anales de la universidad de alicante. facultad de ciencias económicas y empresariales

REVISTA DE ECONOMIA

DUARTE CARBALLO, Agustín
HERRERO BLANCO, Carmen
VILLAR NOTARIO, Antonio
JIMENEZ RANEDA, Ignacio
PEDREÑO MUÑOZ, Andrés
PUIG ANDREU, José Vicente
RUIZ BRAVO de MANSILLA, Gumersindo
VILLAMIL, Armando

ECONOMIA REGIONAL
Y DEL PAIS VALENCIANO

GISBERT GARCIA, Juan Antonio
MARTINEZ ESTEVEZ, Aurelio
SANCHEZ AYUSO, M.
SEVILLA JIMENEZ, Martín
SUCH PEREZ, Diego
YBARRA PEREZ, Josep Antoni

SOCIOLOGIA E HISTORIA

CONEJERO MARTINEZ, Vicente
GALTUNG, Johan
OLTRA, Benjamín
TORTOSA BLASCO, José M.ª

N.º 1 • 1982

ANALES DE LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

Nº 1 1982

ANALES DE LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

SECRETARIADO DE PUBLICACIONES DE LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Dep. Legal A-898 - 1.982
Imprés per Cooperativa Gráfica Punt i Ratlla • 454641 • Elx.—

INDICE

Anales de la Universidad de Alicante
Facultad de Ciencias Económicas y Emoresariales, nº 1, 1982

ANALISIS DE LA ESTABILIDAD DINAMICA EN UNA ECONOMIA CON PRECIOS RIGIDOS

CARMEN HERRERO BLANCO

ANTONIO VILLAR NOTARIO

Dptºs. de Matemáticas y de Teoría Económica.

Resultados parciales de este trabajo serán próximamente publicados en Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Málaga, y en Publicaciones de la Sección de Matemáticas de la Universidad de Valladolid.

1.-Este artículo se ocupa del análisis de una economía concebida multisectorialmente, cuya dinámica se caracteriza por prevalecer el ajuste vía cantidades frente al ajuste vía precios. En particular, se elabora un modelo que permite estudiar la dinámica del output en función de ciertas variables que recogen el comportamiento de los agentes económicos en un mundo donde no hay certidumbre.

Las características básicas de la economía que consideramos son las siguientes:

1) Las empresas diseñan su producción en función de sus expectativas de ventas; dichas expectativas son desarrolladas a partir de los datos sobre la magnitud y evolución de las ventas habida en el pasado.

2) Los errores en la previsión se traducen en un volumen de ventas distinto del estimado; la variable que "absorbe" los errores, viene dada por el nivel de stocks de productos terminados.

3) En el corto plazo (que es el ámbito en el que se define el modelo), las variaciones en la demanda son respondidas con variaciones en el output, sin que los precios resulten alterados.

4) Supondremos que la estructura interna de las diferentes industrias se mantiene inalterada en términos relativos, de manera que trataremos a los sectores como empresas, sin entrar en mayores especificaciones.

La especificación del modelo supone explicar los siguientes elementos:

i) Cómo se determina el volumen de producción dadas las expectativas de ventas. Ello implica, además, el ajuste de los stocks al nivel deseado.

ii) Cómo se estiman las ventas del período a partir de la información disponible del pasado. Distinguiremos dos formas de estimación, lo que dará lugar a dos modelos distintos, en cuanto al análisis de la estabilidad.

iii) Cuál es la dinámica de las ventas efectivas, teniendo en cuenta sus componentes endógenos y exógenos con respecto a la producción. En este punto, consideraremos dos variantes; la primera tomando la demanda final de consumo como exógena, y la segunda, endogeneizándola vía propensión al consumo, a partir de la renta.

Seguimos aquí la línea de los modelos desarrollados por LOVELL (9) , FOSTER (3) y VILLAR (14), pero utilizando un tratamiento diferente en la definición de las variables y en el método de discusión de la estabilidad; ello permite la obtención de resultados muy específicos y de acotaciones muy poco restrictivas.

2.- Sea $\bar{x}_t$ el volumen de ventas que una empresa espera efectuar durante el período _t_; dicha magnitud es diseñada al inicio del período _t_ y desarrollada a lo largo del mismo. El que la producción requiera tiempo para ser desarrollada nos lleva a considerar que la empresa podrá hacer frente a niveles imprevistos de demanda en tanto que disponga de un cierto volumen de stocks de productos terminados.(1). Supondremos una relación directa entre los stocks deseados m_t y las ventas planeadas, del tipo

$$m_t = \delta \bar{x}_t$$

donde $0 < \delta < 1$ es un coeficiente cuya magnitud dependerá de la estimación del coste de la ruptura de stocks y del nivel y expectativas del cambio de variables como coste de almacenamiento, precio de las materias primas, tipo de interés, etc.. No entraremos a discutir los valores δ, que supondremos dados.(2)

Dado $\bar{x}_t$, el volumen total de output que la empresa desea hacer disponible en el periodo _t_ vendrá dado por:

---

(1) Este es uno de los motivos para disponer de ciertos volúmenes de stocks, aunque también se han considerado los motivos transacciones y especulación como variables relevantes para definir la política de inversión en stocks de las empresas. Una guía para discutir estos puntos puede verse en ROWLEY and TRIVEDI (13) ch. 2.

(2) Un análisis empírico reciente de los factores que afectan a la proporción de stocks deseada, puede verse en MACCINI and ROSSANA (10) .

$$\bar{x}_t(1+\delta)$$

Ahora bien, la empresa se encuentra al final de $(t-1)$ con un volumen de stocks efectivo que puede diferir del planeado. Llamando m^*_{t-1} al volumen de stocks efectivo con que la empresa se encuentra al final de $(t-1)$ y x^*_{t-1} a las ventas efectivas del período $(t-1)$, tendremos

$$(1) \qquad m^*_{t-1} - m_{t-1} = \bar{x}_{t-1} - x^*_{t-1}$$

$$(2) \qquad m^*_{t-1} = (1+\delta)\,\bar{x}_{t-1} - x^*_{t-1}$$

La ecuación (1) refleja que la discrepancia entre valores planeados y valores efectivos se traduce en una variación no deseada de stocks; la ecuación (2) describe los stocks efectivos al final de $(t-1)$. En consecuencia, la producción diseñada para el periodo t , x_t , será:

$$x_t = \bar{x}_t(1+\delta) - m^*_{t-1}$$

o bien, llamando $\Delta\,\bar{x}_{t-1} = \bar{x}_t - \bar{x}_{t-1}$

$$(3) \qquad x_t = \Delta\,\bar{x}_{t-1}(1+\delta) + x^*_{t-1}$$

Adviertase que ello implica suponer que la discrepancia entre los valores efectivos y planeados de los stocks se solventa en un único período.[3]

---

(3) Los datos empíricos son bastante concluyentes al respecto(véase el art. cit. de ROSSANA and MACCINI(10)); hacemos mención de ello debido a la importancia que LOVELL da al tema del proceso temporal de ajuste en su modelo (LOVELL (9)) y que no parece estar muy justificada.

La ecuación (3) describe el output producido por la empresa en función de sus expectativas de ventas y de su política de stocks. Supondremos que la empresa estima las ventas del periodo t teniendo en cuenta las ventas efectivas del periodo anterior y su variación; es decir

$$(4) \qquad \bar{x}_t = (1+\gamma)\, x^*_{t-1}$$

donde γ es un parámetro de comportamiento de la empresa, que indica las expectativas de evolución de la demanda. Lógicamente, $1+\gamma > 0$. Valores de γ pequeños indican comportamientos más conservadores. Valores de γ mayores , indican comportamientos más arriesgados. Sustituyendo (4) en (3), se obtiene:

$$(5) \qquad x_t = \left[1+(1+\delta)(1+\gamma)\right] x^*_{t-1} - (1+\delta)(1+\gamma)\; x^*_{t-2}$$

ecuación que expresa la producción del periodo en función de las ventas efectivas de los dos periodos anteriores (que son datos conocidos), y de dos parámetros de comportamiento empresarial: δ , que refleja la política con respecto a los stocks, y γ , que describe la actitud de la empresa con respecto a las variaciones en el volumen de ventas (coeficiente de reacción).

3.- Consideraremos ahora el problema a nivel de la existencia de n sectores productivos. Como indicamos previamente, mantendremos la hipótesis de que la estructura de los sectores se mantiene inalterada, de suerte que, al igual que las empresas, podemos caracterizar el comportamiento de cada sector con parámetros únicos.

Sea $A=(a_{ij})$ la matriz de coeficientes input-output de la economía, con $a_{ij} = \frac{p_i x_{ij}}{p_j x_j}$ siendo x_{ij} el volumen del input i-ésimo requerido para producir x_j unidades del bien j-ésimo, y siendo p_i los respectivos precios. Designaremos por $x_t = (p_i \; x_i(t))$ al vector columna de los outputs producidos en el periodo t (en valores corrientes); análogamente, se definen $\bar{x}_t = (p_i \; \bar{x}_i(t))$ y $x^*_t = (p_i \; x^*_i(t))$. Supondremos, como es habitual, que la matriz A es productiva (es decir, $\lambda^*(A) < 1$, siendo $\lambda^*(A)$ el autovalor de módulo máximo de A), que la técnica y la distribución permanecen inalteradas, de modo que los precios no variarán, y que prevalecen rendimientos constantes a escala.

Consideraremos dos modelos distintos, cada uno de los cuales se caracteriza por la forma de determinación de las ventas planeadas, a partir de los datos del pasado. A su vez, en cada uno de los dos modelos, consideraremos dos variantes, según que el consumo sea exógeno o endógeno.

MODELO 1

(i) Producción y stocks de productos terminados.

$$(6) \quad x_t = (I + \hat{\delta})\Delta \bar{x}_{t-1} + x^*_{t-1}$$

siendo $\hat{\delta}$ la matriz diagonal de los δ_j sectoriales.

(ii) Ventas planeadas.

$$(7) \qquad \bar{x}_t = (I+\hat{\gamma})\ x^*_{t-1}$$

siendo $\hat{\gamma}$ la matriz diagonal de los coeficientes γ_j que expresan las expectativas de evolución de la demanda de los productores; por supuesto, $(I+\hat{\gamma}) \geqslant 0$.

(iii) Ventas efectivas.

La demanda efectiva del periodo $\underline{t}$ estará constituida por: a) La demanda interindustrial, Ax_t (en este punto hay que tener en cuenta que la inversión en stocks de productos terminados es una parte del output, y, en consecuencia, no aparece explícitamente), y b) la demanda final, d_t, compuesta por la demanda de bienes de consumo más la demanda de bienes de capital fijo. La consideración del consumo como variable exógena o como variable endógena nos lleva a formular dos versiones del modelo. En la primera de ellas, la demanda efectiva se especifica como

$$(8) \qquad {}_A x^*_t = A\ x_t + d_t$$

mientras que la segunda se obtiene al diferenciar el consumo en la demanda final y vincularlo con las rentas generadas en la producción mediante una matriz de propensiones al consumo; es decir,

$$(8') \qquad {}_B x^*_t = A\ x_t + c_t + f_t$$

siendo f_t el vector de demanda de bienes de inversión y $c_t = C(I-A)x_t$, donde C es la matriz cuyos elementos c_{ij} representan la propensión marginal al consumo en bienes del sector i-ésimo a partir de las rentas del sector j-ésimo. Se verifica, respecto a C,

$$0 \leq c_{ij} \leq 1$$

para todo i,j=1,...,n

$$c_{\cdot j} = \sum_{i,j} c_{ij} \leq 1$$

(donde $c_{\cdot j}$ representa la propensión total al consumo del sector j-ésimo). Esto implica que $\lambda^*(C) < 1$.

$y_t = (I-A)x_t$ representa el vector de rentas sectoriales, y, consecuentemente, Cy_t constituye el vector de demanda de bienes de consumo.[4]

MODELO 1-A.

(i) Producción.

$$(6) \qquad x_t = (I+\hat{\delta})\Delta\, \bar{x}_{t-1} + x^*_{t-1}$$

(ii) Ventas planeadas.

$$(7) \qquad \bar{x}_t = (I+\hat{\delta})\, x^*_{t-1}$$

(iii) Ventas efectivas.

$$(8) \qquad x^*_t = Ax_t + d_t$$

(4) Un análisis más sofisticado de la función de consumo, desde esta perspectiva, puede verse en HERRERO (6) .

Sustituyendo (7) y (8) en (6), obtenemos:

$$x_t = (I+\hat{\delta})\left\{(I+\hat{\gamma})\left[Ax_{t-1} + d_{t-1} - Ax_{t-2} - d_{t-2}\right]\right\} + Ax_{t-1} + d_{t-1}$$

Reordenando términos, podemos escribir:

$$(9) \quad x_t = \left[I+(I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\right] A\, x_{t-1} - (I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\, Ax_{t-2} + g_t$$

siendo $g_t = \left[I+(I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\right] d_{t-1} - (I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\, d_{t-2}$

La expresión (9) resume el modelo en un sistema de ecuaciones en diferencias, en el que el nivel actual del output es una función de sus niveles pasados y de una variable exógena, la demanda final, igualmente retardada. Los parámetros del modelo son, por una parte, de tipo tecnológico-distributivo (los coeficientes a_{ij}), y por otra parte, los parámetros de comportamiento empresarial, δ_j, γ_j. Supuesta la tecnología y la distribución dadas a corto plazo, el interés de la expresión (9), consiste en analizar la relación entre la estabilidad dinámica y los parámetros de comportamiento.

Estudiar la estabilidad del modelo descrito en el sistema (9), supone estudiar la ecuación homogénea asociada

$$(10) \quad x_t = \left[I+(I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\right] A\, x_{t-1} - (I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\, A\, x_{t-2}$$

Hagamos A semejante a una matriz diagonal $\hat{\alpha}$,[5], es decir,

(5) Encontrar una matriz diagonal semejante a la dada es siempre posible en términos exactos o tan aproximados como queramos. Véanse al respecto los Teoremas de Aproximación de BELLMAN, en BELLMAN (1) , pp. 220-21.

$$\hat{\alpha} = Q\ A\ Q^{-1}$$

siendo Q una matriz regular. Haciendo el cambio de variable $Q\,x = z$, se obtiene:(6)

$$(11) \qquad z_t = \left[(I+(I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\right]\hat{\alpha}\ \ z_{t-1} - (I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\hat{\alpha}\ z_{t-2}$$

Las ecuaciones (10) y (11) son equivalentes en cuanto a su estabilidad. El sistema (11) es, en realidad, un sistema totalmente desagregado; podemos entonces considerar la ecuación característica de cada una de sus ecuaciones, que será de la forma:

$$(12) \qquad z_i^2 - \left[1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\right]\alpha_i z_i + (1+\delta_i)(1+\gamma_i)\ \alpha_i = 0$$

El sistema (11) será estable sí y sólo si para todas las ecuaciones del tipo (12), todas sus raíces son, en módulo, menores que la unidad. Para ello, han de cumplirse las condiciones siguientes:

$$\text{(i)} \qquad 1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2\ |\alpha_i|^2 > 0$$

$$\text{(ii)} \qquad \left[1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2\right]^2 > \left[1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\right]^2|\alpha_i|^2\{(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha$$

$$1 - 2Re\ \alpha_i(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\ \}$$

donde, $|\alpha_i|$ representa el módulo de α_i y $Re\alpha_i$ representa la parte real de α_i, siendo los α_i los valores propios de la matriz A. La demostración de estas condiciones se ve en el Apéndice.

(6) Seguimos aquí la idea sugerida por LOVELL (9) (véase prueba del teorema 5).

La condición (i) conduce a:

$$(13) \qquad |\alpha_i| < \frac{1}{(1+\delta_i)(1+\gamma_i)}$$

La condición (ii) proporciona una cota diferente para $|\alpha_i|$ según cuál sea el argumento de α_i (por el hecho de intervenir $\mathrm{Re}\ \alpha_i = |\alpha_i| \cos(\arg \alpha_i)$). Esta cota viene representada en la figura 1

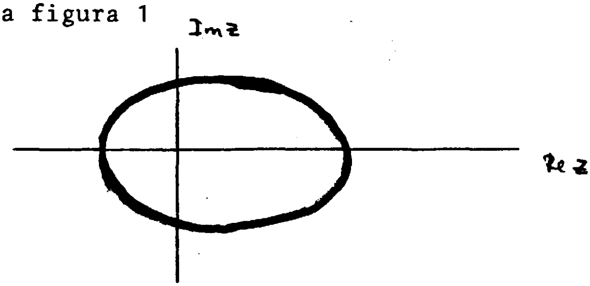

figura 1

Observamos que, cuando α_i es real y $\alpha_i > 0$, la cota obtenida por la segunda condición viene dada por $|\alpha_i| < 1$, por lo que la acotación relevante en este caso es la (13).

Si α_i es real, y $\alpha_i < 0$, la cota para $|\alpha_i|$ que proporciona la condición (ii) es:

$$|\alpha_i| < \frac{1}{1+2(1+\delta_i)(1+\gamma_i)}$$

Si α_i no es real, la cota obtenida para $|\alpha_i|$ está comprendida entre las dos anteriores. Es significativo entonces observar que, si $\lambda^*(A)$ es la raiz de Frobenius de la matriz A, obtenemos que, según hemos visto, la única cota a que debe estar sometida $\lambda^*(A)$ es la dada por (13).

Los restantes autovalores de la matriz A, han de estar sometidos a su cota correspondiente, dada por la condición (ii). Como <u>condición suficiente</u> de estabilidad, obtendríamos:

$$(14)\begin{cases} \lambda^*(A) < \dfrac{1}{(1+\delta_i)(1+\gamma_i)} \\ \\ |\alpha_i| < \dfrac{1}{1+2(1+\delta_i)(1+\gamma_i)} \end{cases}$$, para los restantes

α_i autovalores de A.

Obtengamos una solución particular para el sistema (9). Supongamos que la demanda final de cada sector crece a una tasa dada, β_j, constante. Tendremos, pues,

$$d_t = \hat{\beta}^t \, d_0$$

siendo $\hat{\beta}$ la matriz diagonal de las β_j. ($\beta_j > 1$). Podremos entonces escribir g_t como

$$g_t=\{\left[I+(I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\right]\hat{\beta} \;-(I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\} \; \hat{\beta}^{t-2} \; d_0$$

y, en forma resumida

$$g_t= \hat{\beta}^t \, e_0, \text{ siendo } \quad e_0= \hat{\beta}^2 \, \hat{\eta} \, d_0$$

donde $\hat{\eta} = \left[\hat{\beta} +(\hat{\beta}-I)(I+\hat{\delta})(I+ \hat{\gamma})\right]$.

La solución particular de (9), tomará entonces la forma

$$x_t = \hat{\beta}^t \, \bar{\bar{x}} \quad , \text{ donde } \; \bar{\bar{x}} = D^{-1} \, e_0, \text{ siendo}$$

$$D = \{\hat{\beta}^2 - [I + (I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})]\, A\hat{\beta} + (I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\; A\}\hat{\beta}^{-2}$$

Es decir, se obtiene como solución particular de (9),

(15) $x_t = \hat{\beta}^t \{\hat{\beta}^2 - [I+(I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})]A\hat{\beta} + (I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})A\}^{-1} \{\hat{\beta} + (\hat{\beta}-I)(I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\} d_0$

solución que se interpreta como aquella hacia la que converge el equilibrio cuando el sistema es estable, lo que sucede cuando se verifican las condiciones (i) e (ii), o bien las más fuertes de (14).

MODELO 1-B

(i) Producción

(6) $x_t = (I+\hat{\delta})\Delta\, \bar{x}_{t-1} + x^*_{t-1}$

(ii) Ventas planeadas

(7) $\bar{x}_t = (I+\hat{\gamma})x^*_{t-1}$

(iii) Ventas efectivas

(8') $x^*_t = Ax_t + C(I-A)x_t + f_t$

Sustituyendo (7) y (8') en (6), obtenemos:

$$x_t = (I+\hat{\delta})\{(I+\hat{\gamma})[Ax_{t-1} + C(I-A)x_{t-1} + f_{t-1} - Ax_{t-2} - C(I-A)x_{t-2} - f_{t-2}]\} + Ax_{t-1}$$
$$+ C(I-A)x_{t-1} + f_{t-1}.$$

Reordenando términos:

(16) $x_t = [I+(I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})]\,[A+C(I-A)]x_{t-1} - (I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})[A+C(I-A)]x_{t-2} + h_t$

siendo $h_t = [I+(I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})]f_{t-1} - (I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\ f_{t-2}$

Observamos que la ecuación (16) es análoga a la (9), en el sentido de que la matriz $M=[A+C(I-A)]$ juega el papel que en (9) jugaba la matriz A, y h_t juega el papel que en (9) jugaba g_t .

Seguiremos el mismo procedimiento que antes: Sea M semejante a una matriz diagonal $\hat{\mu}$, de modo que existe R regular tal que $R\ M\ R^{-1} = \hat{\mu}$. Haciendo el cambio de variable $z = Mx$, se obtiene el sistema

$$(17)\qquad z_t = [I+(I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})]\hat{\mu}\ z_{t-1} - (I+\hat{\delta})(I+\hat{\gamma})\hat{\mu}\ z_{t-2}$$

El sistema (17) es totalmente desagregado y análogo al sistema (11), con la única diferencia de que la matriz $\hat{\alpha}$ está aquí sustituida por la matriz $\hat{\mu}$. El sistema (16) es estable si y sólo si lo es el sistema (17). Para que (17) sea estable, han de cumplirse las condiciones:

(i) $1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\mu_i|^2 > 0$

(ii) $[1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\mu_i|^2]^2 > [1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]^2|\mu_i|^2\{(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\mu_i|^2 +$

$+1 - 2\ Re\ \mu_i(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\}$.

donde $|\mu_i|$ representa el módulo de μ_i y $Re\,\mu_i$ representa la parte real de μ_i , siendo μ_i los valores propios de M.

De modo que, en este modelo, se obtienen para los valores propios de la matriz M, las mismas cotas que en el modelo anterior se obtenían para los autovalores de la matriz A.

Si $M \geqslant 0$, y puesto que

$$(I-M)^{-1} = (I-A)^{-1}(I-C)^{-1} \geqslant 0$$

tendríamos que $\lambda^*(M) < 1$, por lo que las condiciones obtenidas no resultan restrictivas.

4.- Los modelos 2-A y 2-B que analizaremos a continuación, suponen una especificación particular de los coeficientes de reacción γ_j, incorporando un retardo más en la producción y un tratamiento analítico diferente de las condiciones de equilibrio.

Sea $$\gamma_j = k_j \frac{x^*_{j,t-1} - x^*_{j,t-2}}{x^*_{j,t-1}}$$

es decir, traducimos ahora las γ_j en términos de una parte de la variación relativa en las ventas efectivas pasadas. Podremos escribir, pues:

$$\hat{\gamma}\, x^*_{t-1} = \hat{k}\, \Delta\, x^*_{t-2}$$

siendo $\hat{k}$ la matriz diagonal de las k_j . Los coeficientes k_j recogen la estimación de los empresarios de la <u>evolución</u> de las ventas.

El modelo 2-A supone adoptar el consumo como exógeno; y el modelo 2-B lo endogeneiza análogamente al caso anterior.

MODELO 2-A

(i) Producción.

$$(6) \qquad x_t = (I+\hat{\delta})\,\Delta\,\bar{x}_{t-1} + x^*_{t-1}$$

(ii) Ventas planeadas.

$$(18) \qquad \bar{x}_t = x^*_{t-1} + \hat{k}\,\Delta\,x^*_{t-2}$$

(iii) Ventas efectivas.

$$(8) \qquad x^*_t = A\,x_t + d_t$$

Sustituyendo (18) y (8) en (6), y reordenando términos, se llega a la ecuación:

$$(19) \quad x_t=[I+(I+\hat{k})(I+\hat{\delta})]Ax_{t-1} -(I+2\hat{k})(I+\hat{\delta})Ax_{t-2}+(I+\hat{\delta})\hat{k}A\;x_{t-3}+ l_t$$

siendo $l_t =[I+(I+\hat{k})(I+\hat{\delta})]\,d_{t-1}-(I+2\hat{k})(I+\hat{\delta})d_{t-2}+ \hat{k}d_{t-3}$

La ecuación homogénea asociada a (19) será

$$(20) \qquad x_t = [I+(I+\hat{k})(I+\hat{\delta})]A\;x_{t-1} - (I+2\hat{k})(I+\hat{\delta})A\;x_{t-2} + (I+\hat{\delta})\;\hat{k}\;A\;x_{t-3}$$

Si A es semejante a una matriz diagonal $\hat{\alpha}$, de modo que exista Q regular, tal que $Q\,A\,Q^{-1} = \hat{\alpha}$, haciendo el cambio de variable $Q\,x = z$, se llega a la ecuación:

$$(21) \qquad z_t = [I+(I+\hat{k})(I+\hat{\delta})]\hat{\alpha}\;\hat{z}_{t-1} -(I+2\hat{k})(I+\hat{\delta})\hat{\alpha}\;z_{t-2}+ (I+\hat{\delta})\;\hat{k}\hat{\alpha}\;z_{t-3}$$

La ecuación (21) será estable si y sólo si lo es la ecuación (20). Si consideramos ahora las ecuaciones características asociadas a la ecuación (21), obtendremos:

$$(22) \qquad z^3 - [1+(1+k_i)(1+\delta_i)]\,\alpha_i\;z^2 +(1+\delta_i)(1+2k_i)\;\alpha_i\;z -(1+\delta_i)k_i\;\alpha_i = 0$$

La ecuación (20) será estable si y sólo si todas las raices de (22) son, en módulo, menores que la unidad. Si seleccionamos aquél i=1,...,n, para el cual $\alpha_i=\lambda^*(A)$, obtendremos una de las ecuaciones (22), cuyos coeficientes serán reales, y esta ecuación será la siguiente:

$$(23)\quad z^3-[1+(1+k_i)(1+\delta_i)]\,\lambda^*\,z^2+(1+\delta_i)(1+2k_i)\,\lambda^*z-(1+\delta_i)\,k_i\,\lambda^*=0$$

Esta ecuación tendrá sus raices en módulo menores que 1, si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $\lambda^* < 1$

(ii) $\lambda^* < \dfrac{3}{3+2\delta_i}$

(iii) $\lambda^* < \dfrac{1+2k_i-\sqrt{4k_i^2+1-\dfrac{4k_i}{1+\delta_i}}}{2k_i(2+\delta_i)}$

(En el Apéndice se justifica la obtención de estas condiciones).

De las tres cotas que se obtienen para λ^*, la menor es la (iii), con lo cual, bastará que se verifique (iii) para que la ecuación (23) sea estable.

Para las restantes ecuaciones (22), cuando α_i es un número complejo, una condición suficiente de estabilidad es que

$$|\alpha_i| < \frac{1}{1+2(1+\delta_i)(1+2k_i)}$$ (Ver prueba en el Apéndice).

Estudiemos ahora la solución particular del sistema (19). Si se supone que d_t crece a tasa constante $\hat{\nu}$, es decir, $d_t = \hat{\nu}^t d_0$, entonces $l_t = \hat{\mu}\hat{\nu}^{t-3} d_0$, siendo

$$\mu = \{[I+(I+\hat{k})(I+\hat{\delta})]\hat{\nu}^2 - (I+2\hat{k})(I+\hat{\delta})\hat{\nu} + \hat{k}\}$$

y la solución particular de (19) queda en la forma:

$$(24) \quad x_t = \hat{\nu}^t \bar{\bar{x}}, \text{ siendo } \bar{\bar{x}} = E^{-1}\hat{\mu}\, d_0, \text{ donde}$$

$$E = \{\hat{\nu}^3 - [I+(I+\hat{k})(I+\hat{\delta})]A\,\hat{\nu}^2 + (I+2\hat{k})(I+\hat{\delta})A\hat{\nu} - (I+\hat{\delta})\hat{k}A\}$$

La solución (24) se interpreta como aquella hacia la que converge el equilibrio cuando el sistema es estable, lo que sucede cuando se verifican las condiciones:

$$\lambda^*(A) < \frac{1+2k_i - \sqrt{4k_i^2 + 1 - \dfrac{4k_i}{1+\delta_i}}}{2k_i(2+\delta_i)}$$

y, para los restantes valores propios de A, α_i

$$|\alpha_i| < \frac{1}{1+2(1+\delta_i)(1+2k_i)}$$

<u>MODELO 2-B</u>.

(i) Producción.

$$(6) \quad x_t = (I+\hat{\delta})\Delta\,\bar{x}_{t-1} + x^*_{t-1}$$

(ii) Ventas planeadas.

$$(18) \quad \bar{x}_t = x^*_{t-1} + \hat{k}\,\Delta\, x^*_{t-2}$$

(iii) Ventas efectivas.

$$(8') \quad x_t^* = A\ x_t + C(I-A)\ x_t + f_t$$

Sustituyendo (18) y (8') en (6), obtenemos:

$$(25) \quad x_t = \left[I+(I+\hat{k})(I+\hat{\delta})\right]\left[A+C(I-A)\right] x_{t-1} - (I+2\hat{k})(I+\hat{\delta})\left[A+C(I-A)\right] x_{t-2} +$$

$$+ (I+\hat{\delta})\hat{k}\left[A+C(I-A)\right] x_{t-3} + s_t$$

siendo $s_t = \left[I+(I+\hat{k})(I+\hat{\delta})\right] f_{t-1} - (I+2\hat{k})(I+\hat{\delta}) f_{t-2} + \hat{k}\ f_{t-3}$

Observamos que la ecuación (25) es análoga a la (19), en el sentido de que la matriz M=[A+C(I-A)] juega el mismo papel que en (19) jugaba la matriz A, y s_t juega el papel que en (19) jugaba l_t .

Sea M semejante a una matriz diagonal $\hat{\mu}$, de modo que existe R regular, tal que $R\ M\ R^{-1} = \hat{\mu}$. Haciendo el cambio de variable $z = Mx$, se obtiene el sistema:

$$(26) \quad z_t = \left[I+(I+\hat{k})(I+\hat{\delta})\right]\hat{\mu}\ \ z_{t-1} - (I+2\hat{k})(I+\hat{\delta})\ \hat{\mu}\, z_{t-2} + (I+\hat{\delta})\hat{k}\hat{\mu}\ z_{t-3}$$

El sistema (26) es totalmente desagregado y análogo al (21), con la única diferencia de que $\hat{\alpha}$ está sustituida por $\hat{\mu}$. El sistema (25) es estable si y sólo si lo es el (26).

Supuesto que $M \geqslant 0$, y si llamamos $\lambda^*(M)$ al valor propio de módulo máximo de M, (26) será estable cuando se verifique:

$$\text{(i)} \quad \lambda^*(M) < \frac{1 + 2k_i - \sqrt{4k_i^2 + 1 - \dfrac{4k_i}{1+\delta_i}}}{2k_i(2+\delta_i)}$$

y, si llamamos μ_i a los restantes valores propios de M,

$$\text{(ii)} \quad |\mu_i| < \frac{1}{1+2(1+\delta_i)(1+2k_i)}$$

5.- Los modelos aquí presentados abordan (bajo distintas especificaciones) el análisis de la estabilidad de una economía multisectorial en el corto plazo. El periodo corto como ámbito de referencia permite aislar las relaciones entre los comportamientos de los sujetos y la estabilidad del sistema, al ignorar todo lo relativo a la renovación del capital productivo (variaciones de la capacidad productiva, cambio técnico, sustitución del equipo fijo depreciado).

La visión del funcionamiento de la economía de mercado subyacente puede caracterizarse brevemente por las siguientes notas:

a) Frente a cambios en la demanda las empresas reaccionan antes vía cantidades que vía precios. Las razones de esta dinámica son, por un lado la estructura de mercado prevaleciente y los procesos de fijación de precios que implica (mercados no competitivos y precios de mark-up), por otro la propia estructura de costes de las empresas (costes medios constantes en el tramo de output relevante); finalmente, la imperfecta información acerca del comportamiento de la función de demanda implica que los costes de transacción asociados al ajuste vía cantidades sean inferiores a los asociados al proceso de tanteo vía precios que se requeriría. (La consideración explícita de la información imperfecta y la modificación de la velocidad de ajuste de las variables tradicionalmente supuesta constituyen pautas analíticas de la economía de Keynes[(7)]. En nuestro planteamiento adoptamos una posición extrema y suponemos que los precios no varían en absoluto, recayendo el proceso de ajuste exclusivamente sobre las cantidades).

b) La producción requiere tiempo, lo que exige que ésta se planee y desarrolle antes de hacer disponibles las mercancías; este hecho elimina la posibilidad de ajustes automáticos entre oferta y demanda vía cantidades (nuestros modelos se desarrollan bajo la hipótesis simplificadora de un periodo de producción igual para todos los sectores). Junto a ello la imposibilidad de procesos de recontratación (no existe nada parecido a un subastador walrasiano) supone que los errores en la planeación se traducen en cada periodo en discrepancias entre las ventas planeadas y efectivas; discrepancias que juegan sobre los volúmenes de stocks de productos terminados. Las situaciones de no-equilibrio son así la norma, encar

(7) Véase, en este sentido, la ya clásica interpretación de Keynes desarrollada por LEIJONHUFVUD (8) .

gándose el mercado de generar impulsos que tiendan a la eliminación de los desequilibrios[8].

c) Los comportamientos de la oferta son determinantes con respecto a la dinámica económica, existiendo una notable asimetría entre las fuerzas de oferta y de demanda. En efecto, la demanda efectiva viene determinada fundamentalmente por decisiones de oferta: las compras intersectoriales y la inversión en capital fijo lo son; el consumo, que podría ser la variable más desligada de la producción, sólo se puede desarrollar a partir de las rentas generadas en los procesos productivos (resultando éstas determinadas por las decisiones de producción, supuesta una distribución dada). Las variantes B de nuestros modelos recogen este hecho bajo la formulación de una matriz de propensiones al consumo (sólo la distribución del gasto resulta, pues, una decisión autónoma de la oferta). Este papel dominante de los productores no implica necesariamente estabilidad en la dinámica de la producción, ni siquiera bajo el supuesto de que la matriz de propensiones al consumo está dada (como en nuestro caso), ya que las decisiones de oferta son desagregadas y por tanto su coordinación sólo se produce <u>ex post</u> a través del mercado[9].

---

(8) Desde esta perspectiva, un análisis de los efectos de las restricciones cuantitativas derivadas de la información imperfecta, puede verse en BENASSY (2).

(9) Sobre ello, discutiendo el tema de la demanda efectiva, en Tugan-Baranovski y Rosa Luxemburgo, Kalecki señalaba:"Los capitalistas hacen muchas cosas como clase social, pero ciertamente, no invierten como tal". KALECKI (7), p. 172.

Desde esta perspectiva el mercado constituye un mecanismo de coordinación de la producción que pone de manifiesto los desequilibrios existentes y muestra el sentido de la variación requerida para que el ajuste se produzca. La estabilidad del proceso, empero, depende de los comportamientos de los agentes económicos en relación con su apreciación de las informaciones suministradas por el mercado y de las expectativas que a partir de ellas estos agentes desarrollan. - En nuestros modelos esto se concreta en unas condiciones de - estabilidad definidas en términos de los valores de los parámetros de comportamiento.

Las cotas que determinan las condiciones de estabilidad de cada modelo pueden designarse por $C_i\lambda^*(H)$, --- $C_i\ \lambda^j(H)$, donde el subíndice i=1,2, indica el modelo al que - se refiere, la variable H=A,M, indica la variante de que se - trata, y λ^* o λ^j indica si se refiere a restricciones sobre el autovalor de módulo máximo o sobre los restantes autovalores. Los resultados obtenidos en las secciones 3 y 4 pueden resumirse como sigue:

* Condiciones suficientes de estabilidad del modelo 1 *

$$\lambda^*(H) < \frac{1}{(1+\delta_j)(1+\gamma_j)} = C_1\ \lambda^*(H)$$

$$|\alpha_j|(H) < \frac{1}{1+2(1+\delta_j)(1+\gamma_j)} = C_1\ \lambda^j(H)$$

* Condiciones suficientes de estabilidad del modelo 2 *

$$\lambda^*(H) < \frac{1+2k_j - \sqrt{4k_j^2 + 1 - \frac{4k_j}{1+\delta_j}}}{2k_j(2+\delta_j)} = C_2\lambda^*(H)$$

$$|\alpha_j|(H) < \frac{1}{1+2(1+\delta_j)(1+2k_j)} = C_2\lambda^j(H)$$

A partir de aquí, y teniendo en cuenta las tablas de valores que presentamos en el Apéndice, pueden deducirse las siguientes conclusiones generales:

I) La estabilidad de la dinámica de la producción en el corto plazo depende de las decisiones de los productores con respecto a la magnitud de los stocks de productos terminados que se desean disponer y de la correlación entre las ventas pasadas y la estimación de las futuras que se establezca. No hay garantía de que dicha estabilidad vaya a darse.

II) La estabilidad tiende a disminuir conforme aumenta la proporción de stocks de productos terminados y conforme crecen los coeficientes de reacción (γ_j o k_j). En efecto, resulta inmediato que:

$$\frac{\partial C_i\ \lambda(H)}{\partial\ \delta_j} < 0$$

$$\frac{\partial C_i\ \lambda(H)}{\partial \gamma_j} < 0$$

$$\frac{\partial C_i \, \lambda(H)}{\partial k_j} < 0$$

III) La mayor productividad de la matriz A supone una mayor estabilidad ya que permite mayores variaciones en los parámetros de comportamiento(10).

IV) Las condiciones de estabilidad de los modelos no resultan restrictivas cuando consideramos valores plausibles para los parámetros de comportamiento (véanse las Tablas del Apéndice); ello implica que la estabilidad en la dinámica de la producción no resulta improbable en las condiciones de no equilibrio manejadas.

V) Para enjuiciar la estabilidad relativa de los modelos 1 y 2, a partir de los datos proporcionados por las tablas, hay que tener en cuenta que

$$\gamma_j = \frac{\Delta\, x^*_j(t-1)}{x^*_j(t-1)}\, k_j$$

de modo que si suponemos una tasa de crecimiento de las ventas efectivas del orden del 20 %, habrá que comparar en las Tablas

---

(10) $\lambda^*(A)$ puede considerarse como una medida de productividad de la matriz A, en tanto que el crecimiento equilibrado del output sólo resulta posible a una tasa g tal que $(1+g) < \frac{1}{\lambda^*(A)}$ $(\lambda^*(A) < 1)$. Cuanto menor sea $\lambda^*(A)$, mayores valores puede alcanzar g. Para una fuerza de trabajo y un equipo de capital fijo dados, $\lambda^*(A)$ puede considerarse como una cierta medida de eficiencia.

los valores de $(\delta_j\ ,\gamma_j)$ con $(\delta_j, k_j=5\gamma_j)$ (lo que se traduce en que para las tasas de crecimiento habituales, el modelo 2 resultará más estable, <u>ceteris paribus</u>, que el modelo 1).

VI) Las variantes B suponen involucrar las propensiones al consumo de las rentas sectoriales en las condiciones de estabilidad. Las cotas se definen ahora no sobre los autovalores de A, sino de M = A + C(I-A); la única condición impuesta es M > 0. No puede decirse, en principio, nada con carácter general, respecto a la mayor o menor estabilidad del modelo al introducir el consumo

APENDICE

A-1.- La ecuación $z^2-[1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]\alpha_i z + (1+\delta_i)(1+\gamma_i)\ \alpha_i = 0$ tiene todas sus raices en módulo menores que 1 si:

(i) $1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2 > 0$

(ii) $\{1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2\}^2 > \{1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\}^2|\alpha_i|^2\{ (1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2 +$

$+1-2\mathrm{Re}\alpha_i(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\}$ (Modelo 1-A)

DEMOSTRACION.- Aplicaremos a la ecuación el método de LAHMER-SCHUR (RALSTON, (12) pag. 393).

Se considera el polinomio $g(z)=(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\alpha_i z^2 -$ $- \{1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\}\alpha_i z + 1$. Impondremos las condiciones para que g(z) no tenga ninguna raiz en el círculo unidad, con lo que la ecuación dada, las tendrá todas.

$$g^*(z)=(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\overline{\alpha}_i-\{1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\}\overline{\alpha}_i z + z^2$$

$$T[g(z)] = g(z) -(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\alpha_i g^*(z) = [1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]\{(1+\delta_i)(1+\gamma_i)|\alpha_i|^2-\alpha_i\}z+$$

$$+ \{1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2 \}.$$

$$T^*[g(z)] =[1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]\{(1+\delta_i)(1+\gamma_i)|\alpha_i|^2-\overline{\alpha}_i\}+ \{1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2\} z$$

$$T^2[g(z)] = \{1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2\} T[g(z)]-$$

$$- [1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]\{(1+\delta_i)(1+\gamma_i)|\alpha_i|^2 - \alpha_i\} T^*[g(z)] =$$

$$=\{1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2\}-[1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]^2 \ .$$

$$. \{(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^4 +|\alpha_i|^2(1-2\mathrm{Re}\ \alpha_i(1+\delta_i)(1+\gamma_i))\} .$$

g(z) no tiene ninguna raiz en el círculo unidad si y sólo si $T[g(0)] > 0$ y $T^2[g(0)] > 0$, que son precisamente las condiciones (i) e (ii).

A-2.- Si α_i es real, $\alpha_i > 0$, la condición (ii) se convierte en la $|\alpha_i|<1$.

Si α_i es real, $\alpha_i < 0$, la condición (ii) queda $|\alpha_i| < \frac{1}{1+2(1+\delta_i)(1+\gamma_i)}$

DEMOSTRACION.- Si α_i es real y $\alpha_i > 0$, Re $\alpha_i = |\alpha_i|$, con lo que la condición (ii) quedará:

$$[1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2]^2 > [1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]^2|\alpha_i|^2\{(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2 +$$

$$+ 1 - 2|\alpha_i|(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\} = [1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]^2|\alpha_i|^2\{1-(1+\delta_i)(1+\gamma_i)|\alpha_i|\}^2$$

Por tanto, la condición queda, en este caso:

$$1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2 > [1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]|\alpha_i|[1-(1+\delta_i)(1+\gamma_i)|\alpha_i|],$$

$$1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)|\alpha_i| > [1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]|\alpha_i| \quad \text{, de donde } |\alpha_i| < 1.$$

Si α_i es real, $\alpha_i < 0$, Re $\alpha_i = -|\alpha_i|$, por lo que, sustituyendo en (ii), se obtiene:

$$[1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2]^2 > [1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]^2|\alpha_i|^2\{(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2 + 1 +$$

$$+ 2|\alpha_i|(1+\delta_i)(1+\gamma_i)\} = [1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]^2|\alpha_i|^2\{1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)|\alpha_i|\}^2$$

Desigualdad que equivale a:

$$1-(1+\delta_i)^2(1+\gamma_i)^2|\alpha_i|^2 > [1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]|\alpha_i|[1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)|\alpha_i|]$$

$$1-(1+\delta_i)(1+\gamma_i)|\alpha_i| > [1+(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]|\alpha_i|$$

$$1 > [1+2(1+\delta_i)(1+\gamma_i)]|\alpha_i| \implies |\alpha_i| < \frac{1}{1+2(1+\delta_i)(1+\gamma_i)}$$

A-3.- Dada la ecuación $z^3-[(1+\delta_i)(1+k_i)+1]\lambda^* z^2 + (1+\delta_i)(1+2k)\lambda^* z - (1+\delta_i)k_i\lambda^* = 0$ las condiciones necesarias y suficientes para que $|z|<1$, son:

(i) $\lambda^* < 1$; (ii) $\lambda^* < \frac{3}{3+2\delta_i}$ (iii) $\lambda^* < \frac{1+2k_i - \sqrt{4k_i^2 + 1 - \frac{4k_i}{1+\delta_i}}}{2k_i(1+\delta_i)}$

(Modelo 2-A).

DEMOSTRACION.- La ecuación tiene coeficientes reales, por lo que pueden aplicarse las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad de Samuelson (GANDOLFO (4) , p. 111):

(i) $1-\{(1+\delta_i)(1+k_i)+1\}\lambda^*+(1+\delta_i)(1+2k_i)\lambda^*-(1+\delta_i)k_i\lambda^* > 0$

(ii) $3-\{(1+\delta_i)(1+k_i)+1\}\lambda^*-(1+\delta_i)(1+2k_i)\lambda^*+3(1+\delta_i)k_i\lambda^* > 0$

(iii) $1+\{(1+\delta_i)(1+k_i)+1\}\lambda^*+(1+\delta_i)(1+2k_i)\lambda^*+(1+\delta_i)k_i\lambda^* > 0$

(iv) $-(1+\delta_i)^2k_i^2\lambda^{*2}+\{(1+\delta_i)(1+k_i)+1\}k_i\lambda^{*2}(1+\delta_i)-(1+\delta_i)(1+2k_i)\lambda^*+1 > 0$

La condición (iii) se satisface siempre, pues $\lambda^* > 0$, y todos los coeficientes son también positivos.

Las condiciones (i), (ii) y (iv), pueden escribirse:

(i) $\lambda^* < 1$

(ii) $\lambda^* < \dfrac{3}{3+2\delta_i}$

(iv) $(1+\delta_i)k_i(2+\delta_i)\lambda^{*2}-(1+\delta_i)(1+2k_i)\lambda^*+1 > 0$

Para que la inecuación (iv) se satisfaga, ha de suceder que $\lambda^* < r_1$, o bien que $\lambda^* > r_2$, siendo r_1 y r_2 las raices de la ecuación:

$$(1+\delta_i)(2+\delta_i)k_i\lambda^{*2}-(1+\delta_i)(1+2k_i)\lambda^*+1=0$$

$$r_1=\frac{1+2k_i-\sqrt{4k_i^2+1-\dfrac{4k_i}{1+\delta_i}}}{2k_i(1+\delta_i)} \qquad r_2=\frac{1+2k_i+\sqrt{4k_i^2+1-\dfrac{4k_i}{1+\delta_i}}}{2k_i(1+\delta_i)}$$

Observamos fácilmente que, en todos los casos, se verifica que $r_2 > 1$, con lo que la condición $\lambda^* > r_2$ es incompatible con (i).

En efecto, $r_2 > \dfrac{1+2k_i+\sqrt{4k_i^2-2k_i+1}}{4k_i}=L$

Si $k>\frac{1}{2} \Longrightarrow L > \dfrac{1+2k_i+2k_i-1}{4k_i}=1$; si $k<\frac{1}{2} \Longrightarrow L>\dfrac{1+2k_i-2k_i+1}{4k_i}=\dfrac{1}{2k_i}>1$

En definitiva, la condición (iv) se reduce a $\lambda^* < r_1$.

A-4.- Dada la ecuación $z^3-\{(1+\delta_i)(1+k_i)+1\}\ \alpha_i z^2+(1+\delta_i)(1+2k_i)\alpha_i z -$ $- (1+\delta_i)k_i\alpha_i = 0$, es condición suficiente para que $|z|< 1$, que se verifique:

$$|\alpha_i| < \frac{1}{1+2(1+\delta_i)(1+2k_i)} \quad \text{(Modelo 2-A)}$$

DEMOSTRACION.- Utilizaremos el siguiente criterio para obligar a que $|z|<1$, ya que los coeficientes del polinomio son complejos:

" Si η es el único cero positivo del polinomio $z^3 -\{(1+\delta_i)(1+k_i)+1\}|\alpha_i|z^2 -(1+\delta_i)(1+2k_i)|\alpha_i|z - (1+\delta_i)k_i|\alpha_i| = 0$, se verifica que $|z| < \eta$, siendo z cualquier raiz del polinomio $z^3-\{(1+\delta_i)(1+k_i)+1\}\alpha_i\ z^2 + (1+\delta_i)(1+2k_i)\alpha_i\ z -(1+\delta_i)k_i\alpha_i = 0$ "(POLYA-SZEGÖ (11) p. 106, vol.I).

Si imponemos que $\eta < 1$, la ecuación será estable.
$\eta < 1$, si y sólo si se verifica que el valor del polinomio y de todas sus derivadas en 1 es positivo, es decir, si se verifican las condiciones:

$$1 -\{(1+\delta_i)(1+k_i)+1\}|\alpha_i| -(1+\delta_i)(1+2k_i)|\alpha_i|-(1+\delta_i)k_i|\alpha_i|> 0$$

$$3-2\{(1+\delta_i)(1+k_i)+1\}|\alpha_i|-(1+\delta_i)(1+2k_i)|\alpha_i| >0$$

$$6-2\{(1+\delta_i)(1+k_i)+1\}|\alpha_i| > 0$$

Condiciones que conducen a:

$$|\alpha_i| < \frac{1}{1+2(1+\delta_i)(1+2k_i)} \quad ; \quad |\alpha_i| < \frac{3}{3+(1+\delta_i)(3+4k_i)} \quad ; \quad |\alpha_i|< \frac{6}{2+2(1+\delta_i)(1+k_i)}$$

De estas condiciones, la menor cota es la primera, con lo que la única condición relevante sería:

$$|\alpha_i|< \frac{1}{1+2(1+\delta_i)(1+2k_i)}$$

TABLA DE VALORES PARA $C_1\lambda^*(H)$

γ_i \ δ_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
-0,9	.10	9,09	8,333	7,692	7,142	6,666	6,250	5,882	5,555	5,263	5
-0,8	5	4,545	4,166	3,846	3,571	3,333	3,125	2,941	2,777	2,631	2,50
-0,7	3,33	3,030	2,777	2,564	2,380	2,222	2,083	1,960	1,851	1,754	1,666
-0,6	2,50	2,272	2,083	1,923	1,785	1,666	1,562	1,470	1,388	1,315	1,250
-0,5	2	1,818	1.666	1,538	1,428	1,333	1,250	1,176	1,111	1,052	1
-0,4	1,66	1,515	1,388	1,282	1,190	1,111	1,041	0,980	0,925	0,877	0,833
-0,3	1,92	1,298	1,190	1,098	1.020	0,952	0,892	0,840	0,793	0,751	0,719
-0,2	1.25	1.136	1,041	0,961	0,892	0,833	0,781	0,735	0,694	0,657	0,625
-0,1	1,11	1,010	0,925	0,854	0,793	0,740	0,694	0,653	0,617	0,584	0,555
0,0	1	0,909	0,833	0,769	0,714	0,666	0,625	0,588	0,555	0,526	0,5
0,1	0,90	0,826	0,757	0,699	0,649	0,606	0,568	0,534	0,505	0,478	0,454
0,2	0,83	0,757	0,694	0,641	0,595	0,555	0,520	0,490	0,462	0,438	0,416
0,3	0,76	0,699	0,641	0,591	0,549	0,512	0,480	0,452	0,427	0,404	0,384
0,4	0,71	0,649	0,595	0,549	0,510	0,476	0,446	0,420	0,396	0,375	0,357
0,5	0,66	0,606	0,555	0,512	0,476	0,444	0,416	0,392	0,370	0,350	0,333
0,6	0,62	0,568	0,520	0,480	0,446	0,416	0,390	0,367	0,347	0,328	0,312
0,7	0,58	0,534	0,490	0,452	0,420	0,392	0,367	0,346	0,326	0,309	0,294
0,8	0,55	0,505	0,462	0,427	0,396	0,370	0,347	0,326	0,308	0,292	0,277
0,9	0,52	0,478	0,438	0,404	0,375	0,350	0,328	0,309	0,292	0,277	0,263
1	0,50	0,454	0,416	0,384	0,357	0,333	0,312	0,294	0,277	0,263	0,250

TABLA DE VALORES PARA $C_1 \lambda^j(H)$

γ_j \ δ_j	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
-0,9	0,83	0,819	0,806	0,793	0,781	0,769	0,757	0,746	0,735	0,724	0,714
-0,8	0,71	0,694	0,675	0,657	0,641	0,625	0,609	0,595	0,581	0,568	0,555
-o,7	0,62	0,602	0,581	0,561	0,543	0,526	0,510	0,495	0,480	0,467	0,454
-0,6	0,55	0,531	0,510	0,490	0,471	0,454	0,438	0,423	0,409	0,396	0,384
-0,5	0,5	0,476	0,454	0,434	0,416	0,400	0,384	0,370	0,357	0,344	0,333
-0,4	0,45	0,431	0,409	0,390	0,373	0,357	0,342	0,328	0,316	0,304	0,294
-0,3	0,41	0,393	0,373	0,354	0,337	0,322	0,308	0,295	0,284	0,273	0,263
-0,2	0,38	0,362	0,342	0,324	0,308	0,294	0,280	0,268	0,257	0,247	0,238
-0,1	0,35	0,335	0,316	0,299	0,284	0,270	0,257	0,246	0,235	0,226	0,217
0	0,33	0,312	0,294	0,277	0,263	0,250	0,238	0,227	0,217	0,208	0,200
0,1	0,31	0,292	0,274	0,259	0,245	0,232	0,221	0,210	0,193	0,189	0,185
0,2	0,29	0,274	0,257	0,242	0,229	0,217	0,206	0,196	0,187	0,179	0,172
0,3	0,27	0,259	0,242	0,228	0,215	0,204	0,193	0,184	0,176	0,168	0,161
0,4	0,26	0,245	0,229	0,215	0,203	0,192	0,182	0,173	0,165	0,158	0,151
0,5	0,25	0,232	0,217	0,204	0,192	0,181	0,172	0,163	0,156	0,149	0,142
0,6	0,23	0,221	0,206	0,193	0,182	0,172	0,163	0,155	0,147	0,141	0,135
0,7	0,22	0,210	0,196	0,184	0,173	0,163	0,155	0,147	0,140	0,134	0,128
0,8	0,21	0,201	0,187	0,176	0,165	0,156	0,147	0,140	0,133	0,127	0,121
0,9	0,20	0,192	0,179	0,168	0,158	0,149	0,141	0,134	0,127	0,121	0,116
1	0,2	0,185	0,172	0,161	0,151	0,142	0,135	0,128	0,121	0,116	0,111

TABLA DE VALORES DE $C_2\lambda^*(H)$

δ_j \ k_j	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	1	1	1	1	1	1
0,1	0,909	0,899	0,883	0,858	0,815	0,749
0,2	0,833	0,816	0,792	0,757	0,708	0,646
0,3	0,769	0,748	0,719	0,680	0,630	0,574
0,4	0,714	0,690	0,659	0,618	0,570	0,518
0,5	0,666	0,641	0,608	0,567	0,521	0,473
0,6	0,625	0,598	0,564	0,524	0,480	0,436
0,7	0,588	0,561	0,527	0,488	0,446	0,404
0,8	0,555	0,528	0,494	0,456	0,416	0,377
0,9	0,526	0,498	0,465	0,429	0,390	0,354
1	0,500	0,472	0,440	0,404	0,368	0,333

TABLA DE VALORES DE $C_2\ \lambda^j(H)$

δ_j \ k_j	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,333	0,294	0,263	0,238	0,217	0,200
0,1	0,312	0,274	0,245	0,221	0,201	0,185
0,2	0,294	0,257	0,229	0,206	0,187	0,172
0,3	0,277	0,242	0,215	0,193	0,176	0,161
0,4	0,263	0,229	0,203	0,182	0,165	0,151
0,5	0,250	0,217	0,192	0,172	0,156	0,142
0,6	0,238	0,206	0,182	0,163	0,147	0,135
0,7	0,227	0,196	0,168	0,155	0,140	0,128
0,8	0,217	0,187	0,165	0,147	0,133	0,121
0,9	0,208	0,179	0,158	0,141	0,127	0,116
1	0,200	0,172	0,151	0,135	0,121	0,111

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

(1) BELLMAN,R. Introducción al Análisis Matricial, Barcelona, Reverte, 1965

(2) BENASSY,J.P. "La Théorie du Desequilibre et les Fondaments Microeconomiques de la Macroeconomie", en Revue Economique, n°5, 1976 (Versión castellana en AGUILO,E. y FERNANDEZ DE CASTRO,J. (ed.) Desequilibrio, Inflación, Desempleo, Barcelona Vicens, 1979)

(3) FOSTER,E. "Sales Forecast an the Inventory Cycle" en Econometrica, vol. 31, n°3, 1963

(4) GANDOLFO, G. Economic Dynamics: Methods and Models, Amsterdam, North Holland, 2nd Ed. 1980

(5) GANTMACHER,F.R. The Theory of Matrices,(2 vols.), New York, Chelsea Pu. Co., 1974

(6) HERRERO,C. "La Función de Consumo en Modelos Multisectoriales de Renta y Producción: Análisis Dinámico", en Estadística Española

(7) KALECKI,M. "El Problema de la Demanda Efectiva en Tugan-Baranovski y Rosa Luxemburgo", incluído en Ensayos Escogidos sobre Dinámica de la Economía Capitalista, México, F.C.E., 1977

(8) LEIJONHUFVUD,A. Análisis de Keynes y de la Economía Keynesiana, Barcelona, Vicens, 1976

(9) LOVELL, M.C. "Buffer Stocks, Sales Expectations, and Stability: A Multisector Analysis of the Inventory Cycle" en _Econometrica_, vol. 30, 1962

(10) MACCINI,L.J. & ROSSANA,R.J. "Investment in Finished Goods Inventories: An Analysis of Adjustment Speeds" en _American Economic Review_. vol. 71, n°2, 1981

(11) POLYA,G. & SZEGÖ, G. _Problems and Theorems in Analysis_ (2 vols.), Berlin, Springer-Verlag, 1972

(12) RALSTON,A. _Introducción al Análisis Numérico_, México, Limusa, 1970

(13) ROWLEY, J.C.R. & TRIVEDI, P.K. _Econometrics of Investment_, London, John Wiley, 1975

(14) VILLAR,A. "Producción, Demanda Efectiva y Variación de Existencias. Análisis Multisectorial", en _Estadística Española_ (en prensa).