


XII Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas

Barcelona

26, 27 y 28 de julio de 2004

Ponencias

12CUI  T
2004
XII Congreso Universitario de Innovación Educativa
en las Enseñanzas Técnicas



EL

Centro de Estudios e Investigación en Docencia
Técnica

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA





© CETIB-Canetti Fotografia

Este libro de resúmenes se terminó de imprimir en Barcelona, en junio de 2004.
Las fotografías que aparecen han sido cedidas por el CETIB.
Todos los derechos reservados.

ISBN: 84-688-6911-2 (del CDROM completo)

© **Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Barcelona (EUETIB)**

XII Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas

<http://www.upc.es/euetib/xiicuiet>

xiicuiet.euetib@upc.es

ESTUDIO DEL PÉNDULO FÍSICO PARA INTRODUCIR MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

Antonio Hernández, Cristian Neipp, Augusto Beléndez

Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal.

Universidad de Alicante, Apartado 99, E-03080 Alicante

cristian@dfists.ua.es

Resumen

La dinámica del péndulo simple para pequeñas amplitudes es, quizás, uno de los ejemplos más utilizados por educadores de asignaturas de física en titulaciones técnicas para describir el movimiento armónico simple. Tanto la parte experimental como la parte teórica son accesibles para los estudiantes en un primer año de carrera universitaria. Sin embargo, el estudio de grandes amplitudes de oscilación es un tema de una mayor complejidad y que, por tanto, no suele aparecer en los temarios de las asignaturas de física impartidas en titulaciones técnicas. A pesar de ello, el estudio del péndulo físico y en particular la resolución de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del sistema, proporcionan al estudiante una visión global de un conjunto de técnicas numéricas para resolver problemas lineales (pequeñas amplitudes de oscilación) y no lineales (grandes oscilaciones).

Puesto que el conocimiento de diferentes métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales, forma parte del bagaje matemático necesario para diversos campos de las ciencias y la ingeniería, creemos que el estudio de un sistema relativamente sencillo, como el péndulo físico, es de interés para aquellos alumnos que pretendan ganar destreza en estas técnicas. En este trabajo se resolverán las ecuaciones diferenciales no lineales que describen las oscilaciones del péndulo de diferentes maneras. Así por ejemplo, se utilizarán algoritmos numéricos como el método de Euler, el método de Heun o un algoritmo de Runge-Kutta, se propondrán soluciones aproximadas utilizando el método del balance de armónicos y finalmente se compararán los diferentes métodos de resolución con la solución analítica, para comparar las diferentes aproximaciones.

1.- INTRODUCCIÓN

El péndulo plano es uno de los sistemas físicos más tratados en la literatura. Su estudio se puede abordar desde diferentes puntos de vista y con diferentes niveles de dificultad. El movimiento del péndulo se puede entender como el movimiento de una partícula de masa m sometida a la acción de la fuerza gravitatoria estando el movimiento limitado por una varilla inextensible y sin

peso. La componente de la fuerza gravitatoria perpendicular a la varilla y, por tanto, responsable del movimiento es $F(\theta) = -mg \operatorname{sen}\theta$.

La ecuación del movimiento del péndulo que describe la variación del ángulo en función del tiempo se puede obtener aplicando la primera ley de Newton y se puede expresar según:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta = 0 \quad (1)$$

Donde l es la longitud del péndulo y g es la constante de gravedad. Si se define la frecuencia ω_0 a través de la relación:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad (2)$$

La ecuación que describe el movimiento del péndulo se puede expresar según:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \operatorname{sen}\theta = 0 \quad (3)$$

Cuando los ángulos son pequeños se puede hacer la siguiente aproximación:

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta \quad (4)$$

De forma que la ecuación (3) queda:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (5)$$

Cuya solución es una función armónica:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (6)$$

Donde θ_0 es la amplitud de las oscilaciones y δ es una constante de integración que viene determinada por las condiciones iniciales.

Tanto la ecuación (5) como la solución (6) se suelen presentar a los alumnos de primer año de carrera para explicar un ejemplo de movimiento armónico simple. En este trabajo pretendemos demostrar el interés de la resolución de la ecuación general (3) para la explicación de técnicas numéricas de integración de ecuaciones diferenciales, así como de métodos analíticos. De esta forma se pueden comparar los diferentes métodos utilizados para estudiar la precisión de los mismos.

2.- SOLUCIÓN EXACTA PARA EL PERIODO DE UN PÉNDULO PLANO

Antes de presentar los diferentes métodos que se estudiarán en este trabajo para resolver la ecuación diferencial (3) es necesario indicar la solución exacta para el periodo de las oscilaciones del péndulo plano.

La solución del periodo del péndulo plano se puede expresar en términos de una integral elíptica de primera especie:

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{l}{g_0}} \int_0^1 [(1-z^2)(1-k^2z^2)]^{-1/2} dz \quad (7)$$

Donde se han definido las siguientes variables:

$$z = \frac{\text{sen}(\theta/2)}{\text{sen}(\theta_0/2)} \quad (8)$$

$$k = \text{sen}(\theta_0/2) \quad (9)$$

Siendo θ_0 la amplitud máxima de las oscilaciones.

El periodo del péndulo se puede desarrollar en una serie de Taylor en función de k:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \frac{225k^4}{4096} + \dots \right] \quad (10)$$

Para oscilaciones pequeñas $\text{sen}\theta \approx \theta$ y el periodo se puede expresar en función de θ_0 como:

$$\tau \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \dots \right] \quad (11)$$

Tanto la solución exacta (7) como la aproximación (11) se compararán con los valores aproximados obtenidos utilizando el método del balance de armónicos en la sección 4.

3.- MÉTODOS NUMÉRICOS

Primeramente se expondrán brevemente las ideas básicas que permiten resolver numéricamente ecuaciones diferenciales de primer orden, para posteriormente presentar los diferentes métodos numéricos analizados.

La ecuación (12) corresponde a un típico problema de valor inicial. $f(t,y)$ es una función de la variable independiente t y de la variable dependiente y , mientras que dy/dt denota la derivada primera respecto a t [1]. Debido a que pueden

existir infinitas soluciones $y(t)$ de la ecuación diferencial es necesario especificar la condición inicial $y(t_0) = y_0$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad y(t_0) = y_0 \qquad (12)$$

Si se pretende resolver la ecuación diferencial (12) en el intervalo $t_0 < t < t_N$, la solución numérica sólo se puede obtener en un número finito de valores de t . Si se elige realizar un espaciado constante entre cada valor de t , se puede establecer la siguiente relación para todos los valores de t en los que se obtendrá la solución numérica:

$$t_j = t_0 + jh, \qquad j = 0, 1, 2, \dots, N \qquad (13)$$

Siendo h el valor del espaciado elegido.

Las soluciones numéricas correspondientes, obtenidas para los diferentes t_j se denotarán:

$$y_j \qquad j = 0, 1, 2, \dots, N \qquad (14)$$

3.1.- Método de Euler

El primer método que se expondrá para la resolución de una ecuación diferencial como el de la ecuación (12) es el denominado método de Euler [2]. Este método es bastante menos preciso que otros métodos que se presentarán a continuación, pero permite entender de forma bastante intuitiva el proceso mediante el cual se resuelven ecuaciones diferenciales de forma numérica.

Si se realiza un expansión en serie de Taylor de la función $y(t)$ alrededor del punto t_0 :

$$y(t) = y(t_0) + (t - t_0)y'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2} y''(t_0) + \dots \qquad (15)$$

Truncando la serie en el segundo término se puede establecer una primera aproximación de la solución exacta:

$$y(t) \approx y(t_0) + (t - t_0)f(t_0, y_0) \qquad (16)$$

Si tenemos ahora en cuenta que $t_1 - t_0 = h$, siendo t_1 el siguiente instante donde se va a evaluar la función, la solución numérica y_1 correspondiente a ese instante se puede expresar como:

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) \qquad (17)$$

De igual forma se puede calcular el valor de la solución numérica en el instante t_2

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) \quad (18)$$

Y así sucesivamente se obtienen los valores numéricos para todos los valores discretos del tiempo dados por la ecuación (13)

$$y_j = y_{j-1} + hf(t_{j-1}, y_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

Este método, aunque es bastante fácil de implementar y claramente intuitivo no se suele utilizar para la resolución de ecuaciones diferenciales como consecuencia de que para obtener una precisión significativa es necesario utilizar valores muy pequeños de h , lo que eleva el coste computacional. En las siguientes secciones se expondrán métodos de resolución más precisos.

3.2.- Método del punto medio

Cómo se ha observado en el método de Euler, la técnica consiste en evaluar la pendiente de la curva en el punto inicial del intervalo temporal de longitud h . Las técnicas que a continuación se presentarán tienen como objetivo la evaluación de la pendiente más de una vez. Por ejemplo, en el método del punto medio se evalúa la pendiente en el punto medio del intervalo y este valor de la pendiente es posteriormente utilizado para obtener la solución al final del intervalo.

Primero se evalúa la pendiente al inicio del intervalo:

$$k_1 = f(t_{j-1}, y_{j-1}) \quad (20)$$

Posteriormente se calcula el punto medio del intervalo:

$$y_{j-1/2} = y_{j-1} + \frac{h}{2} f(t_{j-1}, y_{j-1}) \quad (21)$$

En este punto se evalúa la pendiente:

$$k_2 = f\left(t_{j-1} + \frac{h}{2}, y_{j-1} + \frac{h}{2} k_1\right) \quad (22)$$

Éste valor de la pendiente se utiliza para calcular el valor de la solución numérica al final del intervalo:

$$y_j = y_{j-1} + hk_2 \quad (23)$$

3.3.- Método de Heun

En este método, primero se evalúa la pendiente al inicio del intervalo:

$$k_1 = f(t_{j-1}, y_{j-1}) \quad (24)$$

Con el valor de la pendiente obtenido se calcula la solución numérica al final del intervalo y posteriormente el valor de la pendiente en ese punto:

$$k_2 = f(t_{j-1} + h, y_{j-1} + hk_1) \quad (25)$$

Finalmente se obtiene el valor numérico y_j con la media entre las pendientes k_1 y k_2 .

$$y_j = y_{j-1} + h \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (26)$$

3.4.- Método de Runge-Kutta

El método de Heun utiliza un promedio entre dos pendientes en el intervalo $t_{j-1} < t < t_j$ para predecir el valor de y_j . El método de Runge-Kutta generaliza este método y permite calcular el valor de y_j a través de un promedio entre diferentes valores

$$y_j = y_{j-1} + h \sum_{i=1}^m \gamma_i k_i \quad (27)$$

En este trabajo se utilizarán los siguientes valores de las pendientes y los pesos vienen dados en la ecuación (32)

$$k_1 = f(t_{j-1}, y_{j-1}) \quad (28)$$

$$k_2 = f\left(t_{j-1} + \frac{h}{2}, y_{j-1} + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (29)$$

$$k_3 = f\left(t_{j-1} + \frac{h}{2}, y_{j-1} + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (30)$$

$$k_4 = f(t_{j-1} + h, y_{j-1} + hk_3) \quad (31)$$

$$y_j = y_{j-1} + h \left(\frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} \right) \quad (32)$$

3.5.- Comparación entre los diferentes métodos numéricos

A continuación se presentarán los resultados obtenidos mediante la utilización de las diferentes técnicas numéricas mencionadas anteriormente para la

resolución de la ecuación diferencial (3). Para la simulación de los resultados numéricos se utilizó un valor de la longitud del péndulo $l = 9.8$ m.

En la figura 1 se representa el ángulo en función del tiempo para los resultados numéricos obtenidos utilizando el método de Euler. Las condiciones iniciales son en este caso:

$$\theta(0) = 0.1$$

$$\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

El método de Euler se ha implementado para diferentes valores de h , lo que permite observar la pobre convergencia que este método presenta en comparación con los otros tres métodos descritos. Así por ejemplo, es necesario indicar que la solución que se presenta con línea continua en la figura 1, que corresponde a $h = 0.005$, se obtiene con los métodos de Heun, Punto medio y Runge-Kutta para $h = 0.1$.

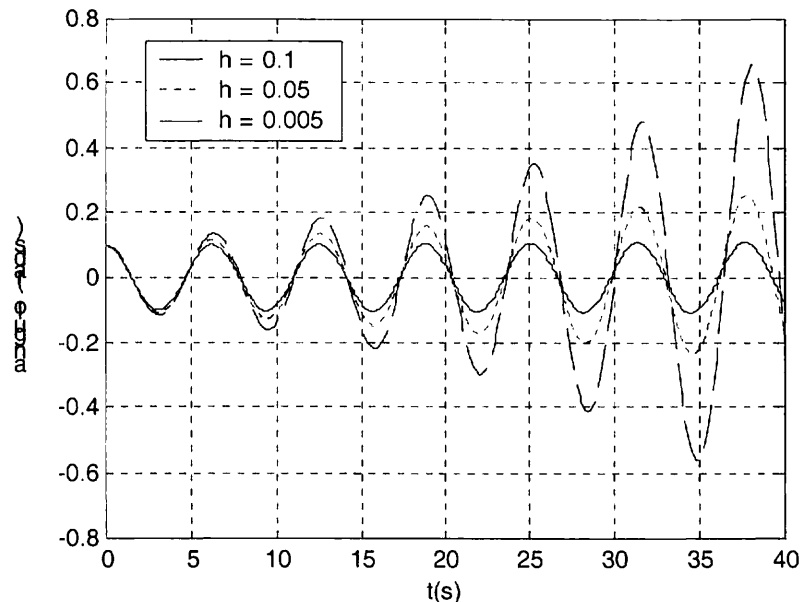


Figura 1.- Resultados obtenidos utilizando el método de Euler para el ángulo en función del tiempo para diferentes valores del espaciado temporal h

Por otro lado en la figura 2 se representan los resultados obtenidos para los métodos de Heun, Runge-Kutta y del punto medio ahora con las condiciones iniciales:

$$\theta(0) = 1.5$$

$$\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

El valor del espaciado temporal ha sido de $h = 0.1$ en los tres casos. Se puede observar que para este valor de la amplitud $\theta_0 < \pi/2$ la solución del péndulo

simple se puede aproximar por una función armónica, como quedará más claro en la sección 3

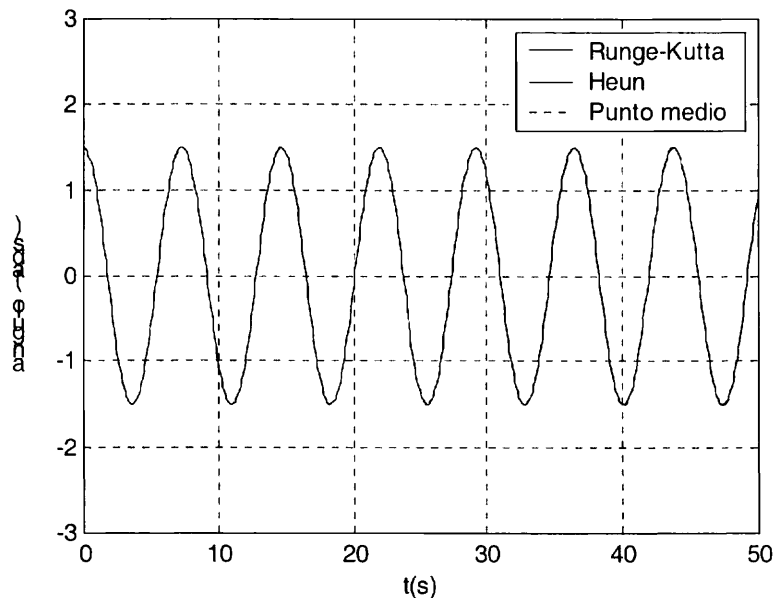


Figura 2.- Resultados obtenidos utilizando los métodos de Heun, Runge-Kutta y del punto medio para el ángulo en función del tiempo con un valor del espaciado $h=0.1$. Las condiciones iniciales son en este caso: $\theta(0)=1.5$ y $d\theta/dt = 0$.

Finalmente en la figura 3 se representan los resultados obtenidos para los métodos de Heun, Runge-Kutta y del punto medio ahora con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\theta(0) &= 3 \\ \frac{d\theta}{dt}(0) &= 0\end{aligned}$$

Es decir con una amplitud inicial cercana a π . Se observa por un lado que aunque el movimiento es periódico ya no puede ser descrito mediante una función armónica (sí como una superposición de funciones armónicas). El valor del espaciado temporal ha sido $h= 0.1$, con lo que se puede apreciar la diferencia de convergencia entre los tres métodos, siendo el método de Runge-Kutta el más preciso en este caso.

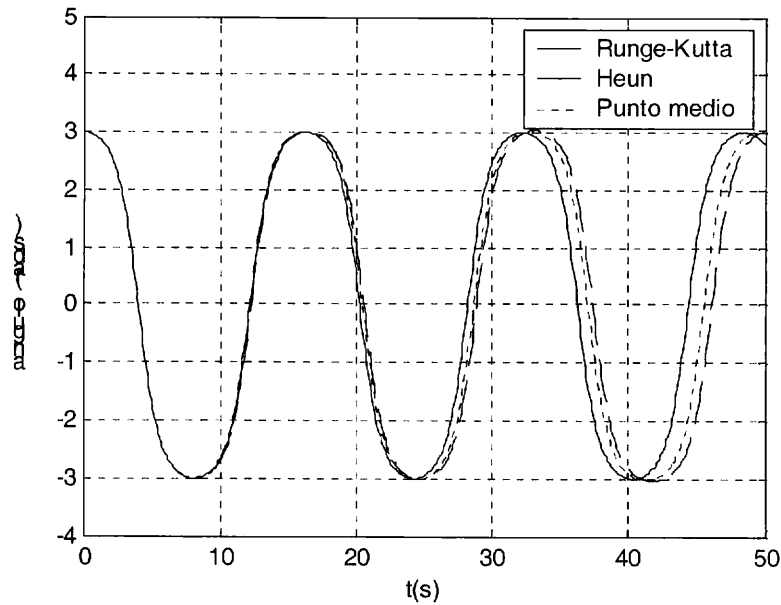


Figura 3.- Resultados obtenidos utilizando los métodos de Heun, Runge-Kutta y del punto medio para el ángulo en función del tiempo con un valor del espaciado $h = 0.1$. Las condiciones iniciales son en este caso: $\theta(0)=1.5$ y $d\theta/dt = 0$.

4.- MÉTODOS ANALÍTICOS

A continuación se presentará un método basado en el método denominado balance de armónicos (BA) [3].

Para resolver la ecuación diferencial (3) se desarrolla la función seno en serie de potencias:

$$\text{sen } \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \quad (33)$$

Se impone como solución una solución armónica del tipo:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t \quad (34)$$

Que verifica las condiciones iniciales:

$$\theta(0) = \theta_0 \quad (35)$$

$$\theta'(0) = 0 \quad (36)$$

Ahora se sustituyen las expresiones (33) y (34) en la ecuación (3), quedando:

$$-\omega^2 \theta_0 \cos \omega t + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta_0^{2n+1} \cos^{2n+1} \omega t = 0 \quad (37)$$

Si ahora se utiliza el siguiente desarrollo para la función $\cos^{2n+1}A$:

$$\cos^{2n+1} A = \frac{1}{2^n} \left\{ \cos(2n+1)A + \binom{2n+1}{1} \cos(2n-1)A + \dots + \binom{2n+1}{n} \cos A \right\} \quad (38)$$

Queda:

$$-\omega^2 \theta_0 \cos \omega t + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta_0^{2n+1} \frac{1}{2^n} \binom{2n+1}{n} \cos \omega t + HOH = 0$$

Donde *HOH* son términos que contienen armónicos superiores ($\cos(3\omega t)$, $\cos(5\omega t)$, etc.)

Igualando a 0 el término que multiplica a $\cos(\omega t)$:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+1)!} \theta_0^{2n} \quad (39)$$

De donde se puede obtener el periodo, T

$$T = 2\pi/\omega \quad (40)$$

$$T = T_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+1)!} \theta_0^{2n} \right]^{-1/2} \quad (41)$$

siendo:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (42)$$

De esta manera se pueden obtener soluciones de diferentes órdenes en función del grado de aproximación requerido.

Para $n = 0$ se tiene:

$$T = T_0 \quad (43)$$

Para $n = 1$

$$T_1 = T_0 \left(1 - \frac{1}{8} \theta_0^2 \right)^{-1/2} \quad (44)$$

Aquí es interesante hacer la aproximación para ángulos pequeños con lo que resulta:

$$T_1 \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right) \quad (45)$$

Que coincide con la aproximación de primer orden de la solución exacta para periodo del péndulo según la ecuación (11)

$$\text{Para } n = 2 \quad (46)$$

$$T_2 = T_0 \left(1 - \frac{1}{8} \theta_0^2 + \frac{1}{192} \theta_0^4 \right)^{-1/2} \quad (47)$$

Y para ángulos pequeños

$$T_2 \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{10}{3072} \theta_0^4 \right) \quad (48)$$

Así sucesivamente, a partir de la ecuación (41) se pueden obtener aproximaciones según el orden requerido. En la figura 4 se representa el periodo del péndulo en función de la amplitud para la aproximación de primer orden dada por la ecuación (44) y la aproximación de cuarto orden dada por:

$$T_4 = T_0 \left(1 - \frac{1}{8} \theta_0^2 + \frac{1}{192} \theta_0^4 - \frac{1}{9216} \theta_0^6 + \frac{1}{737280} \theta_0^8 \right)^{-1/2} \quad (49)$$

Se han comparado los resultados con la solución exacta. Se puede observar como para ángulos < 2 rads la aproximación de cuarto orden es bastante precisa.

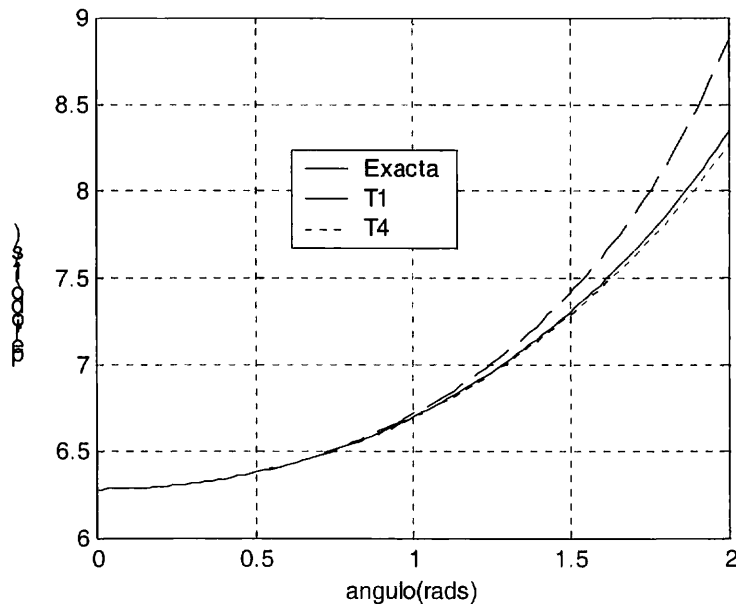


Figura 4.- Periodo del péndulo en función del ángulo inicial

Conclusiones

En este trabajo se ha realizado un estudio de la dinámica del péndulo simple. Este estudio pretende motivar al estudiante en la búsqueda, comprensión y aplicación de métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales. Mediante el estudio de un sistema relativamente sencillo, como el péndulo físico, se ha pretendido presentar una comparación entre diferentes técnicas para la resolución de ecuaciones diferenciales. En este trabajo se ha resuelto la ecuación diferencial no lineal que describe las oscilaciones del péndulo utilizando algoritmos numéricos como el método de Euler, el método de Heun o un algoritmo de Runge-Kutta, así como mediante el método del balance de armónicos. Se ha demostrado que los métodos numéricos de Heun y del punto medio ofrecen una convergencia comparable al método de Runge-Kutta cuando se aplican a la ecuación que describe el movimiento del péndulo. Se ha demostrado también la pobre convergencia del algoritmo de Euler. Finalmente se ha probado que el método del balance de armónicos conduce a una solución del periodo del péndulo con bastante exactitud en el intervalo $[0, 2]$ rads, cuando se retiene únicamente un armónico en la solución propuesta.

Referencias

- [1] R. H. Hamming, "Numerical methods for Scientists and Engineers", Dover Publications, 1973.
- [2] G. Recktenwald, "Numerical Methods with Matlab. Implementation and Application", Prentice Hall, 2000.
- [3] R. E. Mickens, "Oscillations in Planar Dynamic Systems", Prentice Hall, 1996.