente simétricos; también se encuentra el mínimo de  $C_s(G, \alpha)$  para el caso de conjuntos convexos centralmente simétricos que tienen área fija.

**Observación 5.** *Un conjunto centralmente simétrico con respecto al origen  $G$  es aquel que satisface que  $-x \in G$  siempre que  $x \in G$ .*

**Teorema A.6.** ([18]) *Sea  $G$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  abierto y acotado y se supone que  $G$  es convexo y simétrico respecto a 0. Entonces:*

(a) *La siguiente igualdad se cumple para cualquier  $\alpha \leq 2$ :*

$$C_s(G, \alpha) = \frac{A(G)}{2\omega(G)^\alpha}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\omega(G)$  es la anchura mínima de  $G$  ([24], [67]).

Los subconjuntos  $E \subset G$ , tales que  $\partial E \cap G$  es un segmento de recta que pasa por el 0 y cuya longitud es  $\omega(G)$ , son maximizadores para todo  $\alpha \leq 2$ . Además, si  $1 < \alpha \leq 2$ , cualquier maximizador es de este tipo.

(b) *La siguiente desigualdad se cumple para cualquier  $\alpha \leq 2$ :*

$$C_s(G, \alpha) \geq 2^{-(\alpha+1)} \pi^{-\frac{\alpha}{2}} A(G)^{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (\text{A.3})$$

La igualdad se cumple si y sólo si  $G$  es un círculo.

Para demostrar el apartado (a), en primer lugar se prueba que existen subconjuntos  $E$  de  $G$  tales que  $\partial E \cap G$  es un segmento de recta que pasa por el 0 con longitud  $\omega(G)$ . Una vez demostrado, suponiendo que  $1 < \alpha \leq 2$ , se tiene que evidentemente  $A(E) = \frac{1}{2}A(G)$ , y por tanto:

$$C_s(G, \alpha) \geq R_\alpha(E) = \frac{A(G)}{2(\omega(G))^\alpha}.$$

Finalmente, utilizando los Teoremas A.1 y A.4 se demuestra, aplicando reducción al absurdo, que la anterior desigualdad no puede ser estricta. También este mismo argumento demuestra que los conjuntos del tipo de  $E$  son los únicos maximizadores.

Para probar (b) es necesario recurrir al siguiente resultado clásico:

**Proposición A.7.** *Sea  $G$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  acotado, convexo y centralmente simétrico. Entonces  $\omega(G) = 2r(G)$ , donde  $r(G)$  es el inradio de  $G$ .*

De este resultado se sigue que:

$$A(G) \geq \frac{\pi}{4} [\omega(G)]^2. \quad (\text{A.4})$$

Entonces, de (A.2) y (A.4) se deduce (A.3).

Gracias a los resultados vistos hasta ahora, en muchos casos se puede calcular  $C_s(G, \alpha)$  considerando  $R_\alpha$  sólo para una colección muy especial de subconjuntos de  $G$ .

**Teorema A.8.** ([18])

(a) Sea  $T$  un triángulo y sea  $\omega$  el más pequeño de sus ángulos. Entonces:

$$C_s(T, \alpha) = 2^{-1} \omega^{-\frac{\alpha}{2}} A(T)^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

para cualquier  $\alpha \leq 2$ .

Sea  $V$  el vértice de  $T$  relativo a  $\omega$  y sea  $S(r)$  el sector circular que tiene vértice  $V$ , extremos en  $\partial T$  y radio  $r$ . Entonces  $S(\hat{r})$  es un maximizador para cualquier  $\alpha \leq 2$ , donde  $\hat{r}$  es tal que  $A(S(\hat{r})) = \frac{1}{2}A(T)$ . En el caso en que  $1 < \alpha \leq 2$ , los únicos maximizadores son  $S(\hat{r})$  y  $T \setminus S(\hat{r})$ ; en el caso en que  $\alpha = 2$ ,  $S(r)$  es un maximizador para cualquier  $r \in ]0, \hat{r}]$  (fig. A.1).

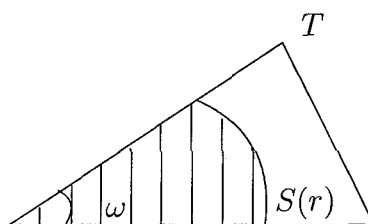


FIGURA A.1

(b) Sea  $R(a, b)$  el rectángulo cuyos lados tienen longitudes  $a$  y  $b$ ,  $a \geq b$ . Entonces:

$$C_s(R(a, b), \alpha) = \frac{ab^{1-\alpha}}{2},$$

para cualquier  $\alpha \leq 2$ .

Cada uno de los dos semi-rectángulos, cuya frontera relativa a  $R(a, b)$  es un segmento paralelo al lado más corto es un maximizador para todo  $\alpha \leq 2$ . En el caso en que  $1 < \alpha \leq 2$ , no existe otro maximizador (Fig. A.2).



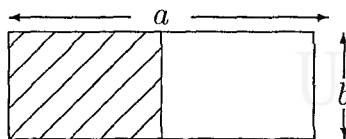


FIGURA A.2

(c) Sea  $P(k, r)$  el polígono regular con  $k$  lados y radio  $r$ .

- Si  $k$  es un entero par, entonces:

$$C_s(P(k, r), \alpha) = \frac{\frac{k}{4} r^2 \operatorname{sen} 2\theta}{(2r \cos \theta)^\alpha},$$

para  $\alpha \leq 2$  y  $\theta = \frac{\pi}{k}$ .

Los semi-polígonos cuya frontera relativa a  $P(k, r)$  es un segmento ortogonal a lados opuestos, son maximizadores para cualquier  $\alpha \leq 2$ . Si  $1 < \alpha \leq 2$ , estos son los únicos maximizadores (Fig. A.3).

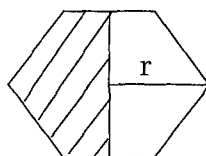


FIGURA A.3

- Si  $k$  es un entero impar, entonces:

$$C_s(P(k, r), \alpha) = \frac{r^{2-\alpha} \left[ \frac{k}{4} \operatorname{sen} 2\theta \right]}{\left[ \frac{4 \cos^2(3\theta/2) \cotg(\theta/2) + 2 \operatorname{sen} 3\theta + 3 \operatorname{sen} 2\theta}{2\theta} \right]^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

En este caso,  $\alpha \leq 2$  y  $\theta = \frac{\pi}{k}$ .

Sea  $M$  un subconjunto cualquiera de  $P(k, r)$  tal que:

(i)  $A(M) = \frac{1}{2} A(P(k, r))$ ;

(ii)  $\partial M \cap P(k, r)$  es un arco circular perpendicular a  $\partial P(k, r)$ ;

(iii) los extremos de  $\partial M \cap P(k, r)$  pertenecen a dos lados de  $P(k, r)$  separados por otros  $(k-3)/2$  lados.

Entonces,  $M$  es un maximizador para todo  $\alpha \leq 2$ . Si  $k > 3$ , los subconjuntos  $M$  descritos son los únicos maximizadores (Fig. A.4).

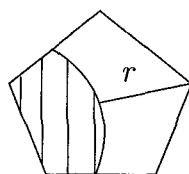


FIGURA A.4

(d) Sea  $E(a, b)$  la elipse cuyos ejes tienen longitud  $a$  y  $b$ ,  $a \geq b$ . Entonces:

$$C_s(E(a, b), \alpha) = 2^{-1} \pi a b^{1-\alpha},$$

para cualquier  $\alpha \leq 2$ .

Cada una de las dos semi-elipses, cuya frontera relativa a  $E(a, b)$  es el lado más corto, es un maximizador para todo  $\alpha \leq 2$ . Si  $1 < \alpha \leq 2$ , no existe otro maximizador (Fig. A.5).

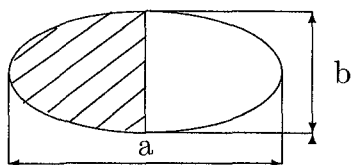


FIGURA A.5

En la parte (b) del Teorema A.6 se ha demostrado que el círculo minimiza  $C_s(G, \alpha)$  en la clase de los conjuntos convexos y centralmente simétricos que tienen área fija. El siguiente teorema trata el problema de maximizar la constante isoperimétrica relativa en una clase de conjuntos diferente.

**Teorema A.9.** ([18]) Sea  $\alpha$  un número fijo en  $]1, 2]$ . Sean  $r_0$  y  $R_0$  dos números positivos tales que  $r_0 < R_0$ ; sea  $H(r_0, R_0)$  la clase de los conjuntos convexos y acotados que contienen un círculo de radio  $r_0$  y están contenidos en un círculo de radio  $R_0$ .

Entonces  $C_s(\cdot, \alpha)$  alcanza un máximo en  $H(r_0, R_0)$ . El maximizador es único (salvo isometrías); se denota por  $S(r_0, R_0, \theta_0)$  a dicho maximizador, donde  $\theta_0$  es la única raíz de la ecuación (A.5), la cual se encuentra entre 0 y  $\arcsen \frac{r_0}{2R_0 - r_0}$ .

$$\frac{1}{2\alpha} [(\operatorname{tg} \theta - \theta) \operatorname{sen}^2 \theta + \theta \operatorname{tg}^2 \theta (1 + \cos^2 \eta)] (\eta + \operatorname{sen} \eta \cos \eta) -$$

$$-\frac{\theta}{\alpha} \eta \operatorname{sen} \eta (1 - K_0) \operatorname{sen} \theta + \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) \theta \operatorname{sen}^2 \eta \cos \eta (1 - K_0) \operatorname{sen} \theta + \quad (\text{A.5})$$

$$+ 2\theta^2 \operatorname{sen} \theta (1 - K_0) \cos \eta = 0,$$

donde  $K_0 = \frac{r_0}{R_0}$  y  $\eta = \arcsen\left[\frac{r}{R} - \left(1 - \frac{r}{R}\right) \operatorname{sen} \theta\right]$ .

**Observación 6.** El conjunto  $S(r, R, \theta)$  está definido, para  $0 < r < R$  y  $0 < \theta < \arcsen\frac{r}{2R-r}$ , como sigue:

Se considera el círculo  $B(0, R)$  y un punto  $P \in B(0, R)$  tal que  $B(0, R)$  y  $B(P, r)$  son tangentes. Entonces  $S(r, R, \theta)$  es el subconjunto de  $B(0, R)$  acotado por  $\partial B(0, R)$  y las dos rectas tangentes a  $B(0, P)$ ,  $t_1$  y  $t_2$ , que se encuentran en la recta que pasa por  $0$  y  $P$ , y tales que el ángulo entre  $t_1$  y  $t_2$  es  $2\theta$  (Fig. A.6). Obviamente,  $S(r, R, \theta) \in H(r_0, R_0)$  si  $r_0 \leq r \leq R \leq R_0$ . Se observa que  $H(r_0, R_0)$  puede ser definido de forma equivalente como la clase de los conjuntos convexos y acotados cuyo inradio no es menor que  $r_0$  y cuyo circunradio no es mayor que  $R_0$ . Entonces, como  $r_0$  y  $R_0$  son el inradio y el circunradio de  $S(r_0, R_0, \theta_0)$  respectivamente, tal conjunto maximiza  $C_s(\cdot, \alpha)$  en la subclase de los conjuntos convexos y acotados cuyo inradio y circunradio son exactamente  $r_0$  y  $R_0$ .

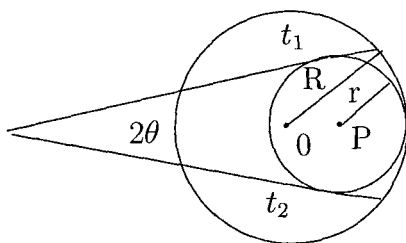


FIGURA A.6

Para demostrar el Teorema A.9 es necesario conocer una propiedad de continuidad de  $C_s(\cdot, \alpha)$ :

Se considera el espacio:

$$\Theta = \{G \in \mathbb{R}^2 : G \text{ es abierto, convexo y acotado}\},$$

equipado con la distancia estándar  $\Delta$  definida por:

$$\Delta(G_1, G_2) = \inf\{\delta > 0 : d(x, G_1) < \delta, \forall x \in G_2\} + \inf\{\delta > 0 : d(x, G_2) < \delta, \forall x \in G_1\}$$

([Eg]).

**Lema A.10.** ([18])

(a) El funcional

$$C_s(\cdot, \alpha) : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

es continuo para cualquier  $\alpha \leq 2$  fijo.

(b) Sea  $\{G_n\}$  una sucesión en  $\Theta$  que converge a  $G \in \Theta$  y sea  $E_n$  un maximizador convexo relativo a  $G_n$  tal que  $A(E_n) = \frac{1}{2}A(G_n)$ . Entonces existe una subsucesión  $\{E_{\sigma(n)}\}$  que converge a un maximizador convexo relativo a  $G$ .

Además, para la prueba también es necesario hacer uso de los siguientes lemas técnicos:

**Lema A.11.** ([18]) Sea  $1 < \alpha \leq 2$ . Sea  $G$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  acotado y convexo y sea  $E$  un maximizador convexo. Se supone que  $G'$  es otro conjunto convexo tal que  $G \neq G'$  y los extremos de  $\partial E \cap G$  pertenecen a  $\partial G \cap \partial G'$ . Entonces:

(a)  $C_s(G, \alpha) \leq C_s(G', \alpha)$ .

Se denota por  $E'$  el subconjunto convexo de  $G'$  el cual contiene a  $E$  y está acotado por  $\partial E \cap G$  y  $\partial G'$  (Fig. A.7).

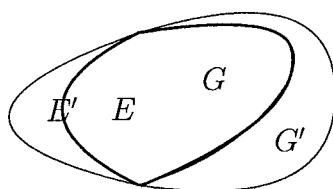


FIGURA A.7

Si se define el subconjunto:

$$F = \begin{cases} E' & A(E') \leq \frac{1}{2}A(G') \\ G' \setminus E' & A(E') > \frac{1}{2}A(G') \end{cases}$$

Entonces:

(b)  $C_s(G, \alpha) < C_s(G', \alpha)$  en cualquiera de los dos casos siguientes:

(i)  $1 < \alpha \leq 2$ ;

(ii)  $\alpha = 2$  y no pueden ocurrir las siguientes situaciones a la vez:

- $E'$  es un sector circular con extremos en  $G$ ;
- $F$  es un sector circular con extremos en  $\partial G'$ .

**Lema A.12.** ([18]) Sea  $1 < \alpha \leq 2$  y sea

$$f_\alpha(r, R, \theta) = \frac{R^{2-\alpha}(\eta + \operatorname{sen}\eta \cos \eta)}{2^\alpha(\theta \operatorname{sen}^2 \eta \cotg \theta + \theta^2)^{\frac{\alpha}{2}}},$$

donde

$$\eta = \arcsen\left[\frac{r}{R} - \left(1 - \frac{r}{R}\right)\operatorname{sen}\theta\right].$$

Entonces el máximo valor de  $f_\alpha$  en el dominio

$$D(r_0, R_0) = \left\{(r, R, \theta) : r_0 \leq r \leq R \leq R_0, 0 \leq \theta \leq \arcsen\frac{r}{2R-r}\right\}$$

se alcanza en  $(r_0, R_0, \theta_0)$ . Aquí  $\theta_0$  es la única raíz de la ecuación (A.5). Además, no existen máximos locales para  $f_\alpha$  en  $D(r_0, R_0)$  distintos de  $(r_0, R_0, \theta_0)$ .

**Observación 7.** Se considera (si existe) el subconjunto convexo  $E(r, R, \theta)$  de  $S(r, R, \theta)$  acotado por  $\partial S(r, R, \theta)$  y por un arco circular o un segmento, perpendicular a  $t_1$  y  $t_2$  y tal que  $A(E(r, R, \theta)) = \frac{1}{2}A(S(r, R, \theta))$  (Fig. A.8).

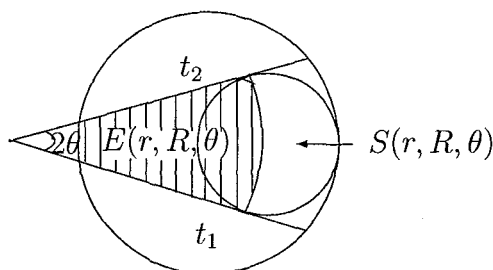


FIGURA A.8

Entonces  $R_\alpha(E(r, R, \theta)) = f_\alpha(r, R, \theta)$  y en particular,

$$C_s(S(r, R, \theta), \alpha) \geq f_\alpha(r, R, \theta).$$

**Demostración.** (Teorema A.9). Aplicando estos lemas junto con el Teorema de Selección de Blaschke y la continuidad del inradio y del circunradio ([24]), se demuestra que  $C_s(\cdot, \alpha)$  alcanza un máximo en  $\hat{H}(r_0, R_0)$ .

Finalmente, considerando  $M$  un maximizador y procediendo por pasos, se demuestra que  $M = S(r_0, R_0, \theta_0)$ .

Los pasos que se prueban son los siguientes:

- 1) Si  $\alpha = 2$  y  $E$  es un maximizador relativo a  $M$ , entonces  $E$  no puede ser un sector circular con extremos en  $\partial M$ .
- 2)  $\partial M$  está formada por dos arcos de  $c(M)$  y dos segmentos de recta con extremos en  $\partial c(M)$  ( $c(M)$  es el circunradio de  $M$ ).
- 3) Se prueba que  $M = S(r_0, R_0, \theta_0)$ .

□

## A.2. Desigualdades Isoperimétricas Relativas en $\mathbb{R}^n$

Se presentan a continuación algunas desigualdades isoperimétricas relativas en dimensiones arbitrarias. J. Bokowski and E. Sperner [9], [10] demostraron utilizando diferentes métodos las siguientes desigualdades para un cuerpo convexo  $K \in \mathbb{R}^n$ :

$$V(E)V(K \setminus E) \leq \frac{(1 - 2^{-n})(n - 1)}{n(n + 1)} \kappa_{n-1} D^{n+1} P(E, K), \quad (\text{A.6})$$

$$V(E)V(K \setminus E) \leq \frac{(1 - 2^{-n})}{2(n + 1)} DV(G - G)P(E, K), \quad (\text{A.7})$$

donde  $D$  denota el diámetro de  $K$  y  $K - K := \{x - y \in \mathbb{R}^n : x, y \in K\}$  es el cuerpo diferencia de  $K$ .

L. A. Santaló [56] proporcionó una nueva prueba para (A.6) junto con una extensión de estos resultados a los espacios elípticos e hiperbólicos.

También se han resuelto estas desigualdades en el caso en el que  $E$  se obtiene mediante cortes con hiperplanos, L.M. Gysin [32] y Q.J. Mao [42] proporcionaron mejoras en estos resultados. Además, Gysin presentó una nueva prueba de (A.7) basada en fórmulas de geometría integral.

De las desigualdades (A.6) y (A.7) se derivan desigualdades isoperimétricas relativas para  $\alpha = 1$ , ya que:

$$\frac{\min\{V(E), V(K \setminus E)\}}{2} \leq \frac{V(E)V(K \setminus E)}{V(K)}.$$

La mejor cota posible en términos del diámetro la proporcionaron M.Dyer y A. Frieze [23]:

$$\frac{\min\{V(E), V(K \setminus E)\}}{P(E, K)} \leq \frac{D}{2}.$$

La igualdad en este caso se alcanzará cuando  $K$  sea un cilindro largo y estrecho y  $E$  una de las dos medias secciones ortogonales a la base de  $K$  (fig. A.9).

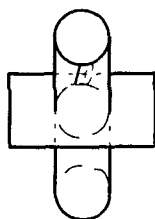


FIGURA A.9

Sin embargo, el diámetro probablemente no sea el mejor parámetro a utilizar, como demostraron R.Kannan, L. Lovász y M. Simonovits en [38]. Ellos propusieron una nueva constante basada en la media de las distancias de los puntos de  $K$  a su centro de gravedad, y obtuvieron la siguiente desigualdad:

$$V(E)V(K \setminus E) \leq \frac{1}{\ln 2} \left( \int |x - c| dx \right) P(E, K), \quad (\text{A.8})$$

donde  $c$  es el centro de gravedad de  $K$ .

C. Peri [53] a partir de los resultados anteriores, (A.8), obtuvo la correspondiente desigualdad isoperimétrica relativa:

$$\frac{\min\{V(E)V(K \setminus E)\}}{P(E, K)} \leq \frac{2}{\ln 2} \left( \frac{1}{V(K)} \int |x - c| dx \right). \quad (\text{A.9})$$

Si se denota por  $M_1(K) = (\int |x - c|)/V(K)$ , se observa que este valor puede ser mucho más pequeño que el diámetro  $D$ . Por ejemplo, en el caso de un simplex regular  $S$  en  $\mathbb{R}^n$  de diámetro  $D$ ,  $M_1(S) = D/\sqrt{n}$ .

En la prueba del resultado anterior se aplica un lema para funciones log-cóncavas el cual reduce desigualdades integrales de dimensiones superiores a dimensión uno.

Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  se dice que es *logarítmicamente cóncava* (log-cóncava) si la función  $\ln f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty)$  es cóncava. En particular, la función indicador de un cuerpo convexo es log-cóncava.

Si el cuerpo convexo  $K$  se divide en dos partes  $E$  y  $K \setminus E$  mediante un hiperplano ortogonal al vector unidad  $u$ , entonces se obtiene la siguiente desigualdad [53]:

$$\frac{V(E)V(K \setminus E)}{P(E, K)} \leq \frac{1}{\ln 2} \left( \min_{y \in \mathbb{R}^n} \int |\langle u, x - y \rangle| dx \right). \quad (\text{A.10})$$

Además, si  $K$  es centralmente simétrico, entonces:

$$\frac{V(E)V(K \setminus E)}{P(E, K)} \leq \int_K |\langle u, x \rangle| dx.$$

La igualdad en esta última desigualdad se alcanza cuando  $K$  es un cilindro circular y  $E$  es un cilindro, con  $V(E) = V(K)/2$  determinado al cortar  $K$  por un hiperplano ortogonal a las generatrices de  $K$  (fig. A.9).

C.Peri [53] también estableció una interpretación geométrica para la constante  $\int_K |\langle u, x \rangle| dx$ :



Si se supone que el centro de gravedad de  $K$  es el origen, entonces la función  $h_{\Gamma K} : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$h_{\Gamma K} = \frac{1}{V(K)} \int_K |\langle u, x \rangle| dx$$

es la función soporte del cuerpo centroide  $\Gamma K$  de  $K$ .

El *cuerpo centroide*  $\Gamma K$  de un cuerpo convexo  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  con medida de Lebesgue  $n$ -dimensional  $\lambda_n(K) > 0$  es el cuerpo centralmente simétrico con respecto al origen tal que:

$$h_{\Gamma K} = \frac{1}{\lambda_n(K)} \int_K |\langle u, x \rangle| dx.$$

Cuando  $K$  es centralmente simétrico,  $\partial \Gamma K$  es el lugar geométrico de los centroides de las partes de  $K$  obtenidas dividiendo  $K$  por hiperplanos a través del origen.

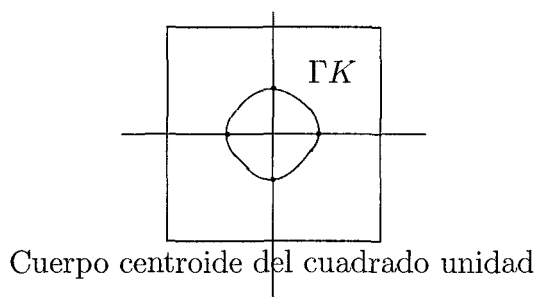


FIGURA A.10

Entonces, la desigualdad (A.8) implica que, para cualquier corte por hiperplanos:

$$\frac{\min\{V(E)V(K \setminus E)\}}{P(E, K)} \leq \frac{1}{\ln 2} D_{\Gamma K}, \quad (\text{A.11})$$

donde  $D_{\Gamma K}$  es el diámetro de  $\Gamma K$ .

La constante  $1/\ln 2$  puede ser mejorada si  $K$  es centralmente simétrico.

La siguiente conjetura establecida por C.Peri en [53] generaliza esta desigualdad como sigue:

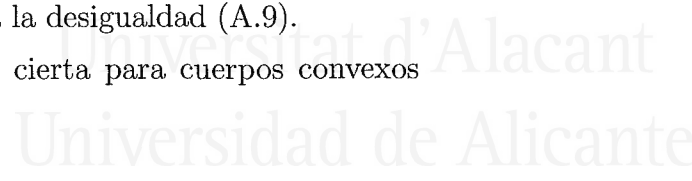
**Conjetura A.13.** *Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$  con su centro de gravedad en el origen y sea  $E$  un subconjunto medible de  $G$  con frontera medible. Entonces:*

$$\frac{\min\{V(E)V(K \setminus E)\}}{P(E, K)} \leq \frac{1}{\ln 2} D_{\Gamma K},$$

y la constante  $1/\ln 2$  puede ser mejorada cuando  $K$  es centralmente simétrico con respecto al origen.

Esta desigualdad, en el caso de ser demostrada, podría extender el resultado de Hadwiger a cuerpos convexos arbitrarios y mejoraría la desigualdad (A.9).

Además, está demostrado que esta conjetura es cierta para cuerpos convexos centralmente simétricos en el plano.





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Bibliografía

- [1] Bandle, C.: Extremaleigenschaften von Kreissektoren und Halbkugeln, *Comment. Math. Helv.* **46** (1971), 356–80.
- [2] Bandle, C.: *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman Publ., London 1980)
- [3] Bárány, I. and Füredi, Z.: Computing the volume is difficult, *Proc. 18th Ann. ACM Symposium on Theory of Computing* (1986), 442–447.
- [4] Barbier, E.: Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert, *J.Math. pures appl.* **2** Vol. 5 (1860), 273–286.
- [5] Bernstein, F.: Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene, *Math. Ann.* **60**(1905), 117–136.
- [6] Bezdek, A. and Bezdek, K.: On a discrete Dido-type questions, *Elem. Math.* **44**(1989), 92–100.
- [7] Bezdek, K.: On a Dido-type question, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **29**(1986), 241–244.
- [8] Bieberbach, A.: Über eine Extremaleigenschaft des Kreises, *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig* **24** (1915), 247–250.
- [9] Bokowski, J.: Ungleichungen für den Inhalt von Trennflächen, *Arch. Math.* **34** (1980), 84–9.
- [10] Bokowski, J. and Sperner, E.: Zerlegung konvexer Körper durch minimale Trennflächen, *J. Reine Angew. Math.* **311/312** (1979), 80–100.
- [11] Bonnesen, T. and Fenchel, W.: *Theorie der konvexen Körper* Springer, Berlin 1934, 1974; Chelsea, New York 1948.
- [12] Bokowski, J., Hadwiger, H. and Wills, J.M.: Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktanzahl konvexer Körper im n-dimensionalen Raum, *Math. Z.* **127** (1972), 363–364.

- [13] Burago, D. and Zalgaller, V.A., *Geometric inequalities*, Springer, Berlin, 1988.
- [14] Cerdán, A., Schnell, U. and Segura Gomis, S.: On relative geometric inequalities, *Math. Ineq. and Appl.* **Vol. 7 Num. 1**, (2004), 135–148
- [15] Cerdán, A., Miori, C., and Segura Gomis, S.: On relative isodiametric inequalities, *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, **Vol. 45 Num. 2**, (2004), 595–605.
- [16] Cerdán, A.: Comparing the relative volume with the relative inradius and the relative width, *Preprint* (2004).
- [17] Cerdán, A., Miori, C., and Segura Gomis, S.: Fencing problems on compact convex surfaces, *Preprint* (2005).
- [18] Cianchi, A.: On relative isoperimetric inequalities in the plane, *Boll. Unione Mat. Italiana* **7** 3-B (1989), 289–325.
- [19] Cotton, A., Freeman, D., Gnepp, A., Ng, T. and Yoder, C.: The isoperimetric problem on some singular surfaces, *Preprint* (2003).
- [20] Croft, H. T., Falconer, K. J. and Guy, R. K.: *Unsolved problems in Geometry*, Springer, Berlin, 1991.
- [21] Chakerian, G. D. and Groemer, H.: Convex bodies of constant width, in: *Convexity and its applications*, 49–96, eds P. M. Gruber and J. M. Wills, Birkhäuser, Basel, 1983.
- [22] Dyer, M., Frieze, A. and Kannan, R.: A random polynomial time algorithm for approximating the volume of convex bodies, *Proc. 21st Ann. ACM Symposium on Theory of Computing* (1989) 375–381.
- [23] Dyer, M. and Frieze, A.: Computing the volume of convex bodies: a case where randomness probably helps, in *Probabilistic Combinatorics and Its Applications* B. Bollobás Ed., Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, 123-170.
- [24] Eggleston, H. G.: *Convexity*, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- [25] Elekes, G.: A geometric inequality and the complexity of computing volume, *Discrete Comput. Geom.* **1** (1986) 289–292.
- [26] Erdős, P., Gruber, P.M. and Hammer, J.: *Lattice points*, Longman, Essex, 1989.

- [27] Federer, H. and Fleming, W.H.: Normal and integral currents, *Ann. of Math.* **72** (1960) 458–520.
- [28] Fejes Tóth, L.: Über das Didoche Problem, *Elem. Math.* **23** (1968) 97–101.
- [29] Fejes Tóth, L.: On the Dido problem of three discs, *Mat. Lapok* **19** (1968) 9–12.
- [30] Fejes Tóth, L. and Heppes, A.: Regions enclosed by convex domains, *Studia Sci. Math. Hungar* **1** (1966) 413–417.
- [31] Foisy, J., Alfaro, M., Brock, J., Hodges, N. and Zimba, J.: The standard double soap bubble in  $\mathbb{R}^2$  uniquely minimizes perimeter, *Pacific Journal of Mathematics* Vol. 159 **1** (1993), 47–59.
- [32] Gysin, L.M.: Inequalities for the product of the volumes of a partition determined in a convex body by a surface, *Rend. circ. Math. Palermo II* **35** (1986), 420–8.
- [33] Gardner, R.: *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [34] González, E., Massari, U., and Tamanini, I.: Minimal boundaries enclosing a given volume, *Manuscripta Math.*, **34** (1981), 381–395.
- [35] Gritzmann, P. and Wills, J.M.: Lattice points, in *Handbook of convex Geometry*, Peter M. Gruber and Jörg M. Wills, Eds., North-Holland, Amsterdam, 1993, 765–797.
- [36] Gruber, P.M. and Lekkerkerker, C.G.: *Geometry of number*, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [37] Hadwiger, H.: Gitterperiodische Punktmengen und Isoperimetrie, *Monatsh Math.* **76** (1972) 420–8
- [38] Kannan, R., Lovász, L. and Simonovits, M.: Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma, *Discrete comp. Geom.* **13** (1995), 541–59.
- [39] Lovász, L. and Simonovits, M.: Random walks in a convex body and an improved volume algorithm, *Random Structures and Algorithms* **4** (1993) 359–412.
- [40] Martini, H.: Cross-sectional measures, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* **63**, 269–310. Intuitive geometry (Szeged, 1991), ed. by K. Börözkly and Fejes Tóth. North-Holland, Amsterdam, 1994.
- [41] Maz'ja, V.G.: *Sobolev spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.



- [42] Mao, Q.J.: On an inequality related to the splitting of a convex body by a plane, *Geometriae Dedicata* **47** (1993), 237–9.
- [43] Markvorsen, S.: On curvature and shape: a comparison geometric survey, *Exposition. Math.* **13** (5) (1995), 417–432.
- [44] Miori, C., Peri, C. and Segura Gomis, S.: On fencing problems, *Quaderno 23, Università Cattolica del Sacro Cuore di Brescia*, 2003.
- [45] Miori, C., Peri, C. and Segura Gomis, S.: On fencing problems, *J. Math. Anal. Appl.* **300**, (2004), 464–476.
- [46] Montesinos Amilibia, A. and Segura Gomis, S.: A Dido problem for domains in  $\mathbb{R}^2$  with a given inradius, *Geometriae Dedicata* **34** (1990), 113–43
- [47] Montesinos Amilibia, A. and Segura Gomis, S.: Dido's problem in the plane for domains with fixed diameter, *Geometriae Dedicata* **53** (1994), 133–43
- [48] Morgan, F.: In polytopes, small balls about some vertex minimize perimeter, *Preprint* (2004)
- [49] Osserman, R.: The isoperimetric inequality, *Bulletin American Mathematical Society* **6** (1978), 1182–1238.
- [50] Osserman, R.: Bonnesen-style isoperimetric inequalities, *Amer. Math. Monthly* **86** (1979), 1–29.
- [51] Pál, J.: Ein minimumproblem für Ovale, *Math. Ann.* **83**, (1921), 311–319.
- [52] Peri, C.: An isoperimetric inequality for hyperplane sections of a convex body, *Geometriae Dedicata*, **76** (1999), 189–96.
- [53] Peri, C.: On relative isoperimetric inequalities, *Conferenze del Seminario di Matematica dell'Università di Bari*, **279**.
- [54] Rosenthal, A. and Szasz, O.: Eine Extremal Eigenschaft der Kurven Konstanter Breite, *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **25** (1917), 278–282.
- [55] Santaló, L.: Sobre los sistemas completos de desigualdades entre tres elementos de una figura convexa plana, *Math. Notae* **17** (1961), 82–104.
- [56] Santaló, L.: An inequality between the parts into which a convex body is divided by a plane section, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **32** (1983), 124–30.
- [57] Schmidt, R.: Über das Isoperimetrische Problem im Raum von  $n$  Dimensionen, *Math. Z* **44** (1939), 689–788.

- [58] Schneider, R.: *Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory*, Cambridge University Press, 1993.
- [59] Schnell, U.: Minimal determinants and lattice inequalities, *Bull. London Math.*, **24** (1992), 606–612.
- [60] Schnell, U.: Lattice inequalities for convex bodies and arbitrary lattices, *Monatsh. Math.*, **116** (1993), 331–337.
- [61] Schnell, U. and Wills, J.M.: Two isoperimetric inequalities with lattice constraints, *Monatsh. Math.*, **112** (1991), 227–233.
- [62] Schnell, U. and Wills, J.M.: On successive minima and intrinsic volumes, *Mathematika*, **40** (1993), 144–147.
- [63] Schwartz, L.: *Théorie des distributions*, Herman, Paris, 1966.
- [64] Siegel, A.: Some Dido-type inequalities, *Elem. Math.*, **56** (2001) 17–20.
- [65] Siegel, A.: A Dido Problem as modernized by Fejes-Toth, *Discrete Comput. Geom.*, **27** (2002) 227–238.
- [66] Talenti, L.: The standard isoperimetric theorem, *Handbook of Convex Geometry*, Ed. by P.M. Gruber and J.M. Wills, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [67] Valentine, F.: *Convex sets*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [68] Wills, J.M.: Kugellagerungen und Konvexgeometrie, *Jahresber. Deutsch. Math-Verein*, **92** (1990), 21–46.
- [69] Wills, J.M.: Bounds for the lattice point enumerator, *Geometriae Dedicata*, **40** (1991), 237–44.
- [70] Wills, J.M.: Kugellagerungen und Konvexgeometrie, *Jahresber. Deutsch. Math-Verein*, **92** (1990), 21–46.