

**“III Taller Iberoamericano sobre  
Educación en Ciencia de  
Materiales”**

**TIECIM'02**

**MEMORIAS**

**“II Concurso Iberoamericano de  
Prácticas de Laboratorio sobre  
Educación en Ciencia de Materiales**

**Editado por: M. Hernández Vélez, O. Sánchez Garrido y J. M. Martínez  
Duart**

**Facultad de Ciencias. Universidad Autónoma  
de Madrid**

**3 al 5 de Julio de 2002**

**Editores:** M. Hernández Vélez  
O. Sánchez Garrido  
J. M. Martínez Duart

**ISBN:** 84 – 688 – 4590 – 6; No. Registro: 8454103

**Fecha:** 20/12/03

**e.mail:** manuel.hernandez@uam.es  
olgas@icmm.csic.es

**Fondo de la Portada:** Imagen AFM realizada por C. Gómez de la UAM y J. A. Martín-Gago del ICMM sobre Membrana Nanoporosa de Alúmina obtenida en el Laboratorio de Anodización del ICMM-CSIC por K. R. Pirota, D. Navas y M. Hernández Vélez.

## ELASTICIDAD POR FLEXIÓN: UNA EXPERIENCIA DE LABORATORIO ADAPTABLE A LOS DISTINTOS NIVELES EDUCATIVOS

T. Beléndez<sup>1</sup>, C. Neipp<sup>2</sup> y A. Beléndez<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ciencia y Tecnología de los Materiales.  
Universidad Miguel Hernández de Elche. Avda. del Ferrocarril, s/n.  
E-03202 Elche (Alicante). España. [t.belendez@umh.es](mailto:t.belendez@umh.es)

<sup>2</sup>Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal.  
Universidad de Alicante. Apartado 99. E-03080 Alicante. España

### Resumen

El estudio de distintos aspectos del comportamiento mecánico de los materiales se lleva a cabo en asignaturas como Física, Mecánica, Ciencia de los Materiales o Resistencia de Materiales en distintos niveles educativos, tanto en el bachillerato como en la universidad. En este trabajo se presenta una experiencia de laboratorio que puede llevarse a cabo utilizando un material muy simple y de bajo coste, que permite estudiar -mediante medidas muy sencillas, básicamente longitudes y masas- la flexión de una barra empotrada en un extremo sometida a una carga distribuida (su propio peso) y a una carga puntual vertical aplicada en el extremo libre. El comportamiento de la barra frente a la flexión depende de sus propiedades geométricas y del módulo de Young del material. Lo importante de esta experiencia es que, aún siendo la misma en todos los niveles educativos, es posible aumentar su grado de complejidad dependiendo del nivel de que se trate.

### 1. Introducción

La materia en su estado sólido no es rígida sino que al someterla a un esfuerzo sufre una deformación que puede llegar incluso, si el esfuerzo es considerable, a la destrucción del sistema. En los cursos de Física, Mecánica y Resistencia de Materiales [1-4] se estudian los sólidos deformables, así como los fenómenos de tracción, compresión, cizalladura, torsión, flexión y pandeo. En el caso de la flexión uno de los ejemplos que se analiza es la flexión de una viga empotrada en un extremo sobre la que pueden aplicarse distintos tipos de cargas, tanto concentradas como distribuidas. En este caso, el estudio siempre se suele hacer para pequeñas pendientes de la elástica de la viga (pequeños desplazamientos de su eje longitudinal -que se encuentra en la superficie neutra- respecto a su posición sin deformar [2]). Mediante una aproximación del radio de curvatura se obtiene una ecuación diferencial lineal, conocida como ecuación diferencial aproximada de la elástica, que puede integrarse fácilmente y obtenerse la ecuación de la elástica y el valor de la flecha o desplazamiento vertical del extremo libre. Sin embargo, la aproximación para pequeñas pendientes que se hace en la bibliografía es incompatible con otra hipótesis que siempre se tiene en cuenta y que es fácil de observar experimentalmente: el eje longitudinal no experimenta ningún cambio de longitud cuando la viga se deforma [2]. Por otra parte, cuando las pendientes de la elástica son grandes, la aproximación que se hace para el radio de curvatura no es válida, siendo necesario integrar la ecuación diferencial exacta de la elástica, que ahora es una ecuación diferencial no lineal. Se dice entonces que el problema presenta no linealidad geométrica [5]. En este trabajo se analiza experimentalmente la flexión de una barra delgada en voladizo sometida a su propio peso (carga distribuida) y a una carga concentrada aplicada en el extremo libre. Para el

mismo dispositivo experimental se comprueba que, dependiendo de las condiciones de las cargas aplicadas, al problema de la flexión debe abordarse matemáticamente de distintas formas, bien mediante la aproximación lineal para pequeñas pendientes que aparece en la bibliografía, bien mediante una aproximación para pequeñas pendientes de la barra “menos aproximada de lo común” haciendo uso de la hipótesis de la constancia de la longitud de la fibra neutra de la barra, o bien mediante el análisis no lineal resolviendo la ecuación diferencial exacta de la elástica utilizando, en este caso, el método de los elementos finitos mediante el programa ANSYS.

Lo importante de la experiencia es que, aún siendo la misma en todos los niveles educativos, se puede aumentar su grado de complejidad dependiendo del nivel considerado:

(a) En bachillerato [4] y en el primer curso universitario [1] se puede estudiar la flecha en función de la fuerza aplicada para pequeñas pendientes de la elástica, lo que permite a los estudiantes comprobar que existe una relación de proporcionalidad entre ambas y obtener el módulo de Young del material.

(b) En el primer ciclo de las titulaciones universitarias científicas y técnicas es posible, y también en el caso de pequeños desplazamientos, realizar la experiencia anterior así como plantear matemáticamente el problema, encontrar la ecuación de la elástica y obtenerla experimentalmente así como el módulo de Young del material [6, 7]. También, y dentro de la aproximación lineal, es posible analizar el problema imponiendo la condición de la constancia de la longitud de la fibra neutra.

(c) En el segundo ciclo universitario se puede además abordar el problema de la no linealidad geométrica, al considerar grandes desplazamientos de la barra [7, 8]. El planteamiento del problema da lugar a una ecuación diferencial con términos no lineales que puede resolverse, por ejemplo, mediante el método de los elementos finitos con el programa ANSYS, y comparar los resultados teóricos y experimentales.

## 2. Ecuación momento-curvatura

Consideramos que se cumplen las hipótesis relativas a la forma en que el esfuerzo deforma al material que usualmente se hacen cuando se estudia la deformación por flexión de una viga (ver, por ejemplo, págs. 287 y 288 de la referencia 2). El diagrama de deflexión del eje longitudinal que pasa por el centro de gravedad de las secciones transversales de la viga se llama elástica y la ecuación de Euler-Bernoulli relaciona el momento flector  $M$  y el radio de curvatura  $\rho$  de la curva elástica [1, 2]:

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (1)$$

donde  $E$  es el módulo de Young del material (supuesto elástico lineal),  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje neutro y  $\rho$  es el radio de curvatura. El producto  $EI$  depende del tipo de material empleado y de las características geométricas de la sección de la barra y recibe el nombre de “rigidez” de la viga [3].

El radio de curvatura  $\rho$  de una curva de ecuación  $y = y(x)$  puede calcularse mediante la ecuación [1, 2]:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y / dx^2}{[1 + (dy / dx)^2]^{3/2}} \quad (2)$$

Si el desplazamiento de los puntos de la viga flexionada respecto a los de la viga sin flexionar es pequeño, es decir, en el caso de pendientes pequeñas, es posible despreciar el

término  $(dy/dx)^2$  frente a la unidad en la ecuación (2), lo que permite escribir la ecuación diferencial aproximada de la elástica para una viga de material elástico lineal en la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (3)$$

### 3. Dispositivo experimental

La Figura 1 muestra una fotografía del dispositivo experimental analizado. La barra es una regla de acero de longitud  $L$  cuya sección transversal es rectangular de base  $b$  y altura  $h$ . La regla se ha empotrado con ayuda de una doble nuez de las que se encuentran en todos los laboratorios de Física, la cual se ha sujetado a una varilla vertical situada sobre una base [6].

Con ayuda de dos láminas rectangulares metálicas colocadas una arriba de la regla y la otra debajo se ajusta la regla a la doble nuez. El momento de inercia  $I$  de la sección transversal respecto al eje neutro se calcula mediante la ecuación  $I = bh^3/12$  [1]. Con una balanza se determina la masa de la regla y se calcula su peso total y, a partir de éste, el peso  $P$  para una longitud de la regla de 30 cm. En la Tabla I se indican las características de la barra delgada analizada.

Tabla 1.- Parámetros de la barra.

$L$	$0.3000 \pm 0.0005$ m
$b$	$0.03040 \pm 0.00002$ m
$h$	$0.00078 \pm 0.00001$ m
$I$	$(1.20 \pm 0.05) \times 10^{-12}$ m <sup>4</sup>
$P$	$0.554 \pm 0.008$ N



Fig. 1.- Fotografía del dispositivo experimental (regla de acero en voladizo) analizado.

### 4. Aproximación para pequeñas pendientes

Si la pendiente de la elástica es muy pequeña se puede suponer que la longitud horizontal original del eje de la viga y el arco de su elástica serán aproximadamente iguales. En consecuencia, se supone que los puntos de la elástica se desplazan verticalmente y no horizontalmente. La Figura 2 muestra la situación de una viga en voladizo sometida a una carga uniformemente distribuida y a una carga puntual aplicada en el extremo libre, considerando que no hay desplazamiento horizontal de los puntos de la elástica. El momento flector  $M$  respecto a la sección situada a una distancia  $x$  de la posición del empotramiento viene dado por la ecuación:

$$M(x) = F(L-x) + \frac{P}{2L}(L-x)^2 \quad (4)$$

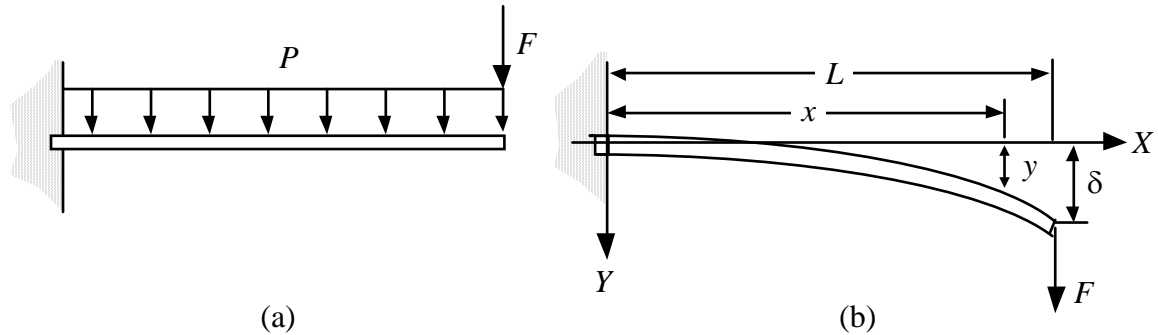


Fig. 2.- Flexión de una viga en voladizo para pequeñas pendientes (caso  $\delta_x = 0$  y  $\delta_y = \delta$ ). (a) Fuerzas que actúan sobre la viga. (b) Elástica de la viga y definición de la flecha  $\delta$ .

Sustituyendo en la ecuación (3) e integrando teniendo en cuenta las condiciones de contorno  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$ , se puede obtener fácilmente la ecuación cartesiana de la elástica y el valor de la flecha que es:

$$\delta_y = \delta_y(F) + \delta_y(P) = \frac{L^3}{24EI} (8F + 3P) \tag{5}$$

que tiene una parte debida a la fuerza aplicada ( $\delta_y(F) = FL^3/3EI$ ) y otra debida al peso propio de la barra ( $\delta_y(P) = PL^3/8EI$ ).

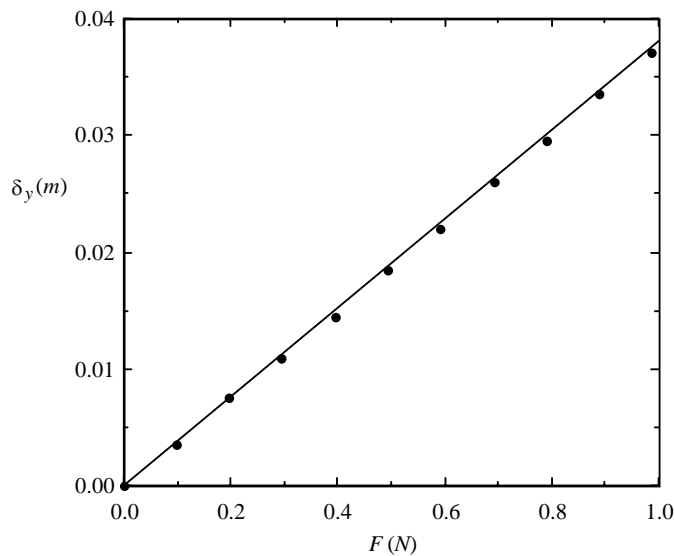


Fig. 3.-  $\delta_y(F)$  frente a  $F$  para pequeñas pendientes con  $\delta_x = 0$ . La recta es el ajuste por mínimos cuadrados de la ecuación lineal  $\delta_y(F) = FL^3/3EI$ .

La Figura 3 muestra los resultados experimentales obtenidos de la parte de la flecha  $\delta_y(F)$  en función de  $F$ , para el caso de pequeñas pendiente, y el ajuste por mínimos cuadrados de la recta  $\delta_y(F) = FL^3/3EI$ . Del ajuste se obtiene para la rigidez el valor  $EI = 0.238 \pm 0.009 \text{ Nm}^2$  [6].

Utilizando el valor del momento de inercia  $I$  (Tabla 1) obtenemos:

$$E = 198 \pm 15 \text{ GPa}$$

para el módulo de Young del acero del que está fabricada la regla, que concuerda con el módulo de Young del acero que podemos encontrar en la bibliografía (200 GPa [2]).

**5. Una aproximación para pequeñas pendientes “menos aproximada de lo común”**

La aproximación anterior para pequeñas pendientes es incompatible con la hipótesis de que la longitud del eje longitudinal de la barra no cambia cuando la barra deflexiona. Como la longitud de la barra deformada debe ser  $L$ , su extremo libre sufre tanto un desplazamiento vertical  $\delta_y$  como uno horizontal  $\delta_x$ , como se ve en la Figura 4. La ecuación (3) sigue siendo válida, pero al no cambiar  $L$ , hay que tener en cuenta la ecuación:

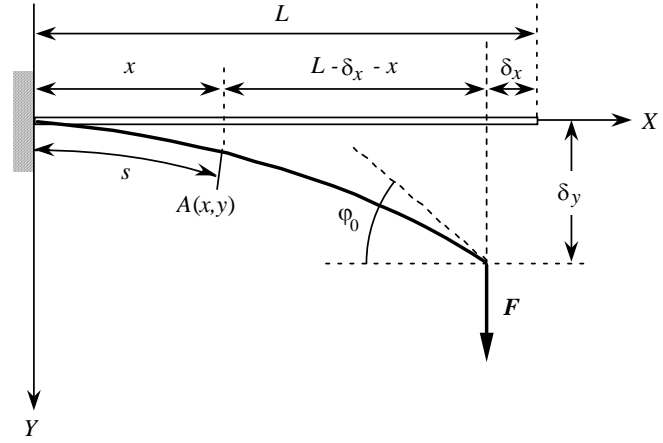


Fig. 4.- Esquema de la viga flexionada.

$$L = \int_0^{L-\delta_x} \sqrt{1 + \left(\frac{F}{2EI}\right)^2 [2(L-\delta_x)x - x^2]^2} dx \tag{6}$$

Si se supone que el peso de la barra  $P$  está distribuido a lo largo de la horizontal [5], la ecuación (4) se escribe ahora:

$$M(x) = F(L - \delta_x - x) + \frac{P}{2(L - \delta_x)} (L - x - \delta_x)^2 \tag{7}$$

El desplazamiento vertical del extremo libre debido a la fuerza concentrada  $F$  toma ahora el valor:

$$\delta_y(F) = \frac{F}{3EI} (L - \delta_x)^3 \tag{8}$$

La ecuación (6) permite calcular el valor del desplazamiento horizontal  $\delta_x$  del extremo libre de la barra cuando se conocen los valores de  $L$ ,  $E$ ,  $I$  y  $F$ . Una vez obtenido el valor de  $\delta_x$  ya es posible determinar el resto de parámetros que caracterizan la barra flexionada, en particular  $\delta_y$  (ecuación (8)) y la ecuación cartesiana de la elástica.

**6. Resolución de la ecuación diferencial exacta**

Cuando las pendientes de la elástica son grandes, y como  $1/\rho = d\phi/ds$ , de la ecuación (1) se puede obtener la ecuación diferencial no lineal de segundo orden:

$$\frac{d^2\phi(s)}{ds^2} = -\frac{1}{EI} [w(L-s) + F] \cos \phi(s) \tag{9}$$

donde  $\varphi$  es el ángulo que forma en cada punto de la elástica la recta tangente con la horizontal y  $w$  es el peso por unidad de longitud de la barra. La ecuación (9) se resuelve mediante el método de los elementos finitos con el programa ANSYS [8]. En la Figura 5 se han representado los resultados experimentales de  $\delta_y$  en función de  $F$  junto con los teóricos calculados para los casos analizados con  $EI = 0.238 \text{ Nm}^2$ . Como puede verse, los resultados calculados con el programa ANSYS coinciden con los experimentales, la aproximación lineal con  $L$  constante proporciona resultados correctos para  $F < 2 \text{ N}$ , y la aproximación lineal con  $\delta_x = 0$  es válida para  $F < 1 \text{ N}$ .

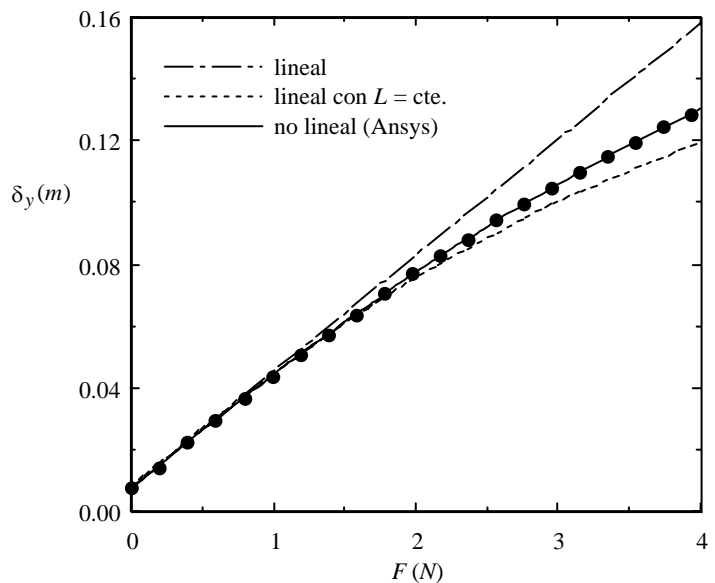


Fig. 7.-  $\delta_y$  frente a  $F$ . Valores experimentales, análisis lineales para pequeñas pendientes (sin  $L$  y con  $L$  constante) y análisis no lineal (ANSYS).

## Referencias

- [1] F. Belmar, A. Garmendía y J. Llinares, *Curso de Física Aplicada: Estática* (Universidad Politécnica de Valencia, 1987)
- [2] R. C. Hibbeler, *Mecánica de Materiales* (Prentice Hall, México, 1998).
- [3] L. Ortiz-Berrocal, *Resistencia de Materiales* (McGraw-Hill, Madrid, 1997).
- [4] J. L. Huertas y S. Val, *Mecánica (2º de Bachillerato)* (McGraw-Hill, Madrid, 1998).
- [5] D. G. Fertis, *Nonlinear Mechanics* (CRC Press, Boca Raton, 1998).
- [6] A. Beléndez, C. Neipp y T. Beléndez, “Estudio experimental de una viga en voladizo”, *Rev. Esp. Fis.* **15** (3) 42 (2001).
- [7] T. Beléndez, “Estudio teórico y experimental de una ménsula: Un ejemplo para la aplicación de conceptos de Mecánica y Resistencia de Materiales”, *Actas IX Congreso de Innovación Educativa en la Enseñanzas Técnicas*, Vol. II, 1875-1888 (2001).
- [8] T. Beléndez y A. Beléndez, “No linealidad geométrica en Mecánica de Sólidos: Una experiencia de laboratorio”, *Actas XVIII Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física y 11º Encuentro Ibérico para la Enseñanza de la Física*, Vol. II, 412-413 (2001).