



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

Sobre las funciones  $1+2^z+\dots+n^z$  como aproximantes de la zeta de Riemann, la distribución de sus ceros y su relación con las ecuaciones funcionales  $f(x)+f(2x)+\dots+f(nx)=0$

Juan Matías Sepulcre Martínez



Tesis

**Doctorales**

[www.eltallerdigital.com](http://www.eltallerdigital.com)

UNIVERSIDAD de ALICANTE



UNIVERSIDAD DE ALICANTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Análisis Matemático

TESIS DOCTORAL

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

**Sobre las funciones  $1 + 2^z + \dots + n^z$  como aproximantes de la zeta de Riemann, la distribución de sus ceros y su relación con las ecuaciones funcionales**

$$f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$$

Juan Matías Sepulcre Martínez

2008



Memoria de tesis realizada por D. Juan Matías Sepulcre Martínez en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Alicante bajo la dirección y supervisión de Gaspar Mora Martínez, Catedrático de Escuela Universitaria, para optar al Grado de Doctor.

VºBº El Director de la Tesis

Fdo.: Gaspar Mora Martínez



VºBº El Secretario del Departamento

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

Fdo.: Manuel Mediero Almendros

Alicante, Julio 2008



## AGRADECIMIENTOS

En la realización de los estudios que componen esta tesis doctoral han sido varias las personas que, de un modo u otro, han contribuido a que ésta pudiera llegar a buen fin. A todas ellas les estoy sinceramente agradecido. No obstante, quisiera mostrar de forma especial mi agradecimiento a ciertas personas que realmente me han ayudado a lo largo de este proceso.

A Gaspar Mora, mi Director de Tesis, por introducirme en el mundo de la investigación, por todo lo que me ha enseñado y sabido transmitir, por acompañarme en este viaje y, en especial, por confiar en mi.

A todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático, por su ayuda inestimable y su confianza.

A mis queridos compañeros de la carrera, por su amistad y por esos grandes momentos que disfrutamos juntos.

A mi madre, por su constancia, entrega y voluntad.

A mis hermanas, por estar ahí siempre que las he necesitado



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

A mi padre, in memoriam



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares. La función <math>G_n(z)</math></b>	<b>5</b>
<b>2. Densificación</b>	<b>9</b>
2.1. Preliminares . . . . .	9
2.2. Teorema de densificación . . . . .	11
<b>3. Cuadratura</b>	<b>19</b>
3.1. Justificación geométrica y resultados previos . . . . .	19
3.2. La propiedad de cuadratura de las soluciones de $f(x) + f(2x) = 0$ . . . . .	22
3.3. Caso general . . . . .	25
<b>4. Soluciones no continuas</b>	<b>29</b>
4.1. Resultados previos . . . . .	30
4.2. Primer procedimiento . . . . .	32
4.3. Segundo procedimiento . . . . .	33
4.4. Tercer procedimiento . . . . .	36
<b>5. Otras propiedades de <math>G_n(z)</math></b>	<b>45</b>
5.1. Indicador y tipo . . . . .	45
5.2. Más propiedades . . . . .	52
<b>6. El diagrama conjugado</b>	<b>61</b>
<b>7. Ecuaciones diferenciales relacionadas con la ecuación funcional</b>	
$f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$	<b>69</b>
7.1. Primeras ecuaciones . . . . .	69
7.2. Ecuaciones más generales . . . . .	72
<b>8. Operadores</b>	<b>77</b>
<b>9. Relación entre <math>G_n(z)</math> y la función <math>\zeta(z)</math> zeta de Riemann</b>	<b>85</b>

---

<b>10. Estudio de los ceros</b>	<b>91</b>
10.1. Motivación . . . . .	91
10.2. Orden . . . . .	99
10.3. La función $H_n(z)$ . . . . .	101
10.4. Casi periodicidad . . . . .	107
10.5. Los ceros de $G_n(z)$ desde el principio del argumento . . . . .	115
10.6. Lema de Landau . . . . .	120
<b>11. Generalización de los principales resultados</b>	<b>123</b>
11.1. Polinomios exponenciales . . . . .	123
11.2. Funciones casi periódicas . . . . .	138
<b>Terminología básica</b>	<b>145</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>147</b>



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# Introducción

---

En 1782 Lagrange relacionó el problema astronómico de la perturbación de los planetas grandes con la variación del argumento de ciertos polinomios exponenciales, emergiendo un problema matemático conocido como Mean Motion [12]. Para extender el problema de Lagrange de los polinomios exponenciales a una clase más general, H. Bohr [5] en 1924 introdujo la noción de función casi periódica, una potente teoría que utilizaremos, siguiendo [4] y [14], con tal de estudiar la distribución asintótica de los ceros de la función  $G_n(z) = 1 + 2^z + \cdots + n^z$ , objeto de estudio en la parte final de este trabajo.

Esta memoria se encuentra estructurada en 11 capítulos. En el primero de ellos se establece el punto de partida de este trabajo, que es el tratamiento de la ecuación funcional

$$f(z) + f(2z) + \cdots + f(nz) = 0, z \in \mathbb{C}$$

que ha sido utilizada para modelizar fenómenos físicos relacionados con la combustión en motores de hidrógeno.

Se encuentra, siguiendo [19] y [26], una familia de soluciones básicas de la ecuación funcional compleja  $f(z) + f(2z) + \cdots + f(nz) = 0$  que forman un espacio vectorial de dimensión infinita generado por las funciones potenciales complejas  $z^\beta$ , donde  $\beta$  pertenece al conjunto de los ceros de  $G_n(z) = 1 + 2^z + \cdots + n^z$ .

En el capítulo 2 se prueba la existencia de un conjunto infinito de funciones linealmente independientes en el subespacio vectorial formado por las soluciones continuas reales de

$$f(x) + f(2x) + \cdots + f(nx) = 0, x \in \mathbb{R}$$

con la peculiaridad de  $\alpha$ -densificar una larga colección de compactos  $K$  del plano para  $\alpha$  arbitrariamente pequeño. Esto puede ser interpretado como si  $K$  fuese casi rellenado por tales curvas. Estas curvas, llamadas curvas  $\alpha$ -densas, constituyen de hecho una generalización de las curvas de Peano dado que para  $\alpha = 0$  sus imágenes coinciden necesariamente con los compactos  $K$ . Al comienzo de dicho capítulo se introducen las nociones básicas utilizadas para su comprensión.

En el siguiente capítulo, con la idea de utilizar las propiedades de densificación del espacio de las curvas  $\alpha$ -densas, se trabaja con lo que llamaremos la propiedad de cua-

dratura, relacionada con la posibilidad de expresar, de un modo aproximado, el área del recinto que densifican tales curvas mediante el producto de la longitud de la curva por la densidad de la misma. En esta parte, además de aportar tal justificación geométrica se garantiza la existencia de una familia de soluciones de  $f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$  con tal propiedad.

En el capítulo 4, se exponen algunos resultados teóricos acerca de la analiticidad y continuidad de las soluciones de la ecuación funcional en el caso complejo y real respectivamente. Además se proporcionan varios métodos para encontrar o construir soluciones no continuas de  $f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$ .

En los capítulos 5 y 6 se estudian una gran variedad de propiedades que posee la función  $G_n(z)$  (función de tipo exponencial, de crecimiento completamente regular,...) a la vez que se procede al cálculo de su indicador, tipo y transformada de Borel para desembocar en la obtención de forma rigurosa de su diagrama conjugado, el menor compacto y convexo de  $\mathbb{C}$  fuera del cual su transformada de Borel admite prolongación analítica.

El capítulo 7 está dedicado al estudio de ciertas ecuaciones diferenciales de Euler relacionadas con las soluciones de  $f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$ . Se obtienen en primer lugar un tipo particular de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones satisfacen la ecuación funcional para el caso  $n = 2$ , y posteriormente se generalizan los resultados, y se obtienen ecuaciones diferenciales mucho más generales. A partir de esta relación se espera en un futuro que podamos describir el comportamiento de las soluciones de nuestra ecuación funcional desde un punto de vista físico, obteniendo así distintas aplicaciones.

En el capítulo 8 se consideran ciertos operadores sobre determinados espacios vectoriales que dejan invariantes a los subespacios vectoriales de las soluciones analíticas y continuas de nuestras ecuaciones funcionales en el caso complejo y real respectivamente. Se establecen las relaciones existentes entre ellos y sus propiedades básicas. Además, la aplicación de estos operadores nos permite caracterizar las soluciones de las ecuaciones funcionales.

El capítulo 9 está dedicado a estudiar la relación existente entre las funciones  $G_n(z)$  y la función  $\zeta(z)$  zeta de Riemann. Se establecen algunos resultados que muestran dicha relación basada en la idea de que las funciones  $G_n(z)$  constituyen una sucesión de aproximantes a  $\zeta(z)$  en el semiplano  $\text{Re } z < -1$ . Además la serie de Euler-Maclaurin juega también un papel importante en este capítulo. Gracias a esta relación se deduce un primer resultado acerca de los ceros de  $G_n(z)$ .

Precisamente, en el siguiente capítulo estudiaremos con detalle la distribución de los ceros de la función  $G_n(z)$ , íntimamente relacionados con las soluciones de la ecuación funcional  $f(z) + f(2z) + \dots + f(nz) = 0$ . Determinaremos la densidad de los ceros de

$G_n(z)$  en la banda crítica donde están situados utilizando técnicas de funciones casi periódicas. Además, usando un teorema de Kronecker, afirmamos la existencia en la banda crítica de infinitos rectángulos para los cuales se encuentra una fórmula que determina el número exacto de ceros dentro de cada rectángulo con un error a lo sumo de un cero.

Finalmente se generalizan los principales resultados obtenidos a lo largo del trabajo a los polinomios exponenciales y las funciones casi periódicas, haciendo especial hincapié en los resultados relativos a la distribución asintótica de los ceros y en la fórmula que determina el número exacto de ceros dentro de ciertos rectángulos.

Quedan pendientes varios problemas abiertos, la mayoría de los cuales se mencionan a lo largo del trabajo, que son el objetivo de la investigación que estamos realizando ahora.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

# Capítulo 1

## Preliminares. La función $G_n(z)$

---

El punto de partida de este trabajo es el tratamiento de la ecuación funcional

$$f(z) + f(2z) + f(3z) + \cdots + f(nz) = 0, \text{ con } z \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

utilizada por Gaspar Mora en los casos  $n = 2, 3$  para modelizar fenómenos físicos relacionados con la combustión en motores de hidrógeno.

Si  $F$  es una solución de (1.1), en particular para  $z = x$ , se tiene que  $f(x) := F(x)$  es formalmente una solución de la siguiente ecuación:

$$f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(nx) = 0, \text{ con } x \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Además,  $g(x) = \operatorname{Re}(F(x))$ ,  $h(x) = \operatorname{Im}(F(x))$  serían soluciones reales de (1.2).

Recíprocamente, si  $f$  es solución de (1.2), podemos definir  $F(z) := f(x) + if(y)$  con  $z = x + iy$  y entonces  $F(z)$  es solución de (1.1).

A la vista de (1.1), considerando un homomorfismo continuo no trivial  $\varphi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  para la estructura multiplicativa de  $\mathbb{C}$ , como por ejemplo la función potencial compleja,  $\varphi(z) = z^\alpha$ , intentaremos encontrar una solución básica de tal ecuación funcional.

Imponiendo

$$\varphi(z) + \varphi(2z) + \varphi(3z) + \cdots + \varphi(nz) = 0,$$

se tiene

$$\begin{aligned} z^\alpha + 2^\alpha z^\alpha + 3^\alpha z^\alpha + \cdots + n^\alpha z^\alpha &= 0 \iff \\ z^\alpha [1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha] &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, todo se reduce ahora a encontrar valores  $\alpha$  que satisfagan la ecuación

$$G_n(z) = 0, \text{ siendo } G_n(z) = 1 + 2^z + 3^z + \cdots + n^z. \quad (1.3)$$

En consecuencia, obtenemos soluciones continuas de (1.1), atendiendo a este desarrollo, de la forma

$$f_{n,j}(z) = z^{\alpha_n^{(j)}}, \text{ con } \alpha_n^{(j)} \text{ satisfaciendo la ecuación (1.3).}$$

En particular, para  $z = x \in \mathbb{R}$ , una solución de (1.2) viene dada por  $f_{n,j}(x) = x^{\alpha_n^{(j)}}$ , siendo  $\alpha_n^{(j)}$  una solución de (1.3). Por tanto, si  $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ , entonces

$$f_{n,j}(x) = x^{a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}} = x^{a_n^{(j)}} e^{ib_n^{(j)} \log(x)},$$

y separando la parte real e imaginaria nos quedan las siguientes funciones reales de variable real:

$$f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \cos(b_n^{(j)} \log(x)),$$

$$f_{n,j}^{(2)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \operatorname{sen}(b_n^{(j)} \log(x)).$$

Presentamos a continuación algunas gráficas asociadas a tales funciones:

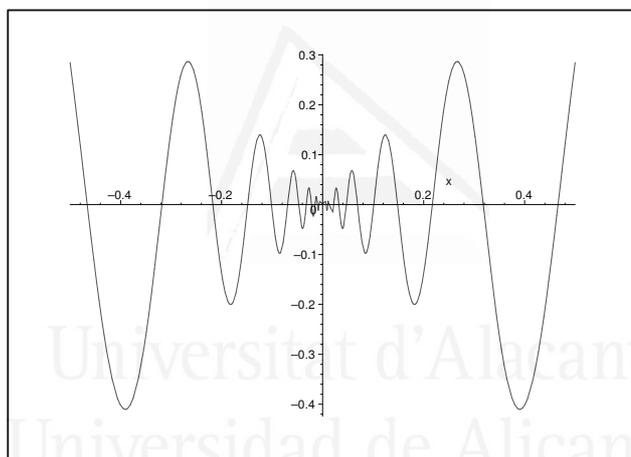


Figura 1.1:  $f_{3,j}^{(1)}(x)$  asociada al cero de  $G_3(z)$  dado por  $\alpha_3^{(j)} = 0,9405921833152 + i 8,230709548417$

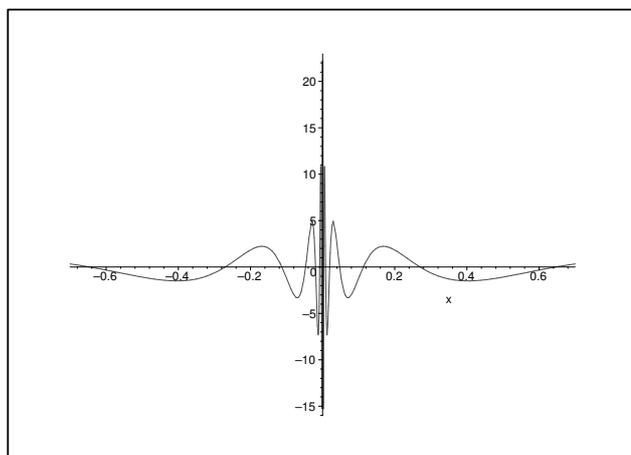


Figura 1.2 :  $f_{3,j}^{(1)}(x)$  asociada al cero de  $G_3(z)$  dado por  $\alpha_3^{(j)} = -0,4543970081950 + i 3,598171493995$

---

Estudiaremos por tanto algunas propiedades de la función  $G_n(z)$  con objeto de estudiar y resolver (1.3).

Por una parte, sabemos que si  $\alpha_n^{(j)} := a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$  es solución de (1.3), entonces  $b_n^{(j)} \neq 0$ . Por otra parte, también sabemos que se cumple que  $G_n(\bar{z}) = \overline{G_n(z)}$ . En consecuencia, podemos tomar sin pérdida de generalidad  $b_n^{(j)} > 0$ .

Pasamos ahora a esquematizar algunos resultados sobre  $G_n(z)$  que ya fueron analizados en [26] y que nos servirán también a posteriori para nuestros propósitos:

- **Teorema 1.1**  $G_n(z)$  es una función entera de orden 1,  $\forall n \geq 2$ .
- **Teorema 1.2**  $G_n(z)$  tiene infinitos ceros  $\forall n \geq 2$ .
- **Teorema 1.3** <sup>1</sup>Existen dos números reales  $r < s$  tales que todos los ceros de  $G_n(z)$  están en la banda  $\{z \in \mathbb{C} : r \leq \operatorname{Re} z \leq s\}$ .
- **Teorema 1.4** Excepto para  $n = 2$ , los ceros de  $G_n(z)$  no son todos imaginarios puros.

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

<sup>1</sup>Se proporcionará una alternativa de demostración de este resultado en el Capítulo 10



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## 2.1. Preliminares

Expondremos en primer lugar algunos conceptos acompañados de ejemplos que serán de gran utilidad para el desarrollo y comprensión de esta sección a la vez que establecemos algunos antecedentes:

**Definición 2.1** Sea  $(E, T)$  un espacio topológico. Toda aplicación continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  es, por definición, una **curva**. Si  $\gamma$  es inyectiva diremos que la curva es de **Jordan** y si tiene longitud finita diremos que es **rectificable**.

**Definición 2.2** Sea  $K$  un compacto en un espacio métrico  $(E, d)$  y  $\alpha \geq 0$ . Una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$  diremos que es  **$\alpha$ -densa en  $K$**  (o que densifica  $K$  con densidad  $\alpha$ ) si

- a)  $\gamma([0, 1]) \subset K$ ,
- b) para cada  $x \in K$ ,  $d(x, \gamma^*) \leq \alpha$ , donde  $\gamma^*$  denota la imagen  $\gamma([0, 1])$ .

**Definición 2.3** Sea  $X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(E, d)$ . Se dice que  $X$  es un **conjunto densificable** si, y sólo si,  $\forall \alpha > 0$  existe una curva  $\alpha$ -densa en  $X$ .

En 1913 H. Hahn y S. Mazurkiewicz demostraron, a partir del concepto topológico de conjunto localmente conexo, un resultado que caracteriza los conjuntos que son la imagen continua del intervalo unidad. El resultado afirma que, en un espacio métrico, un conjunto es la imagen continua del intervalo unidad si, y sólo si, es compacto, conexo y localmente conexo [25].

**Definición 2.4** A los conjuntos que son imagen continua del intervalo unidad se les denomina **continuos de Peano**.

Los continuos de Peano son claramente densificables. En cambio, hay conjuntos densificables que no son imagen continua del intervalo  $[0, 1]$ .

**Ejemplo 2.1** *La curva seno del topólogo definida por*

$$A := \left\{ \left( t, \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right) : t \in ]0, 1] \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

*es densificable pero no es un continuo de Peano ya que no es localmente conexa (ver Figura 2.1).*

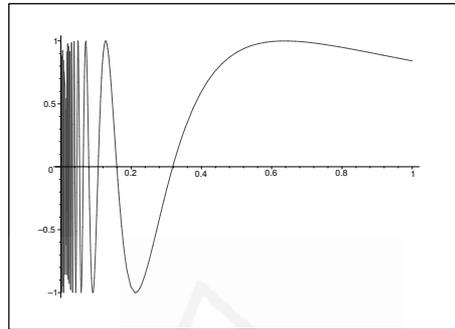


Figura 2.1: Curva seno del topólogo

*Se puede comprobar que  $A$  es densificable, ya que la curva definida por el propio gráfico de  $A$  en el intervalo  $[\varepsilon, 1]$ , con  $\varepsilon > 0$ , se encuentra a una distancia no superior a  $\varepsilon$  de  $A$  y por tanto lo densifica con densidad arbitraria. Además, es compacto y conexo pero no es localmente conexo (en ninguno de los puntos pertenecientes a  $\{0\} \times [-1, 1]$ ).*

En cambio, hay condiciones que sí que son necesarias para que un conjunto sea densificable:

**Teorema 2.1** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico densificable, entonces  $X$  es conexo y precompacto (véase [17]).*

Estas condiciones no son suficientes como nos muestra el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.2**

$$B := \left\{ \left( t, \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right) : t \in [-1, 1] \setminus \{0\} \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$

*$B$  es conexo y tiene 3 regiones bien diferenciadas:*

$$\begin{aligned} B_1 &:= \left\{ \left( t, \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right) : t \in [-1, 0[ \right\}, \\ B_2 &:= (\{0\} \times [-1, 1]), \\ B_3 &:= \left\{ \left( t, \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right) : t \in ]0, 1] \right\}. \end{aligned}$$

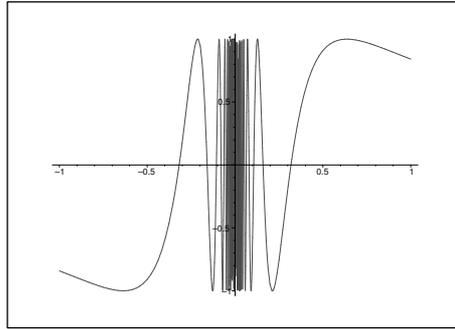


Figura 2.2: Conjunto B

Por tanto, si  $\gamma$  es una curva con imagen en  $B$ , para algún  $j \in \{1, 2, 3\}$  se tiene que  $\gamma(I) \subset B_j$  y tenemos 3 casos posibles:

1.  $\gamma(I) \subset B_1$ . En tal caso,  $d((1, \text{sen } 1), \gamma(I)) > 1$  y, por tanto, la curva no sería  $\alpha$ -densa con  $\alpha \leq 1$ .
2.  $\gamma(I) \subset B_2$ . En tal caso,  $d((1, \text{sen } 1), \gamma(I)) \geq 1$  y, por tanto, la curva no sería  $\alpha$ -densa con  $\alpha < 1$ .
3.  $\gamma(I) \subset B_3$ . En tal caso,  $d((-1, \text{sen } -1), \gamma(I)) > 1$  y, por tanto, la curva no sería  $\alpha$ -densa con  $\alpha \leq 1$ .

Luego no es  $\alpha$ -densa para  $\alpha < 1$  y, por tanto, el conjunto no es densificable.

En la siguiente sección se probará que existe una ecuación funcional de la cual se pueden extraer soluciones que  $\alpha$ -densifican una colección de compactos considerados en el semiplano  $\text{Re } z > 0$ . Este problema es un caso particular de un problema más general (abierto), propuesto por Gaspar Mora, de si dado un compacto con interior no vacío cuyo borde sea un lazo (curva cerrada con derivada continua en todos los puntos excepto a lo sumo en una cantidad finita) existe una ecuación funcional cuyas soluciones lo densifiquen.

## 2.2. Teorema de densificación

La ecuación funcional que nos proporciona la solución al problema que acabamos de plantear es la ecuación funcional introducida en el capítulo anterior íntimamente relacionada con la función  $G_n(z)$ .

En relación a  $G_n(z)$ , además de los resultados expuestos en el capítulo anterior, podemos destacar el siguiente comentario estableciendo al mismo tiempo la siguiente ordenación de sus ceros:

Dados  $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$  y  $\alpha_n^{(k)} = a_n^{(k)} + ib_n^{(k)}$  ceros de  $G_n(z)$ , diremos que  $\alpha_n^{(j)}$  es anterior a  $\alpha_n^{(k)}$  si  $b_n^{(j)} < b_n^{(k)}$ , o bien,  $b_n^{(j)} = b_n^{(k)}$  y  $a_n^{(j)} < a_n^{(k)}$ , es decir ordenamos los ceros a partir de sus partes imaginarias. Además tenemos que  $|b_n^{(j)}| \rightarrow \infty$  si  $j \rightarrow \infty$ , ya que como  $G_n(z)$  es analítica, si estuviesen acotados sus ceros, existiría una subsucesión de ceros convergente y por el principio de Identidad de las funciones analíticas tendríamos que  $G_n(z) \equiv 0$  (recuérdese que, por el teorema 1.3, las partes reales  $a_n^{(j)}$  sí están acotadas, por tanto necesariamente son las partes imaginarias  $b_n^{(j)}$  las que no lo están).

Si denotamos por  $V_n$  al subespacio vectorial formado por las soluciones continuas reales de (1.2), entonces tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.2** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , existe un conjunto infinito de funciones linealmente independientes en  $V_n$ , de tal forma que dado  $\alpha > 0$  arbitrario, se puede encontrar un cero de  $G_n(z)$ ,  $\alpha_n = a_n + ib_n$ , tal que las soluciones de (1.2) asociadas a ella,  $f_n^{(1)}(x) = x^{a_n} \cos(b_n \log(x))$  y  $f_n^{(2)}(x) = x^{a_n} \sin(b_n \log(x))$ , tienen densidad  $\alpha$  en la región compacta determinada por  $y = x^{a_n}$ ,  $y = -x^{a_n}$ , y por las rectas  $x = \delta$ ,  $x = \Delta$ , con  $\Delta > \delta > 0$ .*

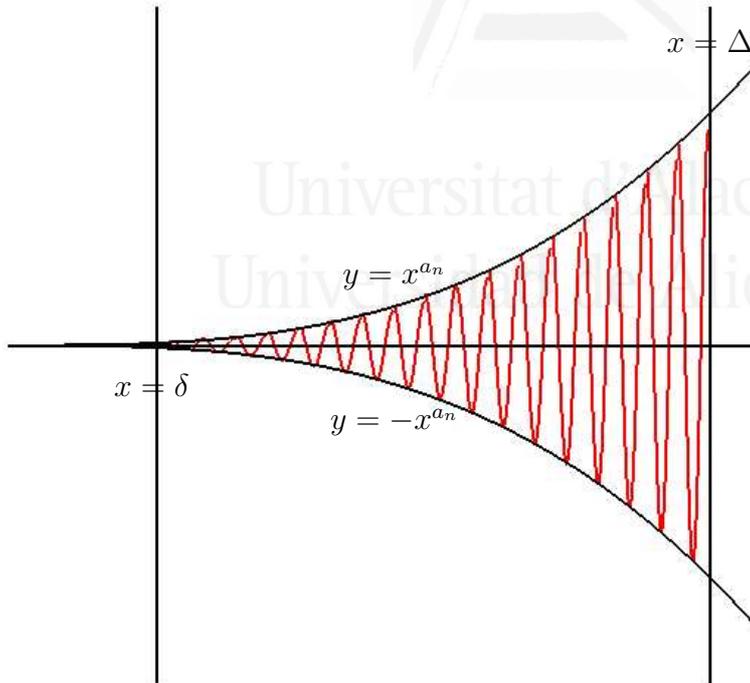


Figura 2.3: Ilustración del Teorema 2.2

**Prueba.** Dado un cero de  $G_n(z)$ ,  $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ , donde suponemos sin pérdida de generalidad  $b_n^{(j)} > 0$ , calculemos a continuación los ceros de la función real asociada  $f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \cos(b_n^{(j)} \log(x))$  solución de (1.2):

$$f_{n,j}^{(1)}(x) = 0 \iff b_n^{(j)} \log(x) = (2k+1) \frac{\pi}{2} \iff \log(x) = \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}} \pi \iff$$

$$x = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}.$$

Así que los ceros de  $f_{n,j}^{(1)}(x)$  vienen dados por

$$x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, los valores  $y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}$  satisfacen

$$f_{n,j}^{(1)}(y_{n,k}^{(j)}) = y_{n,k}^{a_n^{(j)}} \cos\left(b_n^{(j)} \log\left(e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}\right)\right) = y_{n,k}^{a_n^{(j)}} \cos k\pi = \pm y_{n,k}^{a_n^{(j)}},$$

es decir, en estos puntos, la función  $f_{n,j}^{(1)}(x)$  alcanza los valores extremos. Observemos que los valores  $y_{n,k}^{(j)}$  son justamente los ceros de la función  $f_{n,j}^{(2)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \operatorname{sen}(b_n^{(j)} \log(x))$  y, por otra parte, en los valores  $x_{n,k}^{(j)}$  la función  $f_{n,j}^{(2)}(x)$  alcanza sus valores extremos. Asimismo, ambos verifican

$$\begin{aligned} x_{n,k}^{(j)}, y_{n,k}^{(j)} &\longrightarrow +\infty, & \text{cuando } k \rightarrow +\infty \\ x_{n,k}^{(j)}, y_{n,k}^{(j)} &\longrightarrow 0, & \text{cuando } k \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

En virtud de lo anterior, para encontrar  $a_n$  (parte real de una solución de (1.3)) y poder densificar así con densidad  $\alpha$  el compacto definido a través de él, es suficiente encontrar  $\alpha_n$ , solución de (1.3), con la propiedad de que el conjunto  $\{x_{n,k}, y_{n,k}, k \in \mathbb{Z}\}$  sea denso topológicamente en el intervalo  $[\delta, \Delta]$ .

Probaremos previamente que para todo  $j$

$$y_{n,k}^{(j)} < x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)}. \quad (2.1)$$

Para ello, comenzaremos analizando  $y_{n,k}^{(j)} < x_{n,k}^{(j)}$ :

$$y_{n,k}^{(j)} < x_{n,k}^{(j)} \iff e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi} < e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi} \iff \frac{k}{b_n^{(j)}}\pi < \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi \iff \frac{k}{b_n^{(j)}} < \frac{k}{b_n^{(j)}} + \frac{1}{2b_n^{(j)}},$$

como esta última desigualdad es cierta (recuérdese que estamos suponiendo que  $b_n^{(j)} > 0$ ), la primera desigualdad de (2.1) queda probada.

Probaremos ahora que  $x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)}$ , obsérvese para ello que

$$\begin{aligned} x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)} &\iff e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi} < e^{\frac{k+1}{b_n^{(j)}}\pi} \iff \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi < \frac{k+1}{b_n^{(j)}}\pi \iff \\ &\frac{k}{b_n^{(j)}} + \frac{1}{2b_n^{(j)}} < \frac{k}{b_n^{(j)}} + \frac{1}{b_n^{(j)}} \iff \frac{1}{2b_n^{(j)}} < \frac{1}{b_n^{(j)}}, \end{aligned}$$

y, de nuevo, esto último es cierto, con lo que la desigualdad restante de (2.1) queda también probada.

Sea ahora  $\alpha_{n,l}^{(j)} := \max\{x_{n,k}^{(j)} - y_{n,k}^{(j)}; y_{n,k+1}^{(j)} - x_{n,k}^{(j)} : |k| \leq l\}$ , para un cierto  $l \in \mathbb{N}$ . Como sabemos que

$$x_{n,k}^{(j)} - y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{2\pi}{b_n^{(j)}}} - 1 \right], \quad y_{n,k+1}^{(j)} - x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} \right],$$

entonces se tiene que

$$\max\{x_{n,k}^{(j)} - y_{n,k}^{(j)} : |k| \leq l\} = x_{n,l}^{(j)} - y_{n,l}^{(j)} = e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} - 1 \right],$$

y además

$$\max\{y_{n,k+1}^{(j)} - x_{n,k}^{(j)} : |k| \leq l\} = y_{n,l+1}^{(j)} - x_{n,l}^{(j)} = e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} \right],$$

en consecuencia,

$$\alpha_{n,l}^{(j)} = \max \left\{ e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} - 1 \right], e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} \right] \right\}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} \right] > e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} - 1 \right],$$

obtenemos la siguiente expresión para  $\alpha_{n,l}^{(j)}$ :

$$\alpha_{n,l}^{(j)} = e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} \right].$$

Dado  $\alpha > 0$ , determinamos ahora una solución de (1.3),  $\alpha_n = a_n + ib_n$ , con parte imaginaria  $b_n$  suficientemente grande tal que

$$e^{\frac{\pi}{b_n}} - e^{\frac{\pi}{2b_n}} < \alpha e^{-\frac{l\pi}{b_n}},$$

lo que es posible ya que si  $b_n^{(j)} \rightarrow \infty$ , entonces  $e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} \rightarrow 0$ , y al mismo tiempo  $\alpha e^{-\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \rightarrow \alpha$  (recordemos que las partes imaginarias de las soluciones de (1.3) no están acotadas).

Por tanto, asociada a esta solución de (1.3), tenemos ahora que

$$\alpha_{n,l} = e^{\frac{l\pi}{b_n}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n}} - e^{\frac{\pi}{2b_n}} \right] < e^{\frac{l\pi}{b_n}} \left[ \alpha e^{-\frac{l\pi}{b_n}} \right] = \alpha.$$

En consecuencia, eligiendo un  $l \in \mathbb{N}$  suficientemente grande como para que  $y_{n,-l} < \delta$  y  $y_{n,l+1} > \Delta$ , las funciones  $f_n^{(1)}(x) = x^{a_n} \cos(b_n \log(x))$  y  $f_n^{(2)}(x) = x^{a_n} \sen(b_n \log(x))$  tienen densidad  $\alpha$  en el compacto considerado.

Probaremos a continuación que para todo cero de  $G_n(z)$ ,  $\alpha_n^{(j)}$ , del semiplano superior, las funciones  $f_{n,j}^{(1)}(x)$  y  $f_{n,j}^{(2)}(x)$  son linealmente independientes.

En efecto, en primer lugar definimos

$$b_n := \max \{ |b_n^{(j)}| : 1 \leq j \leq m \},$$

que es mayor que 0 ya que  $b_n^{(j)} \neq 0 \forall j$ . Elegimos además un  $r_n > 1$  tal que  $b_n \cdot \ln(r_n) < \pi$  y tomamos  $c_j := r_n^{j-1}$ ,  $1 \leq j \leq 2m$ .

Con estas consideraciones, afirmamos que el siguiente determinante

$$W = \left| f_{n,1}^{(1)}(c_j), f_{n,1}^{(2)}(c_j), f_{n,2}^{(1)}(c_j), f_{n,2}^{(2)}(c_j), \dots, f_{n,m}^{(1)}(c_j), f_{n,m}^{(2)}(c_j) \right|_{j=1,2,\dots,2m}$$

es no nulo.

En efecto, para calcular  $W$  reduciremos sus elementos a forma compleja, para ello, multipliquemos la  $2^a, 4^a, \dots$  columnas por  $i$ , y a ellas les sumamos la  $1^a, 3^a, \dots$  columnas respectivamente, entonces se tiene que

$$W \cdot i^m = \left| f_{n,1}^{(1)}(c_j), f_{n,1}(c_j), f_{n,2}^{(1)}(c_j), f_{n,2}(c_j), \dots, f_{n,m}^{(1)}(c_j), f_{n,m}(c_j) \right|_{j=1,2,\dots,2m}$$

ya que  $i \cdot f_{n,j}^{(2)}(x) + f_{n,j}^{(1)}(x) = f_{n,j}(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Sea ahora  $h_{n,j}(x)$  el conjugado de  $f_{n,j}(x)$ , entonces

$$2f_{n,j}^{(1)}(x) = f_{n,j}(x) + h_{n,j}(x), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

A la vista de esta última relación, multipliquemos la  $1^a, 3^a, \dots$  columnas por  $-2$  y sumemos la  $2^a, 4^a, \dots$  respectivamente, entonces se tiene que

$$W \cdot (-2i)^m = \left| -h_{n,1}(c_j), f_{n,1}(c_j), -h_{n,2}(c_j), f_{n,2}(c_j), \dots, -h_{n,m}(c_j), f_{n,m}(c_j) \right|_{j=1,2,\dots,2m}$$

o equivalentemente,

$$W \cdot (2i)^m = \left| h_{n,1}(c_j), f_{n,1}(c_j), h_{n,2}(c_j), f_{n,2}(c_j), \dots, h_{n,m}(c_j), f_{n,m}(c_j) \right|_{j=1,2,\dots,2m}$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} h_{n,1}(c_1) & f_{n,1}(c_1) & h_{n,2}(c_1) & f_{n,2}(c_1) & \cdots & h_{n,m}(c_1) & f_{n,m}(c_1) \\ h_{n,1}(c_2) & f_{n,1}(c_2) & h_{n,2}(c_2) & f_{n,2}(c_2) & \cdots & h_{n,m}(c_2) & f_{n,m}(c_2) \\ \dots\dots\dots & & & & & & \\ h_{n,1}(c_{2m}) & f_{n,1}(c_{2m}) & h_{n,2}(c_{2m}) & f_{n,2}(c_{2m}) & \cdots & h_{n,m}(c_{2m}) & f_{n,m}(c_{2m}) \end{vmatrix}.$$

Ahora teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} f_{n,j}(c_1) &= h_{n,j}(c_1) = 1 \quad \forall j : 1 \leq j \leq m \\ f_{n,j}(c_2) &= r_n^{\alpha_n^{(j)}} := d_j & h_{n,j}(c_2) &= r_n^{\overline{\alpha_n^{(j)}}} := e_j \\ f_{n,j}(c_3) &= (r_n^2)^{\alpha_n^{(j)}} = d_j^2 & h_{n,j}(c_3) &= (r_n^2)^{\overline{\alpha_n^{(j)}}} = e_j^2 \\ \dots\dots\dots & & & \\ f_{n,j}(c_{2m}) &= (r_n^{2m-1})^{\alpha_n^{(j)}} = d_j^{2m-1} & h_{n,j}(c_{2m}) &= (r_n^{2m-1})^{\overline{\alpha_n^{(j)}}} = e_j^{2m-1}, \end{aligned}$$

el determinante anterior se convierte en el Vandermonde siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ d_1 & e_1 & d_2 & e_2 & \cdots & d_m & e_m \\ d_1^2 & e_1^2 & d_2^2 & e_2^2 & \cdots & d_m^2 & e_m^2 \\ \dots\dots\dots & & & & & & \\ d_1^{2m-1} & e_1^{2m-1} & d_2^{2m-1} & e_2^{2m-1} & \cdots & d_m^{2m-1} & e_m^{2m-1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_{2m-1}^2 & a_{2m}^2 \\ \dots\dots\dots & & & & & & \\ a_1^{2m-1} & a_2^{2m-1} & a_3^{2m-1} & a_4^{2m-1} & \cdots & a_{2m-1}^{2m-1} & a_{2m}^{2m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{j>k} (a_j - a_k) \neq 0.$$

Para comprobar que efectivamente es no nulo, veamos en primer lugar que  $d_j \neq d_k$  si  $j \neq k$ :

$$d_j = r_n^{\alpha_n^{(j)}} = e^{\alpha_n^{(j)} \ln(r_n)} = e^{(a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}) \ln(r_n)} = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

entonces su módulo y argumento principal vienen dados respectivamente por

$$|d_j| = r_n^{a_n^{(j)}}; \quad \text{Arg}(d_j) = b_n^{(j)} \ln(r_n)$$

ya que debido a la elección escogida se tiene que

$$-\pi \leq b_n^{(j)} \ln(r_n) \leq \pi.$$

Por tanto, como  $\alpha_n^{(j)} \neq \alpha_n^{(k)}$  si  $j \neq k$ , entonces necesariamente vemos que  $d_j \neq d_k$  si  $j \neq k$ .

Además, con el mismo razonamiento se tiene que  $e_j \neq e_k$  si  $j \neq k$ .

Por otra parte  $d_j \neq e_j$  ya que

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}; \quad e_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{-ib_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} |d_j| &= |e_j| = r_n^{a_n^{(j)}}, \\ \text{Arg}(d_j) &= -\text{Arg}(e_j) \neq 0 \text{ (ya que } b_n^{(j)} \neq 0 \text{ y } r_n > 1). \end{aligned}$$

Queda probar entonces que  $d_j \neq e_k$  si  $j \neq k$ . Para ello, observemos que

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}; \quad e_k = r_n^{a_n^{(k)}} \cdot e^{-ib_n^{(k)} \ln(r_n)},$$

luego

$$\begin{aligned} |d_j| &= r_n^{a_n^{(j)}}, & \text{Arg}(d_j) &= b_n^{(j)} \ln(r_n) \\ |e_k| &= r_n^{a_n^{(k)}}, & \text{Arg}(e_k) &= -b_n^{(k)} \ln(r_n). \end{aligned}$$

En el caso de que  $|d_j| \neq |e_k|$  evidentemente se tiene que  $d_j \neq e_k$ . En caso contrario, si  $|d_j| = |e_k|$ , entonces  $a_n^{(j)} = a_n^{(k)}$  y por tanto  $b_n^{(j)} \neq b_n^{(k)}$ , pero teniendo en cuenta además el hecho de que  $b_n^{(j)} \neq -b_n^{(k)}$  (ya que hemos tomado los ceros del semiplano superior) se tiene que  $\text{Arg}(d_j) \neq \text{Arg}(e_k)$  y queda probado entonces que  $d_j \neq e_k$ .

Consecuentemente acabamos de probar que

$$a_j \neq a_k \text{ si } j \neq k.$$

Por tanto, el determinante es, efectivamente, distinto de 0, y en consecuencia  $f_{n,j}^{(1)}(x)$  y  $f_{n,j}^{(2)}(x)$  son linealmente independientes para todo cero  $\alpha_n^{(j)}$  de (1.3), ninguno conjugado de otro.  $\square$

Un caso particular del teorema que acabamos de probar se alcanza cuando  $n = 2$ , ya que en tal caso todos los ceros de  $G_2(z)$  son imaginarios puros y, por tanto, un tipo particular de regiones compactas en  $\{z : \text{Re } z > 0\}$ , para las cuales existe una ecuación funcional de la cual se pueden extraer soluciones que las  $\alpha$ -densifican, son los rectángulos.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

## Capítulo 3

# Cuadratura

---

En este capítulo es esencial considerar la siguiente definición:

**Definición 3.1** Sea  $K$  un conjunto densificable de  $\mathbb{R}^{m+1}$  con contenido de Jordan positivo  $J_{m+1}(K)$ . Una familia de curvas  $\alpha$ -densas en  $K$  y rectificables se dice que tiene la **propiedad de cuadratura** en  $K$  si

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} L(\gamma_\alpha) \cdot \alpha^m = J_{m+1}(K),$$

donde  $L(\gamma_\alpha)$  es la longitud de cada  $\gamma_\alpha$ .

### 3.1. Justificación geométrica y resultados previos

La idea de utilizar las propiedades de densificación del espacio de las curvas  $\alpha$ -densas proviene de la posibilidad de expresar, de un modo aproximado, el área del recinto que densifican mediante el producto de la longitud de la curva por la densidad de la misma.

Veamos algunos ejemplos sencillos de esta propiedad:

**Ejemplo 3.1** Sea  $K = [0, 1]^2$  el cuadrado unidad y  $m \geq 2$  un entero. Consideremos la curva  $\gamma_m : I \rightarrow K$  definida de la siguiente manera:

$$\gamma_m(t) = \begin{cases} (t, mt) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{m}\right], \\ (t, 2 - mt) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right], \end{cases}$$

(en el resto de intervalos la curva se define por periodicidad, con periodo  $\frac{2}{m}$ ).  
(Ver figura 3.4)

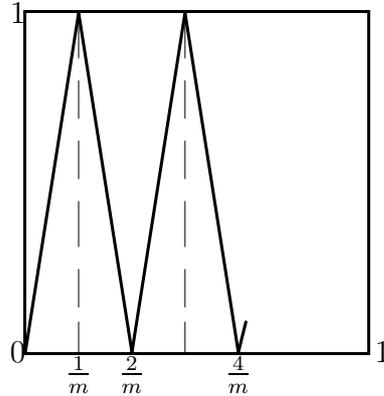


Figura 3.4

Es inmediato comprobar que  $\gamma_m$  densifica el cuadrado unidad  $K$  con densidad  $\alpha = \frac{1}{m}$ . Además su longitud viene dada por

$$L(\gamma_m) = m\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}.$$

De esta forma, el producto de dicha longitud por la densidad es

$$L(\gamma_m) \cdot \alpha = m\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \cdot \frac{1}{m} = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}},$$

por tanto, tomando el límite cuando la densidad tiende a 0, lo que es equivalente a que  $m \rightarrow \infty$ , se obtiene el área del cuadrado unidad:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L(\gamma_m) \cdot \alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} = 1 = \text{Área}(K).$$

Sin embargo, este resultado depende del tipo de curva elegida para la densificación del dominio. Como ejemplo de ello consideraremos en el mismo cuadrado unidad  $K$  la siguiente curva:

**Ejemplo 3.2** Sea  $m$  un múltiplo de 4, consideremos ahora la curva  $\gamma_m : I \rightarrow K$  definida de la siguiente manera:

$$\gamma_m(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{m}\right], \\ \left(\frac{1}{m}, mt - 1\right) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right], \\ \left(2t - \frac{3}{m}, 1\right) & \text{si } t \in \left[\frac{2}{m}, \frac{3}{m}\right], \\ \left(\frac{3}{m}, 4 - mt\right) & \text{si } t \in \left[\frac{3}{m}, \frac{4}{m}\right], \end{cases}$$

(en el resto de intervalos la curva se define por periodicidad, con periodo  $\frac{4}{m}$ ).  
(Ver figura 3.5)

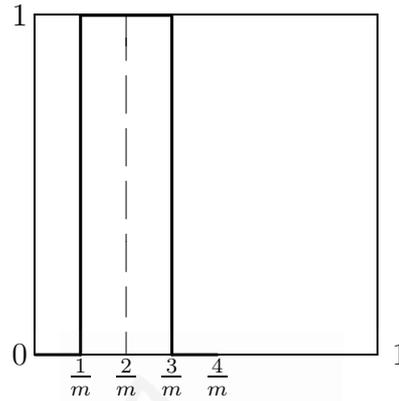


Figura 3.5

Comprobamos que la densidad sigue siendo  $\alpha = \frac{1}{m}$ , y la longitud de la curva viene dada por

$$L(\gamma_m) = \frac{m}{2} + 1.$$

En esta ocasión se tiene que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L(\gamma_m) \cdot \alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \text{Área}(K).$$

En los casos en que la familia verifique  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} L(\gamma_\alpha) \cdot \alpha^m < J_{m+1}(K)$  (como es el caso de este segundo ejemplo), la propiedad de cuadratura aún se puede conservar teniendo en cuenta el hecho de que si una curva  $\gamma$  es  $\alpha$ -densa en  $K$  entonces también es  $\beta$ -densa en  $K$  para cualquier  $\beta \geq \alpha$ . Para ello, establecemos el siguiente resultado:

**Proposición 3.1** Sea  $K$  un conjunto densificable de  $R^{m+1}$  con contenido de Jordan  $J_{m+1}(K) > 0$  y sea  $\{\gamma_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$  una familia de curvas  $\alpha$ -densas en  $K$  y rectificables verificando

$$0 < \lim_{\alpha \rightarrow 0} L(\gamma_\alpha) \alpha^m \leq J_{m+1}(K).$$

Entonces la familia determinada por

$$\{\gamma_\beta : \beta = \delta \alpha, \alpha \in \Gamma\}, \text{ con } \delta = \left( \frac{J_{m+1}(K)}{\lim_{\alpha \rightarrow 0} L(\gamma_\alpha) \alpha^m} \right)^{\frac{1}{m}},$$

tiene la propiedad de cuadratura en  $K$ .

**Prueba.** Veamos que efectivamente  $\lim_{\beta \rightarrow 0} L(\gamma_\beta) \cdot \beta^m = J_{m+1}(K)$ , con  $\beta = \delta\alpha$ . En efecto, teniendo en cuenta el hecho de que  $\alpha \rightarrow 0$  si y solo si  $\beta \rightarrow 0$ , entonces

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} L(\gamma_\beta) \cdot \beta^m = \lim_{\alpha \rightarrow 0} L(\gamma_\beta) \cdot \frac{J_{m+1}(K)}{\lim_{\alpha \rightarrow 0} L(\gamma_\alpha) \cdot \alpha^m} \cdot \alpha^m = J_{m+1}(K),$$

quedando probado el resultado.  $\square$

### 3.2. La propiedad de cuadratura de las soluciones de $f(x) + f(2x) = 0$

Tras estas consideraciones previas, abordaremos la propiedad de cuadratura de la familia de soluciones  $\alpha$ -densas de

$$f(x) + f(2x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

generadas por la función  $G_2(z)$ . Posteriormente generalizaremos el resultado para cualquier  $n > 2$ .

Por tanto, en esta sección trataremos de dar respuesta al problema de encontrar, si existe, alguna familia de soluciones de la ecuación  $f(x) + f(2x) = 0$  que tengan la propiedad de cuadratura en el compacto que densifiquen.

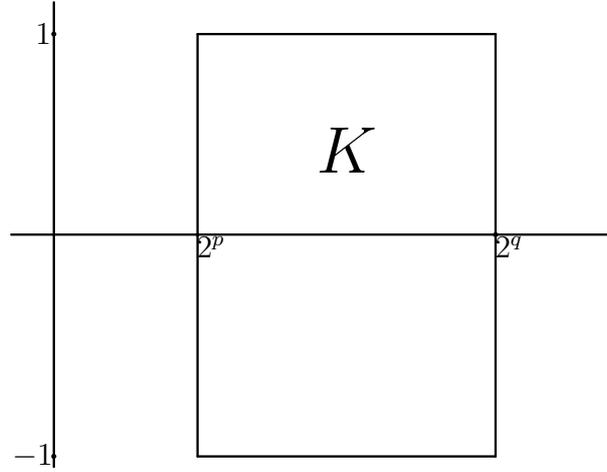
Recordemos que cuando  $n = 2$ , todos los ceros de  $G_2(z)$  son imaginarios puros y los compactos que aparecen en el teorema de densificación son rectángulos. Además, en tal caso, relacionado con el teorema de densificación (teorema 2.2), se puede comprobar directamente que las soluciones  $f_{2,k}^{(1)}(x) = \cos(b_k \log(x))$  y  $f_{2,k}^{(2)}(x) = \sin(b_k \log(x))$  (con  $b_k = \frac{(2k+1)\pi}{\log 2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) de la ecuación  $f(x) + f(2x) = 0$ , tienen densidad  $\alpha$  en el compacto  $[2^p, 2^q] \times [-1, 1]$  si  $k \geq m$ , con  $m$  cumpliendo  $1 - 2^{-(3/2)/(2m+1)} < \alpha 2^{-q}$ , y  $p, q \in \mathbb{Z}$  ( $p < q$ ).

El área del compacto considerado (ver Figura 3.6) es la siguiente

$$J_2(K) = (2^q - 2^p) \cdot 2.$$

Tomando, por ejemplo,  $f_{2,k}^{(1)}(x) = \cos(b_k \log(x))$ , la longitud de su gráfica en el intervalo  $[2^p, 2^q]$  viene dada por

$$L(f_{2,k}^{(1)}(x)) = \int_{2^p}^{2^q} \sqrt{1 + \frac{b_k^2}{x^2} \sin^2(b_k \log x)} \, dx.$$

Figura 3.6: Conjunto  $K$ 

Haciendo el cambio de variable  $b_k \log x = t$  ( $dx = \frac{e^{t/b_k}}{b_k} dt$ ), la integral se convierte en

$$\int_{b_k \log 2^p}^{b_k \log 2^q} \sqrt{1 + \frac{b_k^2}{e^{2t/b_k}} \sin^2 t} \cdot \frac{e^{t/b_k}}{b_k} dt = \int_{b_k \log 2^p}^{b_k \log 2^q} \sqrt{\frac{e^{2t/b_k}}{b_k^2} + \sin^2 t} dt =$$

$$= \sum_{j=p(2k+1)}^{q(2k+1)-1} I_k^{(j)},$$

siendo

$$I_k^{(j)} = \int_{b_k \log y_{k,j}}^{b_k \log y_{k,j+1}} \sqrt{\frac{e^{2t/b_k}}{b_k^2} + \sin^2 t} dt \quad \text{con } y_{k,j} = 2^{\frac{j}{2k+1}}.$$

Ahora, puesto que

$$b_k \log y_{k,j} = b_k \log 2^{\frac{j}{2k+1}} = \frac{(2k+1)\pi}{\log 2} \log 2^{\frac{j}{2k+1}} = j\pi,$$

las integrales que definen  $I_k^{(j)}$  toman la siguiente expresión

$$I_k^{(j)} = \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \sqrt{\frac{e^{2t/b_k}}{b_k^2} + \sin^2 t} dt.$$

Dado que tenemos una cantidad finita de integrales  $((q-p)(2k+1)$  sumandos), podemos afirmar que  $\exists j_1, j_2$  tal que

$$I_k^{(j_1)} = \min\{I_k^{(j)}, j = p(2k+1), p(2k+1)+1, \dots, q(2k+1)-1\}, \quad (3.1)$$

$$I_k^{(j_2)} = \max\{I_k^{(j)}, j = p(2k+1), p(2k+1)+1, \dots, q(2k+1)-1\}. \quad (3.2)$$

Consideremos  $\alpha > 0$  arbitrario, tomando ahora  $\beta = \frac{1}{(q-p)(2k+1)}$ , con  $k$  verificando la condición previamente considerada que define las funciones  $f_{2,k}^{(1)}(x)$ , es decir,  $1 - 2^{-(3/2)/(2k+1)} < \alpha 2^{-q}$ , evidentemente se tiene que  $\beta \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , y además, definiendo

$$L_\beta := \beta \cdot L(f_{2,k}^{(1)}(x)),$$

se cumple claramente que

$$I_k^{(j_1)} \leq L_\beta \leq I_k^{(j_2)},$$

siendo

$$I_k^{(j_1)} = \int_{j_1\pi}^{(j_1+1)\pi} \sqrt{\frac{e^{2t/b_k}}{b_k^2} + \text{sen}^2 t} dt,$$

$$I_k^{(j_2)} = \int_{j_2\pi}^{(j_2+1)\pi} \sqrt{\frac{e^{2t/b_k}}{b_k^2} + \text{sen}^2 t} dt,$$

con  $j_1$  y  $j_2$  considerados en (3.1) y (3.2) respectivamente.

Realizando el cambio de variable  $u = t - j_1\pi$  para la integral que define  $I_k^{(j_1)}$  se tiene

$$I_k^{(j_1)} = \int_{j_1\pi}^{(j_1+1)\pi} \sqrt{\frac{e^{2t/b_k}}{b_k^2} + \text{sen}^2 t} dt = \int_0^\pi \sqrt{\frac{e^{2(u+j_1\pi)/b_k}}{b_k^2} + \text{sen}^2 u} du.$$

De forma análoga, con el cambio de variable  $u = t - j_2\pi$  para la integral  $I_k^{(j_2)}$ , se tiene

$$I_k^{(j_2)} = \int_{j_2\pi}^{(j_2+1)\pi} \sqrt{\frac{e^{2t/b_k}}{b_k^2} + \text{sen}^2 t} dt = \int_0^\pi \sqrt{\frac{e^{2(u+j_2\pi)/b_k}}{b_k^2} + \text{sen}^2 u} du,$$

ya que  $\text{sen}^2 u = \text{sen}^2(u + j\pi)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

Tomando límites, y en virtud del teorema de la convergencia monótona, se tiene entonces que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k^{(j_1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k^{(j_2)} = \int_0^\pi \sqrt{\text{sen}^2 u} du = 2.$$

En consecuencia,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} L_\beta = \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \cdot L(f_{2,k}^{(1)}(x)) = 2.$$

Para finalizar, tomando  $\alpha' = (2^q - 2^p)\beta$  se verifica que

$$\lim_{\alpha' \rightarrow 0} L(f_{2,k}^{(1)}(x)) \cdot \alpha' = J_2(K),$$

ya que

$$\lim_{\alpha' \rightarrow 0} L(f_{2,k}^{(1)}(x)) \cdot \alpha' = (2^q - 2^p) \lim_{\beta \rightarrow 0} L(f_{2,k}^{(1)}(x)) \cdot \beta = (2^q - 2^p) \cdot 2 = J_2(K),$$

lo que demuestra la propiedad de cuadratura en el caso  $n = 2$ .

### 3.3. Caso general

Una vez visto el caso  $n = 2$  y tomando como idea esa misma prueba, trataremos de extender el resultado para el caso general obteniendo el siguiente teorema principal:

**Teorema 3.2** *Existe una familia de soluciones de la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$  que tienen la propiedad de cuadratura en el compacto que densifican.*

**Prueba.** Sabemos por lo realizado en el capítulo anterior que las soluciones  $f_n^{(1)}(x) = x^{a_n} \cos(b_n \log(x))$  y  $f_n^{(2)}(x) = x^{a_n} \sin(b_n \log(x))$  de la ecuación funcional tienen densidad  $\alpha$  en el compacto determinado por

$$y = x^{a_n}, \quad y = -x^{a_n},$$

y por las rectas

$$x = e^{p\pi}, \quad x = e^{q\pi}, \quad (p, q \in \mathbb{Z} \quad p < q),$$

con  $a_n + ib_n$  solución de  $G_n(z) = 0$  y  $b_n$  suficientemente grande tal que  $e^{\frac{\pi}{b_n}} - e^{\frac{\pi}{2b_n}} < \alpha e^{\frac{-l\pi}{b_n}}$  para un determinado  $l \in \mathbb{N}$ .

El área del compacto considerado (ver Figura 2.7) es la siguiente:

$$J_2(K) = 2 \int_{e^{p\pi}}^{e^{q\pi}} x^{a_n} dx = \begin{cases} \frac{2}{a_n + 1} [e^{(a_n+1)p\pi} - e^{(a_n+1)q\pi}], & \text{si } a_n \neq -1 \\ 2(q - p)\pi, & \text{si } a_n = -1. \end{cases}$$

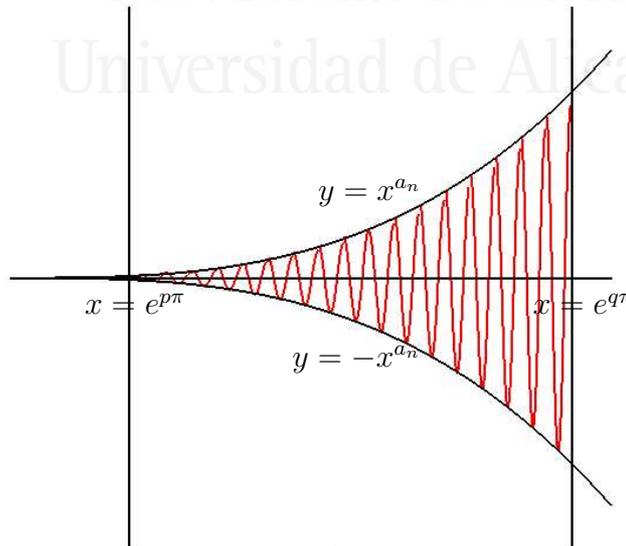


Figura 2.7: Compacto  $K$

Tomando por ejemplo  $f_n^{(1)}(x) = x^{a_n} \cos(b_n \log(x))$ , la longitud de su gráfica en el intervalo  $[e^{p\pi}, e^{q\pi}]$  es

$$L(f_n^{(1)}(x)) = \int_{e^{p\pi}}^{e^{q\pi}} \sqrt{1 + x^{2(a_n-1)} [a_n \cos(b_n \log x) - b_n \sin(b_n \log x)]^2} dx.$$

Realizando el cambio de variable  $b_n \log x = t$  ( $dx = \frac{e^{t/b_n}}{b_n} dt$ ), la integral que determina la longitud se convierte en

$$\begin{aligned} & \int_{b_n \log e^{p\pi}}^{b_n \log e^{q\pi}} \sqrt{1 + e^{2t(a_n-1)/b_n} [a_n \cos t - b_n \operatorname{sen} t]^2} \cdot \frac{e^{t/b_n}}{b_n} dt = \\ & = \int_{b_n \log e^{p\pi}}^{b_n \log e^{q\pi}} \sqrt{\frac{e^{2t/b_n}}{b_n^2} + \frac{e^{2a_n t/b_n}}{b_n^2} [a_n \cos t - b_n \operatorname{sen} t]^2} dt. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora la descomposición  $b_n = b'_n + c_n$ , con  $b'_n = [b_n] \in \mathbb{N}$  y  $c_n \in [0, 1)$ , se tiene  $b_n \rightarrow \infty$  si y sólo si  $b'_n \rightarrow \infty$ , y entonces la integral anterior la podemos expresar como

$$\sum_{k=pb'_n}^{qb'_n-1} I_n^{(k)},$$

donde

$$I_n^{(k)} = \int_{b_n \log y_{n,k}}^{b_n \log y_{n,k+1}} \sqrt{\frac{e^{2t/b_n}}{b_n^2} + \frac{e^{2a_n t/b_n}}{b_n^2} [a_n \cos t - b_n \operatorname{sen} t]^2} dt, \quad \text{con } y_{n,k} = e^{\frac{k\pi}{b'_n}}.$$

Puesto que

$$b_n \log y_{n,k} = b_n \log e^{\frac{k\pi}{b'_n}} = \frac{k\pi b_n}{b'_n} = \frac{k\pi(b'_n + c_n)}{b'_n} = k\pi + \frac{c_n k\pi}{b'_n},$$

entonces,

$$I_n^{(k)} = \int_{k\pi + \frac{c_n k\pi}{b'_n}}^{(k+1)\pi + \frac{c_n(k+1)\pi}{b'_n}} \sqrt{\frac{e^{2t/b_n}}{b_n^2} + \frac{e^{2a_n t/b_n}}{b_n^2} [a_n \cos t - b_n \operatorname{sen} t]^2} dt.$$

Dado que existe una cantidad finita de integrales ( $(q-p)b'_n$  sumandos), podemos afirmar que  $\exists k_1, k_2$  tal que

$$I_n^{(k_1)} = \min\{I_n^{(k)}, k = pb'_n, pb'_n + 1, \dots, qb'_n - 1\}, \quad (3.3)$$

$$I_n^{(k_2)} = \max\{I_n^{(k)}, k = pb'_n, pb'_n + 1, \dots, qb'_n - 1\}. \quad (3.4)$$

Fijado previamente  $\alpha > 0$  arbitrario y tomando  $\beta = \frac{1}{(q-p)b'_n}$ , con  $b'_n$  verificando la misma condición que define las funciones  $f_n^{(1)}(x)$ , es decir,  $e^{\frac{\pi}{b'_n}} - e^{\frac{\pi}{2b'_n}} < \alpha e^{\frac{-l\pi}{b'_n}}$  para un determinado  $l \in \mathbb{N}$ , se verifica que  $\beta \rightarrow 0$  cuando  $b'_n \rightarrow \infty$  (sii  $b_n \rightarrow \infty$ ), y además, definiendo

$$L_\beta := \beta \cdot L(f_n^{(1)}(x)),$$

se cumple claramente que

$$I_n^{(k_1)} \leq L_\beta \leq I_n^{(k_2)},$$

siendo

$$I_n^{(k_1)} = \int_{k_1\pi + \frac{c_n k_1 \pi}{b'_n}}^{(k_1+1)\pi + \frac{c_n(k_1+1)\pi}{b'_n}} \sqrt{\frac{e^{2t/b_n}}{b_n^2} + \frac{e^{2a_n t/b_n}}{b_n^2} [a_n \cos t - b_n \sin t]^2} dt,$$

$$I_n^{(k_2)} = \int_{k_2\pi + \frac{c_n k_2 \pi}{b'_n}}^{(k_2+1)\pi + \frac{c_n(k_2+1)\pi}{b'_n}} \sqrt{\frac{e^{2t/b_n}}{b_n^2} + \frac{e^{2a_n t/b_n}}{b_n^2} [a_n \cos t - b_n \sin t]^2} dt,$$

con  $k_1$  y  $k_2$  considerados en (3.3) y (3.4) respectivamente.

Realizando el cambio de variable  $u = t - \left(k_1\pi + \frac{c_n k_1 \pi}{b'_n}\right)$  para la integral que define  $I_n^{(k_1)}$  se tiene que

$$I_n^{(k_1)} = \int_0^{\pi + \frac{c_n \pi}{b'_n}} \sqrt{\frac{e^{2(u+k_1\pi + \frac{c_n k_1 \pi}{b'_n})/b_n}}{b_n^2} + \frac{e^{2a_n(u+k_1\pi + \frac{c_n k_1 \pi}{b'_n})/b_n}}{b_n^2}} \cdot \left[ a_n \cos \left( u + k_1\pi + \frac{c_n k_1 \pi}{b'_n} \right) - b_n \sin \left( u + k_1\pi + \frac{c_n k_1 \pi}{b'_n} \right) \right]^2 du. \quad (3.5)$$

De forma análoga, con el cambio de variable  $u = t - \left(k_2\pi + \frac{c_n k_2 \pi}{b'_n}\right)$  para la integral  $I_n^{(k_2)}$ , se tiene que

$$I_n^{(k_2)} = \int_0^{\pi + \frac{c_n \pi}{b'_n}} \sqrt{\frac{e^{2(u+k_2\pi + \frac{c_n k_2 \pi}{b'_n})/b_n}}{b_n^2} + \frac{e^{2a_n(u+k_2\pi + \frac{c_n k_2 \pi}{b'_n})/b_n}}{b_n^2}} \cdot \left[ a_n \cos \left( u + k_2\pi + \frac{c_n k_2 \pi}{b'_n} \right) - b_n \sin \left( u + k_2\pi + \frac{c_n k_2 \pi}{b'_n} \right) \right]^2 du. \quad (3.6)$$

Tomando ahora límites en las distintas partes que componen las integrales (3.5) y (3.6), para  $k = k_1$  o  $k = k_2$ , se tiene que

$$\lim_{b'_n \rightarrow \infty} \frac{e^{2(u+k\pi + \frac{c_n k \pi}{b'_n})/b_n}}{b_n^2} = 0,$$

y además,

$$\begin{aligned} \lim_{b'_n \rightarrow \infty} \frac{e^{2a_n(u+k\pi+\frac{c_n k\pi}{b'_n})/b_n}}{b_n^2} \cdot \left[ a_n \cos \left( u + k\pi + \frac{c_n k\pi}{b'_n} \right) - b_n \sin \left( u + k\pi + \frac{c_n k\pi}{b'_n} \right) \right]^2 = \\ = \sin^2(u + k\pi) = \sin^2 u. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{b'_n \rightarrow \infty} I_n^{(k_1)} = \lim_{b'_n \rightarrow \infty} I_n^{(k_2)} = \int_0^\pi \sin u \, du = 2,$$

y por tanto,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} L_\beta = \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \cdot L(f_n^{(1)}(x)) = 2.$$

Para finalizar sólo nos queda tomar

$$\alpha' = \begin{cases} \frac{[e^{(a_n+1)p\pi} - e^{(a_n+1)q\pi}]}{a_n + 1} \cdot \beta, & \text{si } a_n \neq -1 \\ (q-p)\pi \cdot \beta, & \text{si } a_n = -1, \end{cases}$$

y comprobar que  $\lim_{\alpha' \rightarrow 0} L(f_n^{(1)}(x)) \cdot \alpha' = J_2(K)$ . En efecto,

$$\lim_{\alpha' \rightarrow 0} L(f_n^{(1)}(x)) \cdot \alpha' = \begin{cases} \frac{[e^{(a_n+1)p\pi} - e^{(a_n+1)q\pi}]}{a_n + 1} \cdot \lim_{\beta \rightarrow 0} L(f_n^{(1)}(x)) \cdot \beta = J_2(K), & \text{si } a_n \neq -1 \\ (q-p)\pi \cdot \lim_{\beta \rightarrow 0} L(f_n^{(1)}(x)) \cdot \beta = J_2(K), & \text{si } a_n = -1. \end{cases}$$

□

---

## Capítulo 4

# Soluciones no continuas

---

En este capítulo retomaremos las ecuaciones funcionales

$$f(z) + f(2z) + f(3z) + \cdots + f(nz) = 0, \text{ con } z \in \mathbb{C}, \quad (4.1)$$

y

$$f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(nx) = 0, \text{ con } x \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

En el capítulo introductorio encontramos soluciones continuas en el abierto  $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  de (4.1) de la forma

$$f_{n,j}(z) = z^{\alpha_n^{(j)}}, \text{ con } \alpha_n^{(j)} \text{ satisfaciendo } G_n(z) = 0.$$

En particular, para  $z = x \in \mathbb{R}$ , una solución de (4.2) viene dada por  $f_{n,j}(x) = x^{\alpha_n^{(j)}}$ , siendo  $\alpha_n^{(j)}$  una solución de  $G_n(z) = 0$ . Por tanto, si  $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ , entonces

$$f_{n,j}(x) = x^{a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}} = x^{a_n^{(j)}} e^{ib_n^{(j)} \log(x)},$$

y separando la parte real e imaginaria nos quedan las siguientes funciones reales de variable real:

$$f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \cos(b_n^{(j)} \log(x)), \quad (4.3)$$

$$f_{n,j}^{(2)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \operatorname{sen}(b_n^{(j)} \log(x)), \quad (4.4)$$

que son soluciones de (4.2).

Además debido a que  $G_n(z)$  tiene infinitos ceros  $\forall n \geq 2$ , se demostró que hay infinitas soluciones continuas de (4.1) y (4.2).

## 4.1. Resultados previos

Antes del cálculo de algunas soluciones no continuas, expondremos en esta sección algunos resultados teóricos. Demostraremos en primer lugar la siguiente proposición que hace referencia a la analiticidad <sup>1</sup> en el origen de las soluciones de (4.1):

**Proposición 4.1** *Sea  $F(z)$  cualquier solución no idénticamente nula de  $f(z) + f(2z) + f(3z) + \dots + f(nz) = 0$ , con  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $F(z)$  es no analítica en  $z = 0$ .*

**Prueba.** Por reducción al absurdo, si afirmamos la existencia de una función  $F(z)$  analítica en  $z = 0$ , entonces  $F(z)$  es analítica en algún abierto  $U$  que contenga al 0. Teniendo en cuenta ahora que si  $F$  es analítica en  $U$  entonces existen las derivadas de cualquier orden de  $F$  en  $U$ , utilizando la ecuación funcional tenemos que

$$F^{(m)}(z) + 2^m F^{(m)}(2z) + \dots + n^m F^{(m)}(nz) = 0$$

para cada  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \geq 0$ .

En particular, para  $z = 0$  tenemos que

$$F^{(m)}(0) = 0, \quad \forall m \geq 0.$$

Por tanto, el desarrollo de Taylor en serie de potencias nos dice que  $F(z) \equiv 0$  en un cierto entorno de 0, consecuentemente por el principio de identidad de las funciones analíticas  $F(z)$  es idénticamente nula en cualquier abierto que contenga a 0 y la proposición queda probada.  $\square$

Nos centraremos en el dominio real, en concreto, a partir de las consideraciones iniciales analizaremos las **soluciones no continuas de (4.2)**.

Sin embargo, antes de encontrar soluciones no continuas, expondremos en primer lugar la siguiente propiedad sobre la continuidad en  $x = 0$  de las soluciones de (4.2) para el caso  $n = 2$ :

**Proposición 4.2** *Cualquier solución no idénticamente nula de la ecuación funcional*

$$f(x) + f(2x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.5}$$

*es no continua en 0.*

**Prueba.** Sea  $F$  una solución no idénticamente nula de (4.5). Dado que además necesariamente  $F(0) = 0$  existe  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  tal que  $F(a) \neq 0$ .

Por otra parte, de (4.5), se tiene que la sucesión

$$(2^{-k}a)_{k=1,2,\dots}$$

---

<sup>1</sup>Conviene aclarar que aquí y en lo sucesivo analiticidad es equivalente a holomorfía

satisface

$$F(2^{-k}a) = (-1)^k F(a).$$

Tal hecho prueba que  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$  no existe y en consecuencia la proposición queda probada.  $\square$

Para finalizar esta sección, estableceremos un resultado que supone, en un cierto sentido, una generalización de la proposición (4.2):

**Teorema 4.3** *Si la función entera  $G_n(z) = 1 + 2^z + \cdots + n^z$  tiene algún cero en el semiplano  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$  entonces la ecuación funcional*

$$f(x) + f(2x) + \cdots + f(nx), \quad x \in \mathbb{R}$$

*tiene alguna solución continua en  $\mathbb{R}$ .*

**Prueba.** Sea  $\alpha_n$  un cero de  $G_n(z)$  con  $\operatorname{Re} \alpha_n > 0$ . Teniendo en cuenta que  $G_n(z)$  no tiene ceros reales, escribiendo  $\alpha_n := a_n + ib_n$ ,  $a_n > 0$ , necesariamente  $b_n \neq 0$ , y por tanto  $n > 2$ .

Sea

$$F(x) = \begin{cases} f_n^{(1)}(x), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ f_n^{(1)}(-x), & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donde  $f_n^{(1)}(x) := x^{a_n} \cos(b_n \log(x))$ , definida como en (4.3), está asociada al cero  $\alpha_n$ .

Entonces

$$\lim_{x > 0, x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x < 0, x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x > 0, x \rightarrow 0} x^{a_n} \cos(b_n \log x) = 0,$$

lo que implica que  $F(x)$  es continua en  $x = 0$ .

Por otra parte,

$$\begin{aligned} F(x) + F(2x) + \cdots + F(nx) &= \operatorname{Re}(x^{\alpha_n} + (2x)^{\alpha_n} + \cdots + (nx)^{\alpha_n}) = \\ &= \operatorname{Re}(x^{\alpha_n}(1 + 2^{\alpha_n} + \cdots + n^{\alpha_n})) = 0 \end{aligned}$$

para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  y, en consecuencia,  $F(x)$  es una solución continua en  $\mathbb{R}$  de la ecuación funcional considerada.  $\square$

Queda abierto el problema mencionado referente al recíproco de este teorema.

## 4.2. Primer procedimiento

Con el objetivo de obtener soluciones no continuas para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , introduciremos en este primer procedimiento las siguientes consideraciones. Para cada  $n \geq 2$ , sea  $A \subset \mathbb{R}^+$  que verifique la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} \text{si } x \in A &\Rightarrow kx \in A \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ y adem\u00e1s} \\ \text{si } x \notin A &\Rightarrow kx \notin A \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Como ejemplo de conjunto  $A$  podemos tomar el de los n\u00fameros racionales positivos,  $\mathbb{Q}^+$ , o tambi\u00e9n  $\Pi_n$ , siendo \u00e9ste el grupo generado por todos los primos menores o iguales que  $n$ , es decir, si  $p_n$  es el m\u00e1ximo primo tal que  $p_n \leq n$ , entonces

$$\Pi_n = \{x \in \mathbb{Q}, x = 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdots p_n^{m_k}, \text{ con } m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{Z}\}.$$

Podemos observar claramente que tanto  $\mathbb{Q}^+$  como  $\Pi_n$  verifican la condici\u00f3n requerida.

Dado un conjunto  $A$  que verifique la propiedad (4.6), y siendo  $f_{n,j}^{(1)}(x)$ ,  $f_{n,j}^{(2)}(x)$  las funciones consideradas en (4.3) y (4.4), para  $x > 0$  definiremos

$$F^{(1)}(x) = \begin{cases} f_{n,j}^{(1)}(x), & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

$$F^{(2)}(x) = \begin{cases} f_{n,j}^{(2)}(x), & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

para  $x < 0$

$$F^{(i)}(x) := F^{(i)}(-x), \quad i = 1, 2,$$

y adem\u00e1s

$$F^{(i)}(x) := 0 \text{ para } x = 0, \quad i = 1, 2.$$

Teniendo en cuenta las funciones  $F^{(1)}(x)$  y  $F^{(2)}(x)$ , el siguiente resultado se obtiene f\u00e1cilmente:

**Teorema 4.4**  $F^{(1)}, F^{(2)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  son soluciones no continuas de la ecuaci\u00f3n funcional  $f(x) + f(2x) + \cdots + f(nx) = 0$ .

En el caso particular de tomar  $A = \mathbb{Q}^+$ , y considerando  $B = \{x_i, i \in I\}$  una base de Hamel sobre  $\mathbb{R}$ , es decir, cada n\u00famero real  $x$  expresado de forma \u00fanica en la forma  $x = \sum_{i \in J} q_i x_i$ , siendo  $J$  un subconjunto finito del conjunto de \u00edndices  $I$  y  $q_i \in \mathbb{Q} \quad \forall i \in I$ , entonces siguiendo la notaci\u00f3n empleada anteriormente se obtiene el siguiente teorema:

**Teorema 4.5** Para cada base de Hamel fijada  $B$  y para cualquier función real arbitraria  $h$  definida en  $B$ , las funciones  $F_h^{(i)}(x)$  definidas de la siguiente manera,

$$F_h^{(i)}(x) = \sum_{i \in J} F^{(i)}(q_i)h(x_i), \text{ para } i = 1, 2,$$

satisfacen la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$ .

**Prueba.** Dado que si  $x = \sum_{i \in J} q_i x_i$ , entonces  $2x = \sum_{i \in J} 2q_i x_i$ ,  $3x = \sum_{i \in J} 3q_i x_i, \dots, nx = \sum_{i \in J} nq_i x_i$ , y por aplicación del teorema anterior tenemos que

$$F^{(j)}(q_i) + F^{(j)}(2q_i) + \dots + F^{(j)}(nq_i) = 0, \forall q_i \in \mathbb{Q}, j = 1, 2,$$

entonces,

$$\begin{aligned} & F_h^{(j)}(x) + F_h^{(j)}(2x) + \dots + F_h^{(j)}(nx) = \\ &= \sum_{i \in J} F^{(j)}(q_i)h(x_i) + \sum_{i \in J} F^{(j)}(2q_i)h(x_i) + \dots + \sum_{i \in J} F^{(j)}(nq_i)h(x_i) = \\ &= \sum_{i \in J} [F^{(j)}(q_i) + F^{(j)}(2q_i) + \dots + F^{(j)}(nq_i)] h(x_i) = 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

□

### 4.3. Segundo procedimiento

A continuación se exponen otras soluciones no continuas para algunos valores de  $n$ ; estas soluciones se obtienen empleando otro tipo de técnicas que no necesitan la utilización de las soluciones continuas obtenidas anteriormente.

En primer lugar observemos el conocido resultado sobre las raíces de la unidad:

**Lema 4.6** Las raíces  $n$ -ésimas de la unidad verifican que la suma de sus partes reales e imaginarias es 0, es decir, si  $z_1, z_2, \dots, z_n$  con  $n \geq 2$ , son los ceros de la ecuación  $z^n - 1 = 0$ , entonces

$$\operatorname{Re} \left( \sum_{i=1}^n z_i \right) = 0, \quad \operatorname{Im} \left( \sum_{i=1}^n z_i \right) = 0.$$

Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ , y  $K$  una constante real, definiremos:

$$F_n(x) = \begin{cases} K e^{i \frac{2\pi}{n} g_n(x)}, & \text{si } x \in \Pi_n \\ 0, & \text{si } x \notin \Pi_n, \end{cases} \quad (4.7)$$

donde  $\Pi_n$  es el grupo que ya hemos considerado anteriormente,

$$\Pi_n = \{x \in \mathbb{Q}, x = 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdots p_n^{m_k}, \text{ con } m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{Z}\},$$

y siendo  $g_n : \Pi_n \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  una función verificando que  $\forall x \in \Pi_n$  se tiene que  $g_n(kx) \neq g_n(lx)$  si  $k \neq l$ , con  $1 \leq k, l \leq n$ . Obsérvese que  $g_n$  es una función indicadora.

En consecuencia, suponiendo la existencia de esta función  $g_n$ , se obtiene el siguiente teorema:

**Teorema 4.7** *Sea  $n \geq 2$ , con  $F_n(x)$  definida en (4.7), las funciones reales  $f_n^1(x) := \operatorname{Re}(F_n(x))$  y  $f_n^2(x) := \operatorname{Im}(F_n(x))$  son soluciones no continuas de la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + \cdots + f(nx) = 0$ .*

**Prueba.** Realizaremos la prueba para  $f_n^1(x)$  (para  $f_n^2(x)$  la prueba es análoga).

Si tomamos  $x \in \Pi_n$ , entonces

$$f_n^1(x) + f_n^1(2x) + \cdots + f_n^1(nx) = K \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^n e^{i \frac{2\pi}{n} g_n(jx)} \right) = 0,$$

ya que  $g_n(jx)$  toma todo el conjunto de valores  $\{1, 2, \dots, n\}$ , y por el lema previo se tiene que

$$\sum_{j=1}^n e^{i \frac{2\pi}{n} g_n(jx)} = 0.$$

Por otra parte, si  $x \notin \Pi_n$  entonces también se cumple que  $jx \notin \Pi_n$  para cualquier  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , y en consecuencia  $f_n^1(jx) = 0$  para cualquier  $j$ .

Consecuentemente,  $f_n^1(x)$  es una solución no continua de la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + \cdots + f(nx) = 0$ .  $\square$

Expondremos algunos ejemplos de función  $g_n : \Pi_n \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  verificando las condiciones anteriores para los primeros valores de  $n$ . Como cada  $x \in \Pi_n$  está determinado unívocamente por los exponentes de su descomposición en números primos, es equivalente a dar una definición explícita de una función  $h_n : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ , donde  $k_n$  es el número de primos menores o iguales que  $n$  y  $\mathbb{Z}_n$  es el anillo de clases de congruencia módulo  $n$ .

Obsérvese además que si  $x \in \Pi_n$  está determinado unívocamente por los exponentes  $(m_1, m_2, \dots, m_{k_n})$ , entonces  $2x$  lo está por  $(m_1 + 1, m_2, \dots, m_{k_n})$ ,  $3x$  por  $(m_1, m_2 + 1, \dots, m_{k_n})$ ,  $4x$  por  $(m_1 + 2, m_2, \dots, m_{k_n})$ , etc.

Dado  $m \in \mathbb{Z}$  denotaremos por  $[m]_p$  a la clase de congruencia módulo  $p$  del entero  $m$ .

Para el caso  $n = 2$ , la función  $h_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  tal que  $h_2(m_1) = [m_1]_2$  es evidentemente una función cumpliendo que  $h_2(m_1) \neq h_2(m_1 + 1)$ .

Para el caso  $n = 3$ , la función  $h_3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_3$  tal que  $h_3(m_1, m_2) = [m_1 + 2m_2]_3$  verifica también las condiciones requeridas ya que

$$\begin{aligned} h_3(m_1 + 1, m_2) &= [m_1 + 2m_2 + 1]_3 \\ h_3(m_1, m_2 + 1) &= [m_1 + 2m_2 + 2]_3 \end{aligned}$$

y en consecuencia  $h_3(m_1, m_2)$ ,  $h_3(m_1 + 1, m_2)$  y  $h_3(m_1, m_2 + 1)$  son distintos.

Para el caso  $n = 4$ ,  $h_4 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_4$  con  $h_4(m_1, m_2) = [m_1 + 3m_2]_4$  verifica también las condiciones requeridas.

De la misma forma se puede comprobar que las siguientes funciones cumplen las condiciones impuestas para los distintos casos de  $n$  mencionados:

$n = 5 :$

$$\begin{aligned} h_5 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_5 \\ (m_1, m_2, m_3) &\rightarrow [m_1 + 3m_2 + 4m_3]_5 \end{aligned}$$

$n = 6 :$

$$\begin{aligned} h_6 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_6 \\ (m_1, m_2, m_3) &\rightarrow [m_1 + 3m_2 + 5m_3]_6 \end{aligned}$$

$n = 7 :$

$$\begin{aligned} h_7 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_7 \\ (m_1, m_2, m_3, m_4) &\rightarrow [m_1 + 3m_2 + 5m_3 + 6m_4]_7 \end{aligned}$$

$n = 8 :$

$$\begin{aligned} h_8 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_8 \\ (m_1, m_2, m_3, m_4) &\rightarrow [m_1 + 4m_2 + 6m_3 + 7m_4]_8 \end{aligned}$$

$n = 9 :$

$$\begin{aligned} h_9 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_9 \\ (m_1, m_2, m_3, m_4) &\rightarrow [m_1 + 4m_2 + 6m_3 + 7m_4]_9 \end{aligned}$$

$n = 10 :$

$$\begin{aligned} h_{10} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_{10} \\ (m_1, m_2, m_3, m_4) &\rightarrow [m_1 + 4m_2 + 6m_3 + 9m_4]_{10} \end{aligned}$$

$n = 11$  :

$$h_{11} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{11}$$

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \longrightarrow [m_1 + 4m_2 + 6m_3 + 9m_4 + 10m_5]_{11}$$

$n = 12$  :

$$h_{12} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$$

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \longrightarrow [m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 7m_4 + 11m_5]_{12}.$$

Además para el caso  $n$  par se puede obtener otra solución no continua a partir de lo anterior. El siguiente teorema de demostración directa prueba tal hecho:

**Teorema 4.8** *Sea  $n \in \mathbb{N}$  un número par, si  $\exists g_n : \Pi_n \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  verificando  $g_n(kx) \neq g_n(lx)$  si  $k \neq l$ , con  $1 \leq k, l \leq n$ , entonces la función*

$$s_n(x) = \begin{cases} (-1)^{g_n(x)}, & \text{si } x \in \Pi_n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es también una solución no continua de  $f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$ .

## 4.4. Tercer procedimiento

Veamos aún otro tipo de procedimiento. Comenzaremos en primer lugar analizando el caso  $n = 2$  con el objetivo de encontrar soluciones no continuas en cualquier punto de la ecuación

$$f(x) + f(2x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Para cada racional  $x \neq 0$ , consideremos su expresión irreducible  $p/q$ , con  $p$  y  $q$  expresados como producto de sus factores primos.

Definiremos la característica binaria de  $x$ , denotada por  $[x]_2$ , de la siguiente forma:

$$[x]_2 = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ (-1)^k, & \text{si } x \neq 0, x = \frac{p}{q}, \end{cases}$$

donde  $k$  es el exponente de 2 en las descomposición factorial de  $p$  o bien de  $q$ .

Observemos por ejemplo que si para algún racional  $x = \frac{p}{q}$ , con  $p, q$  impares, entonces  $k = 0$  y la característica binaria de  $x$  sería 1. En cualquier caso, el siguiente resultado es inmediato:

**Proposición 4.9** *La característica binaria es una solución no continua en ningún punto de la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) = 0$ .*

Tomemos ahora  $a > 0$  arbitrario, la familia de intervalos disjuntos

$$\{[2^k a, 2^{k+1} a) : k \in \mathbb{Z}\}$$

es una partición de  $\mathbb{R}^+$ , es decir

$$(0, \infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2^k a, 2^{k+1} a).$$

Análogamente, para  $b < 0$  arbitrario

$$(-\infty, 0) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2^k b, 2^{k+1} b).$$

Entonces, dado  $x > 0$ , existe un único entero  $k_x$  tal que

$$x \in [2^{k_x} a, 2^{k_x+1} a) \quad (4.9)$$

y para  $x < 0$  existe un único entero  $m_x$  tal que

$$x \in [2^{m_x} b, 2^{m_x+1} b). \quad (4.10)$$

Dados  $a > 0$ ,  $b < 0$ , consideremos funciones arbitrarias  $f_a$ ,  $g_b$  definidas en  $[a, 2a)$  y  $[b, 2b)$  respectivamente. Entonces la función  $F_{a,b}$  definida por

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ (-1)^{k_x} f_a(2^{-k_x} x), & \text{si } x > 0, \\ (-1)^{m_x} g_b(2^{-m_x} x), & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

es una solución de (4.8), donde los enteros  $k_x$  y  $m_x$  han sido definidos en (4.9) y (4.10) respectivamente.

Denotando por  $\mathcal{F}_a$ ,  $\mathcal{G}_b$  la familia de todas las funciones reales definidas en  $[a, 2a)$  y  $[b, 2b)$  respectivamente, es fácil probar que el conjunto

$$\mathcal{S}_2 := \{F_{a,b} : a > 0, b < 0, f_a \in \mathcal{F}_a, g_b \in \mathcal{G}_b\}$$

es una clase amplia de soluciones de la ecuación funcional (4.8), donde  $F_{a,b}$  está definida en (4.11). El recíproco también es cierto, es decir, si  $f$  es una solución de (4.8) entonces se determina una función de tipo  $F_{a,b}$  definiendo  $f_a = f$  y  $g_b = f$  en  $[a, 2a)$  y  $[b, 2b)$  respectivamente.

Por tanto, se sigue que el conjunto  $\mathcal{S}_2$  es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación funcional (4.8).

En ([1], teorema 3, pg.14), se prueba que el grafo de cualquier solución no continua de la clásica ecuación funcional de Cauchy es denso por todas partes en el plano. Sin embargo, en el caso de nuestra ecuación funcional (4.8), la característica binaria es una

solución no continua pero acotada, por tanto, su grafo no es denso por todas partes en el plano, lo que prueba que nuestra ecuación funcional (4.8) es esencialmente diferente a la de Cauchy.

Extenderemos el caso anterior definiendo la característica- $\{2, 3\}$  de  $x$ , denotado por  $[x]_{2,3}$ , de la siguiente forma:

$$[x]_{2,3} = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ (-1)^{m+n}, & \text{si } x \neq 0, x = \frac{p}{q}, \end{cases}$$

donde  $m$  y  $n$  son los exponentes de 2 y 3 respectivamente en las descomposiciones factoriales de  $p$  o  $q$ .

Dado que  $p$  y  $q$  no tienen divisores comunes, la característica- $\{2, 3\}$  está bien definida, observemos además que  $[x]_{2,3} = [-x]_{2,3}$ . A partir de esta definición demostraremos el siguiente lema:

**Lema 4.10** *Para cada racional  $x$ , la característica- $\{2, 3\}$  satisface:*

(i)  $[x]_{2,3} = [4x]_{2,3}$

(ii)  $[2x]_{2,3} = [3x]_{2,3} = -[x]_{2,3}$ .

**Prueba.** Consideraremos cuatro casos.

Caso 1:  $p$  tiene los factores primos 2 y 3 en su descomposición (en cambio  $q$  no los tiene). En tal caso,

$$x = \frac{p}{q} = \frac{2^m \cdot 3^n \cdot 5^{p_3} \dots}{5^{q_3} \dots} \Rightarrow [x]_{2,3} = (-1)^{m+n}.$$

$$\Rightarrow 4x = \frac{2^{m+2} \cdot 3^n \cdot 5^{p_3} \dots}{5^{q_3} \dots} \Rightarrow [4x]_{2,3} = (-1)^{m+2+n} = (-1)^{m+n} = [x]_{2,3}.$$

Observemos que si suponemos que  $x$  está expresado en forma irreducible entonces  $p_3$  o  $q_3$  es 0. Además se tiene que

$$2x = \frac{2^{m+1} \cdot 3^n \cdot 5^{p_3} \dots}{5^{q_3} \dots} \Rightarrow [2x]_{2,3} = (-1)^{m+1+n},$$

$$3x = \frac{2^m \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{p_3} \dots}{5^{q_3} \dots} \Rightarrow [3x]_{2,3} = (-1)^{m+n+1},$$

$$\Rightarrow [2x]_{2,3} = [3x]_{2,3} = -[x]_{2,3}.$$

Caso 2:  $q$  tiene los factores primos 2 y 3 en su descomposición (en cambio  $p$  no los tiene). En tal caso,

$$x = \frac{p}{q} = \frac{5^{p_3} \dots}{2^m \cdot 3^n \cdot 5^{q_3} \dots} \Rightarrow [x]_{2,3} = (-1)^{m+n}.$$

$$\implies 4x = \frac{5^{p_3} \dots}{2^{m-2} \cdot 3^n \cdot 5^{q_3} \dots} \Rightarrow [4x]_{2,3} = (-1)^{m-2+n} = (-1)^{m+n} = [x]_{2,3}.$$

Aunque  $m-2$  fuese menor que 0, la potencia de 2 estaría en el numerador y llegaríamos a la misma conclusión.

Además,

$$2x = \frac{5^{p_3} \dots}{2^{m-1} \cdot 3^n \cdot 5^{q_3} \dots} \Rightarrow [2x]_{2,3} = (-1)^{m-1+n},$$

$$3x = \frac{5^{p_3} \dots}{2^m \cdot 3^{n-1} \cdot 5^{q_3} \dots} \Rightarrow [3x]_{2,3} = (-1)^{m+n-1},$$

$$\implies [2x]_{2,3} = [3x]_{2,3} = -[x]_{2,3}.$$

Al igual que antes, aunque  $m-1$  o  $n-1$  fuese menor que 0, llegaríamos a la misma conclusión.

Caso 3:  $p$  tiene potencias de 2 y  $q$  potencias de 3. En tal caso,

$$x = \frac{p}{q} = \frac{2^m \cdot 5^{p_3} \dots}{3^n \cdot 5^{q_3} \dots} \Rightarrow [x]_{2,3} = (-1)^{m+n}.$$

$$\implies 4x = \frac{2^{m+2} \cdot 5^{p_3} \dots}{3^n \cdot 5^{q_3} \dots} \Rightarrow [4x]_{2,3} = (-1)^{m+2+n} = (-1)^{m+n} = [x]_{2,3}.$$

Además,

$$2x = \frac{2^{m+1} \cdot 5^{p_3} \dots}{3^n \cdot 5^{q_3} \dots} \Rightarrow [2x]_{2,3} = (-1)^{m+1+n},$$

$$3x = \frac{2^m \cdot 5^{p_3} \dots}{3^{n-1} \cdot 5^{q_3} \dots} \Rightarrow [3x]_{2,3} = (-1)^{m+n-1},$$

$$\implies [2x]_{2,3} = [3x]_{2,3} = -[x]_{2,3}.$$

Caso 4:  $p$  tiene potencias de 3 y  $q$  potencias de 2. En tal caso,

$$x = \frac{p}{q} = \frac{3^n \cdot 5^{p_3} \dots}{2^m \cdot 5^{q_3} \dots} \Rightarrow [x]_{2,3} = (-1)^{m+n}.$$

$$\implies 4x = \frac{3^n \cdot 5^{p_3} \dots}{2^{m-2} \cdot 5^{q_3} \dots} \Rightarrow [4x]_{2,3} = (-1)^{m-2+n} = (-1)^{m+n} = [x]_{2,3}.$$

Además,

$$2x = \frac{3^n \cdot 5^{p_3} \dots}{2^{m-1} \cdot 5^{q_3} \dots} \Rightarrow [2x]_{2,3} = (-1)^{m-1+n},$$

$$3x = \frac{3^{n+1} \cdot 5^{p_3} \dots}{2^m \cdot 5^{q_3} \dots} \Rightarrow [3x]_{2,3} = (-1)^{m+n+1},$$

$$\implies [2x]_{2,3} = [3x]_{2,3} = -[x]_{2,3}.$$

□

A partir del lema anterior se deduce, obviamente, el siguiente resultado.

**Proposición 4.11** *La función*

$$F_{2,3}(x) = \begin{cases} [x]_{2,3}, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

es solución de la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) = 0$ .

Además el siguiente resultado proporciona soluciones más generales

**Teorema 4.12** *Definimos la función  $\Psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\Psi(x) = x[x]_{2,3}$ , siendo  $[x]_{2,3}$  la característica- $\{2, 3\}$  de  $x$ . Sea  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  cualquier función verificando la propiedad  $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$  (es decir,  $\varphi$  es cualquier solución de la ecuación funcional de Cauchy). Entonces la función*

$$F(x) = \begin{cases} \varphi(\Psi(x)), & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

satisface la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) = 0$ .

**Prueba.** Como consecuencia del lema anterior, si  $x \in \mathbb{Q}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} F(x) + F(2x) + F(3x) + F(4x) &= \varphi(x[x]_{2,3}) + \varphi(2x[2x]_{2,3}) + \varphi(3x[3x]_{2,3}) + \varphi(4x[4x]_{2,3}) \\ &= \varphi(x[x]_{2,3}) + 2\varphi(x[2x]_{2,3}) + 3\varphi(x[3x]_{2,3}) + 4\varphi(x[4x]_{2,3}) = 5\varphi(x[x]_{2,3}) - 5\varphi(x[x]_{2,3}) = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, si  $x \notin \mathbb{Q}$ , entonces  $2x, 3x, 4x \notin \mathbb{Q}$ , y por lo tanto a partir de la definición de  $F$  se obtiene que

$$F(x) + F(2x) + F(3x) + F(4x) = 0.$$

□

Surgen así, tomando esta misma idea, otras soluciones no continuas para los siguientes casos de  $n$  par.

Por ejemplo, para  $n = 6$ , definimos

$$[x]_{2,3,5} = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ (-1)^{m_1+m_2+m_3}, & \text{si } x \neq 0, x = \frac{p}{q}, \end{cases}$$

donde  $m_1, m_2$  y  $m_3$  son los exponentes de 2, 3 y 5 respectivamente en las descomposiciones factoriales de  $p$  o  $q$ .

De esta forma, y utilizando el mismo razonamiento que en el lema precedente llegaríamos a que

$$F_{2,3,5}(x) = \begin{cases} [x]_{2,3,5}, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

sería una solución no continua para el caso  $n = 6$ .

De la misma forma se comprueba que  $F_{2,3,5}(x)$  también es una solución para  $n = 8$ .

Además, definiendo en el mismo sentido  $[x]_{2,3,5,7}$  se obtiene que

$$F_{2,3,5,7}(x) = \begin{cases} [x]_{2,3,5,7}, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

es una solución para los casos  $n = 10$  y  $n = 12$ .

También se llega a que

$$F_{2,3,5,7,11}(x) = \begin{cases} [x]_{2,3,5,7,11}, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

es una solución para  $n = 14$ .

De la misma forma,

$$F_{2,3,5,7,11,13}(x) = \begin{cases} [x]_{2,3,5,7,11,13}, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

es una solución para  $n = 16$ .

Incluso para el caso  $n = 3$  tomando como base esta misma idea podemos encontrar soluciones no continuas. Definimos, análogamente como hicimos con la característica binaria, la noción de característica ternaria de un número real  $x$ , denotada por  $[x]_3$ :

$$[x]_3 = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ (-1)^m, & \text{si } x \neq 0, x = \frac{p}{q}, \end{cases}$$

donde  $m$  es la potencia de 3 en la descomposición factorial de  $p$  o  $q$ .

Por ejemplo, en el caso de que  $p$  y  $q$  no fuesen múltiplos de 3, entonces  $m = 0$ .

Con esta definición, el siguiente lema es de demostración directa:

**Lema 4.13** *Para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  se tiene que*

$$[2x]_3 = [x]_3, \quad [3x]_3 = -[x]_3.$$

A partir de este lema, obtenemos inmediatamente soluciones no continuas de  $f(x) + f(2x) + f(3x) = 0$  usando las soluciones de la ecuación funcional de Cauchy:

**Teorema 4.14** *Sea  $\varphi$  una solución arbitraria de la ecuación funcional de Cauchy. Entonces la función*

$$F_{3,\varphi}(x) = \varphi(x [x]_3) \tag{4.12}$$

*es una solución no continua de la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + f(3x) = 0$ .*

Una amplia clase de soluciones no continuas se obtiene de nuevo usando la noción de base de Hamel:

**Teorema 4.15** Sea  $\mathcal{B} = \{x_i : i \in I\}$  una base de Hamel de  $\mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{Q}$ ,  $\varphi$  una solución de la ecuación funcional de Cauchy y  $h$  una función real arbitraria definida sobre  $\mathcal{B}$ . Entonces la función

$$F_{3,\varphi,h}(x) = \sum_{i \in A} \varphi(q_i [q_i]_3) h(x_i) \quad (4.13)$$

es una solución no continua de la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + f(3x) = 0$ , donde  $A$  es el subconjunto finito de  $I$  que expresa  $x$  como  $\sum_{i \in A} q_i x_i$  de forma única.

**Prueba.** Escribiendo  $x$  como combinación lineal de los vectores de  $\mathcal{B}$  podemos poner

$$x = \sum_{i \in A} q_i x_i,$$

y entonces

$$2x = \sum_{i \in A} 2q_i x_i, \quad 3x = \sum_{i \in A} 3q_i x_i.$$

Aplicando ahora el teorema anterior, para cada  $q_i \in \mathbb{Q}$  se tiene que

$$F_{3,\varphi}(q_i) + F_{3,\varphi}(2q_i) + F_{3,\varphi}(3q_i) = 0. \quad (4.14)$$

Por tanto, utilizando (4.12), (4.13) y (4.14) tenemos que

$$\begin{aligned} & F_{3,\varphi,h}(x) + F_{3,\varphi,h}(2x) + F_{3,\varphi,h}(3x) = \\ &= \sum_{i \in A} F_{3,\varphi}(q_i) h(x_i) + \sum_{i \in A} F_{3,\varphi}(2q_i) h(x_i) + \sum_{i \in A} F_{3,\varphi}(3q_i) h(x_i) = \\ &= \sum_{i \in A} [F_{3,\varphi}(q_i) + F_{3,\varphi}(2q_i) + F_{3,\varphi}(3q_i)] h(x_i) = 0, \end{aligned}$$

y el teorema queda probado. □

Quedan abiertos los siguientes problemas concernientes al caso general:

- ¿Para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe una función  $g_n : \Pi_n \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  verificando  $g_n(kx) \neq g_n(lx)$  si  $k \neq l$ , con  $1 \leq k, l \leq n$ ?
- ¿Siempre existe algún tipo de característica, como las mencionadas anteriormente, que nos proporcionen una solución para el caso par?

En las investigaciones llevadas a cabo dado un valor de  $n$  concreto se ha conseguido obtener siempre una solución y para algunos valores de  $n$  hasta incluso varias soluciones. El problema radica en la generalización de estas soluciones ya que básicamente todo desemboca, en esencia, en la distribución de los números primos en la serie de los números naturales. Por ejemplo, en esta última técnica (para el caso par) han habido intentos de generalización utilizando la llamada conjetura de Bertrand (demostrada por Chebyshev): “Dado  $n \in \mathbb{N}$ , siempre existe un primo entre  $n$  y  $2n$ ”, que no han dado resultado, mientras que en el procedimiento anterior han habido intentos de demostración de la existencia de la función requerida utilizando técnicas geométricas que tampoco han prosperado.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

## Capítulo 5

# Otras propiedades de $G_n(z)$

---

Antes de abordar este capítulo recordaremos la siguiente definición:

**Definición 5.1** *El orden de una función entera  $f(z)$  viene dado por:*

$$\lambda = \inf\{a \geq 0 : \exists r \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \forall z \in \mathbb{C} \setminus B(0, r) \ |f(z)| \leq e^{|z|^a}\}.$$

En [26] puede verse la demostración de que  $G_n(z)$  es una función entera de orden 1,  $\forall n \geq 2$ .

### 5.1. Indicador y tipo

Consideremos de nuevo la función entera  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$  (siendo  $n \geq 2$ ). Debido a las buenas propiedades que presenta esta función, en esta sección calcularemos de forma directa su indicador y tipo:

**Definición 5.2** *Sea  $f$  una función entera no constante de orden finito  $\rho$ , llamaremos **indicador** de  $f$  a la función real que viene dada por la siguiente fórmula:*

$$h_f(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln |f(re^{i\theta})|, \text{ para cada } \theta \in \mathbb{R}.$$

Como  $G_n(z)$  es una función entera de orden 1 ( $\rho = 1$ ), el indicador de  $G_n$  viene dado por

$$h_{G_n}(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \ln |G_n(re^{i\theta})| = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \left| 1 + 2^{re^{i\theta}} + \dots + n^{re^{i\theta}} \right|.$$

**Teorema 5.1** *Para todo  $n \geq 2$  el indicador de  $G_n$  es*

$$h_{G_n}(\theta) = \begin{cases} \cos \theta \ln n, & \text{si } \frac{-\pi}{2} + 2k\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Prueba.** Analizaremos el límite en función del signo del  $\cos \theta$ .

Caso 1:  $\cos \theta > 0$ . Para este caso podemos calcular el límite de la siguiente manera:

$$h_{G_n}(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \left[ \ln |n^{re^{i\theta}}| + \ln \left| \left(\frac{1}{n}\right)^{re^{i\theta}} + \left(\frac{2}{n}\right)^{re^{i\theta}} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{re^{i\theta}} + 1 \right| \right],$$

ya que en general se verifica que

$$G_n(z) = 1 + 2^z + \cdots + n^z = n^z \cdot \left( \left(\frac{1}{n}\right)^z + \left(\frac{2}{n}\right)^z + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^z + 1 \right).$$

Además por otro lado se verifica la siguiente igualdad

$$|k^z| = |k^{(x+iy)}| = k^x |k^{iy}| = k^x,$$

para cualquier  $k > 0$  y  $z := x + iy$ . En particular

$$|n^{re^{i\theta}}| = n^{r \cos \theta},$$

por tanto,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |n^{re^{i\theta}}|}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln n^{r \cos \theta}}{r} = \cos \theta \ln n.$$

Por otra parte, se tiene que

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{re^{i\theta}} = \left(\frac{k}{n}\right)^{r \cos \theta + ir \sin \theta} = \left(\frac{k}{n}\right)^{r \cos \theta} \left(\frac{k}{n}\right)^{ir \sin \theta}.$$

Teniendo en cuenta que para  $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{r \cos \theta} \longrightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty \text{ (ya que } \cos \theta > 0),$$

y en consecuencia  $\left(\frac{k}{n}\right)^{re^{i\theta}}$  también tiende a 0, entonces

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \left(\frac{1}{n}\right)^{re^{i\theta}} + \left(\frac{2}{n}\right)^{re^{i\theta}} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{re^{i\theta}} + 1 \right|}{r} = 0.$$

y se obtiene la fórmula para  $\cos \theta > 0$ .

Caso 2:  $\cos \theta < 0$ . Para este caso teniendo en cuenta que

$$k^{re^{i\theta}} = k^{r \cos \theta + ir \sin \theta} = k^{r \cos \theta} k^{ir \sin \theta},$$

y además que para  $k = 2, 3, \dots, n$  se tiene que  $k^{r \cos \theta} \rightarrow 0$  ( $\cos \theta < 0$ ) cuando  $r \rightarrow \infty$ , entonces

$$k^{r e^{i\theta}} \rightarrow 0 \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, n$$

En consecuencia,

$$h_{G_n}(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \left| 1 + 2^{r e^{i\theta}} + \dots + n^{r e^{i\theta}} \right| = 0, \quad \text{siendo } \cos \theta < 0.$$

Caso 3:  $\cos \theta = 0$ . Para este caso,  $\sin \theta = \pm 1$ , es decir

$$r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) = \pm i r.$$

Por tanto

$$h_{G_n}(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \left| 1 + 2^{\pm i r} + \dots + n^{\pm i r} \right|.$$

Teniendo en cuenta ahora que

$$\begin{aligned} 1 + 2^{\pm i r} + \dots + n^{\pm i r} &= 1 + [\cos(r \ln 2) \pm i \sin(r \ln 2)] + \dots + [\cos(r \ln n) \pm i \sin(r \ln n)] = \\ &= \sum_{k=1}^n [\cos(r \ln k) \pm i \sin(r \ln k)], \end{aligned}$$

podemos afirmar que su módulo está acotado, y por tanto también su logaritmo, así que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \left| 1 + 2^{\pm i r} + \dots + n^{\pm i r} \right| = 0,$$

y consecuentemente

$$h_{G_n}(\theta) = 0, \quad \text{siendo } \theta \in \mathbb{R} \text{ tal que } \cos \theta = 0.$$

De esta forma el indicador de  $G_n$  viene dado efectivamente por

$$h_{G_n}(\theta) = \begin{cases} \cos \theta \ln n, & \text{si } \cos \theta > 0, \\ 0, & \text{si } \cos \theta \leq 0. \end{cases}$$

□

El siguiente paso en nuestro proceso es considerar el tipo de una función entera.

**Definición 5.3** Sea  $f$  una función entera no constante de orden  $\rho$ , llamaremos **tipo** de  $f$ , y lo denotaremos por  $\sigma$ , al número real que viene dado por la siguiente fórmula:

$$\sigma = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \varphi(r), \quad \text{donde } \varphi(r) = \ln^+ M_f(r),$$

siendo,

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{y} \quad \ln^+ x = \begin{cases} \ln x, & \text{si } x \geq 1, \\ 0, & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Para la función  $G_n(z)$  se cumple que  $\forall r > 0$   $M_{G_n}(r) = \max_{|z|=r} |G_n(z)| > 1$  (basta tomar  $z = r$ ), y teniendo en cuenta que su orden es  $\rho = 1$  su tipo viene dado por

$$\sigma = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_{G_n}(r)}{r}.$$

**Definición 5.4** Llamaremos  $\sigma_2$  al número real definido por

$$\sigma_2 = \inf \left\{ a \geq 0 : \exists r \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \forall z \in \mathbb{C} \setminus B(0, r) |f(z)| \leq (e^{|z|})^a \right\}.$$

**Lema 5.2** El tipo de  $G_n(z)$  coincide con  $\sigma_2$ , es decir,  $\sigma = \sigma_2$ .

**Prueba.** Probaremos en primer lugar que  $\sigma \geq \sigma_2$ . Si  $\sigma = \infty$  es trivial, así que asumiremos  $\sigma < \infty$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists r > 0$  tal que

$$\frac{\ln M_{G_n}(r)}{r} \leq \sigma + \varepsilon \Rightarrow \ln M_{G_n}(r) \leq r(\sigma + \varepsilon),$$

tomando exponenciales se tiene que

$$M_{G_n}(r) \leq (e^r)^{\sigma + \varepsilon}.$$

Por definición de  $M_{G_n}(r)$ , si  $|z| = r$  entonces

$$|G_n(z)| \leq (e^{|z|})^{\sigma + \varepsilon},$$

siendo,

$$\sigma + \varepsilon \in \left\{ a \geq 0 : \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall z \in \mathbb{C} \setminus B(0, r) \text{ con } |G_n(z)| \leq (e^{|z|})^a \right\},$$

Por tanto,  $\sigma_2 \leq \sigma + \varepsilon$ . Para finalizar, como  $\varepsilon$  es arbitrario entonces  $\sigma_2 \leq \sigma$ .

Recíprocamente veamos  $\sigma_2 \geq \sigma$ . Asumiremos por tanto  $\sigma_2 < \infty$ .

Sea  $\varepsilon > 0$  y  $|z|$  suficientemente grande tal que

$$\max_{|z|=r} |G_n(z)| \leq (e^{|z|})^{\sigma_2 + \varepsilon},$$

tomando logaritmos se tiene que

$$\ln M_{G_n}(r) \leq (\sigma_2 + \varepsilon)r \implies \frac{\ln M_{G_n}(r)}{r} \leq \sigma_2 + \varepsilon,$$

por tanto  $\sigma_2 + \varepsilon \geq \sigma$ , y de nuevo como  $\varepsilon$  es arbitrario tenemos que  $\sigma_2 \geq \sigma$ .

En consecuencia

$$\sigma_2 = \sigma.$$

□

**Teorema 5.3** *El tipo de  $G_n(z)$  es  $\ln n$ .*

**Prueba.** Utilizaremos el lema precedente. Por una parte sabemos que

$$|G_n(z)| = |1 + 2^z + \cdots + n^z| \leq 1 + |2^z| + \cdots + |n^z| \leq 1 + 2^r + \cdots + n^r, \text{ siendo } r = |z|.$$

Por otra parte, tomando  $\alpha > \ln n$ , se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(e^r)^\alpha}{1 + 2^r + \cdots + n^r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(e^{\alpha r - r \ln n})}{\left(\frac{1}{n}\right)^r + \left(\frac{2}{n}\right)^r + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^r + 1} = \infty,$$

así que

$$|G_n(z)| \leq (e^{|z|})^\alpha \quad \forall \alpha > \ln n \text{ y } |z| = r \text{ suficientemente grande.}$$

Por otro lado veamos que si  $\alpha < \ln n$  entonces la siguiente desigualdad es falsa para  $|z|$  suficientemente grande:

$$|G_n(z)| \leq (e^{|z|})^\alpha.$$

En efecto, tomando  $z = x > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{z=x \rightarrow \infty} \frac{|G_n(z)|}{(e^{|z|})^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^x + \cdots + n^x}{e^{\alpha x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^x + \left(\frac{2}{n}\right)^x + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^x + 1}{e^{\alpha x - x \ln n}} = \infty. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sigma = \ln n.$$

□

A la vista del tipo y del indicador resultantes, relativos a la función  $G_n(z)$ , se pueden establecer las siguientes **propiedades**:

1.- El valor maximal de la función indicador de  $G_n(z)$  coincide con el del tipo. (Este hecho es evidente, tomando en la función indicador como argumento  $\theta$ , un múltiplo de  $2\pi$ ).

2.-  $\lim_{k \rightarrow \infty} |G_n^{(k)}(0)|^{1/k}$  coincide con el tipo.

En efecto, se puede comprobar fácilmente que  $G_n^{(k)}(0)$  viene dado por  $(\ln 2)^k + \cdots + (\ln n)^k$ , y por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |(\ln 2)^k + \cdots + (\ln n)^k|^{\frac{1}{k}} &= \\ \lim_{k \rightarrow \infty} [(\ln n)^k]^{\frac{1}{k}} \left[ \left(\frac{\ln 2}{\ln n}\right)^k + \cdots + \left(\frac{\ln(n-1)}{\ln n}\right)^k + 1 \right]^{\frac{1}{k}} &= \ln n. \end{aligned}$$

3.- El indicador es una función  $2\pi$ -periódica  $\rho$ -convexa, siendo  $\rho$  el orden de la función  $G_n(z)$ , o sea  $\rho = 1$ .

Es evidente a raíz de la función indicador resultante que ésta es  $2\pi$ -periódica. Analizaremos la  $\rho$ -convexidad:

**Definición 5.5** Diremos que la función  $h_{G_n}$  (función  $2\pi$ -periódica) es  $\rho$ -convexa si  $\forall \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset [0, 2\pi]$  se tiene que

$$h(\theta) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1) \leq h(\theta_1) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta) + h(\theta_2) \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1).$$

Consideremos  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $[\theta_1, \theta_2] \subset [0, 2\pi]$ , comprobaremos que se cumple la definición para los distintos casos que se pueden dar con  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ .

Caso 1:  $\theta_1, \theta_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  (por tanto  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ).

Para este caso,  $h_{G_n}(\theta_i) = \ln n \cos \theta_i$ ,  $i = 1, 2$ , y  $h_{G_n}(\theta) = \ln n \cos \theta$ , por tanto

$$\begin{aligned} h_{G_n}(\theta) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1) &\leq h_{G_n}(\theta_1) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta) + h_{G_n}(\theta_2) \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1) \iff \\ \ln n \cos \theta \operatorname{sen} (\theta_2 - \theta_1) &\leq \ln n \cos \theta_1 \operatorname{sen} (\theta_2 - \theta) + \ln n \cos \theta_2 \operatorname{sen} (\theta - \theta_1) \iff \\ \cos \theta [\operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2] &\leq \cos \theta_1 [\operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta_2] + \\ &\quad + \cos \theta_2 [\operatorname{sen} \theta \cos \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta], \end{aligned}$$

y queda probado el resultado ya que todos los términos que aparecen en la última desigualdad se cancelan.

Caso 2:  $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\theta_2 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ .

Subcaso 2.1:  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  (bajo estas condiciones,  $h_{G_n}(\theta_2) = 0$ ,  $h_{G_n}(\theta_1) = \ln n \cos \theta_1$ ,  $h_{G_n}(\theta) = \ln n \cos \theta$ ).

Para este caso llegamos a la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} h_{G_n}(\theta) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1) &\leq h_{G_n}(\theta_1) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta) + h_{G_n}(\theta_2) \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1) \iff \\ \ln n \cos \theta \operatorname{sen} (\theta_2 - \theta_1) &\leq \ln n \cos \theta_1 \operatorname{sen} (\theta_2 - \theta) \iff \\ \cos \theta [\operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2] &\leq \cos \theta_1 [\operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta_2] \iff \\ -\cos \theta \operatorname{sen} \theta_1 &\geq -\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta, \quad \text{ya que } \cos \theta_2 < 0, \end{aligned}$$

y como esta última desigualdad es equivalente a

$$\operatorname{sen} (\theta - \theta_1) \geq 0,$$

que naturalmente es cierta, entonces queda probado el resultado.

Subcaso 2.2:  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  (bajo estas condiciones,  $h_{G_n}(\theta_1) = \ln n \cos \theta_1$ ,  $h_{G_n}(\theta_2) = 0$ ,  $h_{G_n}(\theta) = 0$ ).

Para este caso se tiene que

$$\begin{aligned} h_{G_n}(\theta) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1) &\leq h_{G_n}(\theta_1) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta) + h_{G_n}(\theta_2) \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1) \iff \\ &0 \leq \ln n \cos \theta_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta), \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que todos los términos que intervienen en la última desigualdad son positivos, la desigualdad es cierta.

Caso 3:  $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\theta_2 \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ .

Subcaso 3.1:  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$  (bajo estas condiciones,  $h_{G_n}(\theta_i) = \ln n \cos \theta_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $h_{G_n}(\theta) = \ln n \cos \theta$ ). La desigualdad es análoga a la del caso 1.

Subcaso 3.2:  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  (bajo estas condiciones,  $h_{G_n}(\theta_i) = \ln n \cos \theta_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $h_{G_n}(\theta) = 0$ ).

La cadena de desigualdades que obtenemos ahora es la siguiente:

$$\begin{aligned} h_{G_n}(\theta) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1) &\leq h_{G_n}(\theta_1) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta) + h_{G_n}(\theta_2) \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1) \iff \\ &0 \leq \cos \theta_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta) + \cos \theta_2 \operatorname{sen}(\theta - \theta_1) \iff \\ 0 &\leq \cos \theta_1 [\operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta_2] + \cos \theta_2 [\operatorname{sen} \theta \cos \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta] \iff \\ &0 \leq \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta \iff \\ &0 \geq \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \text{ ya que } \cos \theta < 0, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que  $\pi \leq (\theta_2 - \theta_1) \leq 2\pi$ , la desigualdad inicial es cierta.

Caso 4:  $\theta_1, \theta_2 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  (por tanto  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ).

En este caso,  $h_{G_n}(\theta_i) = 0$  para  $i = 1, 2$ , y  $h_{G_n}(\theta) = 0$ , por tanto se cumple la definición trivialmente.

Caso 5:  $\theta_1 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ,  $\theta_2 \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ .

Subcaso 5.1:  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  (bajo estas condiciones,  $h_{G_n}(\theta_2) = \ln n \cos \theta_2$ ,  $h_{G_n}(\theta_1) = h_{G_n}(\theta) = 0$ ).

En este caso,

$$h_{G_n}(\theta) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1) \leq h_{G_n}(\theta_1) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta) + h_{G_n}(\theta_2) \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1) \iff$$

$$0 \leq \ln n \cos \theta_2 \sin(\theta - \theta_1),$$

y teniendo en cuenta que todos los términos que aparecen son positivos, la desigualdad es cierta.

Subcaso 5.2:  $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$  (bajo estas condiciones,  $h_{G_n}(\theta) = \ln n \cos \theta$ ,  $h_{G_n}(\theta_2) = \ln n \cos \theta_2$ ,  $h_{G_n}(\theta_1) = 0$ ).

Para este caso se tiene que

$$\begin{aligned} h_{G_n}(\theta) \sin \rho(\theta_2 - \theta_1) &\leq h_{G_n}(\theta_1) \sin \rho(\theta_2 - \theta) + h_{G_n}(\theta_2) \sin \rho(\theta - \theta_1) \iff \\ \cos \theta \sin(\theta_2 - \theta_1) &\leq \cos \theta_2 \sin(\theta - \theta_1). \end{aligned}$$

Desarrollando esta última desigualdad, teniendo en cuenta que  $\cos \theta_1 < 0$ , se comprueba su equivalencia con  $\sin(\theta_2 - \theta) \geq 0$ , y por tanto la desigualdad es cierta.

Caso 6:  $\theta_1, \theta_2 \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$  (por tanto  $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ ) (bajo estas condiciones,  $h_{G_n}(\theta_i) = \ln n \cos \theta_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $h_{G_n}(\theta) = \ln n \cos \theta$ ). La desigualdad es análoga a la del caso 1.

## 5.2. Más propiedades

Estudiaremos ahora otro tipo de **propiedades** de la función  $G_n(z)$ :

1. En primer lugar demostraremos que  $G_n(z)$  es una *función de tipo exponencial*  $\forall n \geq 2$ .

**Definición 5.6** Una función entera no constante  $f$  es de tipo exponencial si  $\exists A > 0$ ,  $a > 0$  tales que

$$|f(z)| \leq Ae^{a|z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

En nuestro caso ya sabemos que

$$|G_n(z)| \leq 1 + 2^{|z|} + \dots + n^{|z|} = 1 + e^{|z| \ln 2} + \dots + e^{|z| \ln n},$$

teniendo en cuenta que la función exponencial es creciente, se tiene que

$$G_n(z) \leq ne^{|z| \ln n}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n > 1,$$

por tanto, para  $A := n$  y  $a := \ln n$  se tiene que  $G_n(z)$  es una función de tipo exponencial.

2. Por otra parte,  $G_n(z)$  es una *función de crecimiento completamente regular*.

**Definición 5.7** Sea  $m$  la medida de Lebesgue en  $(0, +\infty)$  y  $E$  un subconjunto medible, entonces decimos que  $E$  es un conjunto de medida relativa cero (también se llama  $E^o$ -conjunto) si:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} m [E \cap (0, r)] = 0.$$

**Definición 5.8** Una función entera de orden  $\rho > 0$ , y tipo  $\sigma > 0$  es llamada una función de crecimiento completamente regular sobre el rayo  $\text{Arg}(z) = \theta$ , ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) si el siguiente límite

$$h_f(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln |f(re^{i\theta})| \quad (*)$$

existe cuando  $r \in [0, \infty) \setminus E$ , para algún  $E^o$ -conjunto  $E$ .

Si en (\*) la convergencia al límite cuando  $r \notin E$  es uniforme en la variable  $\theta$  y  $E$  es independiente de  $\theta$ , diremos que  $f$  es una función de crecimiento completamente regular.

Se puede comprobar fácilmente que  $G_n(z)$  verifica la definición de crecimiento completamente regular ya que teniendo en cuenta el proceso realizado en el cálculo de la función indicador y tomando como conjunto  $E$  de medida relativa cero cualquier conjunto acotado medible, entonces claramente  $E$  es independiente de  $\theta$  y la convergencia es uniforme en el cálculo de dicho límite, siendo  $h_{G_n}(\theta)$  una función periódica.

3. Dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G_n(x) = 1 + 2^x + \dots + n^x$  es solución de la siguiente ecuación diferencial homogénea:

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n y = 0,$$

donde  $b_1, b_2, \dots, b_n$  son los coeficientes reales que hacen que la ecuación  $z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n = 0$  tenga como raíces a los valores:  $\{\ln 1, \ln 2, \dots, \ln n\}$ .

Naturalmente, los coeficientes  $b_1, b_2, \dots, b_n$  son calculados al identificar los coeficientes en la siguiente igualdad:

$$z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n = \prod_{k=1}^n (z - \ln k),$$

en particular  $b_n = 0$ .

En efecto,  $G_n(x)$  es solución de la ecuación diferencial planteada ya que:

$$\begin{aligned} G_n'(x) &= (\ln 2)2^x + \cdots + (\ln n)n^x, \\ G_n''(x) &= (\ln 2)^2 2^x + \cdots + (\ln n)^2 n^x, \\ &\dots \\ G_n^{(n)}(x) &= (\ln 2)^n 2^x + \cdots + (\ln n)^n n^x, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} G_n^{(n)} + b_1 G_n^{(n-1)} + \cdots + b_n G_n &= \\ [(\ln 2)^n + b_1 (\ln 2)^{n-1} + \cdots + b_{n-1} (\ln 2)] 2^x + \cdots + \\ + \cdots + [(\ln n)^n + b_1 (\ln n)^{n-1} + \cdots + b_{n-1} (\ln n)] n^x &= 0. \end{aligned}$$

4. Determinaremos ahora el *desarrollo en serie de  $G_n(z)$*  centrado en 0, es decir

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k.$$

A partir de la definición de  $G_n(z)$  ya sabemos que  $G_n(0) = n$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned} G_n'(z) &= 2^z \ln 2 + \cdots + n^z \ln n, \\ G_n''(z) &= 2^z (\ln 2)^2 + \cdots + n^z (\ln n)^2, \\ &\dots \\ G_n^{(m)}(z) &= 2^z (\ln 2)^m + \cdots + n^z (\ln n)^m, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} G_n'(0) &= \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln n!, \\ G_n''(0) &= (\ln 2)^2 + \cdots + (\ln n)^2, \\ &\dots \\ G_n^{(m)}(0) &= (\ln 2)^m + \cdots + (\ln n)^m, \end{aligned}$$

obteniendo así el siguiente desarrollo en serie:

$$G_n(z) = n + \frac{\ln n!}{1} z + \frac{(\ln 2)^2 + \cdots + (\ln n)^2}{2!} z^2 + \cdots + \frac{(\ln 2)^m + \cdots + (\ln n)^m}{m!} z^m + \cdots$$

Por tanto, los coeficientes  $a_k$  del desarrollo en serie vienen dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= n, \\ a_k &= (\ln 2)^k + \cdots + (\ln n)^k, \text{ para } k \geq 1, \end{aligned}$$

5. Una vez calculado este desarrollo en serie de la función  $G_n(z)$ , su *transformada de Borel* viene definida por la siguiente fórmula:

$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}}, \text{ siendo } a_k \text{ los coeficientes del desarrollo en serie anterior.}$$

Se puede conocer el disco más pequeño centrado en  $z = 0$  fuera del cual la serie que define  $B_n(z)$  converge absolutamente y uniformemente sobre los compactos y por tanto define una función analítica. Para ello, aplicaremos los siguientes resultados:

**Lema 5.4** Sea  $B_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}}$  la transformada de Borel de la función  $G_n(z)$ , entonces si converge para algún  $z_0 \in \mathbb{C}$  también converge absolutamente en todo punto que verifique  $|z| > |z_0|$ , y uniformemente en todo compacto de  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > |z_0|\}$ .

**Prueba.** Sea  $r := |z_0|$ , para  $|z'| > r$  se tiene

$$\sum_{n \geq 0} \left| \frac{a_n}{(z')^{n+1}} \right| = \sum_{n \geq 0} \left| a_n \left( \frac{z_0}{z'} \right)^{n+1} \frac{1}{z_0^{n+1}} \right|.$$

Como sabemos que  $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{z_0^{n+1}}$  converge, entonces  $\left| \frac{a_n}{z_0^{n+1}} \right| \leq M$ ,  $\forall n \geq 0$  y para algún  $M > 0$ , ya que  $\lim_n \frac{a_n}{z_0^{n+1}} = 0$ . Por tanto,

$$\sum_{n \geq 0} \left| \frac{a_n}{(z')^{n+1}} \right| \leq M \sum_{n \geq 0} \left| \frac{z_0}{z'} \right|^{n+1} = M \sum_{n \geq 0} s^{n+1} < \infty, \text{ con } 0 < s := \left| \frac{z_0}{z'} \right| < 1.$$

Hemos demostrado entonces que  $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{z^{n+1}}$  converge absolutamente en todo punto  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| > r$ .

Por otra parte, dado  $K$  un conjunto compacto de  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$  el proceso realizado anteriormente sigue siendo válido  $\forall z'' \in K$ , y por el criterio M de Weirstrass la serie converge uniformemente en  $K$ .  $\square$

**Teorema 5.5** Sea  $B_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}}$  la transformada de Borel de la función  $G_n(z)$ , entonces  $B_n(z)$  converge absolutamente si  $|z| > \gamma$  y uniformemente en los compactos de  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \gamma\}$ , y diverge si  $|z| < \gamma$  siendo

$$\gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

**Prueba.** Sea  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| > \gamma$ , entonces veamos que  $\sum_{k \geq 0} \left| \frac{a_k}{z^{k+1}} \right| < \infty$ .

En efecto, este hecho es cierto ya que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{z^{n+1}} \right|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|^{1/n}}{|z|^{(n+1)/n}} = \frac{\gamma}{|z|} < 1,$$

por tanto, por el criterio de la raíz, la serie  $\sum_{k \geq 0} \left| \frac{a_k}{z^{k+1}} \right| < \infty$  y por el lema anterior la serie converge uniformemente sobre los compactos de  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \gamma\}$ .

Sea ahora  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| < \gamma$ , si  $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{z^{k+1}}$  fuera convergente, por el lema anterior la serie sería absolutamente convergente en todo punto de  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > s\}$ , siendo  $s := |z|$  ( $s < \gamma$ ).

Elegimos ahora  $z'$  perteneciente al conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > s\}$  y verificando al mismo tiempo  $|z'| < \gamma$ . Observemos que  $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{a_n}{(z')^{k+1}} \right| < \infty$ , pero como se tiene que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{(z')^{n+1}} \right|^{1/n} = \frac{\gamma}{|z'|} > 1,$$

por el criterio de la raíz, la serie  $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{a_n}{(z')^{k+1}} \right|$  diverge, obteniendo así una contradicción.  $\square$

Comprobaremos, a partir del teorema anterior, que el radio del disco centrado en  $z = 0$  fuera del cual  $B_n(z)$  es analítica coincide con el tipo de la función  $G_n(z)$  ( $\sigma = \ln n$ ):

**Teorema 5.6** *Sea  $B_n(z)$  la transformada de Borel de  $G_n(z)$  y  $\gamma = \ln n$ , entonces si  $|z| > \gamma$  la serie converge, y si  $|z| < \gamma$  la serie diverge.*

**Prueba.** Siendo  $B_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}}$ , con  $a_0 = n$ , y  $a_k = (\ln 2)^k + \dots + (\ln n)^k$ , para

$k \geq 1$ , calcularemos  $\gamma$ . Para ello, tendremos en cuenta que si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , entonces existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$  y coinciden. Calcularemos por tanto el siguiente límite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\ln 2)^{k+1} + \dots + (\ln n)^{k+1}}{(\ln 2)^k + \dots + (\ln n)^k} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\ln 2}{\ln n}\right)^{k+1} + \dots + \left(\frac{\ln(n-1)}{\ln n}\right)^{k+1} + 1}{\left(\frac{\ln 2}{\ln n}\right)^k \frac{1}{\ln n} + \dots + \left(\frac{\ln(n-1)}{\ln n}\right)^k \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln n}} = \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\ln n}} = \ln n.
\end{aligned}$$

En consecuencia,  $\gamma = \ln n = \sigma$ . □

6. A continuación relacionaremos las funciones  $G_n(z)$  y su transformada de Borel  $B_n(z)$  mediante un par de igualdades. En primer lugar veamos la siguiente definición:

**Definición 5.9** Definiremos el **diagrama conjugado** de una función entera  $f(z)$  como el menor compacto y convexo de  $\mathbb{C}$  fuera del cual su transformada de Borel admite prolongación analítica.

**Teorema 5.7** Sea  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$  (función entera, de tipo exponencial), y sea  $B_n(z)$  su transformada de Borel, entonces se tiene la siguiente igualdad:

$$G_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{zw} B_n(w) dw, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

donde  $\Gamma$  es un arco positivamente orientado rectificable de Jordan encerrando el diagrama conjugado de  $G_n(z)$ .

**Prueba.** Tomaremos en primer lugar  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ , siendo  $r > \ln n$ . De esta forma aseguramos que  $\Gamma$  encierre el diagrama conjugado de  $G_n(z)$ .

Sabemos que  $B_n(w) = \frac{n}{w} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln 2)^k + \dots + (\ln n)^k}{w^{k+1}}$ , por tanto como la convergencia es uniforme en  $\Gamma$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} e^{zw} B_n(w) dw &= \int_{\Gamma} e^{zw} \frac{n}{w} dw + \sum_{k \geq 1} \int_{\Gamma} e^{zw} \frac{(\ln 2)^k + \dots + (\ln n)^k}{w^{k+1}} dw = \\
&= \int_{\Gamma} e^{zw} \frac{n}{w} dw + \sum_{k \geq 1} [(\ln 2)^k + \dots + (\ln n)^k] \int_{\Gamma} \frac{e^{zw}}{w^{k+1}} dw \quad (5.1)
\end{aligned}$$

Calcularemos la integral  $\int_{\Gamma} \frac{e^{zw}}{w^{k+1}} dw$ , para ello aplicaremos la fórmula de Cauchy para las derivadas:

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{zw}}{w^{k+1}} dw = \frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(0), \quad \text{siendo } f(w) = e^{zw}.$$

Calculando las derivadas de la función  $f(w)$  se tiene que

$$f'(w) = ze^{zw}, \quad f''(w) = z^2e^{zw}, \quad \dots, \quad f^{(k)}(w) = z^k e^{zw} \Rightarrow f^{(k)}(0) = z^k.$$

Por tanto, a partir de (5.1), se tiene que

$$\int_{\Gamma} e^{zw} B_n(w) dw = (2\pi i)n + \sum_{k \geq 0} [(\ln 2)^k + \dots + (\ln n)^k] \frac{2\pi i}{k!} z^k,$$

es decir, hemos obtenido el desarrollo en serie de la función  $G_n(z)$ , y por tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{zw} B_n(w) dw = G_n(z).$$

Sea  $\Gamma'$  un arco cualquiera positivamente orientado rectificable de Jordan encerrando el diagrama conjugado de  $G_n(z)$ , entonces debido a que  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  son homólogos, las integrales coinciden y la igualdad es válida para cualquier  $\Gamma'$  cumpliendo estas condiciones (Teorema general de Cauchy).  $\square$

Para demostrar la igualdad que abordaremos a continuación será necesario considerar el siguiente conjunto:

**Definición 5.10** Sea  $\sigma$  un número real, entonces para  $A > \sigma$  y para cada  $\theta \in \mathbb{R}$  denotamos

$$\Pi(\theta; A) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{i\theta}) > A\}.$$

**Teorema 5.8** Sea  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$  (función entera, de tipo exponencial), y sea  $B_n(z)$  su transformada de Borel, entonces se tiene la siguiente igualdad:

$$B_n(z) = \int_0^{\infty} e^{-zw} G_n(w) dw, \quad \forall z \in \Pi(\theta; A), \quad \text{con } \operatorname{Arg} w = \theta \text{ y } A > \sigma,$$

siendo  $\sigma$  el tipo de  $G_n(z)$ , es decir,  $\sigma = \ln n$ .

**Prueba.** Como  $\operatorname{Arg}(w) = \theta$ , considerando el camino  $\gamma(t) = te^{i\theta}$  se tiene

$$\int_0^{\infty} e^{-zw} G_n(w) dw = \int_0^{\infty} e^{-zte^{i\theta}} G_n(te^{i\theta}) e^{i\theta} dt.$$

Teniendo en cuenta que

$$G_n(z) = n + \sum_{k \geq 1} \frac{(\ln 2)^k + \dots + (\ln n)^k}{k!} z^k$$

y que la convergencia es uniforme se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-zte^{i\theta}} G_n(te^{i\theta}) e^{i\theta} dt = \\ & = ne^{i\theta} \int_0^{\infty} e^{-zte^{i\theta}} dt + \sum_{k \geq 1} \frac{(\ln 2)^k + \cdots + (\ln n)^k}{k!} (e^{i\theta})^{k+1} \int_0^{\infty} e^{-zte^{i\theta}} t^k dt. \end{aligned}$$

Para finalizar, calcularemos la integral  $\int_0^{\infty} e^{-zte^{i\theta}} t^k dt$  para cada  $k \geq 0$ . Se puede comprobar fácilmente que  $\int_0^{\infty} e^{-zte^{i\theta}} t^k dt$  toma la expresión

$$-\frac{t^k}{ze^{i\theta}} e^{-zte^{i\theta}} - \frac{kt^{k-1}}{(ze^{i\theta})^2} e^{-zte^{i\theta}} - \frac{k(k-1)t^{k-2}}{(ze^{i\theta})^3} e^{-zte^{i\theta}} - \cdots - \frac{k!}{(ze^{i\theta})^{k+1}} e^{-zte^{i\theta}}.$$

Si hacemos primero  $t \rightarrow \infty$  se puede comprobar que cada término de esta última expresión tiende a 0. Este hecho es cierto ya que en primer lugar se tiene que  $e^{-zte^{i\theta}} \rightarrow 0$  como consecuencia de que

$$e^{-zte^{i\theta}} = e^{-t \operatorname{Re}(ze^{i\theta})} \cdot e^{-it \operatorname{Im}(ze^{i\theta})},$$

y por otra parte, si  $z \in \Pi(\theta; A)$ , entonces  $-\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) < -A$ , siendo  $A > \ln n \geq 0$ . Consecuentemente,  $e^{-t \operatorname{Re}(ze^{i\theta})} \rightarrow 0$  y por tanto  $e^{-zte^{i\theta}} \rightarrow 0$ .

En consecuencia, cada término de la forma  $t^{k-j} \cdot e^{-zte^{i\theta}} \rightarrow 0$  para cada  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $0 \leq j < k$ .

Ahora, sustituyendo  $t$  por 0 podemos observar que todos los términos se anulan salvo el último que resulta  $\frac{-k!}{(ze^{i\theta})^{k+1}}$ .

En conclusión, se obtiene que para cada  $k \geq 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-zte^{i\theta}} t^k dt = \frac{k!}{(ze^{i\theta})^{k+1}},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-zte^{i\theta}} G_n(te^{i\theta}) e^{i\theta} dt &= \frac{ne^{i\theta}}{ze^{i\theta}} + \sum_{k \geq 1} \frac{(\ln 2)^k + \cdots + (\ln n)^k}{k!} (e^{i\theta})^{k+1} \cdot \frac{k!}{(ze^{i\theta})^{k+1}} = \\ &= \frac{n}{z} + \sum_{k \geq 1} \frac{(\ln 2)^k + \cdots + (\ln n)^k}{z^{k+1}}, \end{aligned}$$

hemos obtenido pues el desarrollo en serie de la función  $B_n(z)$ , y como  $z \in \Pi(\theta; A)$ , entonces  $|z| = |ze^{i\theta}| \geq \operatorname{Re}(ze^{i\theta}) > \ln n$ , y la igualdad es válida.  $\square$



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

## Capítulo 6

# El diagrama conjugado

---

En esta sección se obtendrá de forma rigurosa el diagrama conjugado de la función  $G_n(z)$  (véase la definición 5.9). En primer lugar se trabajará con una función auxiliar, que surge a partir de la función indicador, de la que se obtendrán una serie de propiedades, la mayoría de las cuales nos servirán para poder relacionar el diagrama conjugado con la propia función.

Recordemos que la función indicador de  $G_n(z)$  venía dada por

$$h_{G_n}(\theta) = \begin{cases} \cos \theta \ln n, & \text{si } \frac{-\pi}{2} + 2k\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A continuación definiremos la siguiente función  $T_n : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$  a partir de la función indicador:

$$T_n(z) = r^\rho h_{G_n}(\theta), \text{ siendo } z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \text{ y } \rho \text{ el orden de } G_n(z).$$

En nuestro caso ya sabemos que  $\rho = 1$ .

Veamos entonces las importantes propiedades que presenta la función  $T_n(z)$ .

**Definición 6.1** Una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$  se dice **sublineal** si cumple las siguientes propiedades:

- a)  $f(\lambda z) = \lambda f(z), \forall \lambda > 0, z \in \mathbb{C},$
- b)  $f(z_1 + z_2) \leq f(z_1) + f(z_2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},$
- c)  $f(0) = 0.$

**Teorema 6.1**  $T_n(z)$  es una función sublineal.

**Prueba.** Veamos que  $T_n(z)$  cumple las tres propiedades requeridas.

- La propiedad c) es inmediata ya que  $T_n(0) = 0 \cdot h_{G_n}(\theta) = 0.$

- Veamos que se cumple a):

$$T_n(\lambda z) = (\lambda \cdot r)h_{G_n}(\theta) = \lambda T_n(z), \quad \forall \lambda > 0, z = re^{i\theta},$$

ya que  $\lambda z = \lambda re^{i\theta}$  y  $|\lambda z| = \lambda r$ .

- Veamos la propiedad b) :  $T_n(z_1 + z_2) \leq T_n(z_1) + T_n(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .  
Sea  $z_1 := r_1 e^{i\theta_1}$ ;  $z_2 := r_2 e^{i\theta_2}$ ; y sea  $z := z_1 + z_2$ , con  $r := |z|$ ,  $\theta := \text{Arg}(z)$ . Cuando  $\theta_1 = \theta_2$  es trivial luego consideremos sin pérdida de generalidad  $\theta_1 < \theta_2$ , entonces  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ .  
Como  $z = re^{i\theta}$  y  $z = z_1 + z_2$ , entonces  $re^{i\theta} = r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2}$ , por lo tanto:

$$\begin{cases} r \cos \theta = r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 \\ r \sin \theta = r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2. \end{cases} \quad (6.1)$$

Veamos en primer lugar que se cumple la siguiente relación:

$$r \sin(\theta - \theta_1) = r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (6.2)$$

En efecto,

$$r \sin(\theta - \theta_1) = r[\sin \theta \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta],$$

y por otra parte,

$$r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = r_2[\sin \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_2].$$

Por lo tanto, (6.2) es cierto si y solo si:

$$\begin{aligned} r[\sin \theta \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta] &= r_2[\sin \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_2] \iff \\ (r \sin \theta) \cos \theta_1 - \sin \theta_1 (r \cos \theta) &= r_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 - r_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Utilizando ahora las igualdades dadas por (6.1) se concluye la prueba de (6.2).

De la misma forma se prueba la siguiente relación:

$$r \sin(\theta_2 - \theta) = r_1 \sin(\theta_2 - \theta_1). \quad (6.3)$$

Por otra parte tenemos probado que  $h_{G_n}(\theta)$  es  $\rho$ -convexa, es decir,  $\forall \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset [0, 2\pi]$  se tiene que

$$h_{G_n}(\theta) \sin \rho(\theta_2 - \theta_1) \leq h_{G_n}(\theta_1) \sin \rho(\theta_2 - \theta) + h_{G_n}(\theta_2) \sin \rho(\theta - \theta_1).$$

Para  $\rho = 1$  la desigualdad anterior es equivalente a:

$$\frac{T_n(z)}{r} \sin(\theta_2 - \theta_1) \leq \frac{T_n(z_1)}{r_1} \sin(\theta_2 - \theta) + \frac{T_n(z_2)}{r_2} \sin(\theta - \theta_1).$$

Utilizando las igualdades dadas por (6.2) y (6.3), y sustituyendo, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{T_n(z)}{r} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) &\leq \frac{T_n(z_1) r_1}{r_1} \frac{r}{r} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{T_n(z_2) r_2}{r_2} \frac{r}{r} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \\ \iff \frac{T_n(z)}{r} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) &\leq \frac{T_n(z_1)}{r} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{T_n(z_2)}{r} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $r > 0$  y  $\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) > 0$  se concluye que

$$T_n(z) \leq T_n(z_1) + T_n(z_2).$$

□

Como consecuencia de este último teorema, la función  $T_n(z)$  cumple trivialmente la definición de **convexidad**, es decir:

$$T_n((1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2) \leq (1 - \lambda)T_n(z_1) + \lambda T_n(z_2), \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Por lo tanto, podemos formular el siguiente corolario:

**Corolario 6.2**  $T_n(z)$  es una función convexa.

**Prueba.** Basta aplicar el teorema anterior:

$$T_n((1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2) \leq T_n((1 - \lambda)z_1) + T_n(\lambda z_2) = (1 - \lambda)T_n(z_1) + \lambda T_n(z_2) \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

□

La segunda propiedad que se analizará es la propiedad de función subarmónica:

**Definición 6.2** Se dice que una función continua  $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es **subarmónica** si se cumple que

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta \quad \forall z \in \mathbb{C}, r > 0.$$

**Teorema 6.3**  $T_n(z)$  es subarmónica.

**Prueba.** En primer lugar obsérvese que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_n(z + re^{i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi T_n(z + re^{i\theta}) d\theta + \int_\pi^{2\pi} T_n(z + re^{i\theta}) d\theta \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi T_n(z + re^{i\theta}) d\theta + \int_0^\pi T_n(z + re^{i(\theta+\pi)}) d\theta \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi T_n(z + re^{i\theta}) d\theta + \int_0^\pi T_n(z - re^{i\theta}) d\theta \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{T_n(z + re^{i\theta}) + T_n(z - re^{i\theta})}{2} d\theta.$$

Teniendo en cuenta que  $T_n(z)$  es convexa, podemos afirmar que

$$T_n(z) = T_n\left(\frac{1}{2}(z + re^{i\theta}) + \frac{1}{2}(z - re^{i\theta})\right) \leq \frac{1}{2}T_n(z + re^{i\theta}) + \frac{1}{2}T_n(z - re^{i\theta}),$$

por tanto

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{T_n(z + re^{i\theta}) + T_n(z - re^{i\theta})}{2} d\theta \geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi T_n(z) d\theta = T_n(z),$$

con lo que  $T_n(z)$  cumple la definición de función subarmónica.  $\square$

A continuación, consideraremos el concepto de función soporte de un conjunto dado:

**Definición 6.3** La función soporte de un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  es la función dada por:

$$h_M(u) = \sup\{\langle u, x \rangle : x \in M\}, \quad u \in \mathbb{R}^n$$

siendo  $\langle u, x \rangle := \sum_{i=1}^n u_i x_i$ , con  $u := (u_1, \dots, u_n)$ ,  $x := (x_1, \dots, x_n)$ .

El siguiente teorema [15], corolario del teorema de Hahn-Banach, nos será de gran utilidad para encontrar la relación de la función  $T_n(z)$  como función soporte de un cierto conjunto, al que llamaremos diagrama indicador, que estará relacionado con el diagrama conjugado:

**Teorema 6.4** Sea  $K$  un conjunto convexo compacto en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $h$  una función sublineal en  $\mathbb{R}^n$ . Definimos  $T(h) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle \leq h(u) \forall u \in \mathbb{R}^n\}$ . Entonces  $h$  coincide con la función soporte  $h_K$  de  $K$  si y sólo si  $K = T(h)$ .

En nuestro caso aparece el siguiente resultado:

**Teorema 6.5**  $T_n(z)$  es la función soporte del **diagrama indicador** definido por el conjunto

$$I_h := \{q \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(qe^{-i\theta}) \leq h_{G_n}(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}\},$$

donde  $h_{G_n}(\theta)$  es la función indicador.

**Prueba.** Sabemos que  $T_n(z)$  es una función sublineal, por lo tanto aplicando el teorema 6.4,  $T_n(z)$  es la función soporte del conjunto  $I_h$  si, y sólo si, el conjunto  $I_h$  coincide con el conjunto

$$T(T_n) = \{q \in \mathbb{C} : \langle z, q \rangle \leq T_n(z) \forall z \in \mathbb{C}\}$$

definido en dicho teorema.

Además, si  $z \in \mathbb{C}$ , entonces existe  $r \geq 0$  y  $\theta \in \mathbb{R}$  tales que  $z = re^{i\theta}$ , y siendo  $q := q_1 + iq_2$ , con  $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \langle z, q \rangle &= \langle re^{i\theta}, q \rangle = r \langle e^{i\theta}, q \rangle = r \langle (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta), (q_1, q_2) \rangle \\ &= r[q_1 \cos \theta + q_2 \operatorname{sen} \theta]. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\operatorname{Re}(qe^{-i\theta}) = \operatorname{Re}[q(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)] = \operatorname{Re}[(q_1 + iq_2)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)] = q_1 \cos \theta + q_2 \operatorname{sen} \theta.$$

En consecuencia, siendo  $T_n(z) = rh_{G_n}(\theta)$ , se obtiene que

$$\{q \in \mathbb{C} : \langle z, q \rangle \leq T_n(z) \forall z \in \mathbb{C}\} = \{q \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(qe^{-i\theta}) \leq h_{G_n}(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}\}$$

y el teorema queda probado.  $\square$

El conjunto  $I_h$  está relacionado con el diagrama conjugado de  $G_n(z)$ . El siguiente paso es calcular precisamente el diagrama conjugado de  $G_n(z)$ :

**Teorema 6.6** *El diagrama conjugado de  $G_n(z)$  coincide con el conjunto*

$$\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(pe^{i\theta}) \leq h_{G_n}(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}\} = [0, \ln n] \times \{0\}.$$

**Prueba.** Sabemos por el teorema de Polya, [15], que el diagrama conjugado de una función de orden  $\rho = 1$  viene dado por

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in I_h\}.$$

Veamos que  $\{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in I_h\} = \{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(pe^{i\theta}) \leq h_{G_n}(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}\}$ .

En efecto, si  $z \in \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in I_h\}$  se tiene que  $\operatorname{Re}(\bar{z}e^{-i\theta}) \leq h_{G_n}(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}$  ya que si  $z := x + iy$ , entonces  $\operatorname{Re}(\bar{z}e^{-i\theta}) = \operatorname{Re}((x - iy)e^{-i\theta}) = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta$ , y como  $\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta$ , se tiene que

$$z \in \{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(pe^{i\theta}) \leq h_{G_n}(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}\}.$$

La inclusión contraria es análoga, por tanto queda demostrada la igualdad.

Veamos ahora que

$$\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(pe^{i\theta}) \leq h_{G_n}(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}\} = [0, \ln n] \times \{0\}.$$

En efecto, pues si  $p := (p_1, p_2)$  pertenece al conjunto de la izquierda debería cumplirse que

$$p_1 \cos \theta - p_2 \operatorname{sen} \theta \leq 0, \quad \text{para todo } \theta \in \{\theta_1 \in \mathbb{R} : \cos \theta_1 \leq 0\},$$

es decir,

$$p_1 \cos \theta \leq p_2 \operatorname{sen} \theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \text{ satisfaciendo } \cos \theta \leq 0.$$

Si  $p_1, p_2 \neq 0$  esto no se puede cumplir ya que  $\cos \theta$  se puede hacer arbitrariamente pequeño y  $\sin \theta$  puede ser positivo o negativo, por lo tanto el término de la derecha de la desigualdad se podría hacer tan grande como se quisiera para todo  $p \in \mathbb{C}, p_1, p_2 \neq 0$ .

El caso  $p_1 = 0, p_2 \neq 0$  también queda descartado pues  $\sin \theta$  puede ser positivo o negativo en este rango de valores de  $\theta$ , y la desigualdad tampoco sería cierta en tal rango.

Finalmente, consideremos el caso  $p_2 = 0$ . En tal caso, la desigualdad toma la siguiente forma:

$$p_1 \cos \theta \leq 0, \text{ para } \theta \text{ cumpliendo } \cos \theta < 0,$$

por tanto, tomando  $p_1 \geq 0$ , la desigualdad es cierta para este rango de valores de  $\theta$ .

Por otra parte, considerando ahora  $\theta$  cumpliendo  $\cos \theta \geq 0$  la desigualdad a analizar toma la siguiente forma:

$$p_1 \cos \theta - p_2 \sin \theta \leq \ln n \cos \theta \iff p_1 \cos \theta \leq \ln n \cos \theta.$$

En consecuencia, tomando  $p_1 \leq \ln n$  la desigualdad también se verifica para cualquier  $\theta$  en este rango.

Queda probado, consecuentemente, que el diagrama conjugado de  $G_n(z)$  viene dado por

$$K = [0, \ln n] \times \{0\}.$$

□

De hecho, el resultado precedente presenta una alternativa de demostración utilizando la siguiente extensión analítica de la transformada de Borel de la función  $G_n(z)$ :

**Teorema 6.7** *La transformada de Borel de  $G_n(z)$  viene dada por:*

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - \ln k}.$$

**Prueba.** Como se comprobó anteriormente, la transformada de Borel de la función  $G_n(z)$  viene dada por la siguiente serie para  $|z| > \ln n$ :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{z^{k+1}}, \text{ con } a_0 = n, a_k = (\ln 2)^k + \dots + (\ln n)^k, k \geq 1.$$

Por otra parte, para cualquier  $m \in \{2, 3, \dots, n\}$ :

$$\frac{1}{z - \ln m} = \frac{1}{z} \frac{1}{\left(1 - \frac{\ln m}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{\ln m}{z}\right)^k, \text{ ya que } \left|\frac{\ln m}{z}\right| < 1$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - \ln k} &= \frac{1}{z - \ln 1} + \frac{1}{z - \ln 2} + \cdots + \frac{1}{z - \ln n} = \\
 &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left( \frac{\ln 2}{z} \right)^k + \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left( \frac{\ln 2}{z} \right)^k + \cdots + \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left( \frac{\ln n}{z} \right)^k = \\
 &= \frac{n}{z} + \sum_{k \geq 1} \frac{(\ln 2)^k + \cdots + (\ln n)^k}{z^{k+1}},
 \end{aligned}$$

y, consecuentemente, queda demostrado el resultado. □

Hemos llegado a que los puntos  $\ln 1, \ln 2, \dots, \ln n$  son puntos singulares de la transformada de Borel extendida, así que el conjunto compacto convexo más pequeño fuera del cual la transformada de Borel  $B_n(z)$  admite prolongación analítica es  $[0, \ln n] \times \{0\}$  como ya habíamos demostrado anteriormente.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

Capítulo 7

# Ecuaciones diferenciales relacionadas con la ecuación funcional

$$f(x) + f(2x) + \cdots + f(nx) = 0$$

---

En este capítulo trabajaremos con ecuaciones de Euler, en concreto relacionaremos las soluciones de nuestra ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + \cdots + f(nx) = 0$  con las soluciones de una determinada colección de ecuaciones diferenciales de Euler.

Recordamos que se llama **ecuación de Euler** la que tiene la forma:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = g(x),$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son números reales y  $g(x)$  es una función real continua.

## 7.1. Primeras ecuaciones

En primer lugar comenzaremos tratando el caso  $n = 2$ :

**Teorema 7.1** *Las soluciones de la ecuación diferencial de Euler*

$$x^2 y'' + xy' + \lambda^2 y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

*satisfacen la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) = 0$ ,  $x > 0$  si  $\lambda = \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .*

**Prueba.** Para obtener las soluciones de (7.1) realizaremos el cambio de variable  $x = e^t$  ( $t = \ln x$ ), de tal forma que

$$\begin{cases} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} \\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^2} = \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t}. \end{cases}$$

Sustituyendo ahora en (7.1)

$$e^{2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{e^{2t}} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^{2t}} \right) + e^t \frac{dy}{dt} \frac{1}{e^t} + \lambda^2 y = 0 \implies \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda^2 y = 0,$$

por tanto, la ecuación característica de esta ecuación homogénea es

$$r^2 + \lambda^2 = 0,$$

cuyas soluciones son  $r = \pm \lambda i$ , de aquí que la solución general sea

$$y(t) = (A \cos \lambda t + B \operatorname{sen} \lambda t).$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable, las soluciones de (7.1) son de la forma

$$y(x) = A \cos(\lambda \ln(x)) + B \operatorname{sen}(\lambda \ln(x)).$$

Sea ahora  $\lambda = (2n + 1) \frac{\pi}{\ln 2}$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} y(x) + y(2x) &= \\ &= A \left[ \cos \left( \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2} \ln x \right) + \cos \left( \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2} \ln 2x \right) \right] + \\ &\quad + B \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2} \ln x \right) + \operatorname{sen} \left( \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2} \ln 2x \right) \right] = \\ &= A \left[ \cos \left( \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2} \ln x \right) + \cos \left( (2n+1)\pi + \frac{(2n+1)\pi \ln x}{\ln 2} \right) \right] + \\ &\quad + B \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2} \ln x \right) + \operatorname{sen} \left( (2n+1)\pi + \frac{(2n+1)\pi \ln x}{\ln 2} \right) \right] = \\ &= A \left[ \cos \left( \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2} \ln x \right) + (-1) \cos \left( \frac{(2n+1)\pi \ln x}{\ln 2} \right) - 0 \right] + \\ &\quad + B \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2} \ln x \right) + 0 + (-1) \operatorname{sen} \left( \frac{(2n+1)\pi \ln x}{\ln 2} \right) \right] = \\ &= 0, \end{aligned}$$

por tanto, las soluciones de (7.1) con  $\lambda = (2n + 1) \frac{\pi}{\ln 2}$ , es decir,

$$y(x) = A \cos \left( \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2} \ln x \right) + B \operatorname{sen} \left( \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2} \ln x \right)$$

satisfacen la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) = 0$ . □

Acabamos de ver que toda solución de (7.1) es solución de  $f(x) + f(2x) = 0$  con  $\lambda = (2n + 1) \frac{\pi}{\ln 2}$ . Este resultado se pueden generalizar introduciendo la siguiente ecuación diferencial:

**Teorema 7.2** *Las soluciones de la ecuación diferencial*

$$x^2 y'' + (1 - \lambda)xy' + (\lambda^2 + \mu^2)y = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \neq 0 \quad (7.2)$$

satisfacen la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$ ,  $x > 0$ ,  $n \geq 2$  si  $\lambda + \mu i$  es un cero de  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$ . Además sólo para  $n = 2$  se tiene que  $\lambda = 0$ .

**Prueba.** Para obtener las soluciones de (7.2) realizaremos como antes el cambio de variable  $x = e^t$  ( $t = \ln x$ ), de tal forma que

$$\begin{cases} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} \\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^2} = \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t}, \end{cases}$$

sustituyendo ahora en (7.2)

$$\begin{aligned} e^{2t} \left( \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{e^{2t}} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^{2t}} \right) + (1 - 2\lambda)e^t \left( \frac{dy}{dt} \frac{1}{e^t} \right) + (\lambda^2 + \mu^2)y &= 0 \\ \implies \frac{d^2y}{dt^2} - 2\lambda \frac{dy}{dt} + (\lambda^2 + \mu^2)y &= 0. \end{aligned}$$

La ecuación característica de esta ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes es

$$r^2 - 2\lambda r + \lambda^2 + \mu^2 = 0,$$

cuyas soluciones son  $r = \lambda \pm \mu i$ , de aquí que la solución general sea

$$y(t) = e^{\lambda t} (A \cos \mu t + B \operatorname{sen} \mu t).$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable, las soluciones de (7.2) son de la forma

$$y(x) = x^\lambda [A \cos(\mu \ln(x)) + B \operatorname{sen}(\mu \ln(x))].$$

Por otra parte, en el caso de que  $\lambda + \mu i$  sea un cero de  $G_n(z)$ , es decir si

$$1 + 2^\lambda e^{i\mu \ln 2} + \dots + n^\lambda e^{i\mu \ln n} = 0,$$

se tiene que

$$y(x) + y(2x) + \dots + y(nx) =$$

$$\begin{aligned}
&= A [x^\lambda \cos(\mu \ln x) + (2x)^\lambda \cos(\mu \ln 2x) + \cdots + (nx)^\lambda \cos(\mu \ln nx)] + \\
&\quad + B [x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x) + (2x)^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln 2x) + \cdots + (nx)^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln nx)] = \\
&= Ax^\lambda [\cos(\mu \ln x) + 2^\lambda (\cos(\mu \ln 2) \cos(\mu \ln x) - \operatorname{sen}(\mu \ln 2) \operatorname{sen}(\mu \ln x)) + \\
&\quad + \cdots + n^\lambda (\cos(\mu \ln n) \cos(\mu \ln x) - \operatorname{sen}(\mu \ln n) \operatorname{sen}(\mu \ln x))] + \\
&\quad + Bx^\lambda [\operatorname{sen}(\mu \ln x) + 2^\lambda (\operatorname{sen}(\mu \ln 2) \cos(\mu \ln x) + \cos(\mu \ln 2) \operatorname{sen}(\mu \ln x)) + \\
&\quad + \cdots + n^\lambda (\operatorname{sen}(\mu \ln n) \cos(\mu \ln x) - \cos(\mu \ln n) \operatorname{sen}(\mu \ln x))] = \\
&= Ax^\lambda [\cos(\mu \ln x) (1 + 2^\lambda \cos(\mu \ln 2) + \cdots + n^\lambda \cos(\mu \ln n)) - \\
&\quad - \operatorname{sen}(\mu \ln x) (2^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln 2) + \cdots + n^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln n))] + \\
&\quad + Bx^\lambda [\operatorname{sen}(\mu \ln x) (1 + 2^\lambda \cos(\mu \ln 2) + \cdots + n^\lambda \cos(\mu \ln n)) + \\
&\quad + \cos(\mu \ln x) (2^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln 2) + \cdots + n^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln n))] = \\
&= [1 + 2^\lambda \cos(\mu \ln 2) + \cdots + n^\lambda \cos(\mu \ln n)] (Ax^\lambda \cos(\mu \ln x) + Bx^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x)) \\
&\quad + [2^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln 2) + \cdots + n^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln n)] (-Ax^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x) + Bx^\lambda \cos(\mu \ln x)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por tanto queda probado el resultado.

Por último, a raíz de las soluciones obtenidas de la ecuación diferencial (7.2) y de los resultados ya probados de la ecuación funcional en el caso  $n = 2$  (en concreto del resultado que nos dice que excepto para  $n = 2$  los ceros de  $G_n(z)$  no son todos imaginarios puros), es claro que únicamente para  $n = 2$  se tiene que  $\lambda = 0$ .  $\square$

## 7.2. Ecuaciones más generales

A continuación trabajaremos con ecuaciones diferenciales más generales que las estudiadas en la sección previa. Para ello, nos interesa expresar el laplaciano en coordenadas polares ( $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \operatorname{sen} \theta$ ). Dada una función  $u$ , se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - r \frac{\partial u}{\partial r},$$

por tanto, deducimos que el operador laplaciano en coordenadas polares es

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

El primer teorema que establecemos en esta sección es el siguiente:

**Teorema 7.3** *La ecuación*

$$r^2 \Delta u + \mu^2 u = 0 \quad (\text{polares}) \quad (7.3)$$

tiene soluciones que son soluciones de  $f(x) + f(2x) = 0$ ,  $x > 0$ .

**Prueba.** Sustituyendo el laplaciano expresado en coordenadas polares obtenemos que

$$r^2 \Delta u + \mu^2 u = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \mu^2 u = 0.$$

Utilizando ahora el método de separación de variables, sea  $u = \varphi(r)\psi(\theta)$ , entonces  $r^2 \Delta u + \mu^2 u = 0$  es equivalente a

$$r^2 \varphi''(r)\psi(\theta) + r\varphi'(r)\psi(\theta) + \varphi(r)\psi''(\theta) + \mu^2 \varphi(r)\psi(\theta) = 0,$$

por tanto

$$\frac{r^2 \varphi''(r) + r\varphi'(r) + \mu^2 \varphi(r)}{-\varphi(r)} = \frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \lambda.$$

En consecuencia

$$\begin{cases} r^2 \varphi''(r) + r\varphi'(r) + (\mu^2 + \lambda)\varphi(r) = 0, \\ \psi''(\theta) - \lambda\psi(\theta) = 0, \end{cases}$$

y el producto de una solución de la primera ecuación por una solución de la segunda es una solución de (7.3) cualquiera que sea la constante  $\lambda$ .

La solución de la primera ecuación (ecuación de Euler) viene dada por

$$\varphi(r) = \begin{cases} A_1 \cos(\sqrt{\mu^2 + \lambda} \cdot \ln r) + A_2 \sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda} \cdot \ln r), & \text{si } \mu^2 + \lambda \geq 0 \\ A_1 r^{\mu^2 + \lambda} + A_2 r^{-(\mu^2 + \lambda)} & \text{si } \mu^2 + \lambda < 0. \end{cases}$$

De la misma forma, las soluciones de la segunda toman la siguiente expresión:

$$\psi(\theta) = \begin{cases} B_1 e^{\sqrt{\lambda} \cdot \theta} + B_2 e^{-\sqrt{\lambda} \cdot \theta}, & \text{si } \lambda > 0 \\ B_1 \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot \theta) + B_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot \theta), & \text{si } \lambda < 0 \\ B_1 \theta + B_2, & \text{si } \lambda = 0, \end{cases}$$

donde  $B_1$  y  $B_2$  son constantes.

Podemos deducir ahora que, tomando  $\lambda = 0$  (con  $B_1 = 0$ ), es decir,  $\psi(\theta) = B_2$  y  $\varphi(r) = A_1 \cos(\sqrt{\mu^2 + \lambda} \cdot \ln r) + A_2 \sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda} \cdot \ln r)$ , con  $\mu = \frac{(2n+1)\pi}{\ln 2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , la función

$$u = \varphi(r)\psi(\theta) = B_2 \varphi(r)$$

es solución de (7.3) y además es solución de la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) = 0$ ,  $x > 0$  según ya se comprobó en el primer teorema de este capítulo.  $\square$

Extenderemos este resultado para la ecuación funcional en el caso general. En este caso, la ecuación diferencial toma la siguiente forma:

**Teorema 7.4** *La ecuación*

$$r^2 \Delta u - \lambda r \frac{\partial u}{\partial r} + (\mu^2 + \lambda^2)u = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \neq 0 \quad (\text{polares}) \quad (7.4)$$

tiene soluciones que son soluciones de

$$f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0, \quad x > 0.$$

**Prueba.** Sustituyendo el laplaciano expresado en coordenadas polares obtenemos que

$$r^2 \Delta u - \lambda r \frac{\partial u}{\partial r} + (\mu^2 + \lambda^2)u = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \lambda r \frac{\partial u}{\partial r} + (\mu^2 + \lambda^2)u = 0,$$

es decir,

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (1 - \lambda)r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + (\mu^2 + \lambda^2)u = 0.$$

Utilizando, como antes, el método de separación de variables para la obtención de las soluciones deseadas, sea  $u = \varphi(r)\psi(\theta)$ . Entonces la ecuación anterior es equivalente a

$$r^2 \varphi''(r)\psi(\theta) + (1 - \lambda)r\varphi'(r)\psi(\theta) + \varphi(r)\psi''(\theta) + (\mu^2 + \lambda^2)\varphi(r)\psi(\theta) = 0,$$

por tanto

$$\frac{r^2 \varphi''(r) + (1 - \lambda)r\varphi'(r) + (\mu^2 + \lambda^2)\varphi(r)}{-\varphi(r)} = \frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \beta.$$

En consecuencia

$$\begin{cases} r^2 \varphi''(r) + (1 - \lambda)r\varphi'(r) + (\mu^2 + \lambda^2 + \beta)\varphi(r) = 0, \\ \psi''(\theta) - \beta\psi(\theta) = 0, \end{cases}$$

y, de nuevo, el producto de una solución de la primera ecuación por una solución de la segunda es una solución de (7.4) cualquiera que sea la constante  $\beta$ .

Las soluciones de la segunda ecuación ya las hemos estudiado anteriormente y venían dadas por:

$$\psi(\theta) = \begin{cases} B_1 e^{\sqrt{\beta} \cdot \theta} + B_2 e^{-\sqrt{\beta} \cdot \theta}, & \text{si } \beta > 0 \\ B_1 \cos(\sqrt{-\beta} \cdot \theta) + B_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\beta} \cdot \theta), & \text{si } \beta < 0 \\ B_1 \theta + B_2, & \text{si } \beta = 0, \end{cases}$$

donde  $B_1$  y  $B_2$  son constantes.

Nos encargaremos por tanto del estudio de la primera ecuación. Utilizando el procedimiento empleado en las ecuaciones de Euler, las soluciones son:

$$\varphi(r) = \begin{cases} r^\lambda \left[ A_1 \cos(\sqrt{\mu^2 + \beta} \cdot \ln r) + A_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\mu^2 + \beta} \cdot \ln r) \right], & \text{si } \mu^2 + \beta \geq 0 \\ A_1 r^{(\lambda + \sqrt{-\mu^2 - \beta})} + A_2 r^{(\lambda - \sqrt{-\mu^2 - \beta})} & \text{si } \mu^2 + \beta < 0. \end{cases}$$

Como en el teorema anterior, podemos deducir ahora que, tomando  $\beta = 0$  (con  $B_1 = 0$ ), es decir,  $\psi(\theta) = B_2$  y

$$\varphi(r) = r^\lambda \left[ A_1 \cos(\sqrt{\mu^2 + \beta} \cdot \ln r) + A_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\mu^2 + \beta} \cdot \ln r) \right],$$

con  $\lambda + \mu i$  un cero de  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$ , la función

$$u = \varphi(r)\psi(\theta) = B_2\varphi(r)$$

es solución de (7.4) y además es solución de la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$ ,  $x > 0$ , según se comprobó en el teorema 7.2 de este capítulo. □



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

## Capítulo 8

# Operadores

---

Consideremos el intervalo real  $(0, \infty)$  y los compactos de la forma  $K_n = \{x \in (0, \infty) : 1/n \leq x \leq n\}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $K_n$  es una sucesión fundamental de compactos de  $(0, \infty)$ , es decir

- a)  $K_n$  es compacto de  $(0, \infty)$  y  $K_n \subset (0, \infty)$ ,
- b)  $K_n \subset \text{int } K_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ ,
- c)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = (0, \infty)$ ,
- d) dado  $K$  un compacto de  $(0, \infty)$ ,  $\exists K_n$  tal que  $K \subset K_n$ .

Consideremos  $\mathcal{C}(0, \infty)$  el espacio de las funciones continuas sobre  $(0, \infty)$ . Dado  $K$  compacto de  $(0, \infty)$  y  $F \in \mathcal{C}(0, \infty)$  definimos  $|F|_K = \sup\{|F(x)| : x \in K\}$ .

**Definición 8.1** Dadas  $f, g \in \mathcal{C}(0, \infty)$ , definimos

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|f - g|_{K_n}}{1 + |f - g|_{K_n}}. \quad (8.1)$$

Se tienen fácilmente las siguientes propiedades:

- $d(f, g) = d(g, f)$ ,
- $d(f, g) = 0$  si y sólo si  $f = g$  en  $(0, \infty)$ ,
- $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g) \forall f, g, h \in \mathcal{C}(0, \infty)$ ,

es decir, (8.1) define una métrica en  $\mathcal{C}(0, \infty)$ .

Consideremos ahora  $\mathcal{C}^1(0, \infty)$  el espacio de todas las funciones derivables con derivada continua definidas sobre  $(0, \infty)$ . Podemos también afirmar que  $\mathcal{C}^1(0, \infty)$  es un espacio métrico como subespacio de  $\mathcal{C}(0, \infty)$ . Además  $(\mathcal{C}(0, \infty), d)$  es completo.

A continuación trabajaremos a partir del siguiente concepto:

**Definición 8.2** Una función  $T$  entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo  $\mathbb{K}$  se dice que es un **operador lineal** (o transformación lineal) si se cumple que  $T(x + y) = Tx + Ty$ ,  $T(\alpha x) = \alpha Tx$  para cada  $\alpha \in \mathbb{K}$  y cada par  $x, y$  en el dominio de  $T$ .

Consideremos el abierto  $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , y denotaremos  $\mathcal{A}(\Omega)$  el espacio vectorial de todas las funciones analíticas en  $\Omega$  (holomorfas en  $\Omega$ ).

Ahora ya estamos en disposición de poder definir los siguientes dos operadores con los que trabajaremos a lo largo de este capítulo:

**Definición 8.3** Definimos el operador de Euler  $\mathcal{D}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \mathcal{A}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{A}(\Omega) \\ f &\longmapsto zf'. \end{aligned}$$

**Definición 8.4** Definimos el operador integral  $\mathcal{I}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathcal{C}(0, \infty) &\longrightarrow \mathcal{C}^1(0, \infty) \\ f &\longmapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt. \end{aligned}$$

Claramente  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{I}$  son operadores lineales, es decir, para  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) &= \alpha_1 \mathcal{D}(f_1) + \alpha_2 \mathcal{D}(f_2), \quad f_1, f_2 \in \mathcal{A}(\Omega), \\ \mathcal{I}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) &= \alpha_1 \mathcal{I}(f_1) + \alpha_2 \mathcal{I}(f_2), \quad f_1, f_2 \in \mathcal{C}(0, \infty). \end{aligned}$$

Antes de continuar, conviene saber que en espacios vectoriales topológicos de Fréchet (metrizables, localmente convexos y completos) son ciertos los siguientes resultados [véase [9]]:

**Teorema 8.1** Una aplicación lineal entre dos espacios de Fréchet es continua si y sólo si aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados.

**Corolario 8.2** Una aplicación lineal entre dos espacios de Fréchet que aplica sucesiones convergentes a 0 en conjuntos acotados es continua.

**Corolario 8.3** Una aplicación lineal entre dos espacios de Fréchet que aplica sucesiones convergentes a 0 en sucesiones convergentes a 0 es continua.

Teniendo en cuenta estos resultados estamos en disposición de considerar la continuidad de estos operadores:

**Teorema 8.4** Sea  $\mathcal{C}(0, \infty)$  como espacio vectorial topológico dotado de la topología  $\mathcal{T}$  de la convergencia uniforme sobre compactos, entonces el operador  $\mathcal{I} : \mathcal{C}(0, \infty) \longrightarrow \mathcal{C}(0, \infty)$  es continuo.

**Prueba.** Recordemos que  $(\mathcal{C}(0, \infty), \mathcal{T})$  es un espacio de Fréchet. Sea  $(f_n) \subset \mathcal{C}(0, \infty)$  una sucesión de funciones continuas en  $(0, \infty)$  convergente a 0 (es decir,  $|f_n|_K \rightarrow 0 \forall K \subset (0, \infty)$  compacto). Entonces teniendo en cuenta que

$$\mathcal{I}(f_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{1/m}^x f_n(t) dt,$$

se tiene que

$$|\mathcal{I}(f_n)|_K = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{1/m}^x f_n(t) dt \right|_K \rightarrow 0,$$

ya que también  $|f_n|_{K_m} \rightarrow 0$  en los compactos de la forma  $K_m = \left[ \frac{1}{m}, x \right]$  variando  $x$  en el compacto  $K$ .

Por tanto, el operador  $\mathcal{I}$  aplica sucesiones convergentes a 0 en sucesiones convergentes a 0 y, en consecuencia, es continuo (Corolario 8.3).  $\square$

**Teorema 8.5** *El operador  $\mathcal{D}$  definido entre los espacios vectoriales topológicos  $\mathcal{C}^1(0, \infty)$  y  $\mathcal{C}(0, \infty)$  por*

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \mathcal{C}^1(0, \infty) &\longrightarrow \mathcal{C}(0, \infty) \\ f &\longmapsto xf' \end{aligned}$$

*es continuo, donde  $\mathcal{C}(0, \infty)$  tiene la topología de la convergencia uniforme sobre compactos y  $\mathcal{C}^1(0, \infty)$  tiene la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de las funciones y sus derivadas.*

**Prueba.** Sea  $(f_n) \subset \mathcal{C}^1(0, \infty)$  una sucesión de funciones convergente a 0 (es decir,  $|f_n|_K \rightarrow 0 \forall K \subset (0, \infty)$  compacto). Entonces  $(f'_n) \subset \mathcal{C}(0, \infty)$  converge también a 0 por la topología dotada a  $\mathcal{C}^1(0, \infty)$ :

$$|f_n|_K = \max\{\sup |f_n(x)|, \sup |f'_n(x)|, x \in K\}.$$

Por otra parte, dado  $K$  cualquier compacto en  $(0, \infty)$ , existe  $K_{n_0} = \{x \in (0, \infty) : 1/n_0 \leq x \leq n_0\}$  tal que  $K \subset K_{n_0}$ . En consecuencia, se tiene que

$$|\mathcal{D}(f_n)|_K = \left| xf'_n \right|_K \leq n_0 |f'_n|_K \rightarrow 0,$$

por tanto, el operador  $\mathcal{D}$  aplica sucesiones convergentes a 0 en sucesiones convergentes a 0 y en consecuencia es continuo (Corolario 8.3).  $\square$

Consideramos ahora los siguientes conceptos:

**Definición 8.5** *Sea  $T : X \longrightarrow X$  un operador lineal continuo sobre  $\mathbb{C}$ ,*

a) Diremos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un **valor propio de  $T$**  si existe  $x \in X$ ,  $x \neq 0$  tal que  $Tx = \lambda x$ . El conjunto de estos valores propios se denotará por  $\sigma_p(T)$ .

b) El conjunto resolvente de  $T$  consiste en aquellos valores  $\lambda \in \mathbb{C}$  tales que  $T - \lambda I$  es un isomorfismo, se denota por  $\rho(T)$ .

c) El **espectro de  $T$**  es  $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ .

Nuestro objetivo será ahora calcular el espectro del operador  $\mathcal{D} : \mathcal{A}(\Omega) \rightarrow \mathcal{A}(\Omega)$ . Para ello, calcularemos en primer lugar el conjunto de los valores propios,  $\sigma_p(\mathcal{D})$ :

- $\lambda = 0 \in \sigma_p(\mathcal{D})$  ya que tomando  $f \equiv \text{cte}$  se tiene que  $\mathcal{D}(f) = \lambda f$ .
- $\lambda \neq 0 \in \sigma_p(\mathcal{D})$  ya que fijado  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq 0$  tomando  $f(z) = z^\lambda$  se tiene que  $zf' = \lambda f$ , es decir,  $\mathcal{D}(f) = \lambda f$ .

Por tanto,  $\sigma_p(\mathcal{D}) = \mathbb{C}$  y las funciones asociadas a cada valor propio  $\lambda$  son  $f(z) = z^\lambda$ . Como naturalmente se cumple en general que  $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$  podemos concluir con el siguiente resultado:

**Teorema 8.6**  $\sigma(\mathcal{D}) = \mathbb{C}$ , es decir, el espectro del operador  $\mathcal{D}$  es todo el plano complejo.

A continuación, denotaremos por  $\mathcal{V}_n$  al subespacio vectorial de  $\mathcal{A}(\Omega)$  formado por las soluciones analíticas de  $f(z) + f(2z) + \dots + f(nz) = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$  y por  $\mathcal{W}_n$  al subespacio vectorial de  $\mathcal{C}(0, \infty)$  formado por las soluciones continuas de  $f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Probaremos que  $\mathcal{V}_n$  y  $\mathcal{W}_n$  son invariantes bajo estos operadores:

**Proposición 8.7** En los espacios vectoriales  $\mathcal{A}(\Omega)$  y  $\mathcal{C}(0, \infty)$ , los operadores  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{I}$  dejan invariante a los subespacios vectoriales  $\mathcal{V}_n$  y  $\mathcal{W}_n$  respectivamente.

**Prueba.** Sea  $f \in \mathcal{V}_n$  y  $g \equiv \mathcal{D}(f)$ , entonces

$$\begin{aligned} g(z) + g(2z) + \dots + g(nz) &= zf'(z) + 2zf'(2z) + \dots + nzf'(nz) = \\ &= z[f'(z) + 2f'(2z) + \dots + nf'(nz)] = z[f(z) + f(2z) + \dots + f(nz)]' = 0. \end{aligned}$$

Por tanto  $g \in \mathcal{V}_n$  y en consecuencia  $\mathcal{D}(\mathcal{V}_n) \subset \mathcal{V}_n$ .

De la misma forma, sea ahora  $f \in \mathcal{W}_n$  y  $h \equiv \mathcal{I}(f)$ , entonces teniendo en cuenta el cambio de variable  $t = my$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$  queda

$$h(x) + h(2x) + \dots + h(nx) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{2x} \int_0^{2x} f(t)dt + \dots + \frac{1}{nx} \int_0^{nx} f(t)dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x} \int_0^x f(y)dy + \frac{1}{x} \int_0^x f(2y)dy + \cdots + \frac{1}{x} \int_0^x f(ny)dy = \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x [f(y) + f(2y) + \cdots + f(ny)] = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto  $h \in \mathcal{W}_n$  y en consecuencia  $\mathcal{I}(\mathcal{W}_n) \subset \mathcal{W}_n$ .  $\square$

Podemos formular a continuación el siguiente resultado:

**Teorema 8.8** *Los vectores propios del operador  $\mathcal{D}$  son soluciones analíticas en  $\Omega$  de la ecuación funcional  $f(z) + f(2z) + \cdots + f(nz) = 0$  si y sólo si los correspondientes valores propios son los ceros de la función  $G_n(z)$ .*

**Prueba.** Sea  $f$  un vector propio de  $\mathcal{D}$  con valor propio asociado  $\lambda$ , es decir,  $\mathcal{D}(f) = \lambda f$ , o equivalentemente  $zf' = \lambda f$ , cuya solución es

$$f(z) = Kz^\lambda, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$f(z) + f(2z) + \cdots + f(nz) = Kz^\lambda(1 + 2^\lambda + \cdots + n^\lambda),$$

en consecuencia,  $f(z) + f(2z) + \cdots + f(nz) = 0$  en  $\Omega$  si y sólo si  $\lambda$  es un cero de  $G_n(z)$ .  $\square$

Además podemos establecer las siguiente relaciones entre los operadores  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{I}$ :

**Proposición 8.9** *Denotando por  $I_d$  al operador identidad definido en  $\mathcal{C}^1(0, \infty)$  se tiene que*

$$\mathcal{I}(\mathcal{D} + I_d) = I_d$$

**Prueba.** Sea  $f \in \mathcal{C}^1(0, \infty)$ , entonces obtenemos que

$$(\mathcal{D} + I_d)(f) = \mathcal{D}(f) + I_d(f) = xf' + f.$$

Tomando ahora el operador  $\mathcal{I}$  se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\mathcal{D} + I_d)(f) &= \mathcal{I}(xf' + f) = \frac{1}{x} \int_0^x [tf'(t) + f(t)]dt = \\
&= \frac{1}{x} \left[ \int_0^x tf'(t)dt + \int_0^x f(t)dt \right] = \frac{1}{x} \left[ xf(x) - \int_0^x f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \right] = f(x),
\end{aligned}$$

en consecuencia

$$\mathcal{I}(\mathcal{D} + I_d) = I_d.$$

$\square$

**Proposición 8.10** Denotando por  $I_d$  al operador identidad definido en  $\mathcal{C}(0, \infty)$  se tiene que

$$(\mathcal{D} + I_d)\mathcal{I} = I_d$$

**Prueba.** Dada  $f \in \mathcal{C}(0, \infty)$ , tenemos que  $\mathcal{I}(f) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$  y derivando obtenemos que

$$(\mathcal{I}(f))' = \frac{-1}{x^2} \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x}f(x),$$

por tanto,

$$(\mathcal{I}(f))'x + \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = f(x),$$

teniendo en cuenta ahora la definición del operador  $\mathcal{D}$  se tiene que

$$\mathcal{D}(\mathcal{I}f) + \mathcal{I}f = f,$$

concluyendo que

$$(\mathcal{D} + I_d)\mathcal{I} = I_d.$$

□

**Corolario 8.11** Los operadores  $\mathcal{I} : \mathcal{C}(0, \infty) \longrightarrow \mathcal{C}^1(0, \infty)$  y  $\mathcal{D} + I_d : \mathcal{C}^1(0, \infty) \longmapsto \mathcal{C}(0, \infty)$  son biyectivos. Además  $\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{D} + I_d$ .

**Prueba.** En primer lugar, por la proposición 8.9 se deduce que el operador  $\mathcal{I}$  es suprayectivo y el operador  $\mathcal{D} + I_d$  es inyectivo. De la misma forma, por la proposición 8.10 se tiene que el operador  $\mathcal{I}$  es inyectivo y el operador  $\mathcal{D} + I_d$  es suprayectivo. Teniendo en cuenta además la relación existente entre ambos operadores tenemos que  $\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{D} + I_d$ .

□

**Corolario 8.12** Dada  $f_1 \in \mathcal{C}(0, \infty)$  existe una única función  $g_1 \in \mathcal{C}^1(0, \infty)$  tal que

$$(\mathcal{D} + I_d)g_1 = f_1,$$

y además dada  $f_2 \in \mathcal{C}^1(0, \infty)$  existe una única función  $g_2 \in \mathcal{C}(0, \infty)$  tal que

$$\mathcal{I}(g_2) = f_2.$$

**Prueba.** Es una de las consecuencias del corolario anterior.

□

Utilizando estas últimas proposiciones podemos formular un resultado análogo al del teorema 8.8 para el operador  $\mathcal{I}$ :

**Teorema 8.13** *Los vectores propios del operador  $\mathcal{I}$  asociados al valor propio  $\lambda$  son soluciones continuas en  $(0, \infty)$  de la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + \cdots + f(nx) = 0$  si y sólo si  $\frac{1-\lambda}{\lambda}$  son ceros de la función  $G_n(z)$ .*

**Prueba.** Sea  $f$  un vector propio de  $\mathcal{I}$  con valor propio asociado  $\lambda$ , es decir,  $\mathcal{I}(f) = \lambda f$ . Entonces, teniendo en cuenta la proposición 8.10, se tiene que

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} + I_d)\mathcal{I}(f) &= (\mathcal{D} + I_d)\lambda f = \lambda(\mathcal{D} + I_d)f = \\ &= \lambda[\mathcal{D}(f) + f] = f, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1-\lambda}{\lambda}f,$$

o equivalentemente,

$$xf' = \frac{1-\lambda}{\lambda}f,$$

cuya solución es

$$f(x) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$f(x) + f(2x) + \cdots + f(nx) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}(1 + 2^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} + \cdots + n^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}),$$

en consecuencia  $f(x) + f(2x) + \cdots + f(nx) = 0$  en  $(0, \infty)$  si y sólo si  $\frac{1-\lambda}{\lambda}$  es un cero de  $G_n(z)$ . □



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# Relación entre $G_n(z)$ y la función $\zeta(z)$ zeta de Riemann

---

En este capítulo relacionaremos las funciones enteras  $G_n(z) = 1 + 2^z + \cdots + n^z$  con la función zeta de Riemann:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

En primer lugar, observemos que

$$G_n(-z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \cdots + \frac{1}{n^z},$$

por tanto si hacemos  $n \rightarrow \infty$  y tomamos  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re}(-z) > 1$ , es decir,  $\operatorname{Re} z < -1$ , entonces las funciones  $G_n(z)$  constituyen una sucesión de aproximantes a  $\zeta(z)$  en el semiplano  $\operatorname{Re} z < -1$ .

En el desarrollo posterior, utilizaremos el conocido concepto de convergencia uniforme sobre compactos. Recordemos que este concepto es equivalente al siguiente criterio de convergencia de Cauchy:

**Teorema 9.1** *Para que la sucesión de funciones  $(f_n)$  definidas en un conjunto  $U \subset \mathbb{C}$  converja uniformemente sobre compactos hacia la función  $f$  es necesario y suficiente que dado  $K \subset U$  un compacto arbitrario*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq N, m \geq N \text{ entonces } |f_n(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon \quad \forall z \in K.$$

Denotaremos por  $\mathcal{A}(U)$  al espacio de las funciones analíticas en un abierto  $U \subset \mathbb{C}$ , salvo que se diga lo contrario se entenderá que  $U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ , y definiremos  $R_n(z) := G_n(-z) \quad \forall n \geq 2$ .

Tenemos ahora las herramientas necesarias para demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 9.2** Tomando  $U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ , entonces la sucesión de funciones  $R_2, R_3, \dots, R_n, \dots \in \mathcal{A}(U)$ , converge uniformemente sobre compactos de  $U$ .

**Prueba.** Utilizaremos el criterio de Cauchy para convergencia uniforme (teorema 9.1). Dado  $K$  un compacto arbitrario de  $U$ , sea  $z := x + iy \in K$  (por tanto  $x = \operatorname{Re} z > x_0$  con  $x_0 > 1$ ), y sean  $n, m$  dos números naturales mayores o iguales que 2 con  $n > m$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} |R_n(z) - R_m(z)| &= \left| \left( 1 + \frac{1}{2^z} + \dots + \frac{1}{m^z} + \dots + \frac{1}{n^z} \right) - \left( 1 + \frac{1}{2^z} + \dots + \frac{1}{m^z} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{(m+1)^z} + \dots + \frac{1}{n^z} \right| \leq \frac{1}{(m+1)^x} + \dots + \frac{1}{n^x}. \end{aligned}$$

Por tanto, dado  $\varepsilon > 0$  arbitrario y puesto que  $x > x_0$ , con  $x_0 > 1$ , podemos tomar  $n$  y  $m$  lo suficientemente grandes de modo que

$$\frac{1}{(m+1)^x} + \dots + \frac{1}{n^x} \leq \varepsilon.$$

En consecuencia se verifica la condición de Cauchy y la sucesión de funciones  $(R_n)$  converge uniformemente sobre compactos de  $U$ .  $\square$

Puesto que acabamos de demostrar que la sucesión de funciones  $(R_n)$  converge uniformemente sobre los compactos de  $U$  hacia la función  $\zeta(z)$ , obtenemos así una prueba alternativa basada en las funciones  $G_n(z)$  de que la función  $\zeta(z)$  define una función analítica sobre  $U$  en virtud del siguiente teorema de Weierstrass [3]:

**Teorema 9.3** Sea  $(f_n) \subseteq \mathcal{A}(U)$  con  $(f_n)$  convergiendo uniformemente sobre compactos de  $U$  hacia  $f$ , entonces  $f \in \mathcal{A}(U)$ , y además  $\forall p \in \mathbb{N} (f_n^{(p)}) \rightarrow f^{(p)}$  uniformemente sobre los compactos de  $U$ .

Además, gracias a esta convergencia uniforme de las funciones  $R_n$ , podemos establecer resultados que nos relacionan los ceros de  $\zeta(z)$  y los ceros de  $G_n(z)$  bajo hipótesis adicionales. El teorema de Hurwitz por ejemplo juega un papel importante en este sentido:

**Teorema 9.4 (de Hurwitz, [3])** Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}(U)$ ,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre compactos de  $U$ . Supongamos que  $\overline{D}(z_0, r) \subseteq U$  y que  $f$  no se anula en  $\{z : |z - z_0| = r\}$ . Entonces  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq N$ ,  $f_n$  y  $f$  tienen el mismo número de ceros en  $D(z_0, r)$ .

Aplicando directamente el teorema de Hurwitz a la sucesión de funciones  $R_n$  y teniendo en cuenta lo demostrado anteriormente se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 9.5** Considerando las funciones  $R_2, R_3, \dots \in \mathcal{A}(U)$ , si suponemos que  $z_0 \in U$  y  $r > 0$  son tales que  $\overline{D}(z_0, r) \subseteq U$  y  $\zeta(z)$  no se anula en  $\{z : |z - z_0| = r\}$  entonces  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq N$ ,  $R_n$  y  $\zeta(z)$  tienen el mismo número de ceros en  $D(z_0, r)$ .

Como consecuencia del teorema anterior podemos aún formular un nuevo resultado:

**Teorema 9.6** Considerando de nuevo las funciones  $R_2, R_3, \dots \in \mathcal{A}(U')$ , siendo  $U'$  un subconjunto conexo y abierto no vacío de  $U$  entonces:

si  $R_n(z)$  no se anula en  $U' \forall n \in \mathbb{N} \implies \zeta(z)$  no se anula en  $U'$ .

**Prueba.** Dado  $U'$  un subconjunto conexo y abierto no vacío de  $U$ , supongamos que  $R_n(z)$  no se anula en  $U' \forall n \in \mathbb{N}$  y que existe  $z_0 \in U'$  tal que  $\zeta(z_0) = 0$ . En tal caso, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $D(z_0, \varepsilon) \subset U'$  y además

$$\zeta(z) \neq 0 \forall z \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}.$$

Por tanto,  $\zeta(z)$  no se anula en  $\left\{z : |z - z_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$  y, utilizando el teorema 9.5, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $R_n$  tiene un cero en  $D(z_0, \frac{\varepsilon}{2}) \forall n > N$ , lo que supone una contradicción.  $\square$

Hemos demostrado por tanto que en las regiones conexas donde la función  $\zeta(z)$  tiene algún cero, las funciones  $R_n(z)$  también se anulan  $\forall n \geq 2$ .

Considerando ahora el hecho que  $\{z \in \mathbb{C} : R_n(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} : -z \text{ es cero de } G_n(z)\}$ , la trascendencia de estos resultados se ve reflejada en el siguiente teorema:

**Teorema 9.7** Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $G_n(z)$  no se anula en  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < -1\}$  para cualquier  $n \geq N$ .

**Prueba.** Si consideramos

$$\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$$

extendida a  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , sabemos que fuera de la banda crítica  $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$  la función  $\zeta(z)$  sólo tiene ceros en  $-2, -4, -6, \dots$  (ceros triviales).

En nuestro caso, aplicando el teorema 9.5, considerando  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  tal que  $\overline{D}(z_0, r) \subset U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ , podemos deducir que  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $R_n(z)$  y  $\zeta(z)$  tienen el mismo número de ceros en  $D(z_0, r)$ , es decir, ninguno.

Además, como los ceros de  $R_n(z)$  son los opuestos de los ceros de  $G_n(z)$ , podemos afirmar que  $G_n(z)$  no se anula en  $\operatorname{Re} z < -1$  para  $n \geq N$ , y el teorema queda probado.  $\square$

Finalmente, relacionaremos las funciones  $G_n(z)$  y la función zeta de Riemann mediante la llamada serie de Euler-MacLaurin. Para ello, comenzaremos con la siguiente definición:

**Definición 9.1** Sea  $q_n(x)$  una sucesión de funciones cumpliendo las siguientes propiedades:

$$q_n(x) > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}(x)}{q_n(x)} = 0.$$

Supongamos además que  $F(x)$  está definida para  $0 \leq x < \infty$ . Entonces la serie (no necesariamente convergente)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu_k(x)$$

es llamada serie asintótica respecto a  $q_n(x)$  para  $F(x)$  si:

- $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{|\mu_n(x)|}{q_n(x)} = c, \quad 0 < c < \infty$
- $F(x) - \sum_{k=0}^n a_k \mu_k(x) = o(q_n(x)),$

esto es, si la diferencia entre  $F(x)$  y cada suma finita crece más lentamente que el término más pequeño en esa suma.

Lo denotaremos por  $F(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu_k(x)$ .

La serie de Euler-Maclaurin es una de las más conocidas series asintóticas, y además es ampliamente utilizada para obtener estimaciones asintóticas, [10]:

Sea  $f(z)$  una función analítica en el semiplano  $\operatorname{Re} z \geq 0$  verificando  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(k+1)}(n)}{f^{(k)}(n)} = 0$ .

Tomando  $I(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$  se tiene que

$$I_n \sim \int_{\theta}^n f(x) dx + C(\theta) + \frac{1}{2} f(n) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k f^{(k)}(n), \quad (9.1)$$

donde

$$C(\theta) = \int_{\theta}^{\theta+i\infty} \frac{f(z)}{e^{-2\pi iz} - 1} dz + \int_{\theta}^{\theta-i\infty} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz, \quad (9.2)$$

$$B_{2m} = 0, \quad B_{2m+1} = \frac{2(-1)^n}{(2m+1)!} \int_0^{\infty} \frac{y^{2m+1} dy}{e^{2\pi y} - 1}.$$

(Nótese que se toma  $\mu_n(x) = q_n(x) = f^{(n)}(|x|)$  en la definición de serie asintótica.)

Calcularemos a continuación la serie de Euler-MacLaurin de  $G_n(z)$  en la que como vamos a ver aparece la función zeta de Riemann, manifestando de nuevo la estrecha relación existente entre ellas:

**Teorema 9.8** *La serie de Euler-Maclaurin de la función  $G_n(z)$  es:*

$$G_n(z) \sim \frac{n^{z+1}}{z+1} + \frac{1}{2}n^z + \zeta(-z) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{n^{k-z}},$$

donde  $B_k$  son los números de Bernoulli.

**Prueba.** Para cada  $z \in \mathbb{C}$  fijo, consideremos la función  $f(w) = w^z$ , con  $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Esta función cumple las propiedades requeridas para poder aplicar el desarrollo anterior, es decir, es analítica en todo su dominio (en particular en  $\operatorname{Re} z > 0$ ) y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(k+1)}(n)}{f^{(k)}(n)} = 0$ , ya que  $f^{(k)}(n) = \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{n^{k-z}}$  y en consecuencia

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(k+1)}(n)}{f^{(k)}(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z-1)\cdots(z-k)}{n^{k+1-z}} \cdot \frac{n^{k-z}}{z(z-1)\cdots(z-k+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z-k}{n} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando (9.1) se tiene que

$$1 + 2^z + \cdots + n^z \sim \int_{\theta}^n x^z dx + C(\theta) + \frac{1}{2}n^z + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{n^{k-z}},$$

es decir,

$$G_n(z) \sim \frac{n^{z+1}}{z+1} - \frac{\theta^{z+1}}{z+1} + C(\theta) + \frac{1}{2}n^z + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{n^{k-z}}.$$

Teniendo en cuenta (9.2),

$$\begin{aligned} C(\theta) &= \int_{\theta}^{\theta+i\infty} \frac{f(z)}{e^{-2\pi iz} - 1} dz + \int_{\theta}^{\theta-i\infty} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz = \\ &= \int_{\theta}^{\theta+i\infty} \frac{f(z) - f(0)}{e^{-2\pi iz} - 1} dz + \int_{\theta}^{\theta-i\infty} \frac{f(z) - f(0)}{e^{2\pi iz} - 1} dz + \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1 - e^{-2\pi i\theta}}{1 - e^{2\pi i\theta}} f(0). \end{aligned}$$

Ahora, haciendo  $\theta \rightarrow 0$  se tiene que

$$C(0) = -\frac{1}{2}f(0) + i \int_0^{\infty} \frac{f(iy) - f(-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy.$$

Puesto que  $f(w) = w^z$ ,

$$\begin{aligned} C(0) &= - \int_0^{\infty} \frac{(iy)^z - (-iy)^z}{i} \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1} = \frac{-1}{i} [i^z - (-i)^z] \int_0^{\infty} \frac{y^z}{e^{2\pi y} - 1} dy = \\ &= \frac{-1}{i} [e^{zi\pi/2} - e^{-zi\pi/2}] \int_0^{\infty} \frac{y^z}{e^{2\pi y} - 1} dy = -2 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2} \int_0^{\infty} \frac{y^z}{e^{2\pi y} - 1} dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2} \int_0^\infty \sum_{m=1}^\infty e^{-2\pi m y} y^z dy = -2 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2} \sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty e^{-u} \left( \frac{u}{2\pi m} \right)^z \frac{du}{2\pi m} = \\
&= -2 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2} \sum_{m=1}^\infty (2\pi m)^{-z-1} \int_0^\infty e^{-u} u^z du = -2 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2} \Gamma(z+1) \zeta(z+1) (2\pi)^{-z-1}.
\end{aligned}$$

Finalmente usando la ecuación funcional de la función zeta de Riemann [27]:

$$\zeta(z) = 2\Gamma(1-z)\zeta(1-z)(2\pi)^{z-1} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2},$$

se tiene que  $C(0) = \zeta(-z)$ .

Para encontrar  $C(\theta)$  utilizaremos el hecho de que cuando  $C(0)$  es conocido entonces  $C(\theta) - \frac{\theta^{z+1}}{z+1}$  no depende de  $\theta$ . En efecto, calculando su derivada y utilizando (9.2):

$$\begin{aligned}
&\left[ C(\theta) - \frac{\theta^{z+1}}{z+1} \right]' = C'(\theta) - \theta^z = \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(\theta + iy)}{e^{-2\pi i(\theta + iy)} - 1} - \frac{f(\theta)}{e^{-2\pi i\theta} - 1} + \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(\theta - iy)}{e^{2\pi i(\theta - iy)} - 1} - \frac{f(\theta)}{e^{2\pi i\theta} - 1} - \theta^z = \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(\theta + iy)^z}{e^{-2\pi i(\theta + iy)} - 1} - \frac{\theta^z}{e^{-2\pi i\theta} - 1} + \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(\theta - iy)^z}{e^{2\pi i(\theta - iy)} - 1} - \frac{\theta^z}{e^{2\pi i\theta} - 1} - \theta^z = \\
&= -\frac{\theta^z}{e^{-2\pi i\theta} - 1} - \frac{\theta^z}{e^{2\pi i\theta} - 1} - \theta^z = \theta^z \left[ \frac{-1}{e^{-2\pi i\theta} - 1} - \frac{1}{e^{2\pi i\theta} - 1} \right] - \theta^z = \\
&= \theta^z \left[ \frac{2 - 2 \cos 2\pi\theta}{2 - 2 \cos 2\pi\theta} \right] - \theta^z = 0,
\end{aligned}$$

por tanto  $C(\theta) - \frac{\theta^{z+1}}{z+1} = \text{cte}$ , y tomando  $\theta = 0$  se tiene que

$$C(\theta) = \zeta(-z) + \frac{\theta^{z+1}}{z+1}.$$

En consecuencia, para finalizar, únicamente nos queda sustituir en (9.1) para obtener

$$G_n(z) \sim \frac{n^{z+1}}{z+1} + \frac{1}{2}n^z + \zeta(-z) + \sum_{k=1}^\infty B_k \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{n^{k-z}},$$

que es la fórmula anunciada. □

---

## Capítulo 10

# Estudio de los ceros

---

En este capítulo estudiaremos con detalle la distribución de los ceros de la función  $G_n(z)$ , que ya sabemos que están íntimamente relacionados con las soluciones de la ecuación funcional  $f(z) + f(2z) + \dots + f(nz) = 0$ . En concreto, acabaremos utilizando técnicas sobre funciones casi periódicas para estudiar la distribución asintótica de los ceros sobre la banda crítica donde están situados. Finalmente, probaremos la existencia de un conjunto infinito de rectángulos de la banda crítica para los cuales hemos encontrado una fórmula exacta sobre el número de ceros en ellos.

Un primer resultado acerca de estos ceros que ya hemos analizado en el capítulo anterior es que  $G_n(z)$  no se anula en  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < -1\}$  a partir de un  $N$  en adelante (véase teorema 9.7).

En el desarrollo posterior denotaremos por  $n_f(t)$  el número de ceros en  $|z| \leq t$  (contando multiplicidad) de una función dada  $f(z)$ . Además los ceros serán denotados por  $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ , ordenados por orden creciente de módulo.

El conocido teorema de Lindelöf [4] nos proporciona un resultado básico en torno a estos ceros:

**Teorema 10.1 (Lindelöf)** *La función entera  $f(z)$  de orden  $\rho$  es de tipo finito si y solo si  $n(r) = O(r^\rho)$  y  $S(r) = \sum_{|z_n| \leq r} z_n^{-\rho}$  está acotada.*

En nuestro caso, para el número de ceros de  $G_n(z)$ , se tiene entonces que  $n_{G_n}(r) = O(r)$ .

### 10.1. Motivación

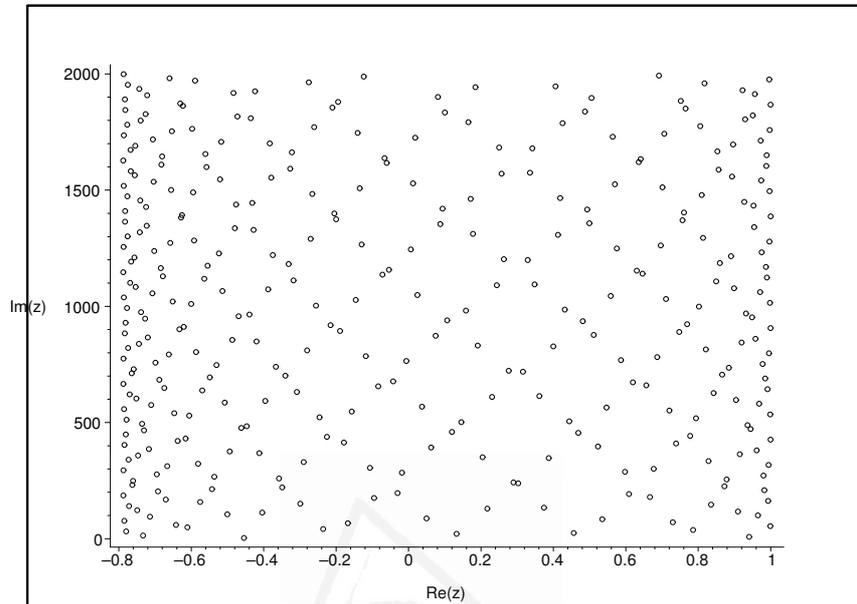
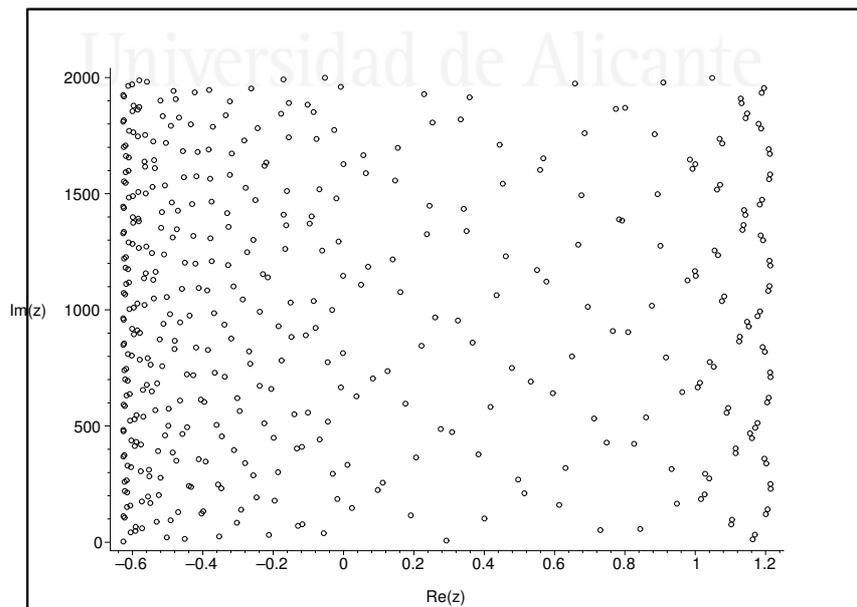
Durante el transcurso de nuestras investigaciones, se llevaron a cabo al mismo tiempo varias comprobaciones de tipo numérico relacionados con los ceros de la función  $G_n(z)$  que, además de confirmarnos algunos resultados que ya teníamos probados, nos ayudaron a motivar nuevas hipótesis que a posteriori han sido confirmadas.

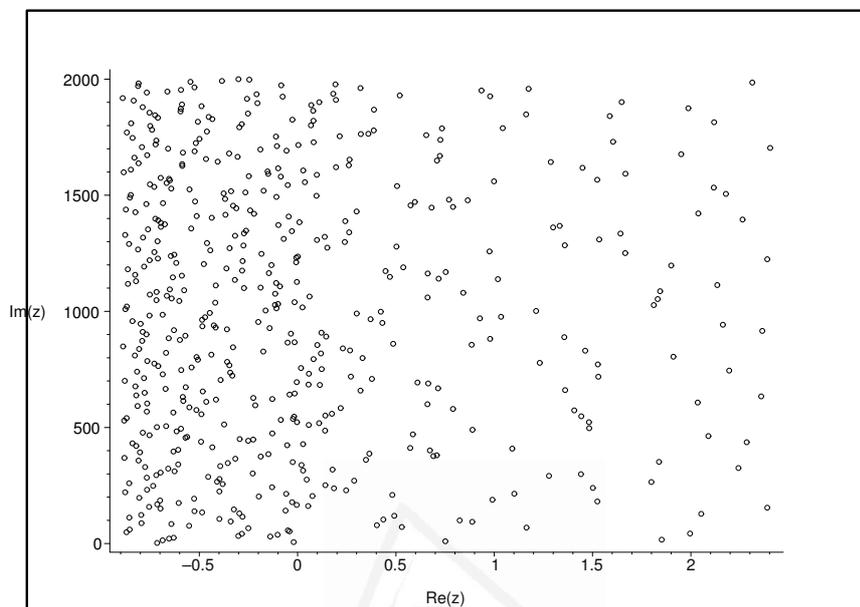
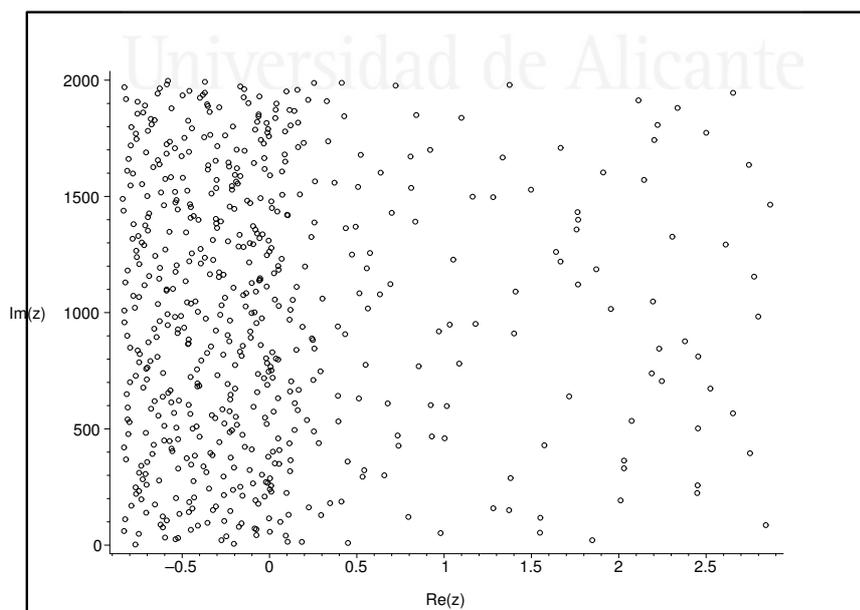
Con la ayuda de un software específico se elaboró un programa que nos proporcionó el número total de ceros de  $G_n(z)$  en la región rectangular deseada. De esta forma, se pudo observar la distribución que seguían los ceros junto con varias propiedades y características que poseían.

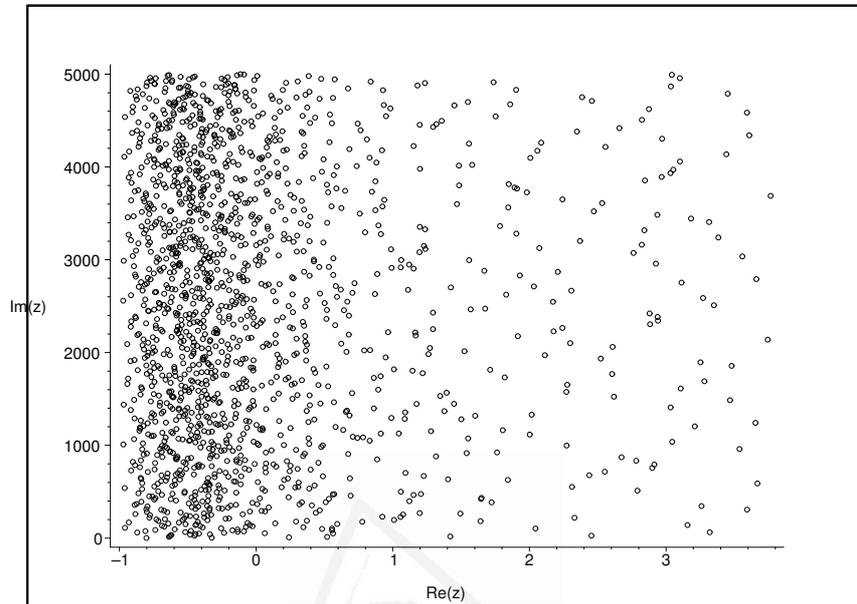
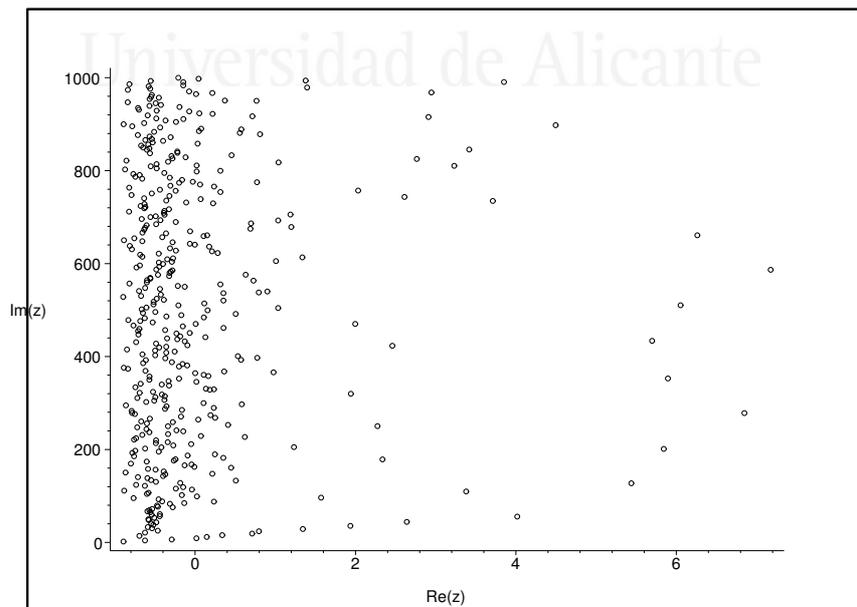
Presentamos a continuación algunos de los gráficos obtenidos para diversos valores de  $n$  junto con el número total de ceros obtenidos (en cada gráfico, denotamos por  $N_n(T)$  el número de ceros de  $G_n(z)$  en el interior de la banda determinada por  $\text{Im } z = 0$  y  $\text{Im } z = T$ ).

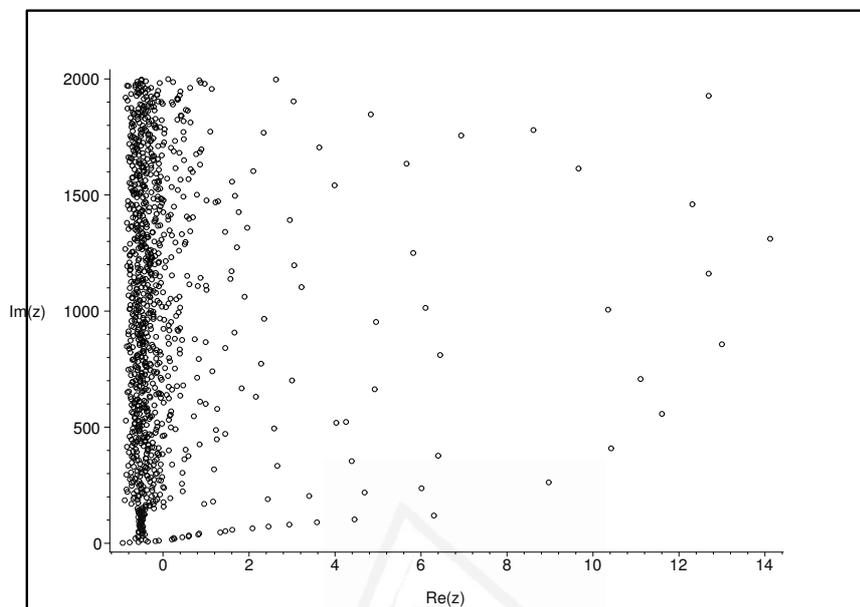
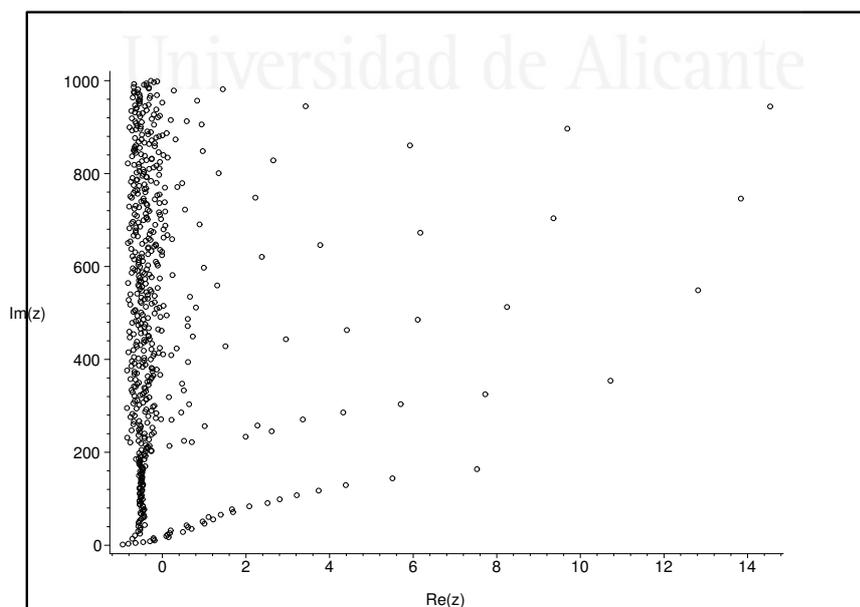
Conviene destacar que una gran cantidad de pruebas numéricas se han llevado a cabo, variando  $n$  y partiendo de rectángulos de diversa índole, y podemos decir que todas las características que se pueden apreciar a partir de estos gráficos han sido probadas y serán presentadas en las siguientes secciones. Así por ejemplo, en la realización de estas pruebas numéricas se pudo comprobar que fijadas las partes imaginarias en el rectángulo de búsqueda de los ceros, por mucho que aumentáramos la parte real no obteníamos ningún cero extra, es decir, que es un síntoma evidente de que los ceros puedan estar todos en una banda paralela al eje imaginario. Además, se puede apreciar que al aumentar  $n$  los ceros tienden a concentrarse en las cercanías del eje imaginario (hecho que está relacionado con la condición (C) de la que hablaremos posteriormente). Estas pruebas numéricas nos sirvieron también de gran ayuda a la hora de formular nuestra hipótesis acerca del número exacto de ceros en los rectángulos (o bandas) de este tipo (ver tabla 1), consistente en afirmar que su valor  $N_n(T)$  venía dado por la fórmula

$$N_n(T) = \frac{T \ln n}{2\pi}.$$

Figura 10.1:  $N_3(2000) = 350$ Figura 10.2:  $N_4(2000) = 442$

Figura 10.3:  $N_5(2000) = 513$ Figura 10.4:  $N_6(2000) = 570$

Figura 10.5:  $N_7(5000) = 1549$ Figura 10.6:  $N_{13}(1000) = 409$

Figura 10.7:  $N_{25}(2000) = 1025$ Figura 10.8:  $N_{33}(1000) = 557$

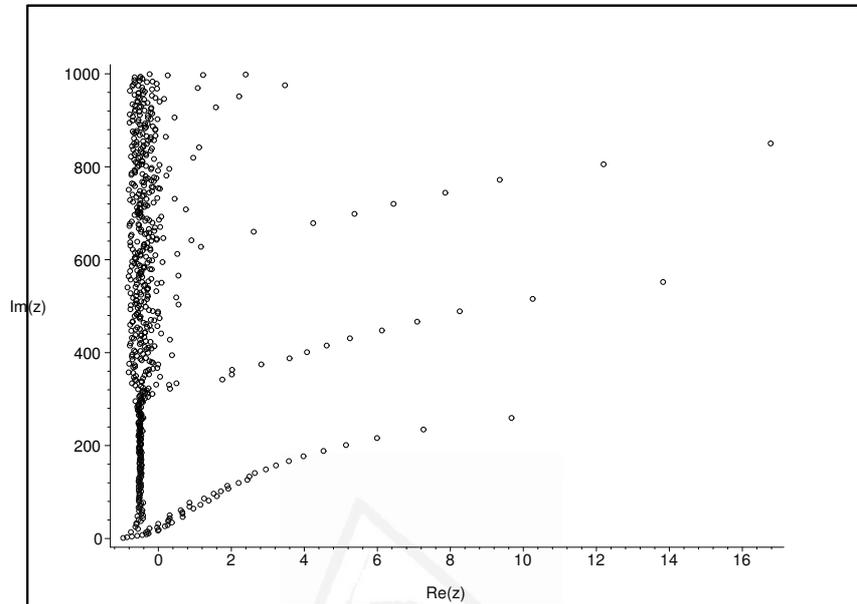
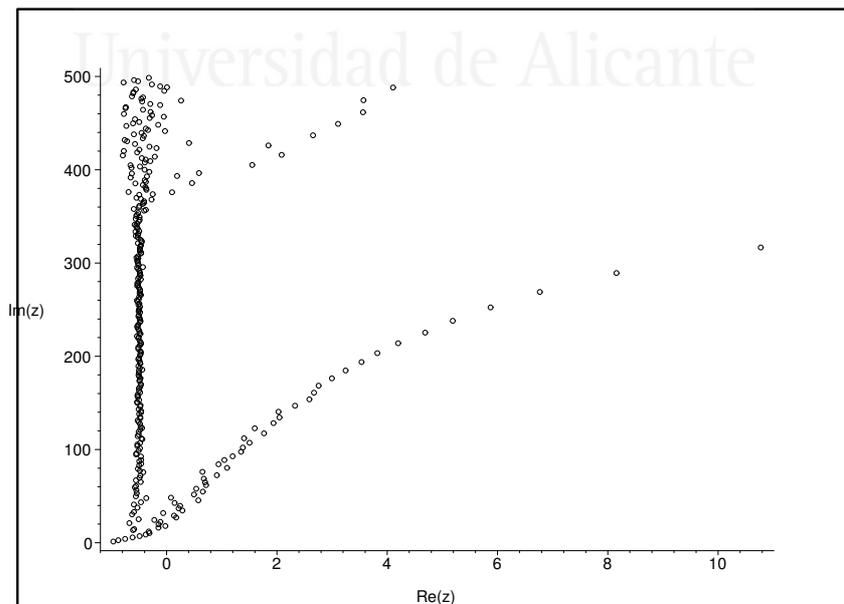
Figura 10.9:  $N_{50}(1000) = 623$ Figura 10.10:  $N_{60}(500) = 325$

Tabla 10.1.— Algunas pruebas realizadas acerca de la conjetura planteada sobre el número total de ceros de  $G_n(z)$  en determinados rectángulos (o bandas). Denotamos por  $N_n(T)$  el número de ceros de  $G_n(z)$  en el interior de la banda determinada por  $\text{Im } z = 0$  y  $\text{Im } z = T$  que han sido determinados numéricamente utilizando el programa elaborado *ad hoc*.

$n$	Región	$N_n(T)$	$\frac{T \ln n}{2\pi}$	Valor decimal aproximado de $\frac{T \ln n}{2\pi}$
3	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 2000\}$	350	$\frac{2000 \ln 3}{2\pi}$	349,6991526
4	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 1000\}$	221	$\frac{1000 \ln 4}{2\pi}$	220,6356001
4	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 2000\}$	442	$\frac{2000 \ln 4}{2\pi}$	441,2712002
5	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 750\}$	192	$\frac{750 \ln 5}{2\pi}$	192,1124994
5	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 2000\}$	513	$\frac{2000 \ln 5}{2\pi}$	512,2999999
6	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 2000\}$	570	$\frac{2000 \ln 6}{2\pi}$	570,3347526
7	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 500\}$	155	$\frac{500 \ln 7}{2\pi}$	154,8506095
7	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 5000\}$	1549	$\frac{5000 \ln 7}{2\pi}$	1548,506095
13	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 1000\}$	409	$\frac{1000 \ln 13}{2\pi}$	408,2243689
25	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 1000\}$	512	$\frac{1000 \ln 25}{2\pi}$	512,2999985
25	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 2000\}$	1025	$\frac{2000 \ln 25}{2\pi}$	1024,599997
33	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 1000\}$	557	$\frac{1000 \ln 33}{2\pi}$	556,4864620
50	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 500\}$	311	$\frac{500 \ln 50}{2\pi}$	311,3088920
50	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 1000\}$	623	$\frac{1000 \ln 50}{2\pi}$	622,6177985
60	$\{z : 0 \leq \text{Re } z \leq 500\}$	325	$\frac{500 \ln 60}{2\pi}$	325,8175878

## 10.2. Orden

Trataremos a continuación el orden de estos ceros proporcionando una cota de dicho orden:

**Teorema 10.2** *Para todo  $n > 2$ , los ceros de  $G_n(z)$  son como mucho de orden  $n - 2$ .*

**Prueba.** Por reducción al absurdo supongamos que existe un cero  $z \in \mathbb{C}$  de orden  $n - 1$ . Entonces  $z$  verifica las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} G_n(z) &= 0, & \implies & 2^z + \dots + n^z = -1 \\ G'_n(z) &= 0, & \implies & (\ln 2)2^z + \dots + (\ln n)n^z = 0 \\ & \dots & & \\ G_n^{(n-2)}(z) &= 0, & \implies & (\ln 2)^{n-2}2^z + \dots + (\ln n)^{n-2}n^z = 0. \end{aligned}$$

Si analizamos el determinante de la matriz  $A_{(n-1) \times (n-1)}$  que determina este sistema de ecuaciones  $Ax = b$ , con incógnitas  $2^z, 3^z, \dots, n^z$ , se obtiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \ln 2 & \ln 3 & \dots & \ln n \\ (\ln 2)^2 & (\ln 3)^2 & \dots & (\ln n)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\ln 2)^{n-2} & (\ln 3)^{n-2} & \dots & (\ln n)^{n-2} \end{vmatrix}$$

es un determinante de Vandermonde, y su valor viene dado por:

$$\prod_{j>k} (\ln j - \ln k) \neq 0.$$

En consecuencia, la solución del sistema es única, obteniéndose que  $2^z, 3^z, \dots, n^z \in \mathbb{R}$ , lo que supone una contradicción. Veamos esta última afirmación: Puesto que  $z$  no es real,  $y \neq 0$  luego

$$\begin{aligned} 2^z &= 2^x 2^{iy} = 2^x e^{iy \ln 2} \in \mathbb{R} \implies \text{sen}(y \ln 2) = 0, \\ 3^z &= 3^x 3^{iy} = 3^x e^{iy \ln 3} \in \mathbb{R} \implies \text{sen}(y \ln 3) = 0, \end{aligned}$$

por tanto, existen  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  no nulos tales que

$$\begin{aligned} y \ln 2 &= k_1 \pi, \\ y \ln 3 &= k_2 \pi, \end{aligned}$$

y dividiendo ambas expresiones se tiene que  $\frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q}$ , lo que supone efectivamente una contradicción.  $\square$

Además, para los primeros valores de  $n$  hemos podido determinar el orden exacto de estos ceros:

**Teorema 10.3** *Los ceros de  $G_n(z)$  son simples para  $n = 2, 3, 4$ .*

**Prueba.**

- Para  $n = 2$  los ceros de  $G_n(z)$  los tenemos claramente identificados y podemos decir que son simples.
- $n = 3$ . El teorema anterior también nos afirma que son simples, daremos sin embargo una demostración alternativa:  
Si existiese un cero de  $G_3(z)$  que no fuese simple, éste verificaría las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2^z + 3^z &= -1, \\ (\ln 2)2^z + (\ln 3)3^z &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Resolviendo el sistema con incógnitas  $2^z$  y  $3^z$ , y utilizando la regla de Kramer se obtiene que

$$2^z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \ln 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \ln 2 & \ln 3 \end{vmatrix}} = \frac{-\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \in \mathbb{R},$$

$$3^z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \ln 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \ln 2 & \ln 3 \end{vmatrix}} = \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \in \mathbb{R}.$$

De nuevo, por el mismo argumento empleado en la demostración del teorema anterior llegaríamos a una contradicción con que el número  $\frac{\ln 2}{\ln 3}$  sería un número racional.

- $n=4$ .  
Si existiese un cero de  $G_4(z)$  que no fuese simple, éste verificaría las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2^z + 3^z + 4^z &= -1, \\ (\ln 2)2^z + (\ln 3)3^z + (\ln 4)4^z &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Si despejamos  $3^z$  de la última ecuación se tiene que

$$3^z = \frac{-(\ln 2)2^z - (\ln 4)4^z}{\ln 3},$$

y ahora sustituyendo en la primera obtenemos la siguiente ecuación:

$$1 + 2^z - \frac{(\ln 2)2^z + (\ln 4)4^z}{\ln 3} + 4^z = 0$$

es decir,

$$4^z \left(1 - \frac{\ln 4}{\ln 3}\right) + 2^z \left(1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\ln \frac{3}{4}\right) 4^z + \left(\ln \frac{3}{2}\right) 2^z + \ln 3 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos la siguiente expresión para  $2^z$ :

$$2^z = \frac{-\ln \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\ln \frac{3}{2}\right)^2 - 4 \ln \frac{3}{4} \ln 3}}{2 \ln \frac{3}{4}} = \frac{-\ln \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\ln \frac{3}{2}\right)^2 + 4 \ln \frac{4}{3} \ln 3}}{2 \ln \frac{3}{4}} \in \mathbb{R}.$$

Concluimos que  $2^z \in \mathbb{R}$ , y por tanto también se tiene que  $4^z = (2^z)^2 \in \mathbb{R}$ , consecuentemente  $3^z = \frac{-(\ln 2)2^z - (\ln 4)4^z}{\ln 3} \in \mathbb{R}$ , así que de nuevo llegamos a una contradicción.

□

Queda abierto el problema sobre si todos los ceros de  $G_n(z)$  son simples en el caso general.

### 10.3. La función $H_n(z)$

Para realizar un análisis más profundo de los ceros consideraremos ahora la función auxiliar  $H_n(z) := G_n(iz)$ , es decir, la función

$$H_n(z) = 1 + 2^{iz} + \cdots + n^{iz}.$$

Esta función conserva algunas de las propiedades que posee  $G_n(z)$ , por ejemplo  $H_n(z)$  es, de nuevo, una función de tipo exponencial (ver definición 5.6):

$$|H_n(z)| = |1 + 2^{iz} + \cdots + n^{iz}| \leq 1 + 2^{|z|} + \cdots + n^{|z|} = 1 + e^{|z| \ln 2} + \cdots + e^{|z| \ln n} \leq n e^{|z| \ln n}.$$

Además, siendo el orden de  $G_n(z)$  igual a 1 (ver definición 5.1), la función  $H_n(z)$  conserva dicho orden a la vista de su definición.

Por otra parte, los ceros de  $H_n(z)$  están muy relacionados con los de  $G_n(z)$ , de hecho se tiene trivialmente la siguiente igualdad:

$$Z_{G_n(z)} = iZ_{H_n(z)},$$

donde  $Z_f$  denota el conjunto de los ceros de  $f$ . Es decir,

$$\{z \in \mathbb{C} : G_n(z) = 0\} = \{i \cdot w : w \text{ es cero de } H_n(z)\}.$$

A continuación calcularemos su función indicador:

**Teorema 10.4** Para todo  $n \geq 2$  la función indicador de  $H_n$  es

$$h_{H_n}(\theta) = \begin{cases} -\ln n \sin \theta, & \text{si } -\pi + 2k\pi < \theta < 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Prueba.** Recordemos que la función indicador viene dada por la definición 5.2. La demostración sigue el mismo esquema que la empleada en la función indicador de  $G_n(z)$ . Analizaremos el límite en función del signo de  $\sin \theta$ :

Caso 1:  $\sin \theta < 0$ :

$$h_{H_n}(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \left[ \ln \left| n^{ire^{i\theta}} \right| + \ln \left| \left( \frac{1}{n} \right)^{ire^{i\theta}} + \left( \frac{2}{n} \right)^{ire^{i\theta}} + \cdots + \left( \frac{n-1}{n} \right)^{ire^{i\theta}} + 1 \right| \right],$$

ya que en general se verifica que

$$1 + 2^{iz} + \cdots + n^{iz} = n^{iz} \cdot \left( \left( \frac{1}{n} \right)^{iz} + \left( \frac{2}{n} \right)^{iz} + \cdots + \left( \frac{n-1}{n} \right)^{iz} + 1 \right).$$

Además por otra lado se verifica que

$$\left| n^{ire^{i\theta}} \right| = n^{-r \sin \theta},$$

por tanto,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| n^{ire^{i\theta}} \right|}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln n^{-r \sin \theta}}{r} = -\ln n \sin \theta.$$

Por otra parte, se tiene que

$$\left( \frac{k}{n} \right)^{ire^{i\theta}} = \left( \frac{k}{n} \right)^{-r \sin \theta + ir \cos \theta} = \left( \frac{k}{n} \right)^{-r \sin \theta} \left( \frac{k}{n} \right)^{ir \cos \theta},$$

y debido a que para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ ,

$$\left( \frac{k}{n} \right)^{-r \sin \theta} \longrightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty \text{ (ya que } \sin \theta < 0 \text{)}.$$

En consecuencia  $\left(\frac{k}{n}\right)^{ire^{i\theta}}$  también tiende a 0, y entonces

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \left(\frac{1}{n}\right)^{ire^{i\theta}} + \left(\frac{2}{n}\right)^{ire^{i\theta}} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{ire^{i\theta}} + 1 \right|}{r} = 0.$$

Por tanto,

$$h_{H_n}(\theta) = -\operatorname{sen} \theta \ln n, \quad \text{siendo } \theta \in \mathbb{R} \text{ tal que } \operatorname{sen} \theta < 0.$$

Caso 2:  $\operatorname{sen} \theta > 0$ :

Utilizaremos que

$$k^{ire^{i\theta}} = k^{-r \operatorname{sen} \theta + ir \cos \theta} = k^{-r \operatorname{sen} \theta} k^{ir \cos \theta}.$$

Para  $k = 2, 3, \dots, n$  cuando  $r \rightarrow \infty$ ,  $k^{-r \operatorname{sen} \theta} \rightarrow 0$  ( $\operatorname{sen} \theta > 0$ ), y por tanto

$$k^{ire^{i\theta}} \rightarrow 0 \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, n, \text{ cuando } r \rightarrow \infty.$$

En consecuencia,

$$h_{H_n}(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \left| 1 + 2^{ire^{i\theta}} + \dots + n^{ire^{i\theta}} \right| = 0, \quad \text{siendo } \operatorname{sen} \theta > 0.$$

Caso 3:  $\operatorname{sen} \theta = 0$ :

Si  $\operatorname{sen} \theta = 0$  entonces

$$re^{i\theta} = r \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = \pm r,$$

por tanto

$$h_{H_n}(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \left| 1 + 2^{\pm ir} + \dots + n^{\pm ir} \right|.$$

Por otra parte,

$$1 + 2^{\pm ir} + \dots + n^{\pm ir} = 1 + [\cos(r \ln 2) \pm i \operatorname{sen}(r \ln 2)] + \dots + [\cos(r \ln n) \pm i \operatorname{sen}(r \ln n)]$$

$$= \sum_{k=1}^n [\cos(r \ln k) \pm i \operatorname{sen}(r \ln k)],$$

entonces su módulo está acotado y por tanto su logaritmo también, así que se tiene que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \left| 1 + 2^{\pm ir} + \dots + n^{\pm ir} \right| = 0,$$

y en consecuencia

$$h_{H_n}(\theta) = 0, \quad \text{siendo } \theta \in \mathbb{R} \text{ tal que } \operatorname{sen} \theta = 0.$$

□

Además el diagrama conjugado de  $H_n(z)$  se obtiene girando  $90^\circ$  en sentido positivo el diagrama conjugado de  $G_n(z)$ :

**Teorema 10.5** *El diagrama conjugado de  $H_n(z)$  es  $\{0\} \times [0, \ln n]$ .*

**Prueba.** Calcularemos en primer lugar el desarrollo en serie de la transformada de Borel de la función  $H_n(z)$  y posteriormente obtendremos una prolongación analítica que nos determinará el diagrama conjugado.

Por definición, tomando  $H_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} z^k$ , su transformada de Borel viene dada por la serie:

$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}}.$$

A partir de la definición de  $H_n(z)$  ya sabemos que  $H_n(0) = n$ , por otra parte,

$$\begin{aligned} H'_n(z) &= 2^{iz}(i \ln 2) + \cdots + n^{iz}(i \ln n) &\Rightarrow H'_n(0) &= i \ln 2 + \cdots + i \ln n, \\ H''_n(z) &= 2^{iz}(i \ln 2)^2 + \cdots + n^{iz}(i \ln n)^2 &\Rightarrow H''_n(0) &= i^2 [(\ln 2)^2 + \cdots + (\ln n)^2], \\ &\dots && \dots \\ H_n^{(m)}(z) &= 2^{iz}(i \ln 2)^m + \cdots + n^{iz}(i \ln n)^m &\Rightarrow H_n^{(m)}(0) &= i^m [(\ln 2)^m + \cdots + (\ln n)^m], \end{aligned}$$

por tanto los coeficientes  $c_k$  en ese desarrollo en serie vienen dados por:

$$\begin{aligned} c_0 &= n, \\ c_k &= i^k [(\ln 2)^k + \cdots + (\ln n)^k], \text{ para } k \geq 1, \end{aligned}$$

así que

$$B_n(z) = \frac{n}{z} + \sum_{k \geq 1} \frac{i^k [(\ln 2)^k + \cdots + (\ln n)^k]}{z^{k+1}}, \text{ para } |z| > \ln n.$$

Ahora veremos que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - i \ln k}$  es una prolongación analítica de  $B_n(z)$ . En efecto,

como  $\left| \frac{i \ln m}{z} \right| < 1$  para cualquier  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ , siendo  $|z| > \ln n$ , entonces

$$\begin{aligned} &\frac{1}{z - i \ln 1} + \frac{1}{z - i \ln 2} + \cdots + \frac{1}{z - i \ln n} = \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left( \frac{i \ln 2}{z} \right)^k + \cdots + \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left( \frac{i \ln n}{z} \right)^k = \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{z} + \sum_{k \geq 1} \frac{i^k [(\ln 2)^k + \cdots + (\ln n)^k]}{z^{k+1}} = B_n(z).$$

Hemos obtenido entonces una prolongación analítica de la transformada de Borel que tiene como puntos singulares  $\{0, i \ln 2, \dots, i \ln n\}$ , en consecuencia, el conjunto compacto convexo más pequeño fuera del cual la transformada de Borel admite prolongación analítica, es decir, el diagrama conjugado, es  $\{0\} \times [0, \ln n]$ .  $\square$

A continuación trataremos otro tipo de propiedades que utilizaremos en el desarrollo posterior:

**Definición 10.1** Diremos que una función entera  $f(z)$  es una función **acotada en la línea** si se verifica:

$$|f(x)| \leq w(x), \quad -\infty < x < \infty$$

donde  $w(x) = O(e^{\varepsilon|x|})$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

Se puede comprobar fácilmente que la función  $H_n(z)$  verifica esta condición tomando  $w(x) = n$ :

$$|H_n(x)| = |1 + 2^{ix} + \cdots + n^{ix}| \leq n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De hecho,  $H_n(z)$  está acotada en cualquier semiplano que contenga al semiplano superior y, en particular, en cualquier banda paralela al eje real. En efecto, dado  $a \in \mathbb{R}$  y considerando el semiplano  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq a\}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} |H_n(x + iy)| &= |1 + 2^{i(x+iy)} + \cdots + n^{i(x+iy)}| = |1 + 2^{-y} 2^{ix} + \cdots + n^{-y} n^{ix}| \leq \\ &\leq 1 + 2^{-y} + \cdots + n^{-y} \leq (1 + 2^{-a} + \cdots + n^{-a}), \quad \forall y \geq a. \end{aligned}$$

Definiremos ahora un concepto clave que nos ayudará a determinar una de las características del comportamiento de nuestros ceros:

**Definición 10.2** Diremos que la función entera  $f(z)$  cuyos ceros son  $z_n = r_n e^{i\theta_n}$  cumple la condición (C) si verifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \text{Im} \left( \frac{1}{z_n} \right) \right| < \infty.$$

En cierto sentido, la condición (C) requiere que los ceros de  $f(z)$  estén concentrados alrededor del eje real (ver [14], p. 222).

Se podría esperar entonces que una función entera que satisfaga esta condición se comporte de alguna forma como una función con únicamente ceros reales. Por ejemplo su diagrama indicador tendrá un eje horizontal de simetría.

A continuación analizaremos si la función  $H_n(z)$  cumple la condición mencionada junto con algunas de las consecuencias que se pueden extraer de ella. Para ello, recopilaremos una serie de resultados de A. Pfluger que se pueden encontrar en [4]:

**Lema 10.6** Si  $f(z)$  es una función entera de tipo exponencial, las siguientes condiciones son equivalentes:

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \left( \frac{1}{z_n} \right) \right| < \infty,$
- b)  $\int_1^R x^{-2} \log |f(x)f(-x)| dx$  está acotada superiormente para cualquier  $R > 1$ .

Para el siguiente lema necesitamos saber que se define la longitud logarítmica de un conjunto  $E$  medible en  $(0, +\infty)$  de la siguiente manera:

$$L_{\log}(E) := \int_E \frac{1}{x} dx.$$

**Lema 10.7** Sea  $f(z)$  una función entera de tipo exponencial que satisface  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \left( \frac{1}{z_n} \right) \right| < \infty,$  entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- a)  $\exists \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} n_f(r),$
- b)  $\exists \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log |f(iy)|$  si un conjunto de longitud finita logarítmica es excluido.

**Lema 10.8** Sea  $f(z)$  es una función entera de tipo exponencial con función indicador  $h(\theta)$  que satisface:

$$i) \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} n_f(r) = D, \quad ii) h(0) + h(\pi) = 0.$$

Entonces

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} n_f^+(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} n_f^-(r) = \frac{D}{2},$$

donde  $n_f^+(r)$  y  $n_f^-(r)$  son el número de ceros de  $f(z)$  en  $|z| \leq r$  en el semiplano derecho e izquierdo respectivamente.

En nuestro caso, a la vista de estos tres lemas, se puede formular el siguiente teorema que nos determinará propiedades muy interesantes sobre los ceros de  $H_n(z)$  y, por consiguiente, sobre los ceros de  $G_n(z)$ :

**Teorema 10.9** La función  $H_n(z)$  cumple las siguientes condiciones:

- a)  $H_n(z)$  cumple la condición (C),
- b)  $\exists \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} n_{H_n}(r),$
- c)  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} n_{H_n}^+(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} n_{H_n}^-(r) = \frac{D}{2},$  siendo  $D = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} n_{H_n}(r).$

**Prueba.**

a)  $H_n(z)$  cumple la condición (C) ya que en relación con el lema 10.6, para  $R > 1$  arbitrario, se tiene que

$$\int_1^R x^{-2} \log |H_n(x)H_n(-x)| dx = \int_1^R x^{-2} \log |H_n(x)|^2 dx \leq 2(\ln n) \int_1^R x^{-2} dx < \infty.$$

b)  $\exists \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} n_{H_n}(r)$  ya que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log |H_n(iy)| = \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log |1 + 2^{-y} + \dots + n^{-y}| = 0,$$

por tanto este límite existe siempre y por el lema 10.7 el resultado es cierto.

c) Si nos fijamos en la función indicador de  $H_n(z)$  podemos observar que  $h_{H_n}(0) + h_{H_n}(\pi) = 0$ , por tanto la condición del apartado c) del teorema también es cierta por el lema 10.8.  $\square$

Naturalmente estos resultados son aplicables a la función  $G_n(z)$  teniendo en cuenta la estrecha relación entre sus ceros y los de  $H_n(z)$ . Resaltamos, sin embargo, el siguiente resultado de gran importancia:

**Corolario 10.10** *Los ceros de  $G_n(z)$  están concentrados alrededor del eje imaginario.*

**Prueba.** Sabemos por el teorema anterior que  $H_n(z)$  cumple la condición (C), por tanto teniendo en cuenta la relación existente entre los ceros de  $H_n(z)$  y  $G_n(z)$ , y observando lo que significaba la condición (C), se tiene el resultado.  $\square$

## 10.4. Casi periodicidad

Seguiremos obteniendo más resultados acerca de los ceros. Para ello necesitaremos ciertas definiciones y teoremas básicos acerca de la teoría de H. Bohr sobre las funciones casi periódicas.

En lo que sigue, a menos que se especifique lo contrario,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Dicha teoría extiende la noción de periodicidad a los polinomios trigonométricos generalizados, es decir, funciones de la forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{ix\lambda_k} \quad (\lambda_k \in \mathbb{R}),$$

y en particular a las funciones periódicas.

**Definición 10.3** Se dice que un conjunto  $\{\tau_i\}_{i \in I}$  de números reales es relativamente denso si cualquier intervalo cuya longitud no es menor que algún número positivo  $l$  contiene al menos un número del conjunto. En otras palabras, un conjunto  $\{\tau_i\}_{i \in I}$  de números reales es relativamente denso si existe  $l > 0$  tal que cualquier intervalo  $(\alpha, \alpha + l)$  interseca con  $\{\tau_i\}_{i \in I}$ .

Al número  $\tau$  se le llama una  $\varepsilon$ -hoja de la función  $f(x)$  si para todos los valores de la variable  $x$  se satisface la desigualdad  $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$ .

**Definición 10.4** Se dice que la función  $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  es **casi periódica** si es continua en el eje real y si para cada  $\varepsilon$  le corresponde un conjunto relativamente denso de  $\varepsilon$ -hojas.

En particular, toda función periódica, verificando  $f(x) = f(x+T) \forall x \in \mathbb{R}$  y para algún  $T \in \mathbb{R}$  llamado periodo, es casi periódica, siendo el conjunto relativamente denso de  $\varepsilon$ -hojas el conjunto  $\{nT : n \in \mathbb{Z}\}$ .

**Definición 10.5** Dada  $f$  una función casi periódica, y dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  definimos su media de la siguiente forma:

$$M(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} f(t) dt,$$

siempre que el límite exista uniformemente respecto de  $\alpha$ .

**Definición 10.6** Dada  $f$  una función casi periódica, y  $M$  su media, sus coeficientes de Fourier vienen dados por:

$$a(\lambda) = M(f(x)e^{-i\lambda x}).$$

El siguiente teorema que encontramos en [5] es esencial dentro de esta teoría

**Teorema 10.11** Si  $f$  es casi periódica, sus coeficientes de Fourier satisfacen  $a(\lambda) = 0$  excepto para una cantidad numerable  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$

**Definición 10.7** Dada una función  $f$  casi periódica, definiremos el espectro de  $f$  como el conjunto formado por  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\}$  que aparecen en el teorema anterior.

A partir del espectro y de los coeficientes de Fourier podemos asociar a la función  $f(x)$  la siguiente serie

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}, \quad (10.1)$$

que recibe el nombre de **serie de Fourier** asociada a la función  $f(x)$ .

Toda esta teoría se extiende para funciones analíticas:

**Definición 10.8** Una función  $f(z)$  analítica en una banda cerrada  $\alpha \leq y \leq \beta$  ( $y = \operatorname{Im} z$ ) se dice que es casi periódica en esta banda si a cada  $\varepsilon > 0$  le corresponde un conjunto relativamente denso de  $\varepsilon$ -hojas de la función  $f(z)$ , es decir

$$|f(z + \tau) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{para } \alpha \leq y \leq \beta.$$

Una función  $f(z)$  se dice que es casi periódica en una banda abierta  $-\infty \leq \alpha < y < \beta \leq \infty$  ( $y = \operatorname{Im} z$ ) si es casi periódica en cada banda cerrada contenida en la banda  $\alpha < y < \beta$ .

Considerando de nuevo la función  $H_n(z) = 1 + 2^{iz} + \cdots + n^{iz}$ , es decir,

$$H_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k e^{\mu_k z}, \quad \text{con } a_k = 1, \mu_k = i\lambda_k, \text{ para } 1 \leq k \leq n, \lambda_k = \ln k,$$

podemos afirmar entonces que  $H_n(z)$  es un polinomio exponencial. En particular, para  $z = x \in \mathbb{R}$ ,  $H_n(x)$  es un polinomio trigonométrico generalizado y, en consecuencia, una función casi periódica en  $\mathbb{R}$  dado que es suma de funciones periódicas [5].

Además, la función  $H_n(z)$  es casi periódica como función definida en  $\mathbb{C}$  tal como podemos ver en el siguiente teorema:

**Teorema 10.12**  $H_n(z)$  es una función casi periódica en cualquier banda  $\alpha < y < \beta$  ( $y = \operatorname{Im} z$ ).

**Prueba.** En primer lugar, ya hemos visto que  $H_n(x)$  es una función casi periódica en  $\mathbb{R}$  dado que es suma de funciones periódicas. Utilizaremos ahora el hecho de que si tenemos una función  $f(z)$ , analítica en la banda  $\alpha < y < \beta$ , de la que únicamente sabemos que es casi periódica en  $y = y_0 \in (\alpha, \beta)$  (es decir, que  $f(x + iy_0) = F(x)$  es una función casi periódica de  $x$ ), entonces  $f(z)$  es casi periódica en toda la banda  $(\alpha, \beta)$  en el caso de que sea acotada en  $[\alpha, \beta]$ , ([5], p.102).

En nuestro caso, sabemos que  $H_n(z)$  está acotada en cualquier banda paralela al eje real, por tanto, teniendo en cuenta este hecho podemos afirmar que  $H_n(z)$  es casi periódica en cualquier banda paralela al eje real. □

Además, a tales funciones casi periódicas, se les puede aplicar el conocido teorema de S. Bochner [14]:

**Teorema 10.13 (Teorema de Bochner)** La casi periodicidad de una función analítica  $f(z)$  en la banda  $\alpha \leq y \leq \beta$  implica que el conjunto de funciones  $f(z + h)$  para  $h \in \mathbb{R}$  es compacto en el sentido de la convergencia uniforme en esa banda.

Como consecuencia de que  $H_n(z)$  es una función casi periódica, podemos hacer uso del teorema de Bochner para probar el siguiente resultado:

**Teorema 10.14** *El número de ceros de  $H_n(z)$  en la banda  $|y| < h$ , que se encuentran en el rectángulo determinado por  $t \leq x \leq t + 1$ ,  $|y| \leq h - \delta$ , está acotado por algún número  $k(\delta)$  no dependiente de  $t$ .*

**Prueba.** Por reducción al absurdo, supongamos que existe una sucesión infinita  $\{t_j\} \in \mathbb{R}$  tal que el número de ceros de la función  $H_n(z)$  en los correspondientes rectángulos  $t_j \leq x \leq t_j + 1$ ,  $|y| \leq h - \delta$  se incrementa indefinidamente. Si esto es así, podemos extraer una subsucesión convergente uniformemente de la sucesión de funciones  $H_n(z + t_j)$ . En consecuencia, la función límite, a la que llamaremos  $H_n^0(z)$ , tiene un conjunto infinito de ceros en el rectángulo  $0 \leq x \leq 1$ ,  $|y| \leq h - \delta$ , y por tanto, es idénticamente igual a cero. Por último, teniendo en cuenta la convergencia uniforme de la sucesión de funciones  $H_n(z + t_j)$  a  $H_n^0$  se tiene que

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |H_n^0(z)| = \sup_{-\infty < x < \infty} |H_n(z)| \quad (|y| \leq h - \delta),$$

y por tanto,  $H_n(z) \equiv 0$ , lo que es absurdo.  $\square$

Para obtener más resultados acerca de los ceros, determinaremos ahora el espectro de  $H_n(z)$ :

**Teorema 10.15** *El espectro de  $H_n(z)$  está formado por  $\{\ln 1, \ln 2, \dots, \ln n\}$ .*

**Prueba.** Determinaremos los coeficientes de Fourier de la función  $H_n(z)$ :

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= M(H_n(x)e^{-i\lambda x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} (1 + 2^{ix} + \dots + n^{ix}) e^{-i\lambda x} dx = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} (e^{-i\lambda x} + e^{ix(\ln 2 - \lambda)} + \dots + e^{ix(\ln n - \lambda)}) dx. \end{aligned}$$

Calcularemos ahora  $\int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} e^{ix(\ln k - \lambda)} dx$  para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

- Si  $\lambda \neq \ln k$  se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} e^{ix(\ln k - \lambda)} dx &= \left[ \frac{1}{i(\ln k - \lambda)} e^{ix(\ln k - \lambda)} \right]_{-T+\alpha}^{T+\alpha} = \\ &= \frac{1}{i(\ln k - \lambda)} [e^{i(T+\alpha)(\ln k - \lambda)} - e^{i(-T+\alpha)(\ln k - \lambda)}] = \\ &= \frac{1}{i(\ln k - \lambda)} \cdot e^{i(\ln k - \lambda)\alpha} [e^{i(\ln k - \lambda)T} - e^{-i(\ln k - \lambda)T}] = \\ &= \frac{1}{i(\ln k - \lambda)} \cdot e^{i(\ln k - \lambda)\alpha} [2i \operatorname{sen}((\ln k - \lambda)T)], \end{aligned}$$

$$\implies \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} e^{ix(\ln k - \lambda)} \right] dx = 0,$$

en consecuencia, para  $\lambda \neq \ln k$ , obtenemos

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} (e^{-i\lambda x} + e^{ix(\ln 2 - \lambda)} + \dots + e^{ix(\ln n - \lambda)}) dx = 0 \implies a(\lambda) = 0.$$

- Por otra parte, si  $\lambda = \ln k$  para algún  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} e^{ix(\ln j - \lambda)} \right] dx = 0, \text{ para } j \neq k,$$

y la integral donde aparece  $(\ln k)$  queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} e^{ix(\ln k - \lambda)} dx &= \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} 1 dx = (T + \alpha) - (-T + \alpha) = 2T, \\ \implies \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} e^{ix(\ln k - \lambda)} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot 2T = 1, \end{aligned}$$

por tanto, en este caso  $a(\lambda) = 1$ .

Se puede observar de manera directa que los coeficientes del espectro resultante son independientes de la elección de la parte imaginaria, es decir, que si hubiésemos calculado los valores  $\lambda$  tales que  $a(\lambda) = M(H_n(x + iy_0)e^{-i\lambda x}) \neq 0$  para cualquier  $y_0$  fijo, entonces nos hubiesen resultado los mismos coeficientes. □

A la vista del espectro resultante, y teniendo en cuenta el diagrama conjugado calculado anteriormente de la función  $H_n(z)$  (teorema 10.5), podemos formular el siguiente corolario:

**Corolario 10.16** *Girando  $90^\circ$  en sentido positivo el segmento más pequeño del eje real que contiene cada punto del espectro de  $H_n(z)$ , se obtiene su diagrama conjugado.*

Estamos ahora en condiciones de poder aplicar el siguiente teorema (que es un corolario al teorema de Bohr) que se puede encontrar en [14]:

**Teorema 10.17** *Los ceros de una función entera, de tipo exponencial finito y casi periódica están todos en una banda paralela al eje real si y solo si las cotas inferior y superior del espectro pertenecen a él.*

Como consecuencia de este teorema podemos formular el siguiente corolario concerniente a la distribución de los ceros de  $H_n(z)$ :

**Corolario 10.18** *Todos los ceros de  $H_n(z)$  están en una banda paralela al eje real.*

**Prueba.** En nuestro caso sabemos que la función  $H_n(z)$  es entera, de tipo exponencial finito y casi periódica, y como el espectro contiene un número finito de elementos, las cotas inferior y superior pertenecen a él, y por tanto, aplicando el citado teorema de Bohr, todos sus ceros los podemos localizar en una banda paralela al eje real.  $\square$

El interés de este resultado se traspasa naturalmente a nuestra función  $G_n(z)$ , formulando así el siguiente corolario que nos proporciona una alternativa de demostración de un resultado ya conocido, teorema 1.3, de gran importancia (véase [26]):

**Corolario 10.19** *Todos los ceros de  $G_n(z)$  están en una banda paralela al eje imaginario.*

**Prueba.** La prueba es inmediata teniendo en cuenta la relación existente entre los ceros de  $G_n(z)$  y los de  $H_n(z)$ :

$$\{z \in \mathbb{C} : G_n(z) = 0\} = \{i \cdot w : w \text{ es cero de } H_n(z)\}.$$

$\square$

De ahora en adelante, nos referiremos a estas bandas donde están situados todos los ceros de  $H_n(z)$  y  $G_n(z)$  como **bandas críticas**.

A continuación volveremos a hacer referencia a la densidad de los ceros, en concreto, propondremos una alternativa de demostración del apartado b) del teorema 10.9. Para ello, utilizaremos los siguientes resultados que podemos encontrar en las referencias citadas:

**Lema 10.20 (Teorema de Pfluger (ver [4], th. 6.3.6, p. 85))** *Si  $f(z)$  satisface que  $\alpha = \liminf_{r \rightarrow \infty} (r^{-1} \log M_f(r)) < \infty$  y además*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty,$$

*entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log |f(x)||}{1+x^2} dx < \infty.$$

**Lema 10.21 (Teorema 9 de [14], p. 246)** *Para que una función entera  $f(z)$  de tipo exponencial cumpla la condición (C) y al mismo tiempo la densidad*

$$\Delta_f = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r}$$

*exista, es necesario y suficiente que la integral*

$$\int_0^{\infty} \frac{\log |f(x)f(-x)|}{1+x^2} dx$$

*exista.*

Haciendo uso de estos lemas demostraremos el resultado ya mencionado:

**Teorema 10.22** *Siendo  $n_{H_n}(r)$  el número de ceros de  $H_n(z)$  en  $|z| < r$ . La densidad asociada a la función  $H_n(z)$ ,*

$$\Delta_{H_n} \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{H_n}(r)}{r},$$

*existe.*

**Prueba.** Dado que  $H_n(z)$  es una función entera de orden 1 y de tipo exponencial  $\sigma = \ln n$ , definiendo  $\alpha$  mediante la fórmula

$$\alpha \equiv \liminf_{r \rightarrow \infty} (r^{-1} \log M_{H_n}(r)),$$

con

$$M_{H_n}(r) = \max_{|z|=r} |H_n(z)|,$$

podemos afirmar que  $\alpha$  satisface la siguiente desigualdad

$$\alpha \leq \ln n,$$

y, por tanto,  $\alpha$  es finito. Por otra parte, debido a que

$$|H_n(x)| \leq n \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la siguiente integral está claramente acotada

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |H_n(x)|}{1+x^2} dx < \infty, \quad (10.2)$$

donde,

$$\log^+ t = \begin{cases} \ln t & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1. \end{cases}$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que  $\alpha$  es finito, (10.2) nos permite aplicar el lema 10.20 para obtener:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log |H_n(x)||}{1+x^2} dx < \infty. \quad (10.3)$$

Teniendo en cuenta ahora que

$$H_n(-x) = \overline{H_n(x)},$$

se tiene que

$$|H_n(x)|^2 = H_n(x)H_n(-x),$$

y a partir de (10.3) se concluye que

$$\int_0^{\infty} \frac{\log |H_n(x)H_n(-x)|}{1+x^2} dx < \infty. \quad (10.4)$$

Finalmente, en relación al lema 10.21, ya habíamos probado que  $H_n(z)$  cumple la condición (C) (apartado a) del teorema 10.9), y en concreto a partir de la desigualdad (10.4) podemos garantizar la existencia de la densidad.  $\square$

Del teorema precedente, podemos naturalmente garantizar también la existencia de la densidad de los ceros de  $G_n(z)$ . A partir de aquí determinaremos su valor, lo que nos permitirá encontrar una estimación asintótica del número de ceros en la banda crítica, con parte imaginaria entre 0 y cualquier  $T > 0$ . Utilizaremos para ello un resultado acerca de funciones casi periódicas que podemos encontrar en [14]:

**Lema 10.23 (Corolario del Teorema 6, p. 286, [14])** *Si el espectro de una función casi periódica es acotado y*

$$\sigma(y_1, y_2) = \lim_{x_2 - x_1 \rightarrow \infty} \frac{n_f(x_1, x_2, y_1, y_2)}{x_2 - x_1},$$

donde  $n_f(x_1, x_2, y_1, y_2)$  es el número de ceros de  $f(z)$  en el rectángulo  $x_1 \leq \operatorname{Re} z \leq x_2$ ,  $y_1 \leq \operatorname{Im} z \leq y_2$ , entonces

$$\lim_{y_1 \rightarrow \infty; y_2 \rightarrow \infty} \sigma(y_1, y_2) = \frac{d}{2\pi},$$

donde  $d$  es la longitud del segmento más pequeño conteniendo el espectro de la función  $f(x)$ .

**Teorema 10.24** *El número de ceros  $n_{G_n}(0, T)$  de la función  $G_n(z)$  en la banda crítica con  $0 \leq \operatorname{Im} z \leq T$  satisface la fórmula*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_{G_n}(0, T)}{T} = \frac{\ln n}{2\pi}.$$

**Prueba.** Consideremos  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  con  $y_1 < 0 < y_2$  tales que la banda crítica donde están situados los ceros de  $H_n(z)$ , denotada por  $S_{C, H_n}$ , esté contenida en la banda

$$S(y_1, y_2) \equiv \{z : y_1 < \operatorname{Im} z < y_2\}. \quad (10.5)$$

Denotaremos por  $n_{H_n}(0, T, y_1, y_2)$  el número de ceros de  $H_n(z)$  en el rectángulo  $[0, T] \times [y_1, y_2]$ . Teniendo en cuenta además que

$$H_n(z) = \overline{H_n(-\bar{z})},$$

y utilizando el teorema 10.22, podemos decir que el siguiente límite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_{H_n}(0, T, y_1, y_2)}{T} \equiv \sigma(y_1, y_2) \quad (10.6)$$

existe. Por otra parte,  $\sigma(y_1, y_2)$  no depende de  $y_1, y_2$  con la condición de que  $S_{C, H_n}$  esté contenido en la banda crítica definida en (10.5). En consecuencia, el límite considerado en (10.6) cuando  $y_1 \rightarrow -\infty$ ,  $y_2 \rightarrow \infty$ , existe y verifica

$$\lim_{y_1 \rightarrow -\infty; y_2 \rightarrow +\infty} \sigma(y_1, y_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_{H_n}(0, T)}{T}, \quad (10.7)$$

donde  $n_{H_n}(0, T)$  denota el número de los ceros de  $H_n(z)$  en la banda crítica satisfaciendo  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq T$ . Utilizando ahora el lema 10.23 y teniendo en cuenta que  $\ln n$  es la longitud del segmento más pequeño conteniendo el espectro de  $H_n(x)$ , el valor del límite en (10.7) es exactamente

$$\frac{\ln n}{2\pi}. \quad (10.8)$$

Finalmente, debido a la estrecha relación entre las funciones  $H_n(z)$  y  $G_n(z)$ , el teorema queda probado.  $\square$

## 10.5. Los ceros de $G_n(z)$ desde el principio del argumento

Observemos que (10.8) es una estimación asintótica del número de ceros de  $G_n(z)$  que hemos obtenido usando la teoría de H. Bohr sobre las funciones casi periódicas. Sin embargo, estudiaremos

$$G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$$

de una manera directa con tal de encontrar la distribución de sus ceros, como haremos a continuación. En concreto, probaremos que existen infinitos valores de  $T$  para los cuales se puede obtener una fórmula exacta concerniente al número de ceros,  $n_{G_n}(0, T)$ , en la banda crítica con  $0 \leq \operatorname{Im} z \leq T$ , con un error a lo sumo de  $\pm 1$  cero. Este resultado mejora considerablemente la estimación conseguida en la sección previa. La fórmula fue planteada como consecuencia de la realización de diversas pruebas numéricas que ya han sido presentadas en la sección de motivación.

Comenzaremos con la determinación del número exacto de ceros de  $G_2(z)$  para  $0 \leq \operatorname{Im} z = y \leq T$ , denotado por  $n_2(T)$ .

Para este caso, como las soluciones de la ecuación

$$1 + 2^z = 0$$

son

$$z = \frac{(2k-1)\pi i}{\ln 2}, \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

se puede obtener directamente que

$$n_2(T) = \max \left\{ k \in \mathbb{Z} : \frac{(2k-1)\pi}{\ln 2} \leq T \right\}$$

o equivalentemente

$$n_2(T) = \left[ \frac{T \ln 2}{2\pi} + \frac{1}{2} \right], \quad (10.9)$$

donde  $[\cdot]$  denota la parte entera.

Nos ocuparemos ahora de encontrar una formula similar a (10.9) para las funciones  $G_n(z)$  en el caso general  $n \geq 3$ .

Inicialmente, observemos que, para  $z$  real, la función  $G_n(z)$  tiende a 1 y  $\infty$ , cuando  $z \rightarrow -\infty$  y  $\infty$ , respectivamente. Por tanto, podemos determinar, para cada  $n$  fijo,  $r_n, s_n \in \mathbb{R}$  con  $r_n < s_n$  tales que

$$|G_n(z) - 1| < 1, \text{ para todo } z \text{ tal que } \operatorname{Re} z \leq r_n \quad (10.10)$$

y

$$\left| \frac{G_n(z)}{n^z} - 1 \right| < 1, \text{ para todo } z \text{ tal que } \operatorname{Re} z \geq s_n, \quad (10.11)$$

concluyendo que todos los ceros de  $G_n(z)$  están localizados en la banda vertical limitada por las líneas

$$\operatorname{Re} z = r_n, \quad \operatorname{Re} z = s_n.$$

Sea  $T$  un número positivo, que más tarde será especificado con mucha más precisión, y, para cada función  $G_n(z)$ , el rectángulo  $R_{n,T}$  definido por las líneas  $x = r_n$ ,  $x = s_n$  y  $y = 0$ ,  $y = T$ . Asumiremos sin pérdida de generalidad que  $G_n(z)$  no tiene ceros en la línea horizontal  $y = T$ . Entonces, dado que  $G_n(z)$  no tiene ceros reales, a partir de (10.10) y (10.11) podemos asegurar que no hay ceros en  $R_{n,T}$ . Por tanto, estamos en condiciones de estudiar la variación del argumento de  $G_n(z)$  en  $R_{n,T}$ , que denotaremos por  $\Theta_{n,T}$  y lo haremos comenzando desde el punto  $(r_n, 0)$ .

Observaremos que el principal problema sobre el estudio de  $\Theta_{n,T}$  en el rectángulo  $R_{n,T}$  lo encontramos en la parte definida desde el punto  $(s_n, T)$  a  $(r_n, T)$ , que denotaremos por  $\mathcal{R}_{n,T,3}$ . A continuación, para evitar la complicada situación creada por la posibilidad de que la parte real o imaginaria de  $G_n(z)$  en  $\mathcal{R}_{n,T,3}$  se anule, utilizaremos una consecuencia de un viejo resultado of Kronecker [11], que requiere para nuestro propósito el siguiente lema previo de demostración directa sobre la función  $G_n(z)$ .

**Lema 10.25** *Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$  y  $\{p_1, p_2, \dots, p_{k_n}\}$  el conjunto de los números primos menores o iguales que  $n$ . Entonces el conjunto  $\{\ln p_1, \ln p_2, \dots, \ln p_{k_n}\}$  es linealmente independiente, es decir, cualquier combinación lineal de la forma  $n_1 \ln p_1 + n_2 \ln p_2 + \dots + n_{k_n} \ln p_{k_n} = 0$ , con enteros  $n_1, n_2, \dots, n_{k_n}$ , implica que  $n_1 = n_2 = \dots = n_{k_n} = 0$ . Además, existen enteros  $\{l_{mj} : m = 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k_n\}$  tales que*

$$\ln m = \sum_{j=1}^{k_n} l_{mj} \ln p_j \quad (10.12)$$

para cada  $m = 2, \dots, n$ .

**Prueba.**  $\{\ln p_1, \ln p_2, \dots, \ln p_{k_n}\}$  es linealmente independiente ya que en el caso de que

$$n_1 \ln p_1 + n_2 \ln p_2 + \dots + n_{k_n} \ln p_{k_n} = 0, \text{ con } n_1, n_2, \dots, n_{k_n} \in \mathbb{Z}$$

entonces

$$\ln (p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_{k_n}^{n_{k_n}}) = 0,$$

por tanto

$$p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_{k_n}^{n_{k_n}} = 1,$$

y se tiene que  $n_1 = n_2 = \dots = n_{k_n} = 0$ .

Finalmente, el teorema fundamental de la aritmética demuestra fácilmente la segunda parte del lema.  $\square$

**Teorema 10.26 (Kronecker-Bohl)** Sean  $a_1, a_2, \dots, a_k$  números reales no nulos tales que  $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_k^{-1}$  son linealmente independientes. Para números reales arbitrarios  $b_1, b_2, \dots, b_k$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $l > 0$  ( $l$  sólo depende de  $a_1, a_2, \dots, a_k$  y  $\varepsilon$ ) tal que cualquier intervalo de longitud  $l$  contiene un intervalo de longitud  $\varepsilon$  que corta a cada conjunto

$$A_j = \{a_j p + b_j : p \in \mathbb{Z}\},$$

para  $j = 1, \dots, k$ .

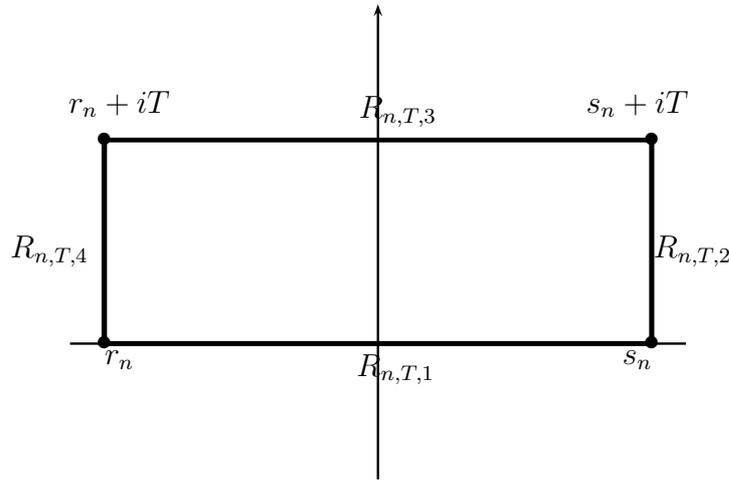
Utilizando estos resultados previos, la fórmula general que determina el número de ceros viene dada en el siguiente resultado (obsérvese que confirma la conjetura planteada en la sección de motivación):

**Teorema 10.27** Existe un número real positivo  $l$  tal que cada intervalo  $(pl, (p+1)l)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $p \geq 0$ , contiene un intervalo  $I_p$  tal que para cada  $T \geq \frac{2\pi}{\ln n}$ ,  $T \in I_p$ , el número de ceros de  $G_n(z)$  en el interior del rectángulo  $R_{n,T}$  viene dado por la fórmula

$$N_n(T) = \left[ \frac{T \ln n}{2\pi} + \Omega_n \right], \text{ con } |\Omega_n| < 1. \quad (10.13)$$

**Prueba.** (Basada en la variación del argumento de  $R_{n,T}$ ) Observemos en primer lugar que a partir de (10.9) la fórmula (10.13) se verifica para el caso  $n = 2$ . Por tanto, supondremos a partir de ahora que  $n > 2$ .

Como ya se ha comentado, utilizaremos el Principio del Argumento aplicado al camino cerrado  $R_{n,T}$ ; éste nos dice que la cantidad de ceros de la función  $G_n(z)$  dentro de  $R_{n,T}$  (contando multiplicidad) coincide con el número de vueltas de  $G_n \circ R_{n,T}$  a lo largo del 0. Por lo tanto, analizaremos la variación del argumento en  $R_{n,T}$  y lo haremos en los distintos segmentos  $R_{n,T,1}, R_{n,T,2}, R_{n,T,3}$  y  $R_{n,T,4}$  que forman  $R_{n,T}$  (denotaremos por  $\Theta_{n,T,i}$  a la variación del argumento en  $R_{n,T,i}$ ). Ver figura 10.11:

Figura 10.11: Rectángulo  $R_{n,T}$ 

Como  $G_n(z) > 0$  para  $z \in \mathbb{R}$ , sobre el lado determinado por los puntos  $(r_n, 0)$  y  $(s_n, 0)$ , denotado por  $R_{n,T,1}$ , la variación del argumento

$$\Theta_{n,T,1} = 0. \quad (10.14)$$

La variación  $\Theta_{n,T,2}$  en el lado determinado por los puntos  $(s_n, 0)$  y  $(s_n, T)$ , denotado por  $R_{n,T,2}$ , puede ser estimada teniendo en cuenta que

$$G_n(z) = n^z \frac{G_n(z)}{n^z} = n^{s_n} e^{iy \ln n} \frac{G_n(z)}{n^z},$$

con  $0 \leq \text{Im } z = y \leq T$ , y aplicando (10.11). Entonces, existe algún  $\Phi_{n,2}$ , que no depende de  $T$ , tal que

$$\Theta_{n,T,2} = T \ln n + \Phi_{n,2}, \text{ con } |\Phi_{n,2}| < \pi. \quad (10.15)$$

Sobre el lado determinado por los puntos  $(s_n, T)$  y  $(r_n, T)$ , denotado por  $R_{n,T,3}$ , podemos afirmar que la variación del argumento  $\Theta_{n,T,3}$  satisface

$$|\Theta_{n,T,3}| < \eta, \quad (10.16)$$

para  $\eta > 0$  arbitrariamente pequeño. En efecto, sea  $F_n(z)$  la parte real de la función  $G_n(z) - 1$ , es decir,

$$F_n(z) = F_n(x + iy) = e^{x \ln 2} \cos(y \ln 2) + \dots + e^{x \ln n} \cos(y \ln n),$$

utilizando (10.12) podemos convertir  $F_n(z)$  en un polinomio función de

$$e^{x \ln p_j}, \cos(y \ln p_j), \text{ sen}(y \ln p_j), \text{ para } j = 1, \dots, k_n,$$

donde  $\{p_1, p_2, \dots, p_{k_n}\}$  es el conjunto de números primos menores o iguales que  $n$ .

Por tanto, por continuidad, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $x \in [r_n, s_n]$

$$|F_n(x + iy) - F_n(x)| < \varepsilon, \quad (10.17)$$

siempre que

$$|\cos(y \ln p_j) - 1| < \delta, \quad |\operatorname{sen}(y \ln p_j)| < \delta$$

para todo  $j = 1, \dots, k_n$ .

Por otra parte, dado que para  $z$  real se tiene que  $F_n(z) > 0$ , entonces existe una constante positiva  $A$  tal que

$$F_n(x) \geq A > 0, \quad (10.18)$$

para cualquier  $x$  del segmento  $[r_n, s_n] \subset \mathbb{R}$ . Sea ahora  $B > 0$  tal que  $B < A$ , podemos ahora determinar  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon < A - B$  y lo suficientemente pequeño como para que los números  $\{\varepsilon_j : 1 \leq j \leq k_n\}$ , que después precisaremos, con  $|\varepsilon_j| \leq \varepsilon$  cumplan que

$$|\cos(\varepsilon_j \ln p_j) - 1| < \delta, \quad |\operatorname{sen}(\varepsilon_j \ln p_j)| < \delta. \quad (10.19)$$

Tomaremos  $a_j = \frac{2\pi}{\ln p_j}$ ,  $b_j = 0$ ,  $1 \leq j \leq k_n$ , y  $\varepsilon$  verificando (10.17); aplicando ahora el teorema de Kronecker, existe  $l > 0$  tal que cualquier intervalo de la forma  $(pl, (p+1)l)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , contiene un intervalo  $I_p$  de longitud  $\varepsilon$  que contiene al menos un punto de cada conjunto  $A_j$ ,  $1 \leq j \leq k_n$ , definido por

$$A_j \equiv \left\{ \frac{2\pi q}{\ln p_j} : q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Por tanto, para  $T > 0$  perteneciente a cualquier intervalo  $I_p$ ,  $p \geq 0$ , existen  $q_j \in \mathbb{Z}$  tales que los números

$$\varepsilon_j = T - \frac{2\pi q_j}{\ln p_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k_n$$

satisfacen  $|\varepsilon_j| \leq \varepsilon$  y, teniendo en cuenta (10.19), se tiene que

$$|\cos(T \ln p_j) - 1| < \delta, \quad |\operatorname{sen}(\varepsilon_j \ln p_j)| < \delta \quad (10.20)$$

para todo  $1 \leq j \leq k_n$  ya que

$$\begin{aligned} \cos(\varepsilon_j \ln p_j) &= \cos\left(\left(T - \frac{2\pi q_j}{\ln p_j}\right) \ln p_j\right) = \cos(T \ln p_j - 2\pi q_j) = \\ &= \cos(T \ln p_j), \quad j = 1, 2, \dots, k_n. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando en consideración (10.17) y (10.18), de (10.20) se deduce que

$$F_n(x + iT) = F_n(x) + (F_n(x + iT) - F_n(x)) \geq A - \varepsilon > B > 0,$$

concluyendo que

$$\operatorname{Re} G_n(z) > 1, \quad (10.21)$$

para cualquier  $z = x + iT$  del lado  $R_{n,T,3}$ .

Por otra parte, como

$$\operatorname{Im} G_n(z) = e^{x \ln 2} \operatorname{sen}(y \ln 2) + \dots + e^{x \ln n} \operatorname{sen}(y \ln n),$$

la condición (10.20) también implica que  $|\operatorname{Im} G_n(z)|$  es arbitrariamente pequeño en  $R_{n,T,3}$  y, de (10.21), la variación del argumento en el lado  $R_{n,T,3}$  verifica (10.16), sujeto a que  $T$  sea elegido de cualquier intervalo  $I_p$ ,  $p \geq 0$ .

Sobre el lado determinado por los puntos  $(r_n, T)$  y  $(r_n, 0)$ , denotado por  $R_{n,T,4}$ , directamente se sigue de (10.10) que la variación del argumento  $\Theta_{n,T,4}$  no depende de  $T$  y satisface

$$|\Theta_{n,T,4}| < \pi. \quad (10.22)$$

Finalmente de (10.14), (10.15), (10.16) y (10.22), concluimos que la variación total del argumento sobre el rectángulo  $R_{n,T}$  satisface

$$\Theta_{n,T} = T \ln n + \Psi_n, \text{ con } |\Psi_n| < 2\pi$$

y, consecuentemente, el número de ceros de  $G_n(z)$ , situados en el interior de  $R_{n,T}$ , verifica la fórmula (10.13).  $\square$

## 10.6. Lema de Landau

Un último resultado obtenido en el que se ven involucrados los ceros se obtiene a partir del siguiente teorema:

**Teorema 10.28 (Lema de Landau)** *Sea  $f(z)$  una función analítica en  $\overline{D}(z_0, r)$ , siendo  $f(z_0) \neq 0$ . Supongamos que para algún  $M > 0$  se tiene que:*

$$\left| \frac{f(z)}{f(z_0)} \right| < e^M, \quad \forall z \in \overline{D}(z_0, r).$$

*Sea  $\rho$  un cero de  $f(z)$  tal que  $|\rho - z_0| \leq \frac{r}{2}$ , entonces se tiene que:*

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{\rho} \frac{1}{z - \rho} \right| < 36 \frac{M}{r}, \quad \forall z : |z - z_0| \leq \frac{r}{3}.$$

Utilizaremos el lema de Landau para obtener el siguiente resultado:

**Teorema 10.29** *Para cada  $r > 0$  y  $\rho$  un cero de  $G_n(z)$  tal que  $|\rho| \leq \frac{r}{2}$ , se tiene, para cada  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| \leq \frac{r}{3}$ , la fórmula*

$$\frac{G'_n(z)}{G_n(z)} = \sum_{\rho} \frac{1}{z - \rho} + O(1), \quad \text{siendo } |O(1)| \leq 36 \ln n.$$

**Prueba.**  $G_n(z)$  es una función entera, por tanto en el Lema de Landau podemos tomar  $z_0 = 0$  (obsérvese que  $G_n(0) = n \neq 0$ ) y  $r$  tan grande como nuestros propósitos lo requieran. Calcularemos ahora la cota  $M$  que aparece en el lema de Landau:

$$\begin{aligned} \left| \frac{G_n(z)}{G_n(0)} \right| &= \frac{1}{n} |1 + 2^z + \cdots + n^z| \leq \frac{1}{n} (1 + 2^{|z|} + \cdots + n^{|z|}) = \\ &\leq \frac{1}{n} (1 + 2^r + \cdots + n^r) \leq n^r = e^{r \ln n}, \quad \forall |z| \leq r \end{aligned}$$

consecuentemente podemos tomar  $M = r \ln n$ .

Utilizando entonces el Lema de Landau se tiene que

$$\left| \frac{G'_n(z)}{G_n(z)} - \sum_{\rho} \frac{1}{z - \rho} \right| < 36 \frac{M}{r} = 36 \ln n, \quad \text{para } |z| \leq \frac{r}{3},$$

donde la suma se extiende a los ceros  $\rho$  de  $G_n(z)$  tales que  $|\rho| \leq \frac{r}{2}$ .

En consecuencia,

$$\frac{G'_n(z)}{G_n(z)} = \sum_{\rho} \frac{1}{z - \rho} + O(1), \quad \text{siendo } |O(1)| \leq 36 \ln n.$$

□



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

# Capítulo 11

## Generalización de los principales resultados

---

### 11.1. Polinomios exponenciales

Consideraremos a continuación los polinomios exponenciales, es decir, aquellas funciones de la forma

$$P_n(z) = a_1 e^{i\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{i\lambda_n z}, \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{R} \ a_i \in \mathbb{C} \ \forall 1 \leq i \leq n$$

Asumiremos, sin pérdida de generalidad,  $a_j \neq 0 \ \forall j$  y  $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$ .

Naturalmente,  $P_n(z)$  es una función entera, probaremos a continuación que su orden es 1:

**Teorema 11.1**  $P_n(z)$  es una función entera de orden 1,  $\forall n \geq 2$ .

**Prueba.** Recordemos que el orden de una función entera (definición 5.1) viene dado por

$$\lambda = \inf \{ a \geq 0, \exists r \in \mathbb{R}^+, \forall z \in \mathbb{C} \setminus B(0, r) : |f(z)| \leq e^{|z|^a} \}.$$

Sea  $\alpha > 1$ , por una parte se tiene que

$$|P_n(z)| = |a_1 e^{i\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{i\lambda_n z}| \leq |a_1| e^{|\lambda_1|R} + \dots + |a_n| e^{|\lambda_n|R} \text{ siendo } R = |z|.$$

Además se tiene que,

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{R^\alpha}}{|a_1| e^{|\lambda_1|R} + \dots + |a_n| e^{|\lambda_n|R}} = \\ & = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{R^\alpha - R|\lambda_i|}}{|a_1| e^{(|\lambda_1| - |\lambda_i|)R} + \dots + |a_i| + \dots + |a_n| e^{(|\lambda_n| - |\lambda_i|)R}} = \infty, \end{aligned}$$

siendo  $i$  tal que  $|\lambda_i| = \max\{|\lambda_j|, j = 1 \dots n\}$ . Por tanto,

$$|P_n(z)| \leq e^{|z|^\alpha} \ \forall \alpha > 1 \text{ y } |z| = R \text{ suficientemente grande.}$$

Por otra parte, sea  $\alpha < 1$ , entonces veamos que

$$|P_n(z)| \leq e^{|z|^\alpha}, \text{ para } |z| \text{ suficientemente grande es falso.}$$

En efecto, tomemos  $z = iy$ , con  $y > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{z=iy \rightarrow \infty} \frac{|P_n(z)|}{e^{|z|^\alpha}} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{|a_1 e^{-y\lambda_1} + \dots + a_n e^{-y\lambda_n}|}{e^{y^\alpha}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{|a_1 e^{-y(\lambda_1 - \lambda_k)} + \dots + a_k + \dots + a_n e^{-y(\lambda_n - \lambda_k)}|}{e^{y^\alpha + y\lambda_k}} = \infty, \end{aligned}$$

siendo  $k$  tal que  $\lambda_k = \min\{\lambda_j, 1 \leq j \leq n\}$ , siempre que  $\lambda_k < 0$ , ya que  $\lambda_i - \lambda_k > 0 \forall i \neq k$  y el denominador tiende a 0.

En caso de que  $\min\{\lambda_j, 1 \leq j \leq n\}$  sea mayor o igual que 0, tomaremos  $l$  tal que  $\lambda_l = \max\{\lambda_j, 1 \leq j \leq n\}$ . De esta forma  $\lambda_l > 0$  y se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{z=iy \rightarrow \infty} \frac{|P_n(z)|}{e^{|z|^\alpha}} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{|a_1 e^{-y\lambda_1} + \dots + a_n e^{-y\lambda_n}|}{e^{y^\alpha}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{|a_1 e^{-y(\lambda_1 + \lambda_l)} + \dots + a_k + \dots + a_n e^{-y(\lambda_n + \lambda_l)}|}{e^{y^\alpha - y\lambda_l}} = \infty, \end{aligned}$$

obteniendo de nuevo el mismo límite.

En consecuencia  $\lambda = 1$ . □

Además  $P_n(z)$  cumple otra de las propiedades esenciales que habíamos tratado con la función  $G_n(z)$ :

**Teorema 11.2**  $P_n(z)$  es una función de tipo exponencial.

**Prueba.** Utilizando la desigualdad triangular sabemos que

$$|P_n(z)| = |a_1 e^{i\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{i\lambda_n z}| \leq |a_1| e^{|\lambda_1||z|} + \dots + |a_n| e^{|\lambda_n||z|},$$

tomando ahora  $\hat{\lambda}$  tal que  $|\hat{\lambda}| = \max\{|\lambda_k|, k = 1 \dots n\}$  y  $\hat{a}$  tal que  $|\hat{a}| = \max\{|a_k|, k = 1 \dots n\}$ , se tiene que

$$|P_n(z)| \leq n |\hat{a}| e^{|\hat{\lambda}||z|},$$

por tanto,

$$|P_n(z)| \leq A e^{a|z|} \forall z \in \mathbb{C}, \text{ siendo } A = n |\hat{a}| > 0 \quad a = |\hat{\lambda}| > 0.$$

□

De hecho,  $P_n(z)$  es una función acotada en la línea, ya que

$$|P_n(x)| = |a_1 e^{i\lambda_1 x} + \dots + a_n e^{i\lambda_n x}| \leq |a_1| + \dots + |a_n| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determinaremos ahora el desarrollo en serie de  $P_n(z)$  centrado en 0, es decir

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k.$$

A partir de la definición de  $P_n(z)$  ya sabemos que  $P_n(0) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , por otra parte,

$$\begin{aligned} P_n'(z) &= i\lambda_1 a_1 e^{i\lambda_1 z} + \dots + i\lambda_n a_n e^{i\lambda_n z}, \\ P_n''(z) &= (i\lambda_1)^2 a_1 e^{i\lambda_1 z} + \dots + (i\lambda_n)^2 a_n e^{i\lambda_n z}, \\ &\dots \\ P_n^{(m)}(z) &= (i\lambda_1)^m a_1 e^{i\lambda_1 z} + \dots + (i\lambda_n)^m a_n e^{i\lambda_n z}, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} P_n'(0) &= i(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n), \\ P_n''(0) &= i^2(\lambda_1^2 a_1 + \dots + \lambda_n^2 a_n), \\ &\dots \\ P_n^{(m)}(0) &= i^m(\lambda_1^m a_1 + \dots + \lambda_n^m a_n), \end{aligned}$$

obteniendo así el siguiente desarrollo en serie:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k (\lambda_1^k a_1 + \dots + \lambda_n^k a_n)}{k!} z^k,$$

en consecuencia, los coeficientes  $b_k$  asociados al desarrollo en serie vienen dados por

$$b_k = i^k (\lambda_1^k a_1 + \dots + \lambda_n^k a_n), \quad \text{para } k \geq 0,$$

y, por tanto, su transformada de Borel viene dada por la siguiente fórmula:

$$B_{P_n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^{k+1}}, \quad \text{siendo } b_k \text{ los coeficientes del desarrollo en serie anterior.}$$

Determinaremos ahora el valor  $\gamma$  a partir del cual la transformada de Borel de  $P_n(z)$  converge:

**Teorema 11.3** *Sea  $B_{P_n}(z)$  la transformada de Borel de  $P_n(z)$  y  $\gamma = |\hat{\lambda}|$ , siendo  $\hat{\lambda}$  tal que  $|\hat{\lambda}| = \max\{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq n\}$ . Entonces si  $|z| > \gamma$  la serie converge, y si  $|z| < \gamma$  la serie diverge.*

**Prueba.** Siendo  $B_{P_n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^{k+1}}$ , con  $b_k = i^k (\lambda_1^k a_1 + \dots + \lambda_n^k a_n)$  para  $k \geq 0$ , calcularemos  $\gamma$ , es decir, el valor a partir de cual si  $|z| > \gamma$  la serie converge.

Recordemos que este valor viene dado por

$$\gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n}.$$

Para su cálculo, utilizaremos el hecho de que si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right|$  entonces también existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n}$  y coinciden. Calcularemos, por tanto, el primer límite (recordemos que  $\lambda_i \in \mathbb{R} \forall i$  y  $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$ ). Denotaremos por  $\tilde{a}$  el coeficiente asociado a  $\hat{\lambda}$  (en el caso de que existan  $\lambda_i, \lambda_j$  tal que  $|\lambda_i| = |\lambda_j| = |\hat{\lambda}|$ , por tanto  $\lambda_i = -\lambda_j$ , la prueba es análoga):

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{i^{k+1} (\lambda_1^{k+1} a_1 + \dots + \lambda_n^{k+1} a_n)}{i^k (\lambda_1^k a_1 + \dots + \lambda_n^k a_n)} \right| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \left( \frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^{k+1} a_1 + \dots + \tilde{a} + \dots + \left( \frac{\lambda_n}{\lambda} \right)^{k+1} a_n \right|}{\left| \left( \frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^k \frac{a_1}{\lambda} + \dots + \frac{\tilde{a}}{\lambda} + \dots + \left( \frac{\lambda_n}{\lambda} \right)^k \frac{a_n}{\lambda} \right|} = \\ &= \frac{|\tilde{a}|}{|\tilde{a}/\hat{\lambda}|} = |\hat{\lambda}|, \end{aligned}$$

en consecuencia  $\gamma = |\hat{\lambda}|$ . □

A partir de la transformada de Borel, podemos calcular su diagrama conjugado:

**Teorema 11.4** *El diagrama conjugado de  $P_n(z)$  viene dado por:*

$$\{0\} \times [\lambda^{(1)}, \lambda^{(n)}],$$

siendo  $\lambda^{(1)} = \min\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$  y  $\lambda^{(n)} = \max\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$ .

**Prueba.** Para probar este resultado demostraremos que

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{z - i\lambda_k}$$

es una extensión analítica de la transformada de Borel de la función  $P_n(z)$ . En efecto, ya hemos visto anteriormente que la transformada de Borel viene dada por la serie

$$\sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{z^{k+1}}, \quad \text{con } b_k = i^k (\lambda_1^k a_1 + \dots + \lambda_n^k a_n), \quad k \geq 0,$$

para  $|z| > |\hat{\lambda}|$  (siendo  $\hat{\lambda}$  tal que  $|\hat{\lambda}| = \max\{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq n\}$ ).

Por otra parte, para cualquier  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ :

$$\frac{1}{z - i\lambda_m} = \frac{1}{z} \frac{1}{\left(1 - \frac{i\lambda_m}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{i\lambda_m}{z}\right)^k, \quad \text{ya que } \left|\frac{i\lambda_m}{z}\right| < 1 \text{ para } |z| > \hat{\lambda}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - i\lambda_k} &= \frac{1}{z - i\lambda_1} + \frac{1}{z - i\lambda_2} + \dots + \frac{1}{z - i\lambda_n} = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{i\lambda_1}{z}\right)^k + \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{i\lambda_2}{z}\right)^k + \dots + \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{i\lambda_n}{z}\right)^k = \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{i^k (\lambda_1^k a_1 + \dots + \lambda_n^k a_n)}{z^{k+1}}, \end{aligned}$$

y, consecuentemente, queda demostrado que

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{z - i\lambda_k}$$

es una prolongación analítica de la transformada de Borel.

En consecuencia, los puntos  $i\lambda_1, i\lambda_2, \dots, i\lambda_n$  son puntos singulares de la transformada de Borel extendida, así que el conjunto compacto convexo más pequeño fuera del cual la transformada de Borel  $B_{P_n}(z)$  admite prolongación analítica es  $\{0\} \times [\lambda^{(1)}, \lambda^{(n)}]$ , siendo  $\lambda^{(1)} = \min\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$  y  $\lambda^{(n)} = \max\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$ . □

Analizaremos ahora si nuestras funciones  $P_n(z)$  cumplen la condición (C), es decir, si verifican que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \left( \frac{1}{z_n} \right) \right| < \infty,$$

siendo  $z_n$  los ceros de la función considerada.

**Teorema 11.5** *Los polinomios exponenciales verifican la condición (C)*

**Prueba.** Sea  $P_n(z) = a_1 e^{i\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{i\lambda_n z}$ . Utilizaremos el mismo resultado ya utilizado para la función  $H_n(z)$ , lema 10.6. Por tanto, siendo  $P_n(z)$  de tipo exponencial, y cumpliendo además que para cualquier  $R > 1$  se tiene que

$$\int_1^R x^{-2} \log |P_n(x)P_n(-x)| dx \leq 2 \ln(|a_1| + \dots + |a_n|) \int_1^R x^{-2} dx < \infty,$$

ya que  $|P_n(x)| \leq |a_1| + \cdots + |a_n| \forall x \in \mathbb{R}$ , utilizando dicho lema,  $P_n(z)$  cumple la condición (C).  $\square$

Consecuentemente, los ceros de  $P_n(z)$  están concentrados alrededor del eje real.

Nuestro objetivo de ahora en adelante será obtener más resultados acerca de los ceros. De hecho, los resultados que consideraremos suponen una generalización de los obtenidos para  $H_n(z)$ . En primer lugar demostraremos la existencia de la densidad:

**Teorema 11.6** *Siendo  $n_{P_n}(r)$  el número de ceros de  $P_n(z)$  en  $|z| < r$ . La densidad asociada a la función  $P_n(z)$ ,*

$$\Delta_{P_n} \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{P_n}(r)}{r},$$

*existe.*

**Prueba.** Dado que  $P_n(z) = a_1 e^{i\lambda_1 z} + \cdots + a_n e^{i\lambda_n z}$  es una función entera de orden 1 y de tipo exponencial  $\hat{\lambda}$ , siendo  $\hat{\lambda}$  tal que  $|\hat{\lambda}| = \max\{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq n\}$ , definiendo  $\alpha$  mediante la fórmula

$$\alpha \equiv \liminf_{r \rightarrow \infty} (r^{-1} \log M_{P_n}(r)), \quad \text{con } M_{P_n}(r) = \text{Max}_{|z|=r} |P_n(z)|,$$

podemos afirmar que  $\alpha$  satisface la siguiente desigualdad

$$\alpha \leq |\hat{\lambda}|,$$

y, por tanto,  $\alpha$  es finito. Por otra parte, debido a que

$$|P_n(x)| \leq |a_1| + \cdots + |a_n| \forall x \in \mathbb{R},$$

la siguiente integral está claramente acotada

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |P_n(x)|}{1+x^2} dx < \infty, \quad (11.1)$$

donde como antes,

$$\log^+ t = \begin{cases} \ln t & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1. \end{cases}$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que  $\alpha$  es finito, (11.1) nos permite aplicar el lema 10.20 para obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log |P_n(x)||}{1+x^2} dx < \infty.$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |P_n(x)|}{1+x^2} dx < \infty,$$

y teniendo en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |P_n(x)|}{1+x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{\log |P_n(x)| + \log |P_n(-x)|}{1+x^2} dx,$$

se concluye que

$$\int_0^{\infty} \frac{\log |P_n(x)P_n(-x)|}{1+x^2} dx < \infty. \quad (11.2)$$

Finalmente, en relación al lema 10.21, recordemos que  $P_n(z)$  cumple la condición (C), y teniendo en cuenta en concreto la desigualdad (11.2) podemos garantizar la existencia de la densidad.  $\square$

Haremos uso de nuevo de la teoría de las funciones casi periódicas con el objetivo de extraer el valor de la densidad y poder encontrar así una estimación asintótica del número de ceros en una determinada región.

Siendo  $P_n(z)$  un polinomio exponencial, en particular, para  $z = x \in \mathbb{R}$ ,  $P_n(x)$  es un polinomio trigonométrico generalizado y, en consecuencia, una función casi periódica en  $\mathbb{R}$  dado que es suma de funciones periódicas. Además, tal como hicimos con la función  $H_n(z)$ , podemos extender este comportamiento afirmando que  $P_n(z)$  es una función casi periódica en cualquier banda paralela al eje real. Por tanto, estamos en condiciones de poder calcular su espectro:

**Teorema 11.7** *El espectro de*

$$P_n(z) = a_1 e^{i\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{i\lambda_n z}$$

*está formado por  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ .*

**Prueba.** Determinaremos los coeficientes de Fourier de la función  $P_n(z)$  (se puede comprobar fácilmente que los coeficientes del espectro son independientes de la componente  $y$ ):

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= M(P_n(x)e^{-i\lambda x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} (a_1 e^{i\lambda_1 x} + \dots + a_n e^{i\lambda_n x}) e^{-i\lambda x} dx = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} (a_1 e^{i(\lambda_1 - \lambda)x} + \dots + a_n e^{i(\lambda_n - \lambda)x}) dx. \end{aligned}$$

Calcularemos ahora  $\int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} e^{i(\lambda_k - \lambda)x} dx$  para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

- Si  $\lambda \neq \lambda_k$  se tiene que

$$\int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} e^{ix(\lambda_k - \lambda)} dx = \left[ \frac{1}{i(\lambda_k - \lambda)} e^{i(\lambda_k - \lambda)x} \right]_{-T+\alpha}^{T+\alpha} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{i(\lambda_k - \lambda)} [e^{i(T+\alpha)(\lambda_k - \lambda)} - e^{i(-T+\alpha)(\lambda_k - \lambda)}] = \\
&= \frac{1}{i(\lambda_k - \lambda)} \cdot e^{i(\lambda_k - \lambda)\alpha} [e^{i(\lambda_k - \lambda)T} - e^{-i(\lambda_k - \lambda)T}] = \\
&= \frac{1}{i(\lambda_k - \lambda)} \cdot e^{i(\lambda_k - \lambda)\alpha} [2i \operatorname{sen}((\lambda_k - \lambda)T)], \\
&\implies \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} e^{i(\lambda_k - \lambda)x} \right] dx = 0,
\end{aligned}$$

en consecuencia, para  $\lambda \neq \lambda_k$ , obtenemos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} (a_1 e^{i(\lambda_1 - \lambda)x} + \dots + a_n e^{i(\lambda_n - \lambda)x}) dx = 0 \implies a(\lambda) = 0.$$

- Por otra parte, si  $\lambda = \lambda_k$  para algún  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} e^{i(\lambda_j - \lambda)x} \right] dx = 0, \text{ para } j \neq k,$$

y la integral donde aparece  $\lambda_k$  queda de la siguiente manera

$$\int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} a_k e^{i(\lambda_k - \lambda)x} dx = \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} a_k dx = a_k [(T + \alpha) - (-T + \alpha)] = 2a_k T,$$

en consecuencia,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} a_k e^{i(\lambda_k - \lambda)x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot 2a_k T = a_k.$$

Por tanto, en este caso,  $a(\lambda) = a_k$ .

□

A la vista del espectro resultante, y teniendo en cuenta el diagrama conjugado de la función  $P_n(z)$  (calculado anteriormente en el teorema 11.4), podemos formular el siguiente corolario:

**Corolario 11.8** *Girando  $90^\circ$  en sentido positivo el segmento más pequeño del eje real que contiene cada punto del espectro de  $P_n(z)$ , se obtiene su diagrama conjugado.*

Estamos ahora en condiciones de poder aplicar el resultado de Bohr, teorema 10.17, y afirmar el siguiente resultado acerca de los ceros:

**Teorema 11.9** *Todos los ceros de  $P_n(z)$  están en una banda paralela al eje real.*

**Prueba.** Sabemos que la función  $P_n(z)$  es entera, de tipo exponencial finito y casi periódica, y como el espectro contiene un número finito de elementos, las cotas inferior y superior pertenecen a él y, por tanto, aplicando el citado teorema de Bohr, todos sus ceros los podemos localizar en una banda paralela al eje real.  $\square$

De ahora en adelante, como ya hicimos con la función  $G_n(z)$ , nos referiremos a esta banda como **banda crítica**.

Teniendo en cuenta este último resultado, estamos ya en disposición de obtener el valor de la densidad:

**Teorema 11.10** *El número de ceros  $n_{P_n}(-T, T)$  de la función  $P_n(z) = a_1 e^{i\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{i\lambda_n z}$  en la banda crítica con  $-T \leq \operatorname{Re} z \leq T$  satisface la fórmula*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_{P_n}(-T, T)}{T} = \frac{\lambda^{(n)} - \lambda^{(1)}}{\pi},$$

siendo  $\lambda^{(1)} = \min\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$  y  $\lambda^{(n)} = \max\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$ .

Además, si  $a_i \in \mathbb{R} \forall i : 1 \leq i \leq n$ , el número de ceros  $n_{P_n}(0, T)$  de la función  $P_n(z)$  en la banda crítica con  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq T$  satisface la fórmula

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_{P_n}(0, T)}{T} = \frac{\lambda^{(n)} - \lambda^{(1)}}{2\pi}.$$

**Prueba.** Consideremos  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  con  $y_1 < 0 < y_2$  tales que la banda crítica donde están situados los ceros de  $P_n(z)$ , denotada por  $S_{C, P_n}$ , esté contenida en la banda

$$S(y_1, y_2) \equiv \{z : y_1 < \operatorname{Im} z < y_2\}. \quad (11.3)$$

Denotaremos por  $n_{P_n}(-T, T, y_1, y_2)$  el número de ceros de  $P_n(z)$  en el rectángulo  $[-T, T] \times [y_1, y_2]$ . Utilizando el teorema 11.6, podemos decir que el siguiente límite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_{P_n}(-T, T, y_1, y_2)}{T} \equiv \sigma(y_1, y_2) \quad (11.4)$$

existe. Por otra parte,  $\sigma(y_1, y_2)$  no depende de  $y_1, y_2$  con la condición de que  $S_{C, P_n}$  esté contenido en la banda crítica definida en (11.3). En consecuencia, el límite considerado en (11.4) cuando  $y_1 \rightarrow -\infty, y_2 \rightarrow \infty$ , existe y verifica

$$\lim_{y_1 \rightarrow -\infty; y_2 \rightarrow +\infty} \sigma(y_1, y_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_{P_n}(-T, T)}{T}, \quad (11.5)$$

donde  $n_{P_n}(-T, T)$  denota el número de los ceros de  $P_n(z)$  en la banda crítica satisfaciendo  $-T \leq \operatorname{Re} z \leq T$ . Utilizando ahora el lema 10.23 y teniendo en cuenta que  $\lambda^{(n)} - \lambda^{(1)}$  es la longitud del segmento más pequeño conteniendo el espectro de  $P_n(x)$ , el valor del límite en (11.5) se puede calcular de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \lim_{y_1 \rightarrow -\infty; y_2 \rightarrow +\infty} \sigma(y_1, y_2) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_{P_n}(-T, T)}{T} = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_{P_n}(-T, T)}{2T} = \\ &= 2 \frac{(\lambda^{(n)} - \lambda^{(1)})}{2\pi} = \frac{\lambda^{(n)} - \lambda^{(1)}}{\pi}. \end{aligned}$$

En el caso de que  $a_i \in \mathbb{R} \forall i : 1 \leq i \leq n$ , denotaremos por  $n_{P_n}(0, T, y_1, y_2)$  el número de ceros de  $P_n(z)$  en el rectángulo  $[0, T] \times [y_1, y_2]$ . Teniendo en cuenta que en este caso

$$P_n(z) = \overline{P_n(-\bar{z})},$$

utilizando igualmente el teorema 11.6, podemos decir que el siguiente límite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_{P_n}(0, T, y_1, y_2)}{T} \equiv \sigma(y_1, y_2)$$

existe, y repitiendo los pasos realizados anteriormente en el caso general, concluimos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_{P_n}(0, T)}{T} = \frac{\lambda^{(n)} - \lambda^{(1)}}{2\pi}.$$

□

A continuación, estudiaremos de una manera directa la distribución de los ceros, extendiendo el comportamiento existente en la función  $G_n(z)$ . En concreto, probaremos que existen infinitos valores de  $T$  para los cuales se puede obtener una fórmula exacta concerniente al número de ceros en cierto rectángulo de la banda crítica con  $T$  como cota superior de la parte real, con un error a lo sumo de  $\pm 2$  o  $\pm 3$  ceros en función de los coeficientes  $a_i$ . Este resultado mejora considerablemente la estimación asintótica conseguida en la sección previa.

En primer lugar, considerando la función

$$Q_n(z) = a_1 e^{\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{\lambda_n z}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{C} \forall i$$

vemos que el número de ceros de  $Q_n(z)$  coincide con el de  $P_n(z) = a_1 e^{i\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{i\lambda_n z}$ , de hecho se tiene trivialmente la siguiente igualdad:

$$Z_{Q_n(z)} = iZ_{P_n(z)}, \quad \text{es decir, } \{z \in \mathbb{C} : Q_n(z) = 0\} = \{i \cdot w : w \text{ es cero de } P_n(z)\}.$$

En consecuencia, todos los ceros de  $Q_n(z)$  están en una banda crítica paralela al eje imaginario. Nos ocuparemos directamente del estudio de ceros de la función  $Q_n(z)$ . Comenzaremos estudiando el número de ceros de  $Q_2(z)$  para  $0 \leq \text{Im } z = y \leq T$ , denotado por  $n_2(T)$ . Supondremos sin pérdida de generalidad que  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

Para este caso, estudiando la ecuación

$$a_1 e^{\lambda_1 z} + a_2 e^{\lambda_2 z} = 0,$$

un cómputo directo nos proporciona la fórmula:

$$e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z} = -\frac{a_1}{a_2},$$

por tanto, sus soluciones son

$$z = \frac{\ln \left| \frac{a_1}{a_2} \right| + i \left( \text{Arg} \left( -\frac{a_1}{a_2} \right) + 2k\pi \right)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

y se puede obtener directamente que

$$n_2(T) = \max \left\{ k \in \mathbb{Z} : \frac{\text{Arg} \left( -\frac{a_1}{a_2} \right) + 2k\pi}{\lambda_2 - \lambda_1} \leq T \right\}$$

o equivalentemente

$$n_2(T) = \left\lfloor \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)T}{2\pi} + \Omega_2 \right\rfloor, \text{ con } |\Omega_2| < \frac{1}{2}. \quad (11.6)$$

Nos ocuparemos ahora de encontrar una fórmula similar a (11.6) para las funciones  $Q_n(z)$  en el caso general  $n \geq 3$ .

Inicialmente, observemos que, siendo  $Q_n(z) = a_1 e^{\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{\lambda_n z}$ , entonces para  $z$  real se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(z)}{a^{(n)} e^{\lambda^{(n)} z}} &= a_1 e^{(\lambda_1 - \lambda^{(n)})z} + \dots + 1 + \dots + a_n e^{(\lambda_n - \lambda^{(n)})z} \longrightarrow 1 \text{ cuando } z \rightarrow \infty, \\ \frac{Q_n(z)}{a^{(1)} e^{\lambda^{(1)} z}} &= a_1 e^{(\lambda_1 - \lambda^{(1)})z} + \dots + 1 + \dots + a_n e^{(\lambda_n - \lambda^{(1)})z} \longrightarrow 1 \text{ cuando } z \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

siendo  $\lambda^{(n)} = \max\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$ ,  $\lambda^{(1)} = \min\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$  y  $a^{(n)}$ ,  $a^{(1)}$  sus coeficientes asociados respectivamente en la expresión de  $Q_n(z)$ .

Por tanto, podemos determinar, para cada  $n$  fijo,  $r_n, s_n \in \mathbb{R}$  con  $r_n < s_n$  tales que

$$\left| \frac{Q_n(z)}{a^{(1)} e^{\lambda^{(1)} z}} - 1 \right| < 1, \text{ para todo } z \text{ tal que } \text{Re } z \leq r_n \quad (11.7)$$

y

$$\left| \frac{Q_n(z)}{a^{(n)} e^{\lambda^{(n)} z}} - 1 \right| < 1, \text{ para todo } z \text{ tal que } \text{Re } z \geq s_n, \quad (11.8)$$

concluyendo que todos los ceros de  $Q_n(z)$  están localizados en la banda vertical limitada por las líneas

$$\operatorname{Re} z = r_n, \quad \operatorname{Re} z = s_n.$$

Sea  $T_2 > 0$ , que más tarde será especificado con mucha más precisión. Asumiremos sin pérdida de generalidad que  $Q_n(z)$  no tiene ceros en la línea horizontal  $y = T_2$ . Estudiaremos la variación del argumento de  $Q_n(z)$  en un cierto rectángulo que definiremos después cuyo principal problema lo encontramos en la parte definida desde el punto  $(s_n, T_2)$  a  $(r_n, T_2)$ . Para solventarlo utilizaremos de nuevo el teorema de Kronecker-Bohl (teorema 10.26) que requiere en esta ocasión de la siguiente definición previa:

**Definición 11.1** Una función casi periódica  $F(z)$  se dice que posee una base finita  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  si estos números forman una base de los coeficientes que forman el espectro de  $F(z)$ , es decir,  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  son linealmente independientes y los coeficientes del espectro están contenidos en  $\{h_1\mu_1 + \dots + h_m\mu_m\}$ , con  $h_1, h_2, \dots, h_m \in \mathbb{Z}$ .

Supondremos además que la parte real de  $Q_n(z)$  no se anula en  $y = T_1$ , para algún  $T_1 > 0$ , en concreto supondremos que existe  $A > 0$  ( $A < 0$ ) tal que  $\operatorname{Re} Q_n(z) > A$  ( $\operatorname{Re} Q_n(z) < A$ ) para  $z = x + iT_1$ ,  $r_n \leq x \leq s_n$ . Consideraremos el rectángulo  $R_{n,T_1,T_2}$  definido por las líneas  $x = r_n$ ,  $x = s_n$  y  $y = T_1$ ,  $y = T_2$ , con  $T_2 > T_1$ . Entonces, bajo las hipótesis realizadas y a partir de (11.7) y (11.8), podemos asegurar que no hay ceros en  $R_{n,T_1,T_2}$ . Por tanto, estamos en condiciones de estudiar la variación del argumento de  $Q_n(z)$  en  $R_{n,T_1,T_2}$ , que denotaremos por  $\Theta_{n,T_1,T_2}$  y comenzaremos desde el punto  $(r_n, T_1)$ .

Teniendo en cuenta además que cada polinomio exponencial verifica la propiedad de poseer una base finita, es decir, que siendo  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  los coeficientes que forman el espectro de  $P_n(z) = a_1 e^{i\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{i\lambda_n z}$ , entonces existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  forma una base de estos coeficientes, es decir,

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^m h_k \mu_k, \quad h_k \in \mathbb{Z} \quad \forall j : 1 \leq j \leq n, \quad (11.9)$$

la fórmula general que determina el número de ceros en el interior del rectángulo  $R_{n,T_1,T_2}$  viene dada en el siguiente resultado:

**Teorema 11.11** Siendo  $Q_n(z) = a_1 e^{\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{\lambda_n z}$ , bajo las consideraciones previas existe un número real positivo  $l$  tal que cada intervalo  $(pl, (p+1)l)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , con  $pl \geq T_1$ , contiene un intervalo  $I_p$  tal que para cada  $T_2 \in I_p$  con  $T_2 - T_1 \geq \frac{2\pi}{\lambda^{(n)} - \lambda^{(1)}}$ , el número de ceros de  $Q_n(z)$  en el interior del rectángulo  $R_{n,T_1,T_2}$  viene dado por la fórmula

$$N_n(T_1, T_2) = \left[ \frac{(\lambda^{(n)} - \lambda^{(1)})(T_2 - T_1)}{2\pi} + \Omega_n \right], \quad \text{con } |\Omega_n| < \begin{cases} 3/2 & \text{si } a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \\ 2 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (11.10)$$

donde  $\lambda^{(1)} = \min\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$  y  $\lambda^{(n)} = \max\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$ .

**Prueba.** (Basada en la variación del argumento en  $R_{n,T_1,T_2}$ ) Observemos en primer lugar que a partir de (11.6) la fórmula (11.10) generaliza el caso particular tratado en  $n = 2$ . Por tanto, supondremos a partir de ahora que  $n > 2$ .

Como ya se ha comentado previamente, utilizaremos el Principio del Argumento aplicado al camino cerrado  $R_{n,T_1,T_2}$ . Por tanto, analizaremos la variación del argumento en los distintos segmentos  $R_{n,T_1,T_2,1}$ ,  $R_{n,T_1,T_2,2}$ ,  $R_{n,T_1,T_2,3}$  y  $R_{n,T_1,T_2,4}$  que componen  $R_{n,T_1,T_2}$  (denotaremos por  $\Theta_{n,T_1,T_2,i}$  a la variación del argumento en  $R_{n,T_1,T_2,i}$ ). Ver figura 11.1.

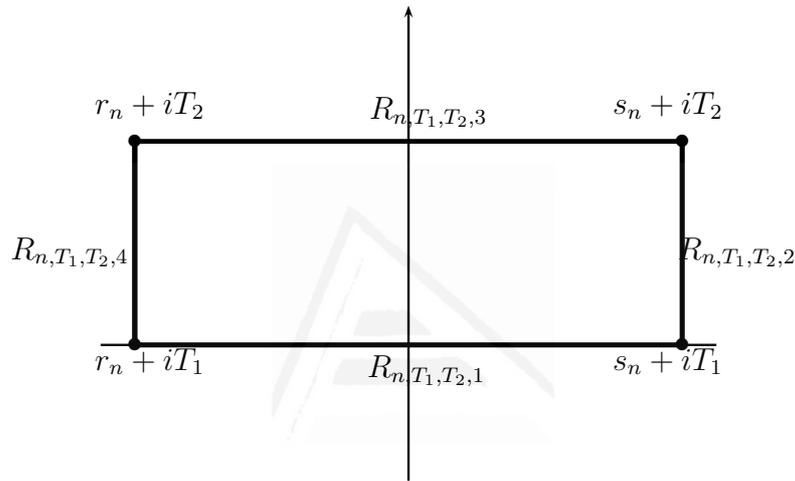


Figura 11.1: Rectángulo  $R_{n,T_1,T_2}$

Sobre el lado determinado por los puntos  $(r_n, T_1)$  y  $(s_n, T_1)$ , denotado por  $R_{n,T_1,T_2,1}$ , como por hipótesis la parte real no se anula, la variación del argumento satisface

$$\Theta_{n,T_1,T_2,1} = \Phi_{n,1}, \text{ con } |\Phi_{n,1}| < \pi. \quad (11.11)$$

La variación  $\Theta_{n,T_1,T_2,2}$  en el lado determinado por los puntos  $(s_n, T_1)$  y  $(s_n, T_2)$ , denotado por  $R_{n,T_1,T_2,2}$ , puede ser estimada teniendo en cuenta que

$$Q_n(z) = a^{(n)} e^{\lambda^{(n)} z} \frac{Q_n(z)}{a^{(n)} e^{\lambda^{(n)} z}} = a^{(n)} e^{x\lambda^{(n)}} e^{iy\lambda^{(n)}} \frac{Q_n(z)}{a^{(n)} e^{\lambda^{(n)} z}},$$

con  $T_1 \leq \text{Im } z = y \leq T_2$ , y aplicando (11.8), existe entonces algún  $\Phi_{n,2}$ , que no depende de  $T_2$ , tal que

$$\Theta_{n,T_1,T_2,2} = (T_2 - T_1)\lambda^{(n)} + \Phi_{n,2}, \text{ con } |\Phi_{n,2}| < \pi. \quad (11.12)$$

Del mismo modo, sobre el lado determinado por los puntos  $(r_n, T_2)$  y  $(r_n, T_1)$ , denotado por  $R_{n,T_1,T_2,4}$ , directamente se sigue de (11.7) que la variación del argumento  $\Theta_{n,T_1,T_2,4}$  satisface

$$\Theta_{n,T_1,T_2,4} = (T_1 - T_2)\lambda^{(1)} + \Phi_{n,4}, \text{ con } |\Phi_{n,4}| < \pi. \quad (11.13)$$

Finalmente analizaremos el lado determinado por los puntos  $(s_n, T_2)$  y  $(r_n, T_2)$ , denotado por  $R_{n, T_1, T_2, 3}$ . Afirmamos que en el caso general la variación del argumento  $\Theta_{n, T_1, T_2, 3}$  satisface

$$|\Theta_{n, T_1, T_2, 3}| < \pi. \quad (11.14)$$

En efecto, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Q_n(z)) &= \operatorname{Re}(Q_n(x + iy)) = \operatorname{Re}(a_1)e^{x\lambda_1} \cos(y\lambda_1) + \dots + \operatorname{Re}(a_n)e^{x\lambda_n} \cos(y\lambda_n) - \\ &\quad - \operatorname{Im}(a_1)e^{x\lambda_1} \operatorname{sen}(y\lambda_1) - \dots - \operatorname{Im}(a_n)e^{x\lambda_n} \operatorname{sen}(y\lambda_n), \end{aligned}$$

entonces utilizando (11.9) podemos convertir  $\operatorname{Re}(Q_n(z))$  en un polinomio función de

$$e^{x\mu_j}, \cos(y\mu_j), \operatorname{sen}(y\mu_j), \text{ para } j = 1, \dots, m,$$

donde  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$  es la base finita asociada a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Por tanto, por continuidad, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $x \in [r_n, s_n]$  se tiene

$$|\operatorname{Re}(Q_n(x + iy)) - \operatorname{Re}(Q_n(x))| < \varepsilon, \quad (11.15)$$

siempre que

$$|\cos(y\mu_j) - 1| < \delta, \quad |\operatorname{sen}(y\mu_j)| < \delta$$

para todo  $j = 1, \dots, m$ .

Por otra parte, teniendo en cuenta el supuesto previo acerca de  $T_1$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe una constante positiva  $A$  tal que

$$\operatorname{Re}(Q_n(x + iT_1)) \geq A > 0, \quad (11.16)$$

para cualquier  $x$  del segmento  $[r_n, s_n] \subset \mathbb{R}$ . Sea ahora  $B > 0$  tal que  $B < A$ , podemos ahora determinar  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon < A - B$  y lo suficientemente pequeño como para que los números  $\{\varepsilon_j : 1 \leq j \leq m\}$ , que después precisaremos, con  $|\varepsilon_j| \leq \varepsilon$  cumplan que

$$|\cos(\varepsilon_j\mu_j) - 1| < \delta, \quad |\operatorname{sen}(\varepsilon_j\mu_j)| < \delta. \quad (11.17)$$

Teniendo en cuenta el teorema de Kronecker-Bohl (teorema 10.26), tomando  $\hat{a}_j = \frac{2\pi}{\mu_j}$ ,  $\hat{b}_j = 0$ , con  $1 \leq j \leq m$ , y  $\varepsilon$  verificando (11.15), existe  $l > 0$  tal que cualquier intervalo de la forma  $(pl, (p+1)l)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , contiene un intervalo  $I_p$  de longitud  $\varepsilon$  que contiene al menos un punto de cada conjunto  $A_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , definido por

$$A_j \equiv \left\{ \frac{2\pi q}{\mu_j} : q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Por tanto, para  $T_2 > 0$  perteneciente a cualquier intervalo  $I_p$ ,  $lp > T_1$  (para que  $T_2 > T_1$ ), existen  $q_j \in \mathbb{Z}$  tales que para

$$\varepsilon_j = T_2 - \frac{2\pi q_j}{\mu_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

se tiene  $|\varepsilon_j| \leq \varepsilon$  y, teniendo en cuenta (11.17), se deduce

$$|\cos(T_2\mu_j) - 1| < \delta, \quad |\operatorname{sen}(\varepsilon_j\mu_j)| < \delta \quad (11.18)$$

para todo  $1 \leq j \leq m$  ya que

$$\cos(\varepsilon_j\mu_j) = \cos\left(\left(T_2 - \frac{2\pi q_j}{\mu_j}\right)\mu_j\right) = \cos(T_2\mu_j - 2\pi q_j) = \cos(T_2\mu_j), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Finalmente, tomando en consideración (11.15) y (11.16), de (11.18) se deduce que

$$\operatorname{Re}(Q_n(x + iT)) = \operatorname{Re}(Q_n(x)) + (\operatorname{Re}(Q_n(x + iT)) - \operatorname{Re}(Q_n(x))) \geq A - \varepsilon > B > 0,$$

concluyendo que

$$\operatorname{Re} Q_n(z) > B, \quad (11.19)$$

para cualquier  $z = x + iT$  del lado  $R_{n,T_1,T_2,3}$ .

En consecuencia, la variación del argumento en el lado  $R_{n,T_1,T_2,3}$  verifica (11.14), sujeto a que  $T_2$  sea elegido de cualquier intervalo  $I_p$ .

Por otra parte, en el caso de que  $a_i \in \mathbb{R} \forall i : 1 \leq i \leq n$ , se tiene que

$$\operatorname{Im} Q_n(z) = \operatorname{Im}(Q_n(x + iy)) = a_1 e^{x\lambda_1} \operatorname{sen}(y\lambda_1) + \dots + a_n e^{x\lambda_n} \operatorname{sen}(y\lambda_n),$$

y la condición (11.18) también implica que  $|\operatorname{Im} Q_n(z)|$  es arbitrariamente pequeño en  $R_{n,T_1,T_2,3}$  y, de (11.19), la variación del argumento en el lado  $R_{n,T_1,T_2,3}$  verifica

$$|\Theta_{n,T_1,T_2,3}| < \eta, \quad (11.20)$$

para  $\eta > 0$  arbitrariamente pequeño, sujeto a que  $T_2$  sea elegido de cualquier intervalo  $I_p$ .

Finalmente de (11.11), (11.12) y (11.13), (11.14) concluimos que la variación total del argumento sobre el rectángulo  $R_{n,T_1,T_2}$  en el caso general satisface

$$\Theta_{n,T_1,T_2} = (T_2 - T_1)(\lambda^{(n)} - \lambda^{(1)}) + \Psi_n, \quad \text{con } |\Psi_n| < 4\pi,$$

mientras que cuando  $a_i \in \mathbb{R} \forall i : 1 \leq i \leq n$  sustituyendo (11.14) por (11.20) se tiene que

$$\Theta_{n,T_1,T_2} = (T_2 - T_1)(\lambda^{(n)} - \lambda^{(1)}) + \Psi_n, \quad \text{con } |\Psi_n| < 3\pi,$$

y, consecuentemente, el número de ceros de  $Q_n(z)$ , situados en el interior de  $R_{n,T_1,T_2}$ , verifica la fórmula (11.10).  $\square$

La trascendencia de este resultado se traspassa naturalmente a los polinomios exponenciales teniendo en cuenta la relación directa entre los ceros de  $Q_n(z)$  y  $P_n(z)$ .

Considerando el rectángulo  $\hat{R}_{n,T_1,T_2}$  definido por las líneas  $y = r_n$ ,  $y = s_n$  y  $x = T_1$ ,  $x = T_2$ , con  $T_2 > T_1$ , bajo las mismas hipótesis planteadas, el número de ceros de  $P_n(z)$  en el interior de  $\hat{R}_{n,T_1,T_2}$  verifica la fórmula (11.10).

Además, en el caso que  $a_i \in \mathbb{R} \forall i : 1 \leq i \leq n$ , entonces se verifica que

$$P_n(z) = \overline{P_n(-\bar{z})},$$

por tanto, el número de ceros en  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$  coincide con el número de ceros en  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$  y la fórmula (11.10) es válida consecuentemente para ambos semiplanos.

## 11.2. Funciones casi periódicas

El siguiente paso en nuestro proceso es extender la fórmula obtenida de los ceros para el caso de las funciones enteras casi periódicas definidas en  $\mathbb{C}$ .

Utilizaremos en este sentido, como veremos más adelante, el resultado que hace referencia a que la clase de funciones casi periódicas es la clausura uniforme de la clase de los polinomios exponenciales. Para ello, en primer lugar, tendremos en cuenta que a partir de la definición de casi periodicidad en una banda  $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$  directamente se deduce la propiedad de acotación en  $\alpha_1 \leq \operatorname{Im} z \leq \beta_1$  para cualquier  $\alpha_1, \beta_1$  con  $\alpha < \alpha_1$  y  $\beta_1 < \beta$ , ([5], p.102). Además expondremos la relación existente entre los coeficientes de Fourier y los coeficientes del espectro cuando trabajamos con funciones complejas:

**Teorema 11.12** *Sea  $f(z)$  una función analítica casi periódica en la banda  $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ . La serie de Fourier de la función  $f(x + iy)$ , considerada como función de  $x$  es*

$$f(x + iy) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k y} e^{i\lambda_k x}, \quad (11.21)$$

donde  $A_k$  y  $\lambda_k$  son independientes de  $x$  e  $y$ .

**Prueba.** Fijado  $y \in (\alpha, \beta)$ , probaremos que los valores reales de  $\lambda$  para los cuales

$$M(f(x + iy)e^{-i\lambda x}) \neq 0$$

son independientes de  $y$ . Sean  $y_1 < y_2$ , con  $y_1, y_2 \in (\alpha, \beta)$ , aplicando el teorema de Cauchy a la función  $f(z)e^{-i\lambda z}$  en el rectángulo  $y_1 \leq y \leq y_2$ ,  $-T \leq x \leq T$  se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{-T+iy_1}^{-T+iy_2} f(z)e^{-i\lambda z} dz + \int_{-T+iy_2}^{T+iy_2} f(z)e^{-i\lambda z} dz + \int_{T+iy_2}^{T+iy_1} f(z)e^{-i\lambda z} dz + \\ & + \int_{T+iy_1}^{-T+iy_1} f(z)e^{-i\lambda z} dz = 0. \end{aligned}$$

Dividiendo ahora ambos lados por  $2T$  y haciendo  $T \rightarrow \infty$  vemos que la primera y tercera integral tienden a 0 (utilizamos que  $f(z)$  es acotada en cualquier banda cerrada contenida en la banda del dominio de la función). Por tanto, podemos afirmar que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+iy_2}^{T+iy_2} f(z)e^{-i\lambda z} dz = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+iy_1}^{T+iy_1} f(z)e^{-i\lambda z} dz,$$

o equivalentemente

$$e^{\lambda y_2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+iy_2)e^{-i\lambda x} dx = e^{\lambda y_1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+iy_1)e^{-i\lambda x} dx.$$

Además, esta última igualdad puede ser escrita de la siguiente manera teniendo en cuenta la definición de media de una función casi periódica:

$$e^{\lambda y_2} M(f(x+iy_2)e^{-i\lambda x}) = e^{\lambda y_1} M(f(x+iy_1)e^{-i\lambda x}). \quad (11.22)$$

Por tanto, los valores  $\lambda$  para los cuales  $M(f(x+iy)e^{-i\lambda x}) \neq 0$  son independientes de  $y$ .

Denotando por  $a_k(y) = M(f(x+iy)e^{-i\lambda_k x})$ , a partir de (11.22) podemos afirmar que  $a_k(y)e^{\lambda_k y} = A_k(\text{cte})$ . Por tanto,

$$a_k(y) = A_k e^{-\lambda_k y},$$

y el teorema queda probado.  $\square$

Observemos que (11.21) puede también ser expresado de la siguiente manera:

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k z},$$

obteniendo la expresión equivalente en el caso complejo a la llamada serie de Fourier en el caso real (ver (10.1)).

Ahora estamos en condiciones de poder formular el siguiente resultado que aparece en [8]:

**Teorema 11.13** *Sea  $f(z)$  una función analítica casi periódica en la banda  $\alpha < \text{Im } z < \beta$  con espectro  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots\}$  y con serie asociada  $f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k z}$ , entonces la sucesión de polinomios exponenciales*

$$P_m(z) = \sum_{k=1}^n r_{k,m} A_k e^{i\lambda_k z}, \quad n = n(m), r_{k,m} \in \mathbb{Q},$$

*converge uniformemente en  $\alpha_1 \leq \text{Im } z \leq \beta_1$ , con  $\alpha < \alpha_1$  y  $\beta_1 < \beta$ .*

Además, a lo largo de todo el desarrollo posterior asumiremos que  $f(z)$  es una función entera de tipo exponencial, y por tanto podremos usar el siguiente resultado [14]:

**Teorema 11.14** *Para que una función casi periódica  $f(z)$  sea una función entera de tipo exponencial es necesario y suficiente que su espectro sea acotado.*

Por otra parte, supondremos también que todos los ceros están localizados en una banda paralela al eje real, condición que es equivalente por el teorema de Bohr (10.17) a que las cotas superior e inferior del espectro pertenezcan a él.

Finalmente, antes de considerar la extensión del teorema principal concerniente al número de ceros en un determinado rectángulo, probaremos que las funciones casi periódicas enteras de tipo exponencial cumplen la condición (C):

**Teorema 11.15** *Las funciones casi periódicas enteras de tipo exponencial verifican la condición (C)*

**Prueba.** Sea  $f(z)$  una función entera casi periódica de tipo exponencial. Utilizaremos el lema 10.6, por tanto, cumpliendo  $f(z)$  la propiedad de acotación comentada anteriormente, en particular  $|f(x)| \leq K$ ,  $-\infty < x < \infty$ , para alguna constante  $K$ , y cumpliendo además que para cualquier  $R > 1$  se tiene que

$$\int_1^R x^{-2} \log |f(x)f(-x)| dx \leq 2 \log K \int_1^R x^{-2} dx < \infty,$$

entonces  $f(z)$  cumple la condición (C).  $\square$

Dada  $f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k z}$ , con espectro asociado  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots\}$ , observemos también que, siendo

$$Q_m(z) = \sum_{k=1}^n r_{k,m} A_k e^{\lambda_k z}, \quad n = n(m), r_{k,m} \in \mathbb{Q},$$

entonces para  $z$  real y  $m \rightarrow \infty$  suficientemente grande se tiene que

$$\frac{Q_m(z)}{r_m^{\max} A^{\max} e^{\lambda^{\max} z}} = r_{1,m} A_1 e^{(\lambda_1 - \lambda^{\max})z} + \dots + 1 + \dots + r_{n,m} A_n e^{i(\lambda_n - \lambda^{\max})z} \quad \text{si } z \rightarrow \infty \rightarrow 1,$$

$$\frac{Q_m(z)}{r_m^{\min} A^{\min} e^{i\lambda^{\min} z}} = r_{1,m} A_1 e^{(\lambda_1 - \lambda^{\min})z} + \dots + 1 + \dots + r_{n,m} A_n e^{(\lambda_n - \lambda^{\min})z} \quad \text{si } z \rightarrow -\infty \rightarrow 1,$$

siendo  $\lambda^{\max} = \max\{\lambda_i : i = 1, 2, \dots\}$ ,  $\lambda^{\min} = \min\{\lambda_i : i = 1, 2, \dots\}$  y  $r_m^{\max} A^{\max}$ ,  $r_m^{\min} A^{\min}$  sus coeficientes asociados respectivamente en la expresión de  $P_m(z)$ .

Por tanto, podemos determinar, cuando  $m \rightarrow \infty$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$  con  $r < s$  tales que

$$\left| \frac{Q_m(z)}{r_m^{\min} A^{\min} e^{\lambda^{\min} z}} - 1 \right| < 1, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } \operatorname{Re} z \leq r \quad (11.23)$$

y

$$\left| \frac{Q_m(z)}{r_m^{\max} A^{\max} e^{\lambda^{\max} z}} - 1 \right| < 1, \text{ para todo } z \text{ tal que } \operatorname{Re} z \geq s, \quad (11.24)$$

concluyendo por tanto por el teorema de convergencia uniforme (11.13) que todos los ceros de  $f(-iz)$  están localizados en la banda vertical limitada por las líneas

$$\operatorname{Re} z = r, \quad \operatorname{Re} z = s.$$

Supondremos además que la parte real de  $f(-iz)$  no se anula en  $y = T_1$ , para algún  $T_1 > 0$ , en concreto supondremos que existe  $A > 0$  ( $A < 0$ ) tal que  $\operatorname{Re} f(-iz) > A$  ( $\operatorname{Re} f(-iz) < A$ ) para  $z = x + iT_1$ ,  $r \leq x \leq s$ . Consideraremos el rectángulo  $R_{T_1, T_2}$  definido por las líneas  $x = r$ ,  $x = s$  y  $y = T_1$ ,  $y = T_2$ , con  $T_2 > T_1$ . Asumiremos, sin pérdida de generalidad, que  $f(-iz)$  no posee ceros en  $y = T_2$ , entonces bajo las hipótesis realizadas y a partir de (11.23) y (11.24), podemos asegurar que no hay ceros en  $R_{T_1, T_2}$ . Por tanto, estamos en condiciones de estudiar la variación del argumento de  $f(-iz)$  en  $R_{T_1, T_2}$ , que denotaremos por  $\Theta_{T_1, T_2}$  y comenzaremos desde el punto  $(r, T_1)$ .

**Teorema 11.16** *Sea  $f(z)$  una función casi periódica de tipo exponencial con espectro asociado  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots\}$ , bajo las consideraciones previas existe un número real positivo  $l$  tal que cada intervalo  $(pl, (p+1)l)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , con  $pl \geq T_1$ , contiene un intervalo  $I_p$  tal que para cada  $T_2 \in I_p$  con  $T_2 - T_1 \geq \frac{2\pi}{\lambda^{\max} - \lambda^{\min}}$ , el número de ceros de  $g(z) := f(-iz)$  en el interior del rectángulo  $R_{T_1, T_2}$  viene dado por la fórmula*

$$N(T_1, T_2) = \left[ \frac{(\lambda^{\max} - \lambda^{\min})(T_2 - T_1)}{2\pi} + \Omega \right], \text{ con } |\Omega| < 2, \quad (11.25)$$

siendo  $\lambda^{\max} = \max\{\lambda_i : i = 1, 2, \dots\}$ ,  $\lambda^{\min} = \min\{\lambda_i : i = 1, 2, \dots\}$ .

**Prueba.** Consideremos  $f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k z}$ . Bajo las hipótesis previas, todos los ceros de  $g(z)$  están localizados en una banda paralela al eje imaginario.

Utilizaremos el Principio del Argumento aplicado al camino cerrado  $R_{T_1, T_2}$  y nos basaremos en el comportamiento ya probado para las funciones  $Q_n(z)$ . Por tanto, analizaremos la variación del argumento en los distintos segmentos  $R_{T_1, T_2, 1}$ ,  $R_{T_1, T_2, 2}$ ,  $R_{T_1, T_2, 3}$  y  $R_{T_1, T_2, 4}$  que componen  $R_{T_1, T_2}$  (denotaremos por  $\Theta_{T_1, T_2, i}$  a la variación del argumento en  $R_{T_1, T_2, i}$ ).

Sobre el lado determinado por los puntos  $(r, T_1)$  y  $(s, T_1)$ , denotado por  $R_{T_1, T_2, 1}$ , como por hipótesis la parte real no se anula, la variación del argumento satisface

$$\Theta_{T_1, T_2, 1} = \Phi_1, \text{ con } |\Phi_1| < \pi. \quad (11.26)$$

Siendo  $Q_m(z) = \sum_{k=1}^n r_{k,m} A_k e^{\lambda_k z}$ ,  $n = n(m)$ ,  $r_{k,m} \in \mathbb{Q}$ , la variación  $\Theta_{T_1, T_2, 2}$  en el lado determinado por los puntos  $(s, T_1)$  y  $(s, T_2)$ , denotado por  $R_{T_1, T_2, 2}$ , puede ser estimada teniendo en cuenta que

$$Q_m(z) = r_m^{\max} A^{\max} e^{\lambda^{\max} z} \frac{Q_m(z)}{r_m^{\max} A^{\max} e^{\lambda^{\max} z}} = r_m^{\max} A^{\max} e^{x\lambda^{\max}} e^{iy\lambda^{\max}} \frac{Q_m(z)}{r_m^{\max} A^{\max} e^{\lambda^{\max} z}},$$

con  $T_1 \leq \text{Im } z = y \leq T_2$ . Aplicando (11.24), cuando  $m \rightarrow \infty$ , existe entonces algún  $\Phi_2$ , que no depende de  $T_2$ , tal que

$$\Theta_{T_1, T_2, 2} = (T_2 - T_1)\lambda^{\max} + \Phi_2, \text{ con } |\Phi_2| < \pi. \quad (11.27)$$

Del mismo modo, sobre el lado determinado por los puntos  $(r, T_2)$  y  $(r, T_1)$ , denotado por  $R_{T_1, T_2, 4}$ , directamente se sigue de (11.23) que la variación del argumento  $\Theta_{T_1, T_2, 4}$  satisface

$$\Theta_{T_1, T_2, 4} = (T_1 - T_2)\lambda^{\min} + \Phi_4, \text{ con } |\Phi_4| < \pi. \quad (11.28)$$

Finalmente analizaremos el lado determinado por los puntos  $(s, T_2)$  y  $(r, T_2)$ , denotado por  $R_{T_1, T_2, 3}$ . Afirmamos que en el caso general la variación del argumento  $\Theta_{T_1, T_2, 3}$  satisface

$$|\Theta_{T_1, T_2, 3}| < \pi. \quad (11.29)$$

En efecto, siendo  $z = x + iy$ , teniendo en cuenta que para  $m$  fijo

$$\begin{aligned} \text{Re}(Q_m(z)) &= r_{1,m} \text{Re}(A_1) e^{x\lambda_1} \cos(y\lambda_1) + \dots + r_{n,m} \text{Re}(A_n) e^{x\lambda_n} \cos(y\lambda_n) - \\ &\quad - r_{1,m} \text{Im}(A_1) e^{x\lambda_1} \text{sen}(y\lambda_1) - \dots - r_{n,m} \text{Im}(A_n) e^{x\lambda_n} \text{sen}(y\lambda_n), \end{aligned}$$

entonces, como ya hicimos anteriormente, podemos convertir  $\text{Re}(Q_m(z))$  en un polinomio función de

$$e^{x\mu_j}, \cos(y\mu_j), \text{sen}(y\mu_j), \text{ para } j = 1, 2, \dots, k_m,$$

donde  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k_m}\}$  es la base finita asociada a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (asociados a cada  $Q_m(z)$ ) y repetir los pasos realizados en aquella ocasión. Por tanto, por continuidad, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $x \in [r, s]$

$$|\text{Re}(Q_m(x + iy)) - \text{Re}(Q_m(x))| < \varepsilon, \quad (11.30)$$

siempre que

$$|\cos(y\mu_j) - 1| < \delta, \quad |\text{sen}(y\mu_j)| < \delta$$

para todo  $j = 1, 2, \dots, k_m$ .

Por otra parte, teniendo en cuenta el supuesto previo acerca de  $T_1$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe una constante positiva  $A$  tal que para  $m$  suficientemente grande

$$\text{Re}(Q_m(x + iT_1)) \geq A > 0, \quad (11.31)$$

para cualquier  $x$  del segmento  $[r, s] \subset \mathbb{R}$ . Sea ahora  $B > 0$  tal que  $B < A$ , podemos ahora determinar  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon < A - B$  y lo suficientemente pequeño tal que los números  $\{\varepsilon_j : j = 1, 2, \dots, k_m\}$ , que después precisaremos, con  $|\varepsilon_j| \leq \varepsilon$  cumplan

$$|\cos(\varepsilon_j \mu_j) - 1| < \delta, \quad |\operatorname{sen}(\varepsilon_j \mu_j)| < \delta. \quad (11.32)$$

Teniendo en cuenta el teorema de Kronecker-Bohl (teorema 10.26), tomando  $\hat{a}_j = \frac{2\pi}{\mu_j}$ ,  $\hat{b}_j = 0$ , con  $j = 1, 2, \dots, k_m$ , y  $\varepsilon$  verificando (11.30), existe  $l > 0$  tal que cualquier intervalo de la forma  $(pl, (p+1)l)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , contiene un intervalo  $I_p$  de longitud  $\varepsilon$  que contiene al menos un punto de cada conjunto  $A_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k_m$ , definido por

$$A_j \equiv \left\{ \frac{2\pi q}{\mu_j} : q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Por tanto, para  $T_2 > 0$  perteneciente a cualquier intervalo  $I_p$ ,  $lp > T_1$  (para que  $T_2 > T_1$ ), existen  $q_j \in \mathbb{Z}$  tales que para

$$\varepsilon_j = T_2 - \frac{2\pi q_j}{\mu_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k_m$$

se verifica  $|\varepsilon_j| \leq \varepsilon$ . Ahora, teniendo en cuenta (11.32), se tiene que

$$|\cos(T_2 \mu_j) - 1| < \delta, \quad |\operatorname{sen}(\varepsilon_j \mu_j)| < \delta \quad (11.33)$$

para todo  $j = 1, 2, \dots, k_m$  ya que

$$\begin{aligned} \cos(\varepsilon_j \mu_j) &= \cos\left(\left(T_2 - \frac{2\pi q_j}{\mu_j}\right) \mu_j\right) = \cos(T_2 \mu_j - 2\pi q_j) = \\ &= \cos(T_2 \mu_j), \quad j = 1, 2, \dots, k_m. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando en consideración (11.30) y (11.31), de (11.33) se deduce que

$$\operatorname{Re}(Q_m(x + iT)) = \operatorname{Re}(Q_m(x)) + (\operatorname{Re}(Q_m(x + iT)) - \operatorname{Re}(Q_m(x))) \geq A - \varepsilon > B > 0,$$

concluyendo que

$$\operatorname{Re} Q_m(z) > B, \quad (11.34)$$

para cualquier  $z = x + iT$  del lado  $R_{T_1, T_2, 3}$ .

En consecuencia, cuando  $m \rightarrow \infty$ , teniendo en cuenta el teorema de convergencia, la variación del argumento de  $g(z)$  en el lado  $R_{T_1, T_2, 3}$  verifica (11.29), sujeto a que  $T_2$  sea elegido de cualquier intervalo  $I_p$ .

Finalmente de (11.26), (11.27) y (11.28), (11.29) concluimos que la variación total del argumento sobre el rectángulo  $R_{T_1, T_2}$  satisface

$$\Theta_{T_1, T_2} = (T_2 - T_1)(\lambda^{\max} - \lambda^{\min}) + \Psi, \quad \text{con } |\Psi| < 4\pi,$$

y, consecuentemente, el número de ceros de  $g(z)$ , situados en el interior de  $R_{T_1, T_2}$ , verifica la fórmula (11.25).  $\square$

La trascendencia de este resultado se traspasa naturalmente a la función casi periódica  $f(z)$  teniendo en cuenta la relación directa entre los ceros de  $f(z)$  y  $g(z) := f(-iz)$ . Considerando el rectángulo  $\hat{R}_{T_1, T_2}$  definido por las líneas  $y = r$ ,  $y = s$  y  $x = T_1$ ,  $x = T_2$ , con  $T_2 > T_1$ , bajo las mismas hipótesis planteadas, el número de ceros de  $f(z)$  en el interior de  $\hat{R}_{T_1, T_2}$  verifica la fórmula (11.25).



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# Terminología básica

---

- $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ ;  $\mathbb{Q}^+ = (0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ .
- $J_{m+1}(K)$  contenido de Jordan del conjunto  $K \subset \mathbb{R}^{m+1}$ .
- $\Pi_n = \{x \in \mathbb{Q}, x = 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdots p_n^{m_k}, \text{ con } m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{Z}\}$ , donde  $p_n$  es el máximo primo tal que  $p_n \leq n$ .
- $L(\gamma)$  longitud de la curva  $\gamma$ .
- $\varphi(x)$  se dice que es una “o pequeña” de orden  $n$  cuando  $x$  tiende hacia  $a$  y se denota por  $\varphi(x) = o(x - a)^n$  si verifica  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{(x - a)^n} = 0$ .
- $\varphi(x)$  se dice que es una “O grande” de orden  $n$  cuando  $x$  tiende hacia  $a$  y se denota por  $\varphi(x) = O(x - a)^n$  si la expresión  $\frac{\varphi(x)}{(x - a)^n}$  está acotada en un entorno de  $a$ .
- $[m]_p$  clase de congruencia módulo  $p$  del entero  $m$ .
- $\mathbb{Z}_n$  anillo de clases de congruencia módulo  $n$
- $\rho$  orden de una función entera  $f(z)$ ,

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}.$$

- $M_f(r) = \max \{|f(z)| : |z| = r\}$ ,  $r > 0$ .
- $|F|_K = \sup\{|F(x)| : x \in K\}$ .
- $B_n(z)$  transformada de Borel de una función entera.
- $h_f(\theta)$  la función indicador de  $f(z)$ .
- $\log^+ t = \begin{cases} \ln t & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1. \end{cases}$

- $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ ,  $u := (u_1, \dots, u_n)$ ;  $v := (v_1, \dots, v_n)$ .
- $\mathcal{C}(\mathcal{U})$  espacio de las funciones continuas sobre el abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ .
- $\mathcal{C}^1(\mathcal{U})$  espacio de todas las funciones derivables con derivada continua definidas sobre el abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ .
- $\mathcal{A}(\mathcal{U})$  espacio de las funciones analíticas en el abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ .
- $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ;  $\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ .
- $Z_f$  conjunto de los ceros de  $f$ .
- $f^{(k)}(z)$  derivada  $k$ -ésima de  $f(z)$ .
- $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$  función zeta de Riemann.
- $z_k = r_k e^{i\theta_k}$  los ceros ordenados por orden creciente de módulo.
- $n_f(r)$  el número de ceros en  $|z| \leq r$  (contando multiplicidad) de una función dada  $f(z)$ .

# Bibliografía

---

- [1] Aczél, J. and Dhombres, J.: *Functional equations in several variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [2] Ahlfors, L.: *Complex Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1966.
- [3] Ash, Robert B.: *Complex Variables*, Academic Press, INC., New York, 1971.
- [4] Boas, R.P.: *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.
- [5] Bohr, H.: *Almost periodic functions*, Chelsea Publishing Company, New York, 1947.
- [6] Castillo, E., Iglesias, A. and Ruíz-Cobo, R.: *Functional Equations in Applied Sciences*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 199, Elsevier, 2005.
- [7] Cherruault, Y. and Mora, G.: *Optimisation Globale. Théorie des Courbes Alpha-Denses*, Economica, Paris, 2005.
- [8] Corduneanu, C.: *Almost periodic functions*, Interscience Publishers, New York, 1961.
- [9] Dunford, N. and Schwartz, J.T.: *Linear Operators*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
- [10] Evgrafov, M. A.: *Asymptotic Estimates and Entire Functions*, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York.
- [11] Hardy, G. H. and Wright E.M.: *An introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Sci. Publ., Oxford, 1979.
- [12] Jessen, B. and Tornehave, H.: Mean Motions and Zeros of Almost Periodic Function, *Acta Mathematica*, Vol. 77 (1945), 137–279.
- [13] Levin, B. Ya.: *Distribution of zeros of entire functions*, American Mathematical Society, Vol.5, First edition, Providence, 1972.
- [14] Levin, B. Ya.: *Lectures on entire functions*, American Mathematical Society, Vol.150, Providence, 1991.

- [15] Maergoiz, L. S.: *Asymptotic Characteristics of Entire Functions and their Applications in Mathematics and Biophysics*, Kluwer Academic Publishers, Second Edition.
- [16] Markushevich, A.: *Teoria de las funciones analíticas*, Editorial Mir, Tomo II.
- [17] Mora, G.; Mira, J.A. : Alpha-dense Curves in Infinite Dimensional Spaces, *International Journal of Pure and Applied* Vol. 5 (2003), 437–449.
- [18] Mora, G., Cherruault, Y. and Ziadi, A.: Functional equations generating space-densifying curves, *Computers and Mathematics with Applications* Vol. 39 (2000), 45–55.
- [19] Mora, G.: A note on the functional equation  $F(z) + F(2z) + \dots + F(nz) = 0$ , *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 340 (2008), 466–475.
- [20] Mora, G. and Sepulcre, J.M.: On the distribution of zeros of a sequence of entire functions approaching the Riemann zeta function, *Preprint* (2008)
- [21] Mora, G. and Sepulcre, J.M.: The non-continuous solutions of the functional equation  $f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$ , *Preprint* (2008)
- [22] Mora, G. and Sepulcre, J.M.: On the distribution of zeros of entire exponential type almost-periodic functions, *Preprint* (2008)
- [23] Ronkin, L.I.: *Functions of completely regular growth*, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [24] Rudin, W.: *Análisis real y complejo*, Mc Graw-Hill, New York, 1966.
- [25] Sagan, Hans: *Space-Filling Curves*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [26] Sepulcre, J.M.: *Aplicaciones de la variable compleja a la resolución de ecuaciones funcionales. Densificación*, Universidad de Alicante, julio 2006. (Tesisna)
- [27] Titchmarsh, E.C.: *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford, 1951.