

PUBLICACIONS
DE LA UNIVERSITAT D'ALACANT

PROBLEMES DE FÍSICA

**Rafael Garcia Molina
Isabel Abril**

**T
D**

TEXTOS DOCENTS

PROBLEMES DE FÍSICA

Rafael Garcia Molina
Isabel Abril

PROBLEMES
DE
FÍSICA

UNIVERSITAT D'ALACANT

GARCIA MOLINA, Rafael

Problemes de Física / Rafael Garcia Molina; Isabel Abril [et al.]. – Alacant: Universitat, Departament de Física Aplicada, 1999.

437 p.: 24 cm. – ISBN 84-7908-502-9

1. Física. I Abril, Isabel

53

© Rafael Garcia Molina

Isabel Abril

Publicacions de la Universitat d'Alacant, 1999

Portada: Gabinet d' Imatge i Comunicació Gràfica
Universitat d'Alacant

I.S.B.N.: 84-7908-502-9

Dipòsit legal: MU-1.657-1999

Fotocomposició i impressió: Compobell, S.L. Murcia

Imprés a Espanya

Cap part d'aquesta publicació no pot ésser reproduïda, emmagatzemada o transmesa de cap manera ni per cap mitjà, ja siga electrònic, químic, mecànic, òptic, de gravació o de fotocòpia, sense el permís previ de l'editor.

Aquest llibre conté més d'un centenar de problemes de física, que cobreixen gran part dels continguts típics que s'imparteixen en una assignatura de Física, en els primers cursos d'una carrera científica o tècnica.

La selecció del material no s'ha fet pensant d'oferir ni molts problemes ni que aquests siguin originals, sinó que hem fet èmfasi en el procediment sistematitzat i detallat de la seua resolució. Per fer això hem seguit la metodologia consistent a:¹ (i) descriure breument l'enunciat, amb símbols i dibuixos, per a saber si hem entès bé allò que ens demana l'enunciat, (ii) planificar el camí que seguirem per a trobar la solució, seleccionant les relacions físiques adients en cada cas, (iii) executar els càlculs i resoldre les equacions fins a arribar al resultat final, i, per últim, (iv) comprovar que el resultat al qual hem arribat està bé o que, almenys, siga raonable (això pot aconseguir-se mirant les dimensions i l'ordre de magnitud dels resultats que hem obtingut, estudiant el comportament en casos límits, quan alguna de les variables involucrades es fa molt gran o molt menuda...). L'explicació de molts problemes està acompanyada de comentaris i notes a peu de pàgina que proporcionen informació complementària, d'aquesta manera s'enriqueix el contingut del problema.

Hi ha diferents perspectives per a resoldre el mateix problema. Per això alguns problemes similars presenten plantejaments (aparentment) diferents, encara que en el fons s'usen les mateixes lleis de la física. També és cert que hi ha alguns problemes que podrien estar ubicats en diversos capítols, però els que apareixen en cada capítol no s'han de considerar com a desconnectats de la resta, sinó que en molts apareixen barrejats conceptes que provenen de diferents àrees de la física. La inclusió d'un problema en un capítol o en un altre respon a l'interès per ressaltar algun concepte més que un altre, o algun procediment de càlcul en particular.

Hem procurat que l'extensió de tots els capítols siga aproximadament la mateixa, tanmateix hi ha capítols de diferent llargària. Per una banda, la justificació és que no tots els continguts ocupen el mateix en els temaris, i, per una altra banda, alguns capítols poden complementar-se amb d'altres (n'és el cas del capítol de "Gravitació", el qual pot complementar-se amb el de "Camp i potencial elèctrics", canviant les càrregues per masses, la constant $1/4\pi\epsilon_0$ per G , i considerar que la interacció gravitatòria sempre és atractiva).

Hi ha molts enunciats de problemes que s'han extret del llibre *Física*, de M. Alonso i E. J. Finn (Addison-Wesley Iberoamericana, Buenos Aires, 1995). Aquest és un text que, durant alguns anys, s'ha usat profusament en les universitats del País Valencià i, en certa mesura, ha influït sobre el contingut del present text. Per això, en el capítol sobre "Formació d'imatges" treballarem amb el conveni de signes cartesià que utilitza aquest llibre. A hores d'ara hi ha publicats molts més textos de física, i els estudiants ja poden disposar d'una bibliografia adient (encara que poc nombrosa) per a estudiar en valencià² un curs de física. Citem-ne, per exemple, els llibres de P. A. Tipler, *Física* (Reverté, Barcelona, 1995), o de V. Martínez Sancho, *Fonaments de física* (Enciclopèdia Catalana, Barcelona, 1991 i 1992).

¹ Podeu trobar més detalls sobre aquest procediment en les referències següents: J. H. P. van Weeren, F. F. M. de Mul, M. J. Peters, H. Kramers-Pals i H. J. Roossink, "Teaching problem-solving in physics: A course in electromagnetism", *American Journal of Physics* 50 (1982) 725; R. G. F. Fuller, "Solving physics problems - how do we do it?", *Physics Today* 35 (1982) 43, i A. Rañada, *Dinàmica clàssica* (Alianza, Madrid, 1990) sec. 1.3, p. 22.

² També dit català, ja que es tracta de la mateixa llengua, matisada per diferents accents i modismes.

Volem fer palés el nostre agraïment a aquelles persones que, d'una manera o d'una altra, s'han vist parcialment involucrades en els quefers propis de l'elaboració d'un llibre: Vicent Esteve Guilabert ha col·laborat en la realització de part de les figures, Marinela Garcia Sempere i Mikel Forcada Zubizarreta ens han aconsellat sobre dubtes terminològics, i Joan Perujo i Joan Borja han unificat i millorat l'estil del text. Com que aquesta col·lecció de problemes s'ha derivat de la nostra activitat docent, en part en el Departament de Física Aplicada de la Universitat d'Alacant i en part en el Departament de Física de la Universitat de Múrcia, no seria just deixar de reconèixer la tasca d'aquells companys de departament amb els quals hem compartit docència i discussions sobre aspectes didàctics del material que ara presentem. El Centre de Terminologia TERMCAT també ens ha ajudat a aclarir alguns dubtes terminològics puntuals.

Per últim, i no per això, menys important, també volem deixar constància del nostre agraïment al Secretariat de Promoció del Valencià, de la Universitat d'Alacant, per la concessió d'una beca per a la realització d'aquest treball.

Com en tot text imprés, aquest no està lliure d'errades tipogràfiques. Demanem disculpes per endavant i esperem que aquestes no hi siguen cap inconvenient greu. Si ens feu arribar els vostres comentaris i suggeriments procurarem tenir-los en compte per a treballs futurs.

RAFAEL GARCIA MOLINA

ISABEL ABRIL

*A les nostres filles:
Marina i Clàudia*

CONTINGUT

1	Oscil·lador harmònic	1
2	Moviment relatiu	29
3	Relativitat especial	57
4	Sistemes de partícules	71
5	Sòlid rígid	93
6	Fluids	119
7	Gravitació	137
8	Camp i potencial elèctrics	153
9	Conductors i dielèctrics	183
10	Efectes del camp magnètic	203
11	Orígens i propietats del camp magnètic	231
12	Inducció electromagnètica	255
13	Circuits elèctrics. Corrent continu	285
14	Circuits elèctrics. Corrent altern	307
15	Ones	325
16	Ones electromagnètiques	351
17	Transmissió, reflexió i polarització de la llum	369
18	Formació d'imatges	401
19	Comportament corpuscular de la llum	423

1

Oscil·lador harmònic

1.1 Una partícula fa un moviment harmònic simple sobre una línia recta i té velocitats de 9 cm/s i 2 cm/s quan es troba a 4 cm i 6 cm, respectivament, de la posició d'equilibri. Calculeu l'amplitud, el període, la freqüència angular i l'acceleració màxima del moviment.

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}, v_1 = 9 \text{ cm/s} = 0.09 \text{ m/s} \\ x_2 &= 6 \text{ cm} = 0.06 \text{ m}, v_2 = 2 \text{ cm/s} = 0.02 \text{ m/s} \\ A, T, \omega, a_{\text{màx}}? \end{aligned}$$

Es tracta d'un moviment harmònic simple. Les equacions que en donen l'elongació i la velocitat són

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \tag{1}$$

$$v = \omega A \cos(\omega t + \alpha) \tag{2}$$

Si anomenem t_i l'instant en què la partícula té l'elongació x_i i la velocitat v_i ($i = 1, 2$), podem escriure les relacions

$$x_1 = A \sin(\omega t_1 + \alpha) \tag{3}$$

$$v_1 = \omega A \cos(\omega t_1 + \alpha) \tag{4}$$

$$x_2 = A \sin(\omega t_2 + \alpha) \tag{5}$$

$$v_2 = \omega A \cos(\omega t_2 + \alpha) \tag{6}$$

Si elevem al quadrat les eqs. (3) i (4),

$$x_1^2 = A^2 \sin^2(\omega t_1 + \alpha) \tag{7}$$

$$v_1^2 = A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t_1 + \alpha) = A^2 \omega^2 [1 - \sin^2(\omega t_1 + \alpha)] \tag{8}$$

obtenim

$$v_1^2 = A^2 \omega^2 - x_1^2 \omega^2 \tag{9}$$

Anàlogament, de les eqs. (5) i (6), tindrem

$$v_2^2 = A^2 \omega^2 - x_2^2 \omega^2 \tag{10}$$

Les eqs. (9) i (10) ens proporcionen un sistema de dues equacions, amb dues incògnites, ω i A , que, resoltes, donen

$$\omega = \left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2} \right)^{1/2} \tag{11}$$

$$A = \left(\frac{x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2} \right)^{1/2} \tag{12}$$

i a partir de l'eq. (11) obtenim

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2} \right)^{1/2} \quad (13)$$

En substituir-hi els valors numèrics, obtenim

$$A = 0.0609 \text{ m} = 6.09 \text{ cm}, \quad T = 3.20 \text{ s}, \quad \omega = 1.96 \text{ rad/s} \quad (14)$$

Com que l'acceleració d'un moviment harmònic simple ve donada per

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) \quad (15)$$

els valors extrems de l'acceleració, $a_{\text{màx,mín}}$, verificaran la relació

$$0 = \left. \frac{da}{dt} \right|_{a_{\text{màx,mín}}} = -A\omega^3 \cos(\omega t + \alpha) \quad (16)$$

i com que $A\omega^3 \neq 0$, l'eq. (16) implica que $\cos(\omega t + \alpha) = 0$, és a dir, $\sin(\omega t + \alpha) = \pm 1$, i de l'eq. (15) obtenim

$$a_{\text{màx,mín}} = \pm A\omega^2 = \pm 0.234 \text{ m/s}^2 = \pm 23.4 \text{ cm/s}^2 \quad (17)$$

El valor màxim del mòdul de l'acceleració val 0.234 m/s^2 , i els signes *més* i *menys* fan referència al sentit del moviment.

L'acceleració, la freqüència i l'elongació d'un moviment harmònic simple estan relacionades per

$$a = -\omega^2 x \quad (18)$$

Quan a pren un valor extrem, com que ω està fixat per a un moviment harmònic simple determinat, haurà de complir-se que x és l'elongació màxima (és a dir, l'amplitud), cosa que es verifica simplement substituint els valors donats per les expressions (14) i (17) en l'eq. (18).

1.2 Deixem caure un bloc de 5 kg des d'una altura de 75 cm respecte de l'extrem superior d'un ressort vertical que està unit a terra per l'extrem inferior. En caure, el bloc es queda unit al ressort. Si la constant elàstica del ressort val $k = 2500 \text{ N/m}$, calculeu la longitud màxima de compressió del ressort. Suposeu que la massa del ressort i que la fricció amb l'aire són negligibles.

$k = 2500 \text{ N/m}$, $m = 5 \text{ kg}$, $h = 75 \text{ cm} = 0.75 \text{ m}$
 $y_{\text{màx}}$ = compressió màxima del ressort?

Pel principi de conservació de l'energia, l'energia del sistema quan el bloc encara no ha començat a caure ha de ser igual a l'energia del sistema quan el bloc ha aconseguit comprimir el ressort a la seua elongació màxima: $E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$. En tot el que segueix suposarem el bloc com una massa puntual.

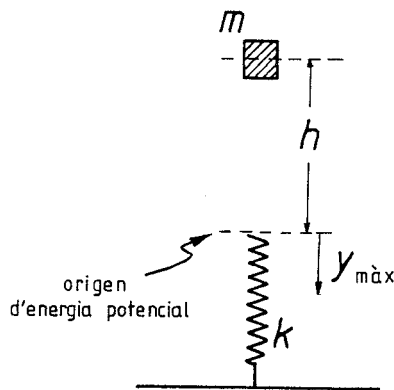


FIG. 1

Per conveniència, prenem l'origen d'altures i, per tant, l'origen d'energia potencial, en la posició corresponent a l'extrem del ressort sense deformat; per tant, quan el bloc encara no ha començat a caure, l'energia del sistema format pel bloc i el ressort és

$$\begin{aligned}
 E_{\text{inicial}} &= E_{\text{inicial}}^{\text{bloc}} + E_{\text{inicial}}^{\text{ressort}} \\
 &= E_{\text{pot}}^{\text{bloc}} + E_{\text{cinètic}}^{\text{bloc}} + E_{\text{pot}}^{\text{ressort}} + E_{\text{cinètic}}^{\text{ressort}} = mgh
 \end{aligned} \quad (1)$$

En l'equació anterior hem tingut en compte que l'energia potencial del bloc, mesurada des de l'origen de potencials de la fig. 1, val $E_{\text{pot}}^{\text{bloc}} = mgh$; $E_{\text{cinètic}}^{\text{bloc}} = 0$, perquè el bloc està en repòs; $E_{\text{pot}}^{\text{ressort}} = 0$, ja que el ressort està en la seua posició d'equilibri.

Quan el bloc ha comprimit el ressort a la seua elongació màxima, l'energia del sistema serà

$$\begin{aligned}
 E_{\text{final}} &= E_{\text{final}}^{\text{bloc}} + E_{\text{final}}^{\text{ressort}} = E_{\text{pot}}^{\text{bloc}} + E_{\text{cinètic}}^{\text{bloc}} + E_{\text{pot}}^{\text{ressort}} + E_{\text{cinètic}}^{\text{ressort}} \\
 &= mgy_{\text{màx}} + \frac{1}{2}ky_{\text{màx}}^2
 \end{aligned} \quad (2)$$

Ara hem usat que l'energia potencial del ressort quan té compressió màxima val $E_{\text{pot}}^{\text{ressort}} = ky_{\text{màx}}^2/2$; $E_{\text{pot}}^{\text{bloc}} = mgy_{\text{màx}}$, ja que el bloc està ara a una altura $y_{\text{màx}}$ respecte de l'origen d'altures (quan farem els càlculs, si obtenim un valor de $y_{\text{màx}}$ negatiu això vol dir que està per sota de l'origen d'altures que hem triat i correspon a una compressió del ressort); $E_{\text{cinètic}}^{\text{bloc}} = 0$, perquè quan el bloc arriba a la posició de màxima elongació la seua velocitat és nul·la, ja que no pot continuar baixant més; $E_{\text{cinètic}}^{\text{ressort}} = 0$ perquè en la posició de màxima elongació la velocitat d'un moviment harmònic simple és zero.

Igualant les eqs. (1) i (2) obtenim una equació de segon grau per a $y_{\text{màx}}$

$$\frac{1}{2}ky_{\text{màx}}^2 + mgy_{\text{màx}} - mgh = 0 \quad (3)$$

la solució de la qual és

$$y_{\text{màx}} = \frac{-mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k} \quad (4)$$

En substituir els valors de les dades (tots en el mateix sistema d'unitats) obtenim que

$$y_{\text{màx},1} = -0.19 \text{ m} \quad (5)$$

$$y_{\text{màx},2} = +0.15 \text{ m} \quad (6)$$

El valor donat per l'eq. (5) es correspondria amb el fet que el ressort es desplaçaria cap amunt, la qual cosa no té sentit, atès el plantejament inicial del problema, ja que un ressort en equilibri només experimentarà una elongació inicial (després oscil·larà) en el sentit de la força aplicada. En el nostre cas, la força aplicada és el pes del bloc, que va dirigit cap avall, segons la disposició representada en la fig. 1.

De les dues solucions, eqs. (5) i (6), la que té signe negatiu, i.e., $y_{\text{màx}} = -0.19 \text{ m}$, és la que correspon a la compressió màxima del ressort, perquè, tal com hem dit abans, el signe negatiu indica que la posició del bloc en l'extrem del ressort està per sota de la posició original de l'extrem del ressort.

L'altra solució, $y_{\text{màx}} = 0.15 \text{ m}$, també és una solució física del problema, encara que no correspon a la resposta concreta d'allò que demana el problema. De fet, després de comprimir-se el sistema format pel bloc unit al ressort, tot ell s'estirà de nou i la solució (6) ens indica que, en estirar-se, el sistema bloc-ressort assolirà una altura de 0.15 m per damunt de la posició original de l'extrem superior del ressort. Després, el bloc unit al ressort continuarà oscil·lant, si no hi ha fricció, entre les dues posicions donades per les eqs. (5) i (6).

Si aprofundim un poc més en el problema podem calcular la posició d'equilibri del sistema format pel bloc damunt del ressort. Aquesta posició correspon a una compressió y tal que la força recuperadora ky equilibra el pes de l'objecte, mg :

$$ky = mg \quad \Rightarrow \quad y = \frac{mg}{k} = 0.0196 \text{ m} \quad (7)$$

Com veiem, la posició d'equilibri correspon a una coordenada $y = 0.0196 \text{ m}$ per sota de l'origen d'altures. Així doncs, si escrivim les posicions y' , entre les quals oscil·la la massa m , referides a la posició d'equilibri del sistema bloc-ressort, eq. (7), obtenim¹ que

$$y'_1 = y_{\text{màx},1} + y = -0.1922 + 0.0196 = -0.1726 \text{ m} \quad (8)$$

$$y'_2 = y_{\text{màx},2} - y = +0.1530 + 0.0196 = +0.1726 \text{ m} \quad (9)$$

¹Per a obtenir els resultats de les eqs. (8) i (9) hem hagut de prendre més xifres decimals en els valors de $y_{\text{màx},1}$ i $y_{\text{màx},2}$, donats per les eqs. (5) i (6). D'altra banda obtindríem una asimetria en els valors de y'_1 i y'_2 que es deuria només a problemes d'arrodoniment numèric i no tindria sentit físic.

Això indica que el sistema bloc-ressort oscil·la simètricament respecte de la seua posició d'equilibri, tal com representa la fig. 2.

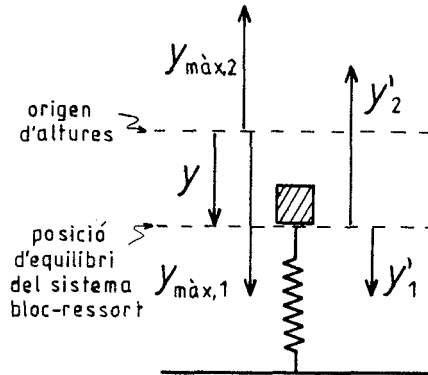


FIG. 2

1.3 Un projectil de 50 g viatja horitzontalment, quan xoca i penetra en un bloc de fusta d'1.5 kg que està unit a un ressort de constant elàstica 980 N/m i que es troba en repòs sobre una superfície horitzontal. A conseqüència de l'impacte el ressort es comprimeix un màxim de 20 cm. Si sabem que el coeficient de fregament entre el bloc i la superfície val 0.5, calculeu: (a) la velocitat del projectil abans del xoc, (b) la velocitat amb què el bloc passa per la posició inicial quan el ressort es distén, i (c) la posició del bloc quan el ressort ha arribat a la distensió màxima després de la compressió inicial. Suposeu que el ressort no té massa.

$$M = 1.5 \text{ kg}, x_B = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, m = 50 \text{ g} = 0.05 \text{ kg}, k = 980 \text{ N/m}, \mu = 0.5$$

(a) v_0 ?

(b) V_A ?

(c) posició del bloc quan la distensió del ressort és màxima?

En la fig. 1 representem la disposició inicial del sistema, i també els principals símbols que farem servir al llarg d'aquest problema. En tot el problema considerarem el bloc i el projectil com si foren punts materials.

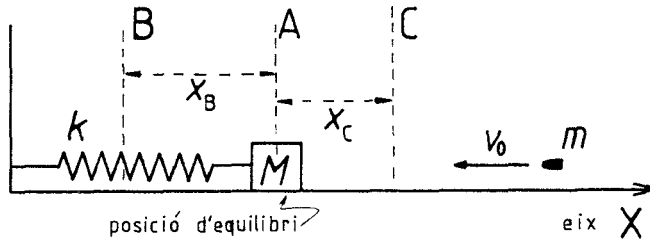


FIG. 1

(a) No podem aplicar el principi de conservació de l'energia abans que el projectil s'introdueixi en el bloc, ja que desconeixem l'energia de deformació que es consumeix en el procés de penetració del projectil dins el bloc. Però sí que podem aplicar el principi de conservació del moment lineal (la qual cosa no depèn del fet que el procés siga elàstic o inelàstic) entre els instants just abans i just després del xoc, els quals són p_{inicial} i p_{final} , respectivament,

$$p_{\text{inicial}} = p_{\text{final}} \quad (1)$$

on,

$$p_{\text{inicial}} = p_{\text{projectil}} + p_{\text{bloc}} = mv_0 + MV_0 \quad (2)$$

i

$$p_{\text{final}} = (m + M)V \quad (3)$$

on v_0 i V_0 fan referència a la velocitat del projectil i a la del bloc, respectivament, abans de la col·lisió. V és la velocitat del sistema format pel bloc amb el projectil dins, justament després de la col·lisió. A més a més, cal tenir en compte que $V_0 = 0$, perquè el bloc està en repòs abans de la col·lisió.

Com que tot el moviment discorre horitzontalment, únicament farem la descripció emprant una coordenada (l'horitzontal, x) i, per tant, magnituds escalars,

$$mv_0 = (m + M)V \quad (4)$$

Immediatament després d'introduir-s'hi el projectil, sí que podrem aplicar el principi de conservació d'energia entre les posicions A (on es produeix la col·lisió) i la posició B (on es produeix la compressió màxima del ressort), tenint, a més, en compte l'energia consumida pel fregament que realitza el bloc, més el projectil introduït, amb la superfície que forma el terra:

$$[E_{\text{cinètic}}^{\text{BP}} + E_{\text{pot}}^{\text{BP}} + E_{\text{elàstic}}^{\text{R}}]_{\text{A}} = [E_{\text{cinètic}}^{\text{BP}} + E_{\text{pot}}^{\text{BP}} + E_{\text{elàstic}}^{\text{R}}]_{\text{B}} + E_{\text{freg,AB}} \quad (5)$$

on BP indica el sistema format pel bloc més el projectil introduït i R fa referència al ressort. Si considerem els valors dels diferents tipus d'energia, tindrem:

$$E_{\text{cinètic,A}}^{\text{BP}} = \frac{1}{2}(m + M)V^2 \quad (6)$$

$$E_{\text{elàst},A}^R = 0 \quad (\text{el ressort està sense deformar}) \quad (7)$$

$$E_{\text{cinèti},B}^{\text{BP}} = 0 \quad (\text{ja que } v_{\text{màx elong}} = 0) \quad (8)$$

$$E_{\text{elàst},B}^R = \frac{1}{2} k x_B^2 \quad (9)$$

$$E_{\text{freq},AB} = F_{\text{freq}} x_B = (m + M) g \mu x_B \quad (10)$$

En la darrera equació hem tingut en compte que $F_{\text{freq}} = \text{Normal} \cdot \mu = (m + M) g \mu$, i que la distància recorreguda entre les posicions A i B val x_B . L'energia potencial gravitatòria és la mateixa en les dues posicions A i B, perquè el moviment discorre al llarg d'un pla horitzontal. Per tant, $E_{\text{pot},A}^{\text{BP}} = E_{\text{pot},B}^{\text{BP}}$.

L'eq. (5) queda, doncs, com

$$\frac{1}{2} (m + M) V^2 = \frac{1}{2} k x_B^2 + (m + M) g \mu x_B \quad (11)$$

De les eqs. (4) i (11) traiem que la velocitat amb la qual ha de xocar el projectil amb el bloc val

$$v_0 = \frac{1}{m} \sqrt{(m + M) [k x_B^2 + 2(m + M) g \mu x_B]} = 161.8 \text{ m/s} \quad (12)$$

(b) Ara hem de calcular la velocitat V_A amb la qual passa el bloc pel punt A després d'eixir de la posició B (fig. 1). Pel principi de conservació de l'energia entre les posicions B i A, ara escrivim

$$[E_{\text{cinèti}}^{\text{BP}} + E_{\text{pot}}^{\text{BP}} + E_{\text{elàst}}^R]_B = [E_{\text{cinèti}}^{\text{BP}} + E_{\text{pot}}^{\text{BP}} + E_{\text{elàst}}^R]_A + E_{\text{freq},BA} \quad (13)$$

D'una manera anàloga a la d'abans, obtenim que

$$E_{\text{cinèti},B}^{\text{BP}} = 0 \quad (\text{en la posició B el ressort no té velocitat}) \quad (14)$$

$$E_{\text{elàst},B}^R = \frac{1}{2} k x_B^2 \quad (15)$$

$$E_{\text{cinèti},A}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} (m + M) V_A^2 \quad (16)$$

$$E_{\text{elàst},A}^R = 0 \quad (\text{en la posició A el ressort no té elongació}) \quad (17)$$

$$E_{\text{pot},B}^{\text{BP}} = E_{\text{pot},A}^{\text{BR}} \quad (18)$$

$$E_{\text{freq},BA} = (m + M) g \mu x_B \quad (19)$$

Això ens dóna

$$\frac{1}{2} k x_B^2 = \frac{1}{2} (m + M) V_A^2 + (m + M) g \mu x_B \quad (20)$$

i d'ací calculem V_A ,

$$V_A = \sqrt{\frac{k x_B^2 - 2(m + M) g \mu x_B}{(m + M)}} = 4.83 \text{ m/s} \quad (21)$$

(c) Pel principi de conservació de l'energia entre les posicions A i C:

$$[E_{\text{cinètic}}^{\text{BP}} + E_{\text{pot}}^{\text{BP}} + E_{\text{elàst}}^{\text{R}}]_{\text{A}} = [E_{\text{cinètic}}^{\text{BP}} + E_{\text{pot}}^{\text{BP}} + E_{\text{elàst}}^{\text{R}}]_{\text{C}} + E_{\text{freg,AC}} \quad (22)$$

Igual com abans,

$$E_{\text{elàst,A}}^{\text{R}} = 0 \quad (\text{en la posició A el ressort no té elongació}) \quad (23)$$

$$E_{\text{cinètic,C}}^{\text{BP}} = 0 \quad (\text{en la posició C el ressort no té velocitat}) \quad (24)$$

$$E_{\text{elàst,C}}^{\text{R}} = \frac{1}{2} k x_{\text{C}}^2 \quad (25)$$

$$E_{\text{pot,A}}^{\text{BP}} = E_{\text{pot,C}}^{\text{BR}} \quad (26)$$

$$E_{\text{freg,AC}} = (m + M) g \mu x_{\text{C}} \quad (27)$$

on x_{C} és l'elongació del ressort en la posició C. De manera anàloga als càlculs anteriors obtenim que

$$x_{\text{C}} = \frac{-(m + M) g \mu \pm \sqrt{(m + M)^2 g^2 \mu^2 + k(m + M) V_{\text{A}}^2}}{k} = \begin{cases} 0.185 \text{ m} \\ -0.200 \text{ m} \end{cases} \quad (28)$$

La solució amb signe negatiu, -0.200 m , ens donaria el punt on aniria a parar el bloc quan es mou cap a l'esquerra. Però no es tracta d'això, sinó que busquem el punt on anirà el bloc quan sobrepassa el punt A després d'eixir de B. Per això, la resposta en aquest cas correspon al valor 0.185 m .

1.4 Un pèndol d'1 m de llargària i amb una massa puntual de 0.6 kg se separa de la posició d'equilibri, de manera que se situa 4 cm sobre l'altura d'equilibri quan comença a oscil·lar. Expressen en funció de l'altura del pèndol respecte de la posició d'equilibri: (a) la força tangencial a la trajectòria, (b) l'acceleració tangencial, (c) la velocitat i (d) el desplaçament angular. Obteniu els valors numèrics corresponents al punt en què té l'amplitud màxima, i al punt més baix de la trajectòria del pèndol.

$\ell = 1 \text{ m}$, $m = 0.6 \text{ kg}$, $y_1 = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}$

(a) $F_{\text{T}}?$

(b) $a_{\text{T}}?$

(c) $v_{\text{T}}?$

(d) $\vartheta?$

Considerarem que el fil del pèndol és inextensible i de massa nul·la. Expressarem tots els resultats en funció de l'altura y respecte de la posició d'equilibri (fig. 1).

Les úniques forces que actuen sobre la massa m són la tensió T i el pes $P = mg$. La tensió T és perpendicular a la trajectòria de la partícula, per això no pot donar lloc a cap component tangencial. En canvi, el pes sí que pot proporcionar un component

tangencial. Situem-nos en el punt D de la fig. 1. Segons el triangle DEG de la fig. 2, tenim que la força tangencial val

$$F_T = mg \sin \vartheta \tag{1}$$

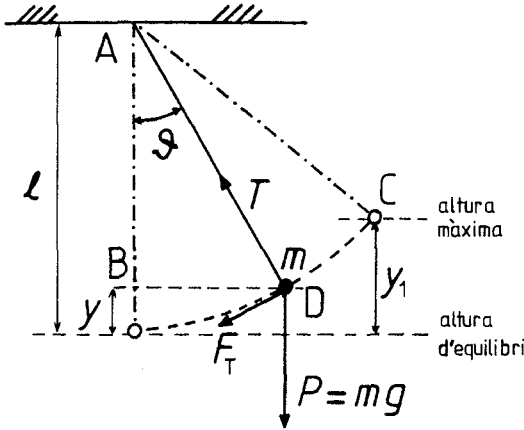


FIG. 1

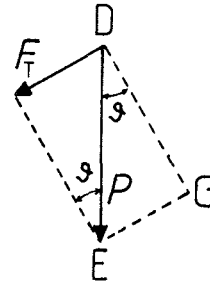


FIG. 2

Un triangle similar a el anterior és el ABD de la fig. 1, en el qual es verifica que

$$\cos \vartheta = \frac{\ell - y}{\ell} \tag{2}$$

(a) En combinar les eqs. (1) i (2), tenim que

$$F_T = mg \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} = mg \sqrt{1 - \frac{(\ell - y)^2}{\ell^2}} \tag{3}$$

(b) Coneguda la força tangencial, és elemental calcular l'acceleració tangencial a la qual es troba sotmesa la massa m ,

$$a_T = \frac{F_T}{m} = g \sqrt{1 - \frac{(\ell - y)^2}{\ell^2}} \tag{4}$$

(c) Calcularem la velocitat tangencial en el punt genèric D aplicant-hi el principi de conservació de l'energia, $E_C = E_D$. Prendrem el punt més baix de la posició del pèndol, que correspon a la posició d'equilibri, com a origen d'energia potencial.

En el punt C tenim

$$E_C = E_{\text{pot},C} + E_{\text{cinètic},C} = mgy_1 \tag{5}$$

$E_{\text{cinètic},C} = 0$, ja que quan el pèndol arriba a la seua altura màxima, té velocitat nul·la.

En el punt D la massa té energia potencial, mgy , i energia cinètica, $mv_T^2/2$, amb la qual cosa tenim

$$E_D = E_{\text{pot},D} + E_{\text{cinètic},D} = mgy + \frac{1}{2}mv_T^2 \tag{6}$$

on v_T és la velocitat tangencial. De les eqs. (5) i (6) s'obté que

$$mgy_1 = mgy + \frac{1}{2}mv_T^2 \quad \Rightarrow \quad v_T = \sqrt{2g(y_1 - y)} \quad (7)$$

Hem expressat la força, l'acceleració i la velocitat tangencials, eqs. (3), (4) i (7), en funció de la separació vertical y respecte de la posició d'equilibri. Com veiem, F_T i a_T no depenen de la posició inicial y_1 des de la qual s'inicia el moviment, en canvi, la velocitat sí que té una dependència amb y_1 ; de fet, v_T depèn de la distància vertical entre l'altura màxima i la posició en què es calcula la velocitat.

(d) A partir de l'eq. (2) es conclou que el desplaçament angular val

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{\ell - y}{\ell}\right) \quad (8)$$

En el punt d'altura màxima, $y = y_1$, que en la fig. 1 correspon al punt C, tindrem els resultats numèrics següents

$$F_T = mg\sqrt{1 - \left(1 - \frac{y_1}{\ell}\right)^2} = 1.65 \text{ N} \quad (9)$$

$$a_T = g\sqrt{1 - \left(1 - \frac{y_1}{\ell}\right)^2} = 2.74 \text{ m/s}^2 \quad (10)$$

$$v_T = 0 \text{ m/s} \quad (11)$$

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{\ell - y}{\ell}\right) = 16.26^\circ \quad (12)$$

Podem veure que el valor de la velocitat que hem obtingut dona lloc a una energia cinètica nul·la, tal com hem considerat justament en l'eq. (5). Les altres magnituds: F_T , a_T i ϑ , tenen un valor màxim.

En el punt més baix, $y = 0$, tindrem els valors

$$F_T = 0 \text{ N} \quad (13)$$

$$a_T = 0 \text{ m/s}^2 \quad (14)$$

$$v_T = 2gy_1 = 0.89 \text{ m/s} \quad (15)$$

$$\vartheta = 0^\circ \quad (16)$$

Ara, el valor de la velocitat (i, per tant, de l'energia cinètica) és màxim. En canvi, F_T , a_T i ϑ prenen el valor mínim.

1.5 Coneixem l'energia potencial de tres sistemes conservatius: (i) $E_p = 65x^5 + x^2$, (ii) $E_p = 88x^2$, (iii) $E_p = 2 \tan x$, on x és el desplaçament respecte de la posició d'equilibri, i totes les magnituds estan expressades en el SI. Determineu: (a) si el moviment de cada sistema respon a un moviment harmònic simple, (b) la freqüència angular del(s) moviment(s) harmònic(s) simple(s) corresponent(s), i (c) la força que actua sobre cada sistema.

(i) $E_p = 65x^5 + x^2$

(ii) $E_p = 88x^2$

(iii) $E_p = 2 \tan x$

(a) moviment harmònic simple?

(b) ω ?

(c) F ?

(a) Serà moviment harmònic simple aquell en què l'energia potencial depenga quadràticament del desplaçament

$$E_p \propto x^2 \quad (1)$$

Més concretament, podem dir que l'expressió habitual de l'energia en el moviment harmònic simple és

$$E_p = \frac{k}{2}x^2 \quad (2)$$

on k és la constant elàstica (o harmònica) del sistema.

És obvi que, de les tres possibilitats, únicament la (ii) correspon a un moviment harmònic simple, ja que

$$E_p = 88x^2 \quad (3)$$

(b) La freqüència angular, ω , d'un moviment harmònic simple està relacionada amb la constant elàstica k mitjançant

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

De les eqs. (2) i (3) obtenim que $k = 2 \cdot 88 \text{ N/m} = 176 \text{ N/m}$, per tant,

$$\omega = \sqrt{\frac{176}{m}} \text{ rad/s} \quad (5)$$

on m representa la massa del sistema que efectua el moviment harmònic simple.

(c) La força que actua sobre un sistema conservatiu, l'energia potencial del qual depèn només de la coordenada x , està relacionada amb l'energia potencial per

$$F = -\frac{dE_p}{dx} \quad (6)$$

Aplicant aquesta relació als tres casos d'energia potencial, tenim: (i) $F = -325x^4 - 2x$, (ii) $F = -176x$, i (iii) $F = -2/\cos^2 x$.

Encara que els casos (i) i (ii) no corresponen a un moviment harmònic simple, podem preguntar-nos si en el cas de petits desplaçaments (la qual cosa implica que $x \ll 1$) tenen un comportament aproximat de moviment harmònic simple.² Per a comprovar això farem un desenvolupament de l'energia potencial en sèrie de potències del desplaçament x . Si el terme dominant (quan $x \ll 1$ és el que corresponga a la potència de x més baixa) és x^2 , podem dir que el sistema es comporta com un oscil·lador harmònic en el cas de desplaçaments menuts respecte de la seua posició d'equilibri.

L'energia potencial del cas (i) ja està escrita com a sèrie de potències de x ,

$$E_p = 65x^5 + x^2 \approx x^2 \quad (\text{quan } x \ll 1) \quad (7)$$

En canvi, en el cas (iii) cal fer un desenvolupament de la funció $\tan x$ en sèrie de potències de x

$$E_p = 2 \tan x \approx 2(x + \dots) \quad (\text{quan } x \ll 1) \quad (8)$$

Per tant, només el cas (i) correspon aproximadament a un moviment harmònic simple en el cas de petites oscil·lacions. En l'aproximació de l'eq. (7) podem aplicar-hi el mateix raonament que hem usat en els apartats (b) i (c).

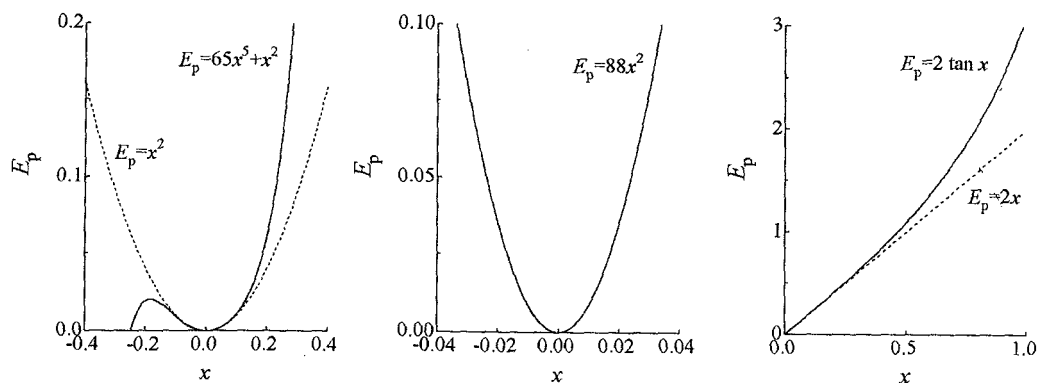
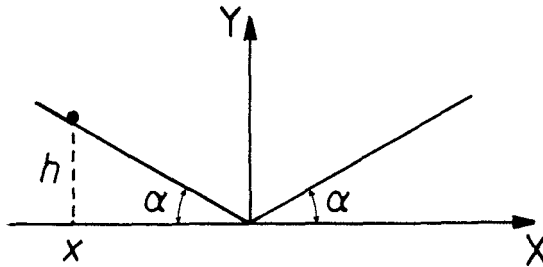


FIG. 1

En la fig. 1 hem representat l'energia potencial corresponent als tres casos, (i), (ii) i (iii), mitjançant una línia contínua. Només el cas (ii) té la forma parabòlica típica d'un oscil·lador harmònic. En els casos (i) i (ii) hem dibuixat mitjançant una línia discontinua les aproximacions corresponents a petites oscil·lacions donades per les eqs. (7) i (8), respectivament. Com podem veure, només en el cas (i) les corbes contínua i discontinua coincideixen satisfactòriament per a valors menuts de x .

²Aquesta situació sol donar-se sovint en la pràctica, ja que molts sistemes, que estrictament no es comporten com un oscil·lador harmònic, sí que es comporten com a tals en el cas de petites oscil·lacions al voltant de la posició d'equilibri.

1.6 Una partícula rellisca sense fricció sobre dos plans que formen una inclinació d'un angle α respecte de l'horitzontal, tal com s'il·lustra en la figura. (a) Si h és l'altura inicial de la partícula, calculeu el període del moviment descrit per aquesta. (b) És aquest un moviment harmònic simple?



- (a) T ?
 (b) moviment harmònic simple?

Abans de calcular el període, en primer lloc tractarem de comprovar si es tracta d'un moviment harmònic simple. Podem considerar que la partícula oscil·la:

- en la direcció vertical (únicament ens fixarem en la component y),
 - en la direcció horitzontal (únicament tindrem en compte la component x),
- però el fet que la partícula oscil·le no ens informa si es tracta d'un moviment harmònic simple o no. Per això intentarem contestar primerament l'apartat (b).

(b) Observem quant val l'energia potencial E_p . Si prenem com a origen de l'energia potencial gravitatòria la superfície horitzontal, segons la figura de l'enunciat, tenim

$$E_p = mgh = mgx \tan \alpha \tag{1}$$

Com veiem, aquesta energia no correspon a la d'un moviment harmònic simple perquè no és el cas en què $E_p \propto x^2$. Si s'haguera descrit el moviment respecte de la coordenada vertical, hauríem obtingut un resultat anàleg. En conseqüència, la partícula no descriu un moviment harmònic simple.

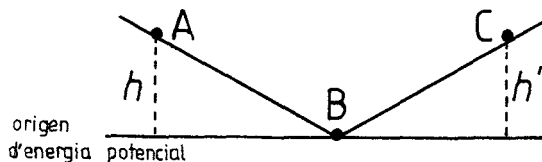


FIG. 1

(a) El període del moviment serà el temps que tarda a passar dues vegades pel mateix punt en les mateixes condicions, independentment que el moviment siga harmònic simple

o no. Si ens referim a la fig. 1, el període T serà el temps necessari per a anar del punt A al C i tornar al A (tot això passant pel punt B):

$$T = t_{AB} + t_{BC} + t_{CB} + t_{BA} \quad (2)$$

El que hem de fer ara és calcular quant val cadascun d'aquests temps (t_{AB} , t_{BC} , etc.). A partir de l'equació cinemàtica per a un moviment uniformement accelerat,

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (3)$$

descriurem el moviment per la rampa on es mou la partícula. Això ens permetrà calcular el temps t_{AB} , necessari per a anar del punt A al punt B. Tenint en compte que $s_0 = 0$, $s = \overline{AB} = h/\sin \alpha$, $v_0 = 0$ i $a = g \sin \alpha$ (fig. 2), és fàcil comprovar que

$$t_{AB} = \frac{\sqrt{2h/g}}{\sin \alpha} \quad (4)$$

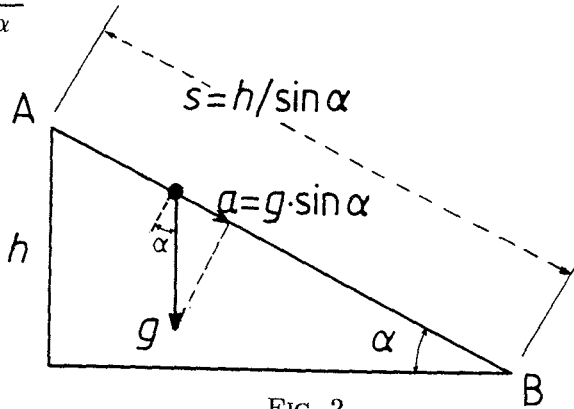


FIG. 2

Ara procedirem de forma similar en el cas de t_{BC} , però necessitem conèixer l'altura h' a què arribarà la partícula en C (fig. 1). Per a fer això podem aplicar-hi el principi de conservació de l'energia entre els punts B (tota cinètica) i A (tota potencial, ja que la partícula està en repòs), $E_A = E_B$:

$$E_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad E_A = mgh \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh} \quad (5)$$

on m és la massa de la partícula. També aplicarem el principi de conservació de l'energia entre B i C, $E_B = E_C$. De manera anàloga a la d'abans:

$$E_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad E_C = mgh' \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh'} \quad (6)$$

Obtenim, per tant, que $h' = h$, la qual cosa era fàcil de preveure si no hi ha fricció amb el pla inclinat.

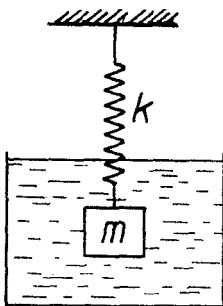
Novament cal procedir com hem fet abans en les eqs. (3) i (4), però ara tenint en compte que l'acceleració és de sentit contrari a la velocitat inicial. De manera que si ara substituïm en l'eq. (3) $v_0 = v_B = \sqrt{2gh}$, $s_0 = 0$, $s = \overline{BC} = h/\sin \alpha$ i $a = -g \sin \alpha$, això dóna que

$$t_{BC} = \frac{\sqrt{2h/g}}{\sin \alpha} \quad (7)$$

Per simetria (o per raonaments anàlegs als anteriors) és senzill comprovar que $t_{AB} = t_{BC} = t_{CB} = t_{BA}$. Per tant, el període de les oscil·lacions (no harmòniques) val

$$T = 4 \frac{\sqrt{2h/g}}{\sin \alpha} \quad (8)$$

1.7 Un ressort, de constant elàstica $k = 5000 \text{ N/m}$ i de massa i volum negligibles, té penjat un cos de massa $m = 7 \text{ kg}$ en l'extrem inferior, de manera que el sistema en conjunt oscil·la sempre dins d'un fluid viscos, tal com mostra la figura. Si la força de resistència al desplaçament del cos dins el fluid és de 700 N quan aquest té una velocitat de 3 m/s , quin tipus de moviment efectua el cos en les condicions descrites? Si pengem el cos d'un ressort ($k = 1000 \text{ N/m}$) en les mateixes condicions d'abans, què ocorrerà ara?



$m = 7 \text{ kg}$, $F_{\text{freg}} = 700 \text{ N}$ quan $v = 3 \text{ m/s}$

tipus de moviment? $\begin{cases} k = 5000 \text{ N/m} \\ k = 1000 \text{ N/m} \end{cases}$

Podrem determinar el tipus de moviment a partir de l'equació del moviment. En primer lloc calcularem la posició d'equilibri del sistema, format pel cos més el ressort, submergit en el fluid. Per a deduir-la escriurem les forces que actuen sobre el cos, de volum V . Aquestes són: el pes $P = mg = V\rho_{\text{cos}}g$ que tira del cos cap avall, l'empenta del fluid cap amunt $E = V\rho_{\text{fluid}}g$ (segons el principi d'Arquimedes), i la força de tipus elàstic $F_{\text{elàst}} = -ky$ (on $y = -y_0$ és el desplaçament del cos més el ressort respecte de la posició d'equilibri del ressort només). En les expressions anteriors, g és la gravetat i ρ_{cos} i ρ_{fluid} representen, respectivament, les densitats del cos i del fluid. Aquest conjunt de forces ha d'equilibrar-se; per tant, les forces que actuen cap amunt hauran de ser iguals que les que actuen cap avall (fig. 1).

Com que les úniques forces que intervenen en el problema estan dirigides al llarg de l'eix vertical, prescindirem del caràcter vectorial de les forces i escriurem l'equilibri de forces com

$$F_{\text{elàst}} + E = P \quad (1)$$

és a dir,

$$ky_0 + V\rho_{\text{fluid}}g = V\rho_{\text{cos}}g \quad (2)$$

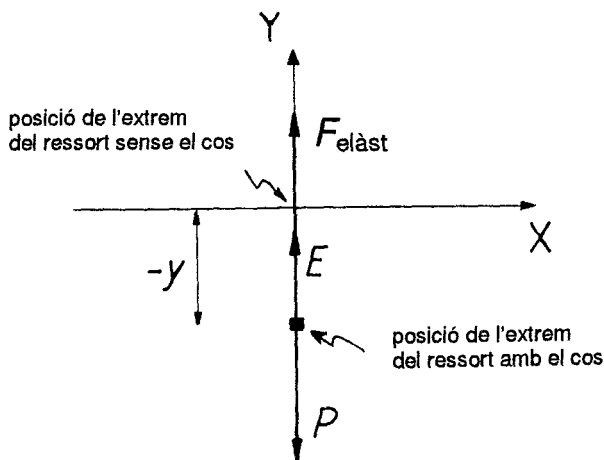


FIG. 1

on hem suposat que $\rho_{\text{cos}} > \rho_{\text{fluid}}$, ja que en cas contrari el cos suraria en el fluid. Considerem el desplaçament del ressort respecte del seu punt d'equilibri cap avall, per això la força de recuperació elàstica és cap amunt. De l'eq. (2) traiem que aquest desplaçament val

$$y_0 = \frac{V(\rho_{\text{cos}} - \rho_{\text{fluid}})g}{k} \quad (3)$$

Hem posat el subíndex *zero* per a indicar que és l'elongació del ressort més el cos en situació d'equilibri, que correspon a una situació estàtica.

Plantegem ara el cas dinàmic. Si desplaçem una distància y el cos de la posició d'equilibri que havíem considerat abans, les noves forces que hi actuen són:

- la força elàstica de recuperació

$$f_{\text{elàst}} = -ky \quad (4)$$

- la força de fregament, que en un fluid viscos és pot considerar proporcional i de sentit contrari a la velocitat del cos dins el fluid,

$$f_{\text{freg}} = -\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt} \quad (5)$$

on λ és la constant de proporcionalitat. Com que ara estem considerant un desplaçament respecte de la posició d'equilibri donada per l'eq. (3), no hem tingut en compte les forces que apareixen en l'eq. (1) que eren les responsables d'aquest equilibri.

Cal notar que ara hem pres com a origen de coordenades el corresponent a la posició d'equilibri calculada en l'eq. (3), on totes les forces estaven compensades, i les noves forces, que actuen quan el sistema es trau de l'equilibri, són les presentades en les eqs. (4) i (5).

A partir de la segona llei de Newton

$$\sum_i f_i = ma = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad (6)$$

(on $\sum_i f_i$ indica la resultant de totes les forces que actuen sobre el cos de massa m), i del fet que les forces que actuen sobre m quan està fora d'equilibri són les donades per les eqs. (4) i (5)

$$\sum_i f_i = -ky - \lambda \frac{dy}{dt} \quad (7)$$

obtenim

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (8)$$

que pot reescriure's com

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \quad (9)$$

on $\gamma = \lambda/2m$ se sol anomenar coeficient d'amortiment i $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ correspon a la freqüència pròpia de les oscil·lacions del bloc amb el ressort sense l'amortiment degut al fluid. L'equació anterior correspon a la d'un moviment oscil·latori amortit, la solució del qual és

$$y = A \exp(-\gamma t) \sin(\omega t + \alpha) \quad (10)$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ és la freqüència del moviment oscil·latori amortit, A n'és l'amplitud i α n'és la fase inicial (aquests valors es determinarien a partir de les condicions inicials del moviment).

De l'eq. (5) traiem $\lambda = |f_{\text{freq}}| / |v|$, amb la qual cosa

$$\gamma = \frac{\lambda}{2m} = \frac{|f_{\text{freq}}|}{2m |v|} = 16.67 \text{ rad/s} \quad (11)$$

A partir dels valors de $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ i de γ obtenim

$$\omega = \left[\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{(2m)^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{k}{m} - \frac{f_{\text{freq}}^2}{(2vm)^2} \right]^{1/2} = 20.90 \text{ rad/s} \quad (12)$$

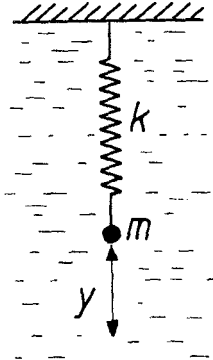
En definitiva, el moviment del cos lligat pel ressort dins el fluid en les condicions esmentades correspon a un moviment harmònic amortit, amb els paràmetres γ i ω especificats en les eqs. (11) i (12).

Si $k = 1000 \text{ N/m}$, obtenim que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{7}} = 11.95 \text{ rad/s} \quad (13)$$

Com que ara $\omega_0 < \gamma$, és fàcil deduir de l'expressió $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ que ω seria imaginària. Això vol dir que el sistema no arriba a oscil·lar, sinó que s'amorteix immediatament, ja que no té sentit una freqüència angular imaginària. En aquest cas tindríem un sistema sobreamortit.

1.8 Un cos de massa 500 g penja d'un ressort, de manera que es desplaça 2 cm sota l'acció d'una força de 100 N. Si hi apliquem una força periòdica $f = f_0 \cos(\omega_f t)$, determineu: (a) per a quins valors de ω_f es produiran les ressonàncies en amplitud o en energia, (b) quina és la constant d'amortiment, i (c) l'amplitud de ressonància en cada cas. Coneixem que per a $\omega = 110$ rad/s i $f_0 = 5$ N l'amplitud de les oscil·lacions és de 0.7 cm.



$$m = 500 \text{ g} = 0.5 \text{ kg}, y = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}, F = 100 \text{ N}$$

$$f = f_0 \cos(\omega_f t)$$

$$\omega_f = 110 \text{ rad/s}, f_0 = 5 \text{ N}, A = 0.7 \text{ cm} = 0.007 \text{ m}$$

(a) ω_f de ressonància en amplitud o en energia?

(b) constant d'amortiment?

(c) amplitud de ressonància en amplitud o en energia?

(a+b) Segons es dedueix de l'enunciat, es tracta d'un sistema que suporta oscil·lacions forçades, l'equació del moviment del qual és

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = f_0 \cos(\omega_f t) \quad (1)$$

La freqüència de ressonància en energia de la força periòdica serà la corresponent a la freqüència pròpia del sistema

$$\omega_f = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

Com que, segons l'enunciat, coneixem m , haurem de calcular k , que, segons la llei de Hooke, està relacionada amb la força aplicada F i amb el desplaçament y produït mitjançant

$$k = \frac{|F|}{|y|} \quad (3)$$

Per tant, la freqüència de ressonància en energia val

$$\omega_f = \omega_0 = \sqrt{\frac{|F|}{m|y|}} = 100 \text{ rad/s} \quad (4)$$

L'amplitud de les oscil·lacions forçades ve donada per

$$A = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \quad (5)$$

En conseqüència, la constant d'amortiment γ , que està relacionada amb λ per $\gamma = \lambda/(2m)$, val

$$\gamma = \frac{[f_0^2/(Am)^2 - (\omega_f^2 - \omega_0^2)^2]^{1/2}}{2\omega_f} \quad (6)$$

En substituir les dades de l'enunciat que ens donen la freqüència ω_f , l'amplitud f_0 de la força aplicada i l'amplitud A de les oscil·lacions forçades, en un instant donat, tenim que $\gamma = 6.49 \text{ rad/s}$.

Ara que ja coneixem γ , podem calcular la freqüència de ressonància en amplitud, que val

$$\omega_f = \omega_A = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\gamma^2} = 99.58 \text{ rad/s} \quad (7)$$

(c) Per a calcular l'amplitud de ressonància en cada cas, hem de substituir els valors de la freqüència, eqs. (4) i (7), respectivament, dins l'eq. (5). Això dóna

$$A_{\text{màx}} \text{ (ressonància en energia)} = \frac{f_0}{2m\gamma\omega_0} = 7.70 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (8)$$

$$A_{\text{màx}} \text{ (ressonància en amplitud)} = \frac{f_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = 7.72 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (9)$$

Com podem apreciar, ambdues amplituds són molt semblants. Això és degut al fet que la constant d'amortiment és menuda en comparació amb la freqüència de ressonància.

1.9 Una partícula de massa $m = 10 \text{ g}$ és capaç de vibrar amb una freqüència pròpia $\nu_0 = 90 \text{ s}^{-1}$. Sobre aquesta partícula actua una força exterior sinusoidal $F = 3 \cdot 10^3 \cos(150t)$ dina. (a) Calculeu l'amplitud de les oscil·lacions forçades que realitzarà la partícula. (b) Quina altra freqüència podria tenir la força exterior F per a produir la mateixa amplitud de les oscil·lacions de la partícula de massa m ? No s'ha de tenir en compte l'efecte de les forces de fregament.

$m = 10 \text{ g}$, $\nu_0 = 90 \text{ s}^{-1}$, $F = 3 \cdot 10^3 \cos(150t)$ dina

(totes les unitats pertanyen al sistema CGS)

(a) amplitud A de les oscil·lacions forçades?

(b) $\omega_f \neq 150 \text{ rad/s}$ que done la mateixa A ?

(a+b) De l'enunciat del problema es dedueix que es tracta d'un moviment oscil·latori forçat, l'equació del moviment del qual és (suposant que té lloc al llarg de l'eix X)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = f_0 \cos(\omega_f t) \quad (1)$$

L'amplitud d'un moviment d'aquest tipus val

$$A = \frac{f_0}{m \sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \quad (2)$$

Ara només cal donar valor a les magnituds que apareixen en l'eq. (2): $f_0 = 3 \cdot 10^3$ dina, $m = 10$ g, $\omega_f = 150$ rad/s, $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 180\pi$ rad/s, $\gamma = \lambda/(2m) = 0$ rad/s (segons l'enunciat, no hi ha fregament en el moviment: $\lambda = 0$),

$$A = \pm \frac{f_0}{m(\omega_f^2 - 4\pi^2\nu_0^2)} = \pm 2.92 \text{ cm} \quad (3)$$

L'amplitud en valor absolut val 2.92 cm (el signe negatiu s'hi pot incorporar mitjançant una fase en la funció trigonomètrica).

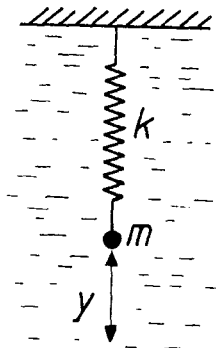
De l'expressió (3) podem deduir que el mòdul de l'amplitud també pot escriure's

$$A = -\frac{f_0}{m(\omega_f^2 - 4\pi^2\nu_0^2)} = \frac{f_0}{m(4\pi^2\nu_0^2 - \omega_f^2)} \quad (4)$$

és a dir, l'altra freqüència ω_f que dona la mateixa amplitud d'abans és

$$\omega_f = \left[4\pi^2\nu_0^2 - \frac{f_0}{mA} \right]^{1/2} = \left[(180\pi)^2 - \frac{3 \cdot 10^3}{10 \cdot 2.92} \right]^{1/2} = 565.40 \text{ rad/s} \quad (5)$$

1.10 Pengem una massa de 2 kg en l'extrem lliure d'un ressort submergit en un líquid, de forma que hi produeix un allargament de 38 cm. Posteriorment el fem oscil·lar sota l'acció d'aquest pes i observem que són necessàries 10 oscil·lacions completes perquè l'amplitud es redueixi a 1/10 del seu valor inicial. Calculeu l'amplitud de les oscil·lacions d'aquest ressort sotmés a una força sinusoidal de valor màxim 2 N i que té per freqüència la de ressonància en energia del sistema.



$m = 2 \text{ kg}$, $y = 38 \text{ cm} = 0.38 \text{ m}$

(i) oscil·lacions no forçades, oscil·lacions amortides: en 10 oscil·lacions l'amplitud passa a valer $A(10 \text{ oscil·lacions}) = A_0/10$, on A_0 és l'amplitud inicial

(ii) hi apliquem una força sinusoidal $F = f_0 \cos(\omega_f t)$, tal que $f_0 = 2 \text{ N}$ i $\omega_f = \omega_0$: amplitud de les oscil·lacions del moviment oscil·latori forçat?

Es tracta d'oscil·lacions forçades, per tant, l'equació del moviment és

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = f_0 \cos(\omega_f t) \quad (1)$$

L'amplitud A de les oscil·lacions forçades verifica que

$$A = \frac{f_0}{m \sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \quad (2)$$

i com que $\omega_f = \omega_0$ (segons l'enunciat), tindrem

$$A = \frac{f_0}{2m\gamma\omega_0} \quad (3)$$

Així, doncs, per a calcular A necessitem conèixer ω_0 i γ , les altres dades ja les coneixem per l'enunciat. La freqüència de ressonància en energia del sistema la calcularem a partir de la relació entre la força aplicada i l'allargament produït. La constant d'amortiment la traurem de la relació entre l'amplitud inicial i l'amplitud després de 10 oscil·lacions.

La freqüència pròpia (que coincideix amb la de ressonància en energia) d'un moviment oscil·latori simple és

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

I, segons la llei harmònica, $F = -ky$, com que coneixem l'allargament produït per una força aplicada (la corresponent al pes, en aquest cas), podem escriure la freqüència pròpia en funció de les dades inicials com

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{|F|}{m|y|}} = \sqrt{\frac{mg}{m|y|}} = \sqrt{\frac{g}{|y|}} \quad (5)$$

Per a calcular γ farem servir la relació per a l'amplitud del moviment amortit,

$$A(t) = A_0 \exp(-\gamma t) \quad (6)$$

Si anomenem t_{10} el temps transcorregut al cap de 10 oscil·lacions completes (és a dir $t_{10} = 10T$, on T és el període del moviment oscil·latori), tindrem $A(t_{10}) = A_0/10$, segons l'enunciat del problema. D'això i de l'eq. (6) obtenim que

$$\frac{A_0}{10} = A_0 \exp(-\gamma 10T) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{10} = \exp(-10\gamma T) \quad (7)$$

És a dir,

$$\ln 10 = 10\gamma T \quad (8)$$

Per tant, per a aïllar γ només faltaria per calcular T . El període del moviment amortit és expressat per

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m - \gamma^2}} \quad (9)$$

De les eqs. (8) i (9) es pot calcular γ , perquè tenim

$$\frac{\ln 10}{2\pi 10} = \frac{\gamma}{\sqrt{k/m - \gamma^2}} \quad (10)$$

D'aquesta expressió traiem que

$$\gamma = \frac{\ln 10}{20\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\ln 10/20\pi)^2}} \quad (11)$$

El valor negatiu de γ (que provindria de l'arrel quadrada) no té sentit, perquè d'una altra manera tindriem un moviment que, segons es desprendria de l'eq. (6), no seria amortit, sinó que la seua amplitud augmentaria amb el temps.

Si ara fem marxa arrere i substituïm les eqs. (5) i (11) en l'eq. (3), que ens donava l'amplitud, tindrem finalment que

$$A = \frac{10\pi f_0 |y|}{mg \ln 10} \sqrt{1 + \left(\frac{\ln 10}{20\pi}\right)^2} = 0.53 \text{ m} \quad (12)$$

1.11 Calculeu l'equació del moviment que resulta de la superposició de dos moviments harmònics simples paral·lels, les equacions dels quals són $x_1 = 8 \sin(4t)$ i $x_2 = 3 \sin(4t + \alpha_2)$, en els casos en què: (a) $\alpha_2 = 0$, (b) $\alpha_2 = \pi/2$ i (c) $\alpha_2 = \pi$. (Totes les magnituds vénen expressades en el SI).

moviments harmònics simples paral·lels (SI): $\begin{cases} x_1 = 8 \sin(4t) \\ x_2 = 3 \sin(4t + \alpha_2) \end{cases}$

moviment resultant quan: $\begin{cases} (a) & \alpha_2 = 0 \\ (b) & \alpha_2 = \pi/2 \\ (c) & \alpha_2 = \pi \end{cases}$

La composició de dos moviments harmònics simples amb la mateixa direcció i de la mateixa freqüència (com en aquest cas),

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \quad (1)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \quad (2)$$

és un moviment harmònic simple en la mateixa direcció i amb la mateixa freqüència però amb amplitud A i fase α diferents

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (3)$$

Aquestes amplitud i fase noves estan relacionades amb les primeres mitjançant les expressions

$$A = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2} \quad (4)$$

$$\tan \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (5)$$

Ara només cal substituir els valors que dona l'enunciat: $\alpha_1 = 0$, $A_1 = 8$ m i $A_2 = 3$ m, i tenim els tres casos següents:

(a) $\alpha_2 = 0$

$$A = 11 \text{ m} \quad \alpha = \arctan 0 = 0 \text{ rad} \quad x = 11 \sin(4t) \quad (6)$$

(b) $\alpha_2 = \pi/2$

$$A = 8.54 \text{ m} \quad \alpha = \arctan 0.375 = 0.359 \text{ rad} \quad x = 8.54 \sin(4t + 0.359) \quad (7)$$

(c) $\alpha_2 = \pi/2$

$$A = 5 \text{ m} \quad \alpha = \arctan 0 = 0 \text{ rad} \quad x = 5 \sin(4t) \quad (8)$$

Observeu que treballem amb els angles en radiants, per a poder fer les substitucions numèriques dins la fase del sinus, eq. (7).

1.12 Una partícula es mou sotmesa a dos moviments vibratoris harmònics simples perpendiculars, les equacions dels quals són $x = 3 \sin(5t)$ i $y = 4 \cos(5t)$, expressades en unitats SI. Calculeu: (a) la trajectòria descrita per la partícula, (b) el període del moviment, i (c) la velocitat quan $t = 0$ s.

moviments harmònics simples perpendiculars (totes les unitats són en el SI): $\begin{cases} x = 3 \sin(5t) \\ y = 4 \cos(5t) \end{cases}$

(a) trajectòria?

(b) T ?

(c) $v(t = 0)$?

(a) La trajectòria d'una partícula ve donada per l'equació

$$y = f(x) \quad (1)$$

Així, doncs, el que cal fer és relacionar entre si els moviments al llarg dels eixos X i Y , respectivament:

$$x = 3 \sin(5t) \quad (2)$$

$$y = 4 \cos(5t) = 4\sqrt{1 - \sin^2(5t)} \quad (3)$$

la qual cosa dóna

$$y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \quad (4)$$

Aquesta relació entre les coordenades x i y es pot escriure com

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad (5)$$

que correspon a l'equació d'una el·lipse, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, amb semieixos $a = 3$ m i $b = 4$ m.

Ara només cal determinar el sentit de gir del moviment. La resposta a aquesta qüestió es trobarà en la discussió sobre la velocitat.

(b) El càlcul del període és senzill, ja que coneixem la freqüència del moviment resultant, que és la mateixa que la dels dos moviments perpendiculars ($\omega = 5$ rad/s). Així, tenim

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 0.4\pi \text{ s} \quad (6)$$

(c) La velocitat \mathbf{v} és un vector, per tant, en el pla té dues components, $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, les quals verifiquen que

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad (7)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \quad (8)$$

En substituir ací les expressions inicials corresponents als desplaçaments, tenim

$$v_x = \frac{d}{dt}[3 \sin(5t)] = 15 \cos(5t) \quad (9)$$

$$v_y = \frac{d}{dt}[4 \cos(5t)] = -20 \sin(5t) \quad (10)$$

Per tant, $\mathbf{v}(t) = (15 \cos(5t), -20 \sin(5t))$ i en $t = 0$ s la velocitat val $\mathbf{v}(t = 0) = (15, 0)$ m/s = $15 \hat{i}$ m/s. A fi de determinar el sentit de gir, caldrà fixar en quin punt es troba la partícula quan $t = 0$ s. Segons les expressions que donen x i y en funció del temps, aquesta posició val,

$$x(t = 0) = 0 \text{ m} \quad (11)$$

$$y(t = 0) = 4 \text{ m} \quad (12)$$

En la fig. 1 apareixen representades la posició i la velocitat de la partícula en l'instant $t = 0$ s. Això es correspon amb un moviment que gira en el sentit de les agulles del rellotge.

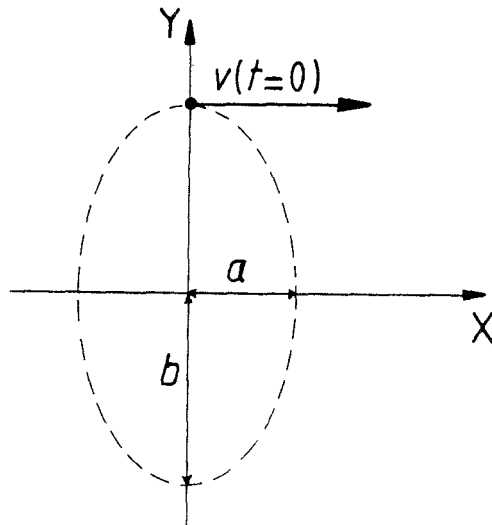


FIG. 1

2

Moviment relatiu

2.1 Un tren s'allunya de l'estació amb una velocitat de 45 m/s. Una pilota roda sobre el sostre del tren amb una velocitat de 10 m/s en els tres casos següents: dirigida (a) en el sentit del moviment del tren, (b) en sentit contrari, i (c) en direcció perpendicular a la del tren. Calculeu, en cada cas, la velocitat de la pilota respecte a un observador situat en la plataforma de l'estació.

O = observador, T = tren, P = pilota

velocitat del tren respecte de l'observador: $v_{TO} = 45$ m/s

velocitat de la pilota respecte del tren: $v_{PT} = 10$ m/s

$$v_{PO} = \begin{cases} (a) \text{ si } v_{PT} \text{ té el mateix sentit que } v_{TO} \\ (b) \text{ si } v_{PT} \text{ té sentit oposat a } v_{TO} \\ (c) \text{ si } v_{PT} \text{ té direcció perpendicular a } v_{TO} \end{cases}$$

La relació que hi ha entre les velocitats de dos mòbils, P i T, referides a un sistema de referència O (v_{PO} i v_{TO} , respectivament), i la velocitat d'un dels mòbils (P, per exemple) descrita des del sistema de referència de l'altre mòbil (T, per exemple) és

$$v_{PT} = v_{PO} - v_{TO} \quad (1)$$

Per tant, la velocitat de la pilota P descrita per l'observador O vindrà donada per

$$v_{PO} = v_{PT} + v_{TO} \quad (2)$$

Com que aquesta és una relació vectorial, hem de conèixer tant els valors dels mòduls com els de les orientacions (el valor de les components vectorials, en definitiva) que intervenen en l'eq. (2).

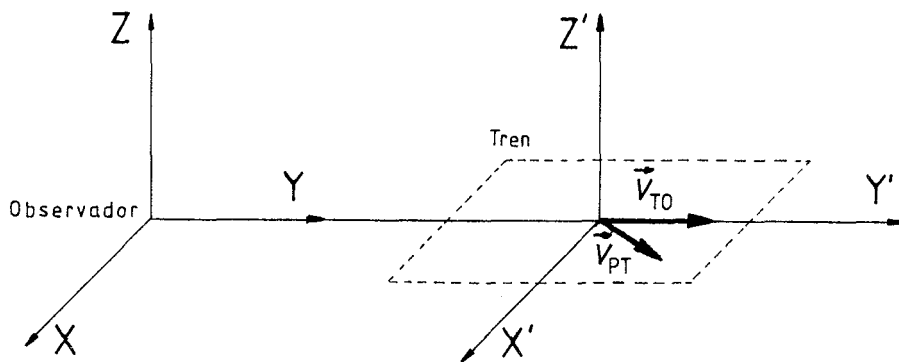


FIG. 1

Si considerem les components dels vectors respecte de les coordenades representades en la fig. 1, tenim que

$$v_{TO} = (0, 45, 0) \text{ m/s} \quad (3)$$

$$v_{PT} = \begin{cases} (0, 10, 0) \text{ m/s} & \text{(en el mateix sentit que } v_{TO}) \\ (0, -10, 0) \text{ m/s} & \text{(en el sentit oposat al de } v_{TO}) \\ (\pm 10, 0, 0) \text{ m/s} & \text{(en el sentit perpendicular al de } v_{TO}) \end{cases} \quad (4)$$

La tercera de les eqs. (4) representa la velocitat de la pilota sobre el sostre, perpendicular a v_{TO} . La condició de perpendicularitat no depèn dels signes *més* o *menys* això només indicaria en quin sentit es mou la pilota: o bé cap a la dreta o bé cap a l'esquerra, prenent la direcció i el sentit del moviment del tren respecte de l'observador com a direcció frontal. Si la pilota es moguera en direcció vertical, també seria perpendicular a v_{TO} i s'escriuria $v_{PT} = (0, 0, \pm 10)$ m/s, però com que la pilota ha de moure's horitzontalment, perquè roda sobre el sostre del tren, només considerarem la tercera de les eqs. (4) per a representar el moviment perpendicular de la pilota respecte del tren en moviment.

Ara només ens resta per fer un exercici simple de suma de vectors:

(a) De les eqs. (2), (3) i primera eq. (4) obtenim

$$v_{PO} = (0, 45, 0) + (0, 10, 0) = 55 \mathbf{j} \text{ m/s} \quad (5)$$

(b) De les eqs. (2), (3) i segona eq. (4) obtenim

$$v_{PO} = (0, 45, 0) + (0, -10, 0) = 35 \mathbf{j} \text{ m/s} \quad (6)$$

(c) De les eqs. (2), (3) i tercera eq. (4) obtenim

$$v_{PO} = (0, 45, 0) + (\pm 10, 0, 0) = (\pm 10 \mathbf{i} + 45 \mathbf{j}) \text{ m/s} \quad (7)$$

2.2 Una pissarra cau verticalment amb l'acceleració de la gravetat. Al mateix temps, paral·lelament a la superfície de la pissarra llancem un tros de clarió horitzontalment amb una velocitat v , el qual dibuixa en la pissarra la seua trajectòria. Quina forma té la trajectòria del clarió referida a la pissarra?

P = pissarra \Rightarrow caiguda lliure
 C = clarió \Rightarrow velocitat inicial horitzontal (v) + caiguda lliure
 trajectòria del clarió respecte de la pissarra?

La descripció de la trajectòria del clarió (C) respecte de la pissarra (P) es pot fer si donem l'equació de la trajectòria $y = f(x)$, és a dir, si establim una relació entre els components vertical i horitzontal de la posició del clarió referides al sistema de coordenades situat sobre la pissarra en moviment. En definitiva, hem de descriure un moviment des d'un altre sistema de referència, que també està en moviment; per tant, tenim un problema de moviment relatiu, en el qual sabem que

$$\mathbf{r}_{CP} = \mathbf{r}_{CO} - \mathbf{r}_{PO} \quad (1)$$

\mathbf{r}_{CP} = vector posició del clarió respecte de la pissarra

\mathbf{r}_{CO} = vector posició del clarió respecte d'un observador en repòs

\mathbf{r}_{PO} = vector posició de la pissarra respecte d'un observador en repòs

Així, doncs, haurem de calcular primerament \mathbf{r}_{CP} i \mathbf{r}_{PO} , cosa que és senzilla, ja que no cal fer cap altra cosa que usar les relacions cinemàtiques d'un moviment uniformement accelerat. Usarem unitats del SI en aquest problema.

Càlcul de r_{CO} : Per cinemàtica sabem que

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2)$$

en aplicar aquesta relació al component x de la trajectòria del clarió, tenim

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (3)$$

i, com que per al clarió es verifica que $x_0 = 0$, $v_{x0} = v$ i $a_x = 0$, finalment obtenim

$$x = vt \quad (4)$$

Si apliquem la relació (2) al component y de la trajectòria del clarió, tenim

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (5)$$

i, substituint els valors $y_0 = 0$, $v_{y0} = 0$ i $a_y = -g$, ens dona

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (6)$$

Hem considerat que el clarió es troba en l'origen de coordenades, que només té component horitzontal de la velocitat inicial, i que cau amb l'acceleració de la gravetat cap avall (per això el signe *menys* en l'expressió $a_y = -g$). En conseqüència, segons les expressions (4) i (6), tenim

$$r_{CO} = \left(vt, -\frac{gt^2}{2} \right) \quad (7)$$

Càlcul de r_{PO} : Anàlogament al cas anterior, tenim que

$$\text{component } x: \quad x_0 = 0, \quad v_{x0} = v, \quad a_x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad (8)$$

$$\text{component } y: \quad y_0 = 0, \quad v_{y0} = 0, \quad a_y = -g \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{gt^2}{2} \quad (9)$$

En definitiva,

$$r_{PO} = \left(0, -\frac{gt^2}{2} \right) \quad (10)$$

La posició del clarió descrita des de la pissarra és, doncs,

$$r_{CP} = r_{CO} - r_{PO} = \left(vt, -\frac{gt^2}{2} \right) - \left(0, -\frac{gt^2}{2} \right) = (vt, 0) \quad (11)$$

és a dir,

$$x_{CP} = vt \quad y_{CP} = 0 \quad (12)$$

En conseqüència, tenim una trajectòria descrita pel clarió sobre la pissarra amb el component vertical (y) constant: el clarió dibuixarà una línia recta i horitzontal sobre la pissarra. Segons passa el temps, el clarió es mourà cap a la dreta (si la velocitat inicial és segons es representa en la fig. 1), però no variarà la seua altura respecte de qualsevol punt de la pissarra.

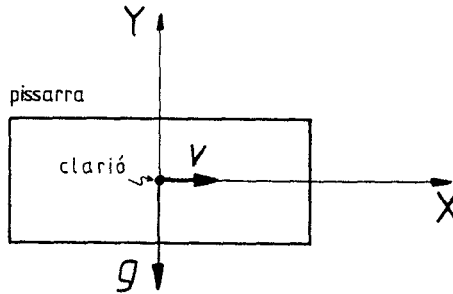
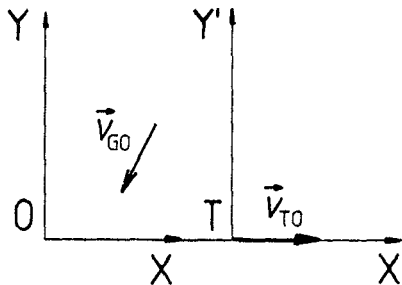


FIG. 1

2.3 Durant una tempesta, les trajectòries de les gotes de pluja formen sobre la finestreta d'un tren un angle de 35° amb la vertical, quan la velocitat del tren és de 70 km/h. Quan el tren té una velocitat de 110 km/h, l'angle amb la vertical que forma el rastre de les gotes d'aigua sobre la finestreta és de 45° . Calculeu: (a) la velocitat de les gotes d'aigua respecte a un observador fix (que no viatja en el tren), i (b) l'angle que formen les gotes d'aigua amb la vertical.



O = observador, T = tren

v_{GO} = velocitat de les gotes d'aigua respecte d'un observador fix

v_{TO} = velocitat del tren respecte d'un observador fix

v_{GT} = velocitat de les gotes respecte del tren

$\alpha = 35^\circ$, $v_{TO} = 70 \text{ km/h} = 19.44 \text{ m/s}$

$\alpha = 45^\circ$, $v_{TO} = 110 \text{ km/h} = 30.56 \text{ m/s}$

(a) $|v_{GO}|$?

(b) \hat{v}_{GO} ?

Les dues qüestions (a) i (b) equivalen a calcular la magnitud vectorial $v_{GO} = (v_{GO,x}, v_{GO,y})$. Aquesta pot extraure's de la relació

$$v_{GT} = v_{GO} - v_{TO} \quad (1)$$

De les magnituds que apareixen en aquesta expressió, volem conèixer el valor de v_{GO} i només coneixem el de v_{TO} (sabem el seu mòdul i que la direcció de moviment és l'horitzontal) i l'orientació corresponent a v_{GT} (és a dir, l'angle α) en dues situacions diferents. Vegem ara com podem aprofitar les dades de què disposem amb l'eq. (1).

Els components x i y de l'eq. (1) són

$$v_{GT,x} = v_{GO,x} - v_{TO,x} \quad v_{GT,y} = v_{GO,y} - v_{TO,y} \quad (2)$$

i, segons la fig. 1, que representa la finestra del tren,

$$v_{GT,x} = -v_{GT} \sin \alpha \quad v_{GT,y} = -v_{GT} \cos \alpha \quad (3)$$

(el signe negatiu indica que $v_{GT,x}$ i $v_{GT,y}$ estan dirigides en els sentits negatius dels eixos X i Y , respectivament).

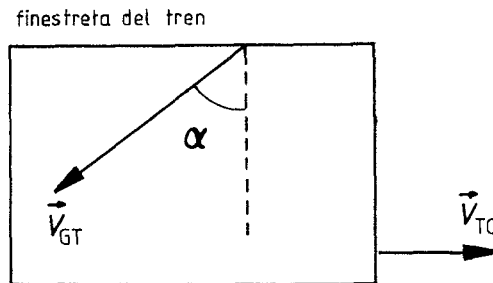


FIG. 1

De les eqs. (2) i (3) obtenim que

$$-v_{GT} \sin \alpha = v_{GO,x} - v_{TO,x} \quad (4)$$

$$-v_{GT} \cos \alpha = v_{GO,y} - v_{TO,y} \quad (5)$$

En dividir ambdues expressions veiem que no necessitem conèixer el mòdul de v_{GT} per a establir una relació entre les velocitats del tren i de les gotes respecte de l'observador,

$$\tan \alpha = \frac{v_{GO,x} - v_{TO,x}}{v_{GO,y} - v_{TO,y}} \quad (6)$$

En aquesta expressió tenim dues incògnites: $v_{GO,x}$ i $v_{GO,y}$, per tant necessitem dues equacions per a calcular-les. Aquestes equacions s'obtenen substituint els valors numèrics per als dos casos que tenim. Així

$$\tan 35^\circ = \frac{v_{GO,x} - 19.44}{v_{GO,y}} \quad (7)$$

$$\tan 45^\circ = \frac{v_{GO,x} - 30.56}{v_{GO,y}} \quad (8)$$

en les equacions anteriors hem tingut en compte que el moviment del tren és horitzontal i, per tant, $v_{TO,y} = 0$.

La solució del sistema de dues equacions amb dues incògnites dona

$$v_{GO,x} = -6.53 \text{ m/s} \quad (9)$$

$$v_{GO,y} = -37.09 \text{ m/s} \quad (10)$$

Això vol dir que l'observador veuria que les gotes estan dirigides en els sentits negatius dels eixos X i Y , és a dir, que van cap a ell i cauen. Per tant, la resposta a la qüestió (a), referida al mòdul de la velocitat de la gota respecte de l'observador, és

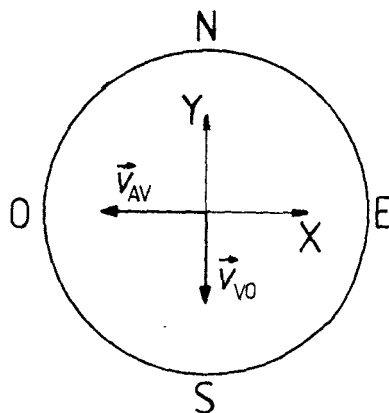
$$|v_{GO}| = (v_{GO,x}^2 + v_{GO,y}^2)^{1/2} = 37.66 \text{ m/s} = 135.58 \text{ km/h} \quad (11)$$

La resposta a la qüestió (b) és que les gotes formen un angle β amb la vertical de l'observador fix tal que

$$\tan \beta = \frac{v_{GO,x}}{v_{GO,y}} = 0.1761 \quad \Rightarrow \quad \beta = 9.95^\circ \quad (12)$$

Aquest angle està dirigit cap a l'esquerra de la vertical, ja que $v_{GO,x}$ és negatiu.

2.4 L'indicador de direcció d'un avió assenjala que la proa està dirigida cap a l'oest i el seu indicador de velocitat indica que es mou respecte a l'aire amb una velocitat de 100 km/h. Si el vent té una velocitat de 60 km/h, dirigida de nord a sud: (a) quina és la velocitat de l'avió respecte de terra?, (b) en quina direcció s'ha d'orientar la proa per a dirigir-se efectivament cap a l'oest?, i, en aquest cas, (c) quina serà la seua velocitat respecte de terra?



A = avió, V = vent, O = observador fix situat a terra

v_{AO} = velocitat de l'avió respecte d'un observador fix a terra

v_{VO} = velocitat del vent respecte d'un observador fix a terra

v_{AV} = velocitat de l'avió respecte del vent

$v_{AV} = 100 \text{ km/h} = 27.78 \text{ m/s}$, $v_{VO} = 60 \text{ km/h} = 16.67 \text{ m/s}$

(a) v_{AO} ?

si v_{AO} està dirigida cap a l'oest: $\begin{cases} (b) & \hat{v}_{AV}? \\ (c) & |v_{AO}|? \end{cases}$

(a) Per tractar-se d'un moviment (el de l'avió) descrit des de dos sistemes de referència: l'aire en moviment (és a dir, el vent) i l'observador de terra, la relació que hi ha entre les velocitats és

$$v_{AV} = v_{AO} - v_{VO} \quad (1)$$

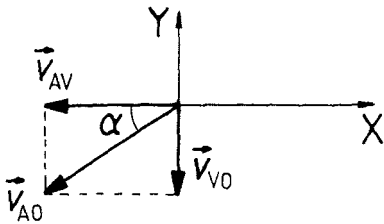


FIG. 1

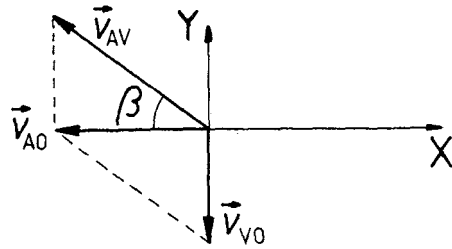


FIG. 2

Com que coneixem v_{AV} i v_{VO} (sabem els mòduls i les orientacions, segons la fig. 1), podem calcular v_{AO}

$$\left. \begin{array}{l} v_{AO} = v_{AV} + v_{VO} \\ v_{AV} = (-27.78, 0) \text{ m/s} \\ v_{VO} = (0, -16.67) \text{ m/s} \end{array} \right\} \Rightarrow v_{AO} = (-27.78, -16.67) \text{ m/s} \quad (2)$$

El mòdul de la velocitat de l'avió respecte de terra val

$$|v_{AO}| = (27.78^2 + 16.67^2)^{1/2} = 32.40 \text{ m/s} \quad (3)$$

i la seua orientació ve donada per l'angle α (fig. 1) tal que

$$\tan \alpha = \frac{|v_{VO}|}{|v_{AV}|} = \frac{16.67}{27.78} \Rightarrow \alpha = 30.97^\circ \quad (4)$$

(b+c) En aquest cas, el que volem és que v_{AO} estiga dirigida cap a l'oest. Com que la velocitat del vent no ha canviat, les velocitats hauran d'estar disposades com s'indica en la fig. 2. En aplicar la relació (1) als components x i y de les velocitats,

$$\text{component } x: \quad v_{AV,x} = v_{AO,x} - v_{VO,x} \quad (5)$$

$$\text{component } y: \quad v_{AV,y} = v_{AO,y} - v_{VO,y} \quad (6)$$

i substituir els valors $v_{AV,x} = -|v_{AV}| \cos \beta$, $v_{AV,y} = |v_{AV}| \sin \beta$, $v_{VO,x} = 0$, $v_{VO,y} = -|v_{VO}|$, $v_{AO,x} = -|v_{AO}|$ i $v_{AO,y} = 0$, tenim que

$$-|v_{AV}| \cos \beta = -|v_{AO}| \quad (7)$$

$$|v_{AV}| \sin \beta = |v_{VO}| \quad (8)$$

i de la segona, per exemple, obtenim

$$\sin \beta = \frac{|v_{VO}|}{|v_{AV}|} = 0.60 \quad \Rightarrow \quad \beta = 36.88^\circ \quad (9)$$

Això vol dir que v_{AV} està dirigida cap al quadrant NO i forma un angle de 36.88° amb l'horitzontal.

Coneguts els valors de β i de $|v_{AV}|$, de l'eq. (7) obtenim

$$|v_{AO}| = 22.22 \text{ m/s} = 80 \text{ km/h} \quad (10)$$

Vectorialment, podem escriure $v_{AO} = (-22.22, 0) \text{ m/s}$.

2.5 Si en un temps de 15 s volem creuar amb una barca a velocitat constant un riu de 26 m d'ample per a arribar a un punt situat 60 m aigües avall en la vora oposada, calculeu la direcció i la velocitat de la barca respecte del riu si la velocitat d'aquest és de 3 m/s.

B = barca, R = riu, O = observador fix a la vora del riu

v_{BO} = velocitat de la barca respecte d'un observador fix en la vora

v_{RO} = velocitat del riu respecte d'un observador fix en la vora

v_{BR} = velocitat de la barca respecte del riu

OA = 26 m, AC = 60 m, $v_{RO} = 3 \text{ m/s}$, $t = 15 \text{ s}$

$v_{BR}?$

Des de la vora del riu (punt O en la fig. 1) s'observa que la barca avança des de O fins a C amb una velocitat v_{BO} . Es tracta d'un cas de composició de les velocitats v_{BR} , v_{BO} i v_{RO} , i sabem que s'ha de verificar que

$$v_{BR} = v_{BO} - v_{RO} \quad (1)$$

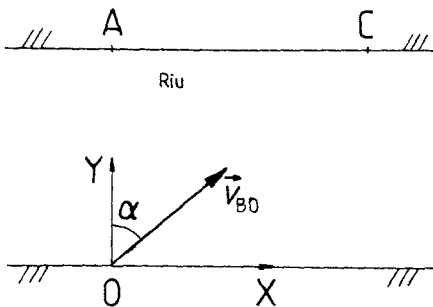


FIG. 1

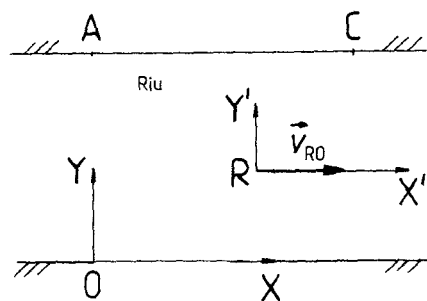


FIG. 2

Volem calcular v_{BR} i sabem (fig. 2) que v_{RO} només té component horitzontal,

$$v_{RO} = (v_{RO}, 0) \text{ m/s} \quad (2)$$

A més a més, per la geometria del problema podem conèixer la direcció de v_{BO} , ja que l'angle α (fig. 3) és fàcil de calcular

$$\tan \alpha = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{AC}{OA} = 66.57^\circ \quad (3)$$

i

$$v_{BO,x} = |v_{BO}| \sin \alpha \quad (4)$$

$$v_{BO,y} = |v_{BO}| \cos \alpha \quad (5)$$

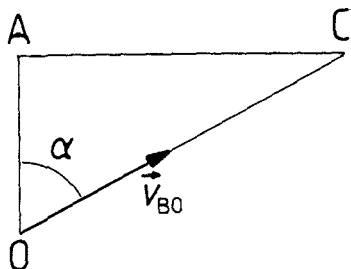


FIG. 3

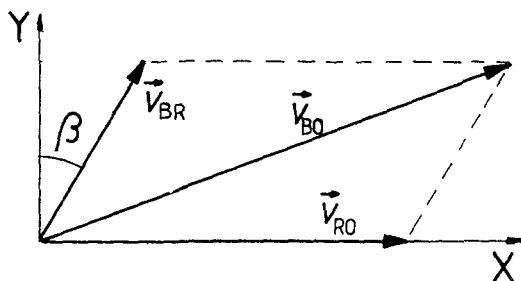


FIG. 4

La velocitat constant de la barca respecte de l'observador s'obtindrà del quocient entre l'espai recorregut i el temps que ha emprat per a fer-ho

$$|v_{BO}| = \frac{OC}{t} \quad (6)$$

on

$$OC = (OA^2 + AC^2)^{1/2} \quad (7)$$

Per tant, si representem el vector v_{BR} pel seu mòdul v_{BR} i l'angle β que forma respecte de l'eix Y , escriurem: $v_{BR} = (v_{BR} \sin \beta, v_{BR} \cos \beta)$. En substituir les expressions anteriors en l'eq. (1), obtenim per a cada component

$$\text{component } x: \quad v_{BR} \sin \beta = \frac{OC}{t} \sin \alpha - v_{RO} \quad (8)$$

$$\text{component } y: \quad v_{BR} \cos \beta = \frac{OC}{t} \cos \alpha \quad (9)$$

Després de dividir ambdues expressions veiem que

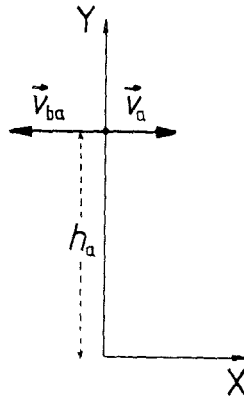
$$\tan \beta = \frac{v_{BR,x}}{v_{BR,y}} = \frac{(OC/t) \sin \alpha - v_{RO}}{(OC/t) \cos \alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{26^2 + 60^2} \sin 66.57^\circ - 45}{\sqrt{26^2 + 60^2} \cos 66.57^\circ} = 0.577 \quad \Rightarrow \quad \beta = 29.98^\circ \quad (10)$$

De l'eq. (9) obtenim que $v_{BR} = 2$ m/s. Així, doncs, $v_{BR} = (2 \sin 29.98^\circ, 2 \cos 29.98^\circ) = (0.9994, 1.7324)$ m/s.

La comprovació més senzilla que pot fer-se és dibuixar la composició vectorial, d'acord amb l'eq. (1), de les velocitats que hem calculat i veure que la composició és correcta. Això es veu en la fig. 4.

2.6 Considerem un sistema de coordenades que es troba fix sobre la Terra, la qual suposarem localment plana i sense moviment, i des de la cua d'un avió disparem una bala en sentit oposat al del moviment de l'avió. Si la velocitat de la bala respecte de l'avió és de 300 m/s, i l'avió es desplaça horitzontalment amb una velocitat de 200 m/s a 3000 m d'altura respecte de la Terra, doneu l'equació de la trajectòria de la bala referida al sistema de coordenades (a) de la Terra i (b) de l'avió. (c) Calculeu l'angle amb el qual ha de disparar-se la bala de tal forma que el component horitzontal de la velocitat de la bala siga nul·la en el sistema de coordenades de la Terra. Quina seria la trajectòria de la bala en aquest cas, si es descriu des dels sistemes de referència: (d) de la Terra i (e) de l'avió?



b = bala, a = avió

$v_{ba} = -300$ m/s \hat{i} , $v_a = 200$ m/s \hat{i} , $h_a = 3000$ m

equació de la trajectòria de la bala descrita des de: $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) el sistema de coordenades de} \\ \text{la Terra?} \\ \text{(b) el sistema de coordenades de} \\ \text{l'avió?} \end{array} \right.$

si $v_{b,x} = 0$ m/s per al sistema de la Terra: $\left\{ \begin{array}{l} \text{(c) amb quin angle s'ha de disparar la bala?} \\ \text{(d) trajectòria des de la Terra?} \\ \text{(e) trajectòria des de l'avió?} \end{array} \right.$

(a) La relació entre la velocitat de la bala en els sistemes de referència de la Terra i de l'avió ve donada per

$$v_{ba} = v_b - v_a \quad \Rightarrow \quad v_b = v_{ba} + v_a = -100 \text{ i} \quad (1)$$

on v_{ba} és la velocitat de la bala respecte de l'avió, v_a és la velocitat de l'avió respecte de la Terra i v_b és la velocitat de la bala respecte de la Terra. Des d'un sistema de referència situat a la Terra, a partir de les equacions de la cinemàtica per a un moviment uniformement accelerat, tindrem que el moviment de la bala ve descrit per

$$x = x_0 + v_{0,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2)$$

$$y = y_0 + v_{0,y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (3)$$

Per al component horitzontal descrit des d'un sistema de referència situat a la Terra, tenim $x_0 = 0$. La velocitat inicial és la velocitat de la bala $v_{0,x} = v_b$, i l'acceleració és nul·la, $a_x = 0$. Per l'eq. (2), obtenim

$$x = v_b t \quad (4)$$

Per al component vertical tenim que $y_0 = h_a$, la velocitat inicial és nul·la, $v_{0,y} = 0$, i l'acceleració val $a_y = -g$. Per tant, obtenim que el component horitzontal del moviment de la bala és

$$y = h_a - \frac{1}{2}gt^2 \quad (5)$$

L'equació del moviment de la bala respecte del sistema de coordenades situat a la Terra serà, segons es dedueix de les eqs. (4) i (5),

$$y = h_a - \frac{g}{2v_b^2}x^2 = (3000 - 4.9 \cdot 10^{-4}x^2) \text{ m} \quad (6)$$

que és l'equació d'una paràbola (fig. 1).

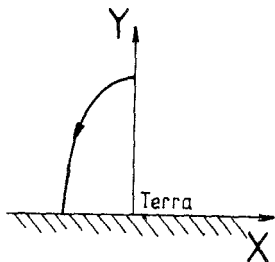


FIG. 1

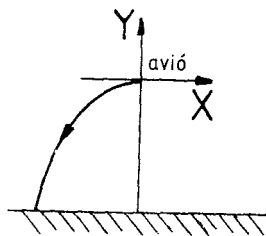


FIG. 2

(b) Si fem la descripció des d'un sistema de coordenades situat a l'avió, tenim les mateixes eqs. (2) i (3) de la cinemàtica per a descriure el moviment de la bala, però en aquest sistema de referència el component horitzontal és $x_0 = 0$, la velocitat inicial és $v_{0,x} = v_{ba}$, i, com que l'acceleració és nul·la, $a_x = 0$. Així, obtenim

$$x = v_{ba}t \quad (7)$$

Per al component vertical, tenim $y_0 = 0$, la velocitat inicial ara és nul·la, $v_{0,y} = 0$, i l'acceleració val $a_y = -g$. Per tant

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (8)$$

De les eqs. (7) i (8), tenim la trajectòria de la bala en el sistema de coordenades situat a l'avió

$$y = -\frac{g}{2v_{ba}^2}x^2 = -5.4 \cdot 10^{-5}x^2 \text{ m} \quad (9)$$

que és també l'equació d'una paràbola (fig. 2).

(c) Perquè la velocitat de la bala respecte d'un sistema de referència situat a la Terra no tinga component horitzontal, la composició de velocitats serà la representada en la fig. 3. Això ens dóna que l'angle de llançament valdrà

$$\cos \alpha = \frac{|v_a|}{|v_{ba}|} = \frac{200}{300} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 48.2^\circ \quad (10)$$

En el cas de la fig. 3a, l'angle serà $\alpha = 48.2^\circ$ per davall de l'horitzontal. En el cas de la fig. 3b, s'haurà de llançar la bala 48.2° per damunt de l'horitzontal.

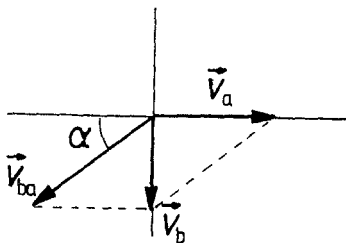


FIG. 3A

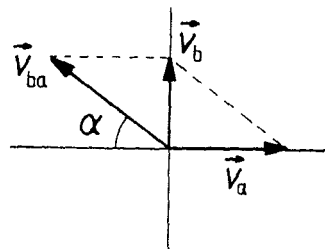


FIG. 3B

Si fem l'estudi de la trajectòria de la bala en el segon cas (fig. 3b), per als sistemes de referència situats a la Terra i a l'avió, tenim les situacions següents.

(d) Des del sistema de referència de la Terra, utilitzant les relacions de la cinemàtica, igual que abans, i considerant que $x_0 = 0$, $v_{0,x} = 0$ i $a_x = 0$, per l'eq. (2), tenim

$$x = 0 \quad (11)$$

Per al component vertical sabem que $y_0 = h_a$. Ara la velocitat inicial serà $v_{0,y} = v_{b,y} = v_{ba,y} + v_{a,y} = v_{ba} \cos 48.2^\circ + 0 = 223.6$ m, i l'acceleració $a_y = -g$. Així, obtenim

$$y = h_a + v_{b,y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 3000 + 223.6t - 5t^2 \quad (12)$$

Com veiem, de les eqs. (11) i (12) es dedueix que el moviment que descriu la bala és una línia recta vertical, ja que $x = 0 = \text{constant}$.

(e) Des del sistema de referència situat a l'avió, tenim per al component horitzontal que $x_0 = 0$, $v_{0,x} = v_{ba,x} = -v_{a,x}$ i $a_x = 0$, per tant,

$$x = -v_{a,x}t \quad (13)$$

i per al component vertical coneixem que $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_{ba,y}$ i $a_y = -g$, i tenim

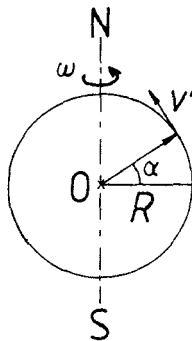
$$y = v_{ba,y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (14)$$

on $v_{ba,y} = 223.6$ m i $v_{a,x} = 200$ m. Si combinem les eqs. (13) i (14), tenim que l'equació que descriu el moviment de la bala serà

$$y = -\frac{v_{ba,y}}{v_{a,x}}x - \frac{g}{2v_{a,x}^2}x^2 \quad (15)$$

que representa una dependència parabòlica de y respecte de x . Així, doncs, des del sistema de referència de l'avió, la bala descriu un moviment que correspon a l'equació d'una paràbola.

2.7 Quina serà la velocitat (referida a uns eixos centrats en la Terra i fixos en l'espai) d'un automòbil que es dirigeix cap al nord a 72 km/h, quan està situat sobre la superfície terrestre en un punt a 25° de latitud nord? (El radi de la Terra val 6370 km).



$v' = 72$ km/h = 20 m/s, $\alpha = 25^\circ$, $R = 6370$ km = 6370000 m
velocitat v referida al centre de la Terra, que no gira?

Hem de conèixer la relació que hi ha entre la velocitat d'un cos referida a un sistema que gira, v' , i la velocitat del mateix cos referida al centre de gir, v . Aquesta relació és

$$v = v' + \omega \times r \quad (1)$$

on ω és la velocitat angular de gir del sistema que gira i r és la posició del punt mòbil referida al centre de rotació.

Si fixem en el centre de la Terra l'origen del sistema de referència que no gira, les magnituds que intervenen en el problema es representen en la fig. 1.

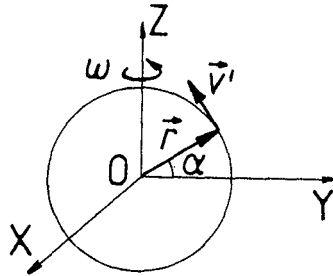


FIG. 1

Ara hem de calcular el valor corresponent a cadascuna de les magnituds que apareixen en l'eq. (1). La velocitat angular ω té per mòdul el corresponent a la velocitat angular de rotació de la Terra sobre si mateixa. Com que aquesta fa una volta (2π radians) en 24 hores, tindrem

$$|\omega| = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \text{ h}} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (2)$$

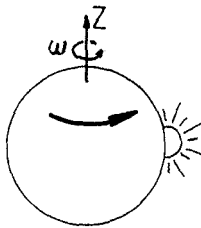


FIG. 2

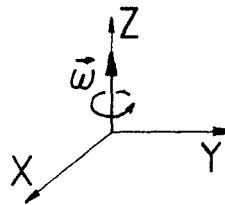


FIG. 3

La Terra gira d'oest a est i el sentit de la velocitat angular apareix representat en la fig. 2. Segons la regla de la mà dreta, aquest sentit de gir es correspon amb un vector velocitat angular orientat tal com s'indica en la fig. 3. Per tant, la velocitat angular expressada en forma vectorial té la forma

$$\omega = 0i + 0j + |\omega|k \quad (3)$$

La velocitat v' del mòbil referida a la Terra en rotació tindrà la forma vectorial (deduïda de la fig. 4)

$$v' = 0 i - v' \sin \alpha j + v' \cos \alpha k \quad (4)$$

on hem considerat, per simplicitat a causa de la simetria esfèrica del problema, que l'automòbil està situat respecte als eixos del sistema de referència de manera que la seua velocitat v' no té component al llarg de l'eix X . El mòdul de v' val $v' = 20$ m/s.

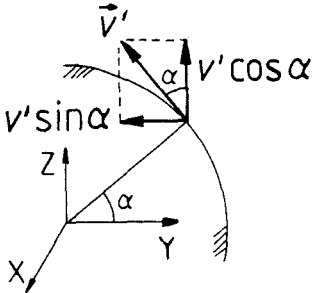


FIG. 4

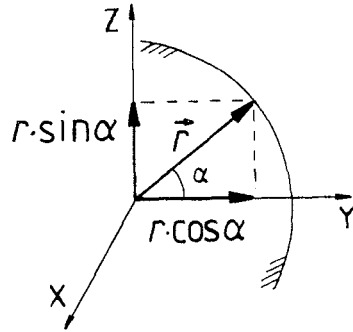


FIG. 5

Segons es desprén de la fig. 5, la posició r referida al centre de rotació és

$$r = 0 i + r \cos \alpha j + r \sin \alpha k \quad (5)$$

Ara r és el radi de la Terra, $r = R$. El càlcul de la velocitat referida al centre de la Terra, eq. (1), passa per l'execució del producte vectorial $\omega \times r$, que val

$$\omega \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & r \cos \alpha & r \sin \alpha \end{vmatrix} = -R\omega \cos \alpha i \quad (6)$$

i la suma $v' + \omega \times r$ dóna

$$\begin{aligned} v &= v' + \omega \times r = (0, -v' \sin \alpha, v' \cos \alpha) + (-R\omega \cos \alpha, 0, 0) \\ &= (-R\omega \cos \alpha, -v' \sin \alpha, v' \cos \alpha) \end{aligned} \quad (7)$$

La substitució dels valors numèrics dóna finalment

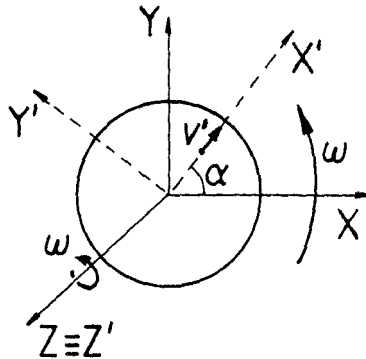
$$v = (-419.71 i - 8.45 j + 18.13 k) \text{ m/s} \quad (8)$$

que té per mòdul

$$|v| = \sqrt{419.71^2 + 8.45^2 + 18.13^2} = 420.19 \text{ m/s} \quad (9)$$

Canviant ω , r , α i l'angle entre ω i r podem veure com varia la velocitat v .

2.8 Una partícula es mou amb una velocitat relativa constant v' sobre un diàmetre d'una circumferència de radi R . Al mateix temps, aquesta darrera gira sobre el seu centre amb una velocitat angular constant ω . Supposeu que la partícula es troba en el centre de la circumferència quan el temps val zero i calculeu la posició, la velocitat i l'acceleració absolutes de la partícula per a un valor qualsevol del temps, t . Si $v' = 10$ m/s i $\omega = 5$ rad/s, quin valor tenen les magnituds demanades anteriorment quan la distància entre la partícula i el centre de la circumferència és de 4 m?



$v' = \text{constant}$, $\omega = \text{constant}$

per a $t = 0$: $x' = 0$ i $\alpha = 0^\circ$

$r(t)$, $v(t)$, $a(t)$ en el sistema de referència fix?

si $v' = 10$ m/s i $\omega = 5$ rad/s: r , v , a quan $x' = 4$ m?

Hem de relacionar les magnituds cinemàtiques entre un sistema de referència fix (magnituds sense *prima*) i un sistema de referència en rotació amb velocitat angular ω constant (magnituds amb *prima*). Aquesta relació és

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' \quad (1)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (3)$$

Tal com és formulat el problema, tenim dues opcions equivalents: (i) calculem r , i per derivació successiva obtenim $v = dr/dt$ i $a = dv/dt = d^2r/dt^2$, o (ii) calculem r , v i a a partir de les eqs. (1)-(3). Per comoditat emprarem el primer mètode, encara que es pot comprovar que ambdós donen el mateix resultat.

Càlcul de r : Sabem que

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (4)$$

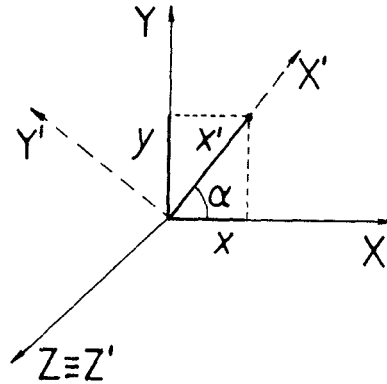


FIG. 1

En la fig. 1 observem que la posició de la partícula sobre l'eix X' (el qual considerem com un diàmetre de la circumferència) dóna lloc a dos components en el sistema de referència fix

$$x = x' \cos \alpha \quad (5)$$

$$y = x' \sin \alpha \quad (6)$$

i com que la velocitat de la partícula, v' , i la velocitat angular de la circumferència, ω , són constants, escrivim

$$x' = x'_0 + v't = v't \quad (7)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \omega t = \omega t \quad (8)$$

ja que $x'_0 = 0$ i $\alpha_0 = 0$. Finalment, tenim per al vector posició que

$$\mathbf{r} = v't \cos \omega t \mathbf{i} + v't \sin \omega t \mathbf{j} \quad (9)$$

No hi apareix component z perquè el moviment de la partícula és al llarg del pla perpendicular a l'eix Z .

Si haguérem fet la descripció de \mathbf{r}' , tindriem

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}' = x' \mathbf{i}' \quad (10)$$

on \mathbf{i}' , \mathbf{j}' i \mathbf{k}' són els vectors unitaris en el sistema de referència en rotació. En l'eq. (10) hem suposat (per simplicitat, encara que sense llevar generalització a la descripció) que la partícula es mou al llarg de l'eix X' . Si ara expressem \mathbf{i}' en terme dels vectors unitaris ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}' \cos \alpha - \mathbf{j}' \sin \alpha &= \mathbf{i} \\ \mathbf{i}' \sin \alpha + \mathbf{j}' \cos \alpha &= \mathbf{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathbf{i}' &= \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha \\ \mathbf{j}' &= -\mathbf{i} \sin \alpha + \mathbf{j} \cos \alpha \end{aligned} \right. \quad (11)$$

cosa que és fàcil de demostrar fent una senzilla projecció de components en els eixos de la fig. 1. Si ara substituïm α per ωt , eq. (8), tenim

$$\mathbf{r}' = v't \cos \omega t \mathbf{i} + v't \sin \omega t \mathbf{j} \quad (12)$$

que coincideix, lògicament, amb l'eq. (9), tal com s'expressava en l'eq. (2).

Per derivació de l'eq. (9) respecte del temps, obtenim

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v' [(\cos \omega t - \omega t \sin \omega t)\mathbf{i} + (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)\mathbf{j}] \quad (13)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = v'\omega [(-2 \sin \omega t - \omega t \cos \omega t)\mathbf{i} + (2 \cos \omega t - \omega t \sin \omega t)\mathbf{j}] \quad (14)$$

En el cas en què $v' = 10$ m/s, com que aquesta velocitat és constant, tenim que $t' = x'/v'$. Per tant, quan $x' = 4$ m tenim que $t' = 0.4$ s. Com que en Mecànica Clàssica els temps mesurats per dos sistemes de referència en moviment relatiu coincideixen, $t = t'$, els valors numèrics que ens calen per a substituir en les eqs. (9), (13) i (14) són:

$$t = 0.4 \text{ s} \quad v' = 10 \text{ m/s} \quad \text{i} \quad \omega = 5 \text{ rad/s} \quad (15)$$

i d'ací obtenim que³

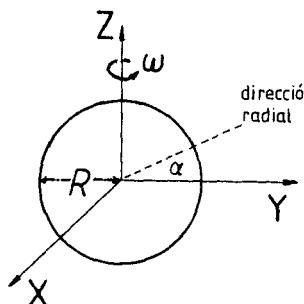
$$\mathbf{r} = (-1.66 \mathbf{i} + 3.64 \mathbf{j}) \text{ m} \quad (16)$$

$$\mathbf{v} = (-22.35 \mathbf{i} + 0.77 \mathbf{j}) \text{ m/s} \quad (17)$$

$$\mathbf{a} = (-49.32 \mathbf{i} - 132.54 \mathbf{j}) \text{ m/s}^2 \quad (18)$$

Es podrà comprovar que els càlculs estan ben fets repetint-los a partir del procediment (ii) que hem esmentat abans.

2.9 Quina és la desviació màxima de la *vertical* respecte de la direcció radial en la superfície de Mercuri? El període de rotació de Mercuri sobre el seu eix (T), el radi (R), i l'acceleració (g) a causa de la gravetat sobre la seua superfície són, respectivament, $T = 5.03 \cdot 10^6$ s, $R = 2.34 \cdot 10^6$ m i $g = 4.0$ m/s².



$T = 5.03 \cdot 10^6$ s, $R = 2.34 \cdot 10^6$ m, $g = 4.0$ m/s²
desviació màxima de la *vertical* respecte de la direcció radial?

³Cal treballar amb la calculadora en radiants, ja que la freqüència està expressada en radiants per segon.

La *vertical* està definida per la direcció de la gravetat que es mesura en la superfície d'un planeta. Pel moviment de rotació d'aquest, la gravetat mesurada g' es diferencia de la referida a un sistema en repòs, g ,

$$g' = g - 2\omega \times v' - \omega \times (\omega \times r) \quad (1)$$

L'únic terme que contribueix a la variació de g és $-\omega \times (\omega \times r)$, perquè quan mesurem la gravetat suposarem que no estem en moviment respecte de la superfície de Mercuri ($v' = 0$).

La desviació màxima es produirà quan el terme de l'acceleració centrífuga,⁴ $-\omega \times (\omega \times r)$, siga màxim.

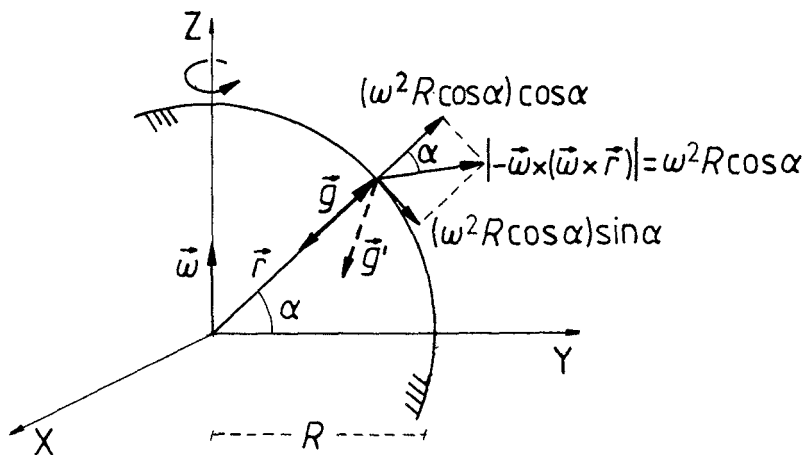


FIG. 1

Càlcul de $-\omega \times (\omega \times r)$: Per simplicitat suposarem que el punt on calculem la gravetat està disposat sobre el pla YZ i, per tant, no té component X . Segons la fig. 1, tenim

$$\omega = (0, 0, \omega) \quad (2)$$

$$r = (0, R \cos \alpha, R \sin \alpha) \quad (3)$$

$$\omega \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & R \cos \alpha & R \sin \alpha \end{vmatrix} = -\omega R \cos \alpha i \quad (4)$$

$$\omega \times (\omega \times r) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega R \cos \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 R \cos \alpha j \quad (5)$$

Com veiem, la desviació de g respecte del seu valor corresponent a un sistema en repòs, deguda a l'acceleració centrífuga, és $-\omega \times (\omega \times r) = \omega^2 R \cos \alpha j$. Tal com es veu en la fig. 1, aquest terme té dos efectes sobre la gravetat g :

⁴En la descripció feta des del sistema en rotació parlem d'acceleració centrífuga -i no centrípeta- perquè el terme $-\omega \times (\omega \times r)$ dóna un vector que s'allunya del centre de rotació.

(i) El component radial

$$|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})| \cos \alpha = \omega^2 R \cos^2 \alpha \quad (6)$$

li resta intensitat.

(ii) El component tangencial

$$|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})| \sin \alpha = \omega^2 R \cos \alpha \sin \alpha \quad (7)$$

desvia la gravetat de la direcció radial.

La desviació en l'acceleració gravitatòria (el canvi en el component perpendicular al radi del planeta) val $\omega^2 R \cos \alpha \sin \alpha$, i serà màxima o mínima segons siga la latitud, que ve donada per l'angle α . Això tindrà lloc quan es verifiqui que

$$\frac{d}{d\alpha}(\omega^2 R \cos \alpha \sin \alpha) = 0 \quad (8)$$

Això implicarà que

$$\omega^2 R(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \quad (9)$$

L'angle que verifica la relació (9) és de 45° i correspon a una desviació màxima. Si fem els càlculs per a l'hemisferi nord, treballarem amb $\alpha = 45^\circ$. Si substituïm valors en l'expressió (7), tindrem que la desviació gravitatòria màxima respecte de la direcció radial ve donada per un terme d'acceleració centrífuga que val $1.83 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$.

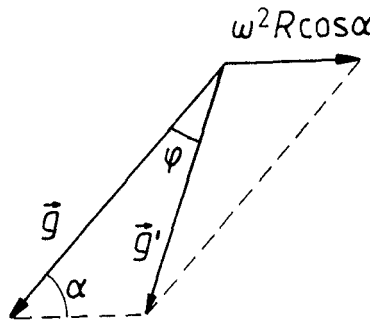


FIG. 2

També podem expressar la desviació de g' respecte de g indicant l'angle φ que formaria g' respecte de la direcció radial, que és la corresponent a g (fig. 2). Segons l'eq. (1),

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (10)$$

ja que $\mathbf{v}' = 0$. En la fig. 3 veiem que la descomposició de g en components al llarg dels eixos Y i Z és

$$\mathbf{g} = -g \cos \alpha \mathbf{j} - g \sin \alpha \mathbf{k} \quad (11)$$

Si usem les eqs. (5) i (11) en l'eq. (10), obtenim

$$\mathbf{g}' = -g \cos \alpha \mathbf{j} - g \sin \alpha \mathbf{k} + \omega^2 R \cos \alpha \mathbf{j} \quad (12)$$

i

$$|g'| = \sqrt{(\omega^2 R \cos \alpha - g \cos \alpha)^2 + g^2 \sin^2 \alpha} = 3.9999982 \text{ m/s}^2 \quad (13)$$

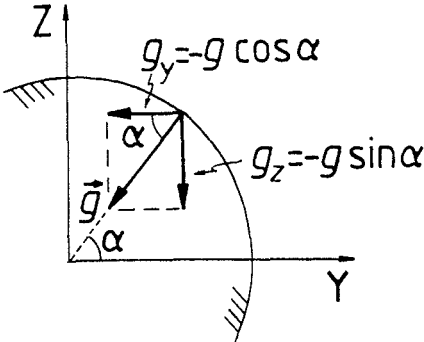


FIG. 3

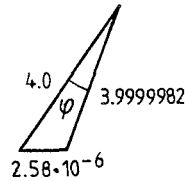


FIG. 4

Els altres costats del triangle representat en la fig. 2 valen, en mòdul,

$$|g| = 4.0 \text{ m/s}^2 \quad (14)$$

$$|\omega \times (\omega \times r)| = \omega^2 R \cos \alpha = 2.58 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2 \quad (15)$$

Pel teorema del cosinus, del triangle representat en la fig. 4 obtenim que

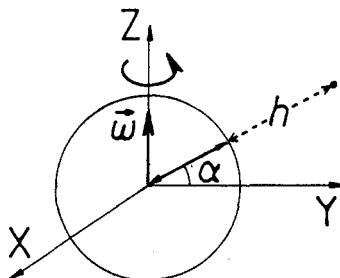
$$(2.58 \cdot 10^{-6})^2 = 3.9999982^2 + 4^2 - 2 \cdot 3.9999982 \cdot 4 \cos \varphi \quad (16)$$

la qual cosa dóna que

$$\cos \varphi \cong \frac{32 - (2.58 \cdot 10^{-6})^2}{32} = 1 - 2 \cdot 10^{-13} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 1.1 \cdot 10^{-8} \cong 0^\circ \quad (17)$$

com veiem, aquesta desviació és pràcticament nul·la.

2.10 Un cos situat en un punt de latitud 35° N cau des d'una altura de 650 m. Quan ja ha arribat a terra, calculeu la desviació (en magnitud i sentit) respecte del punt situat sota el de partida en la direcció radial. (El radi de la Terra val $R = 6.37 \cdot 10^6$ m).



$R = 6.37 \cdot 10^6$ m, $h = 650$ m, $\alpha = 35^\circ$ N, $\omega = 2\pi$ rad/24 h = $7.3 \cdot 10^{-5}$ rad/s
desviació respecte de la direcció radial del cos quan cau a la superfície terrestre?

El cos està situat sobre un sistema de referència en rotació uniforme amb velocitat angular ω , per tant, l'acceleració que experimentarà descrita des d'aquest sistema de referència en rotació serà

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1)$$

on la *prima* indica magnituds descrites des del sistema en rotació. Quan no hi apareix la *prima*, la magnitud està descrita des del sistema de referència inercial.

L'acceleració que portaria el cos quan cau en un sistema de referència inercial, seria la de la gravetat, $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, dirigida cap al centre de la Terra (açò és, en la direcció radial). Però com que el cos està caient en un sistema de referència no inercial, l'acceleració efectiva que experimentarà, a causa del camp gravitatori terrestre i dels efectes de la rotació terrestre, serà \mathbf{g}' ,

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2)$$

on els termes causants de la desviació respecte \mathbf{g} (direcció radial) són: el terme d'acceleració de Coriolis, $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$, degut al moviment del cos, i el terme d'acceleració centrífuga, $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$,⁵ degut a la situació del cos. Calcularem ara la desviació deguda a aquests dos termes.

Sabem que la velocitat \mathbf{v}' del cos sotmés a una acceleració \mathbf{g}' constant ve donada per

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_0 + \mathbf{g}'t \quad (3)$$

on hem suposat que l'acceleració \mathbf{g}' no canvia al llarg dels 650 m de caiguda. La velocitat inicial del cos és $\mathbf{v}' = 0$ m/s i suposarem que $\mathbf{g}' \cong \mathbf{g}$ en aquest càlcul de \mathbf{v}' .⁶ Així doncs, escriurem

$$\mathbf{v}' \cong \mathbf{g}t \quad (4)$$

Per simplicitat en els càlculs, i sense pèrdua de generalitat en el resultat final, suposarem que el cos està situat en l'hemisferi nord, en el pla YZ del sistema de referència. La velocitat, expressada de forma vectorial, és, segons es desprèn de l'eq. (4) i de la fig. 1,

$$\mathbf{v}' = (0, -gt \cos \alpha, -gt \sin \alpha) \quad (5)$$

Segons la fig. 2, les altres magnituds que apareixen en l'eq. (2), expressades en forma vectorial, són

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) \quad (6)$$

$$\mathbf{r} = (0, R \cos \alpha, R \sin \alpha) \quad (7)$$

⁵Vegeu la nota a peu de la pàgina 49.

⁶Encara que el que volem conèixer és \mathbf{g}' , en primera aproximació podem considerar que \mathbf{g}' no diferirà molt de \mathbf{g} i fer aquesta suposició en el càlcul de \mathbf{v}' no comporta cap error greu.

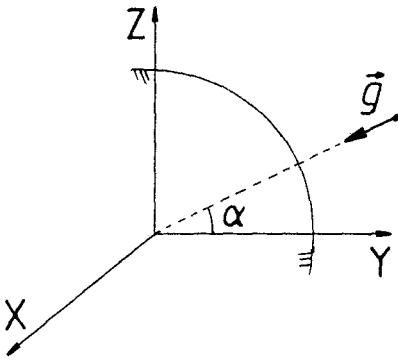


FIG. 1

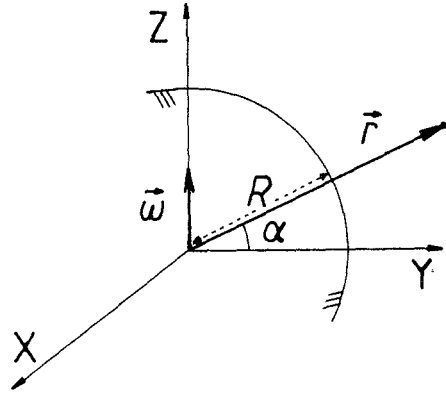


FIG. 2

En l'eq. (7) fem la suposició raonable que la distància des del cos fins al centre de la Terra (origen del sistema de referència) és aproximadament igual al radi terrestre (no hem tingut en compte l'altura del cos sobre la superfície terrestre perquè $650 \text{ m} \ll 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$). Tenim, per tant, que l'eq. (2), que ens dona l'acceleració efectiva a la qual es troba sotmés el cos, serà

$$g' = g - 2gt\omega \cos \alpha i + R\omega^2 \cos \alpha j \tag{8}$$

En aquesta expressió, veiem que el terme de Coriolis produeix una desviació cap a l'est (fig. 3a), i el terme d'acceleració centrífuga produeix una desviació cap al sud (fig. 3b).

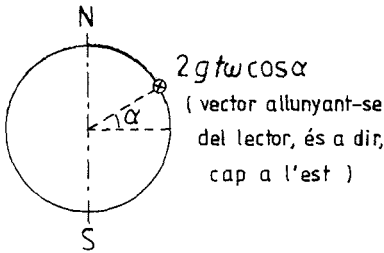


FIG. 3A

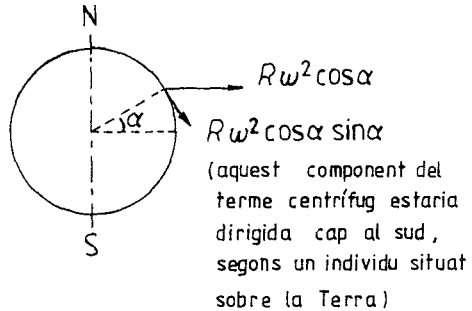


FIG. 3B

Notem que els vectors que hem dibuixat són acceleracions, no són posicions ni desplaçaments.

Càlcul de la desviació cap a l'est, d_E : Aquesta desviació és a causa de l'acceleració de Coriolis, que està dirigida cap a l'est (l'anomenarem ara a_E), la qual produeix una velocitat cap a l'est sobre el cos, v_E , i això dona lloc a una desviació cap a l'est, d_E . A partir de les relacions cinemàtiques, $v = dx/dt$ i $a = dv/dt$, podem escriure en el nostre cas la desviació produïda al cap d'un temps de caiguda t ,

$$d_E = \int_0^t dt' v_E(t') \tag{9}$$

La velocitat en cada instant de temps, $v_E(t')$, verificarà una relació similar,

$$v_E(t') = \int_0^{t'} dt'' a_E(t'') \quad (10)$$

i com que aquesta acceleració és produïda pel terme de Coriolis, en valor absolut tenim,

$$v_E(t') = \int_0^{t'} dt'' 2gt''\omega \cos \alpha = 2g\omega \cos \alpha \int_0^{t'} dt'' t'' = t'^2 g\omega \cos \alpha \quad (11)$$

La desviació, eq. (9), valdrà

$$d_E = \int_0^t dt' t'^2 g\omega \cos \alpha = g\omega \cos \alpha \int_0^t dt' t'^2 = \frac{t^3}{3} g\omega \cos \alpha \quad (12)$$

Com que la durada de la caiguda es pot obtenir a partir de $h = g't^2/2$, amb l'aproximació usada al començament del problema, $h = gt^2/2$, tenim

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (13)$$

Per tant,

$$d_E = \frac{\omega}{3} \cos \alpha \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \quad (14)$$

Càlcul de la desviació cap al sud, d_S : Procedim de manera similar al cas anterior i, usant que $a_S = R\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha$, segons es desprèn de la fig. 3b, obtenim

$$\begin{aligned} v_S(t') &= \int_0^{t'} dt'' a_S(t'') = \int_0^{t'} dt'' R\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \\ &= R\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \int_0^{t'} dt'' = t' R\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} d_S &= \int_0^t dt' v_S(t') = \int_0^t dt' t' R\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \\ &= R\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \int_0^t dt' t' = \frac{t^2}{2} R\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \end{aligned} \quad (16)$$

Anàlogament a com hem fet abans, ara escrivim

$$d_S = \frac{R\omega^2 h \cos \alpha \sin \alpha}{g} \quad (17)$$

punt on cauria el cos si
no actuassen ni l'acceleració
de Coriolis ni la centrífuga

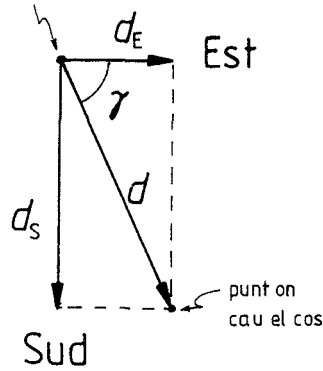


FIG. 4

Segons la fig. 4, la desviació total en mòdul, d , i en direcció, γ , vindrà donada per

$$d = \sqrt{d_E^2 + d_S^2} = \omega h \cos \alpha \sqrt{\frac{8h}{9g} + \frac{R^2 \omega^2 \sin^2}{g^2}} \quad (18)$$

$$\gamma = \arctan \frac{d_S}{d_E} \quad (19)$$

i en substituir els valors corresponents, això dona

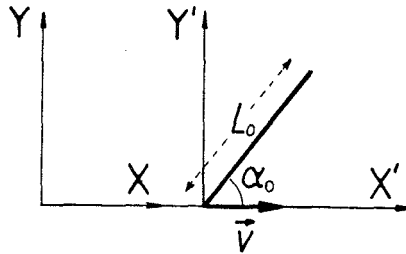
$$d = 1.10 \text{ m} \quad \gamma = 74.25^\circ \quad (20)$$

Si no haguérem fet la suposició inicial $g' \cong g$ per a calcular el valor de la velocitat de caiguda, el problema s'hauria complicat excessivament i els resultats finals no s'haurien alterat gaire.

3

Relativitat especial

3.1 Una vareta d'un metre de llargària forma un angle de 45° respecte de la direcció del moviment, mesurat aquest angle des d'un sistema de coordenades que es mou amb velocitat constant respecte del laboratori. Si el sistema en moviment té una velocitat de $0.8c$, quines són la longitud i l'orientació de la vareta, mesurades en el sistema del laboratori?



$L_0 = 1$ m, $\alpha_0 = 45^\circ$ (dades referides al sistema de referència propi)

$v = 0.8c$, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (velocitat de la llum en el buit)

L i α referits al sistema no propi?

Les dades de l'enunciat (L_0 i α_0) fan referència al sistema propi, i ara es tracta d'expressar aquestes magnituds en el sistema del laboratori (que és no propi, ja que allò que mesurem està en moviment relatiu respecte d'aquell). Per a fer això, fem la relació que dóna la longitud L descrita per un observador no propi,

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (1)$$

la qual cosa correspon a una contracció de longitud mesurada des del sistema no propi. Però hem de tenir en compte que aquesta expressió només és vàlida per a longituds paral·leles a la direcció del moviment. En la direcció perpendicular al moviment no hi ha contracció de longituds.

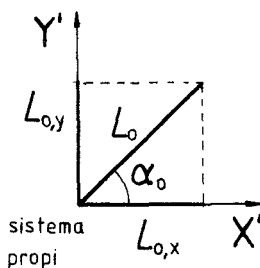


FIG. 1

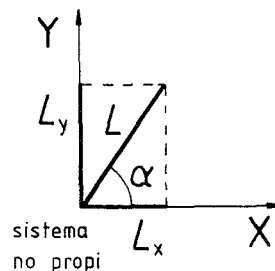


FIG. 2

Segons es veu en la fig. 1, descompondrem la longitud L_0 en dos components: l'un paral·lela i l'altra perpendicular a la velocitat entre els dos sistemes de referència en

moviment relatiu (el laboratori i el que viatja amb la vareta)

$$L_{0,y} = L_0 \sin \alpha_0 \quad (2)$$

$$L_{0,x} = L_0 \cos \alpha_0 \quad (3)$$

Com que el moviment és al llarg de l'eix horitzontal i no hi ha contracció de longituds en la direcció perpendicular al moviment, $L_y = L_{0,y}$. Segons l'eq. (2) tenim

$$L_y = L_0 \sin \alpha_0 \quad (4)$$

Per a calcular la contracció en la direcció paral·lela al moviment usem les eqs. (1) i (3) i obtenim que

$$L_x = L_0 \cos \alpha_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (5)$$

En substituir en les eqs. (4) i (5) els valors corresponents a les dades del problema, obtenim

$$L_x = 0.424 \text{ m}, \quad L_y = 0.707 \text{ m} \quad (6)$$

A partir de la fig. 2 tenim que

$$\tan \alpha = \frac{L_y}{L_x} = 1.67 \quad (7)$$

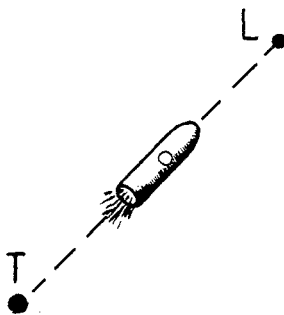
Això vol dir que

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = 0.824 \text{ m} \quad (8)$$

$$\alpha = \arctan 1.67 = 59.05^\circ \quad (9)$$

En definitiva, obtenim que, en reduir-se el component horitzontal de la vareta i no variar-ne el component vertical, es produeix una reducció de la longitud de la vareta i un augment de l'angle respecte de l'horitzontal en la descripció feta per l'observador no propi.

3.2 Un observador terrestre determina que la velocitat d'una nau espacial que es dirigeix cap a la Lluna val $0.8c$. (a) Quant de temps emprarà la nau a fer el viatge de la Terra a la Lluna, mesurat per l'observador terrestre? (b) Quina és la distància Terra-Lluna, observada per un passatger de la nau? (c) Quina és la duració del viatge segons aquest passatger? (Distància Terra-Lluna = $3.84 \cdot 10^8$ m).



$T = \text{Terra}$, $L = \text{Lluna}$, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (velocitat de la llum en el buit)
des de la Terra: $v = 0.8c$, $\overline{TL} = 3.84 \cdot 10^8$ m

- (a) temps del viatge T-L mesurat per un observador terrestre?
(b) distància T-L segons un passatger de la nau?
(c) temps del viatge mesurat per un passatger de la nau?

Per a simplificar el problema considerarem que ni la Terra ni la Lluna tenen cap moviment de rotació.

(a) Les dades del problema es refereixen a la Terra, per tant, el temps T del viatge T-L referit a un observador sobre la Terra serà igual a l'espai recorregut dividit per la velocitat, ja que aquesta és constant. Així, doncs,

$$T = \frac{\overline{TL}}{v} = \frac{3.84 \cdot 10^8}{0.8c} = 1.6 \text{ s} \quad (1)$$

Hem treballat amb un *sistema propi* perquè hem descrit un fenomen (interval temporal, T) que ocorre en el nostre sistema de referència.

(b) Ara el passatger intenta descriure una magnitud (distància T-L) que no està en repòs respecte del seu sistema de referència. És a dir, intenta descriure un fenomen que es produeix en un sistema de referència en moviment relatiu respecte del seu. Per això considerarem la nau espacial (que és on es troba el passatger) com a sistema no propi per tal de mesurar la distància T-L.

La posició de la Lluna sí que està fixa (no es mou) respecte de la Terra. Per tant, des de la Terra es mesura la distància T-L com un sistema propi, és a dir $L_0 = 3.84 \cdot 10^8$ m. Així, el passatger mesurarà la distància T-L com no pròpia,

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 3.84 \cdot 10^8 \sqrt{1 - 0.8^2} = 2.304 \cdot 10^8 \text{ m} \quad (2)$$

(c) Per a determinar la duració del viatge, el passatger mesurarà dos temps d'un fenomen que té lloc en el mateix punt del seu sistema de referència: (i) instant en què passa per la Terra (per la mateixa finestra de la nau veu la Terra), i (ii) instant en què passa per la Lluna (per la finestra veu la Lluna).

El passatger, mesurant aquest tipus de fenòmens, constitueix un sistema propi: ell mesurarà T_0 . Amb aquesta finalitat, usarà les dades conegudes en un altre sistema de referència que ell veu com si es moguera respecte d'ell (interval temporal, T , expressat en el sistema de referència de la Terra):

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad T_0 = T \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1.6 \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.96 \text{ s} \quad (3)$$

Vist des de la Terra (sistema no propi per a la descripció d'aquest fenomen), la duració del viatge és major que vist des de la nau espacial (sistema propi). Això està relacionat amb la dilatació de l'interval temporal quan el temps es mesura des d'un sistema no propi.

3.3 Un coet espacial, la longitud pròpia del qual és de 50 m, i que té un espill en cada extrem, s'allunya de la Terra. Un senyal de llum enviat des de la Terra es reflecteix en ambdós espills. El primer senyal reflectit és rebut després de 300 s d'haver estat enviat, i el segon senyal és rebut 2 μ s més tard que el primer. (a) Calculeu a quina distància es trobava de la Terra el coet espacial quan hi incidí la llum. (b) Calculeu-ne la velocitat respecte de la Terra.

$t_1 = 300$ s, $t_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ s, $L_0 = 50$ m, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (velocitat de la llum en el buit)

(a) distància d entre la part posterior del coet i la Terra?

(b) velocitat v del coet?

(a) El primer senyal lluminós tarda t_1 a arribar a l'espill posterior del coet i tornar a la Terra. Això vol dir que tardarà $t_1/2$ a arribar al coet -perquè la velocitat de la llum és constant. Per tant (fig. 1), la distància d serà

$$d = c \frac{t_1}{2} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 300}{2} = 4.5 \cdot 10^{10} \text{ m} \quad (1)$$

ja que el senyal lluminós viatja amb velocitat c .

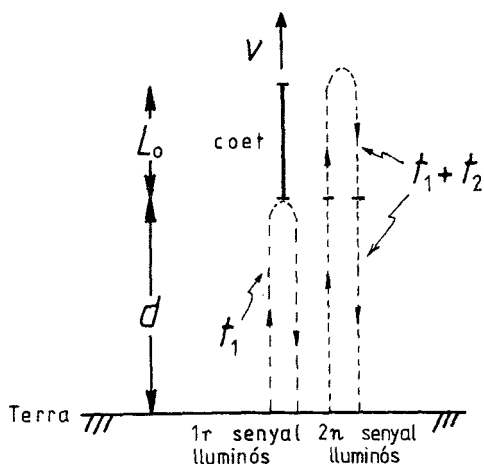


FIG. 1

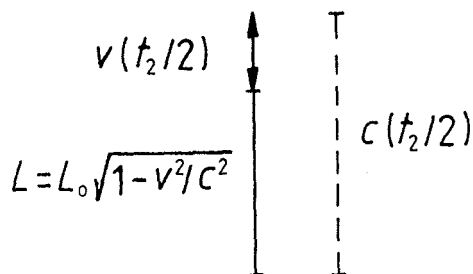


FIG. 2

(b) Després que el senyal sobrepassa el primer espill (a la part del darrere del coet), el coet continua avançant. Per tant, l'espai recorregut pel senyal de llum des que sobrepassa el primer espill fins que rebota en el segon (a la part davantera del coet) és igual a la longitud del coet, considerada per l'observador de la Terra (que és una longitud no pròpia), més l'espai que ha avançat la nau amb velocitat v durant el temps $t_2/2$ transcorregut des que passa el senyal lluminós pel primer espill fins que arriba al segon espill, com es pot apreciar en la fig. 2.

Com que en l'interval de temps $t_2/2$ el senyal de llum ha recorregut la distància $ct_2/2$, segons representa la fig. 2, podem escriure la igualtat

$$c \frac{t_2}{2} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + v \frac{t_2}{2} \quad (2)$$

on el terme de l'esquerra representa la distància recorreguda per la llum en l'interval de temps $t_2/2$; el primer terme de la dreta, la longitud del coet vist des de la Terra, i el segon terme de la dreta, l'espai recorregut pel coet en el temps $t_2/2$. En definitiva, tot això és la distància que separa els dos espills en l'interval de temps $t_2/2$.

Totes les dades de l'eq. (2) són conegudes, (t_2, L_0, c) , excepte la velocitat v , que aïllem de la manera següent. Reagrupem els termes de l'eq. (2)

$$(c-v)\frac{t_2}{2} = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (3)$$

i elevem al quadrat

$$(c-v)^2\left(\frac{t_2}{2}\right)^2 = L_0^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \quad (4)$$

la qual cosa dóna

$$(c^2+v^2-2cv)\left(\frac{t_2}{2}\right)^2 = L_0^2 - L_0^2\frac{v^2}{c^2} \quad (5)$$

En agrupar els termes en potències de v , obtenim

$$v^2\left[\left(\frac{t_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{L_0}{c}\right)^2\right] - v\left[2c\left(\frac{t_2}{2}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 - L_0^2\right] = 0 \quad (6)$$

L'equació anterior és una equació de segon grau, la solució de la qual és

$$v = \frac{2c(t_2/2)^2 \pm \sqrt{4c^2(t_2/2)^4 - 4\left[(t_2/2)^2 + (L_0/c)^2\right]\left[(ct_2/2)^2 - L_0^2\right]}}{2\left[(t_2/2)^2 + (L_0/c)^2\right]} \quad (7)$$

En simplificar l'expressió anterior obtenim

$$v = c \frac{(t_2/2)^2 \pm (L_0/c)^2}{(t_2/2)^2 + (L_0/c)^2} \begin{cases} (i) & v = c \frac{(t_2/2)^2 + (L_0/c)^2}{(t_2/2)^2 + (L_0/c)^2} \\ (ii) & v = c \frac{(t_2/2)^2 - (L_0/c)^2}{(t_2/2)^2 + (L_0/c)^2} \end{cases} \quad (8)$$

L'apartat (i) de l'eq. (8) dóna que $v = c$, i això és impossible, ja que el coet té massa i cap objecte amb massa pot viatjar a la velocitat de la llum. L'apartat (ii) de l'eq. (8) dóna que $v = 0.946c$, que és la resposta correcta. Com veiem, el coet viatja a una velocitat molt pròxima a la de la llum, però no hi arriba.

3.4 Calculeu l'energia necessària (segons la Mecànica Relativista) per tal de: (a) proporcionar una velocitat de $0.25c$ a un electró que parteix d'una situació de repòs, i (b) augmentar-ne la velocitat des de $0.25c$ fins a $0.7c$. Quina és la relació entre l'energia cinètica de l'electró quan té una velocitat de $0.7c$ i quan aquesta val $0.25c$, segons es calcule: (c) usant-hi la Mecànica Clàssica o (d) emprant-hi la Mecànica Relativista? Expreseu els resultats en MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$, $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-28} \text{ g} = 0.511 \text{ MeV}/c^2$).

ΔE necessària perquè un electró passe de v_1 a v_2 ? $\left\{ \begin{array}{l} (a) v_1 = 0, v_2 = 0.25c \\ (b) v_1 = 0.25c, v_2 = 0.7c \end{array} \right.$

$E_k(v_2)/E_k(v_1)$? $v_1 = 0.25c, v_2 = 0.7c$ $\left\{ \begin{array}{l} (c) \text{ Mecànica Clàssica} \\ (d) \text{ Mecànica Relativista} \end{array} \right.$

$m_0 = m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2, 1 \text{ MeV} = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$

Sabem que l'energia total de la partícula de massa m_0 i velocitat v és la suma de l'energia en repòs i de l'energia cinètica

$$E_T = mc^2 = m_0c^2 + E_k \quad (1)$$

amb la qual cosa l'energia cinètica s'escriu

$$E_k = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (2)$$

on hem usat la relació $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

L'energia necessària perquè l'electró passe de la velocitat v_1 a la velocitat v_2 serà la variació de l'energia total

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{T,2} - E_{T,1} = E_{k,2} - E_{k,1} = \\ &= m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - 1 \right) - m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Això dóna

$$\Delta E = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \right) \quad (4)$$

Així, doncs, en el cas (a) tenim:

$$\Delta E = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0.25^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 0^2}} \right) = 0.0168 \text{ MeV} = 2.685 \cdot 10^{-15} \text{ J} \quad (5)$$

i en el cas (b):

$$\Delta E = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0.7^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 0.25^2}} \right) = 0.188 \text{ MeV} = 3.008 \cdot 10^{-14} \text{ J} \quad (6)$$

On hem tingut en compte que la massa de l'electró val $m_0 = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ i que $1 \text{ MeV} = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$.

L'expressió de l'energia cinètica en Mecànica Clàssica (MC) és

$$E_k^{\text{MC}} = \frac{1}{2}m_0v^2 \quad (7)$$

L'expressió corresponent en Mecànica Relativista (MR) ve donada per l'eq. (2)

$$E_k^{\text{MR}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (8)$$

Per tant, el quocient d'energies val, en el cas (c):

$$\left[\frac{E_k(v_2)}{E_k(v_1)} \right]^{\text{MC}} = \frac{m_0 v_2^2 / 2}{m_0 v_1^2 / 2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 = 7.84 \quad (9)$$

i en el cas (d):

$$\begin{aligned} \left[\frac{E_k(v_2)}{E_k(v_1)} \right]^{\text{MR}} &= \frac{m_0 c^2 \left[(1 - v_2^2/c^2)^{-1/2} - 1 \right]}{m_0 c^2 \left[(1 - v_1^2/c^2)^{-1/2} - 1 \right]} \\ &= \frac{(1 - v_2^2/c^2)^{-1/2} - 1}{(1 - v_1^2/c^2)^{-1/2} - 1} = 12.21 \end{aligned} \quad (10)$$

Com veiem, hi ha una diferència apreciable entre els resultats clàssic i relativista. Aquesta diferència de resultats ja no és tan gran quan les velocitats que hi intervenen són molt més petites que la de la llum en el buit, c .

Per a veure si el càlcul relativista difereix molt o poc del clàssic es podria calcular el quocient $E_k^{\text{MC}}/E_k^{\text{MR}}$ per a les dues velocitats,

$$\frac{E_k^{\text{MC}}}{E_k^{\text{MR}}} = \frac{\frac{1}{2} m_0 v^2}{m_0 c^2 \left[(1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1 \right]} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\left[(1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1 \right]} \quad (11)$$

Per a les dues velocitats que estem considerant, això dona

$$\left[\frac{E_k^{\text{MC}}}{E_k^{\text{MR}}} \right]_{v=0.25c} = 0.953 \quad (12)$$

$$\left[\frac{E_k^{\text{MC}}}{E_k^{\text{MR}}} \right]_{v=0.7c} = 0.612 \quad (13)$$

En el cas que la velocitat és baixa comparada amb la de la llum, $v = 0.25c$, a penes existeix diferència entre el càlcul clàssic i el relativista, ja que el quocient entre ambdós és molt pròxim a la unitat, eq. (12). En canvi, quan augmenta la velocitat, $v = 0.7c$, aquest quocient ja difereix molt més respecte de la unitat, eq. (13), i ja no es pot emprar el tractament clàssic.

3.5 L'energia cinètica d'un muó és de 350 MeV. Calculeu: (a) l'energia total del muó, expressada en MeV, i (b) el seu moment lineal expressat en MeV/c. La massa del muó en repòs val 105.66 MeV/c².

$$E_k = 350 \text{ MeV}, m_0 = 105.66 \text{ MeV}/c^2$$

(a) E_T , en MeV?

(b) p , en MeV/c?

(a) L'energia total d'una partícula és, segons la teoria de la relativitat,

$$E_T = m_0 c^2 + E_k \quad (1)$$

on $m_0 c^2$ és l'energia en repòs i E_k és l'energia cinètica. Per tant, només cal substituir valors per al cas del muó (tots ells ja expressats en MeV),

$$E_T = 105.66 + 350 = 455.66 \text{ MeV} \quad (2)$$

(b) Per a calcular el moment lineal del muó cal conèixer-ne la velocitat, ja que

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v \quad (3)$$

A partir de l'expressió de l'energia cinètica E_k ,

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (4)$$

aïllem la velocitat v del muó

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E_k + m_0 c^2} \right)^2} \quad (5)$$

d'on traiem que $v = 0.97274c$. En fer les substitucions en l'eq. (3), obtenim el moment lineal del muó

$$p = 443.21 \text{ MeV}/c \quad (6)$$

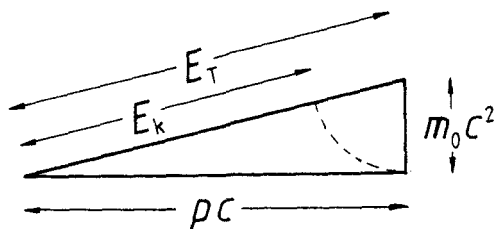


FIG. 1

Es poden comprovar aquests resultats fent el diagrama energètic representat en la fig. 1. Expressem l'energia total del muó en funció de la seua energia en repòs i del seu moment lineal

$$E_T = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (pc)^2} \quad (7)$$

la qual cosa indica que podem tractar l'energia total com si fóra el mòdul d'un vector de dos components: m_0c^2 i pc . Amb els resultats que hem obtingut és fàcil verificar que sí que es compleix aquesta relació.

3.6 Experimentalment es comprova que l'energia cinètica d'una partícula és 60 MeV i el seu moment lineal val 335 MeV/c. Determineu-ne: (a) la massa, i (b) la velocitat.

$$E_k = 50 \text{ MeV}, p = 300 \text{ MeV}/c$$

(a) m_0 ?

(b) v ?

(a) Sabem que l'energia total d'una partícula de massa m_0 i velocitat v verifica que

$$E_T = E_k + m_0c^2 \quad (1)$$

on E_k és l'energia cinètica i m_0c^2 és l'energia corresponent a la massa m_0 . La relació entre E_T i el moment lineal p és

$$E_T = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2} \quad (2)$$

D'aquestes equacions es dedueix que

$$E_k + m_0c^2 = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2} \quad (3)$$

Com que l'única incògnita és m_0 , en elevar l'eq. (3) al quadrat obtenim el valor de m_0 ,

$$m_0 = \frac{1}{c^2} \frac{(pc)^2 - E_k^2}{2E_k} = 875 \text{ MeV}/c^2 \quad (4)$$

(b) També podem expressar l'energia total d'una partícula de massa m_0 i velocitat v mitjançant la relació

$$E_T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5)$$

com que el seu moment lineal és

$$p = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6)$$

a partir de les eqs. (5) i (6) obtenim una expressió per a la velocitat en termes del moment i de l'energia total

$$v = \frac{pc^2}{E_T} \quad (7)$$

Ara ja podem substituir l'energia total E_T de l'eq. (1), i també el valor de p que ens dona l'enunciat del problema, i obtenim

$$v = 0.324c \quad (8)$$

Si tenim en compte que $1 \text{ MeV}/c^2 = 1.78 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ i que $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, els resultats anteriors s'expressen en el sistema internacional (SI) d'unitats com

$$m_0 = 1.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad v = 9.7 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad (9)$$

3.7 La radiació solar arriba a l'atmosfera terrestre amb una intensitat mitjana de $0.1367 \text{ J cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. El Sol té una massa de $1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ i es troba a $1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ de distància de la Terra. Si suposem que aquesta intensitat no varia amb el pas del temps, calculeu la fracció de massa perduda pel Sol (a) al cap d'una hora, i (b) després d'un milió d'anys.

S = Sol, T = Terra

$$I = 0.1367 \text{ J cm}^{-2} \text{ s}^{-1} = 1367 \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$d_{ST} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

si $I = \text{constant}$: $\Delta M_{\odot}/M_{\odot}$? al cap de $\left\{ \begin{array}{l} (a) 1 \text{ h} = 3600 \text{ s} \\ (b) 10^6 \text{ anys} = 3.1536 \cdot 10^{13} \text{ s} \end{array} \right.$

Si coneixem l'energia que arriba per unitat d'àrea i de temps sobre la superfície terrestre, podrem conèixer l'energia que desprèn el Sol per unitat de temps. El Sol emet energia isotròpament, és a dir, de la mateixa manera en totes les direccions de l'espai. Si suposem que aquesta energia no es dissipa⁷ mentre viatja per l'espai, tota l'energia que haja eixit del Sol serà la mateixa que es detecte en una superfície esfèrica concèntrica amb el Sol, a causa de la conservació de l'energia.

Considerem que el radi d' d'aquesta superfície esfèrica val la distància d_{ST} entre el Sol i la Terra. Aleshores, l'àrea d'aquesta esfera valdrà

$$A = 4\pi d_{ST}^2 \quad (1)$$

L'energia per unitat d'àrea i de temps que es detecta sobre la superfície terrestre, és a dir, a una distància d_{ST} del Sol, val⁸

$$\frac{E}{At} = 1367 \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (2)$$

Com que l'energia emesa pel Sol per unitat de temps és la mateixa energia que arriba per unitat de temps a la superfície esfèrica de radi d_{ST} , fent ús de les eqs. (1) i (2) podem escriure

$$\frac{E}{t} = \frac{E}{At} A = 1367 \cdot 4\pi d_{ST}^2 \quad (3)$$

Ara emprarem la relació entre la massa i l'energia

$$E = mc^2 \quad (4)$$

per a transformar l'energia per unitat de temps, eq. (3), en la massa que perd el Sol per unitat de temps.⁹ Escriurem ΔM_{\odot} per a indicar la quantitat de massa solar que s'ha transformat en energia:

$$\frac{\Delta M_{\odot}}{t} = \frac{E}{tc^2} = \frac{I4\pi d_{ST}^2}{c^2} \quad (5)$$

⁷A causa de possibles interaccions amb cossos celestes.

⁸Aquest és el valor que apareix en *A Physicist's Desk Reference*, editat per H. L. Anderson (American Institute of Physics, New York, 1989) pàg. 191.

⁹El principal procés de producció energètica en el Sol consisteix en la fusió de dos nuclis d'hidrogen per a formar un nucli d'heli, procés en el qual s'allibera energia.

on hem usat les eqs. (3) i (4).

A partir de l'expressió (5) és immediat calcular la massa perduda pel Sol al cap d'un temps t :

$$\Delta M_{\odot} = 4\pi t I \frac{d_{ST}^2}{c^2} \quad (6)$$

(a) Al cap d'una hora ($t = 3600$ s) la massa que ha perdut el Sol val

$$\Delta M_{\odot}(1 \text{ hora}) = 4\pi \cdot 3600 \cdot 1367 \frac{(1.496 \cdot 10^{11})^2}{(3 \cdot 10^8)^2} = 1.538 \cdot 10^{13} \text{ kg} \quad (7)$$

(b) Després d'un milió d'anys ($t = 3.1536 \cdot 10^{13}$ s), el Sol hauria perdut una massa:

$$\Delta M_{\odot}(10^6 \text{ anys}) = 4\pi \cdot 3.1536 \cdot 10^{13} \cdot 1367 \frac{(1.496 \cdot 10^{11})^2}{(3 \cdot 10^8)^2} = 1.347 \cdot 10^{23} \text{ kg} \quad (8)$$

La fracció de massa perduda pel Sol val, en cada cas:

$$\frac{\Delta M_{\odot}}{M_{\odot}} = \begin{cases} (a) & 1.538 \cdot 10^{13} / (1.989 \cdot 10^{30}) = 7.73 \cdot 10^{-18} \\ (b) & 1.347 \cdot 10^{23} / (1.989 \cdot 10^{30}) = 6.77 \cdot 10^{-8} \end{cases} \quad (9)$$

que, expressat en percentatge, dóna: (a) $7.73 \cdot 10^{-16} \%$ i (b) $6.77 \cdot 10^{-6} \%$.

Cal fer notar que aquests resultats els hem obtinguts suposant que la intensitat d'emissió del Sol no varia amb el temps. Com podem apreciar, aquesta suposició és prou bona per al lapse d'una hora, ja que la pèrdua de massa només comporta el $7.73 \cdot 10^{-16} \%$ del total, i com que la intensitat d'emissió està relacionada amb la massa solar, és raonable suposar que si la massa no varia, tampoc no variarà la intensitat d'emissió. En canvi, la suposició inicial ja no és tan bona per a un lapse d'un milió d'anys, ja que el percentatge de massa perduda pel Sol, encara que és menut ($6.77 \cdot 10^{-6} \%$), ja pot considerar-se com una variació apreciable, perquè afectaria la cinquena o la sisena xifra significativa de la massa solar.

Per a fer un estudi més rigorós en el segon cas, caldria estudiar la variació massica del Sol a través de la relació:

$$\frac{-dM_{\odot}}{dt} = aM_{\odot} \quad (10)$$

on a és una constant de proporcionalitat. D'ací es pot deduir que la massa disminuiria exponencialment

$$M_{\odot}(t) = M_{\odot,0} e^{-t/\tau} \quad (11)$$

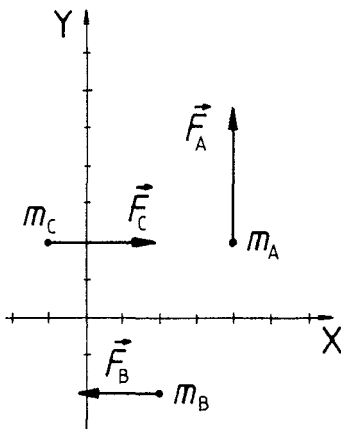
on τ és una constant i $M_{\odot,0}$ és la massa en un instant determinat.

4

Sistemas de partículas

4.1 Tenim tres partícules materials de masses m_A , m_B i m_C , situades en les posicions A, B i C, respectivament. Inicialment, les partícules es troben en repòs i sobre cadascuna actuen les forces F_A , F_B i F_C , respectivament. Calculeu: (a) la posició del centre de massa (CM) del sistema abans que hi actuen les forces; (b) l'acceleració corresponent al CM; (c) la velocitat del CM un instant t després que s'hi han aplicat les forces; (d) el moment lineal de cada partícula respecte al CM, i (e) el moment angular del sistema respecte al CM. Les dades numèriques són:

A = (4, 2) m, $m_A = 6$ kg, $F_A = 10j$ N; B = (2, -2) m, $m_B = 3$ kg, $F_B = -6i$ N; i C = (-1, 2) m, $m_C = 2$ kg, $F_C = 8i$ N.



$m_A = 6$ kg, A = (4, 2) m, $F_A = 10j$ N

$m_B = 3$ kg, B = (2, -2) m, $F_B = -6i$ N

$m_C = 2$ kg, C = (-1, 2) m, $F_C = 8i$ N

(a) si $F_A = F_B = F_C = 0$: r_{CM} ?

(b) a_{CM} ?

(c) v_{CM} ?

(d) p_A , p_B i p_C respecte del CM?

(e) L respecte del CM?

En aquest problema treballarem amb unitats del sistema SI.

(a) Sabem que per a un sistema discret de partícules amb massa m_i i posició r_i , el centre de massa es pot calcular mitjançant l'expressió

$$r_{CM} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} \quad (1)$$

A partir d'ara ja no posarem sota el símbol del sumatori el subíndex respecte del qual se suma, excepte quan siga estrictament necessari per a evitar confusions. Com que no hi ha forces aplicades, les posicions són les inicials: A, B i C. Si escrivim l'eq. (1) en els seus components,

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{6 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{6 + 3 + 2} = 2.55 \text{ m} \quad (2)$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{6 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{6 + 3 + 2} = 0.91 \text{ m} \quad (3)$$

Per tant, la posició del centre de massa ve donada pel vector

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = (2.55, 0.91) \text{ m} \quad (4)$$

(b) En aplicar-hi les forces, el sistema es mou com si la resultant de les forces exteriors estiguera aplicada sobre la massa total del sistema concentrada en el seu CM, per tant la segona llei de Newton s'escriurà

$$\left(\sum_i m_i \right) \mathbf{a}_{\text{CM}} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (5)$$

d'on obtenim que l'acceleració del centre de massa val

$$\mathbf{a}_{\text{CM}} = \frac{\sum \mathbf{F}_i}{\sum m_i} = \frac{10\mathbf{j} - 6\mathbf{i} + 8\mathbf{i}}{6 + 3 + 2} = (0.18\mathbf{i} + 0.91\mathbf{j}) \text{ m/s}^2 \quad (6)$$

(c) Coneguda l'acceleració del CM, és fàcil calcular-ne la velocitat \mathbf{v}_{CM} en un temps qualsevol si coneixem la velocitat inicial $\mathbf{v}_{\text{CM},0}$ del CM. A partir de les relacions cinemàtiques corresponents a un moviment uniformement accelerat escrivim

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \mathbf{v}_{\text{CM},0} + \mathbf{a}_{\text{CM}} t \quad (7)$$

Abans d'aplicar-hi les forces exteriors, les partícules es trobaven en repòs ($\mathbf{v}_{\text{A},0} = \mathbf{v}_{\text{B},0} = \mathbf{v}_{\text{C},0} = 0$), per tant

$$\mathbf{v}_{\text{CM},0} = \frac{\sum \mathbf{v}_{i,0} m_i}{\sum m_i} = 0 \quad (8)$$

De les eqs. (6), (7) i (8) es dedueix que la velocitat del centre de massa quan ha transcorregut un temps t des que s'hi han aplicat les forces, val

$$\mathbf{v}_{\text{CM}}(t) = (0.18t\mathbf{i} + 0.91t\mathbf{j}) \text{ m/s} \quad (9)$$

(d) Representarem per \mathbf{p}'_j i \mathbf{v}'_j el moment lineal i la velocitat, respectivament, de la partícula j respecte del CM:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}'_j &= m_j \mathbf{v}'_j \\ \mathbf{v}'_j &= \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{\text{CM}} \\ \mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_{j,0} + \mathbf{a}_j t \\ \mathbf{a}_j &= \frac{\mathbf{F}_j}{m_j} \end{aligned} \right\} j = \text{A, B, C} \quad (10)$$

En utilitzar les dades del problema, i els resultats previs, s'obté

$$\mathbf{p}'_{\text{A}} = (-1.08t\mathbf{i} + 4.54t\mathbf{j}) \text{ kg m/s} \quad (11)$$

$$\mathbf{p}'_B = (-6.55t \mathbf{i} - 2.72t \mathbf{j}) \text{ kg m/s} \quad (12)$$

$$\mathbf{p}'_C = (7.63t \mathbf{i} - 1.82t \mathbf{j}) \text{ kg m/s} \quad (13)$$

Com es pot observar, sumant les eqs. (11), (12) i (13) comprovem que la suma de moments referits al CM és zero, com calia esperar, ja que el moment total (suma dels moments de cada partícula) referit al CM és zero.

(e) El càlcul del moment angular referit al CM, \mathbf{L}' , es pot fer emprant l'expressió

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} - \left(\sum_i m_i \right) (\mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{v}_{\text{CM}}) \quad (14)$$

on \mathbf{L} és el moment angular referit a l'origen de coordenades.

Ara no podem usar el valor de \mathbf{r}_{CM} donat a l'expressió (4), que només val per a l'instant inicial. Hem de calcular el valor de \mathbf{r}_{CM} per a un instant t des que s'hi apliquen les forces. Com que, per l'eq. (9), sabem el valor de $\mathbf{v}_{\text{CM}}(t)$,

$$\mathbf{r}_{\text{CM}}(t) = \int dt \mathbf{v}_{\text{CM}}(t) = 0.18 \frac{t^2}{2} \mathbf{i} + 0.91 \frac{t^2}{2} \mathbf{j} + \text{constant} \quad (15)$$

i com que en l'instant inicial $\mathbf{r}_{\text{CM}}(t=0) = (2.55 \mathbf{i} + 0.91 \mathbf{j})$, resulta que

$$\mathbf{r}_{\text{CM}}(t) = (2.55 + 0.09t^2, 0.91 + 0.455t^2) \text{ m} \quad (16)$$

La velocitat del centre de massa \mathbf{v}_{CM} ja la coneixem per l'expressió (9). El moment angular del sistema, \mathbf{L} , referit a l'origen del sistema de coordenades representat en la figura de l'enunciat, val:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B + \mathbf{L}_C \quad (17)$$

i com que

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}_j &= \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j \\ \mathbf{r}_j &= \int dt \mathbf{v}_j \\ \mathbf{v}_j &= \int dt \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_j &= \frac{\mathbf{F}_j}{m_j} \\ \mathbf{p}_j &= m \mathbf{v}_j \end{aligned} \right\} j = A, B, C \quad (18)$$

resulta que $\mathbf{L}_A = 40t \mathbf{k}$, $\mathbf{L}_B = -12t \mathbf{k}$ i $\mathbf{L}_C = -16t \mathbf{k}$. En conseqüència

$$\mathbf{L} = \sum_{j=A,B,C} \mathbf{L}_j = 12t \mathbf{k} \quad (19)$$

També calculem

$$\sum_j m_j (\mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{v}_{\text{CM}}) = 25.88t \mathbf{k} \quad (20)$$

Per tant,

$$\mathbf{L}' = 12t \mathbf{k} - 25.88t \mathbf{k} = -13.88t \mathbf{k} \text{ kg m}^2/\text{s} \quad (21)$$

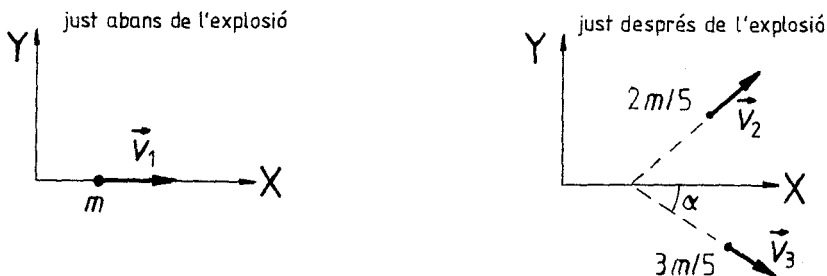
Una manera alternativa de fer el càlcul de \mathbf{L}' és mitjançant la suma dels moments angulars de cada partícula referits al CM

$$\mathbf{L}' = \mathbf{r}'_A \times \mathbf{p}'_A + \mathbf{r}'_B \times \mathbf{p}'_B + \mathbf{r}'_C \times \mathbf{p}'_C \quad (22)$$

(recordem que les quantitats amb *prima* estan referides al CM: \mathbf{r}'_A seria $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{CM}$, i anàlogament per a \mathbf{r}'_B i \mathbf{r}'_C).

Obviament (i això ens pot servir de comprovació) el resultat obtingut de l'eq. (22) ha de ser el mateix que el de l'expressió (21).

4.2 Una granada que es mou horitzontalment sobre la superfície terrestre amb una velocitat de 100 m/s rebenta i es desfà en dos fragments; el més gran, que té 3/5 de la massa total, ix llançat cap avall formant un angle de 40° amb l'horitzontal i duu una velocitat que és un 60% superior a la de la granada. Calculeu la velocitat de l'altre fragment si suposem que tot el procés té lloc en el pla vertical. Calculeu la velocitat del CM dels dos fragments després de l'explosió. Què ocorrerà si suposem que no actua la gravetat sobre el sistema?



immediatament abans de l'explosió: $\mathbf{v}_1 = 100 \mathbf{i}$ m/s

immediatament després de l'explosió: $\alpha = 40^\circ$, $|\mathbf{v}_3| = |\mathbf{v}_1| + 0.6 |\mathbf{v}_1| = 160$ m/s

(a) \mathbf{v}_2 ?

(b) \mathbf{v}_{CM} després de l'explosió?

Per a calcular \mathbf{v}_2 , i després \mathbf{v}_{CM} , mitjançant l'expressió

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} \quad (1)$$

emprarem la relació que existeix entre la variació del moment lineal del sistema per unitat de temps, i la força externa aplicada,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \quad (2)$$

$$dp = \mathbf{F}_{\text{ext}} dt \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{\text{ext}} dt \quad (3)$$

En el cas que ens ocupa la força externa és el pes (ja que el moviment es produeix sobre la superfície terrestre), que va dirigit cap avall,

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = (0, -Mg) \quad (4)$$

on hem usat M per a designar la massa d'una partícula qualsevol. Com que aquesta força externa és constant, podem traure-la fora de la integral en l'eq. (3),

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \mathbf{F}_{\text{ext}} \int_{t_i}^{t_f} dt \quad (5)$$

i si prenem com a origen de temps l'instant de l'explosió ($t_i = 0$ i $t_f = t$), llavors

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \mathbf{F}_{\text{ext}} t \quad (6)$$

Estudiarem ara el que succeeix si fem la discussió component per component.

Component x : Com que $F_{\text{ext},x} = 0$ segons l'eq. (4), i $p_{i,x} = mv_1$, i $p_{f,x} = (2m/5)v_{2x} + (3m/5)v_{3x}$, tindrem

$$p_{f,x} - p_{i,x} = F_{\text{ext},x} t \quad \Rightarrow \quad \frac{2m}{5}v_{2x} + \frac{3m}{5}v_{3x} - mv_1 = 0 \quad (7)$$

Això pot escriure's com

$$2v_{2x} + 3v_{3x} - 5v_1 = 0 \quad (8)$$

Component y : Ara, $F_{\text{ext},y} = -(2m/5)g - (3m/5)g = -mg$ segons l'eq. (4), $p_{i,y} = 0$ i $p_{f,y} = (2m/5)v_{2y} + (3m/5)v_{3y}$. Per tant, de l'eq. (6), obtenim

$$p_{f,y} - p_{i,y} = F_{\text{ext},y} t \quad \Rightarrow \quad \frac{2m}{5}v_{2y} + \frac{3m}{5}v_{3y} = -mgt \quad (9)$$

que reescrivim així

$$2v_{2y} + 3v_{3y} = -5gt \quad (10)$$

Notem que la velocitat de la partícula de massa $3m/5$, per estar sotmesa a l'acceleració deguda a la gravetat, verificarà que

$$v_{3x} = v_3 \cos \alpha \quad (11)$$

$$v_{3y} = -v_3 \sin \alpha - gt \quad (12)$$

on hem usat la relació cinemàtica $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$ (que correspon a un moviment uniformement accelerat), i on hem tingut en compte que sobre el component x no actua cap acceleració, i sobre el component y actua la gravetat, dirigida cap avall. La velocitat inicial de v_3 en el component horitzontal està dirigida cap a les x positives, i la velocitat inicial de v_3 en el component y està dirigida cap a les y negatives. L'angle α apareix definit en la figura de l'enunciat.

De les eqs. (8), (10), (11) i (12) obtenim v_{2x} i v_{2y} (les quals ens permetran calcular v_2)

$$v_{2x} = \frac{-3v_3 \cos \alpha + 5v_1}{2} \quad (13)$$

$$v_{2y} = \frac{3v_3 \sin \alpha + 3gt - 5gt}{2} = \frac{3v_3 \sin \alpha - 2gt}{2} \quad (14)$$

Si substituïm valors, tindrem

$$\mathbf{v}_2 = (66.15, 154.27 - gt) \text{ m/s} \quad (15)$$

(on t vindrà expressat en segons).

(b) Per a calcular v_{CM} emprem la relació

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\frac{2}{5}m\mathbf{v}_2 + \frac{3}{5}m\mathbf{v}_3}{\frac{2}{5}m + \frac{3}{5}m} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_{CM,x} = \frac{2}{5}v_{2x} + \frac{3}{5}v_{3x} = \frac{2}{5}66.15 + \frac{3}{5}v_3 \cos \alpha = 100 \text{ m/s} \\ v_{CM,y} = \frac{2}{5}v_{2y} + \frac{3}{5}v_{3y} = \frac{2}{5}(154.27 - gt) - \frac{3}{5}v_3 \sin \alpha - \frac{3}{5}gt = \\ = (3.89 \cdot 10^{-4} - gt) \text{ m/s} \end{cases} \quad (16)$$

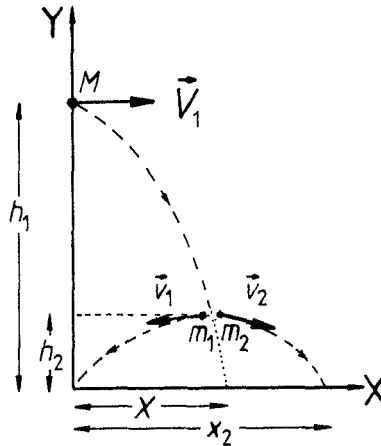
Podem comprovar si aquest resultat és correcte calculant la velocitat de la granada si no haguera rebotat, ja que el CM d'un sistema de partícules es comporta com si les forces externes actuaren sobre la massa del sistema concentrada en el CM,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{1,0} + \mathbf{a}t \Rightarrow \begin{cases} v_{1x} = v_{1x,0} + a_x t = v_1 = 100 \text{ m/s} \\ v_{1y} = v_{1y,0} + a_y t = -gt \end{cases} \quad (17)$$

Com veiem, els resultats donats per les expressions (16) i (17) són iguals, excepte en el valor $3.89 \cdot 10^{-4}$ m/s, que apareix en l'expressió (16) i que no apareix en la (17). Aquest seria un exemple típic d'error d'arredoniment que s'acumula al final dels càlculs i sembla donar un resultat erroni. No és així; ambdós resultats, els corresponents a les expressions (16) i (17) respectivament, són equivalents ja que el valor $3.89 \cdot 10^{-4}$ és un resultat espuri que desapareixeria si haguérem fet els càlculs numèrics amb més precisió en les xifres significatives.

El cas en què no actua la gravetat sobre el sistema correspon a considerar en l'eq. (2) que la força externa és zero. Això simplificaria notablement els càlculs, perquè sols s'hi ha d'aplicar el principi de conservació del moment lineal abans i després de l'explosió. O bé, fer igual a zero el terme degut a la gravetat en totes les expressions de l'apartat anterior. El resultat seria $\mathbf{v}_2 = (66.15, 154.27) \text{ m/s}$, i la velocitat del CM després de l'explosió seria la mateixa que tenia abans de l'explosió.

4.3 Des de la cornisa d'un edifici de 120 m d'altura llancem horitzontalment un projectil ($M = 4$ kg) amb velocitat 2.40 m/s. Aquest projectil explota a 10 m abans d'arribar al sòl, i es fa en dos trossos que ixen llançats de tal manera que ambdós arriben al sòl al mateix temps. Un dels trossos té una massa de 1.5 kg i cau justament al peu de l'edifici, en la vertical del punt de llançament. (a) A quina distància de l'edifici xocarà l'altre fragment amb el sòl? (b) On hauria caigut el projectil si no haguera rebotat? (c) On es troba el centre de massa dels dos fragments quan aquests arriben al sòl?



$M = 4$ kg, $V_1 = 2.40$ i m/s, $m_1 = 1.5$ kg, $m_2 = 2.5$ kg, $h_1 = 120$ m, $h_2 = 10$ m

quan els fragments arriben al sòl: $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad x_2? \\ \text{(b)} \quad X? \\ \text{(c)} \quad x_{CM}? \end{array} \right.$

(a) Per a resoldre aquest problema necessitem conèixer l'estat del projectil immediatament abans d'esclatar; per a fer això hem de calcular la velocitat del projectil a l'altura h_2 , que anomenarem V_2 .

Càlcul de V_2 : Si prenem el sòl com a origen d'energia potencial, tenim que les energies a les altures h_1 i h_2 són

$$E_1 = [E_{\text{pot}} + E_{\text{cinètic}}]_{h_1} = Mgh_1 + \frac{1}{2}MV_1^2 \quad (1)$$

$$E_2 = [E_{\text{pot}} + E_{\text{cinètic}}]_{h_2} = Mgh_2 + \frac{1}{2}MV_2^2 \quad (2)$$

Pel principi de conservació de l'energia, $E_1 = E_2$, de manera que de les eqs. (1) i (2) obtenim

$$V_2^2 = 2g(h_1 - h_2) + V_1^2 \quad (3)$$

Però necessitem conèixer els components de V_2 , que verifiquen

$$V_2^2 = V_{2x}^2 + V_{2y}^2 = 2g(h_1 - h_2) + V_1^2 \quad (4)$$

Com veurem seguidament, el component V_{2x} serà igual al component V_{1x} inicial, ja que, com que no hi ha acceleració horitzontal (noteu que només hi actua la gravetat, que és una acceleració vertical dirigida cap avall), la velocitat horitzontal es manté constant. Es pot emprar la relació cinemàtica (en components x) per a un moviment uniformement accelerat,

$$V_{2x} = V_0 + a_x t = V_1 \quad (5)$$

on hem considerat que $V_0 = V_{1x} = V_1$ i $a_x = 0 \text{ m/s}^2$. De les relacions (4) i (5) s'obté

$$V_{2y} = \pm \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (6)$$

En substituir-hi valors, i si tenim present que el cos cau (és a dir, té una velocitat dirigida cap a les y negatives), ens queda $V_{2y} = -46.43 \text{ m/s}$. Així, doncs,

$$\mathbf{V}_2 = (2.40, -46.43) \text{ m/s} \quad (7)$$

(Noteu que també es poden calcular V_{2x} i V_{2y} , independentment l'una de l'altra, únicament aplicant-hi les relacions de cinemàtica per a cossos que recorren una determinada distància sotmesos a una acceleració).

Ara ja coneixem la velocitat del projectil immediatament abans de l'explosió. Hi aplicarem el principi de conservació del moment lineal per a calcular les velocitats v_1 i v_2 dels fragments immediatament després de l'explosió. Al cap d'uns instants, aquestes velocitats canviaran per efecte de la força gravitatòria. Així, doncs, aplicant-hi el principi de conservació del moment lineal, immediatament abans i després de l'explosió, s'obté

$$M\mathbf{V}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \quad (8)$$

on M , \mathbf{V}_2 , m_1 i m_2 són coneguts. Descompondrem l'eq. (8) en els seus components

$$MV_{2x} = m_1v_{1x} + m_2v_{2x} \quad (9)$$

$$MV_{2y} = m_1v_{1y} + m_2v_{2y} \quad (10)$$

L'enunciat del problema diu que ambdós fragments arriben al sòl al mateix temps. Sobre els dos objectes actua la mateixa acceleració, g . Ambdós parteixen del mateix lloc i tarden el mateix temps a recórrer l'altura h_2 ; això implica que la velocitat inicial d'ambdós és la mateixa en components y (aquest raonament es basa en la relació $y = y_0 + v_{y,0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$), per tant $v_{1y} = v_{2y}$. En portar aquest resultat a l'eq. (10), i tenint en compte la conservació de la massa, obtenim

$$\left. \begin{array}{l} MV_{2y} = (m_1 + m_2)v_{1y} \\ m_1 + m_2 = M \end{array} \right\} \Rightarrow v_{1y} = v_{2y} = V_{2y} \quad (11)$$

El valor de v_{1x} es pot obtenir si coneixem l'espai horitzontal que ha recorregut el fragment m_1 , el temps que ha emprat per a recórrer aquest espai, i el component de l'acceleració en la direcció de l'espai recorregut (és a dir, el component x), que val $a_x = 0 \text{ m/s}^2$ perquè no hi ha acceleració horitzontal.

Càlcul de l'espai horitzontal recorregut per m_1 fins a arribar al sòl: Començarem calculant l'espai x_1 (fig. 1). Aquest espai serà el component x del punt on esclata el projectil. Per cinemàtica, sabem que

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_0 + v_{x,0}t + \frac{1}{2}a_x^2t \\ x_0 = 0 \text{ m} \\ v_{x,0} = V_{1x} = V_1 \\ a_x = 0 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = V_1 t \quad (12)$$

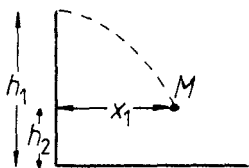


FIG. 1

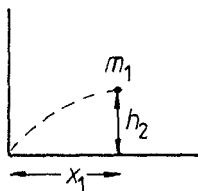


FIG. 2

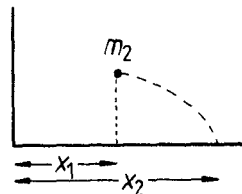


FIG. 3

El temps t , que apareix en l'eq. (12), serà el temps que el projectil està caient des de h_1 fins a h_2 , amb velocitat inicial nul·la i acceleració vertical $-g$, on $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ (la gravetat està dirigida cap a les y negatives),

$$\left. \begin{array}{l} y = y_0 + v_{y,0}t + \frac{1}{2}a_y^2t \\ y = h_2 \\ y_0 = h_1 \\ v_{y,0} = 0 \text{ m/s} \\ a_y = -g \end{array} \right\} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(h_1 - h_2)}{g}} = 4.74 \text{ s} \quad (13)$$

De les eqs. (12) i (13) obtenim

$$x_1 = 11.37 \text{ m} \quad (14)$$

Ara calcularem el temps t_1 emprat per m_1 fins a arribar al sòl. Coneixem l'espai

vertical que s'ha de recórrer, la velocitat inicial i l'acceleració (en els components y)

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + v_{y,0}t_1 + \frac{1}{2}a_y^2t_1 \\ y &= 0 \text{ m} \\ y_0 &= h_1 \\ v_{y,0} &= v_{2y} = V_{2y} \\ a_y &= -g \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_1 = \begin{cases} +0.215 \text{ s} \\ -9.69 \text{ s} \end{cases} \quad (\text{no té sentit}) \quad (15)$$

Aquest temps és el que tarda el fragment m_1 a recórrer la distància vertical h_2 , que és el mateix que empraria a recórrer l'espai horitzontal x_1 (fig. 2). L'eq. (14) ens proporciona l'espai horitzontal recorregut per m_1 ; l'eq. (15) ens dóna el temps emprat, i com que no hi ha acceleració horitzontal, tenim

$$v_{1x} = \frac{x_1}{t_1} = -53.0 \text{ m/s} \quad (16)$$

El signe negatiu indica que la velocitat està dirigida cap a les x negatives. Tornant a l'eq. (10), és a dir, per conservació del component x del moment lineal, tenim que

$$MV_{2x} = m_1v_{1x} + m_2v_{2x} \quad \Rightarrow \quad v_{2x} = 35.6 \text{ m/s} \quad (17)$$

El punt de l'eix X on caurà el fragment m_2 serà (fig. 3)

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_0 + v_{x,0}t_2 + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ x_0 &= x_1 = 11.37 \text{ m} \\ v_{x,0} &= 35.6 \text{ m/s} \\ t_2 &= t_1 \text{ (} m_1 \text{ i } m_2 \text{ cauen al mateix temps)} \\ a_x &= 0 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_2 = 19.02 \text{ m} \quad (18)$$

(b) Si el projectil no explota, podem calcular el temps de caiguda d'aquest mitjançant la relació

$$Y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (19)$$

on $Y = 0 \text{ m}$, $y_0 = h$, $v_{0y} = 0 \text{ m/s}$ i $a_y = -9.8 \text{ m/s}^2$, la qual cosa dóna

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4.95 \text{ s} \quad (20)$$

Durant el temps que està caient, el projectil també viatja horitzontalment, i com que no hi ha un component horitzontal de l'acceleració, $a_x = 0 \text{ m/s}^2$,

$$X = x_0 + v_{0x}t \quad (21)$$

on $x_0 = 0$ m, $v_{0x} = V_{1x} = 2.40$ m/s i $t = 4.95$ s. De tot això resulta que el projectil hauria caigut a 11.88 m de la base de l'edifici,

$$X = 11.88 \text{ m} \quad (22)$$

(c) Les coordenades del CM es trobaran a partir de la relació

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (23)$$

els components de la qual són

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{1.5 \cdot 0 + 2.5 \cdot 19.02}{1.5 + 2.5} = 11.88 \text{ m} \quad (24)$$

i, com que fem els càlculs al nivell del sòl,

$$y_{\text{CM}} = 0 \text{ m} \quad (25)$$

Com es pot veure, si el projectil no haguera explotat (apartat b), hauria seguit la trajectòria que ha descrit el seu centre de massa (apartat c), ja que el CM d'un sistema de partícules es mou com si fos una partícula de massa igual a la massa total del sistema sotmesa a la força exterior aplicada sobre tot el sistema.

A continuació presentarem una manera més senzilla i curta de resoldre aquest problema. Començarem resolent l'apartat (b).

Coordenada Y: com que el projectil cau al sòl,

$$Y = 0 \text{ m} \quad (26)$$

Coordenada X: usarem l'expressió

$$X = x_0 + v_{x,0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (27)$$

on $x_0 = 0$ m, $v_{x,0} = 2.40$ m/s i $a_x = 0$ m/s²; t serà el temps de caiguda del projectil, i es pot obtenir a partir de

$$y = y_0 + v_{y,0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (28)$$

on $y = 0$, $y_0 = h_1$, $v_{y,0} = 0$ m/s i $a_y = -g$, de manera que

$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 4.95 \text{ s} \quad (29)$$

Si tornem ara a l'eq. (27), obtenim que

$$X = v_{x,0}t = 2.40 \cdot 4.95 = 11.88 \text{ m} \quad (30)$$

És a dir, el mateix valor que en l'eq. (24).

(c) Sabem que el CM d'un sistema de partícules es mou com si fos una partícula de massa igual a la total del sistema sotmesa a la resultant de les forces exteriors que hi actuen. Això vol dir que el CM dels fragments descriu la mateixa trajectòria que descriuria el projectil sencer, per tant, les coordenades del CM en el moment de tocar terra són

$$x_{CM} = 11.88 \text{ m} \quad (31)$$

$$y_{CM} = 0 \text{ m} \quad (32)$$

Per últim, calcularem l'apartat (a).

(a) Si apliquem la definició de CM al component x

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (33)$$

podem aïllar x_2

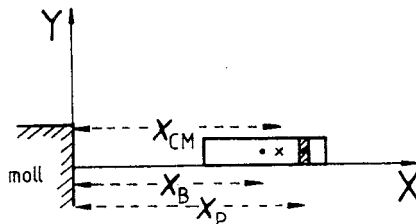
$$x_2 = \frac{(m_1 + m_2)x_{CM} - m_1 x_1}{m_2} \quad (34)$$

i com que $x_1 = 0 \text{ m}$, $m_1 = 1.5 \text{ kg}$, $m_2 = 2.5 \text{ kg}$ i $x_{CM} = 11.88 \text{ m}$, obtenim que la distància a què cau el fragment m_2 és

$$x_2 = 19.01 \text{ m} \quad (35)$$

Òbviament, tots aquests resultats coincideixen (excepte possibles errors d'arrodoniment) amb els obtinguts pel primer mètode.

4.4 Una persona ($m = 70 \text{ kg}$) es troba a 5 m d'un moll, dreta sobre una barca ($m = 100 \text{ kg}$) que es troba inicialment en repòs. La persona camina 2.5 m sobre la barca, en direcció cap al moll, i després s'atura. A quina distància del moll es trobarà ara la persona? (Suposeu que no hi ha fregament entre la barca i l'aigua).



P = persona, B = barca

$m_P = 70 \text{ kg}$, $m_B = 100 \text{ kg}$, $x_P = 5 \text{ m}$

quina és la distància entre el moll i la persona després que aquesta haja caminat $L = 2.5 \text{ m}$ damunt la barca?

Suposarem que la persona i la barca són igual d'altres, així tot el problema podrà descriure's al llarg de la direcció X . Intentarem conèixer la posició de la persona i la de la barca abans i després de desplaçar-se la persona una distància L sobre la barca. Sabem que el centre de massa del sistema es mou com si hi actuara la resultant de les forces externes. En aquest cas (fig. 1), les forces que actuen sobre el sistema persona-barca (PB) són: el seu pes P_{PB} , degut a la gravetat, i la normal N , exercida pel medi sobre el qual reposa el sistema PB. Ambdues forces es poden considerar aplicades al CM del sistema PB, i són iguals i de sentit contrari, perquè si una fóra major que l'altra el sistema PB es mouria en el sentit de la força major. Això no ocorre perquè el sistema està en repòs, i per tant $\mathbf{P}_{PB} = -\mathbf{N}$. Com que horitzontalment no hi actuen altres forces, podem dir que la resultant de les forces exteriors aplicades al sistema és nul·la. I ara, per ser $\mathbf{F}_{ext} = 0$, podem aplicar-hi el principi de conservació del moment lineal total. Farem la descripció respecte del sistema de referència fix, que és el moll.

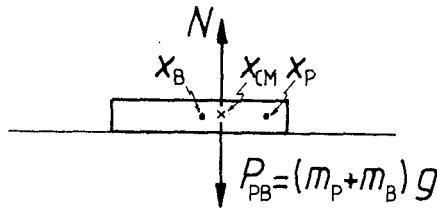


FIG. 1

Sabem que el moment lineal total del sistema és el que correspondria a tota la massa concentrada en el CM i movent-se amb la velocitat del CM, v_{CM} . És a dir,

$$\mathbf{p} = M \mathbf{v}_{CM} = \text{constant} \quad (1)$$

on $M = m_P + m_B$. Com que la massa total del sistema no varia, de l'eq. (1) s'obté que

$$\mathbf{v}_{CM} = \text{constant} \quad (2)$$

El sistema PB està en repòs inicialment, és a dir,

$$\mathbf{v}_{CM}^i = 0 \quad (3)$$

on el superíndex i significa inicial. De les eqs. (2) i (3) resulta que el CM del sistema no es mou, per tant, la posició del CM romandrà constant,

$$\mathbf{x}_{CM}^i = \mathbf{x}_{CM}^f \quad (4)$$

on el superíndex f significa final.

Situem l'origen de coordenades al moll. Les posicions inicials de la persona i de la barca seran representades per les coordenades dels seus centres de massa respectius. Inicialment, la posició del CM verifica la relació

$$x_{\text{CM}}^i = \frac{m_{\text{P}}x_{\text{P}}^i + m_{\text{B}}x_{\text{B}}^i}{m_{\text{P}} + m_{\text{B}}} \quad (5)$$

on coneixem que $x_{\text{P}}^i = 5$ m i desconeixem x_{B}^i . Finalment, la posició del CM s'escriurà

$$x_{\text{CM}}^f = \frac{m_{\text{P}}x_{\text{P}}^f + m_{\text{B}}x_{\text{B}}^f}{m_{\text{P}} + m_{\text{B}}} \quad (6)$$

Pel fet de moure's la persona cap al moll i de mantenir-se fixa la posició del CM, deduïm que la barca s'haurà desplaçat de la seua posició inicial, x_{B}^i , una distància d (que caldrà determinar), i ara es troba en

$$x_{\text{B}}^f = x_{\text{B}}^i + d \quad (7)$$

La persona ha caminat (acostant-se al moll) una distància L sobre la barca. Però aquesta persona es troba damunt la barca, que s'ha desplaçat una distància d , tal com hem raonat anteriorment. Així, doncs, la posició x_{P}^f de la persona respecte del moll serà la posició x_{P}^i que tenia anteriorment, menys la distància L que s'ha aproximat al moll, més l'espai d recorregut per la barca

$$x_{\text{P}}^f = x_{\text{P}}^i - L + d \quad (8)$$

Si substituïm les eqs. (7) i (8) en la (6) i hi apliquem la condició d'invariància de la posició del CM, eq. (4), obtenim

$$\frac{m_{\text{P}}x_{\text{P}}^i + m_{\text{B}}x_{\text{B}}^i}{m_{\text{P}} + m_{\text{B}}} = \frac{m_{\text{P}}(x_{\text{P}}^i - L + d) + m_{\text{B}}(x_{\text{B}}^i + d)}{m_{\text{P}} + m_{\text{B}}} \quad (9)$$

L'única incògnita d'aquesta equació és d , que, aïllada, dóna

$$d = L \frac{m_{\text{P}}}{m_{\text{P}} + m_{\text{B}}} = 2.5 \frac{70}{70 + 100} = 1.03 \text{ m} \quad (10)$$

La distància persona-moll ve donada per la coordenada x_{P}^f , eq. (8),

$$x_{\text{P}}^f = x_{\text{P}}^i - L + d = 5 - 2.5 + 1.03 = 3.53 \text{ m} \quad (11)$$

En la fig. 2 hem representat una comparació de les situacions inicial i final del sistema persona-barca.

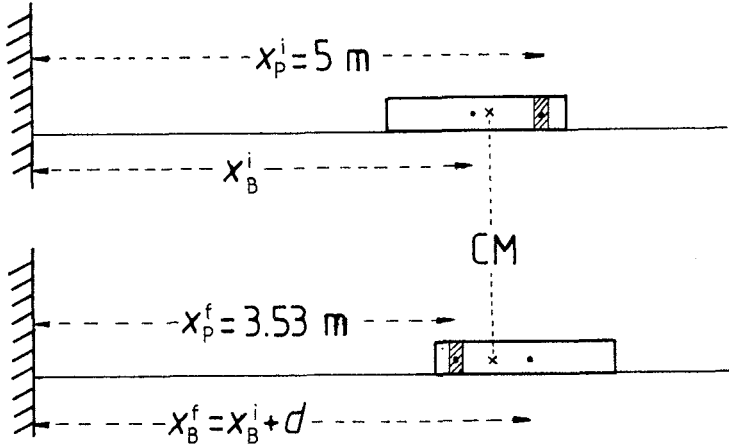


FIG. 2

4.5 Originalment tenim un nucli en repòs, que es desintegra en un electró de moment lineal $8 \cdot 10^{-21} \text{ m kg/s}$, un neutrí amb moment lineal $4 \cdot 10^{-21} \text{ m kg/s}$ i un nucli residual de massa $2 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$. Si la direcció del neutrí forma un angle recte amb la direcció de l'electró: (a) en quina direcció retrocedeix el nucli residual?, (b) quin és el moment lineal? i (c) quina velocitat i energia cinètica té?



e = electró, ν = neutrí, N = nucli residual

$M_N = 2 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$, $\vec{p}_e = 8 \cdot 10^{-21} \vec{j} \text{ m kg/s}$, $\vec{p}_\nu = 4 \cdot 10^{-21} \vec{i} \text{ m kg/s}$

(a) direcció de retrocés de N?

(b) p_N ?

(c) $v_N, E_{k,N}$?

(a+b) Les preguntes a i b es poden reformular en una: quant val p_N ? Suposarem que sobre el sistema no actua la gravetat, així, com que no hi actuen forces externes,¹⁰ el moment lineal total verifica que

$$p = \text{constant} \quad (1)$$

És a dir que $p_i = p_f$ (on *i/f* signifiquen inicial/final, respectivament). Com que $p_i = 0$, per estar el nucli en repòs inicialment, podem escriure el principi de conservació del moment lineal en components

$$\text{component } x : 0 = p_{vx} + p_{Nx} + p_{ex} \quad (2)$$

$$\text{component } y : 0 = p_{vy} + p_{Ny} + p_{ey} \quad (3)$$

Sabent que $p_{ex} = p_{vy} = 0$, segons es desprén de la figura de l'enunciat, tenim

$$p_{Nx} = -p_{vx} \quad \Rightarrow \quad p_{Nx} = -4 \cdot 10^{-21} \text{ m kg/s} \quad (4)$$

$$p_{Ny} = -p_{ey} \quad \Rightarrow \quad p_{Ny} = -8 \cdot 10^{-21} \text{ m kg/s} \quad (5)$$

Per tant el moment lineal del nucli residual és

$$p_N = (-4, -8) \cdot 10^{-21} \text{ m kg/s} \quad (6)$$

La resposta a la pregunta (b) és

$$p_N = |p_N| = \sqrt{p_{Nx}^2 + p_{Ny}^2} = 8.94 \cdot 10^{-21} \text{ m kg/s} \quad (7)$$

Si indiquem la direcció de retrocés del nucli residual per l'angle β de la fig. 1, llavors, la resposta a la pregunta (a) és

$$\tan \beta = \frac{|p_{Nx}|}{|p_{Ny}|} = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta = 63.43^\circ \quad (8)$$

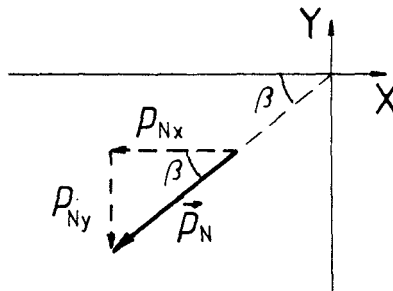


FIG. 1

¹⁰Encara que hi actuaren forces externes, aquestes serien negligibles durant la col·lisió, comparades amb la força responsable de la interacció, i per això no tenim en compte les forces externes durant la col·lisió.

(c) La velocitat del nucli residual, v_N , tindrà la mateixa direcció que el seu moment lineal, p_N . El mòdul de v_N el calcularem com segueix. Sabem que l'expressió del moment lineal és

$$p = mv \quad (9)$$

i coneixem que, en el nostre cas, $m = M_N$ i $p = p_N$. Podem emprar les expressions relativista (R) o no relativista (NR) per a calcular v_N . Treballarem amb els mòduls, perquè ja hem comentat que $\hat{v}_N = \hat{p}_N$,

$$p_N = M_N v_N \quad (10)$$

(R) Relativista:

$$p_N = \frac{M_N}{\sqrt{1 - (v_N/c)^2}} v_N \quad \Rightarrow \quad v_N = \frac{p_N}{\sqrt{M^2 + (p/c)^2}} = 44700 \text{ m/s} \quad (11)$$

(NR) No Relativista:

$$p_N = M_N v_N \quad \Rightarrow \quad v_N = \frac{p_N}{M_N} = 44700 \text{ m/s} \quad (12)$$

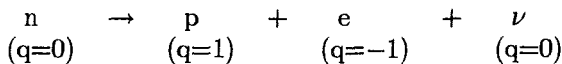
En les expressions anteriors $c = 3 \cdot 10^8$ m/s és la velocitat de la llum en el buit.

Obtenim la mateixa velocitat en ambdós casos (R i NR), la qual cosa ens confirma que el nucli residual no porta velocitat relativista. Per a calcular l'energia cinètica del nucli residual també podem emprar els dos procediments d'abans (R i NR), encara que ja sabem que amb el càlcul NR és suficient,

$$E_k^R = \frac{M_N}{\sqrt{1 - (v_N/c)^2}} c^2 - M_N c^2 = M_N c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v_N/c)^2}} - 1 \right] = 2 \cdot 10^{-16} \text{ J} \quad (13)$$

$$E_k^{NR} = \frac{1}{2} M_N v_N^2 = 2 \cdot 10^{-16} \text{ J} \quad (14)$$

El procés $N' \rightarrow N + e + \nu$ correspon a una desintegració β^{11} on un neutró (n) del nucli original (N') es desintegra originant un protó (p), més un electró (e), més un neutrí (ν),



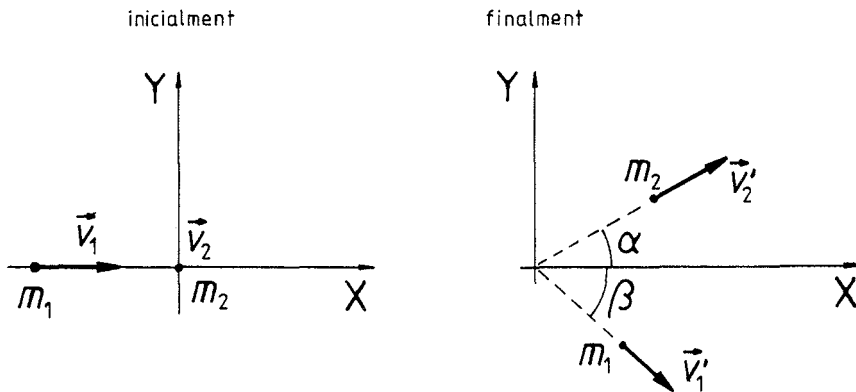
Noteu que en la reacció nuclear anterior es conserva la càrrega q , ja que la suma de càrregues abans de la reacció val el mateix que després.

¹¹Se solen anomenar raigs β els electrons que procedeixen de desintegracions nuclears.

4.6 Una partícula, la massa de la qual és de 10 kg, es mou amb una velocitat de 3 m/s i xoca amb una altra partícula de 15 kg de massa que està en repòs. Si el xoc és elàstic, calculeu la velocitat de cada partícula després de la col·lisió: (a) si aquesta és frontal, i (b) si la primera partícula es desvia 80° de la seua direcció original de moviment.

inicialment	finalment
$m_1 = 10 \text{ kg}, v_1 = (3, 0) \text{ m/s}$	v'_1
$m_2 = 15 \text{ kg}, v_2 = (0, 0) \text{ m/s}$	v'_2

(a) v'_1 i v'_2 si $\alpha = 0^\circ$?
 (b) v'_1 i v'_2 si $\alpha = 80^\circ$?



El que tenim és un xoc elàstic, per tant podem aplicar-hi el principi de conservació de l'energia cinètica

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (1)$$

Com que no hi actuen forces externes durant la col·lisió, apliquem el principi de conservació del moment lineal, que, per components, s'expressa:

$$m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = m_2v_2' \cos \alpha + m_1v_1' \cos \beta \quad (2)$$

$$m_1v_{1y} + m_2v_{2y} = m_2v_2' \sin \alpha - m_1v_1' \sin \beta \quad (3)$$

(els angles α i β apareixen definits en la figura de l'enunciat). Si fem ús del fet que $v_{2x} = v_{2y} = 0$ i $v_{1x} = v_1$, escrivim les eqs. (1)-(3):

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (4)$$

$$m_1v_1 = m_2v_2' \cos \alpha + m_1v_1' \cos \beta \quad (5)$$

$$0 = m_2v_2' \sin \alpha - m_1v_1' \sin \beta \quad (6)$$

Ara tenim tres equacions i tres incògnites: v'_1 , v'_2 i β (ja que α és conegut, i val 0° o 80° , segons l'apartat del problema que vulguem contestar). La solució d'aquest sistema d'equacions és un problema algebraic. Escrivim l'eq. (4)

$$m_1v_1^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2 \quad (7)$$

i elevem les eqs. (5) i (6) al quadrat de la forma següent

$$(m_1 v_1 - m_2 v_2' \cos \alpha)^2 = (m_1 v_1' \cos \beta)^2 \quad (8)$$

$$(m_2 v_2' \sin \alpha)^2 = (m_1 v_1' \sin \beta)^2 \quad (9)$$

Si sumem les eqs. (8) i (9) tenim

$$\begin{aligned} m_1^2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2 \cos^2 \alpha - 2m_1 v_1 m_2 v_2' \cos \alpha + m_2^2 v_2'^2 \sin^2 \alpha \\ = m_1^2 v_1'^2 \cos^2 \beta + m_1^2 v_1'^2 \sin^2 \beta \end{aligned} \quad (10)$$

Fent-hi ús de les propietats trigonomètriques del sinus i del cosinus, eliminem la dependència explícita amb β , que, de moment, no ens interessa,

$$m_1^2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2 - 2m_1 v_1 m_2 v_2' \cos \alpha = m_1^2 v_1'^2 \quad (11)$$

Ara usem l'eq. (7) per a substituir el valor de $m_1 v_1'$,

$$m_1^2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2 - 2m_1 v_1 m_2 v_2' \cos \alpha = m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2'^2 \quad (12)$$

i aïllant v_2' de l'eq. (12),

$$v_2' = \frac{2m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2} v_1 \quad (13)$$

Si ara tornem a l'eq. (7) podrem calcular v_1' ,

$$\begin{aligned} m_1 v_1'^2 &= m_1 v_1^2 - m_2 v_2'^2 = m_1 v_1^2 - m_2 \frac{4m_1^2 \cos^2 \alpha}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 \\ &= \frac{m_1 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} [(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 \cos^2 \alpha] \quad \Rightarrow \end{aligned} \quad (14)$$

$$v_1' = v_1 \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 \cos^2 \alpha}}{m_1 + m_2} \quad (15)$$

En l'eq. (15), només hem pres el valor positiu de l'arrel quadrada perquè el mòdul de la velocitat és sempre positiu. Finalment, l'angle β es pot determinar a partir de l'eq. (6),

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{m_2 v_2'}{m_1 v_1'} \sin \alpha = \frac{m_2}{m_1} \frac{\left[\frac{2m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2} v_1 \right]}{\left[\frac{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 \cos^2 \alpha}{(m_1 + m_2)} \right]^{1/2} v_1} \sin \alpha \\ &= \frac{2m_2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 \cos^2 \alpha}} \end{aligned} \quad (16)$$

En els casos que ens interessin, tenim:

(a) $\alpha = 0^\circ \Rightarrow v'_2 = 2.4 \text{ m/s}$, $v'_1 = 0.6 \text{ m/s}$, $\beta = 0^\circ$ o 180° . Per tal que es conserve el moment lineal, eq. (5), prenem la solució $\beta = 180^\circ$. Això vol dir que després d'una col·lisió frontal, la partícula incident ix rebotada en sentit contrari al que viatjava inicialment.

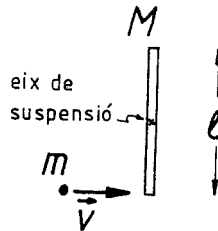
(b) $\alpha = 80^\circ \Rightarrow v'_2 = 0.42 \text{ m/s}$, $v'_1 = 2.96 \text{ m/s}$, $\beta = 12.02^\circ$.

5

Sòlid rígid

5.1 Tenim un sistema format per una vareta de longitud ℓ , suspesa verticalment pel seu centre, i en l'extrem inferior s'incrusta una bala que viatjava amb velocitat horitzontal v . Comproveu que just abans de la col·lisió no hi actua cap moment, respecte de l'eix de suspensió de la vareta, degut a les forces exteriors que actuen sobre el sistema format per la vareta i la bala.

V = vareta, massa de la vareta = M , longitud de la vareta = ℓ
 B = bala, massa de la bala = m , velocitat de la bala = v
 $\mathcal{M}_{\text{ext}} = 0?$



El moment degut a les forces exteriors, \mathcal{M}_{ext} , serà el resultant del moment que actua sobre la bala, \mathcal{M}_B , més el moment que actua sobre vareta, \mathcal{M}_V ,

$$\mathcal{M}_{\text{ext}} = \mathcal{M}_B + \mathcal{M}_V \quad (1)$$

Per a resoldre el problema elegim el sistema de coordenades representat en la fig. 1. Prendrem el centre de la vareta com a origen de moments.

Càlcul de \mathcal{M}_B : La força que actua sobre la bala és el seu pes ($f = mg$), que, escrit en notació vectorial i segons el sistema de coordenades que estem utilitzant, val

$$\mathbf{f} = (0, 0, -mg) \quad (2)$$

El punt d'aplicació d'aquesta força respecte de l'origen de moments, que en la figura (fig. 1a) coincideix amb l'origen de coordenades, és

$$\mathbf{r} = (0, 0, -\ell/2) \quad (3)$$

Per tant, el moment \mathcal{M}_B en l'instant just abans de la col·lisió val

$$\mathcal{M}_B = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = (0, 0, -\ell/2) \times (0, 0, -mg) = 0 \quad (4)$$

ja que \mathbf{r} i \mathbf{f} són paral·lels.

En fer els càlculs anteriors hem aproximat la vareta per una línia material i la bala per un punt material (ambdós sense extensió). Per tant, en comptes de tenir la situació real representada en la fig. 1b, considerarem la situació ideal representada en la fig. 1a.

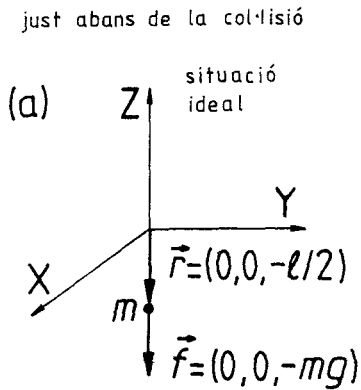


FIG. 1A

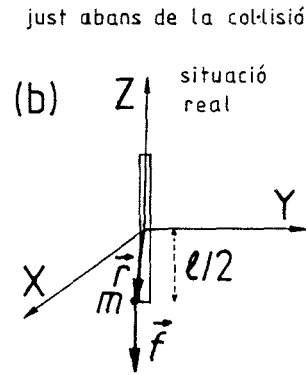


FIG. 1B

D'aquesta manera, les coordenades del vector posició de la bala, que és el vector r d'aplicació de f , estan disposades sobre l'eix vertical i no un poc desplaçades d'aquest, com s'esquematitza en les figs. 2a i 2b.

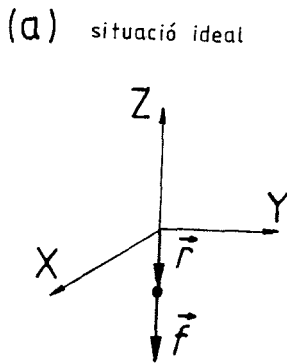


FIG. 2A

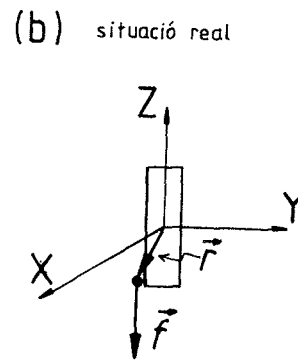


FIG. 2B

Càlcul de \mathcal{M}_V : Les forces que actuen sobre la vareta són el seu pes ($-Mg$) i la força normal deguda al punt de recolzament sobre l'eix, que val el mateix però és de sentit contrari al del pes. Per tant, la força resultant sobre la vareta és nul·la, $\mathbf{F} = 0$, i com que el moment degut a una força és

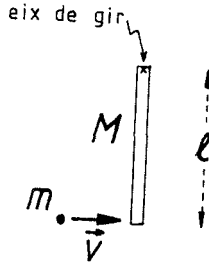
$$\mathcal{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (5)$$

i $\mathbf{F} = 0$ en aquest cas, tenim que, per a la vareta,

$$\mathcal{M}_V = 0 \quad (6)$$

En definitiva, tenim que just abans de la col·lisió, el moment, respecte del centre de la vareta, de les forces exteriors que actuen sobre el sistema format per la vareta i la bala és nul, segons es desprèn de les eqs. (1), (4) i (6).

5.2 Una bala de massa 20 g xoca i penetra dins l'extrem inferior d'una vareta de longitud $\ell = 20$ cm i massa $M = 0.5$ kg, que està suspesa per l'extrem superior. (a) Calculeu la velocitat mínima de la bala perquè, després de l'impacte, la vareta (amb la bala) faci una volta completa al voltant de l'eix que passa pel punt de suspensió. (b) Si la velocitat de la bala fóra de 10 m/s, calculeu l'angle que formaria la vareta (amb la bala dins) en desviar-se de la seua posició d'equilibri.



B = bala, $m = 20$ g = 0.02 kg

V = vareta, $\ell = 20$ cm = 0.2 m, $M = 0.5$ kg

(a) $v_{\text{mín}}$ per a fer una volta?

(b) si $v = 10$ m/s, desviació respecte de la posició d'equilibri?

(a) Per tal que la vareta (V) i la bala (B) introduïda facen una volta completa, hem d'aconseguir que es col·loquen en la posició que s'indica en la fig. 1; després ja caurà per ell mateix el sistema vareta-bala (VB), completant la volta. En conseqüència, la velocitat mínima, $v_{\text{mín}}$, de la bala serà aquella que permeta al sistema VB fer, almenys, mitja volta, com s'il·lustra en la fig. 1.

Per un argument anàleg al que hem vist en el problema anterior (problema 5.1), just en iniciar-se el xoc, sobre el sistema VB no actua cap moment exterior respecte de l'eix de gir, $\mathcal{M}_{\text{ext}} = 0$. Per tant, podrem aplicar-hi el principi de conservació del moment angular, \mathbf{L} , respecte de l'origen de moments considerat. Hem pres com a origen de moments el punt on la vareta toca l'eix de rotació. Considerarem els eixos X, Y i Z de la figura 1 com a sistema de referència.

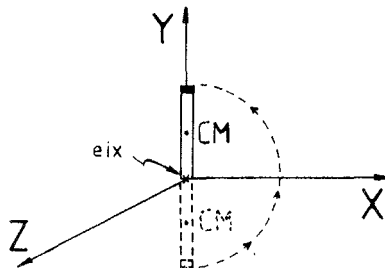


FIG. 1

Moment angular inicial L_i del sistema VB: El moment angular inicial serà la suma dels moments angulars de la vareta i de la bala just abans d'entrar en contacte

$$L_i = L_V + L_B \quad (1)$$

Com que el gir es produeix al voltant de l'eix indicat en la fig. 1, que és un eix principal, podrem calcular el moment angular de la vareta fent servir la relació

$$L_V = I_V \omega_V \quad (2)$$

on I_V és el moment d'inèrcia de la vareta respecte de l'eix de gir i ω_V és la corresponent velocitat angular.

Com que inicialment la vareta està en repòs, $\omega_V = 0$, tenim que

$$L_V = 0 \quad (3)$$

Per a conèixer el moment angular de la bala, L_B , emprarem la relació

$$L_B = \mathbf{r}_B \times \mathbf{p}_B \quad (4)$$

Si suposem que la vareta i la bala no tenen extensió material (fig. 2), el vector posició de la bala immediatament abans de l'impacte val

$$\mathbf{r}_B = (0, -\ell, 0) \quad (5)$$

i el moment lineal val $\mathbf{p}_B = m\mathbf{v}$, on

$$\mathbf{v} = (v, 0, 0) \quad (6)$$

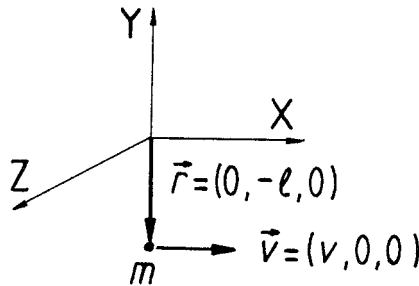


FIG. 2

El producte vectorial $\mathbf{r}_B \times \mathbf{p}_B$ val $m\ell v\mathbf{k}$, de manera que el moment angular inicial queda com

$$L_i = m\ell v\mathbf{k} \quad (7)$$

Moment angular final L_f del sistema VB: De manera similar a la d'abans, ara tenim

$$L_f = L'_V + L'_B \quad (8)$$

on

$$L'_V = I_V \omega_V = I_V \omega \mathbf{k} \quad (9)$$

$$\mathbf{L}'_B = I_B \boldsymbol{\omega}_B = I_B \omega \mathbf{k} \quad (10)$$

A les expressions anteriors hem considerat el fet que la velocitat angular és la mateixa per a la vareta i per a la bala que gira incrustada dins. També hem tingut en compte el fet que el sentit de gir és antihorari (fig. 3), i segons la regla de la mà dreta, això correspon a representar la velocitat angular per un vector perpendicular al pla de gir, XY , és a dir, un vector situat sobre l'eix Z , i en el sentit positiu de l'eix: $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$.

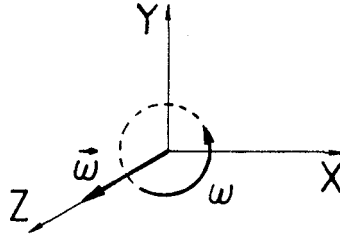


FIG. 3

El moment d'inèrcia de la vareta que gira sobre un eix perpendicular a aquesta i que hi passa per un extrem és

$$I_V = \frac{M\ell^2}{3} \quad (11)$$

El moment d'inèrcia de la bala, considerada com una massa puntual m a una distància ℓ de l'eix de gir, és

$$I_B = m\ell^2 \quad (12)$$

En definitiva, el moment angular final val

$$\mathbf{L}_f = \left(\frac{M\ell^2}{3} + m\ell^2 \right) \omega \mathbf{k} \quad (13)$$

Així, doncs, pel principi de conservació del moment angular, $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f$, i fent servir les eqs. (7) i (13), obtenim que

$$\ell m v = \left(\frac{M\ell^2}{3} + m\ell^2 \right) \omega \quad (14)$$

D'altra banda, també podem aplicar el principi de conservació de l'energia entre la situació immediatament posterior a l'impacte (situació inicial) i quan el sistema VB està en la posició superior (situació final) de la fig. 4. Notem que abans de l'impacte no s'hi pot aplicar el principi de conservació de l'energia perquè no coneixem quanta energia utilitza la bala en penetrar dins la vareta.

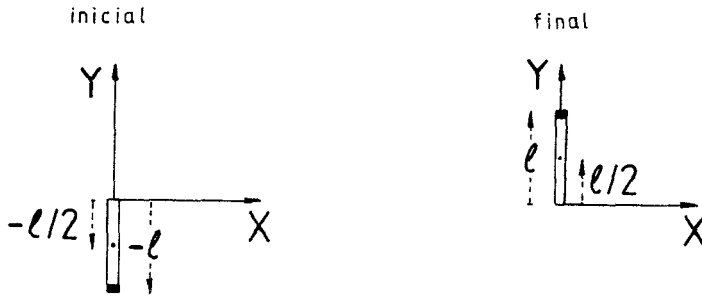


FIG. 4

Immediatament després de l'impacte, tota l'energia és energia cinètica de rotació del sistema VB, més energia potencial de la bala, més energia potencial de la vareta.

L'energia potencial de la bala més l'energia potencial de la vareta es pot calcular com l'energia potencial E_p del centre de massa (CM) del sistema VB. Si prenem l'origen d'energies potencials en l'eix X , llavors

$$E_p = (m + M)gy_{CM} \quad (15)$$

on la posició del CM és

$$y_{CM} = \frac{y_B m + y_V M}{m + M} = \frac{-\ell m - \ell M/2}{m + M} = -0.104 \text{ m} \quad (16)$$

En l'expressió anterior hem usat el fet que la massa M de la vareta es pot considerar concentrada en el seu centre de massa, que es troba a $\ell/2$ de l'extrem de la vareta. L'energia potencial del sistema VB és, doncs,

$$E_p = -\ell \left(m + \frac{M}{2} \right) g \quad (17)$$

L'energia cinètica de rotació del sistema VB serà

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (18)$$

on el moment d'inèrcia del sistema VB és

$$I = I_B + I_V = \ell^2 \left(\frac{M}{3} + m \right) \quad (19)$$

L'energia total inicial E_i del sistema VB en l'instant immediatament posterior al xoc val

$$E_i = E_p + E_{rot} = -\ell \left(m + \frac{M}{2} \right) g + \frac{\ell^2}{2} \left(\frac{M}{3} + m \right) \omega^2 \quad (20)$$

Com que estem interessats en la velocitat d'impacte mínima, v_{\min} , ens bastarà que la vareta arribe a la posició superior de la fig. 4 amb velocitat nul·la i, per estar en posició d'equilibri inestable, n'hi haurà prou amb un desplaçament infinitesimal cap a l'esquerra

de la figura perquè la vareta caiga completant una volta. Per tot això, en l'instant final, quan el sistema VB està en la posició superior, tota l'energia que té és potencial. Ara la posició del CM del sistema VB val

$$y'_{\text{CM}} = \frac{y'_B m + y'_V M}{m + M} \quad (21)$$

i com que, segons la fig. 4, $y'_B = \ell$ i $y'_V = \ell/2$, tenim

$$y'_{\text{CM}} = \frac{\ell m + \frac{\ell}{2} M}{m + M} = \ell \frac{m + \frac{M}{2}}{m + M} = 0.104 \text{ m} \quad (22)$$

L'energia potencial serà ara

$$E'_p = (m + M) g y_{\text{CM}} = \ell \left(m + \frac{M}{2} \right) g \quad (23)$$

que, com hem dit abans, coincideix amb l'energia total en l'estat final,

$$E_f = \ell \left(m + \frac{M}{2} \right) g \quad (24)$$

A partir de les eqs. (20) i (24), l'equació que s'obté per conservació de l'energia, $E_i = E_f$, és

$$-\left(m + \frac{M}{2} \right) g + \frac{\ell}{2} \left(\frac{M}{3} + m \right) \omega^2 = \left(m + \frac{M}{2} \right) g \quad (25)$$

Les eqs. (14) i (25) formen un sistema de dues equacions amb dues incògnites, v i ω . A nosaltres ens interessa conèixer el valor de $v_{\text{mín}}$, que és el que produeix la situació que hem estudiat en situar el sistema VB en la seua posició més elevada, tal com acabem de discutir. Aïllant v del sistema d'equacions, obtenim

$$v_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{2\ell g(2m + M)(3m + M)}{3m^2}} = 31.43 \text{ m/s} \quad (26)$$

(b) Ara coneixem el valor de v i ens interessa calcular la desviació respecte de la vertical que experimenta la vareta en col·lidir i incrustar-s'hi la bala. Això correspon a determinar l'angle φ que apareix representat en la part dreta de la fig. 5.

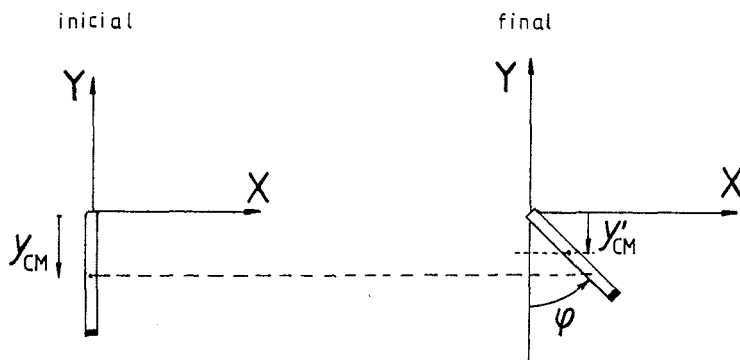


FIG. 5

Podem determinar l'angle φ a partir del triangle representat en la fig. 6. Per a fer això necessitem calcular com varia la posició de y_{CM} quan la vareta rep l'impacte.

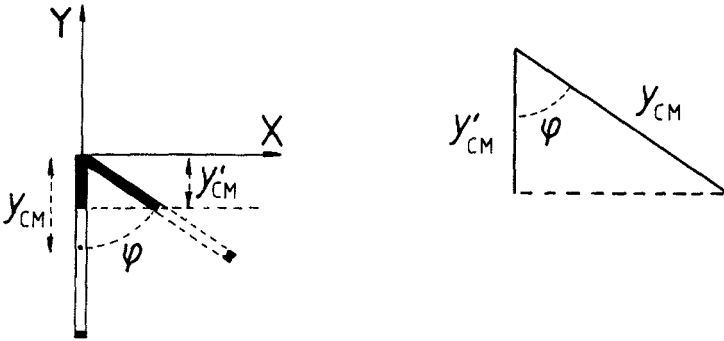


FIG. 6

Novament aplicarem el principi de conservació de l'energia entre la situació immediatament posterior a l'impacte, eq. (20), i la situació de desviació de la vertical, en què la vareta només té energia potencial, perquè la velocitat és nul·la en el punt on, després d'elevant-se, torna a caure. L'energia final E'_f és, doncs,

$$E'_f = E'_p = (m + M)gy'_{CM} \quad (27)$$

Així, de les eqs. (20) i (27), obtenim la relació

$$-\ell \left(m + \frac{M}{2} \right) g + \frac{\ell^2}{2} \left(\frac{M}{3} + m \right) \omega^2 = (m + M)gy'_{CM} \quad (28)$$

De la condició de conservació del moment angular, eq. (14), traiem que

$$\omega = \frac{mv}{(M/3 + m)\ell} \quad (29)$$

on $v = 10$ m/s. Si substituïm l'eq. (29) en l'eq. (28), obtenim

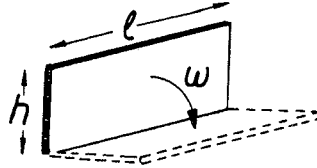
$$y'_{CM} = \frac{\frac{m^2 v^2}{2(M/3+m)} - \ell(m + M/2)g}{(m + M)g} = -0.083 \text{ m} \quad (30)$$

Si considerem el mòdul d'aquesta quantitat per a assignar valors als costats del triangle dibuixat en la part dreta de la fig. 6, l'angle φ verificarà

$$\cos \varphi = \frac{|y'_{CM}|}{|y_{CM}|} = \frac{0.083}{0.104} \Rightarrow \varphi = 37.1^\circ \quad (31)$$

Tenim, doncs, que quan la bala s'incrusta en la vareta amb una velocitat de 10 m/s, el sistema VB es desvia 37.1° de la vertical.

5.3 Una placa estreta, d'alçària $h = 30$ cm i llargària $\ell = 50$ cm, es manté vertical sobre una superfície plana (tal com s'indica en la figura) i es deixa caure sobre aquesta. Quina velocitat angular té la placa quan colpeja la superfície?



$h = 30$ cm = 0.3 m, $\ell = 50$ cm = 0.5 m
 ω quan la placa colpeja la superfície?

Una placa col·locada verticalment, tal com es mostra en la figura de l'enunciat, està en una posició d'equilibri inestable i caurà fàcilment. La situació que tenim, vista de perfil, és la que apareix en la fig. 1. Suposarem que hi ha un petit fregament entre la placa i la taula per tal que la primera no esvae quan comence a girar.¹²

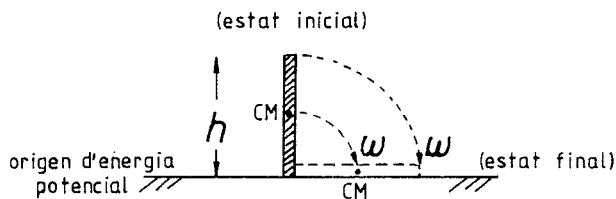


FIG. 1

La velocitat angular en cada instant és la mateixa per a tots els punts de la placa i, encara que no és la mateixa en tot el temps que dura la caiguda, l'única velocitat angular que ens interessa és aquella amb la qual arriba a la superfície, és a dir, la velocitat angular final.

Una forma de relacionar la velocitat angular final de la placa amb la seua situació inicial és mitjançant l'aplicació del principi de conservació de l'energia del sistema. L'energia E_i en l'estat inicial és únicament potencial, ja que la placa està en repòs i no té energia cinètica,

$$E_i = E_{\text{pot}} = mgh_{\text{CM}} \quad (1)$$

¹²Sense fricció amb la taula, la placa esvararia de manera que la coordenada horitzontal del seu CM no variara, ja que no hi actuaria cap força horitzontal.

on m és la massa de la placa i h_{CM} és l'altura del CM de la placa respecte de la superfície, la qual prendrem com a origen d'energies potencials. (Per a cossos de dimensions com les del considerat ara, quan el valor del camp gravitatori és constant en tota l'extensió del cos, podem prendre l'energia potencial del cos com l'energia potencial corresponent al seu CM).

L'energia E_f final de la placa és únicament cinètica, ja que, just en el moment en què xoca contra la superfície, la posició del CM coincideix amb la superfície (pràcticament, encara que no exactament, com es pot apreciar en la fig. 1, però les petites diferències que causaria aquesta manca de coincidència de la posició del CM i de l'origen d'energia potencial poden negligir-se en allò que segueix). L'energia cinètica serà la deguda a la rotació del sistema (no considerem l'energia cinètica de translació del CM perquè no hi ha translació d'aquest, només rotació),

$$E_f = E_{\text{cinètic}} = E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (2)$$

on I és el moment d'inèrcia de la placa quan gira al voltant d'un eix que passa per un dels seus costats (el costat de llargària ℓ , en aquest cas) i ω és la velocitat angular de la placa quan colpeja la superfície.

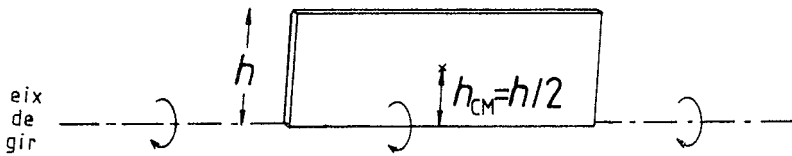


FIG. 2

Pel principi de conservació de l'energia, $E_i = E_f$, de les eqs. (1) i (2) tenim que

$$mgh_{\text{CM}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3)$$

Com que el moment d'inèrcia d'una placa que gira al voltant d'un eix que passa per un dels seus costats, tal com representa la fig. 2, és

$$I = m \frac{h^2}{3} \quad (4)$$

i la localització de l'altura del CM és $h_{\text{CM}} = h/2$, de les eqs. (3) i (4) tenim que

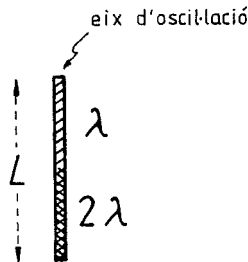
$$mg \frac{h}{2} = \frac{1}{2} m \frac{h^2}{3} \omega^2 \quad (5)$$

D'ací aïllem ω i obtenim que

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{h}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 9.8}{0.15}} = 14 \text{ rad/s} \quad (6)$$

Com podem notar, no ha estat necessari conèixer el valor de la massa de la placa per a resoldre aquest problema i el resultat és independent de la llargària ℓ de la placa.

5.4 Una vareta prima d'un metre de longitud pot oscil·lar al voltant d'un eix perpendicular a aquesta que passa pel seu extrem superior. La densitat lineal de la seua meitat superior val el 50% de la densitat lineal de la meitat inferior. Calculeu la longitud d'un pèndol simple que tindria el mateix període que el d'aquest sistema.



$L = 1$ m, $\lambda =$ densitat lineal de massa
longitud del pèndol simple amb el mateix període?

Per a petites oscil·lacions, la relació entre la longitud d'un pèndol simple, ℓ , i el seu període d'oscil·lació, T , és

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (1)$$

on g és el valor de la gravetat.

En aquest cas, la vareta que oscil·la al voltant d'un eix constitueix allò que s'anomena un pèndol físic o pèndol compost. En aquest cas el període d'oscil·lació, per a petites oscil·lacions, val

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgb}} \quad (2)$$

on I és el moment d'inèrcia del sòlid que oscil·la respecte de l'eix de gir, M és la massa del sòlid i b és la distància entre l'eix d'oscil·lació i el centre de massa (CM) del cos.

Com que el període del pèndol simple ha de ser igual al període del pèndol compost representat per la vareta, de les eqs. (1) i (2) s'obté que

$$\ell = \frac{I}{Mb} \quad (3)$$

Així, doncs, cal calcular el moment d'inèrcia I de la vareta respecte de l'eix que passa pel seu extrem superior i el valor de la distància b del CM a l'eix.

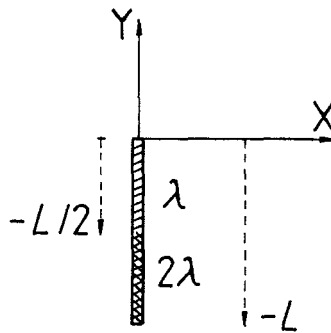


FIG. 1

Càlcul de la posició del CM: Situem la vareta sobre un sistema de coordenades, tal com mostra la fig. 1. Per la simetria del problema, tenim que

$$x_{CM} = 0 \quad (4)$$

Per tractar-se d'un sistema continu, la coordenada y_{CM} es calcula a partir de

$$y_{CM} = \frac{\int dm y}{\int dm} \quad (5)$$

Encara que la vareta és heterogènia, podem dividir-la en dues parts homogènies:

$$\text{meitat superior (des de } y = 0 \text{ fins a } y = -L/2) \Rightarrow dm = \lambda dy \quad (6)$$

$$\text{meitat inferior (des de } y = -L/2 \text{ fins a } y = -L) \Rightarrow dm = 2\lambda dy \quad (7)$$

i així, fer les substitucions en l'eq. (5),

$$y_{CM} = \frac{\int_0^{-L/2} dy \lambda y + \int_{-L/2}^{-L} dy 2\lambda y}{\int_0^{-L/2} dy \lambda + \int_{-L/2}^{-L} dy 2\lambda} = \frac{y^2/2 \Big|_0^{-L/2} + y^2 \Big|_{-L/2}^{-L}}{y \Big|_0^{-L/2} + 2y \Big|_{-L/2}^{-L}} = -\frac{7}{12}L \quad (8)$$

La *distància* b entre l'eix d'oscil·lació (que en la fig. 1 està situat en l'origen de coordenades) i la posició del CM val

$$b = \frac{7}{12}L \quad (9)$$

Càlcul del moment d'inèrcia: La definició de moment d'inèrcia per a un sistema continu és

$$I = \int dm r^2 \quad (10)$$

on la integral es fa en tot l'espai en què es distribueix la massa del sistema. Ja que sols cal considerar distàncies al llarg de l'eix Y , reescrivim l'expressió anterior com

$$I = \int dm y^2 \quad (11)$$

on abans r , i ara y , representen la distància a l'eix de gir de cada element infinitesimal de massa dm . Ara procedim de forma semblant al cas anterior. Descomponem la integral en dues parts, de manera que en cadascuna d'aquestes la densitat lineal de massa és constant. La primera part (superior) té una densitat lineal λ , comença en 0 i acaba a una distància $L/2$. La segona part (inferior) té una densitat lineal 2λ , comença a una distància $L/2$ i acaba a una distància L . Com que en cada meitat $dm = \lambda dy$ i $dm = 2\lambda dy$, respectivament, l'eq. (11) s'escriu

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{L/2} (\text{superior}) + \int_{L/2}^L (\text{inferior}) = \lambda \int_0^{L/2} dy y^2 + 2\lambda \int_{L/2}^L dy y^2 \\
 &= \lambda \left\{ \frac{y^3}{3} \Big|_0^{L/2} + 2 \frac{y^3}{3} \Big|_{L/2}^L \right\} = \frac{5}{8} \lambda L^3
 \end{aligned} \tag{12}$$

Cal notar que en els límits de les integrals del moment d'inèrcia hem emprat *distàncies* i no vectors de posició (o els seus components) com hem fet en el cas del càlcul del CM.

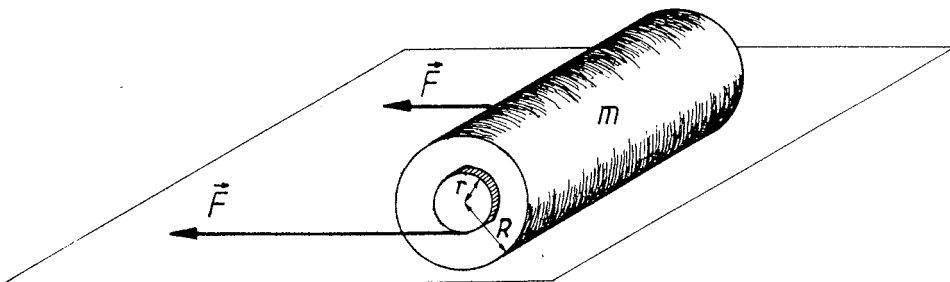
Finalment, de les expressions (3), (9) i (12) i del fet que la massa de la vareta verifica

$$M = m_{\text{superior}} + m_{\text{inferior}} = \lambda \frac{L}{2} + 2\lambda \frac{L}{2} \tag{13}$$

obtenim la longitud del pèndol simple equivalent

$$\ell = \frac{I}{Mb} = \frac{5}{7} L \tag{14}$$

5.5 Dues cordes estan enrotllades al voltant dels cilindres petits que sobresurten pels extrems d'un més gran, tal com representa la figura. Si estirem cada corda amb una força F , (a) determineu el sentit del moviment i (b) calculeu l'acceleració del cilindre. Suposeu que cada cilindre petit sobresurt molt poc del cilindre gran. (Dades: $r = 3$ cm, $R = 5$ cm, $F = 0.98$ N, massa total del sistema de cilindres = 1 kg).



$r = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}$, $R = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$, $m = 1 \text{ kg}$, $F = 0.98 \text{ N}$

(a) sentit del moviment?

(b) acceleració del cilindre?

(a+b) Les dues preguntes poden refundre's en una: quina és l'acceleració lineal, considerada com a magnitud vectorial, del cilindre?

En aquest problema ens demanen que resolguem el moviment d'un sistema (fig. 1) quan coneixem les forces que hi actuen. Notem que la força horitzontal $2\vec{F}$ és la suma de les dues forces horitzontals que actuen, cadascuna d'aquestes, en els respectius extrems del cilindre.

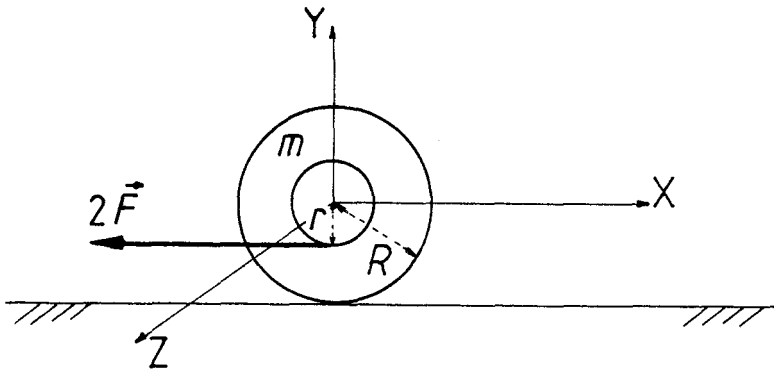


FIG. 1

A més de les forces aplicades als extrems n'hi ha d'altres que actuen sobre el cilindre, aquestes altres són:

- el pes, \mathbf{P} , en direcció vertical i cap avall: $|\mathbf{P}| = mg$
- la normal, \mathbf{N} , que representa la força exercida sobre el cilindre per la superfície en què es recolza; aquesta força és perpendicular a la superfície de contacte amb el cos i va dirigida en el sentit des de la superfície cap al cos.
- la força de fregament o fricció, \mathbf{f} ,¹³ que exerceix la superfície de contacte i té sentit contrari al del moviment relatiu del tros de cos en contacte amb la superfície quan es tracta de relliscament sense que el cos redole (la fig. 2 il·lustra un possible cas).

A més a més, quan hi ha redolament és més difícil predir el sentit de la força de fregament, ja que, com veurem, això dependrà de la força externa aplicada i del punt d'aplicació.

¹³Aquesta és una força de fricció estàtica perquè el cilindre no rellisca sobre la superfície horitzontal. Podem suposar que té un valor indeterminat, però entre certs límits, $0 < f < \mu N$, on μ és el coeficient de fricció i N és la força normal. En el nostre cas, la força de fricció té un valor que permet que hi haja redolament sense que hi haja relliscament; per més detalls, podeu veure el problema 14.3 del llibre *General methods for solving physics problems*, de B. S. Belikov (Mir, Moscou, 1989).

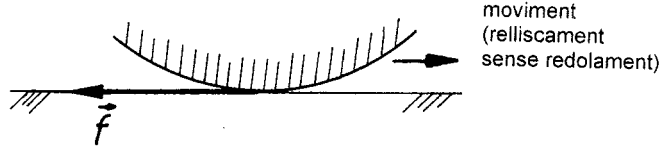


FIG. 2

La força normal, N , és igual i de sentit contrari al pes del cilindre, P , que s'exerceix sobre la superfície (si no fóra així el cilindre penetraria en la superfície o eixiria impulsat cap amunt). Per tant, la força vertical resultant és nul·la i només hi haurà acceleració horitzontal.

Per a resoldre el problema proposarem diferents situacions de moviment i sentit de f i on descartarem les que no tinguen sentit. Així, tindrem les quatre opcions representades en la fig. 3.

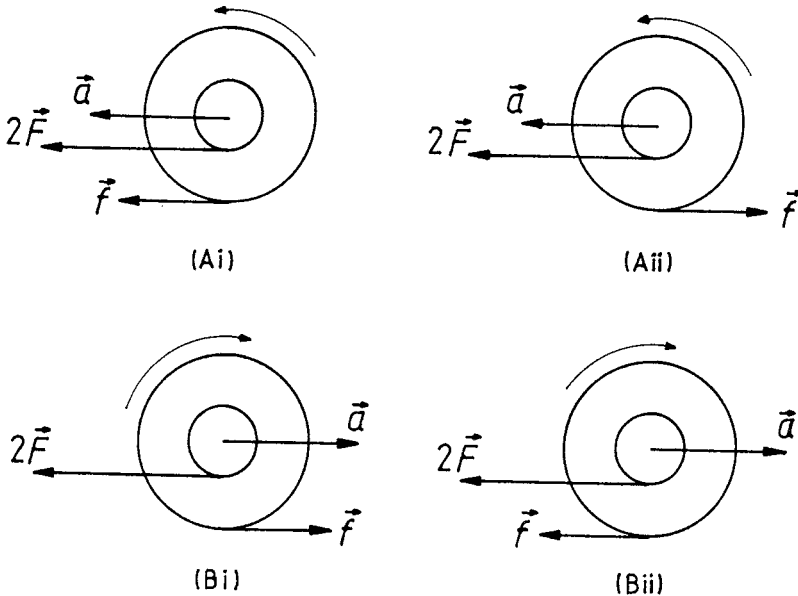


FIG. 3

En les dues figures A es proposa el moviment del cilindre cap a l'esquerra i en les dues figures B el moviment proposat és cap a la dreta. En cada parell de figures, el cas i correspon a la situació en què l'acceleració a del cilindre i la força f de fregament tenen el mateix sentit, mentre que en el cas ii , a i f tenen sentits contraris.

Notem que en el cas Ai les forces $2\vec{F}$ i \vec{f} produeixen un moment de forces respecte de

l'eix del cilindre que fa que aquest gire en sentit horari, la qual cosa està en contradicció amb el sentit del moviment proposat en la fig. 3Ai. En el cas Bii, els dos moments deguts a $2F$ i f , respectivament, produirien un gir en sentit horari, d'acord amb el sentit del moviment proposat; però el sentit de les forces és contrari al de l'acceleració proposada en la fig. 3Bii, la qual cosa va en contra de la segona llei de Newton del moviment. Així, doncs, els casos Ai i Bii queden descartats.

En el cas Aii, el moment degut a la força $2F$ produiria un gir en sentit horari, i el moment degut a la força f produiria un gir en sentit antihorari; si el moment degut a f és major que el degut a $2F$, el sentit de gir resultant estaria d'acord amb el sentit que s'ha proposat per a l'acceleració a . A més a més, per tal que es compleixca la segona llei de Newton del moviment, la força $2F$ ha de ser major que la força f . El cas Bi és similar al que acabem de discutir; hi haurà rotació de manera que el cilindre es desplace cap a la dreta si el moment degut a $2F$ és major que el degut a f , i això estarà d'acord amb la segona llei de Newton del moviment si $f > 2F$.

Com veiem, només tenim una possibilitat per a disposar les forces horitzontals $2F$ i f que actuen sobre el sistema de cilindres (figs. 3Aii i 3Bi).

Per a començar a resoldre el problema podem proposar l'acceleració en el sentit que vulguem (cap a l'esquerra o cap a la dreta), i el mateix procediment d'obtenció de la solució (segona llei de Newton per a la translació, per una banda, i equació fonamental de la dinàmica de la rotació, per l'altra) ens dirà si la proposta inicial era vàlida o cal canviar-la a la vista del resultat obtingut.

Com a proposta inicial de treball suposarem que el moviment és cap a la dreta. Segons aquesta proposta i la discussió anterior, en la fig. 4 apareixen representades totes les forces que actuen sobre el cilindre, i també l'acceleració d'aquest.

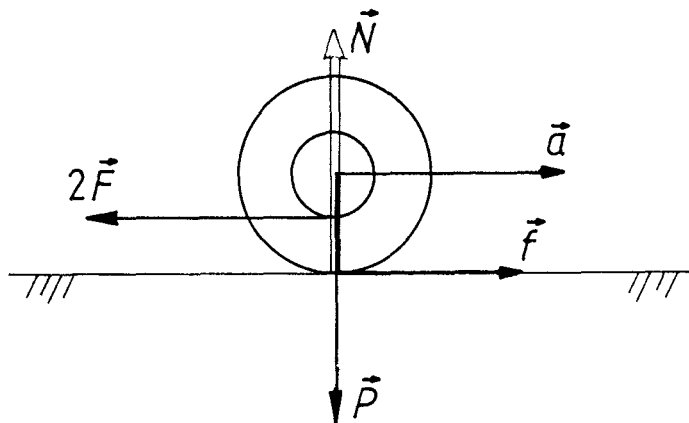


FIG. 4

Pel que fa a la translació, coneixem que les forces aplicades sobre el sistema poden considerar-se que actuen sobre el seu centre de massa (que en aquest cas està situat sobre l'eix de simetria del cilindre). Per tant, per la segona llei de Newton, l'acceleració a que experimentarà el sistema es podrà calcular a partir de l'expressió

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \quad (1)$$

que escriurem com

$$2\mathbf{F} + \mathbf{f} + \mathbf{P} + \mathbf{N} = m\mathbf{a} \quad (2)$$

Si descomponem aquesta equació per components, tenim, segons el sistema de coordenades representat en la fig. 1:

$$\text{component } x : \quad -2F + f = ma_x \quad (3)$$

$$\text{component } y : \quad -P + N = ma_y \quad (4)$$

$$\text{component } z : \quad 0 = ma_z \quad (5)$$

En l'eq. (3) hem tingut en compte explícitament que hem suposat que el moviment és cap a la dreta, és a dir, acceleració positiva al llarg de l'eix X . Com ja hem discutit abans, $P = N$ pel principi d'acció i reacció, i de les eqs. (3)-(5) obtenim que l'acceleració del sistema només estarà dirigida al llarg de l'eix X , ja que $a_y = a_z = 0$. Així, doncs, tenim una equació per a estudiar la translació del cilindre

$$ma_x = -2F + f \quad (6)$$

amb dues incògnites: a_x i f . En calcular a_x , si dóna un valor positiu, això significa que el sentit del moviment és tal com s'havia suposat; en canvi, si en calcular a_x dóna un valor negatiu, això vol dir que el sentit del moviment és contrari al que s'havia suposat inicialment.

Fins ara només tenim una equació, eq. (6), i dues incògnites, a_x i f , per tant, ens cal una altra equació que relacione les incògnites. Aquesta altra equació l'obtindrem calculant el moment resultant sobre el sistema de cilindres. Si prenem com a origen de moments un punt sobre l'eix dels cilindres, podrem escriure

$$\mathcal{M} = \sum_i \mathcal{M}_i = \mathbf{r} \times (2\mathbf{F}) + \mathbf{R} \times \mathbf{f} \quad (7)$$

on \mathbf{r} i \mathbf{R} són els vectors que van des de l'origen de moments fins als punts d'aplicació de la força $2\mathbf{F}$ i de la força \mathbf{f} , respectivament; \mathbf{N} i \mathbf{P} no donen lloc a cap moment de forces perquè el seu punt d'aplicació coincideix amb l'origen de moments, que és l'origen de coordenades. Segons el nostre sistema de coordenades (fig. 5),

$$\mathbf{r} = (0, -r, 0), \quad \mathbf{R} = (0, -R, 0), \quad 2\mathbf{F} = (-2F, 0, 0), \quad \mathbf{f} = (f, 0, 0) \quad (8)$$

per tant

$$\mathbf{r} \times (2\mathbf{F}) = -2rF\mathbf{k}, \quad \mathbf{R} \times \mathbf{f} = Rf\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} = (Rf - 2rF)\mathbf{k} \quad (9)$$

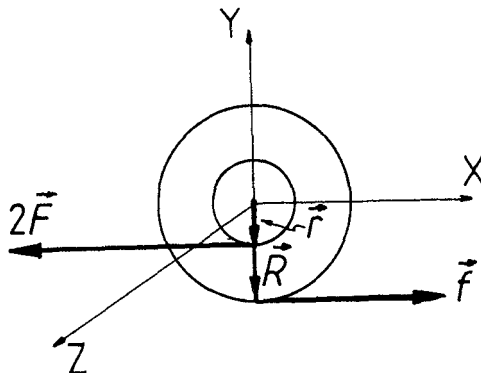


FIG. 5

Per altra banda, per tractar-se d'una rotació al voltant d'un eix principal (eix de simetria del sistema de cilindres), es verificarà la relació

$$\mathcal{M} = I\alpha \quad (10)$$

on α és l'acceleració angular i el moment d'inèrcia I del sistema de cilindres serà aproximadament igual al moment d'inèrcia del cilindre gran,

$$I = \frac{m}{2}R^2 \quad (11)$$

ja que suposem que els cilindres petits a penes sobresurten del gran. Per això hem considerat que no contribueixen apreciablement al moment d'inèrcia del sistema de cilindres que gira sobre el seu eix.

De les eqs. (9)-(11) podem escriure, per tant, que

$$\alpha = \frac{\mathcal{M}}{I} = \frac{2}{mR^2}(Rf - 2rF) \mathbf{k} \quad (12)$$

La relació entre els mòduls de l'acceleració angular, α , i de l'acceleració lineal, a_x , ve donada mitjançant l'expressió

$$a_x = \alpha R \quad (13)$$

però hem de considerar el sentit de gir del sistema. Si hem suposat que l'acceleració lineal és cap a la dreta, això es correspondria amb un gir de la forma representada en la fig. 6, és a dir, α dirigida cap a les z negatives (segons la regla de la mà dreta per a assignar vectors als girs): $\alpha = -\alpha \mathbf{k}$. Si combinem aquesta expressió amb les eqs. (12) i (13), obtenim

$$a_x = \frac{2}{mR}(2rF - Rf) \quad (14)$$

Ara les eqs. (6) i (14) constitueixen un sistema de dues equacions amb dues incògnites: a_x i f . La solució d'aquestes dues equacions dóna

$$a_x = \frac{4F(r-R)}{3Rm} \quad f = \frac{2F}{3} \left(2\frac{r}{R} + 1 \right) \quad (15)$$

Finalment, si substituïm valors numèrics obtenim

$$a_x = -0.52 \text{ m/s}^2 \quad \text{i} \quad f = 1.44 \text{ N} \quad (16)$$

És a dir, resolent el problema d'acord amb les nostres hipòtesis sobre el sentit del moviment del sistema de cilindres, l'acceleració resulta tenir signe (és a dir, sentit) contrari al proposat inicialment i, per tant, el moviment del cilindre és cap a l'esquerra:

$$\mathbf{a} = (-0.52, 0, 0) \text{ m/s}^2 \quad (17)$$

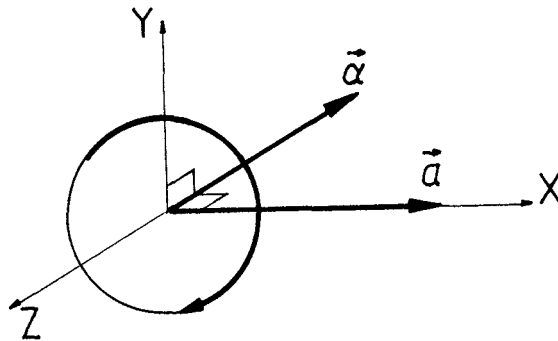


FIG. 6

Coneixem que en el cas de translació sense rotació, la força de fricció és de sentit contrari al moviment del cos sobre la superfície. Però en la situació concreta del nostre problema (translació i rotació), del resultat que hem obtingut podem deduir que la força de fricció té el mateix sentit que el moviment relatiu entre el cos i la superfície (fig. 7).

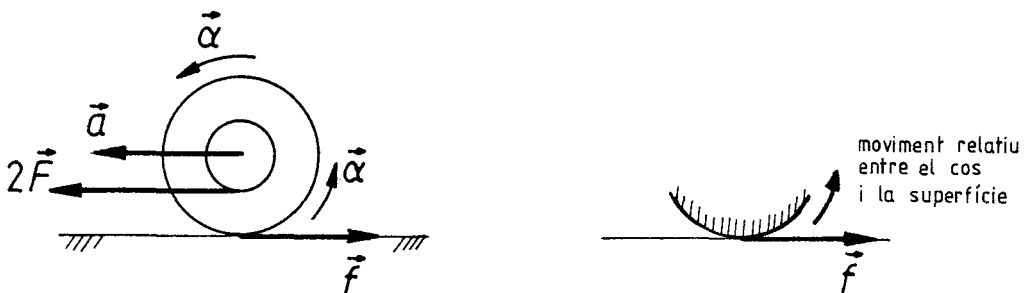


FIG. 7

Notem que si en compte d'aplicar les forces F a la part inferior dels cilindres dels extrems, les apliquem a la part superior (fig. 8), podem aprofitar els resultats obtinguts en aquest problema si tenim present que el vector que va des de l'origen de moments fins al punt d'aplicació de cada força F ara és $\mathbf{r} = (0, r, 0)$.

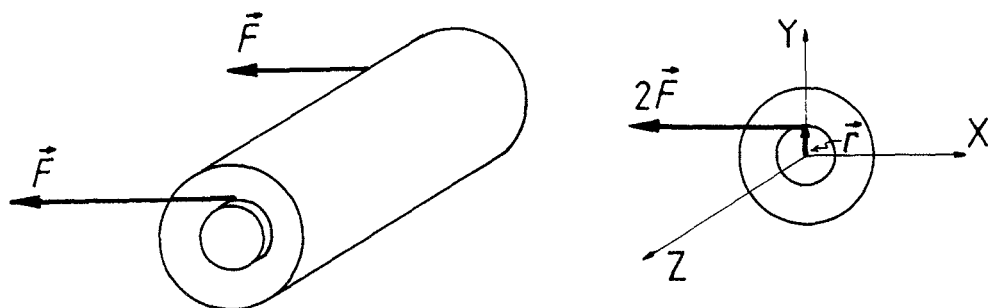


FIG. 8

Així, doncs, si en l'eq. (8) substituïm $r = (0, -r, 0)$ per $r = (0, r, 0)$, podem aprofitar totes les expressions que hem obtingut canviant tan sols r per $-r$, i així, segons l'eq. (15), l'acceleració del cilindre valdria

$$a_x = -\frac{4F(r + R)}{3Rm} \quad (18)$$

dirigida sempre cap a l'esquerra. Segons l'eq. (15), la força de fricció valdria

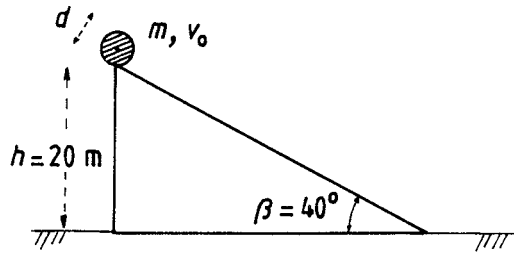
$$f = \frac{2F}{3} \left(-\frac{2r}{R} + 1 \right) \quad (19)$$

i tindrà sentit positiu si $r < R/2$, o negatiu si $r > R/2$. Ara, en el segon cas la força de fricció tindria sentit contrari al del moviment relatiu entre el cos i la superfície.

Així, doncs, el sentit de la força de fricció depèn del punt d'aplicació de les forces sobre l'extrem del cilindre. Fins i tot hi ha una situació, quan el punt d'aplicació és $r = R/2$, en què la força de fricció és zero. El fet que la força de fricció tinga sentit igual o oposat al de l'acceleració del cilindre, segons el punt d'aplicació de les forces de tensió, indica que en uns casos (quan f i a_x tenen sentits oposats) les tensions de les cordes és insuficient per a proporcionar el moment de les forces necessari perquè no hi haja rellicament i, per tant, la força de fricció ha de proporcionar el moment de les forces addicional actuant en la direcció oposada al moviment del centre de massa. En altres casos (quan f i a_x tenen el mateix sentit) el moment de les forces F és massa gran i la força de fricció ha d'oposar-se a aquest moment.¹⁴

5.6 Des de dalt d'un pla inclinat de 20 m d'altura deixem caure sense velocitat inicial, rodolant i sense rellicar, un cilindre massís de 2 kg de massa, el diàmetre del qual val 10 cm. Si el coeficient de rodolament val 1 cm, amb quina velocitat arribarà el cilindre a la base del pla inclinat?

¹⁴En l'article de D. E. Shaw, "Frictional force on rolling objects", *American Journal of Physics* 47 (1979) 887, es discuteix, experimentalment i teòricament, una situació semblant a la que presenta aquest problema.



$v_0 = 0 \text{ m/s}$, $m = 2 \text{ kg}$, $d = 0.1 \text{ m}$, $h = 20 \text{ m}$, $\beta = 40^\circ$,
 $\rho = 0.01 \text{ m}$ (coeficient de redolament)
 v del cilindre quan arriba a la base del pla inclinat?

L'única fricció que intervé en aquest problema és la deguda a redolament, ja que no hi ha fregament per relliscament, perquè el cilindre no rellisca.

El concepte de coeficient de redolament és "similar" al de coeficient de fregament. Es defineix el coeficient de redolament ρ com el quocient entre el mòdul del moment de forces mínim, \mathcal{M} , per a iniciar la rotació del sòlid i el mòdul de la força normal al pla sobre el qual recolza el sòlid, N ,

$$\rho = \frac{|\mathcal{M}|}{|N|} \quad (1)$$

Com que les dimensions de \mathcal{M} i N són:

$$[\mathcal{M}] = \text{força} \cdot \text{longitud} \quad (2)$$

i

$$[N] = \text{força} \quad (3)$$

la dimensió del coeficient de redolament és

$$[\rho] = \text{longitud} \quad (4)$$

tal com apareix en l'enunciat.

Aplicarem el principi de conservació de l'energia per a resoldre aquest problema: l'energia en la part superior del pla inclinat (E_1) ha de ser igual a l'energia en la part inferior (E_2), més l'energia que es consumeix en fricció per redolament (és a dir, el treball de redolament, W_{rod}):

$$E_1 = E_2 + W_{\text{rod}} \quad (5)$$

Per estar el cilindre en repòs ($v_0 = 0 \text{ m/s}$) en la part superior, l'energia hi serà tota potencial, i si prenem l'origen d'energia potencial just en la base del pla inclinat, tenim que

$$E_1 = mgh \quad (6)$$

L'energia E_2 serà tota cinètica, perquè el cilindre haurà arribat a l'origen d'energia potencial, i com que tenim un moviment de translació i de rotació al voltant del centre de massa,

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (7)$$

on el primer terme de la dreta representa l'energia cinètica de translació del centre de massa del cilindre i el segon terme correspon a l'energia cinètica de rotació al voltant d'un eix que passa pel centre de massa del cilindre. La velocitat angular ω està relacionada amb la velocitat lineal v i el radi R del cilindre per

$$\omega = \frac{v}{R} \quad (8)$$

El moment d'inèrcia d'un cilindre de massa m i de radi R que gira sobre el seu eix de revolució és

$$I = \frac{mR^2}{2} \quad (9) \quad (9)$$

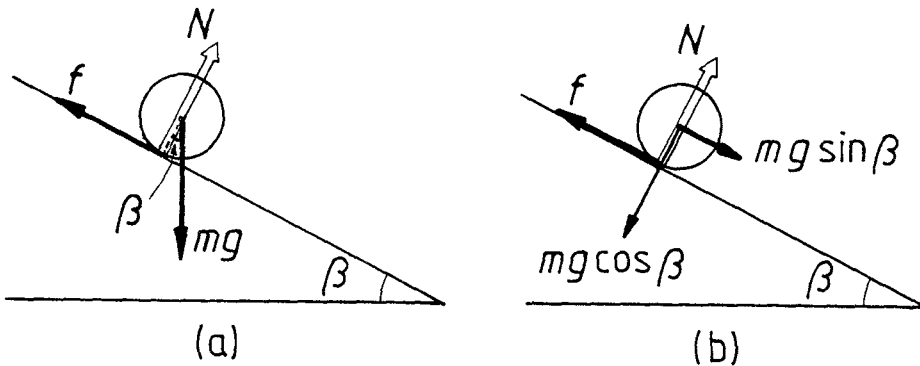


FIG. 1

En la fig. 1a apareixen representades les forces que actuen sobre el cilindre, que són: el pes del cilindre, mg ; la força normal N que exerceix el pla inclinat sobre el cilindre, i la força de fricció f . En la fig. 1b apareixen representats els components d'aquestes forces al llarg d'uns eixos paral·lel i perpendicular, respectivament, al pla de caiguda. Les forces N i $mg \cos \beta$ són iguals en mòdul i de sentit contrari, per això es cancel·len mútuament.

En la fig. 2 apareixen representades les forces responsables del moviment del cilindre: f i F , on $|F| = mg \sin \beta$. Si coneguérem el valor de la força de fricció f , podríem fer un estudi del moviment del cilindre similar al que hem fet en el problema 5.5, però no sabem el valor de f ni hem de descriure el moviment del cilindre. Únicament hem de calcular el treball fet durant el redolament.

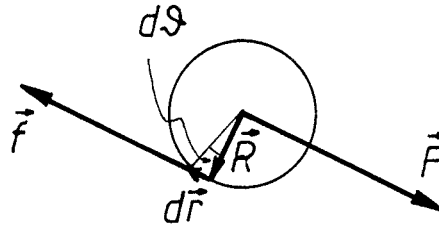


FIG. 2

Per a calcular l'energia consumida en fricció per redolament hi aplicarem la definició de treball elemental degut a una força f que produeix un desplaçament $d\mathbf{r}$

$$dW_{\text{rod}} = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = f \, dr \quad (10)$$

on hem de considerar que la força f que és la que produeix el moment de forces, i per tant, és la responsable final de la rotació, i el vector de desplaçament elemental $d\mathbf{r}$ són paral·lels, segons es desprén de la fig. 2.

Si en l'eq. (10) multipliquem i dividim per R obtenim que

$$dW_{\text{rod}} = R \frac{f \, dr}{R} \quad (11)$$

i si tenim en compte que

$$d\vartheta = \frac{dr}{R} \quad (12)$$

i que el moment degut a la força f respecte del centre del cilindre és

$$\mathcal{M} = |\mathcal{M}| = |\mathbf{R} \times \mathbf{f}| = Rf \quad (13)$$

(ja que \mathbf{R} i \mathbf{f} són perpendiculars, com s'observa en la fig. 2), obtenim finalment el treball elemental de redolament, expressat en termes del moment de forces \mathcal{M} i del desplaçament angular infinitesimal $d\vartheta$

$$dW_{\text{rod}} = \mathcal{M} \, d\vartheta \quad (14)$$

El moment corresponent a les forces aplicades és constant durant tot el moviment, perquè la força de fricció f i el seu punt d'aplicació –punt de contacte entre el cilindre i la superfície del pla– no varien. Per això el treball emprat a redolar des d'un angle inicial ϑ_i fins a un angle final ϑ_f val

$$W_{\text{rod}} = \int_{\vartheta_i}^{\vartheta_f} d\vartheta \, \mathcal{M} = \mathcal{M} \int_{\vartheta_i}^{\vartheta_f} d\vartheta = \mathcal{M}(\vartheta_f - \vartheta_i) = \mathcal{M}\vartheta_{\text{total}} \quad (15)$$

\mathcal{M} és el mòdul del moment de les forces que provoquen el redolament, eq. (13), i ϑ_{total} és l'angle total redolat pel cilindre, que està relacionat amb el nombre de voltes fetes pel cilindre des que està dalt fins que arriba a la base del pla inclinat (fig. 3),

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{total}} &= 2\pi (\text{nombre de voltes}) = 2\pi \frac{\text{longitud recorreguda}}{\text{perímetre de la base del cilindre}} \\ &= 2\pi \frac{\ell}{2\pi R} = \frac{\ell}{R} = \frac{h/\sin\beta}{R} = \frac{h}{R\sin\beta} \end{aligned} \quad (16)$$

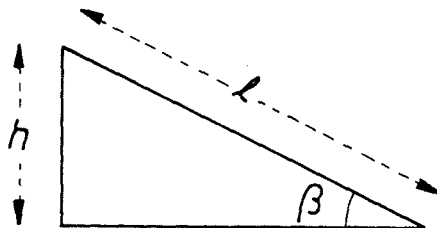


FIG. 3

De la definició del coeficient de redolament ρ , eq. (1), podem expressar el moment \mathcal{M} de les forces causant del redolament en termes del coeficient de redolament ρ i de la normal N

$$\mathcal{M} = \rho N = \rho mg \cos \beta \quad (17)$$

on hem tingut en compte que la normal N i el pes mg estan relacionats per $N = mg \cos \beta$. Si substituïm les expressions (16) i (17) en l'eq. (15) i si considerem que $R = d/2$ en les eqs. (7) i (9), tenim que l'aplicació del principi de conservació de l'energia, eq. (5), dóna lloc a l'equació

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{m(d/2)^2}{2} \left(\frac{v}{d/2} \right)^2 + \frac{\rho hmg}{d/2} \cot \beta \quad (18)$$

en la qual totes les dades són conegudes excepte v , la velocitat amb la qual arriba el cilindre a la base del pla inclinat, que, una vegada aïllada, val

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh \left(1 - \frac{2\rho}{d} \cot \beta \right)} = 14.11 \text{ m/s} \quad (19)$$

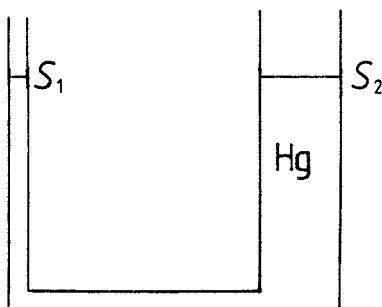
Observem que la massa del cilindre no intervé en el resultat final.

Convé notar que, en fer els càlculs, hem simplificat el problema considerant que l'altura del centre de massa del cilindre respecte del pla horitzontal és h , quan es troba dalt del pla inclinat, i zero quan es troba baix. Això no és totalment cert, ja que en la part superior del pla inclinat, el centre de massa del cilindre es troba un poc per damunt de l'altura h i, en la part inferior, es troba un poc per damunt del pla horitzontal que serveix de referència per a l'energia potencial. Però aquesta suposició que hem emprat simplifica notablement el problema i, a més a més, és possible fer-la, vistos els valors de les magnituds involucrades, ja que $d \ll h$.

6

Fluids

6.1 Tenim dos tubs comunicants de seccions $S_1 = 1 \text{ cm}^2$ i $S_2 = 5 \text{ cm}^2$ que contenen mercuri. (a) Calculeu l'energia necessària per a establir-hi una diferència de nivells de 6 cm. (b) Si sobre el mercuri aboquem 50 cm^3 d'aigua pel tub estret i el mateix volum d'alcohol pel tub ample, calculeu el desnivell que hi ha entre les superfícies del mercuri en els dos tubs. ($\rho_{\text{alc}} = 0.792 \text{ g/cm}^3$, $\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \text{ g/cm}^3$).



$$S_1 = 1 \text{ cm}^2, S_2 = 5 \text{ cm}^2$$

$$\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ g/cm}^3, \rho_{\text{alc}} = 0.792 \text{ g/cm}^3, \rho_{\text{Hg}} = 13.6 \text{ g/cm}^3$$

(a) ΔE per a establir una diferència de nivells $d = 6 \text{ cm}$ entre les superfícies S_1 i S_2 ?

(b) desnivell entre les superfícies del mercuri si aboquem el mateix volum, $V = 50 \text{ cm}^3$, d'aigua sobre S_1 i d'alcohol sobre S_2 ?

Totes les unitats apareixen expressades en el sistema cegesimal, per tant, resoldrem el problema en aquest sistema.

(a) Per a calcular l'energia necessària per a fer passar el sistema d'un estat inicial a un estat final, hem de conèixer les energies corresponents a aquestes dues situacions. Com que considerarem el líquid en repòs en les dues situacions, l'única energia que intervindrà en els càlculs serà l'energia potencial. Així, doncs,

$$E^{\text{inicial}} = E_{\text{pot}}^i \quad E^{\text{final}} = E_{\text{pot}}^f \quad (1)$$

Anomenarem H l'altura de la superfície dels líquids en els tubs respecte de la base del sistema (vegeu la fig. 1).

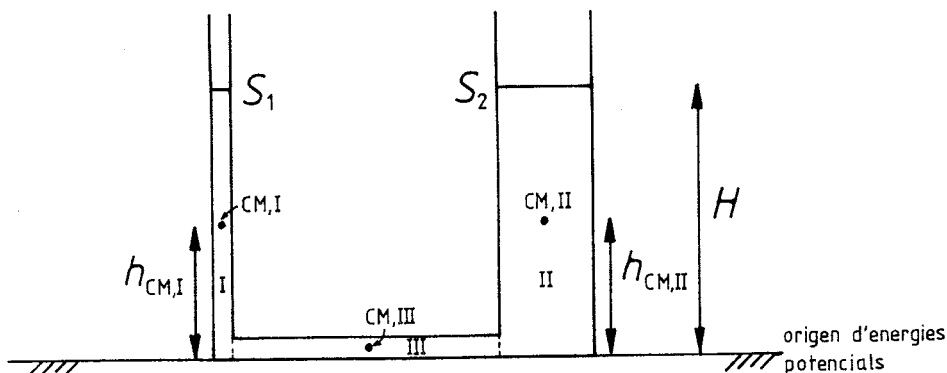


FIG. 1

Càlcul de E_{pot}^i : Prendrem com a origen d'energies potencials la base del sistema de tubs comunicants i, per comoditat, dividirem el líquid contingut en els tubs comunicants en tres parts, segons representa la fig. 1. L'energia potencial inicial serà la suma de les energies potencials de cada part:

$$E_{\text{pot}}^i = E_{\text{pot,I}}^i + E_{\text{pot,II}}^i + E_{\text{pot,III}}^i \quad (2)$$

Sabem que l'energia potencial d'una massa extensa (és a dir, no puntual) i no gaire gran, situada en el camp gravitatori terrestre (com és el nostre cas), és equivalent a l'energia potencial que tindria tota la massa localitzada en el centre de massa (CM). Així, doncs, tindrem que

$$E_{\text{pot,I}}^i = m_I g h_{\text{CM,I}} \quad (3)$$

$$E_{\text{pot,II}}^i = m_{\text{II}} g h_{\text{CM,II}} \quad (4)$$

$$E_{\text{pot,III}}^i = m_{\text{III}} g h_{\text{CM,III}} \quad (5)$$

on m_I i $h_{\text{CM,I}}$ representen, respectivament, la massa i l'altura del CM, respecte de l'origen d'energies potencials, del líquid contingut en la regió I. Anàlogament per a les regions II i III.

Per la geometria del problema, sabem que

$$h_{\text{CM,I}} = h_{\text{CM,II}} = \frac{H}{2} \quad (6)$$

(de moment, deixarem sense calcular l'energia $E_{\text{pot,III}}^i$). També es verificarà que

$$m_I = \rho_{\text{Hg}} V_I = \rho_{\text{Hg}} S_1 H \quad (7)$$

$$m_{\text{II}} = \rho_{\text{Hg}} V_{\text{II}} = \rho_{\text{Hg}} S_2 H \quad (8)$$

on V_I representa el volum de líquid en la regió I (anàlogament per a V_{II}). Així, doncs,

$$E_{\text{pot}}^i = \rho_{\text{Hg}} g (S_1 + S_2) \frac{H^2}{2} + E_{\text{pot,III}}^i \quad (9)$$

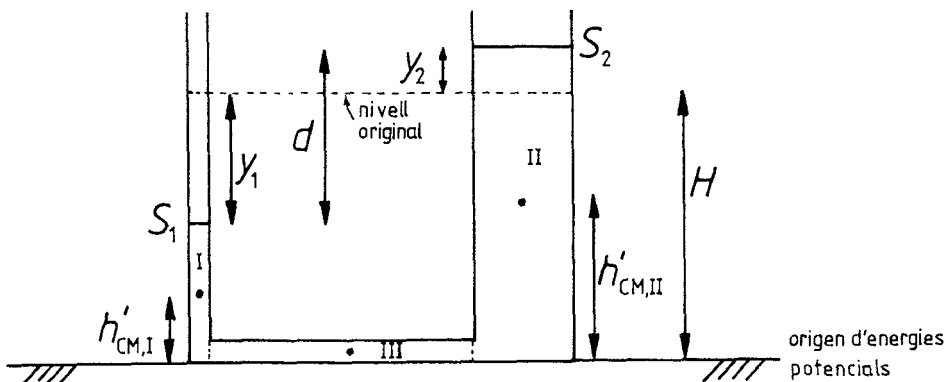


FIG. 2

Càlcul de E_{pot}^f : El desnivell que es produirà està representat en la fig. 2, com també els desplaçaments de cada superfície respecte de la posició original, $-y_1$ i $+y_2$. De manera semblant al que hem fet en l'apartat previ, tindrem que

$$E_{\text{pot}}^f = E_{\text{pot,I}}^f + E_{\text{pot,II}}^f + E_{\text{pot,III}}^f \quad (10)$$

on

$$E_{\text{pot,I}}^f = m_I' g h'_{\text{CM,I}} \quad (11)$$

$$E_{\text{pot,II}}^f = m_{\text{II}}' g h'_{\text{CM,II}} \quad (12)$$

$$E_{\text{pot,III}}^f = m_{\text{II}}' g h'_{\text{CM,III}} = m_{\text{III}} g h_{\text{CM,III}} = E_{\text{pot,III}}^i \quad (13)$$

Notem que la massa i la localització del CM de la regió III no canvien en relació amb el cas anterior. Però ara, anàlogament al càlcul de E_{pot}^i , tenim

$$m_I' = \rho_{\text{Hg}} V_I' = \rho_{\text{Hg}} S_1 (H - y_1) \quad (14)$$

$$m_{\text{II}}' = \rho_{\text{Hg}} V_{\text{II}} = \rho_{\text{Hg}} S_2 (H + y_2) \quad (15)$$

i

$$h'_{\text{CM,I}} = \frac{H - y_1}{2} \quad (16)$$

$$h'_{\text{CM,II}} = \frac{H + y_2}{2} \quad (17)$$

on V_I' i $h'_{\text{CM,I}}$ representen, respectivament, el volum i l'altura del CM del líquid que hi ha en la part I (anàlogament per a la part II). Finalment, E_{pot}^f queda

$$E_{\text{pot}}^f = \rho_{\text{Hg}} g \left[S_1 \frac{(H - y_1)^2}{2} + S_2 \frac{(H + y_2)^2}{2} \right] + E_{\text{pot,III}}^i \quad (18)$$

L'energia que s'hi haurà d'aplicar serà $\Delta E = E^{\text{final}} - E^{\text{inicial}}$, la qual, segons les eqs. (1), (9) i (18), valdrà

$$\begin{aligned} \Delta E &= \rho_{\text{Hg}} \frac{g}{2} [S_1 (H^2 + y_1^2 - 2Hy_1) + S_2 (H^2 + y_2^2 + 2Hy_2)] \\ &\quad - \rho_{\text{Hg}} \frac{g}{2} (S_1 H^2 + S_2 H^2) \\ &= \rho_{\text{Hg}} \frac{g}{2} [S_1 y_1^2 + S_2 y_2^2 + 2H (S_2 y_2 - S_1 y_1)] \end{aligned} \quad (19)$$

Ara hi apliquem la conservació de la massa, és a dir, que tota la massa guanyada en la regió II (aquella que està per damunt de l'antic nivell),

$$\Delta m_{\text{II}} = \rho_{\text{Hg}} |\Delta V_{\text{II}}| = \rho_{\text{Hg}} S_2 y_2 \quad (20)$$

prové de la massa perduda en la regió I (aquella que falta entre el nivell actual i l'antic nivell)

$$\Delta m_I = \rho_{\text{Hg}} |\Delta V_I| = \rho_{\text{Hg}} S_1 y_1 \quad (21)$$

Com que $\Delta m_I = \Delta m_{II}$, això dóna que

$$y_1 S_1 = y_2 S_2 \quad (22)$$

I, a més a més, sabem que la diferència de nivells val $d = 6$ cm,

$$y_1 + y_2 = d \quad (23)$$

Per tant, de les eqs. (19), (22) i (23) obtenim que l'energia que cal aplicar al sistema és

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2} \rho_{\text{Hg}} g \left[S_1 \left(\frac{S_2 d}{S_1 + S_2} \right)^2 + S_2 \left(\frac{S_1 d}{S_1 + S_2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \rho_{\text{Hg}} g \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} d^2 = 199920 \text{ erg} \end{aligned} \quad (24)$$

on hem usat que $g = 980 \text{ cm/s}^2$.

(b) Quan aboquem líquids diferents en les dues branques del sistema, aquest es desnivellarà fins que la pressió a una determinada profunditat (en la base d'un tub) deguda al líquid que hi ha en el tub s'equilibre amb la pressió a la mateixa profunditat exercida pel líquid present en l'altre tub.

La pressió p_I , exercida pel líquid del tub esquerre I en el fons d'aquest tub, és la deguda al pes P_I de la massa present en aquest tub. Com que el tub I ara conté aigua i mercuri, escriurem

$$p_I = \frac{P_I}{S_1} = \frac{m_{\text{H}_2\text{O}} g + m_{\text{Hg},I} g}{S_1} = \frac{(\rho_{\text{H}_2\text{O}} V_{\text{H}_2\text{O}} + \rho_{\text{Hg}} V_{\text{Hg},I}) g}{S_1} \quad (25)$$

Anàlogament per al tub dret, que ara conté alcohol i mercuri, escriurem

$$p_{II} = \frac{P_{II}}{S_2} = \frac{m_{\text{alc}} g + m_{\text{Hg},II} g}{S_2} = \frac{(\rho_{\text{alc}} V_{\text{alc}} + \rho_{\text{Hg}} V_{\text{Hg},II}) g}{S_2} \quad (26)$$

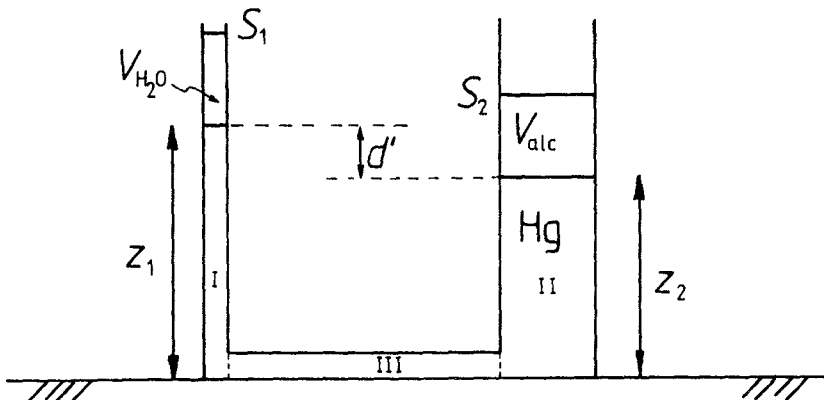


FIG. 3

Si ara expressem els volums $V_{\text{Hg,I}}$ i $V_{\text{Hg,II}}$ com el producte de la base del tub per l'altura del mercuri en cada tub tindrem (fig. 3) que

$$p_I = \frac{(\rho_{\text{H}_2\text{O}} V_{\text{H}_2\text{O}} + \rho_{\text{Hg}} S_1 z_1) g}{S_1} \quad (27)$$

$$p_{II} = \frac{(\rho_{\text{alc}} V_{\text{alc}} + \rho_{\text{Hg}} S_2 z_2) g}{S_2} \quad (28)$$

(Notem que ara z_1 i z_2 representen les altures del mercuri en cada tub). Segons hem dit abans aquestes pressions han de ser iguals,

$$\frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}} V_{\text{H}_2\text{O}} + \rho_{\text{Hg}} S_1 z_1}{S_1} = \frac{\rho_{\text{alc}} V_{\text{alc}} + \rho_{\text{Hg}} S_2 z_2}{S_2} \quad (29)$$

i com que el desnivell entre les superfícies del mercuri és $d' = z_1 - z_2$, això implica que

$$z_1 = d' + z_2 \quad (30)$$

De les eqs. (29) i (30) tenim

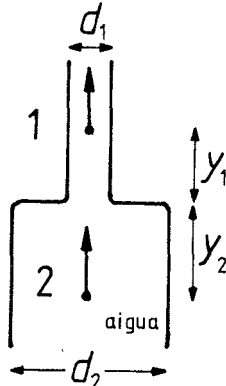
$$\frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}} V_{\text{H}_2\text{O}} + \rho_{\text{Hg}} S_1 d' + \rho_{\text{Hg}} S_1 z_2}{S_1} = \frac{\rho_{\text{alc}} V_{\text{alc}} + \rho_{\text{Hg}} S_2 z_2}{S_2} \quad (31)$$

que dóna

$$d' = \frac{\rho_{\text{alc}} V_{\text{alc}} S_1 - \rho_{\text{H}_2\text{O}} V_{\text{H}_2\text{O}} S_2}{\rho_{\text{Hg}} S_1 S_2} = -3.09 \text{ cm} \quad (32)$$

El fet que $d' < 0$ significa que, al contrari de com hem dibuixat el sistema en la fig. 3, el mercuri en el tub estret es troba 3.09 cm per sota del nivell del mercuri en el tub ample.

6.2 Un corrent d'aigua circula per dins d'un tub de 30 cm de diàmetre, el qual es perllonga per un altre que té 5 cm de diàmetre, col·locats els dos en posició vertical. Un manòmetre indica una diferència de pressió $p_2 - p_1 = 20$ cm de Hg entre dos punts, situats a 1 m de la unió dels tubs, un a cada costat. Calculeu la velocitat de l'aigua en cada tub.



$d_1 = 5 \text{ cm}$, $d_2 = 30 \text{ cm}$, $y_1 = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, $y_2 = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$
 $\Delta p = p_2 - p_1 = 20 \text{ cm Hg}$
 $v_1, v_2?$

El teorema de Bernoulli per a un element de fluid j qualsevol d'un tub de corrent és

$$\frac{1}{2}\rho v_j^2 + p_j + E_{\text{pot},j} = \text{constant} \quad (1)$$

i es transforma, quan l'energia potencial és la gravitatòria, en

$$\frac{1}{2}\rho v_j^2 + p_j + \rho g h_j = \text{constant} \quad (2)$$

En les expressions anteriors, v_j , p_j , $E_{\text{pot},j}$ i h_j són, respectivament, la velocitat, la pressió, l'energia potencial i l'altura de l'element de fluid j (aquestes dues últimes mesurades respecte d'un origen que especificarem seguidament). La densitat del fluid és ρ i la gravetat està representada per g .

Si situem l'origen d'energia potencial gravitatòria en la línia horitzontal que passa pel punt 2 de la figura de l'enunciat, escriurem

$$\text{punt 1: } \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g(y_1 + y_2) = \text{constant} \quad (3)$$

$$\text{punt 2: } \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = \text{constant} \quad (4)$$

I ja que la constant és la mateixa, tindrem

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \quad (5)$$

Tal com està dibuixada la figura, el punt 2 suporta una pressió major que el punt 1,

$$p_2 = p_1 + \Delta p \quad (6)$$

Com que $\Delta p = 20 \text{ cm Hg}$ no són unitats del sistema cegesimal (que és el que estem emprant), usant la relació

$$1 \text{ atm} = 76 \text{ cm Hg} = 1.013 \cdot 10^6 \text{ dina/cm}^2 \quad (7)$$

fem la conversió corresponent, que és

$$\Delta p = \frac{20}{76} \text{ atm} = 266578.95 \text{ dina/cm}^2 \quad (8)$$

Segons l'equació de continuïtat, el volum d'aigua que passa pel punt 1 en la unitat de temps és el mateix que el que passa pel punt 2

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 \quad (9)$$

on ρ_1 i S_1 són la densitat del fluid i la secció del tub en el punt 1 (anàlogament per al punt 2).

Com que l'aigua és un fluid incompressible, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, escriurem

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (10)$$

La secció del tub, S , i el seu diàmetre, d , estan relacionats per $S = \pi(d/2)^2$, per tant, l'eq. (10) s'escriu

$$\pi \left(\frac{d_1}{2} \right)^2 v_1 = \pi \left(\frac{d_2}{2} \right)^2 v_2 \quad (11)$$

Si substituïm l'eq. (6) en l'eq. (5), tenim

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g(y_1 + y_2) = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \Delta p \quad (12)$$

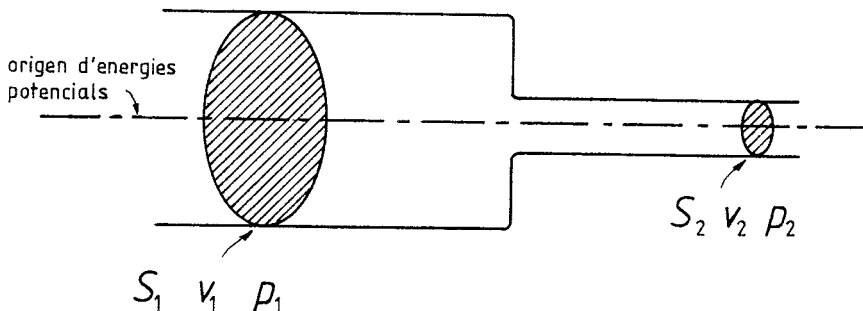
L'eq. (11), llevat del factor π que és comú als dos membres, i l'eq. (12) formen un sistema de dues equacions amb dues incògnites, v_1 i v_2 . Si utilitzem el valor de la densitat de l'aigua, $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, obtenim el resultat final

$$v_1 = \frac{d_2}{d_1} \sqrt{\frac{2[\Delta p - \rho g(y_1 + y_2)]}{\rho[(d_2/d_1)^4 - 1]}} = 375.85 \text{ cm/s} \quad (13)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2[\Delta p - \rho g(y_1 + y_2)]}{\rho[(d_2/d_1)^4 - 1]}} = 10.44 \text{ cm/s} \quad (14)$$

Podem comprovar que aquest resultat no depèn del sentit del moviment de l'aigua. Dóna el mateix resultat si l'aigua es mou cap amunt o si es mou cap avall, la qual cosa pot verificar-se en substituir v_1 i v_2 per $-v_1$ i $-v_2$, respectivament, en les eqs. (11) i (12) i veure que aquestes són invariants sota aquest canvi.

6.3 Un tub horitzontal consta de dues regions, una amb secció transversal de 10 cm^2 i una altra amb una secció transversal de 5 cm^2 . La velocitat de l'aigua en la primera regió és de 5 m/s i la pressió en la segona regió és de $2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Calculeu: (a) la velocitat de l'aigua en la segona regió i la pressió de l'aigua en la primera regió, (b) la quantitat d'aigua per minut que creua qualsevol secció, i (c) l'energia total per quilogram d'aigua.



$$S_1 = 10 \text{ cm}^2, v_1 = 5 \text{ m/s} = 500 \text{ cm/s}$$

$$S_2 = 5 \text{ cm}^2, p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ dina/cm}^2$$

(a) p_1, v_2 ?

(b) quantitat d'aigua per minut que creua qualsevol secció?

(c) energia total per quilogram d'aigua?

(a) El plantejament d'aquest apartat és, formalment, idèntic al del problema anterior (problema 6.2), però ara ens demanen altres magnituds i coneixem altres dades. L'equació de Bernoulli s'escriu ara

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + 0 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + 0 \quad (1)$$

Hem fet nul el terme degut a l'energia potencial perquè hem pres l'origen d'energia potencial que coincideix amb l'eix horitzontal del tub.

L'equació de continuïtat,

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 \quad (2)$$

amb el fet que el fluid és incompressible,

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho \quad (3)$$

ens dóna

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (4)$$

De l'eq. (4) obtenim que la velocitat de l'aigua en la segona regió és $v_2 = 1000 \text{ cm/s}$. Si substituïm aquest valor de v_2 i les dades del problema en l'eq. (1), resulta que la pressió de l'aigua en la primera regió és

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = 2375000 \text{ dina/cm}^2 = 2.375 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \quad (5)$$

(b) La quantitat de líquid que passa per qualsevol secció del tub en la unitat de temps és constant, segons l'equació de continuïtat,

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 = \text{constant} \quad (6)$$

i la quantitat d'aigua per unitat de temps és

$$\rho_1 S_1 v_1 = 1 \text{ g/cm}^3 \cdot 10 \text{ cm}^2 \cdot 500 \text{ cm/s} = 5000 \text{ g/s} = 3 \cdot 10^5 \text{ g/minut} \quad (7)$$

Com que el fluid és incompressible, el volum que passa per una secció del tub és constant,

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{constant} \quad (8)$$

i val

$$S_1 v_1 = 10 \text{ cm}^2 \cdot 500 \text{ cm/s} = 5000 \text{ cm}^3/\text{s} = 3 \cdot 10^5 \text{ cm}^3/\text{minut} \quad (9)$$

(c) Les contribucions a l'energia total per quilogram d'aigua són

$$E_{\text{total}} = E_{\text{cinètic}} + E_{\text{pressió}} + E_{\text{potencial}} \quad (10)$$

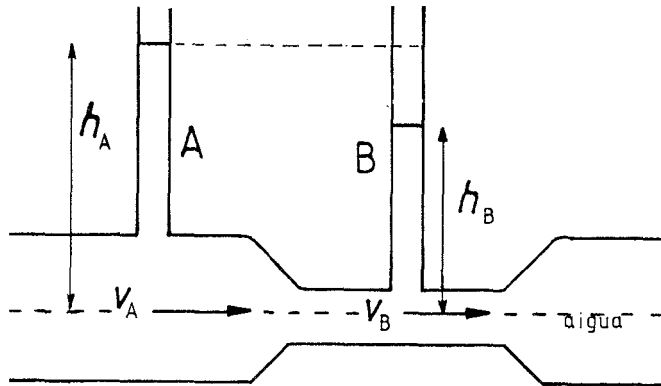
i com que la pressió també pot considerar-se com a energia per unitat de volum, escriurem

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2}mv_i^2 + p_iV + 0 \quad (i = 1, 2) \quad (11)$$

on la massa és la massa d'un quilogram d'aigua, $m = 1000$ g, i el volum és el corresponent a un quilogram d'aigua, $V = 1000$ cm³, ja que la densitat de l'aigua val 1 g/cm³. L'expressió (11) és constant (ja que prové del teorema de Bernoulli), per això la calcularem en qualsevol punt, per exemple, en el punt 1; i si considerem les dades anteriors, obtenim finalment

$$E_{\text{total}}(1 \text{ kg H}_2\text{O}) = 2.5 \cdot 10^9 \text{ erg} = 2.5 \cdot 10^2 \text{ J} \quad (12)$$

6.4 En un tub horitzontal, que en un tram es fa més estret, l'aigua que hi circula experimenta un augment de velocitat des de 70 cm/s fins a 100 cm/s. En els tubs verticals A i B l'altura a què arriba l'aigua, a causa de la pressió, és $h_A = 25$ cm i $h_B = 20$ cm, respectivament. Determineu la pèrdua de càrrega.



$h_A = 25$ cm, $h_B = 20$ cm, $v_A = 70$ cm/s, $v_B = 100$ cm/s
pèrdua de càrrega entre A i B?

El fenomen de pèrdua de càrrega (també anomenat pèrdua de pressió) fa referència al fet que la pressió disminueix al llarg d'una conducció horitzontal, en el sentit del moviment del fluid, a causa dels efectes de fricció. Això provoca que la pressió en el tram estret de la conducció de la figura no siga la que es calcularia a partir de l'equació de Bernoulli, sinó menor. Com que la pressió en un punt està relacionada amb l'altura de la columna de líquid que pot suportar aquest punt, tenim que l'altura h_B és menor que l'altura corresponent al cas sense efectes de fricció.

Anomenarem H_B l'altura que hi hauria idealment en el tub vertical del tram estret de la conducció (fig. 1).

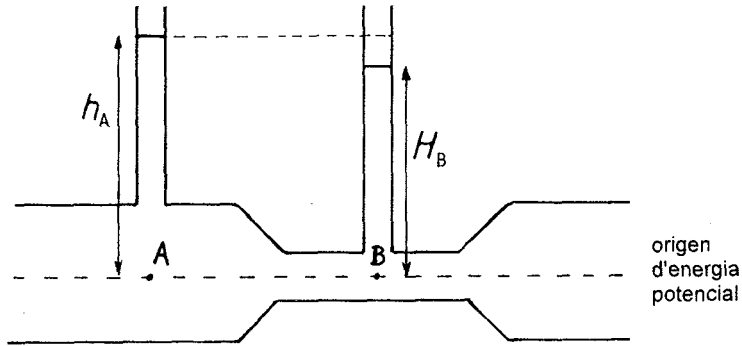


FIG. 1

L'equació de Bernoulli s'escriu

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 \quad (1)$$

on p_A , z_A i v_A són, respectivament, la pressió en el punt A, l'altura del punt A respecte d'un origen d'energia potencial (que serà l'eix de simetria de la conducció, segons s'indica en la fig. 1) i la velocitat del fluid en el punt A; anàlogament per a p_B , z_B i v_B , referides al punt B. Així, doncs, com que $z_A = z_B = 0$, segons la fig. 1. l'eq. (1) quedarà com

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 \quad (2)$$

D'altra banda, a partir de l'equació fonamental de la hidrostàtica, i com que les columnes d'aigua que hi ha en els tubs verticals estan en l'atmosfera, podem escriure que

$$p_A = p_{\text{atm}} + \rho g h_A \quad (3)$$

$$p_B = p_{\text{atm}} + \rho g H_B \quad (4)$$

on l'altura H_B seria la que abastaria l'aigua si no hi haguera pèrdua de càrrega. En substituir les eqs. (3) i (4) dins l'eq. (2), obtenim:

$$g h_A + \frac{1}{2} v_A^2 = g H_B + \frac{1}{2} v_B^2 \quad (5)$$

Per tant, després d'aïllar H_B i de substituir les dades, tenim

$$H_B = h_A + \frac{1}{2g} (v_A^2 - v_B^2) = 22.40 \text{ cm} \quad (6)$$

on hem tingut en compte que $g = 980 \text{ cm/s}^2$, ja que estem treballant en unitats del sistema cegesimal. La pèrdua de càrrega serà

$$\text{pèrdua de càrrega} = H_B - h_B = 2.40 \text{ cm d'aigua} \quad (7)$$

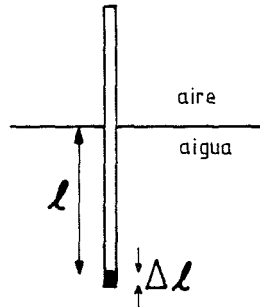
De la mateixa manera que el mil·límetre de mercuri (mm Hg) és una unitat de pressió, el centímetre d'aigua també ho és: 1 cm d'aigua és la pressió exercida per una columna

d'aigua d'1 cm d'altura. En el nostre cas, l'eq. (7) fa referència a una columna d'aigua ($\rho = 1 \text{ g/cm}^3$) d'altura $h = 2.40 \text{ cm}$, per això, si volem la pèrdua de càrrega, eq. (7), en unitats típiques de pressió, escriurem

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\text{pes}}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho V g}{S} = \rho g \frac{V}{S} = \rho g \frac{Sh}{S} = \rho gh = 2352 \text{ dina/cm}^2 \quad (8)$$

on hem representat la massa, la densitat, el volum, la superfície i l'altura de la columna d'aigua, respectivament, per m, ρ, V, S i h .

6.5 Una barra cilíndrica de fusta té una massa petita de metall en un extrem, de manera que sura amb una porció ℓ de fusta submergida, com indiquem en la figura. Si empenyem un poc la barra cap avall i després la soltem, (a) demostreu que el moviment resultant és harmònic simple, i (b) calculeu-ne el període d'oscil·lació. (Suposeu que no hi ha fregament).



- (a) moviment harmònic simple?
 (b) T ?

Intentarem veure si el moviment que fa la barra correspon al d'un moviment harmònic simple, l'equació diferencial del qual és

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (1)$$

Hem escrit aquesta expressió per a la coordenada vertical y perquè és l'única coordenada significativa en l'anàlisi d'aquest problema.

Primerament analitzarem la situació en què la barra es troba en equilibri, així establim l'equació d'equilibri de forces. Aquestes són:

- el pes de la barra de fusta (de massa m_b), dirigit cap avall:

$$P_b = m_b g \quad (2)$$

- el pes del metall (de massa m_m) que hi ha en l'extrem de la barra, dirigit cap avall:

$$P_m = m_m g \quad (3)$$

- i, per últim, l'empenta cap amunt que experimenta la barra en estar submergida en l'aigua. Segons el principi d'Arquimedes, l'empenta E correspon al pes del volum de líquid que desplaça la barra dins l'aigua, la densitat de la qual és ρ_a ,

$$E = V_{\text{despl}}\rho_a g \quad (4)$$

on hem usat que $V_{\text{despl}}\rho_a$ representa la massa de líquid desplaçat.

L'equació d'equilibri de forces és, doncs,

$$E = P_b + P_m \quad (5)$$

(totes aquestes forces se suposa que s'apliquen en el centre de massa de la barra). Com que

$$V_{\text{despl}} = S(\ell + \Delta\ell) \quad (6)$$

on S és la secció de la barra, de les eqs. (2)-(6) obtenim que

$$S(\ell + \Delta\ell)\rho_a = m_b + m_m \quad (7)$$

Si suposem que $\Delta\ell \ll \ell$ i $m_m \ll m_p$ podem escriure l'eq. (7) aproximadament com segueix

$$S\ell\rho_a = m_b \quad (8)$$

(és a dir, podem suposar que l'únic efecte de la massa de metall en l'extrem de la barra és el de mantenir-la en posició vertical).

(a) Si modifiquem la posició d'equilibri de la barra introduint-la un poc dins l'aigua (tal com es veu en la fig. 1), pel principi d'Arquimedes, a més de la força E , eq. (4), la barra experimentarà una força cap amunt

$$F_{\text{empenta}} = S(-y)\rho_a g \quad (9)$$

on Sy representa el nou volum d'aigua desplaçat. El signe menys només vol dir que la força deguda a l'empenta és de signe contrari al desplaçament y , que és cap avall, i F_{empenta} és, per tant, cap a dalt. Les forces que consideràvem anteriorment, eqs. (2)-(4), es cancel·len per l'equilibri abans de pertorbar el sistema, eq. (5). En pertorbar el sistema, l'única força fora de l'equilibri és F_{empenta} , eq. (9).

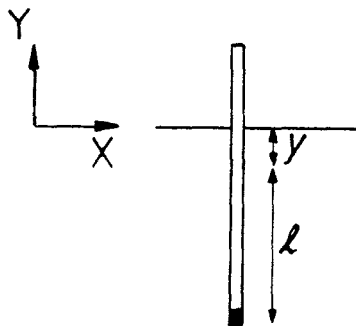


FIG. 1

Segons la segona llei de Newton, podem escriure la força resultant que actua sobre la barra com

$$F_{\text{empenta}} = m_b a = m_b \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (10)$$

Així, doncs, de les eqs. (9) i (10), tenim

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{Sg\rho_a}{m_b} y = 0 \quad (11)$$

i si utilitzem la relació donada per l'eq. (8), obtenim finalment,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{g}{\ell} y = 0 \quad (12)$$

Aquesta equació correspon a la d'un moviment harmònic simple, eq. (1), per tant, el moviment resultant de donar una petita empenta vertical a la barra semisubmergida és harmònic simple.

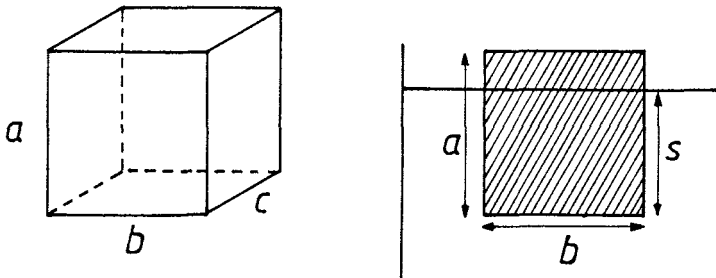
(b) Per comparació de l'eq. (12) amb l'eq. (1) és fàcil calcular la freqüència angular ω i, per tant, el període T del moviment harmònic simple:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} \quad (13)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (14)$$

Podem apreciar que el període no depèn de la massa de la barra, únicament de la porció submergida, de la mateixa manera que el període d'un pèndol simple no depèn de la seua massa, sinó únicament de la longitud.

6.6 Un bloc de fusta, la densitat del qual respecte de l'aigua és $\rho_{\text{rel}} = 0.75$, té les dimensions següents: $a = 1$ cm, $b = 2$ cm i $c = 2$ cm. Mentre està surant en l'aigua amb el costat a en la posició vertical, s'enfonsa un poc i se solta. Calculeu el període de l'oscil·lació resultant. (No considereu els efectes de la fricció entre la fusta i l'aigua).



$a = 1 \text{ cm}$, $b = c = 2 \text{ cm}$, $\rho_{\text{rel}} = 0.75$, $\rho_{\text{aigua}} = 1 \text{ g/cm}^3$
 període d'oscil·lació quan desplaçem verticalment el cos de l'equilibri?

Aquest problema és molt semblant al precedent (problema 6.5), amb l'excepció que canvia la geometria del cos que sura; per això, aprofitarem la discussió feta prèviament. En la situació inicial, quan el bloc està en equilibri, el seu pes

$$P = mg = abc \rho_{\text{fusta}} g \quad (1)$$

i l'empenta deguda al líquid desplaçat,

$$E = sbc \rho_{\text{aigua}} g \quad (2)$$

es compensen¹⁵

$$abc \rho_{\text{fusta}} g = sbc \rho_{\text{aigua}} g \quad (3)$$

Amb la qual cosa

$$s = a \frac{\rho_{\text{fusta}}}{\rho_{\text{aigua}}} = a \rho_{\text{rel}} \quad (4)$$

on s és la porció del bloc submergida quan hi ha equilibri, g és el valor de la gravetat terrestre i ρ_{rel} és la densitat relativa de la fusta respecte de l'aigua, $\rho_{\text{rel}} = \rho_{\text{fusta}}/\rho_{\text{aigua}}$.

Si desplaçem cap avall verticalment una porció y del bloc de fusta en l'aigua, la força que tendeix a restablir l'equilibri, pel principi d'Arquimedes, serà

$$F = -V_{\text{despl}} \rho_{\text{aigua}} g \quad (5)$$

on V_{despl} és el volum d'aigua desplaçat per la part del bloc de fusta que submergim quan pertorbem l'equilibri inicial. Per tant, $V_{\text{despl}} \rho_{\text{aigua}}$ és la massa de l'aigua desplaçada per la porció extra submergida del bloc de fusta (zona ombrejada de la fig. 1). El signe menys de l'eq. (5) hi apareix perquè la força F s'oposa al desplaçament del cos.

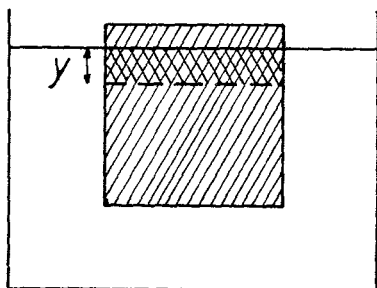


FIG. 1

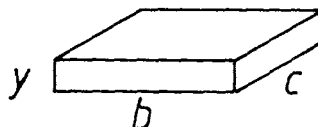


FIG. 2

¹⁵En les expressions (1) i (2), abc representa el volum total del bloc, mentre que sbc és el volum del bloc que està submergit.

Per altra banda, la llei de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, ens dona l'expressió de la força que actua sobre la fusta. Si la usem per a la coordenada vertical (que és la significativa en aquest problema) tindrem

$$F = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (6)$$

Igalant les expressions (5) i (6) per a la força neta (les forces en equilibri es cancel·len) que actua sobre el cos, tenim

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -V_{\text{despl}} \rho_{\text{aigua}} g \quad (7)$$

on la massa del bloc de fusta és $m = abc\rho_{\text{fusta}}$ i el volum extra d'aigua desplaçada, en funció de les dimensions del bloc de fusta, és $V_{\text{despl}} = ybc$, (fig. 2).

Reescrivim l'eq. (7), que descriu el moviment del cos, de la manera següent

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\rho_{\text{aigua}} g}{\rho_{\text{fusta}} a} y = 0 \quad (8)$$

o

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{g}{a\rho_{\text{rel}}} y = 0 \quad (9)$$

i comprovem que aquesta presenta la forma de l'equació d'un moviment harmònic simple. Si comparem l'eq. (9) amb l'equació típica del moviment harmònic simple,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (10)$$

obtenim que la freqüència angular ω del moviment que estem descrivint val

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a\rho_{\text{rel}}}} \quad (11)$$

El període d'oscil·lació d'aquest moviment harmònic simple, en funció de les dades inicials del problema, és

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a\rho_{\text{rel}}}{g}} = 0.17 \text{ s} \quad (12)$$

Però com que sabem que, segons l'eq. (4), la porció submergida en equilibri és $s = a\rho_{\text{rel}}$, podem comprovar que, igual que en el problema anterior (problema 6.5), el període només depèn de la porció submergida del sòlid, independentment de la seua geometria i de la seua massa:

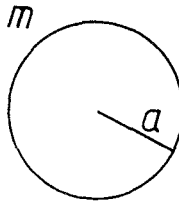
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{s}{g}} \quad (13)$$

Notem que hem fet tots els càlculs d'aquest problema i de l'anterior sense tenir en compte la fricció, la qual donaria lloc a un moviment harmònic amortit.

7

Gravitació

7.1 El potencial gravitatori en punts exteriors a una esfera massissa de radi a i massa m , a una distància r del seu centre, és $V(r) = -Gm/r$ quan $r > a$. El camp gravitatori en un punt interior a l'esfera és $\mathcal{G}(r) = -G(mr/a^3)\mathbf{u}_r$ quan $r < a$, on \mathbf{u}_r és un vector unitari radial dirigit cap a fora de l'esfera. (a) Quin origen de potencials s'hi ha pres? Calculeu: (b) el camp en l'exterior de l'esfera, i (c) el potencial en l'interior de l'esfera.



$$r > a: \quad V(r) = -Gm/r; \quad r < a: \quad \mathcal{G}(r) = -(Gmr/a^3)\mathbf{u}_r$$

- (a) origen de $V(r)$?
 (b) $\mathcal{G}(r)$ quan $r > a$?
 (c) $V(r)$ quan $r < a$?
-

(a) L'origen d'energies potencials correspondrà al punt r en què $V(r) = 0$. En l'expressió $V(r) = -Gm/r$, vàlida per al cas en què $r > a$, s'observa que el potencial s'anul·la quan $r \rightarrow \infty$. Això implica que l'origen d'energies potencials s'ha pres en l'infinit.

(b) Com que coneixem el potencial $V(r)$, per a calcular el camp gravitatori $\mathcal{G}(r)$ usem la relació

$$\mathcal{G}(r) = -\text{grad } V(r) = -\nabla V(r) \quad (1)$$

L'operador nabra, ∇ , pot considerar-se com un *vector* definit per

$$\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

en coordenades cartesianes. Quan aquest vector actua sobre un escalar, com és el potencial en aquest cas, s'obté el gradient de l'escalar. Tanmateix, en aquest problema $V(r)$ no està expressat en coordenades cartesianes (x, y, z) , sinó en funció de r , que és una coordenada esfèrica.

Les coordenades esfèriques (r, ϑ, φ) , representades en la fig. 1 al costat de les cartesianes, simplifiquen la descripció de problemes que presenten simetria esfèrica, com en aquest cas. La relació entre les coordenades esfèriques i les cartesianes és

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad (3)$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi \quad (4)$$

$$z = r \cos \vartheta \quad (5)$$

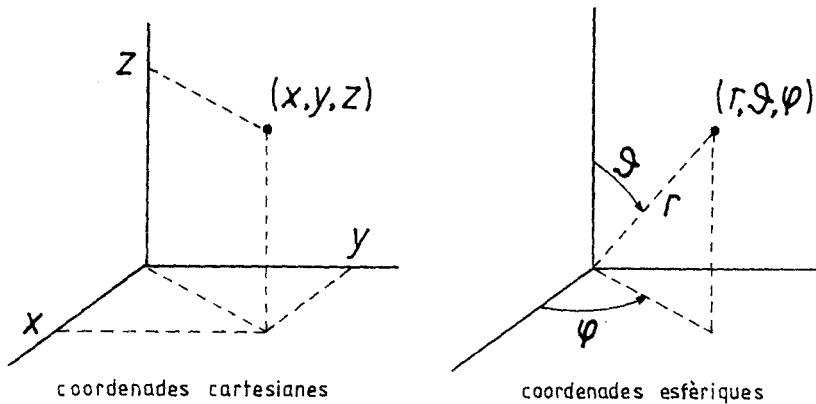


FIG. 1

L'operador nabla es defineix en coordenades esfèriques com

$$\nabla \equiv u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + u_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (6)$$

on u_r , u_ϑ i u_φ són els vectors unitaris corresponents a les coordenades (r, ϑ, φ) . Ara podem fer actuar ∇ , donat per l'eq. (6), sobre el potencial $V(r)$ quan $r > a$,

$$\nabla V(r) = \nabla \left(-\frac{Gm}{r} \right) = u_r \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{Gm}{r} \right) = -Gm u_r \frac{\partial(1/r)}{\partial r} = G \frac{m}{r^2} u_r \quad (7)$$

Els termes corresponents a u_ϑ i u_φ no apareixen en l'expressió anterior perquè el potencial no depèn de les variables ϑ i φ , per tant, en fer les corresponents derivades, aquestes són nul·les. Si recordem l'eq. (1), obtenim que

$$\mathcal{G}(r) = -G \frac{m}{r^2} u_r \quad (r > a) \quad (8)$$

Com podem apreciar, el camp gravitatori en un punt exterior a una esfera homogènia massissa és idèntic al camp gravitatori creat per una partícula puntual de la mateixa massa localitzada en el centre de l'esfera.

(c) Com que coneixem el camp $\mathcal{G}(r)$, per a calcular el potencial $V(r)$ usarem la mateixa relació que abans, eq. (1). Ara, en el cas en què $r < a$, tindrem

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{Gmr}{a^3} u_r = -u_r \frac{\partial V(r)}{\partial r} - u_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial V(r)}{\partial \vartheta} - u_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V(r)}{\partial \varphi} \quad (9)$$

I si hi igulem component a component escriurem

$$u_r: \quad \frac{Gmr}{a^3} = \frac{\partial V(r)}{\partial r} \quad (10)$$

$$u_{\vartheta}: \quad \frac{\partial V(r)}{\partial \vartheta} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(r) \text{ no és funció de } \vartheta \quad (11)$$

$$u_{\varphi}: \quad \frac{\partial V(r)}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(r) \text{ no és funció de } \varphi \quad (12)$$

Com que el potencial només depèn de r , segons queda confirmat per les eqs. (10)-(12), la derivada parcial de l'eq. (10) pot escriure's com una derivada total i així tindrem que

$$V(r) = \frac{Gm}{a^3} \int r \, dr = \frac{Gmr^2}{2a^3} + \text{constant} \quad (r < a) \quad (13)$$

Com que el potencial ha de ser continu en tots els punts de l'espai, també haurà de ser-ho en la superfície de l'esfera. És a dir, en $r = a$ es verificarà

$$(\text{potencial interior, en } r = a) = (\text{potencial exterior, en } r = a) \quad (14)$$

o siga,

$$\frac{Gma}{2a^3} + \text{constant} = -\frac{Gm}{a} \quad (15)$$

i de l'eq. (15) es dedueix el valor de la constant que apareixia en la integral indefinida de l'eq. (13),

$$\text{constant} = -\frac{3Gm}{2a} \quad (16)$$

En definitiva, el potencial en l'interior de l'esfera massissa i homogènia s'escriurà de la manera següent

$$V(r) = G\frac{m}{2a^3}(r^2 - 3a^2) \quad (r < a) \quad (17)$$

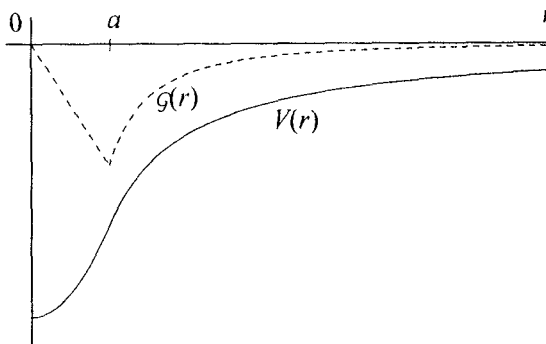


FIG. 2

En la figura 2 representem el comportament del potencial i del camp gravitatori, respectivament, com a funció de la distància radial.

7.2 Calculeu on es troba la posició d'equilibri en el camp gravitatori creat per dos astres A i B, amb els seus centres separats $3 \cdot 10^6$ km, si el diàmetre de A és doble del de B, (a) quan les densitats dels dos són les mateixes, i (b) quan les masses dels dos són iguals.

$$d_A = 2d_B, L = 3 \cdot 10^6 \text{ km} = 3 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$\text{posició d'equilibri? } \begin{cases} (a): & \rho_A = \rho_B = \rho \\ (b): & m_A = m_B = m \end{cases}$$

La posició d'equilibri es trobarà en aquell punt en què el camp gravitatori creat per l'astre A siga igual i de sentit contrari al camp gravitatori creat per l'astre B.¹⁶

Considerarem cada astre com una esfera massissa i homogènia. El camp gravitatori creat per una esfera massissa i homogènia en un punt exterior situat a una distància r del seu centre és

$$\mathcal{G}(r) = -G \frac{m}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (1)$$

on m és la seua massa i \mathbf{u}_r és un vector unitari dirigit des del centre de l'esfera fins al punt on es calcula el camp.

En el nostre cas suposarem que el punt que ens interessa es troba a una distància x del centre de l'astre A. La situació dels astres i les distàncies dels seus centres al punt d'equilibri apareixen dibuixades en la figura 1.

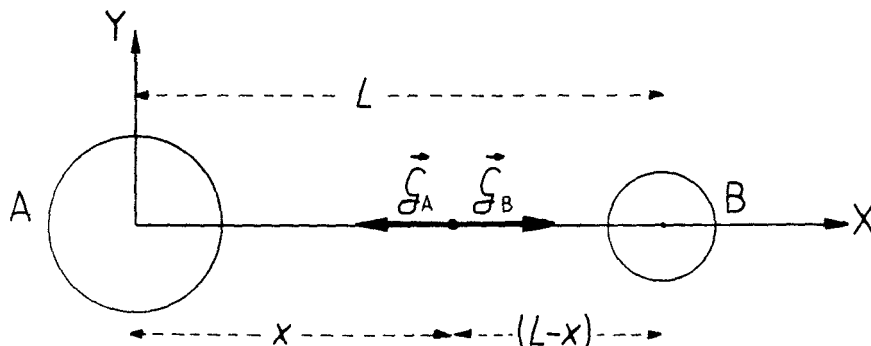


FIG. 1

¹⁶En aquest problema únicament estem interessats en el punt d'equilibri degut a la interacció gravitatori produïda pels dos cossos en repòs. Si tinguérem en compte que els dos astres estan girant al voltant del seu centre de massa, i en fer la descripció des del sistema de referència que gira amb els astres, trobaríem que hi ha cinc punts en què les forces gravitacionals degudes als astres estan compensades per la força centrífuga típica de tot sistema accelerat. Aquests cinc punts d'equilibri s'anomenen punts de Lagrange, tres dels quals es troben en la línia recta que uneix els dos astres i els altres dos es troben en els vèrtexs de sengles triangles equilàters que formen amb els astres, en el pla de la seua òrbita. Els tres primers punts de Lagrange corresponen a una situació d'equilibri inestable, mentre que els altres dos corresponen a un equilibri estable si el quocient entre la massa de l'astre menys massiu i la del més massiu és ≤ 0.04 . Per a una discussió més detallada i formal dels punts de Lagrange, podeu consultar la secció 15.B del llibre *Dinàmica clàssica*, d'Antonio Rañada (Alianza, Madrid, 1990).

Així, doncs, els camps gravitatoris creats per A i per B respectivament, en un punt que es troba en la línia d'unió dels centres dels dos astres, a una distància x de l'astre A i $(L - x)$ de l'astre B, són

$$\mathcal{G}_A = -G \frac{m_A}{x^2} \mathbf{u}_{r_A} \quad (\text{dirigit cap a A}) \quad (2)$$

$$\mathcal{G}_B = -G \frac{m_B}{(L - x)^2} \mathbf{u}_{r_B} \quad (\text{dirigit cap a B}) \quad (3)$$

on m_A és la massa de l'astre A i \mathbf{u}_{r_A} és el vector unitari dirigit des de l'astre A cap al B (anàlogament per a m_B i \mathbf{u}_{r_B}).

Quan hi ha equilibri, els mòduls dels dos camps gravitatoris han de ser iguals (ja hem vist que els sentits són oposats). Això implica que

$$G \frac{m_A}{x^2} = G \frac{m_B}{(L - x)^2} \quad (4)$$

(a) Si fem la relació massa = volum·densitat, escriurem

$$m_A = \frac{4}{3} \pi R_A^3 \rho_A = \frac{4}{3} \pi R_A^3 \rho \quad (5)$$

$$m_B = \frac{4}{3} \pi R_B^3 \rho_B = \frac{4}{3} \pi R_B^3 \rho \quad (6)$$

que, després de substituir en l'eq. (4), dóna la següent relació entre els radis dels astres, R_A i R_B , i les distàncies, x i $(L - x)$,

$$\frac{R_A^3}{x^2} = \frac{R_B^3}{(L - x)^2} \quad (7)$$

Si usem la relació entre els diàmetres, $d_A = 2d_B$ i, per tant, $R_A = 2R_B$, tenim

$$\frac{8}{x^2} = \frac{1}{(L - x)^2} \quad (8)$$

que, després de substituir el valor de L , dóna per al punt d'equilibri el valor $x = 2.2 \cdot 10^9$ m.

(b) Si en comptes de ser $\rho_A = \rho_B = \rho$ fos $m_A = m_B = m$, l'eq. (4) ens donaria ara que

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(L - x)^2} \quad (9)$$

la solució de la qual és $x = L/2$. És a dir, quan les dues masses són iguals, la posició d'equilibri es troba just en el punt mitjà de la distància que separa els dos astres.

També hi ha una altra solució a l'eq. (8) i una altra a l'eq. (9) que, encara que estan en la línia que uneix els astres, no ens serveixen com a punts d'equilibri, ja que no es troben entre A i B. En aquests casos els camps gravitatoris \mathcal{G}_A i \mathcal{G}_B no tindrien sentits oposats, amb la qual cosa no podrien anul·lar-se.

7.3 (a) A quina profunditat dins la Terra cal baixar perquè un cos pese el mateix que a h metres sobre la seua superfície? (b) A quina altura sobre la superfície de la Terra té un cos $3/4$ del seu pes sobre la superfície terrestre?

$M =$ massa de la Terra $= 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R =$ radi de la Terra $= 6.37 \cdot 10^6$ m

(a) valor de H perquè el pes a l'altura h siga el mateix que a la profunditat H ?

(b) valor de a perquè el pes a l'altura a siga $3/4$ del seu pes sobre la superfície terrestre?

El pes d'un cos és la força amb la qual és atret per la Terra, i aquesta força s'obté si multipliquem la intensitat $\mathcal{G}(r)$ del camp gravitatori terrestre per la massa m del cos:

$$F(r) = m\mathcal{G}(r) \quad (1)$$

Si en l'expressió prèvia tenim en compte que el camp gravitatori i la força deguts a una massa amb simetria esfèrica (com pot suposar-se que és la Terra) només depenen de la distància radial al centre de la distribució esfèrica de massa, i van dirigits cap al centre del sistema de masses que crea el camp, escriurem

$$F(r) = m\mathcal{G}(r) \quad (2)$$

on hem prescindint del caràcter vectorial de les magnituds que apareixien en l'eq. (1).

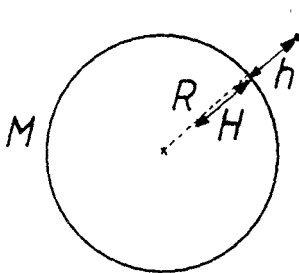


FIG. 1

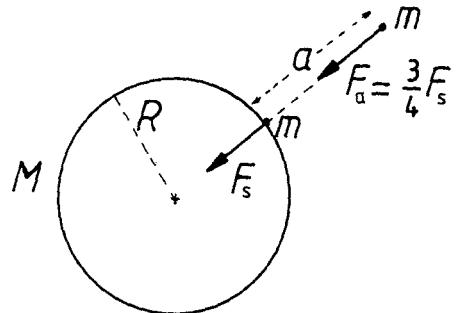


FIG. 2

(a) Si considerem la Terra com si fóra una esfera massissa de radi R i massa M , el mòdul del camp gravitatori en un punt h situat en l'exterior de l'esfera (fig. 1) és

$$r > R: \quad \mathcal{G} = G \frac{M}{r^2} = G \frac{M}{(R+h)^2} \quad (3)$$

on hem usat que la distància r des del centre de la Terra fins al punt en qüestió val $R+h$.

Si el punt es troba en l'interior, a una profunditat H de la superfície (fig. 1)

$$r < R: \quad \mathcal{G} = G \frac{M}{R^3} r = G \frac{M}{R^3} (R-H) \quad (4)$$

on $(R-H)$ representa la distància des del centre de la Terra fins al punt en qüestió. Les eqs. (3) i (4) poden obtenir-se a partir dels resultats del problema 7.1.

Com que el pes, $m\mathcal{G}$, en la posició h ha de ser igual al pes a la posició H , de les eqs. (2)-(4) tenim que

$$Gm \frac{M}{(R+h)^2} = Gm \frac{M}{R^3} (R-H) \quad (5)$$

D'aquesta equació obtenim que la profunditat que busquem val, en valor absolut,

$$H = R \left[1 - \frac{R^2}{(R+h)^2} \right] \quad (6)$$

Per a cossos pròxims a la superfície terrestre tenim que $h \ll R$. En aquest cas, ja que $h/R \ll 1$, farem un desenvolupament en potències de h/R en l'eq. (6)

$$\begin{aligned} H &= R \left[1 - \frac{R^2}{R^2(1+h/R)^2} \right] = R \left[1 - \frac{1}{(1+h/R)^2} \right] \\ &\cong R \left[1 - \left(1 - 2\frac{h}{R} + \dots \right) \right] = 2h \end{aligned} \quad (7)$$

En conseqüència, si usem l'aproximació $h \ll R$, la profunditat H que busquem valdrà $H \cong 2h$.

(b) Volem que el pes F_a en un punt a siga $3/4$ del pes en un punt situat sobre la superfície terrestre, F_S (fig. 2)

$$F_a = \frac{3}{4} F_S \quad (8)$$

L'expressió per al mòdul de la força en cadascú dels punts considerats vindrà donada per les eqs. (2) i (3) quan $h = 0$ i quan $h = a$, respectivament,

$$F_S = G \frac{mM}{R^2} \quad (9)$$

$$F_a = G \frac{mM}{(R+a)^2} \quad (10)$$

per això, de les eqs. (8)-(10) tenim

$$G \frac{mM}{(R+a)^2} = \frac{3}{4} G \frac{mM}{R^2} \quad (11)$$

que dóna

$$(R+a)^2 = \frac{4}{3} R^2 \quad \Rightarrow \quad a = R \left(-1 \pm \sqrt{4/3} \right) \quad (12)$$

La solució $a < 0$ no serveix, ja que ens interessa la zona exterior a la Terra (i, sobretot, estem usant una fórmula per al camp gravitatori que només serveix per a $r > R$). Així, doncs,

$$a = R \left(-1 + \sqrt{4/3} \right) = 985442.43 \text{ m} \quad (13)$$

7.4 La massa de la Lluna és aproximadament $6.7 \cdot 10^{22}$ kg i el seu radi $R = 1.6 \cdot 10^6$ m. (a) Quina distància recorrerà un cos en 1 s de caiguda lliure cap a la Lluna si s'abandona en un punt pròxim a la seua superfície? (b) Quin seria el pes en la Lluna d'una persona que en la Terra pese 700 N? (c) Quin serà el període d'oscil·lació, en la superfície lunar, d'un pèndol que bat segons en la superfície terrestre? (Massa de la Terra = $6 \cdot 10^{24}$ kg, radi de la Terra = $6.37 \cdot 10^6$ m).

$$m_L = 6.7 \cdot 10^{22} \text{ kg}, R_L = 1.6 \cdot 10^6 \text{ m}, m_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

(a) distància recorreguda durant 1 s de caiguda lliure a la Lluna?

(b) si $P_T = 700 \text{ N}$, P_L ?

(c) si $T_T = 2 \text{ s}$, T_L ?

(a) El moviment de caiguda lliure és un moviment uniformement accelerat, per al qual es verifica l'expressió cinemàtica

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

que relaciona la posició s del cos al cap d'un temps t amb la posició inicial s_0 , la velocitat inicial v_0 i l'acceleració a . En aquest cas: $v_0 = 0 \text{ m/s}$, $t = 1 \text{ s}$, $a = g_L$ (gravetat lunar) i per a calcular l'espai s recorregut, prendrem $s_0 = 0 \text{ m}$. Si suposem que el cos es troba molt pròxim a la superfície lunar, prendrem la gravetat lunar que experimenta el cos com una constant (independent de l'altura) igual al valor de g_L sobre la superfície de la Lluna. Aquest valor, en mòdul, és el valor de la intensitat del camp gravitatori de la Lluna sobre la seua superfície

$$g_L = G \frac{m_L}{R_L^2} = 1.75 \text{ m/s}^2 \quad (2)$$

G és la constant de la gravitació universal i m_L i R_L , respectivament, són la massa i el radi de la Lluna. De l'eq. (1) obtenim que la distància recorreguda durant 1 s és

$$s = \frac{1}{2} g_L t^2 = 0.87 \text{ m} \quad (3)$$

(b) Els pesos en la Lluna i en la Terra d'una massa m són, respectivament,

$$P_L = m g_L \quad (4)$$

$$P_T = m g_T \quad (5)$$

i, encara que la gravetat sí que depèn de la situació del cos, la seua massa n'és independent; per tant, si aïllem m de les eqs. (4) i (5), tenim que

$$P_L = P_T \frac{g_L}{g_T} = 125 \text{ N} \quad (6)$$

on hem usat els valors $g_L = 1.75 \text{ m/s}^2$ i $g_T = 9.8 \text{ m/s}^2$.

(c) Si un pèndol bat segons significa que tarda 1 s a anar d'un extrem a l'altre de la seua oscil·lació, per això, el seu període sobre la superfície de la Terra serà $T_T = 2$ s, tal com representa esquemàticament la figura 1.

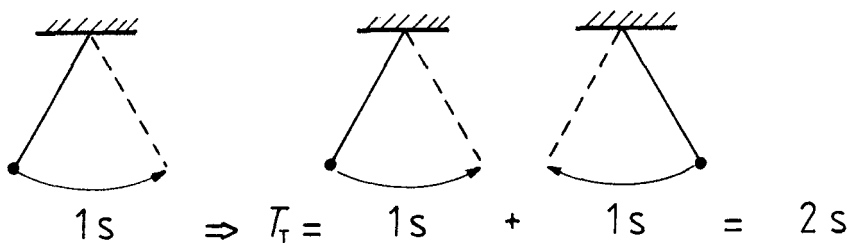


FIG. 1

Per a un pèndol simple de longitud ℓ el seu període és

$$T_T = 2\pi\sqrt{\ell/g_T} \quad (\text{a la Terra}) \quad (7)$$

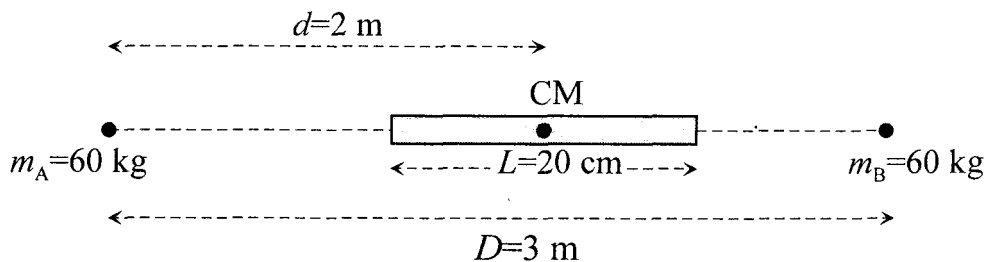
$$T_L = 2\pi\sqrt{\ell/g_L} \quad (\text{a la Lluna}) \quad (8)$$

Com que, per definició, el pèndol simple és inextensible, hem considerat que les seues longituds a la Terra i a la Lluna són les mateixes. De les eqs. (7) i (8) tenim

$$\frac{T_L}{T_T} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} \quad \Rightarrow \quad T_L = T_T \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = 4.7 \text{ s} \quad (9)$$

És a dir, el mateix pèndol va més lent a la Lluna que a la Terra, ja que $T_L > T_T$.

7.5 Una vareta prima homogènia, de 20 cm de longitud i que té una densitat lineal de massa $\lambda = 5$ g/cm, es troba alineada entre dues masses puntuals idèntiques de 60 kg cadascuna i que estan separades entre elles una distància de 3 m. Calculeu la força que exerceixen les masses puntuals sobre la vareta quan el seu centre de massa es troba a 2 m d'una de les masses puntuals.



$$L = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \lambda = 5 \text{ g/cm} = 0.5 \text{ kg/m}$$

$$m_A = m_B = 60 \text{ kg}, D = 3 \text{ m}, d = 2 \text{ m}$$

F sobre la vareta, deguda a m_A i m_B ?

Disposen la vareta i les masses al llarg de l'eix X , tal com representa la fig. 1. La força F que exerceixen les dues masses sobre la vareta serà, pel principi de superposició, la suma de les forces F_A i F_B que cada massa, m_A i m_B respectivament, exerceix sobre la vareta

$$F = F_A + F_B \quad (1)$$

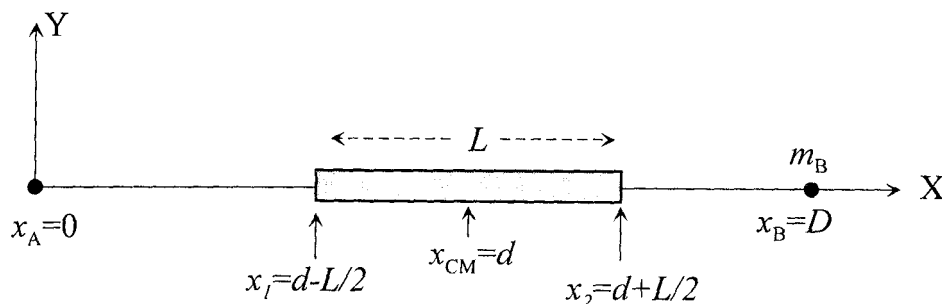


FIG. 1

La força amb què la massa m_A actua sobre un element infinitesimal de massa dM de la vareta, que té coordenada x (fig. 2) és

$$dF_A = -G \frac{m_A dM}{(x - x_A)^2} \mathbf{i} \quad (2)$$

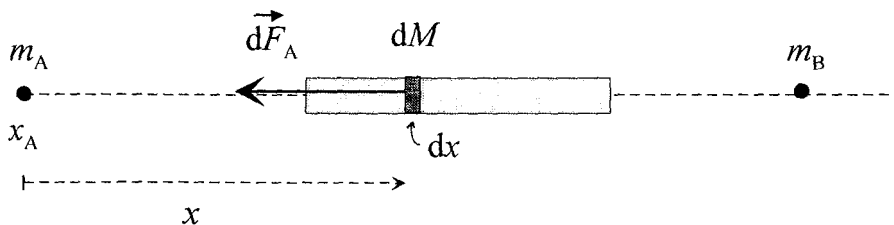


FIG. 2

on $(x - x_A)$ és la distància entre la massa puntual m_A i l'element de massa dM . Com que la vareta és homogènia, $dM = \lambda dx$, i a més $x_A = 0$, l'eq. (2) s'escriu

$$dF_A = -G \frac{m_A \lambda dx}{x^2} \mathbf{i} \quad (3)$$

La força que exerceix m_A sobre tota la vareta s'obté integrant dF_A , eq. (3), d'un extrem a l'altre de la vareta:

$$\begin{aligned} F_A &= \int dF_A = -Gm_A\lambda i \int_{d-L/2}^{d+L/2} \frac{dx}{x^2} = Gm_A\lambda i \left. \frac{1}{x} \right|_{d-L/2}^{d+L/2} \\ &= Gm_A\lambda i \left(\frac{1}{d+L/2} - \frac{1}{d-L/2} \right) = -\frac{Gm_A\lambda L}{d^2 - L^2/4} i \end{aligned} \quad (4)$$

Per a calcular la força que m_B exerceix sobre la vareta, seguim un raonament anàleg. La força infinitesimal sobre l'element de massa dM , que té coordenada x , és (fig. 3)

$$dF_B = G \frac{m_B dM}{(x_B - x)^2} i = G \frac{m_B \lambda dx}{(D - x)^2} i \quad (5)$$

on hem usat que $x_B = D$ i $dM = \lambda dx$.

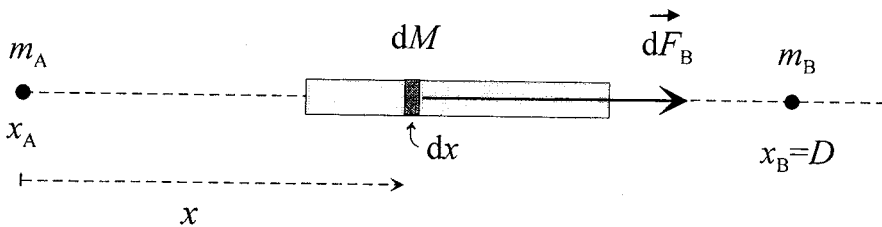


FIG. 3

La força F_B sobre tota la vareta serà

$$\begin{aligned} F_B &= \int dF_B = Gm_B\lambda i \int_{d-L/2}^{d+L/2} \frac{dx}{(D-x)^2} \\ &= Gm_B\lambda i \left. \frac{1}{D-x} \right|_{d-L/2}^{d+L/2} = G \frac{m_B\lambda L}{(D-d)^2 - L^2/4} i \end{aligned} \quad (6)$$

A partir de les eqs. (1), (4) i (6) obtenim que la força que les dues masses exerceixen sobre la vareta val

$$F = -G\lambda L \left(\frac{m_A}{d^2 - L^2/4} - \frac{m_B}{(D-d)^2 - L^2/4} \right) i \quad (7)$$

i, com que $m_A = m_B = m$, tenim

$$\begin{aligned} F &= -G\lambda L m \left(\frac{1}{d^2 - L^2/4} - \frac{1}{(D-d)^2 - L^2/4} \right) i \\ &= -G\lambda L m D \frac{D-2d}{(d^2 - L^2/4)[(D-d)^2 - L^2/4]} i = 3.04 \cdot 10^{-10} \text{ N } i \end{aligned} \quad (8)$$

Podem comparar aquesta força amb el resultat (erroni) que s'obtidria si, en comptes de considerar la vareta com una distribució de massa, se suposara que tota la seua massa està concentrada en el seu centre de massa. En aquest cas, la força amb què les masses puntuals m_A i m_B , situades en $x_A = 0$ i $x_B = D$, respectivament, actuen sobre la massa M hipotèticament situada en $x_{CM} = d$, seria

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= \mathbf{F}'_A + \mathbf{F}'_B = -G \frac{m_A M}{(x_{CM} - x_A)^2} \mathbf{i} + G \frac{m_B M}{(x_B - x_{CM})^2} \mathbf{i} \\ &= -G \frac{m_A M}{d^2} \mathbf{i} + G \frac{m_B M}{(D - d)^2} \mathbf{i} \end{aligned} \quad (9)$$

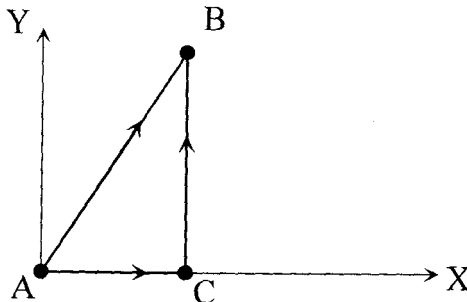
Com que $M = \lambda L$, perquè es tracta d'una vareta homogènia, en substituir-hi valors obtenim

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= -Gm\lambda L \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(D - d)^2} \right] \mathbf{i} \\ &= -Gm\lambda L D \frac{D - 2d}{d^2(D - d)^2} \mathbf{i} = 3.00 \cdot 10^{-10} \text{ N } \mathbf{i} \end{aligned} \quad (10)$$

Com podem veure, no hi ha molta diferència entre el resultat exacte, eq. (8), i el resultat aproximat, eq. (10). Això és degut al fet que la dimensió de la vareta és petita en comparació amb les distàncies a què es troben les masses m_A i m_B , la qual cosa fa que no siga una mala aproximació considerar la vareta com un punt, en comparació amb les distàncies típiques del problema.

7.6 En una regió de l'espai en què el camp de forces té la forma $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$, una massa puntual es desplaça des del punt $A=(0,0)$ fins al punt $B=(5,9)$. Les expressions anteriors estan escrites en el SI d'unitats. Calculeu el treball realitzat per la força sobre la massa puntual al llarg dels desplaçaments següents:

- si el recorregut és ACB, on $C=(5,0)$.
- si el recorregut es fa al llarg de la recta AB.



$A=(0,0)$ m, $B=(5,9)$ m, $C=(5,0)$ m

$\mathbf{F} = (xi + xyj)$ N

(a) W_{ACB} ?

(b) W_{AB} ?

El treball fet per la força \mathbf{F} per a desplaçar la partícula d'un punt a altre val

$$W = \int \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (1)$$

on la integral es fa al llarg del camí que recorre la partícula; $d\mathbf{r}$ és un element infinitesimal d'aquest camí.

(a) En aquest cas dividirem el treball total W_{ACB} en dues contribucions

$$W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB} \quad (2)$$

de manera que en la primera contribució, W_{AC} , el camí correspon a la recta AC, mentre que en la segona contribució, W_{CB} , el camí correspon a la recta CB.

A partir de les eqs. (1) i (2), escrivim

$$W_{ACB} = \int_A^C \mathbf{F} d\mathbf{r} + \int_C^B \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (3)$$

(recta AC) (recta CB)

El camí seguit en la primera integral correspon a $y = \text{constant}$, per això $dy = 0$ i $d\mathbf{r} = (dx, 0)$. Anàlogament, en la segona integral se segueix un camí en què $x = \text{constant}$, per tant $dx = 0$ i $d\mathbf{r} = (0, dy)$.

Quan substituïm l'expressió de la força \mathbf{F} i de $d\mathbf{r}$ en cada cas, obtenim:

$$\begin{aligned} W_{ACB} &= \int_A^C (xi + xyj) dx i + \int_C^B (xi + xyj) dy j = \int_{(0,0)}^{(5,0)} x dx + \int_{(5,0)}^{(5,9)} y dy \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_{(0,0)}^{(5,0)} + x \frac{y^2}{2} \Big|_{(5,0)}^{(5,9)} = \frac{5^2}{2} + 5 \frac{9^2}{2} = 215 \text{ J} \end{aligned} \quad (4)$$

(b) Ara hem de calcular

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (5)$$

fent la integració al llarg del camí que va des de A fins a B. Aquest camí correspon a una recta que té ordenada en l'origen igual a zero i el pendent de la qual val 9/5 (ja que pendent = $\tan \theta = 9/5$, tal com s'il·lustra en la fig. 1).

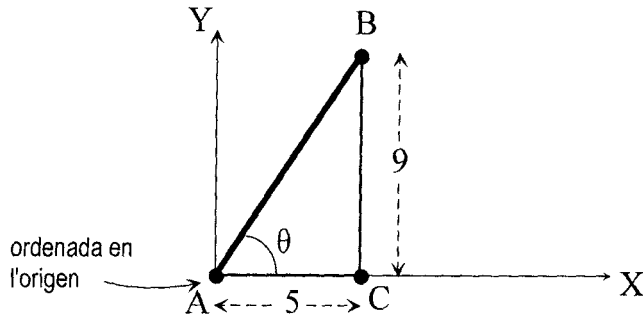


FIG. 1

Així, doncs, el camí d'integració de A a B és la recta $y = \frac{9}{5}x$; en conseqüència, $dy = \frac{9}{5}dx$.

Si reescrivim els vectors que apareixen en l'eq. (5) en termes dels seus components cartesianes,

$$W_{AB} = \int_A^B (xi + xyj)(dxi + dyj) \quad (6)$$

i reemplaçem y i dy per $\frac{9}{5}x$ i $\frac{9}{5}dx$, respectivament, tindrem una integral en funció d'una sola variable (la variable x en aquest cas), per això només usem els valors de x en els límits d'integració:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_0^5 (xi + \frac{9}{5}x^2j)(dxi + \frac{9}{5}dxj) = \int_0^5 \left[x + \left(\frac{9}{5}\right)x^2 \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{81}{75}x^3 \Big|_0^5 = 251.28 \text{ J} \end{aligned} \quad (7)$$

Com podem apreciar, $W_{ACB} \neq W_{AB}$. És a dir, el treball realitzat per la força F depèn del camí seguit, la qual cosa implica que $F = xi + xyj$ no és una força conservativa.

Podríem haver arribat a la mateixa conclusió calculant tan sols el rotacional de F

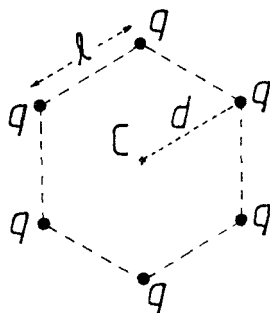
$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 0 \end{vmatrix} = yk \quad (8)$$

el qual, com que no és nul, indica que la força F no és conservativa.

8

Camp i potencial elèctrics

8.1 En els vèrtexs d'un hexàgon regular col·loquem càrregues elèctriques positives iguals, de valor q . (a) Quin és el potencial en el centre de l'hexàgon? (b) Si posem una càrrega fixa en el centre de l'hexàgon, quin valor haurà de tenir aquesta perquè tot el sistema de càrregues estiga en equilibri?



q = càrrega elèctrica en cada vèrtex de l'hexàgon, ℓ = costat de l'hexàgon

(a) V_C = potencial en el centre C de l'hexàgon?

(b) Q = càrrega en C perquè hi haja equilibri en el sistema?

(a) Com que es tracta d'un hexàgon regular, la distància des de qualsevol vèrtex fins al centre C de l'hexàgon és la mateixa i coincideix amb el valor del costat de l'hexàgon, que anomenarem ℓ .

Per a determinar el potencial elèctric V_C en el centre de l'hexàgon, usarem el principi de superposició

$$V_C = \sum_i V_i \quad (1)$$

on V_i és el potencial creat en el punt C per cada càrrega q_i . Les sis càrregues són iguals i es troben a la mateixa distància del punt C , per això $V_i = V$, ($i = 1, \dots, 6$). El potencial creat per una càrrega puntual q en un punt situat a una distància d és

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d} \quad (2)$$

Per la geometria del problema sabem que $d = \ell$ per a totes les càrregues dels vèrtexs, per tant, de les eqs. (1) i (2) obtenim

$$V_C = 6V = \frac{3q}{2\pi\epsilon_0\ell} \quad (3)$$

Noteu que per a resoldre aquest apartat hem considerat que les càrregues estaven fixes en els vèrtexs de l'hexàgon, perquè si tingueren llibertat per a moure's, s'allunyarien les unes de les altres, a causa de la repulsió coulombiana.

(b) L'equilibri del sistema implica que: (i) la suma de les forces que actuen sobre cada càrrega dels vèrtexs de l'hexàgon ha de ser nul·la, i (ii) el resultat de les forces que actua sobre la càrrega Q que haurem de col·locar en el centre C de l'hexàgon ha de ser també nul·la. La segona d'aquestes dues condicions es compleix automàticament, i

independentment del valor de la càrrega Q que col·loquem, ja que el camp elèctric creat en el punt C per cada càrrega q és igual i de sentit oposat al causat per la càrrega q que té en el vèrtex de davant (fig. 1).¹⁷ El camp \mathcal{E}_i creat per cada càrrega q_i està dirigit cap a fora de la càrrega si aquesta és positiva. La força \mathbf{F}_C resultant sobre la càrrega Q situada en el centre de l'hexàgon serà igual a zero, ja que

$$\mathbf{F}_C = Q\mathcal{E}_C \quad (4)$$

i el camp elèctric total en el punt C és nul,

$$\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_{1C} + \mathcal{E}_{2C} + \mathcal{E}_{3C} + \mathcal{E}_{4C} + \mathcal{E}_{5C} + \mathcal{E}_{6C} = 0 \quad (5)$$

En l'expressió anterior, \mathcal{E}_{iC} representa el camp elèctric creat per la càrrega i en el punt C.

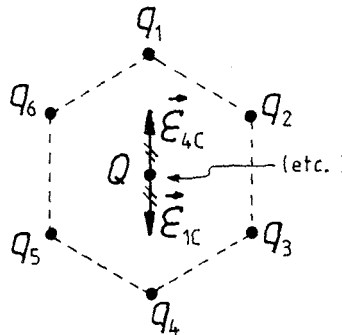


FIG. 1

Així, doncs, per a estudiar l'equilibri del sistema analitzarem com aconseguir l'equilibri sobre una càrrega q col·locada en un vèrtex qualsevol de l'hexàgon. Aquesta càrrega està sotmesa als camps elèctrics de la resta de les càrregues q en els cinc vèrtexs restants de l'hexàgon, i també al camp elèctric creat per la càrrega Q situada en el centre de l'hexàgon. A causa de la simetria del sistema, les condicions que obtindrem per a una càrrega q qualsevol, serveixen per a la resta de les càrregues q .

Equilibri de la càrrega q_1 : La força total \mathbf{F}_1 sobre la càrrega q_1 ha de ser nul·la

$$0 = \mathbf{F}_1 = \sum_{i \neq 1} \mathbf{F}_i = \sum_{i \neq 1} q_1 \mathcal{E}_i = q_1 \sum_{i \neq 1} \mathcal{E}_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i \neq 1} \mathcal{E}_i = 0 \quad (6)$$

on \mathcal{E}_i ($i = 2, 3, 4, 5, 6, Q$) són els camps elèctrics creats per les càrregues q_i ($i = 2, \dots, 6$) i per la càrrega Q en el punt on es troba la càrrega q_1 (fig. 2). L'eq. (6) implica que

$$\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5 + \mathcal{E}_6 + \mathcal{E}_Q = 0 \quad (7)$$

¹⁷ És interessant notar que si disposem un conjunt de N càrregues iguals en els vèrtexs d'un polígon regular, a més del punt central hi ha N punts, simètricament disposats en el pla del polígon, on el camp elèctric resultant és nul [S. D. Baker, "On the field of equal charges at the corners of a regular polygon", *American Journal of Physics* 52 (1984) 265].

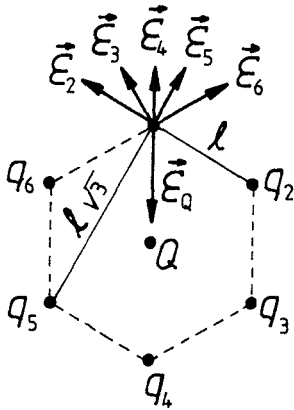


FIG. 2

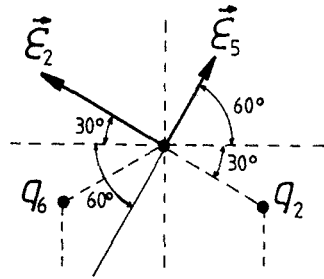


FIG. 3

Per simetria (fig. 3), els components horitzontals dels camps \mathcal{E}_2 i \mathcal{E}_6 , i \mathcal{E}_3 i \mathcal{E}_5 , s'anul·len mútuament. \mathcal{E}_4 i \mathcal{E}_Q no tenen component horitzontal. Per tant, només hi ha el component vertical de l'eq. (7), que val

$$\mathcal{E}_2 \sin 30^\circ + \mathcal{E}_3 \sin 60^\circ + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5 \sin 60^\circ + \mathcal{E}_6 \sin 30^\circ + \mathcal{E}_Q = 0 \tag{8}$$

Els mòduls dels camps elèctrics creats per les càrregues puntuals sobre la càrrega q_1 són:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{d_{21}^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ell^2} = \mathcal{E}_6 \tag{9}$$

$$\mathcal{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{d_{31}^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (\ell)^2} = \mathcal{E}_5 \tag{10}$$

$$\mathcal{E}_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_5}{d_{41}^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2\ell)^2} \tag{11}$$

$$\mathcal{E}_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d_{Q1}^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell^2} \tag{12}$$

on d_{jk} representa la distància entre les càrregues q_j i q_k ($j, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, Q; j \neq k$). Aquestes distàncies s'obtenen de manera immediata a partir de la fig. 4.

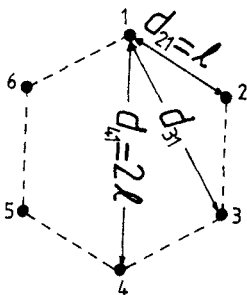


FIG. 4

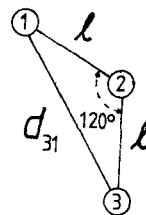


FIG. 5

La distància d_{31} es pot calcular emprant el teorema del cosinus en el triangle asenyalat en la fig. 5,

$$d_{31}^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2\ell\ell \cos 120^\circ \quad \Rightarrow \quad d_{31} = \ell\sqrt{3} \quad (13)$$

De les eqs. (8)-(12), obtenim

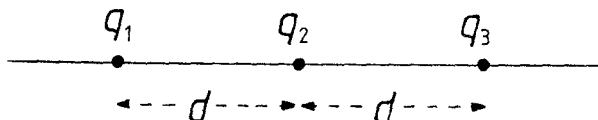
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(2\frac{q}{\ell^2} \sin 30^\circ + 2\frac{q}{3\ell^2} \sin 60^\circ + \frac{q}{4\ell^2} \right) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0\ell^2} \quad (14)$$

i d'aquesta equació obtenim que

$$Q = -q \left(2 \sin 30^\circ + \frac{2}{3} \sin 60^\circ + \frac{1}{4} \right) = -1.83q \quad (15)$$

Com veiem, la càrrega Q ha de ser negativa, cosa que està d'acord amb el dibuix que hem fet de la direcció del camp \mathcal{E}_Q en la fig. 2 (el qual està dirigit cap a la càrrega central Q).

8.2 Tres càrregues, $q_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ C, $q_2 = -10^{-7}$ C i $q_3 = 3 \cdot 10^{-7}$ C, estan en línia recta, com indica la figura. La separació entre càrregues contigües és 0.1 m. Calculeu: (a) la força resultant sobre cada càrrega produïda per les altres càrregues, i (b) l'energia potencial de cada càrrega deguda a les altres. Quins són els punts situats sobre l'eix que enllaça les càrregues on: (c) el potencial és nul i (d) el camp elèctric és nul?



$q_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ C, $q_2 = -10^{-7}$ C, $q_3 = 3 \cdot 10^{-7}$ C, $d = 0.1$ m

- F sobre cada càrrega?
- E_p de cada càrrega?
- punts sobre l'eix en els quals $V = 0$?
- punts sobre l'eix en els quals $\mathcal{E} = 0$?

(a) La força \mathbf{F}_i que actua sobre cada càrrega q_i prové de la suma vectorial dels camps elèctrics creats per les altres dues càrregues,

$$\mathbf{F}_i = q_i(\mathcal{E}_j + \mathcal{E}_k) \quad i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k \quad (1)$$

Segons els signes de les càrregues, representarem els camps creats per cada càrrega mitjançant línies de camp, que apareixen en la fig. 1, on hem considerat que l'eix X és aquell sobre el qual estan alineades les càrregues.

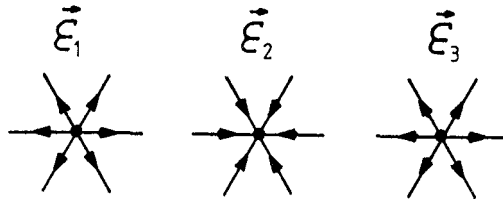


FIG. 1

Força sobre les càrregues: La representació del sentit del camp que actua sobre cada càrrega, com també les distàncies entre càrregues, vénen representades en la fig. 2.

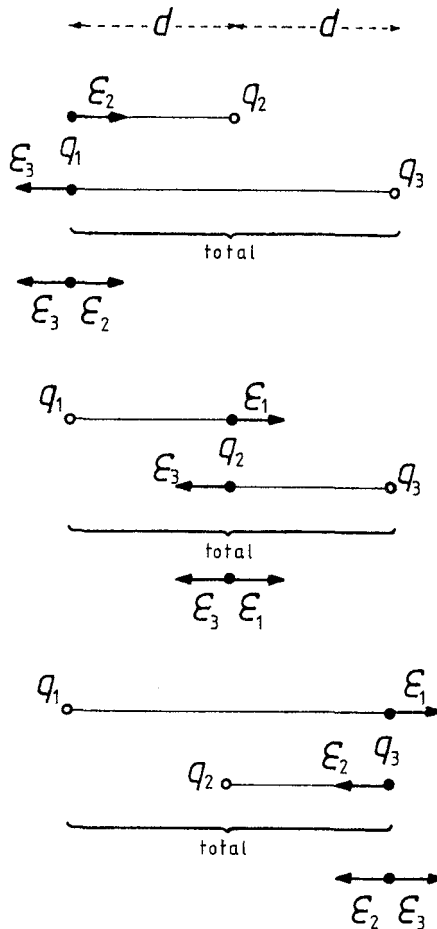


FIG. 2

Sense considerar el caràcter vectorial, les magnituds de les forces F_i ($i = 1, 2, 3$) sobre cada càrrega q_i ($i = 1, 2, 3$) són:

$$F_1 = q_1 [\mathcal{E}_2(d) - \mathcal{E}_3(2d)] = q_1 \left[\frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0 d^2} - \frac{|q_3|}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} \right] = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ N} \quad (2)$$

$$F_2 = q_2 [\mathcal{E}_1(d) - \mathcal{E}_3(d)] = q_2 \left[\frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0 d^2} - \frac{|q_3|}{4\pi\epsilon_0 d^2} \right] = 9 \cdot 10^{-3} \text{ N} \quad (3)$$

$$F_3 = q_3 [\mathcal{E}_1(2d) - \mathcal{E}_2(d)] = q_3 \left[\frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} - \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0 d^2} \right] = -1.35 \cdot 10^{-2} \text{ N} \quad (4)$$

on \mathcal{E}_j ($j \neq i$) és el camp elèctric produït per la càrrega q_j en el punt on es troba la càrrega q_i . Com que el sentit dels camps en cada cas ja l'hem determinat a partir de la fig. 2, en els camps elèctrics que apareixen en les eqs. (2)-(4) hem emprat el valor de la càrrega en valor absolut.

(b) L'energia potencial d'una càrrega q en un potencial V es pot calcular a partir de la relació

$$E_p = qV \quad (5)$$

Pel principi de superposició, l'energia potencial $E_{p,i}$ de la càrrega q_i en els camps de les altres càrregues s'obté a partir de la suma escalar dels potencials d'aquelles càrregues evaluats en el punt en què es troba la càrrega q_i ,

$$E_{p,i} = q_i(V_j + V_k) \quad i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k \quad (6)$$

on V_j ($j \neq i$) representa el potencial creat per la càrrega q_j en el punt en què es troba la càrrega q_i (anàlogament per a V_k). Ara hem de calcular l'energia potencial $E_{p,i}$ sumant algebraicament els potencials, ja que els potencials són escalars (no vectors), per tant no tenen orientació, encara que el seu valor numèric pot ser positiu o negatiu,

$$E_{p,1} = q_1 [V_2(d) + V_3(2d)] = q_1 \left[\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 (2d)} \right] = 9 \cdot 10^{-4} \text{ J} \quad (7)$$

$$E_{p,2} = q_2 [V_1(d) + V_3(d)] = q_2 \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 d} \right] = -4.5 \cdot 10^{-3} \text{ J} \quad (8)$$

$$E_{p,3} = q_3 [V_1(2d) + V_2(d)] = q_3 \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 2d} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \right] = 0 \text{ J} \quad (9)$$

Ara no hem donat el valor de les càrregues en valor absolut perquè el seu signe determinarà el de les sumes algebraiques que apareixen en les eqs. (7)-(9).

Noteu que l'energia potencial del sistema format per les tres càrregues seria

$$E_{p,\text{total}} = \frac{1}{2} (E_{p,1} + E_{p,2} + E_{p,3}) = -1.8 \cdot 10^{-3} \text{ J} \quad (10)$$

on el factor $\frac{1}{2}$ s'ha d'introduir per a evitar comptar dues vegades l'energia d'interacció entre cada parella de càrregues.¹⁸

¹⁸Perquè, per exemple, l'energia d'interacció entre les càrregues q_1 i q_2 estaria continguda en l'eq. (7) i en l'eq. (8).

(c + d) Prendrem el punt on es troba la càrrega q_1 com a origen de coordenades sobre l'eix X que enllaça les càrregues, i calcularem els punts x en què es verifica que $V_{\text{total}}(x) = 0$ i $\mathcal{E}_{\text{total}}(x) = 0$,

$$V_{\text{total}}(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x) = 0 \tag{11}$$

i

$$\mathcal{E}_{\text{total}}(x) = \mathcal{E}_1(x) + \mathcal{E}_2(x) + \mathcal{E}_3(x) = 0 \tag{12}$$

El potencial creat per una càrrega puntual varia amb la inversa de la distància entre la càrrega que genera el potencial i el punt on es calcula aquest,

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\text{distància}} \tag{13}$$

La distància és un escalar i sempre és positiva. La distància entre dos punts A i B ve donada per $d_{BA} = |r_A - r_B|$, on r_A i r_B són els vectors de posició dels punts A i B, respectivament. En aquest cas només ens preocuparem de les distàncies sobre l'eix X . La distància des del punt genèric x fins a la càrrega q_i val $|x_i - x|$ i les coordenades x_i , segons la fig. 3, són $x_1 = 0, x_2 = d$ i $x_3 = 2d$.

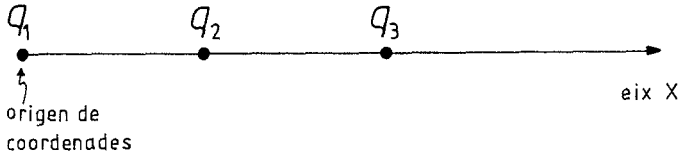


FIG. 3

Així, doncs, els valors de x que siguen solució de l'eq. (11),

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|x|} + \frac{q_2}{|x - d|} + \frac{q_3}{|x - 2d|} \right) = 0 \tag{14}$$

és a dir, que verifiquen

$$\frac{q_1}{|x|} + \frac{q_2}{|x - d|} + \frac{q_3}{|x - 2d|} = 0 \tag{15}$$

seran els punts que busquem. Per a obtenir la solució d'aquesta equació procedirem de diferents formes (depenent dels mètodes matemàtics coneguts). Un mètode *aproximat* consisteix a representar gràficament $V_{\text{total}}(x)$ o, de la mateixa manera –i més còmoda, perquè s'elimina un factor constant– a representar gràficament la funció $f(x) = 4\pi\epsilon_0 V_{\text{total}}(x)$,

$$f(x) = \frac{q_1}{|x|} + \frac{q_2}{|x - d|} + \frac{q_3}{|x - 2d|} \tag{16}$$

en funció de x i observar els punts x on s'anul·la aquesta funció (fig. 4).

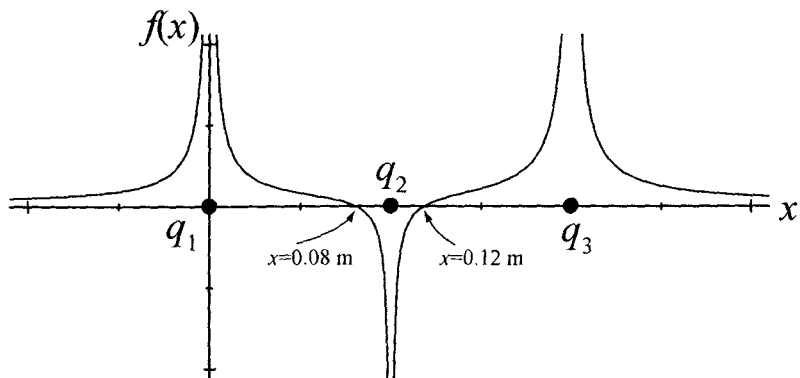


FIG. 4

Podem observar que $f(x) = 0$ en $x \rightarrow \pm\infty$, $x \simeq 0.08$ m i $x \simeq 0.12$ m. Els únics punts entre les càrregues on s'anul·la el potencial elèctric total es troben a 0.08 m i a 0.12 m a la dreta de la càrrega q_1 . A més d'aquests punts, el potencial total del sistema de càrregues s'anul·la en l'infinit.

Per a calcular els valors de x on s'anul·la el camp elèctric procedirem de forma semblant, però ara a partir de l'eq. (12), i representarem gràficament la funció $\mathcal{E}_{\text{total}}(x) = \mathcal{E}_1(x) + \mathcal{E}_2(x) + \mathcal{E}_3(x)$. Notem que ara hem de fixar-nos en el caràcter vectorial del camp elèctric, ja que els sentits de $\mathcal{E}_1(x)$, $\mathcal{E}_2(x)$ i $\mathcal{E}_3(x)$ variaran segons les zones de l'eix X (vegeu la fig. 5):

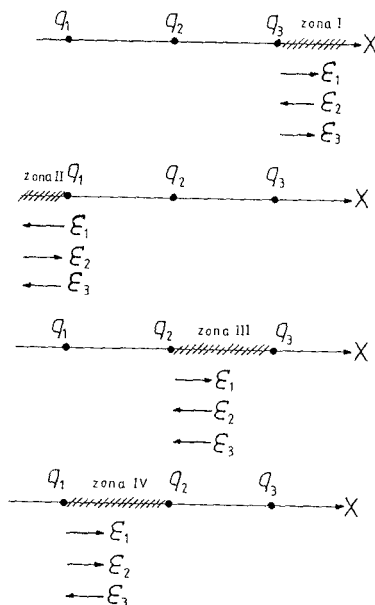


FIG. 5

En les expressions següents, la xifra romana indica la zona en què es calcula el camp elèctric total:

$$\mathcal{E}_{\text{total}}(x) = \begin{cases} \mathcal{E}_I(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{|q_1|}{x^2} - \frac{|q_2|}{(x-d)^2} + \frac{|q_3|}{(x-2d)^2} \right] & x > 2d \\ \mathcal{E}_{II}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{|q_1|}{x^2} + \frac{|q_2|}{(x-d)^2} - \frac{|q_3|}{(x-2d)^2} \right] & x < 0 \\ \mathcal{E}_{III}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{|q_1|}{x^2} - \frac{|q_2|}{(x-d)^2} - \frac{|q_3|}{(x-2d)^2} \right] & d < x < 2d \\ \mathcal{E}_{IV}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{|q_1|}{x^2} + \frac{|q_2|}{(x-d)^2} - \frac{|q_3|}{(x-2d)^2} \right] & 0 < x < d \end{cases} \quad (17)$$

Si prenem ara $g(x) = 4\pi\epsilon_0\mathcal{E}_{\text{total}}(x)$, representarem gràficament $g(x)$ en funció de x (fig. 6). Podem observar que $g(x) = 0$ en $x \rightarrow \pm\infty$, és a dir, el camp elèctric total del sistema de càrregues només és nul en l'infinit. En la representació gràfica, $g(x) > 0$ indica que el camp elèctric $\mathcal{E}_{\text{total}}$ està dirigit cap a la dreta i $g(x) < 0$ indica que aquest camp està dirigit cap a l'esquerra de l'eix X .

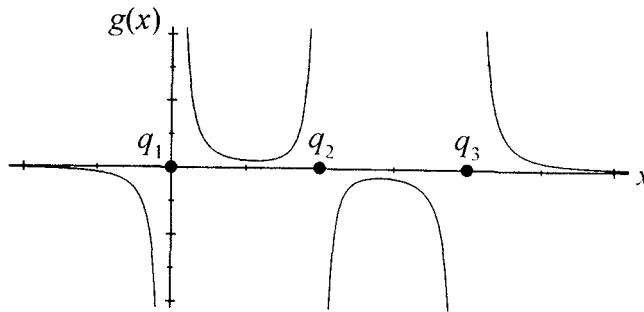


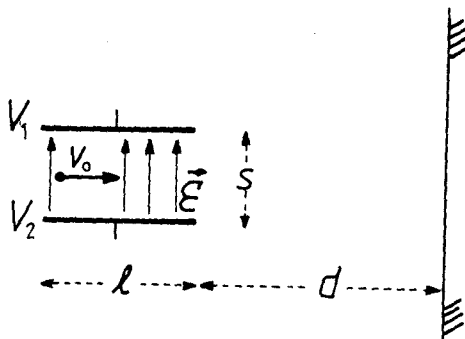
FIG. 6

Com podem apreciar, el camp elèctric total mai és nul, excepte per a punts molt allunyats ($x \rightarrow \pm\infty$) de la regió on es troben les càrregues. El potencial només s'anul·la o canvia de signe als voltants de la càrrega central, a més de tendir a zero quan ens allunyem de la regió on es troben les càrregues.

Comparant les figures 4 i 6, podem observar que el camp elèctric s'orienta sempre segons els potencials decreixents. A l'esquerra de q_1 , el potencial elèctric decreix cap a les x negatives, i el camp elèctric és negatiu (dirigit cap a les x negatives). En la zona entre q_1 i q_2 , el potencial decreix cap a les x positives i el camp és positiu (dirigit cap a les x positives). En la zona entre q_2 i q_3 , el potencial decreix cap a les x negatives i el camp és negatiu (dirigit cap a les x negatives). A la dreta de q_3 , el potencial decreix cap a les x positives i el camp és positiu (dirigit cap a les x positives).

8.3 La diferència de potencial entre les dues plaques paral·leles de la figura adjunta és de 100 V; la separació i la longitud són, respectivament, 1 cm i 2 cm. (a) Quina força actua sobre un electró col·locat entre les dues plaques? Si llancem un electró amb una velocitat $v_0 = 10^7$ m/s en direcció perpendicular a la del camp elèctric que hi ha entre

les plaques, (b) calculeu la desviació i la velocitat de l'electró quan emergeix enmig de les plaques. (c) Si situem una pantalla a 0.5 m a la dreta de l'extrem de les plaques, a quina posició sobre la pantalla arriba l'electró? ($m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C).



$V_1 - V_2 = 100$ V, $s = 1$ cm = 0.01 m, $l = 2$ cm = 0.02 m, $d = 0.5$ m, $v_0 = 10^7$ m/s

(a) força sobre un electró?

(b) velocitat (mòdul i direcció) de l'electró que ix d'entre les plaques?

(c) posició d'aquest electró quan incideix sobre la pantalla?

En tot aquest problema no tindrem en compte els efectes de la interacció gravitatòria.

(a) Per a començar a resoldre el problema considerarem que el camp elèctric produït per les plaques paral·leles està dirigit cap amunt (segons l'assignació de potencials que hem fet, el camp es dirigeix cap als potencials menors). El camp elèctric entre dues plaques paral·leles amb càrregues iguals però de signe contrari és uniforme (no depèn de la posició on es calcule) i val

$$\mathcal{E} = \frac{V_1 - V_2}{s} \mathbf{j} \quad (1)$$

on hem utilitzat el sistema de coordenades dibuixat en la fig. 1.

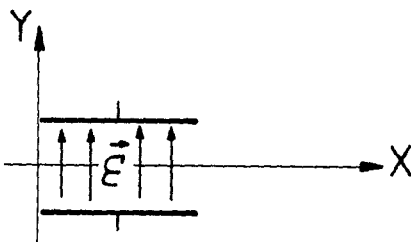


FIG. 1

La força que actua sobre l'electró sotmés al camp elèctric \mathcal{E} val

$$\mathbf{F} = q_e \mathcal{E} = q_e \frac{V_1 - V_2}{s} \mathbf{j} = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \frac{100 \text{ V}}{0.01 \text{ m}} \mathbf{j} = -1.6 \cdot 10^{-15} \mathbf{j} \text{ N} \quad (2)$$

En l'expressió anterior hem tingut en compte el fet que la càrrega de l'electró és negativa i val $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C. Segons l'assignació de potencials que hem fet a les plaques paral·leles, observem que la força que actua sobre l'electró està dirigida cap avall.

(b) Coneixem la velocitat inicial de l'electró ($v_0 = 10^7 \text{ i m/s}$) i, si usem la segona llei de Newton, podem conèixer l'acceleració que actua sobre aquest

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-q_e \mathcal{E}}{m_e} = -1.76 \cdot 10^{15} \text{ j m/s}^2 \quad (3)$$

Aquesta acceleració és constant (no varia, ja que el camp elèctric \mathcal{E} tampoc no varia ni amb la posició ni amb el temps). Si utilitzem les relacions de la cinemàtica del moviment uniformement accelerat, podem calcular els components v_x i v_y de la velocitat quan l'electró ha passat entre les plaques:

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_{x,0} + a_x t \\ v_{x,0} = 10^7 \text{ m/s} \\ a_x = 0 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow v_x = 10^7 \text{ m/s} \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} v_y = v_{y,0} + a_y t \\ v_{y,0} = 0 \text{ m/s} \\ a_y = -1.76 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow v_y = -3.52 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad (5)$$

En l'expressió (5) hem considerat que el temps que l'electró està viatjant amb acceleració a_y serà el mateix temps que tarda a recórrer les plaques amb la velocitat constant v_x : $t = \ell/v_x = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s}$.

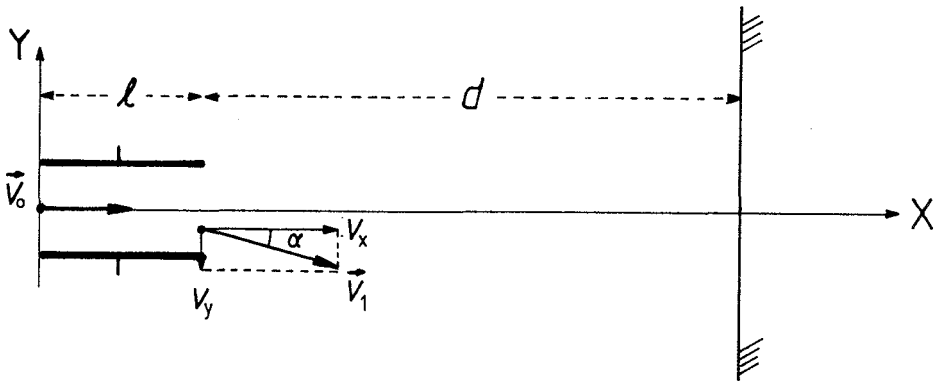


FIG. 2

Si inicialment situem l'electró sobre l'eix horitzontal (fig. 2), tindrem que la desviació i la velocitat de l'electró en eixir de les plaques s'obtenen a partir de les relacions

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} \quad (6)$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (7)$$

Si substituïm els valors de v_x i v_y quan l'electró ha recorregut les plaques, obtenim que $\alpha = 19.4^\circ$ i $v = 1.06 \cdot 10^7 \text{ m/s}$.

(c) Càlcul de la posició de l'electró sobre la pantalla: Aquest és un problema de cinemàtica, en el qual coneixem la posició inicial de l'electró (que calcularem seguidament), i la seua velocitat inicial (v_1), com també la distància horitzontal que ha de recórrer, d . Per tant, únicament hem de calcular la distància vertical que recorre (vegeu la fig. 3).

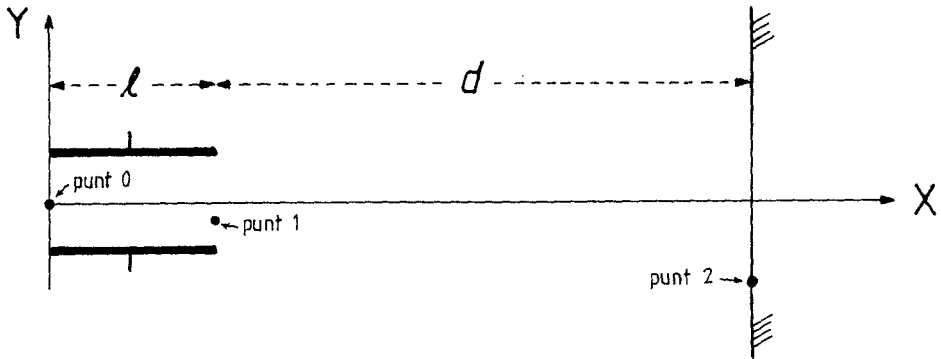


FIG. 3

Càlcul de la posició de l'electró quan ix de les plaques: De nou, per cinemàtica, escrivim

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_0 + v_{x,0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ x_0 = 0 \text{ m} \\ v_{x,0} = v_0 = 10^7 \text{ m/s} \\ a_x = 0 \text{ m/s}^2 \\ t = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s} \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = 0.02 \text{ m} \quad (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = y_0 + v_{y,0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ y_0 = 0 \text{ m} \\ v_{y,0} = 0 \text{ m/s} \\ a_y = -1.76 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2 \\ t = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s} \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 = -3.52 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (9)$$

Càlcul de la posició de l'electró en arribar a la pantalla: Anàlogament al que hem fet abans, tenim

$$x_2 = x_1 + v_{x,1}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (10)$$

$$y_2 = y_1 + v_{y,1}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (11)$$

Durant aquest trajecte no actua cap força sobre l'electró, perquè ja està fora de la regió on hi ha un camp elèctric, per tant no hi ha cap acceleració: $a_x = a_y = 0 \text{ m/s}^2$. Per a calcular la duració del trajecte des del punt 1 fins al punt 2 (fig. 3) utilitzem l'eq. (10),

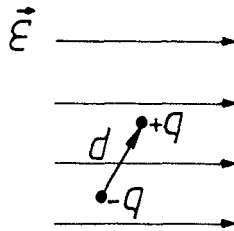
$$t = \frac{x_2 - x_1}{v_{x,1}} = \frac{0.5}{10^7} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ s} \quad (12)$$

on $(x_2 - x_1) = 0.5$ m és la distància des del final de les plaques fins a la pantalla. De l'eq. (11) obtenim que

$$y_2 = -3.52 \cdot 10^{-3} - 3.52 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-8} = -0.18 \text{ m} \quad (13)$$

En conseqüència, l'electró arriba a la pantalla a un punt situat 0.18 m per davall de la seua posició inicial. Observem, per tant, que l'electró s'ha desviat una distància apreciable a simple vista (18 cm). Per a detectar-lo podríem utilitzar una pantalla fluorescent. Si procedim de forma inversa, és a dir, mesurant la desviació de l'electró, i coneixem el camp elèctric aplicat (és a dir, les característiques de les plaques paral·leles), es pot calcular la velocitat que tenia l'electró quan va entrar entre les plaques.

8.4 Un dipol elèctric està format per dues càrregues oposades, de magnitud $q = 10^{-6}$ C, separades per una distància $d = 2$ cm. El dipol està col·locat en un camp elèctric extern de 10^5 N/C. (a) Quin és el moment màxim que exerceix el camp sobre el dipol? (b) Quant de treball hauria de fer un agent exterior per a fer que el dipol gire mitja volta a partir d'una posició paral·lela al camp?



$q = 10^{-6}$ C, $d = 2$ cm = 0.02 m, $\mathcal{E} = 10^5$ N/C

(a) $\tau_{\text{màx}}$?

(b) W necessari per a passar de l'orientació \rightarrow a l'orientació \leftarrow ?

(a) El moment del parell de forces, τ , causat per l'acció del camp elèctric \mathcal{E} aplicat sobre el dipol, ve donat per

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathcal{E} \quad (1)$$

on \mathbf{p} és el moment dipolar del dipol, que val $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$. El vector \mathbf{d} , tal com apareix dibuixat en la figura de l'enunciat, va dirigit des de la càrrega negativa fins a la positiva. Per tant, el mòdul de τ val

$$\tau = p\mathcal{E} \sin \vartheta = qd\mathcal{E} \sin \vartheta \quad (2)$$

on ϑ és l'angle entre \mathbf{p} i \mathcal{E} (fig. 1). Segons siga l'orientació del dipol respecte del camp elèctric, τ serà màxim quan $\sin \vartheta$ siga màxim (ja que d , q i \mathcal{E} no varien). Això ocorrerà quan $\sin \vartheta = 1$, cosa que implica que els possibles valors de ϑ seran $\vartheta = \pi/2, 5\pi/2, \dots$

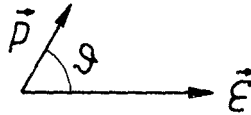


FIG. 1

En definitiva, el valor màxim de τ apareixerà quan el dipol estiga disposat perpendicularment al camp elèctric, i valdrà

$$\tau_{\text{màx}} = qd\mathcal{E} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ N m} \quad (3)$$

(b) El camp elèctric és conservatiu i això vol dir que el treball realitzat pel camp per a moure una càrrega no depèn del camí que s'ha seguit, sinó de les posicions inicial i final que ocupa aquesta càrrega. Així, doncs, el treball fet pel camp elèctric perquè el dipol passe de l'orientació A a l'orientació B (fig. 2) ve donat per la diferència d'energies potencials:

$$W_{AB} = E_{p,A} - E_{p,B} \quad (4)$$

L'energia potencial d'un dipol, amb moment dipolar p , en un camp elèctric extern \mathcal{E} val

$$E_p = -p\mathcal{E} \quad (5)$$

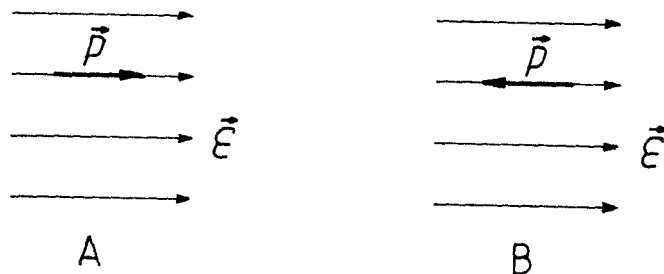


FIG. 2

En les dues posicions indicades en la fig. 2, aquesta energia potencial s'escriurà

$$E_{p,A} = -p\mathcal{E} \cos \vartheta_A = -p\mathcal{E} \quad (6)$$

$$E_{p,B} = -p\mathcal{E} \cos \vartheta_B = +p\mathcal{E} \quad (7)$$

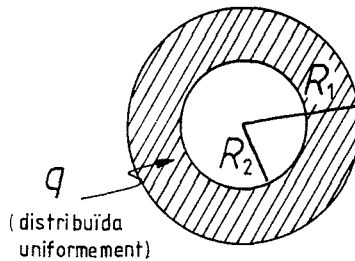
on hem considerat que $\vartheta_A = 0$ per a l'orientació paral·lela, i per a l'antiparal·lela $\vartheta_B = \pi$. A partir de les eqs. (4)-(7), el treball realitzat pel camp elèctric serà

$$W_{AB} = -p\mathcal{E} - p\mathcal{E} = -2p\mathcal{E} = -4 \cdot 10^{-3} \text{ J} \quad (8)$$

El treball que farà un agent exterior per a fer girar el dipol des de la posició A fins a la posició B serà just el que acabem de calcular, eq. (8), però canviat de signe. Com que aquest treball exterior és positiu, $W_{AB}^{ext} = 4 \cdot 10^{-3}$ J, això implica que hem d'aplicar treball sobre el sistema per tal que el dipol passe de la posició paral·lela al camp (\rightarrow) a la posició antiparal·lela (\leftarrow).

Si deixem que evolucione el dipol sense actuar-hi, aquest tendeix a tenir l'energia més baixa, i com que $E_p = -p\mathcal{E}$ és la més baixa possible, si el deixem lliure, el dipol tendeix a orientar-se paral·lelament al camp elèctric \mathcal{E} .

8.5 Una esfera de radi R_1 té una cavitat central de radi R_2 . Una càrrega q està distribuïda uniformement en el seu volum. (a) Calculeu el camp elèctric i el potencial en punts exteriors a l'esfera ($r \geq R_1$), interiors a l'esfera ($R_2 \leq r \leq R_1$) i en la cavitat central ($r \leq R_2$). (b) Feu els gràfics del camp i del potencial elèctrics en funció de la distància al centre de les esferes concèntriques.



esferes concèntriques de radis R_1 i R_2 ,
 q distribuïda uniformement en el volum entre R_2 i R_1
 (a) V i \mathcal{E} per als casos següents: $r \geq R_1, R_2 \leq r \leq R_1, r \leq R_2$
 (b) gràfiques de V i de \mathcal{E} en funció de r

(a) Començarem per calcular el camp $\mathcal{E}(r)$ en tot l'espai. Per a fer això hi aplicarem la llei de Gauss

$$\oint \mathcal{E} dS = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

on q_{neta} és la càrrega neta dins la superfície tancada sobre la qual es fa la integració (representem la integral sobre una superfície tancada pel símbol \oint).

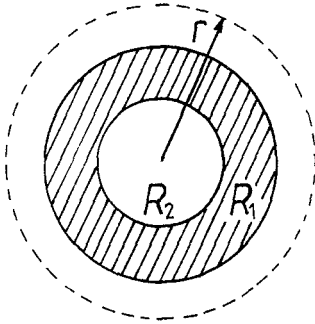


FIG. 1

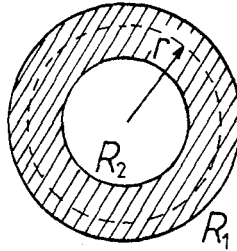


FIG. 2

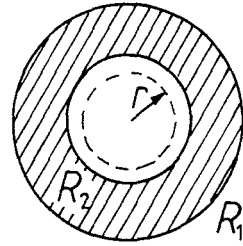


FIG. 3

(a1) Punts exteriors, $r \geq R_1$: Com a superfície gaussiana prenem una esfera de radi r , ($r \geq R_1$) concèntrica amb les esferes R_1 i R_2 (fig. 1).

A causa de la simetria esfèrica de la superfície gaussiana, les línies del camp elèctric són perpendiculars a la superfície de l'esfera de radi r i, per tant, paral·leles al vector que representa l'element de superfície, dS . Això vol dir que podem escriure $\mathcal{E}dS$ com a producte de mòduls, $\mathcal{E}dS$. La càrrega neta tancada dins l'esfera de radi r és tota la càrrega del sistema, q . Si fem la integració sobre la superfície esfèrica de radi r , tindrem

$$\oint_{\text{esfera de radi } r} \mathcal{E} dS = \oint \mathcal{E} dS = \mathcal{E} \oint dS = \mathcal{E} 4\pi r^2 \quad (2)$$

on $4\pi r^2$ és la superfície de l'esfera de radi r i, ja que el mòdul del camp elèctric \mathcal{E} només depèn de la distància r , hem tret \mathcal{E} ($=|\mathcal{E}|$) fora de la integral, perquè per la simetria esfèrica del problema val igual en qualsevol punt de la superfície de l'esfera de radi r . Quan hi apliquem la llei de Gauss, eq. (1), obtenim

$$\mathcal{E} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r \geq R_1) \quad (3)$$

i la direcció del camp elèctric $\mathcal{E}(r)$ és la radial.

(a2) Punts interns a la part massissa, $R_2 \leq r \leq R_1$: Ara prenem com a superfície gaussiana una esfera de radi r , de manera que $R_2 \leq r \leq R_1$ (fig. 2).

Per raonaments anàlegs al cas (a1), obtenim que la integral del camp elèctric sobre l'esfera de radi r és

$$\oint \mathcal{E} dS = \mathcal{E} 4\pi r^2 \quad (4)$$

on ara el camp \mathcal{E} està calculat sobre l'esfera gaussiana de radi r ($R_2 \leq r \leq R_1$). Per a calcular la càrrega neta tancada en l'esfera de radi r , utilitzem la relació $q_{\text{net}} = \rho V$, on ρ és la densitat de càrrega, i V és el volum *massís* interior a l'esfera de radi r , és a dir la

part ratllada de dins l'esfera de radi r (fig. 2). El valor de \mathcal{V} està donat per la diferència entre els volums de les esferes de radis r i R_2

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_r - \mathcal{V}_{R_2} = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_2^3) \quad (5)$$

Com que la càrrega q està uniformement distribuïda, es verificarà que

$$q = \rho \mathcal{V}' \quad (6)$$

on \mathcal{V}' és el volum *massís* entre les esferes de radi R_2 i R_1 . Per tant,

$$\rho = \frac{q}{\mathcal{V}'} = \frac{q}{4\pi(R_1^3 - R_2^3)/3} \quad (7)$$

Si tornem a l'expressió que ens permet calcular la càrrega neta, de les eqs. (5) i (7) obtenim

$$q_{\text{neta}} = \frac{q}{[4\pi(R_1^3 - R_2^3)/3]} \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_2^3) \quad (8)$$

De la llei de Gauss, eq. (1), tenim finalment que

$$\mathcal{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r^3 - R_2^3)}{r^2(R_1^3 - R_2^3)} \quad (R_2 \leq r \leq R_1) \quad (9)$$

Com que encara hi ha simetria esfèrica, en aquest cas el camp elèctric també és radial.

(a3) Punts de la cavitat central, $r \leq R_2$: Novament hi apliquem la llei de Gauss, eq. (1). Però en aquest cas, la càrrega neta interior a l'esfera gaussiana de radi r és nul·la, $q_{\text{neta}} = 0$ (en la fig. 3 es veu que només hi ha càrrega entre R_2 i R_1).

Per tant, ja que $r \neq 0$, per un raonament anàleg als casos anteriors,

$$\mathcal{E}(r) = 0 \quad (r \leq R_2) \quad (10)$$

Per a calcular el potencial elèctric, com que el camp elèctric és conservatiu, utilitzem la relació

$$\mathcal{E}(r) = -\nabla V(r) \quad (11)$$

El camp elèctric és radial, i només depèn de la distància al centre de les esferes concèntriques, per això podem usar únicament la part radial del gradient que apareix en l'eq. (11) i escriure

$$\mathcal{E}(r) \mathbf{u}_r = -\frac{dV(r)}{dr} \mathbf{u}_r \quad (12)$$

on \mathbf{u}_r és el vector unitari radial. Si treballem únicament amb els mòduls, d'aquesta expressió es pot calcular el potencial procedint tal com segueix

$$dV = -\mathcal{E}(r)dr \Rightarrow \int_{V_c}^V dV = -\int_{r_c}^r \mathcal{E}(r)dr \Rightarrow V(r) - V_c = -\int_{r_c}^r \mathcal{E}(r)dr \quad (13)$$

en les integrals anteriors, V_c denota un potencial conegut en un punt de referència r_c .

(a1) Elegim un potencial conegut (i senzill) en un punt de la zona $r \geq R_1$: $V_\infty = 0$. Això vol dir que prenem l'origen de potencials en $r \rightarrow \infty$. L'eq. (13), en aquest cas, dóna

$$V(r) - V_\infty = - \int_\infty^r dr \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_\infty^r \Rightarrow$$

$$V(r) = V_\infty + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R_1) \quad (14)$$

Aquest potencial és idèntic al que produiria una càrrega puntual q situada en el centre de les esferes concèntriques.

(a2) Com que ja sabem quant val $V(r)$ per a $r \geq R_1$, i s'ha de verificar la continuïtat del potencial en les superfícies de separació, prendrem com a potencial conegut

$$V(r = R_1) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad (15)$$

Si tornem a usar l'expressió (13), tenim

$$V(r) - V(R_1) = - \int_{R_1}^r \mathcal{E}(r) dr = - \int_{R_1}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r^3 - R_2^3)}{r^2(R_1^3 - R_2^3)} dr \quad (16)$$

6

és a dir,

$$V(r) = V(R_1) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_1^3 - R_2^3)} \int_{R_1}^r \frac{(r^3 - R_2^3)}{r^2} dr$$

$$= V(R_1) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_1^3 - R_2^3)} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_2^3}{r} \right) \Big|_{R_1}^r \quad (17)$$

En definitiva, tenim que el potencial val

$$V(r) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0(R_1^3 - R_2^3)r} (-r^3 + 3rR_1^2 - 2R_2^3) \quad (R_2 \leq r \leq R_1) \quad (18)$$

(a3) Pel mateix raonament que en el cas (a2), a partir de l'eq. (18) prenem com a potencial conegut

$$V(r = R_2) = \frac{3}{2} \frac{q(R_1^2 - R_2^2)}{4\pi\epsilon_0(R_1^3 - R_2^3)} \quad (19)$$

i, usant de nou l'eq. (13), obtenim

$$V(r) - V(R_2) = - \int_{R_2}^r \mathcal{E}(r) dr = 0 \quad (20)$$

ja que, segons l'eq. (10), $\mathcal{E} = 0$ en aquesta regió. De l'eq. (20) obtenim que $V(r)$ és constant quan $r \leq R_2$,

$$V(r) = V(R_2) = \frac{3}{2} \frac{q(R_1^2 - R_2^2)}{4\pi\epsilon_0(R_1^3 - R_2^3)} \quad (r \leq R_2) \quad (21)$$

És a dir, en el buit de les esferes el potencial és constant (no depèn de r).

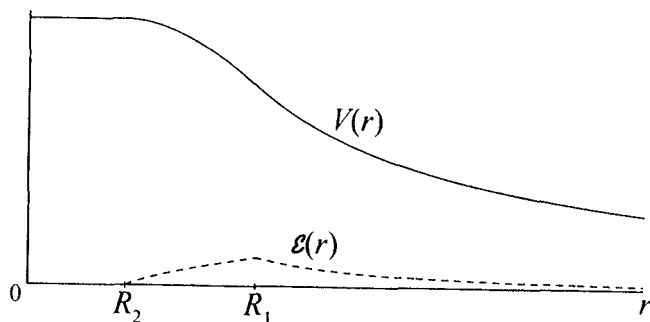
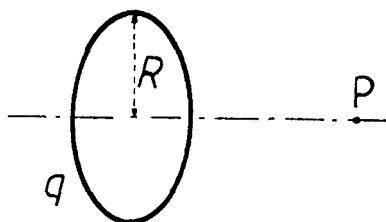


FIG. 4

(b) La representació del mòdul del camp, $\mathcal{E}(r)$, i del potencial $V(r)$, suposant que la càrrega q és positiva, apareix en la fig. 4. Com es pot apreciar el camp i el potencial s'anul·len a grans distàncies d'on es troba la càrrega i, a més a més, són continus en tot l'espai, encara que la derivada del camp elèctric no siga contínua en els punts $r = R_1$ i $r = R_2$.

8.6 Un anell de radi R té una càrrega q . Determineu (a) l'expressió que dona el camp elèctric en un punt del seu eix (perpendicular al pla que forma l'anell) i (b) el punt de l'eix on aquest camp és màxim. (c) Calculeu el potencial sobre els punts de l'eix. (Expresseu els resultats en funció de la distància des del punt en qüestió fins al centre de l'anell).



q = càrrega de l'anell, R = radi de l'anell, r = distància des del punt P fins al centre de l'anell

- \mathcal{E} en un punt de l'eix de l'anell?
- punt en què \mathcal{E} és màxim?
- potencial V en els punts de l'eix?

(a) Segons la llei de Coulomb, si tenim una distribució de càrregues, el camp elèctric \mathcal{E} ve donat per

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (1)$$

on r és la distància entre l'element de càrrega dq i el punt on es calcula el camp, i \mathbf{u}_r és el vector unitari que va des de l'element diferencial de càrrega fins al punt on es calcula el camp. La integració en l'eq. (1) es fa en tot l'espai on està continguda la distribució de càrrega el camp elèctric de la qual es vol calcular.

El camp elèctric degut a un element diferencial de longitud, $d\ell$, serà

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (2)$$

on dq és la càrrega que hi ha en l'element de longitud $d\ell$ (fig. 1). Si l'anell té la càrrega repartida homogeniament i λ és la densitat lineal de càrrega, escriurem

$$dq = \lambda d\ell \quad (3)$$

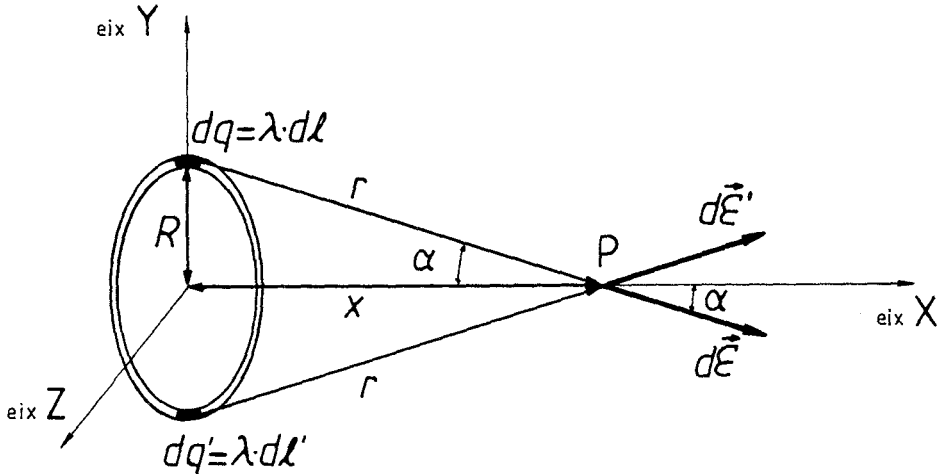


FIG. 1

El camp elèctric degut a l'element de longitud $d\ell$ representat en la fig. 1 té dos components, l'un segons l'eix X: $d\mathcal{E}_x = d\mathcal{E} \cos \alpha$, i l'altre segons l'eix Y: $d\mathcal{E}_y = -d\mathcal{E} \sin \alpha$. Si calculem el camp elèctric originat per l'element diferencial de longitud $d\ell'$, simètric a $d\ell$, observem que els components del camp elèctric en la direcció Y es cancel·len mútuament. Això és vàlid per a totes les parelles simètriques (que estan situades una enfront de l'altra sobre qualsevol diàmetre) d'elements diferencials de longitud. Els components del camp elèctric al llarg de l'eix Z s'anul·len per consideracions similars a les esmentades per a l'eix Y, ja que ambdós eixos són perpendiculars a l'eix X. En conseqüència, el camp elèctric total en un punt qualsevol de l'eix de l'anell només té una contribució deguda a els components segons l'eix X

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E}_x \mathbf{i} = \int d\mathcal{E} \cos \alpha \mathbf{i} \quad (4)$$

Si considerem la relació $r^2 = x^2 + R^2$ (fig. 1), segons les eqs. (2) i (3) obtenim

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{(x^2 + R^2)} \quad (5)$$

Per la geometria de la fig. 1 es verifica que $\cos \alpha = x/r = x/(x^2 + R^2)^{1/2}$, i el mòdul del camp elèctric s'obindrà a partir de les eqs. (4) i (5),

$$|\mathcal{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda}{(x^2 + R^2)} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} d\ell = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int_C d\ell \quad (6)$$

La integral anterior s'ha de fer sobre l'espai on està distribuïda la càrrega, és a dir, sobre el contorn de l'anell; per això hem escrit \int_C per a indicar que la integració es fa sobre la circumferència de l'anell. Després de reescriure convenientment l'expressió anterior, ens queda per fer la integral $\int_C d\ell$, el valor de la qual és el perímetre de l'anell,

$$\int_C d\ell = 2\pi R \quad (7)$$

Com que sabem que la direcció del camp elèctric coincideix amb l'eix X , escriurem

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} i \quad (8)$$

on hem usat que la càrrega de l'anell és el producte del seu perímetre per la densitat lineal de càrrega, $q = 2\pi R\lambda$.

(b) Ara calcularem el punt sobre l'eix X on el camp elèctric \mathcal{E} és màxim. Hi haurà un màxim o un mínim en els punts x que verifiquen $d\mathcal{E}(x)/dx = 0$, és a dir

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(x^2 + R^2)^{3/2} - 3x^2(x^2 + R^2)^{1/2}}{(x^2 + R^2)^3} \right] = 0 \quad (9)$$

D'ací aïllem x i obtenim

$$x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

que seran els punts on el mòdul del camp elèctric és màxim¹⁹. Encara que el camp elèctric tindrà sentit contrari en cadascun dels punts donats per l'eq. (10). En la fig. 2 es representa el camp en aquests dos punts, suposant que la càrrega de l'anell és positiva.

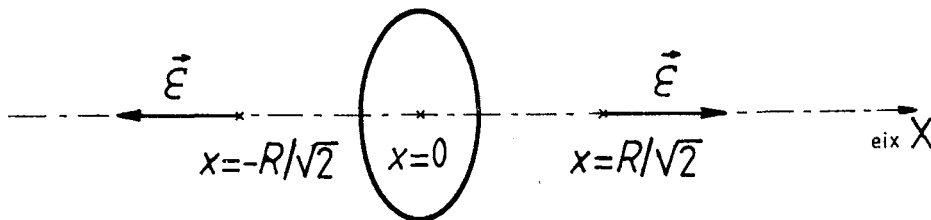


FIG. 2

¹⁹Pot comprovar-se que és màxim fent una senzilla substitució de valors en l'eq. (8) o calculant-ne la derivada segona.

(c) Podem calcular el potencial V en un punt de l'eix de dues formes: (i) A partir de la relació entre el camp elèctric \mathcal{E} i el potencial V

$$\mathcal{E}(x) = -\nabla V \quad (11)$$

Com que el camp elèctric només depèn de la coordenada x i sols té un component al llarg de l'eix X , a partir del component x del gradient, podem escriure

$$V(x) = - \int \mathcal{E}(x) dx = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx \quad (12)$$

que dóna

$$V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{1/2}} + \text{constant} \quad (13)$$

Si prenem l'origen dels potencials, $V = 0$, en $x \rightarrow \infty$, obtenim que la constant val zero.

(ii) També es pot calcular directament a partir de la definició de potencial elèctric. Així, si procedim de forma similar al cas del càlcul del camp elèctric que hem fet anteriorment, tenim

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda dl}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{1/2}} + \text{constant} \end{aligned} \quad (14)$$

La constant d'integració val zero amb la mateixa elecció que hem fet en el cas (i) per a l'origen de potencials.

Com era d'esperar, amb els dos mètodes s'obté el mateix resultat per al potencial. A més a més, això pot servir de comprovació, ja que s'arriba al mateix resultat per dos procediments diferents.

8.7 Calculeu el camp elèctric creat per una distribució lineal i homogènia de càrrega de longitud infinita.

densitat lineal de càrrega = λ

\mathcal{E} ?

Calcularem el camp elèctric aplicant-li la llei de Gauss. A causa de la simetria del problema, el camp elèctric creat per una línia d'extensió infinita carregada homogèniament serà perpendicular a aquesta línia i dependrà només de la distància a aquesta. Els tres camps elèctrics que hem dibuixat en la fig. 1 tindran el mateix valor en mòdul, ja que es troben a la mateixa distància de la línia carregada. La direcció de cada camp serà la radial en cada cas, dirigida des de la línia carregada fins al punt en qüestió o viceversa, segons que la distribució de càrregues de la línia siga positiva o negativa, respectivament.

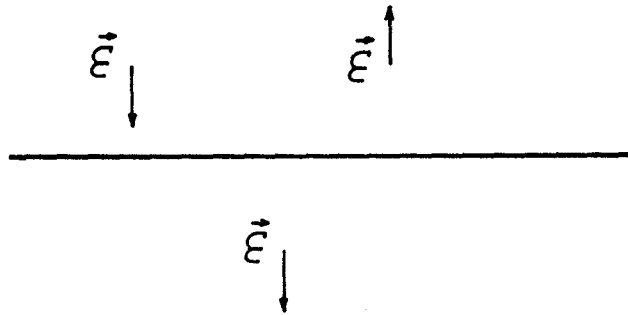


FIG. 1

Per a calcular el camp elèctric \mathcal{E} a una distància r de la línia mitjançant l'aplicació de la llei de Gauss, utilitzarem com a superfície gaussiana un cilindre de radi r i de longitud ℓ , l'eix del qual coincidirà amb la línia carregada i les seues bases seran perpendiculars a la línia carregada (fig. 2).

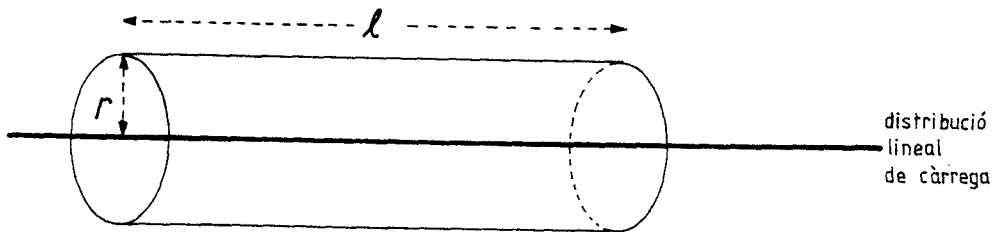


FIG. 2

La superfície tancada sobre la qual aplicarem la llei de Gauss

$$\oint \mathcal{E} dS = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

estarà constituïda per la superfície lateral del cilindre i la superfície corresponent a les bases del cilindre, de forma que l'eq. (1) es descompondrà en

$$\int_{\text{bases}} \mathcal{E} dS + \int_{\text{lateral}} \mathcal{E} dS = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \tag{2}$$

Tanmateix, per la geometria del problema hem vist que el camp elèctric \mathcal{E} és radial, per tant és perpendicular a les bases del cilindre. Cal recordar que una superfície es representa vectorialment per un vector el mòdul del qual correspon al valor de l'àrea i que té una orientació perpendicular a la superfície i va dirigit cap a fora si la superfície és tancada, com en aquest cas. Així, sobre les bases del cilindre, es compleix que $\int \mathcal{E} dS = 0$, perquè el producte escalar de dos vectors és nul si aquests són perpendiculars ($\mathcal{E} \perp dS$, fig. 3).

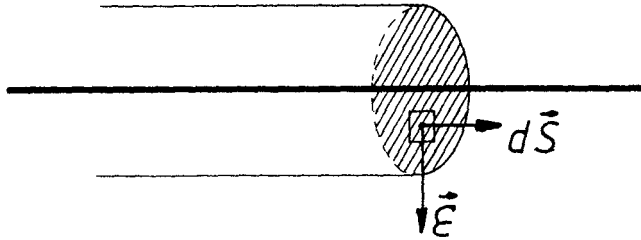


FIG. 3

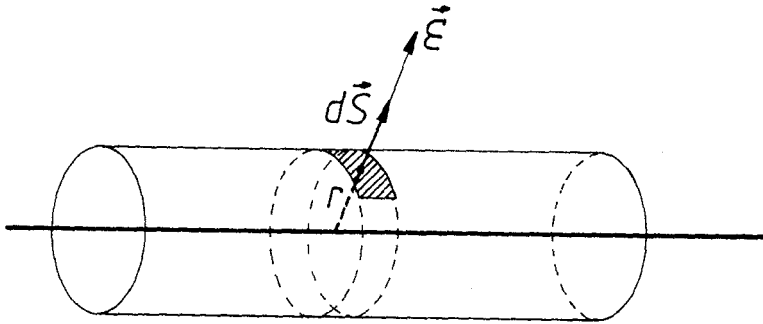


FIG. 4

Sobre la superfície lateral del cilindre que hem elegit, el valor del camp elèctric \mathcal{E} és constant, ja que només depèn de la distància r . A més, \mathcal{E} és paral·lel a $d\mathbf{S}$ sobre la superfície lateral ($\mathcal{E} \parallel d\mathbf{S}$, fig. 4).

Així, doncs,

$$\int_{\text{lateral}} \mathcal{E} d\mathbf{S} = \int_{\text{lateral}} \mathcal{E} dS = \mathcal{E} \int_{\text{lateral}} dS = \mathcal{E} S_{\text{lateral}} \quad (3)$$

La integració sobre els elements de superfície laterals ens donarà la superfície lateral total que correspon al cilindre de radi r i longitud ℓ , $S_{\text{lateral}} = 2\pi r\ell$. Ja hem calculat la part esquerra de la llei de Gauss, eq. (1),

$$\mathcal{E} 2\pi r\ell = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Vegem ara quant val la càrrega neta tancada en el cilindre de radi r i de longitud ℓ . Aquesta serà la càrrega que hi ha en la porció de longitud ℓ de la línia de càrrega, que, per tractar-se d'una distribució de càrrega homogènia, podem escriure

$$q_{\text{neta}} = \lambda \ell \quad (5)$$

De les eqs. (4) i (5), i per ser radial el camp elèctric, escriurem

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r \tag{6}$$

on \mathbf{u}_r és un vector unitari perpendicular a la distribució lineal de càrrega i dirigit cap a fora. Com podem veure, aquest resultat no depèn del valor que utilitzem per a la longitud arbitrària del cilindre que hem emprat com a superfície gaussiana per a aplicar-hi la llei de Gauss.

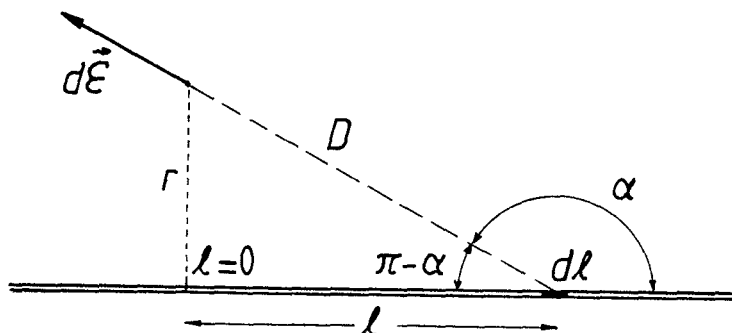


FIG. 5

Per a comprovar que el resultat és correcte, tornarem a calcular \mathcal{E} , però ara a partir de la definició de camp elèctric. En un punt que es troba a una distància D de la línia carregada, el camp elèctric creat per la càrrega dq que es troba en un element de línia $d\ell$ val (fig. 5)

$$d\mathcal{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 D^2} \mathbf{u} \tag{7}$$

on ara \mathbf{u} representa el vector unitari que va des de l'element infinitesimal de càrrega fins al punt on es calcula el camp elèctric (el sentit que li hem assignat en la figura correspon a una densitat de càrrega positiva; si aquesta fóra negativa, caldria canviar-li el signe). A partir de l'eq. (5) i per ser la distribució de càrrega homogènia, podem escriure

$$dq = \lambda d\ell \tag{8}$$

Així, doncs, el camp elèctric creat en el punt en qüestió per la càrrega que es troba en l'element infinitesimal de línia val

$$d\mathcal{E} = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 D^2} \mathbf{u} \tag{9}$$

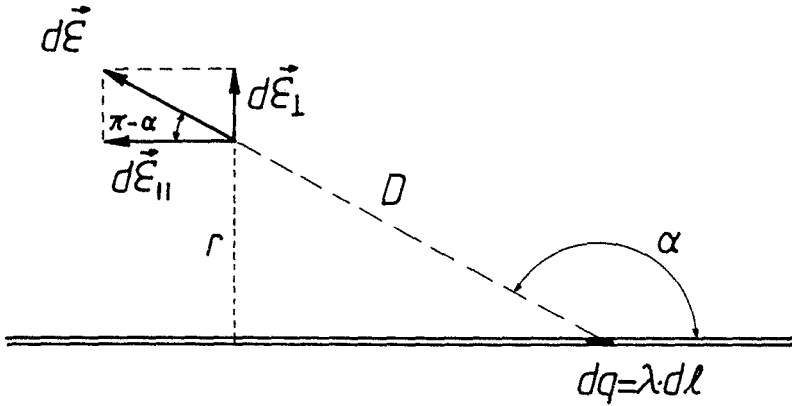


FIG. 6

Si descomponem aquest camp infinitesimal en els components paral·lel ($d\mathcal{E}_{||}$) i perpendicular ($d\mathcal{E}_{\perp}$) a la línia carregada, escriurem (fig. 6)

$$d\mathcal{E}_{||} = |d\mathcal{E}| \cos(\pi - \alpha) = -\frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 D^2} \cos \alpha \quad (10)$$

$$d\mathcal{E}_{\perp} = |d\mathcal{E}| \sin \alpha = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 D^2} \sin \alpha \quad (11)$$

El camp elèctric total sobre el punt en qüestió serà la suma, o, per tractar-se en aquest cas d'una distribució contínua de càrrega, la integral dels camps infinitesimals creats per la distribució de càrrega en aquest punt

$$\mathcal{E}_{||} = \int_{\text{distribució de càrrega}} d\mathcal{E}_{||} = - \int \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 D^2} \cos \alpha \quad (12)$$

i anàlogament per a \mathcal{E}_{\perp} . La integració anterior ha de fer-se per a tota la distribució de càrrega, que s'estén homogèniament sobre una línia infinita. Per a fer això hem d'escriure la integral en termes d'una única variable d'integració, que pot ser qualsevol de les tres següents: la distància des de l'element de càrrega fins al punt on es calcula el camp (D), la projecció de la distància anterior sobre la línia carregada (ℓ), o l'angle que va des de la línia carregada fins a la línia que uneix la càrrega infinitesimal amb el punt on es calcula el camp (α). Nosaltres prendrem com a variable d'integració l'angle α . La relació entre α , D i ℓ és fàcil de deduir per trigonometria a partir de la fig. 5,

$$D = \frac{r}{\sin \alpha} \quad (13)$$

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{r}{\ell} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{r}{\ell} \Rightarrow \ell = -\frac{r}{\tan \alpha} \Rightarrow d\ell = \frac{r d\alpha}{\sin^2 \alpha} \quad (14)$$

Si fem la integració des del costat esquerre fins al costat dret de la distribució infinita de càrrega, això correspon a prendre com a límits d'integració els valors $\alpha = 0$ i $\alpha = \pi$,

respectivament. Després de substituir les expressions (13) i (14) dins l'eq. (12) i la corresponent a \mathcal{E}_\perp , tenim les integrals

$$\mathcal{E}_\parallel = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^\pi \cos \alpha d\alpha = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \sin \alpha \Big|_0^\pi = 0 \quad (15)$$

$$\mathcal{E}_\perp = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha \Big|_0^\pi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (16)$$

Com es pot comprovar, el camp elèctric només té component perpendicular a la línia carregada, és a dir, és radial, i el seu valor és el donat per l'eq. (16), que, com calia esperar, coincideix amb el resultat calculat per l'altre mètode, eq. (6), cosa que serveix com a comprovació que el càlcul està ben fet. Ara bé, amb aquest exercici es posa de manifest que el càlcul directe del camp elèctric a partir de la seua definició és, moltes vegades, una tasca més feixuga que el càlcul a partir del teorema de Gauss quan la geometria del problema ho permet.

9

Conductors i dielèctrics

9.1 Les càrregues de dues esferes conductores de radis 0.10 cm i 0.15 cm són 10^{-7} C i $2 \cdot 10^{-7}$ C, respectivament. Mantenint-les molt allunyades entre elles, es posen en contacte elèctric mitjançant un fil conductor de capacitat negligible i després es trenca aquest contacte elèctric. Calculeu la càrrega que té finalment cada esfera.

$$R_1 = 0.10 \text{ cm} = 10^{-3} \text{ m}, q_1 = 10^{-7} \text{ C}$$

$$R_2 = 0.15 \text{ cm} = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}, q_2 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

càrregues q'_1 i q'_2 de cada esfera després de posar-se en contacte i de separar-se?

El fet que les dues esferes es troben molt allunyades és important per a evitar que arriben a influir-se. Així, en la resolució del problema no tindrem en compte els efectes d'inducció.

Abans de posar-se en contacte, cada esfera té un potencial diferent, V_1 i V_2 , respectivament. Si situem en l'infinit l'origen de potencials, en les esferes conductores de radis R_1 i R_2 , respectivament, els potencials són

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad \text{i} \quad V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (1)$$

Com que es tracta d'esferes conductores, les dues esferes tindran el mateix potencial després de posar-se en contacte, $V'_1 = V'_2$, però distint del que tenien anteriorment. Aquest canvi de potencial de cada esfera respecte del seu potencial anterior haurà estat possible gràcies a una variació de les seues càrregues, ja que el potencial de cada esfera conductora de radi R i amb càrrega Q és, genèricament, de la forma $V = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$ i R no ha canviat per a cada esfera, per tant ha d'haver canviat la càrrega Q perquè ara el potencial siga diferent del d'abans. Així, ara tindrem

$$V'_1 = \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad \text{i} \quad V'_2 = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (2)$$

on q'_1 i q'_2 són les càrregues que té cada esfera després de posar-se en contacte. De les eqs. (2), i considerant que $V'_1 = V'_2$ perquè s'han posat en contacte, s'obté

$$\frac{q'_1}{R_1} = \frac{q'_2}{R_2} \quad (3)$$

D'altra banda, haurem de tenir en compte la conservació de la càrrega elèctrica total del sistema. És a dir, la càrrega total del sistema d'esferes conductores ha de continuar sent la mateixa abans, $q_1 + q_2$, i després, $q'_1 + q'_2$, de posar les esferes en contacte,

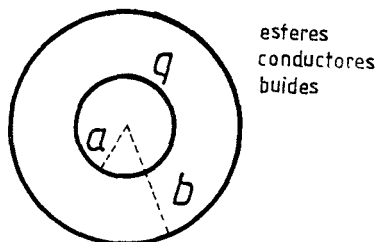
$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2 \quad (4)$$

Les eqs. (3) i (4) constitueixen un sistema de dues equacions amb dues incògnites, q'_1 i q'_2 . Si resollem aquest sistema obtenim

$$q'_1 = \frac{q_1 + q_2}{1 + r_2/r_1} = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ C} \quad \text{i} \quad q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{1 + r_1/r_2} = 1.8 \cdot 10^{-7} \text{ C} \quad (5)$$

Notem que q'_1 i q'_2 verifiquen la llei de conservació de la càrrega elèctrica en sistemes aïllats. Recordeu que en els conductors les càrregues es troben distribuïdes sobre la superfície.

9.2 Una esfera conductora buida, de radi $a = 1$ cm i amb una càrrega $q = 2$ C, es troba envoltada per una altra esfera conductora buida concèntrica amb la primera, de radi $b = 2$ cm i descarregada. Mitjançant un fil conductor es posen en contacte ambdues esferes. (a) Calculeu el camp i el potencial elèctrics en tots els punts de l'espai. (b) Representeu gràficament el potencial i el camp elèctrics en funció de la distància al centre comú de les dues esferes.



$q = 2$ C, $a = 0.01$ m, $b = 0.02$ m

després de posar-se en contacte les esferes i trencar-se aquest contacte:

(a) $\mathcal{E}(r)$, $V(r)$?

(b) representació gràfica de $\mathcal{E}(r)$ i $V(r)$.

(a) En posar-se en contacte ambdues esferes conductores mitjançant un fil conductor tota la càrrega de l'esfera interior passa a la superfície de l'esfera exterior, ja que en un sistema conductor tota la càrrega lliure o neta està sobre la superfície d'aquest. Això és equivalent a dir que, en condicions d'equilibri electrostàtic, el camp elèctric és nul i el potencial elèctric és constant en l'interior del sistema conductor. Així, doncs, després de posar-se en contacte tindrem

$$\mathcal{E}(r) = 0 \quad \text{quan } 0 \leq r < b \quad (1)$$

per tractar-se d'un conductor.

Per a calcular el camp elèctric $\mathcal{E}(r)$ en punts $r \geq b$, utilitzarem la llei de Gauss,

$$\oint \mathcal{E} \, dS = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \quad (2)$$

on q_{neta} és la càrrega neta tancada dins la superfície gaussiana sobre la qual es fa la integració.

Com a superfície gaussiana per a calcular el flux del camp elèctric, eq. (2), prenem una superfície gaussiana esfèrica de radi $r > b$ concèntrica amb les dues esferes conductores

(fig. 1). Per simetria, el camp elèctric $\mathcal{E}(r)$ només té component radial i té el mateix valor sobre tots els punts de l'esfera gaussiana de radi r , per això podem escriure

$$\oint \mathcal{E} d\mathbf{S} = \oint \mathcal{E} dS = \mathcal{E} \oint dS = \mathcal{E}4\pi r^2 \quad (3)$$

on hem tingut en compte que \mathcal{E} és paral·lel a $d\mathbf{S}$ i que l'àrea d'una esfera de radi r val $4\pi r^2$. La càrrega neta tancada dins d'aquesta superfície esfèrica és q , per tant, de les eqs. (2) i (3), el camp elèctric val

$$\mathcal{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{quan } r \geq b \quad (4)$$

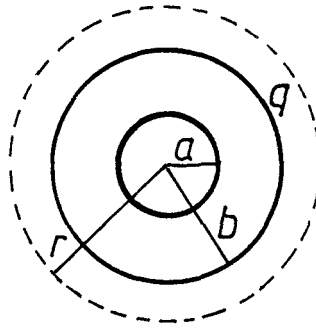


FIG. 1

Una vegada conegut el valor del camp elèctric en tot l'espai, calcularem el potencial elèctric $V(r)$, segons la relació següent, vàlida per a camps radials,

$$\mathcal{E}(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \quad (5)$$

és a dir,

$$V(r) = -\int \mathcal{E}(r) dr \quad (6)$$

A més d'aquesta relació hem d'utilitzar el fet que $V(r \rightarrow \infty) = 0$ i la condició de continuïtat del potencial.

Càlcul de $V(r)$ per a $r \geq b$: Si substituïm dins l'eq. (6) l'expressió que apareix en l'eq. (4) obtenim

$$V(r) = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{constant} \quad (7)$$

i si tenim en compte la condició de contorn per al potencial elèctric, $V(r \rightarrow \infty) = 0$, obtenim que la constant d'integració val zero. Per tant, ens queda

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{quan } r \geq b \quad (8)$$

Càlcul de $V(r)$ quan $0 \leq r \leq b$: Si substituïm el valor del camp elèctric, eq. (1), dins l'expressió (6), obtenim

$$V(r) = - \int 0 dr = 0 + \text{constant} \quad (9)$$

Com que el potencial ha de ser continu, i, segons l'eq. (8), sobre la superfície $r = b$ val

$$V(r = b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \quad (10)$$

De les eqs. (9) i (10) obtenim que ara la constant val

$$\text{constant} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \quad (11)$$

i, en fer les substitucions corresponents dins l'expressió del potencial en la regió $0 \leq r < b$, eq. (9), tenim

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \quad \text{quan } 0 \leq r < b \quad (12)$$

Les representacions gràfiques del mòdul del camp elèctric i del potencial elèctric apareixen en la fig. 2. Cal que remarquem que el camp elèctric és discontinu en la superfície $r = b$ i, en canvi, el potencial elèctric no ho és.

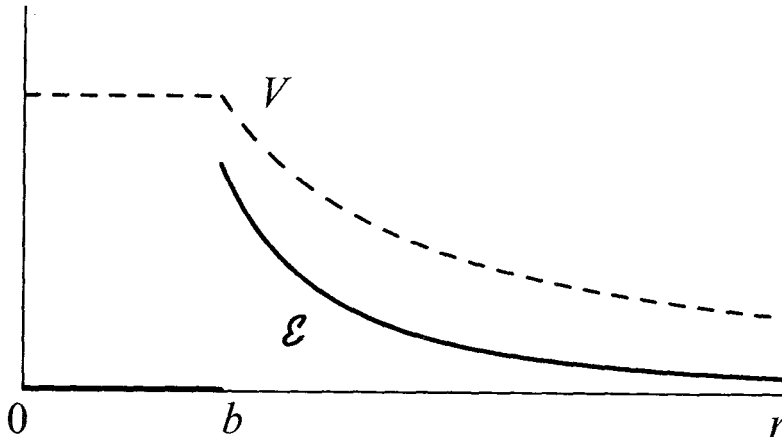
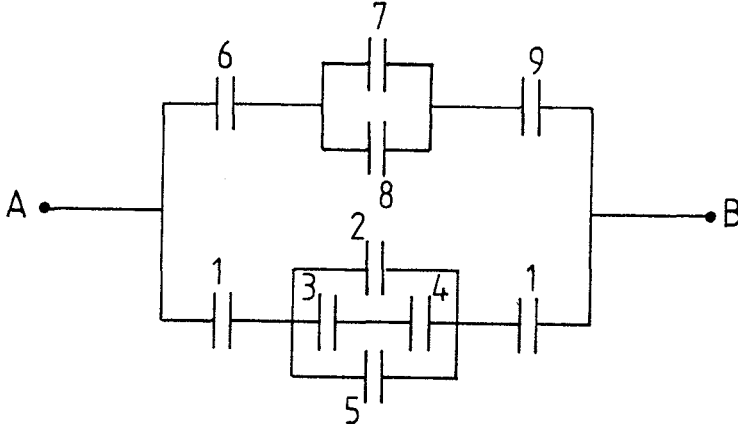


FIG. 2

9.3 En la xarxa de condensadors representada en l'esquema, les xifres indiquen la capacitat d'aquests en nF. La càrrega del condensador de 5 nF és de $2 \mu\text{C}$. Calculeu: (a) la capacitat equivalent a la de tot el sistema entre els punts A i B, i (b) la diferència de potencial entre els mateixos punts d'abans. ($1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$).



coneixem totes les capacitats dels condensadors de la xarxa i, a més a més, la càrrega que correspon al condensador de 5 nF, $Q_5 = 2 \mu\text{C}$.

- (a) C_{AB} ?
- (b) V_{AB} ?

(a) Calcularem per trams la capacitat equivalent del circuit AB. Per fer això considerarem que si l'associació de dos condensadors qualssevol, C_a i C_b , és en sèrie, la capacitat equivalent C_{eq} verificarà

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b} \tag{1}$$

i si aquests condensadors estan associats en paral·lel, es complirà que

$$C_{eq} = C_a + C_b \tag{2}$$

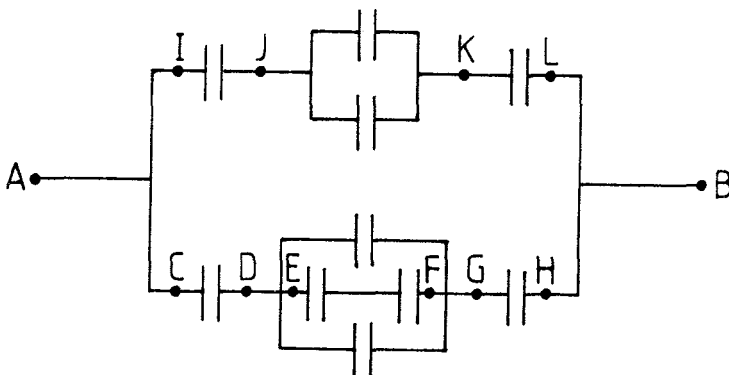


FIG. 1

Segons l'eq. (1), la capacitat equivalent del tram JK (fig. 1), compost per condensadors en paral·lel, serà $C_{JK} = 7 + 8 = 15$ nF. En el tram IL, després de calcular el condensador equivalent entre els punts J i K, els condensadors estan associats en sèrie, i de l'eq. (2) obtindrem que $1/C_{IL} = 1/6 + 1/C_{JK} + 1/9$, que dóna $C_{IL} = 2.9$ nF. Anàlogament, per a la capacitat equivalent del tram EF (associació en sèrie) tenim $1/C_{EF} = 1/3 + 1/4$, que dóna $C_{EF} = 1.7$ nF. La capacitat equivalent del tram DG (associació en paral·lel) ve donada per $C_{DG} = 2 + C_{EF} + 5 = 8.7$ nF. Finalment, per al tram CH, en què els condensadors estan associats en sèrie, obtenim que $1/C_{CH} = 1/1 + 1/C_{DG} + 1/1$, i, en conseqüència, $C_{CH} = 0.47$ nF.

Com a resultat de tot això, la capacitat equivalent del circuit, és a dir, la capacitat en el tram AB, pot calcular-se com si fóra la capacitat equivalent de dos condensadors en paral·lel, C_{IL} i C_{CH} . Això dóna

$$C_{AB} = C_{IL} + C_{CH} \Rightarrow C_{AB} = 3.37 \text{ nF} \quad (3)$$

Com podem apreciar, procedint per parts hem calculat la capacitat equivalent d'un sistema de condensadors aparentment complex. Hem calculat les capacitats equivalents d'estructures simples de condensadors, agrupats de dins cap a fora de l'estructura, i hem aprofitat en cada pas les capacitats equivalents obtingudes en els passos anteriors.

(b) La diferència de potencial entre els dos punts A i B ve donada per

$$V_{AB} = Q/C_{AB} \quad (4)$$

on Q és la càrrega que hi hauria en cada placa del condensador que equival a tota la xarxa de condensadors.

Començarem calculant la diferència de potencial entre els punts D i G, V_{DG} . Si considerem que entre aquests punts els condensadors es troben en paral·lel, podem obtenir la mateixa diferència de potencial calculant-la per les branques (i), (ii) o (iii) representades en la fig. 2.

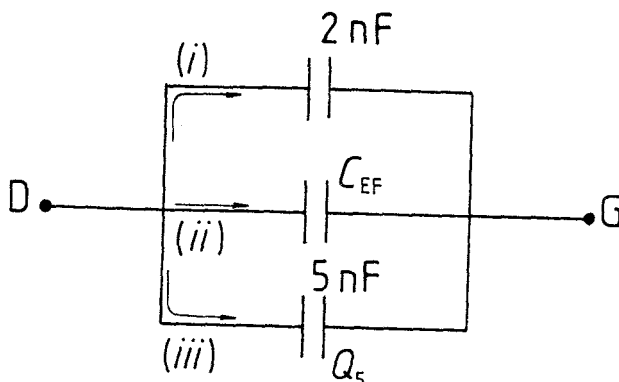


FIG. 2

A partir de la branca (iii), podem escriure: $V_{DG} = Q_5/C_5$, i d'ací tenim que $V_{DG} = (2 \cdot 10^{-6} \text{ C}) / (5 \cdot 10^{-9} \text{ F}) = 400 \text{ V}$. Com que coneixem la capacitat equivalent C_{DG} , calculem la càrrega Q_{DG} segons l'eq. (4), $Q_{DG} = V_{DG} C_{DG} = 400 \text{ V} \cdot 8.7 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 3.48 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

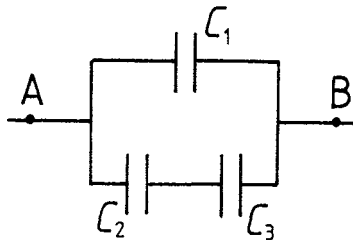
La diferència de potencial entre els dos punts A i B serà $V_{AB} = V_{CH} = V_{IL}$, ja que els trams IL i CH estan en paral·lel. Com que $V_{CH} = V_{CD} + V_{DG} + V_{GH}$, ja que tenim tres condensadors en sèrie, això dóna

$$V_{CH} = \frac{Q_{CD}}{C_{CD}} + \frac{Q_{DG}}{C_{DG}} + \frac{Q_{GH}}{C_{GH}} \quad (5)$$

Si ara considerem que quan els condensadors estan en sèrie tots tenen la mateixa càrrega, $Q_{CD} = Q_{DG} = Q_{GH} = 3.48 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, i si, a més, coneixem totes les capacitats que hi ha dins el sistema de condensadors, obtindrem finalment la diferència de potencial entre els punts A i B

$$V_{AB} = V_{CH} = Q_{DG} \left(\frac{1}{C_{CD}} + \frac{1}{C_{DG}} + \frac{1}{C_{GH}} \right) = 7360 \text{ V} \quad (6)$$

9.4 Un condensador C_1 , de capacitat $1 \mu\text{F}$, es carrega inicialment connectant-ne les armadures a un generador que estableix entre aquestes una diferència de potencial de 500 V. Una vegada està carregat, es desconnecta C_1 del generador i s'uneix, com s'indica en l'esquema, a altres dos condensadors, C_2 i C_3 , de capacitats $2 \mu\text{F}$ i $3 \mu\text{F}$, respectivament. Calculeu: (a) la càrrega de cada condensador, (b) la diferència de potencial entre les plaques de cada condensador, i (c) la capacitat equivalent entre els punts A i B.



$$C_1 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}, C_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}, C_3 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ F}, V_1 = 500 \text{ V}$$

(a) càrrega de cada condensador?

(b) diferència de potencial entre les plaques de cada condensador?

(c) capacitat equivalent entre A i B?

(a) Si apliquem la diferència de potencial inicial V_1 al condensador C_1 , aquest es carrega segons la relació

$$Q_1 = C_1 V_1 = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 500 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ C} \quad (1)$$

D'ara endavant, ens referirem a la càrrega d'un condensador com la càrrega d'una de les seues plaques, ja que l'altra placa tindrà una càrrega igual, però de signe contrari.

Una vegada carregat el condensador C_1 , el connectem amb els condensadors C_2 i C_3 . La càrrega Q_1 que tenia inicialment el condensador C_1 es repartirà amb C_2 per mitjà de

les plaques de C_1 i C_2 , que estan unides entre si (fig. 1). Pel principi de conservació de la càrrega, es verificarà que

$$Q_1 = q_1 + q_2 \quad (2)$$

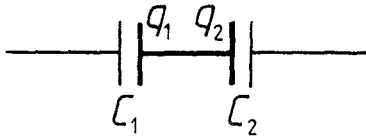


FIG. 1

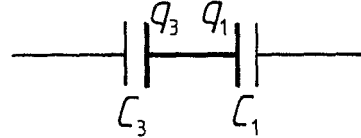


FIG. 2

Anàlogament, la càrrega que tenia el condensador C_1 també es repartirà amb el condensador C_3 , ja que estan units (fig. 2),

$$Q_1 = q_1 + q_3 \quad (3)$$

A partir de les relacions (2) i (3), resulta que

$$q_2 = q_3 \quad (4)$$

L'esquema del circuit, especificant les càrregues de cada condensador, quedarà tal com representa la fig. 3.

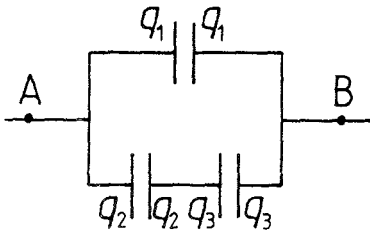


FIG. 3

Si substituïm l'eq. (1) dins l'eq. (2) obtenim:

$$C_1 V_i = q_1 + q_2 \quad (5)$$

De moment tenim dues equacions, l'eq. (5) i l'eq. (4), però tres incògnites: q_1 , q_2 i q_3 . Ens fa falta una tercera equació per a obtenir les càrregues de cada condensador.

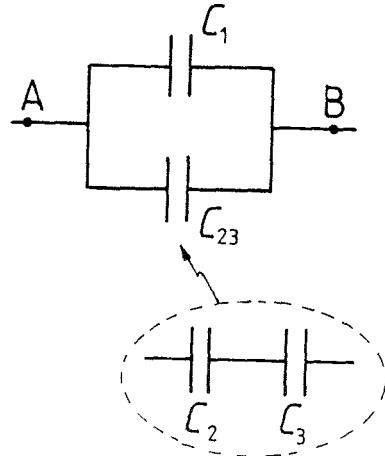


FIG. 4

Si considerem que el condensador C_1 està en paral·lel amb els condensadors C_2 i C_3 (els quals estan en sèrie entre si), la diferència de potencial en la branca superior (V_1) serà igual a la diferència de potencial en la branca inferior ($V_2 + V_3$):

$$V_1 = V_2 + V_3 \quad (6)$$

i com que el potencial està relacionat amb la càrrega i la capacitat d'un condensador mitjançant $V = q/C$, podem reescriure l'eq. (6) com:

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} \quad (7)$$

Aquesta és la tercera equació que ens faltava i ja tenim complet el sistema de tres equacions [les eqs. (4), (5) i (7)] amb les tres incògnites (q_1 , q_2 i q_3). La solució d'aquest sistema dóna:

$$q_1 = V_i C_1 \frac{C_1 C_3 + C_1 C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} = 2.27 \cdot 10^{-4} \text{ C} \quad (8)$$

$$q_2 = V_i C_1 \frac{C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} = 2.73 \cdot 10^{-4} \text{ C} \quad (9)$$

$$q_3 = V_i C_1 \frac{C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} = 2.73 \cdot 10^{-4} \text{ C} \quad (10)$$

(b) A partir dels valors obtinguts per a les càrregues de cada condensador, podem obtenir-ne les corresponents diferències de potencial:

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = 227.27 \text{ V} \quad (11)$$

$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = 136.36 \text{ V} \quad (12)$$

$$V_3 = \frac{q_3}{C_3} = 90.91 \text{ V} \quad (13)$$

Si ens hagueren preguntat directament pel valor de les diferències de potencial en cada condensador, sense preguntar-nos prèviament pel valor de les càrregues, hauríem procedit de forma semblant a la de l'apartat (a), però tractant d'escriure les equacions corresponents en termes de diferències de potencial i no de càrregues. Així, l'eq. (5) es convertiria en

$$C_1 V_i = C_1 V_1 + C_2 V_2 \quad (14)$$

L'eq. (4) seria ara:

$$C_2 V_2 = C_3 V_3 \quad (15)$$

i la tercera equació del sistema d'equacions seria l'eq. (6). La resolució d'aquest sistema donaria:

$$V_1 = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} = 227.27 \text{ V} \quad (16)$$

$$V_2 = \frac{C_1 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} = 136.36 \text{ V} \quad (17)$$

$$V_3 = \frac{C_1 C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} = 90.91 \text{ V} \quad (18)$$

Com és lògic, hem obtingut el mateix resultat que abans.

(c) Per a calcular la capacitat equivalent entre els punts A i B, hem de calcular primer la capacitat equivalent C_{23} entre C_2 i C_3 que, per estar associades en sèrie (fig. 4), verifiquen

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow C_{23} = 1.2 \cdot 10^{-6} \text{ F} \quad (19)$$

i la capacitat equivalent entre A i B ve donada per l'associació en paral·lel (fig. 4) de C_1 i C_{23}

$$C_{AB} = C_1 + C_{23} = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ F} \quad (20)$$

9.5 Una esfera de vidre de radi R està carregada homogèniament amb una densitat volúmica de càrrega ρ . Quin és el radi R_0 que divideix l'esfera en dues parts que continguin la mateixa energia elèctrica?

$\rho = \text{constant}$; ϵ permitivitat del vidre

R_0 ?, de forma que $U_{\text{elèct}}(0 \leq r \leq R_0) = U_{\text{elèct}}(R_0 \leq r \leq R)$

Calcularem l'energia elèctrica a partir de la densitat d'energia elèctrica, $E_{\text{elèct}}(r)$, la qual val

$$E_{\text{elèct}}(r) = \frac{\epsilon(r) \mathcal{E}^2(r)}{2} \quad (1)$$

on $\epsilon(r)$ és la permitivitat del material i $\mathcal{E}(r)$ és el mòdul del camp elèctric en la regió de l'espai determinada pel vector posició r .

L'energia elèctrica dins l'esfera de radi R_0 valdrà:

$$U_{\text{elèct}}(0 \leq r \leq R_0) = \int_0^{R_0} E_{\text{elèct}}(r) d^3r \quad (2)$$

i en la closca esfèrica compresa entre R_0 i R valdrà:

$$U_{\text{elèct}}(R_0 \leq r \leq R) = \int_{R_0}^R E_{\text{elèct}}(r) d^3r \quad (3)$$

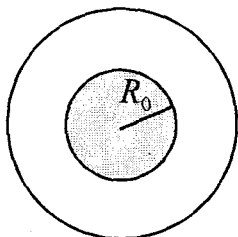


FIG. 1

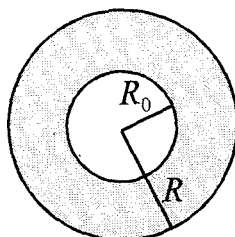


FIG. 2

Les regions en què s'han d'avaluar les integrals donades per les eqs. (2) i (3) estan representades en les figs. 1 i 2, respectivament.

Com que la permitivitat ϵ és la mateixa en tota l'esfera, només ens fa falta conèixer el camp elèctric en les diferents regions de l'espai. Així, en substituir ϵ i \mathcal{E} en l'eq. (1), podrem fer les integrals que apareixen en les eqs. (2) i (3).

El camp elèctric creat per una esfera que té una densitat volúmica de càrrega ρ homogènia es pot obtenir a partir de la llei de Gauss generalitzada per a qualsevol medi, caracteritzat per la seua permitivitat ϵ . Així, doncs, si apliquem aquesta llei a l'esfera gaussiana de radi r , representada en la fig. 3, tindrem:

$$r < R: \quad \oint \mathcal{E} dS = \frac{q_{\text{lliure}}}{\epsilon} \quad (4)$$

on q_{lliure} és la càrrega lliure tancada dins la superfície gaussiana (en aquest cas, l'esfera de radi r) i ϵ és la permitivitat del medi en què calculem el camp elèctric.

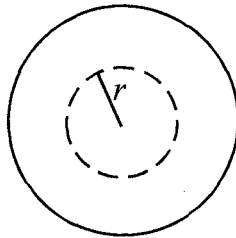


FIG. 3

A partir de la simetria esfèrica del problema, podem deduir que el camp elèctric és radial i, per tant, paral·lel a l'element infinitesimal de superfície: $\mathcal{E} \parallel dS$. Això implica que la integral de la part esquerra de l'eq. (4) s'escriu

$$\oint \mathcal{E} dS = \oint \mathcal{E} dS \quad (5)$$

A més, de nou per la simetria esfèrica del problema, sabem que \mathcal{E} és constant sobre la superfície de radi r , i per això pot eixir fora de la integral, la qual ara s'escriu

$$\oint \mathcal{E} dS = \mathcal{E} \oint dS \quad (6)$$

Si tenim en compte que $\oint dS = 4\pi r^2$ obtenim finalment que la part esquerra de l'eq. (4) val

$$\oint \mathcal{E} dS = 4\pi r^2 \mathcal{E} \quad (7)$$

D'altra banda, com que la densitat de càrrega és homogènia, tenim que la càrrega lliure tancada dins l'esfera de radi r val

$$q_{\text{lliure}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad (8)$$

Ara l'eq. (4) queda

$$4\pi r^2 \mathcal{E} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon} \quad (9)$$

d'on obtenim que el camp elèctric a una distància r del centre de l'esfera val

$$\mathcal{E}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon} r \quad (10)$$

El camp elèctric fora de l'esfera de radi R no ens fa falta calcular-lo. De totes maneres, si hi apliquem de nou la llei de Gauss, obtindriem:

$$r \geq R: \quad \mathcal{E} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \quad (11)$$

on ϵ_0 és la permitivitat del buit.

A partir de les eqs. (1) i (10), i usant que l'element infinitesimal de volum en coordenades esfèriques val $d^3r = r^2 \sin \theta d\theta d\psi dr$, l'eq. (2) dóna:

$$U_{\text{elèct}}(0 \leq r \leq R_0) = \int_0^{R_0} \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\rho r}{3\epsilon}\right)^2 r^2 \sin \theta d\theta d\psi dr \quad (12)$$

Com que ϵ i ρ són constants, poden eixir fora de la integral. A més, les integrals en les variables angulars donen 4π , i l'equació anterior dóna

$$\begin{aligned} U_{\text{elèct}}(0 \leq r \leq R_0) &= \frac{4\pi \rho^2}{18\epsilon} \int_0^{R_0} r^4 dr \\ &= \frac{2\pi \rho^2}{9\epsilon} \left(\frac{r^5}{5}\right) \Big|_0^{R_0} = \frac{2\pi \rho^2}{45\epsilon} R_0^5 \end{aligned} \quad (13)$$

Procedint de forma anàloga amb l'eq. (3), obtenim

$$U_{\text{elèct}}(R_0 \leq r \leq R) = \dots = \frac{4\pi \rho^2}{18\epsilon} \int_{R_0}^R r^4 dr = \frac{2\pi \rho^2}{45\epsilon} (R^5 - R_0^5) \quad (14)$$

Ara imposem la igualtat d'energies elèctriques dins i fora de l'esfera de radi R_0 , $U_{\text{elèct}}(0 \leq r \leq R_0) = U_{\text{elèct}}(R_0 \leq r \leq R)$, de la qual equació s'obté:

$$\frac{2\pi \rho^2}{45\epsilon} R_0^5 = \frac{2\pi \rho^2}{45\epsilon} (R^5 - R_0^5) \quad (15)$$

i, en aïllar R_0 , obtenim

$$R_0 = \frac{R}{2^{1/5}} = 0.87R \quad (16)$$

Com veiem, per a fer els càlculs no ens ha fet falta conèixer la permitivitat del vidre (que és el material amb què està feta l'esfera).

L'eq. (16) ens mostra que una esfera relativament gran té la mateixa energia elèctrica que una capa esfèrica prima (fig. 4). Això és degut al fet que el camp elèctric dins l'esfera és proporcional a la distància radial, i en les capes més externes, el camp elèctric val més que prop del centre.

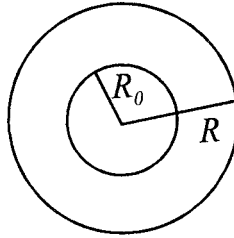
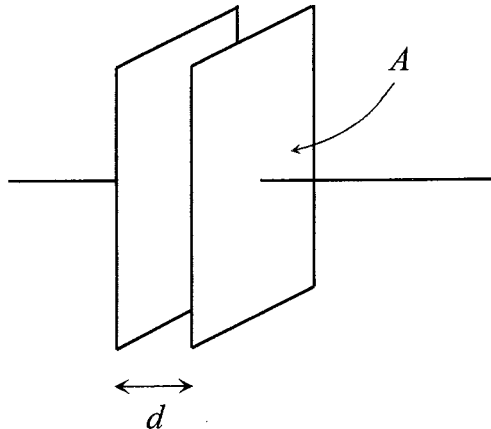


FIG. 4

9.6 Un condensador de cares planoparal·leles té una àrea $A = 20 \text{ cm}^2$ i una separació entre les plaques $d = 4 \text{ mm}$. (a) Quan hi ha aire entre les plaques, calculeu la capacitat del condensador, i també el voltatge i la càrrega màxims que pot suportar el condensador. (b) Si inserim una làmina de tefló que ompli completament el volum entre les plaques del condensador, calculeu-ne la nova capacitat, la càrrega i el voltatge màxims. (c) Abans d'inserir el tefló, apliquem un voltatge de 24 V a les plaques del condensador mitjançant una bateria i després es desconnecta. Quant val l'energia en el condensador abans i després d'inserir el tefló? Quin treball s'ha fet en inserir-hi el tefló?

La permitivitat relativa i el camp elèctric màxim per a la ruptura dielèctrica de l'aire valen 1.00054 i $3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$, respectivament. En el cas del tefló, aquests valors són 2.1 i $60 \cdot 10^6 \text{ V/m}$, respectivament.



$$A = 20 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}, d = 4 \text{ mm} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{aire: } \epsilon_{a,\text{rel}} = 1.00054, \mathcal{E}_{a,\text{m}\grave{\text{a}}\text{x}} = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

$$\text{tefló: } \epsilon_{t,\text{rel}} = 2.1, \mathcal{E}_{t,\text{m}\grave{\text{a}}\text{x}} = 60 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

$$(a) C_a?, V_{a,\text{m}\grave{\text{a}}\text{x}}?, Q_{a,\text{m}\grave{\text{a}}\text{x}}?$$

$$(b) C_t?, V_{t,\text{m}\grave{\text{a}}\text{x}}?, Q_{t,\text{m}\grave{\text{a}}\text{x}}?$$

$$(c) \quad \text{aire} \quad \text{tefló}$$



$$U_a?, U_t?, W_{\text{inserir tefló}}?$$

$$V_0 = 24 \text{ V}$$

(a) Per al condensador de cares plano-paral·les ple d'aire fem servir la següent expressió:

$$C_a = \frac{\epsilon_a A}{d} = \frac{\epsilon_{a,\text{rel}} \epsilon_0 A}{d} = 4.43 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad (1)$$

on hem usat que $\epsilon_{a,\text{rel}} = \epsilon_a / \epsilon_0$ i que la permitivitat del buit val $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

El camp elèctric en l'interior del condensador està relacionat amb la diferència de potencial entre les plaques, $V_1 - V_2 = V$, i amb la separació d que hi ha entre aquestes (fig. 1)

$$\mathcal{E} = \frac{V_1 - V_2}{d} = \frac{V}{d} \quad (2)$$

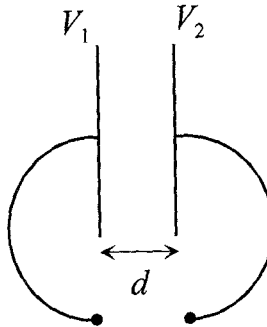


FIG. 1

A partir de l'eq. (2) podem obtenir la màxima diferència de potencial que pot suportar el condensador ple d'aire

$$V_{a,\text{m}\grave{\text{a}}\text{x}} = d \mathcal{E}_{a,\text{m}\grave{\text{a}}\text{x}} = 12 \cdot 10^3 \text{ V} \quad (3)$$

on $\mathcal{E}_{a,\text{m}\grave{\text{a}}\text{x}}$ és el camp elèctric màxim que pot haver-hi en l'aire abans de produir-se la ruptura dielèctrica.

A partir de la relació entre la capacitat, la càrrega i la diferència de potencial d'un condensador, $C = Q/V$, obtenim que la càrrega màxima del condensador ple d'aire val

$$Q_{a,\text{m}\grave{\text{a}}\text{x}} = C_a V_{a,\text{m}\grave{\text{a}}\text{x}} = 5.32 \cdot 10^{-8} \text{ C} \quad (4)$$

En escriure aquesta equació hem tingut present que la capacitat d'un condensador només depèn de la seua geometria, i no del voltage que hi apliquem.

(b) Ara que hi ha tefló, en comptes d'aire, dins el condensador, podem procedir de forma anàloga a l'apartat anterior i obtenim

$$C_t = \frac{\epsilon_t A}{d} = \frac{\epsilon_{t,\text{rel}} \epsilon_0 A}{d} = 9.29 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad (5)$$

$$V_{t,\text{màx}} = d \mathcal{E}_{t,\text{màx}} = 2.4 \cdot 10^5 \text{ V} \quad (6)$$

$$Q_{t,\text{màx}} = C_t V_{t,\text{màx}} = 2.23 \cdot 10^{-6} \text{ C} \quad (7)$$

Com podem apreciar, quan introduïm tefló entre les plaques, la càrrega màxima i el voltatge màxim que pot suportar el condensador han augmentat considerablement respecte de quan està ple d'aire.

(c) Per a calcular l'energia en el condensador emprem la relació

$$U = \frac{CV^2}{2} \quad (8)$$

que, en el cas en què hi ha aire entre les plaques del condensador, ens dóna

$$U_a = \frac{C_a V_0^2}{2} = 1.28 \cdot 10^{-9} \text{ J} \quad (9)$$

Per a calcular el voltatge V' en el condensador després de desconnectar la bateria, farem el raonament següent. (i) Una bateria carrega un condensador a una càrrega Q_0 i a un potencial V_0 (fig. 2). (ii) En desconnectar la bateria, la càrrega del condensador roman fixa, Q_0 . A partir de les expressions $C_a = Q_0/V_0$ i $C_a = \epsilon_a A/d$, podem establir la següent relació entre les propietats del condensador que no varien ϵ_a , A , d i Q_0 i el voltatge aplicat V_0 :

$$V_0 = \frac{Q_0 d}{\epsilon_a A} \quad (10)$$

Quan hi ha tefló entre les plaques del condensador, les expressions que fem servir són $C_t = Q_0/V'_0$ i $C_t = \epsilon_t A/d$. Com que Q_0 és fixa i ha variat C_t (perquè $\epsilon_t \neq \epsilon_a$), el voltatge V'_0 entre les plaques del condensador serà distint de V_0 , segons es desprén de la relació següent

$$V'_0 = \frac{Q_0 d}{\epsilon_t A} = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_t} V_0 \quad \Rightarrow \quad V'_0 < V_0 \quad (11)$$

on hem usat l'eq. (10). Com veiem, quan inserim el tefló després de desconnectar la bateria, el voltatge entre les plaques del condensador disminueix respecte de quan hi havia aire, $V'_0 < V_0$, i així ho detectaríem si usem un voltímetre per a mesurar-lo (fig. 3).

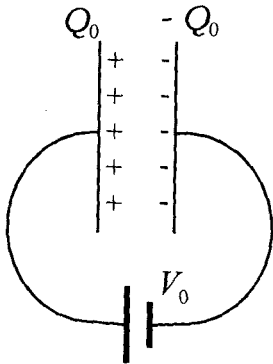


FIG. 2

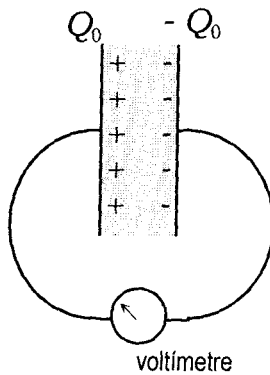


FIG. 3

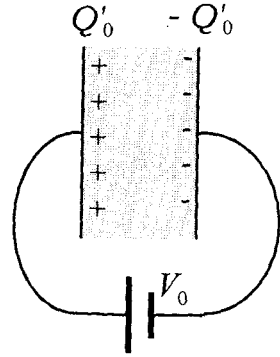


FIG. 4

Així, doncs, ara l'energia en el condensador valdrà

$$U_t = \frac{C_t (V'_0)^2}{2} = \frac{C_t (\epsilon_a V_0 / \epsilon_t)^2}{2} = 6.07 \cdot 10^{-10} \text{ J} \quad (12)$$

Com que l'energia enmagatzemada en el condensador ha disminuït de $1.28 \cdot 10^{-9} \text{ J}$ a $6.07 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ en inserir-hi el tefló, això indica que el condensador ha alliberat una energia de $6.73 \cdot 10^{-10} \text{ J}$. És a dir, el treball que s'ha de fer per a inserir-hi el tefló val

$$W_{\text{inserir tefló}} = -6.73 \cdot 10^{-10} \text{ J} \quad (13)$$

Notem que si, en comptes de desconnectar la bateria, la mantenim connectada mentre s'introdueix el tefló, ara no canviarà el voltatge del condensador (perquè està proporcionant-lo la bateria) i el que hi haurà de canviar serà la càrrega de les plaques (fig. 4).

Si se segueix un raonament similar al que hem fet en el cas anterior, ara com que V_0 és fix, tindriem $C_a = Q_0/V_0$ i $C_a = \epsilon_a A/d$, que ens condueix a

$$Q_0 = \frac{\epsilon_a V_0 A}{d} \quad (14)$$

i, per una altra part, $C_t = Q'_0/V_0$ i $C_t = \epsilon_t A/d$, que dóna:

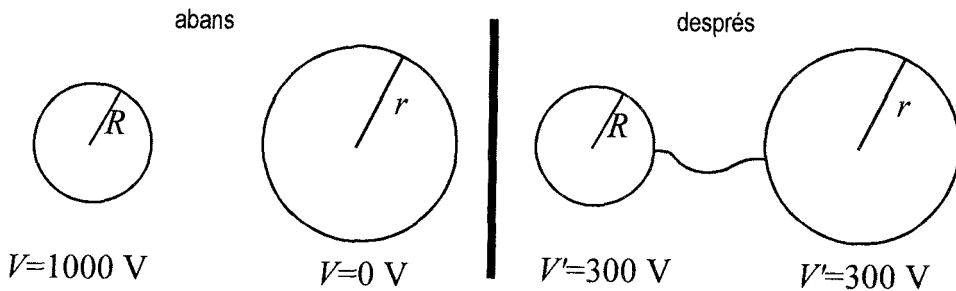
$$Q'_0 = \frac{\epsilon_t V_0 A}{d} \quad (15)$$

De les eqs. (14) i (15) s'obté que

$$Q'_0 = Q_0 \frac{\epsilon_t}{\epsilon_a} \Rightarrow Q'_0 > Q_0 \quad (16)$$

És a dir, en aquest cas, les plaques del condensador adquireixen més càrrega quan hi ha tefló que quan hi ha aire.

9.7 Una esfera metàl·lica de radi $R = 0.2$ m està carregada de forma que el seu potencial val $V = 1000$ V. Mitjançant un llarg fil conductor, de capacitat negligible, aquesta esfera es connecta a una altra esfera metàl·lica que estava descarregada i allunyada de la primera. Després d'això, el potencial de cada esfera val $V' = 300$ V. Quin és el radi de la segona esfera?



$R = 2$ m
 $r?$

No hi tindrem en compte els efectes d'inducció entre les dues esferes perquè considerem que estan molt allunyades l'una de l'altra.

Sabem que el potencial d'una esfera metàl·lica de radi R i càrrega Q val:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \tag{1}$$

d'on s'obté la càrrega Q en funció del radi R i el potencial V de l'esfera

$$Q = 4\pi\epsilon_0 V R \tag{2}$$

Després de posar en contacte ambdues esferes metàl·liques, la càrrega inicial Q (que és la que tenia la primera esfera) es distribueix entre les dues (fig. 1):

$$Q = q_1 + q_2 \tag{3}$$

on q_1 i q_2 són les càrregues que hi ha en cadascuna de les dues esferes després de posar-se en contacte. La càrrega no es distribueix sobre el fil conductor, perquè hem considerat que la seua capacitat és pràcticament nul·la.

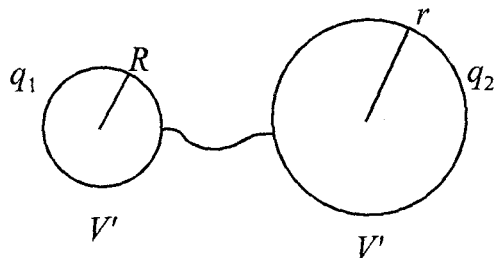


FIG. 1

En un sistema de conductors en contacte, el potencial val el mateix en tots els punts. Així, el potencial en cadascuna de les esferes tindrà el mateix valor V' :

$$\text{esfera de radi } R: \quad V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R} \quad (4)$$

$$\text{esfera de radi } r: \quad V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R} \quad (5)$$

A partir de l'eq. (3) obtenim

$$q_2 = Q - q_1 \quad (6)$$

i en fer servir les eqs. (2) i (4), es converteix en

$$q_2 = 4\pi\epsilon_0 V R - 4\pi\epsilon_0 V' R = 4\pi\epsilon_0 (V - V') R \quad (7)$$

A partir de l'eq. (5) escrivim

$$q_2 = 4\pi\epsilon_0 V' r \quad (8)$$

Finalment, de les eqs. (7) i (8) obtenim la relació següent

$$(V - V') R = V' r \quad (9)$$

que ens permet aïllar r

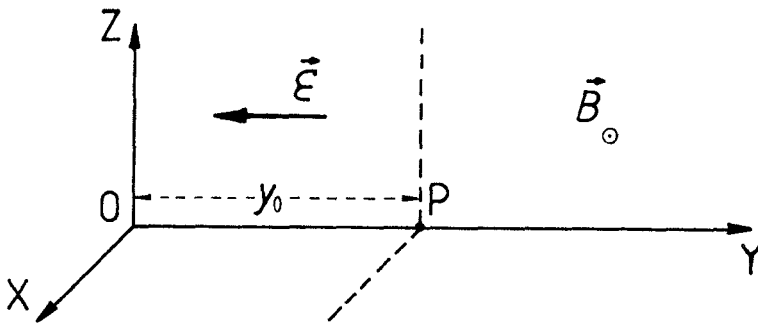
$$r = \frac{V - V'}{V'} R = \frac{1000 - 300}{300} 0.2 = 0.47 \text{ m} \quad (10)$$

Com veiem, la segona esfera és més gran que la primera.

10

**Efectes
del camp magnètic**

10.1 En la regió de la figura limitada pels plans $y = 0$ cm i $y = y_0 = 10$ cm, hi ha un camp elèctric $\mathcal{E} = -1000 \hat{j}$ V/m . En la regió que hi ha entre el pla $y = y_0$ i l'infinit hi ha un camp magnètic uniforme $\mathcal{B} = 10^{-4} \hat{i}$ T. Si situem un electró sense velocitat inicial en l'origen de coordenades: (a) calculeu la velocitat de l'electró en el punt P = (0, y_0 , 0), (b) comproveu que l'electró fa un moviment periòdic, i (c) quant val el seu període? (Dades: càrrega de l'electró = $-1.6 \cdot 10^{-19}$ C, massa de l'electró = $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg).



regió $0 \leq y \leq y_0$: $\mathcal{E} = -1000 \hat{j}$ V/m , $\mathcal{B} = 0$ T

regió $y > y_0$: $\mathcal{E} = 0$ V/m, $\mathcal{B} = 10^{-4} \hat{i}$ T

$y_0 = 10$ cm = 0.1 m, $v_0 = 0$ m/s, P = (0, y_0 , 0)

$q = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg

(a) v_P ?

(b) moviment periòdic?

(c) període?

En la fig. 1 apareix una representació espacial dels camps elèctric i magnètic que intervenen en el problema, i també les coordenades dels punts d'interès.

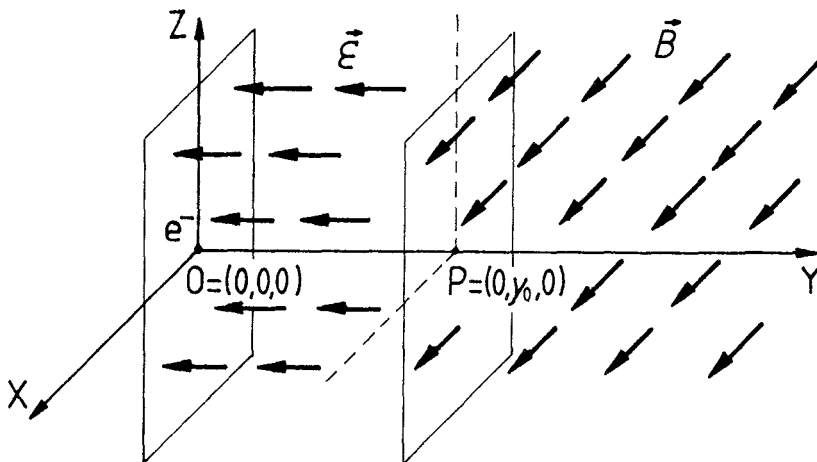


FIG. 1

(a) Si coneixem la velocitat inicial de l'electró, v_0 , és fàcil calcular-ne la velocitat final, v_P , després de recórrer una distància y_0 , si coneixem quina és l'acceleració de l'electró. Com que el camp \mathcal{E} no varia amb el temps ni amb la posició (en la regió $0 \leq y \leq y_0$), produeix una força sobre l'electró que és constant i, per tant, l'acceleració d'aquest també ho és. Per la cinemàtica d'un moviment uniformement accelerat, escriurem

$$v_P^2 = v_0^2 + 2y_0 a \quad (1)$$

La força a què l'electró està sotmès dins la zona $0 \leq y \leq y_0$ és la deguda al camp elèctric \mathcal{E} que hi ha, $\mathbf{F} = q\mathcal{E}$ (recordeu que en aquesta zona no hi ha camp magnètic). A més a més, segons la segona llei de Newton, tenim que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Això ens permet calcular l'acceleració a què està sotmès l'electró,

$$\mathbf{a} = \frac{q\mathcal{E}}{m} = \frac{(-1.6 \cdot 10^{-19}) \cdot (-1000)}{9.11 \cdot 10^{-31}} \mathbf{j} \text{ m/s}^2 = 1.76 \cdot 10^{14} \mathbf{j} \text{ m/s}^2 \quad (2)$$

Si substituïm els valors de v_0 , y_0 i a en l'eq. (1), obtenim que la velocitat de l'electró en el punt P és $v_P = \sqrt{y_0 a} = 5.93 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. En forma vectorial, la velocitat en P s'escriu $\mathbf{v}_P = 5.93 \cdot 10^6 \mathbf{j} \text{ m/s}$, ja que inicialment l'electró no té velocitat i l'acceleració es dirigeix cap a les y positives. És a dir, la velocitat de l'electró és en el sentit de l'eix Y .

(b) Per a comprovar si el moviment de l'electró és periòdic, haurem d'estudiar-ne la trajectòria. Per l'apartat anterior sabem que l'electró descriu una recta horitzontal entre els punts $O = (0,0,0)$ i $P = (0,y_0,0)$, i arriba al punt P amb velocitat $\mathbf{v}_P = 5.93 \cdot 10^6 \mathbf{j} \text{ m/s}$. Quan sobrepassi el punt P, el camp magnètic començarà a actuar i el camp elèctric deixarà de fer-ho. Això provocarà un canvi en la direcció (encara que no en el mòdul) de la velocitat de l'electró. El canvi de direcció es reflectirà en la curvatura de la trajectòria. El radi de curvatura es calcularà a partir del fet que l'única força que obliga a desviar-se l'electró de la trajectòria rectilínia ($\mathbf{F}_{\text{centrípeta}}$) és la força magnètica

$$\mathbf{F}_{\text{magnètica}} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3)$$

per això escriurem en aquest cas

$$F_{\text{centrípeta}} = F_{\text{magnètica}} \quad \Rightarrow \quad m \frac{v_P^2}{r} = |q| v_P B \quad (4)$$

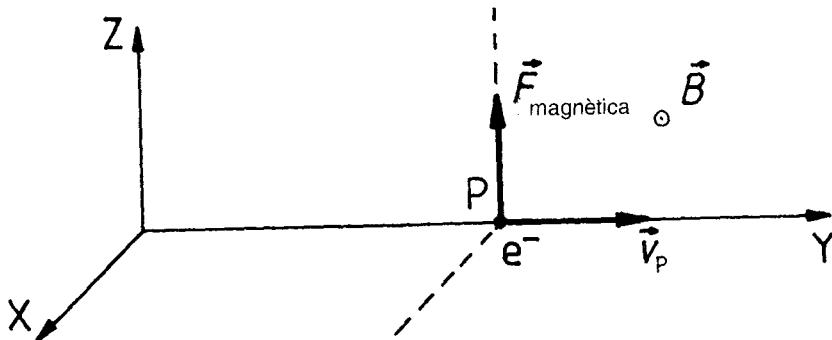


FIG. 2

Noteu que en la zona $y > y_0$ el camp magnètic és perpendicular a la velocitat de l'electró v_P , de forma que $|v_P \times B| = v_P B$. En l'eq. (4) hem considerat la igualtat de forces en mòdul perquè la força magnètica té la direcció i el sentit d'una força centrípeta. També hem tingut en compte que la càrrega de l'electró és negativa, per això la força actua cap amunt (en el sentit positiu de l'eix Z). El radi de curvatura serà, doncs,

$$r = \frac{m v_P}{|q| B} = 0.34 \text{ m} \tag{5}$$

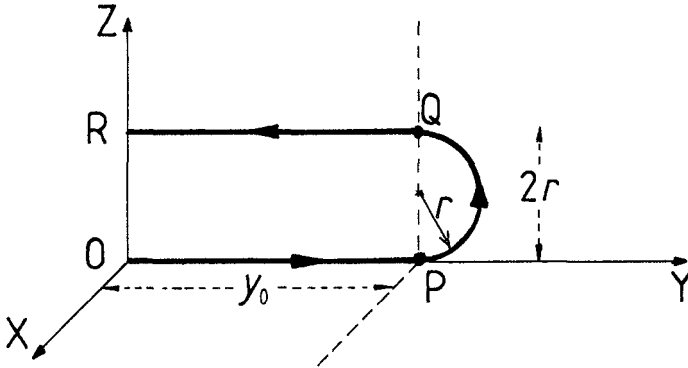


FIG. 3

La curvatura de la trajectòria de l'electró continuarà mentre el camp B actue sobre aquest; formarà una semicircumferència, fins que incidisca en el punt Q (fig. 3), amb la mateixa velocitat en mòdul (ja que v_P no ha canviat), però en sentit contrari a l'inicial: $v_Q = -v_P = -5.93 \cdot 10^6 \text{ j m/s}$. Una vegada l'electró ha traspasat el punt Q cap a l'esquerra, ja no hi ha camp magnètic i el camp elèctric comença a actuar. Això frena l'electró, ja que l'acceleració, $a = 1.76 \cdot 10^{14} \text{ j m/s}^2$, va en contra del moviment. L'electró seguirà en línia recta horitzontal fins a arribar al punt R (fig. 3) amb velocitat final nul·la (és suficient la substitució de valors en l'eq. (1) per a comprovar-ho). Una vegada arribi l'electró al punt $R = (0, 0, 2r) = (0, 0, 0.68) \text{ m}$, tornarà a iniciar-se el moviment que hem descrit al principi de l'apartat (b), però ara partint d'un punt que es troba a 0.68 m per damunt de l'anterior. Per tant, aquest moviment és periòdic (encara que no tinga per què ser harmònic simple).

Cal notar que el sentit de la força està relacionat amb el fet que la càrrega de l'electró és negativa. Si s'haguera tractat d'una càrrega positiva, la força hauria estat dirigida en sentit contrari.

(c) El període del moviment, T , serà el temps utilitzat per a anar del punt O al punt R (fig. 3), que podem descompondre com segueix

$$T = t_{OP} + t_{PQ} + t_{QR} \tag{6}$$

on t_{OP} representa el temps per a anar del punt O al P (anàlogament per a t_{PQ} i t_{QR}).

A partir d'ara treballem amb escalars perquè les úniques velocitats i acceleracions involucrades es produeixen al llarg de l'eix Y . Per cinemàtica del moviment uniformement accelerat sabem que la relació entre la velocitat en un punt inicial, v_i , la velocitat en un

punt final, v_f , l'acceleració a del moviment i el temps t del viatge entre ambdós punts és $v_f = v_i + at$, la qual cosa implica que

$$t_{OP} = \frac{(v_P - v_O)}{a} \quad \text{i} \quad t_{QR} = \frac{(v_O - v_P)}{(-a)} \quad (7)$$

és a dir, que

$$t_{OP} = t_{QR} = 3.34 \cdot 10^{-8} \text{ s} \quad (8)$$

Durant el trajecte PQ la velocitat en mòdul és constant i podem considerar que

$$t = \frac{\text{espai recorregut}}{\text{velocitat}} = \frac{\text{semicircumferència PQ}}{\text{velocitat}} = \frac{\pi r}{v_P} = 1.80 \cdot 10^{-7} \text{ s} \quad (9)$$

A partir d'aquests resultats i de l'eq. (6), el període serà $T = 2.47 \cdot 10^{-7} \text{ s}$. El moviment descrit per l'electró apareix representat en la fig. 4.

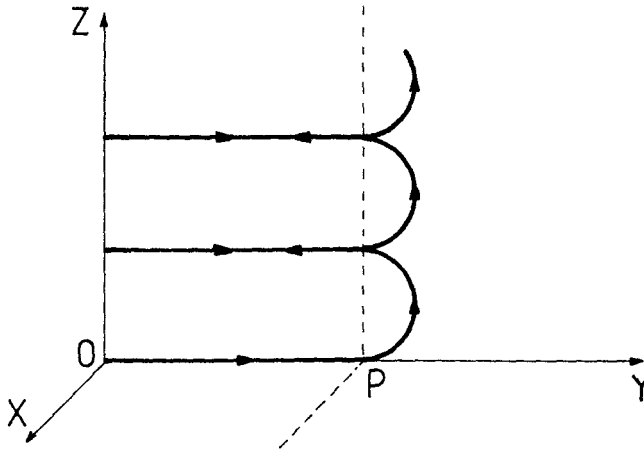
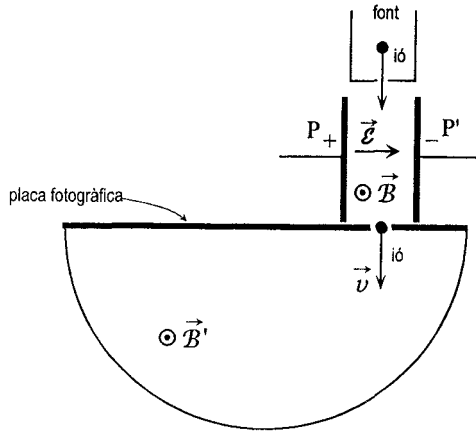


FIG. 4

10.2 El camp elèctric entre les plaques P i P' de la figura és de $3 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ i els camps magnètics \mathcal{B} i \mathcal{B}' són, els dos, de 0.25 T . L'orientació dels camps també apareix en la figura adjunta. Si la font F emet els tres isòtops del magnesi: ^{24}Mg , ^{25}Mg i ^{26}Mg , i aquests s'ionitzen perdent un electró, calculeu la distància entre les marques dels tres isòtops sobre la placa fotogràfica. Considereu que les masses atòmiques dels isòtops, expressades en una -unitats de massa atòmica-, són iguals als seus nombres màssics, indicats a l'esquerra del símbol químic. ($1 \text{ uma} = m(^{12}\text{C})/12 = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$).



$B = 0.25 \text{ T}$, $B' = 0.25 \text{ T}$, $\mathcal{E} = 3 \cdot 10^4 \text{ V/m}$, $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 distància en la placa fotogràfica entre $^{24}\text{Mg}^+$, $^{25}\text{Mg}^+$ i $^{26}\text{Mg}^+$?

El dispositiu de la figura superior constitueix un espectròmetre de masses de Bainbridge. Estudiarem els components de l'espectròmetre per parts.

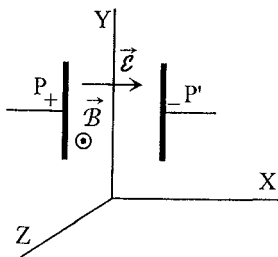


FIG. 1A

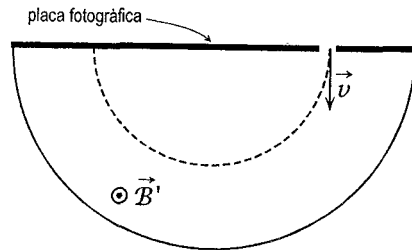


FIG. 1B

El selector de velocitats (fig. 1a) consta d'un camp elèctric \mathcal{E} i un camp magnètic \mathcal{B} que fan que els ions que ixen de la font F travessen aquesta regió sense desviar-se'n i entren en una regió en què hi ha un segon camp magnètic \mathcal{B}' (fig. 1b), on descriuen òrbites semicirculars. Una placa fotogràfica enregistrarà l'arribada dels ions.

El camp elèctric entre les plaques del selector de velocitats és $\mathcal{E} = 3 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ i està dirigit cap a la dreta de la fig. 1a (com es desprèn de la polaritat de P i P'). Com que els ions de magnesi estan carregats positivament, sobre aquests actuarà una força cap a la dreta a causa de la presència del camp elèctric \mathcal{E} ,

$$F_{\text{elèctrica}} = q\mathcal{E} = q\mathcal{E} i \tag{1}$$

on q és la càrrega corresponent a cada ió de magnesi, i val $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, perquè cada ió només ha perdut un electró.

El camp magnètic \mathbf{B} produirà una força magnètica $\mathbf{F}_{\text{magnètica}} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que, a causa de l'orientació del vector velocitat \mathbf{v} i del camp magnètic \mathbf{B} (són perpendiculars), estarà dirigida cap a l'esquerra (fig. 2)

$$\mathbf{F}_{\text{magnètica}} = -qvB \mathbf{i} \quad (2)$$

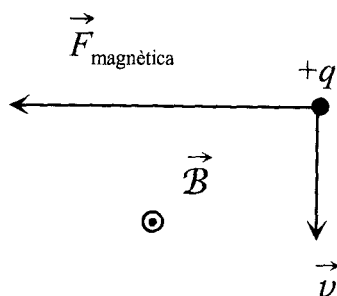


FIG. 2

Només entraran en la zona del camp magnètic \mathbf{B}' aquells ions que no es desvien quan ixen de la font F, la qual es troba davant l'escletxa d'entrada a la regió on el camp magnètic val \mathbf{B}' . Perquè ocorregui això és necessari que dins el selector de velocitats no actue cap força que desvie els ions (o, de la mateixa manera, que la força que suporten els ions cap a l'esquerra siga igual a la força cap a la dreta). Per tant, es verificarà que els mòduls de les dues forces han de ser iguals,

$$F_{\text{elèctrica}} = F_{\text{magnètica}} \quad \Rightarrow \quad q\mathcal{E} = qvB \quad (3)$$

i obtindrem que la velocitat

$$v = \frac{\mathcal{E}}{B} \quad (4)$$

serà la dels ions quan entren en la regió on actua el camp magnètic \mathbf{B}' . D'aquesta forma, els ions no es desvien de la trajectòria rectilínia d'eixida de la font; velocitats diferents de la donada per l'eq. (4) farien que els ions es desviaren de la trajectòria recta i no passarien a través de l'escletxa d'entrada a la regió on actua el camp \mathbf{B}' .

Una vegada que l'ió es troba sota l'acció del camp magnètic \mathbf{B}' , experimenta una força magnètica

$$\mathbf{F}'_{\text{magnètica}} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \quad (5)$$

Aquesta força és perpendicular a la velocitat de l'ió i al camp magnètic \mathbf{B}' , però no produeix treball, ja que la força \mathbf{F} és perpendicular al desplaçament \mathbf{r} , i $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$; això ens indica que l'energia, que d'entrada era tota cinètica,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6)$$

no canvia i, per tant, el mòdul de la velocitat de l'ió no canviarà, encara que sí que variarà la seua direcció. Com que un canvi de direcció, però no de velocitat, està relacionat amb

una força centrípeta, per a calcular el radi de curvatura de l'ió (*la desviació*), a partir de la igualtat entre la $F_{\text{centrípeta}}$ (denominació genèrica d'una força que canvia la direcció de la velocitat però no el seu valor absolut) i la $F'_{\text{magnètica}}$ (que és la que hi actua físicament) s'obté que

$$m \frac{v^2}{r} = qvB' \tag{7}$$

De les relacions (4) i (7) s'obté el radi de curvatura

$$r = \frac{m}{q} \frac{\mathcal{E}}{BB'} \tag{8}$$

Si introduïm les dades del problema en la relació (8) i considerem que la càrrega dels ions de magnesi és la mateixa que la d'un electró, però positiva ($q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C), tenim els radis de curvatura dels diferents ions de magnesi:

$$r_{24} = \frac{m_{24}}{q} \frac{\mathcal{E}}{BB'} = 0.12 \text{ m} \tag{9}$$

$$r_{25} = \frac{m_{25}}{q} \frac{\mathcal{E}}{BB'} = 0.125 \text{ m} \tag{10}$$

$$r_{26} = \frac{m_{26}}{q} \frac{\mathcal{E}}{BB'} = 0.129 \text{ m} \tag{11}$$

on r_{24} i m_{24} fan referència al radi de curvatura i a la massa del $^{24}\text{Mg}^+$, etc. Com veiem, el radi de curvatura varia proporcionalment amb la massa de l'ió, ja que les altres quantitats (\mathcal{E} , q , B i B') que hi ha en les eqs. (9)-(11) no varien.

En conclusió, la distància sobre la placa fotogràfica entre $^{24}\text{Mg}^+$ i $^{25}\text{Mg}^+$ val $2(r_{25} - r_{24}) = 10^{-2}$ m, la distància entre $^{24}\text{Mg}^+$ i $^{26}\text{Mg}^+$ val $2(r_{26} - r_{24}) = 1.8 \cdot 10^{-2}$ m i la distància entre $^{25}\text{Mg}^+$ i $^{26}\text{Mg}^+$ val $2(r_{26} - r_{25}) = 8 \cdot 10^{-3}$ m, com es pot comprovar en la fig. 3.

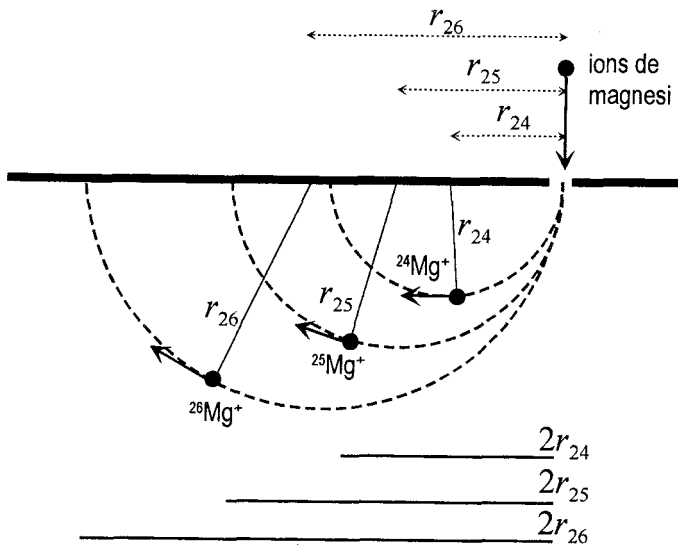


FIG. 3

Un bon exercici de comprovació consisteix a calcular les dimensions de l'eq. (8), que són les corresponents a longitud,

$$\left[\frac{m \mathcal{E}}{q \mathcal{B} \mathcal{B}'} \right] = \frac{[m]}{[q]} \frac{[\mathcal{E}]}{[\mathcal{B}][\mathcal{B}']} = \frac{M \text{MLT}^{-2} Q^{-1}}{Q \text{M}^2 \text{T}^{-2} Q^{-2}} = L \quad (12)$$

En l'expressió anterior [...] simbolitza les dimensions de la magnitud que hi ha entre els claudàtors i M , L , T i Q representen, respectivament les dimensions de les magnituds fonamentals massa, longitud, temps i càrrega.

10.3 Les característiques d'un ciclotró són les següents: camp magnètic $\mathcal{B} = 2$ T, tensió alterna $V = 60000$ V i radi màxim $R = 43.4$ cm. Calculeu: (a) la velocitat d'un deuteró, d, quan ix del ciclotró; (b) l'energia cinètica (expressada en MeV) d'aquesta partícula, i (c) el nombre de voltes que ha fet el deuteró. (d = protó + neutró; $m = 1875.63$ MeV/ $c^2 = 3.34 \cdot 10^{-27}$ kg; $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C).

$\mathcal{B} = 2$ T, $V = 60000$ V, $R = 43.4$ cm = 0.434 m
 $m = m_p + m_n = 3.34 \cdot 10^{-27}$ kg, $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

(a) v ?

(b) E_k (MeV)?

(c) nombre de voltes?

El deuteró està format per un protó més un neutró, per això la seua càrrega és la del protó, $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C. El deuteró es posa en moviment en el centre d'un ciclotró, amb una velocitat perpendicular al camp magnètic que hi actua, tal com representa la fig. 1.

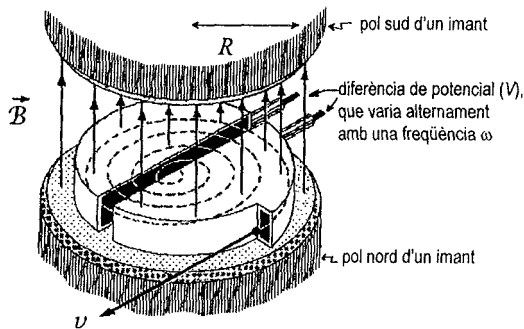


FIG. 1

(a) La velocitat v que té una partícula amb càrrega q i massa m , que descriu una trajectòria amb un radi de curvatura R dins d'un camp magnètic \mathcal{B} (tal que $v \perp \mathcal{B}$), es pot deduir de l'expressió (7) del problema 10.2. En aquest cas, el deuteró ix del ciclotró quan fa la trajectòria de radi màxim (fig. 1), i la velocitat d'eixida serà

$$v = \frac{q}{m} \mathcal{B} R = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{3.34 \cdot 10^{-27}} 2 \cdot 0.434 = 4.16 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad (1)$$

(b) Una vegada coneguda la velocitat màxima, v , és fàcil calcular l'energia cinètica d'eixida (que també serà màxima). Si considerem que la velocitat anterior no és relativista (NR), escriurem

$$E_k^{NR} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2 \mathcal{B}^2 R^2}{m} = 2.88 \cdot 10^{-12} \text{ J} \quad (2)$$

i si tractem aquesta velocitat com a relativista (R), l'energia cinètica serà

$$E_k^R = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = 2.92 \cdot 10^{-12} \text{ J} \quad (3)$$

on c representa el valor de la velocitat de la llum en el buit ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Si utilitzem l'equivalència següent $1 \text{ MeV} = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$, obtenim $E_k^{NR} = 18 \text{ MeV}$ i $E_k^R = 18.25 \text{ MeV}$.

Noteu que l'energia cinètica E_k , com també la velocitat màxima v , no depèn del potencial elèctric V aplicat entre les plaques del ciclotró (aquest no apareix en els càlculs de E_k i v), únicament de les característiques de la partícula (q i m), de la intensitat del camp magnètic (\mathcal{B}) i del radi del ciclotró (R). Quan el potencial és menut, la partícula ha de fer moltes voltes fins a assolir l'energia final. Quan el potencial és gran, la partícula farà poques voltes fins a adquirir la mateixa energia final.

(c) L'energia que adquireix una càrrega q quan hi apliquem una diferència de potencial V és $E_p = qV$. En el nostre cas, l'energia que adquireix el deuteró quan hi apliquem una diferència de potencial V (cada vegada que el deuteró passa pel buit entre les D del ciclotró²⁰) és

$$E_p = qV = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 60000 = 6 \cdot 10^4 \text{ eV} = 9.6 \cdot 10^{-15} \text{ J} \quad (4)$$

La diferència de potencial entre les D canvia de signe en invertir-se la polaritat d'aquestes (fig. 1). Això ha de tenir lloc amb una freqüència que ha de coincidir amb la velocitat angular de la partícula, que és $\omega = q\mathcal{B}/m$ per a una partícula de càrrega q i massa m sotmesa a un camp magnètic \mathcal{B} perpendicular al seu moviment. Per tant, cada vegada que la partícula passe entre les D, la diferència de potencial accelerarà la partícula sempre en el mateix sentit (fig. 2).

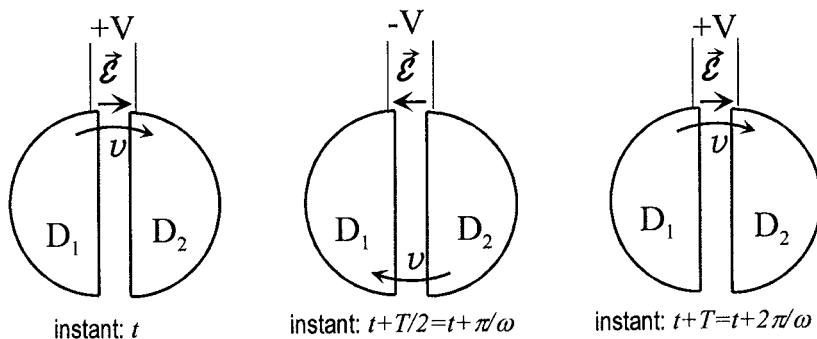


FIG. 2

²⁰Sol anomenar-se D cadascuna de les meitats del ciclotró per la seua semblança amb aquesta lletra.

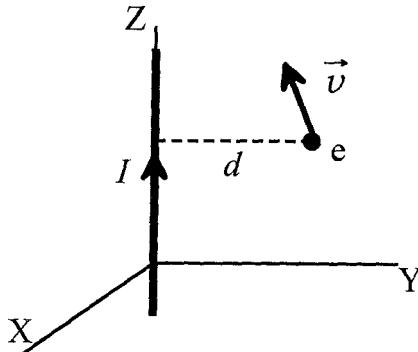
Així, doncs, com que el deuteró ha adquirit tota la seua energia mitjançant l'aplicació de la diferència de potencial V , el nombre de vegades que el deuteró passa pel buit de les D serà l'energia total final del deuteró (que és tota cinètica) dividida per l'energia que adquireix en cada pas, eq. (4):

$$\begin{aligned} (\text{vegades que el deuteró passa pel buit entre les D}) &= E_k/E_p \\ &= \begin{cases} 300 & (\text{càlcul NR}) \\ 304.2 & (\text{càlcul R}) \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Cada volta completa del deuteró, el potencial V hi actua dues vegades. Així, doncs, el nombre de voltes serà

$$\begin{aligned} \text{nombre de voltes} &= \frac{\text{vegades que passa entre les D}}{2} \\ &= \begin{cases} 150 \text{ voltes} & (\text{càlcul NR}) \\ 152.1 \text{ voltes} & (\text{càlcul R}) \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

10.4 Un electró amb velocitat $5 \cdot 10^7$ m/s es troba a 3 cm d'un filferro recte, pel qual circula un corrent de 75 A. Quina força actua sobre l'electró si la seua velocitat està dirigida: (a) cap al filferro, (b) paral·lela al filferro, i (c) perpendicular a les direccions donades pels apartats (a) i (b)?



$v = |\mathbf{v}| = 5 \cdot 10^7$ m/s, $d = 3$ cm = 0.03 m, $I = 75$ A, $q = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C

força sobre l'electró si: $\begin{cases} (a) & \mathbf{v} \parallel \mathbf{j} ? \\ (b) & \mathbf{v} \parallel \mathbf{k} ? \\ (c) & \mathbf{v} \parallel \mathbf{i} ? \end{cases}$

La força que un camp magnètic \mathcal{B} produeix sobre una càrrega q que viatja amb velocitat \mathbf{v} és

$$\mathbf{F}_{\text{magnètica}} = q \mathbf{v} \times \mathcal{B} \quad (1)$$

El mòdul del camp magnètic creat pel corrent I a una distància d (on es troba l'electró), val

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \tag{2}$$

Aquest camp magnètic és tangent en cada punt a les circumferències que tenen el pla normal al filferro, tal com representa la fig. 1.

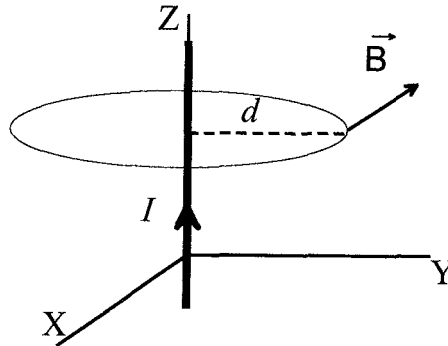


FIG. 1

Si usem com a referència el sistema de coordenades que hem dibuixat en l'enunciat del problema, aquest camp magnètic en el punt en què es troba l'electró (fig. 1) val

$$B = \frac{-\mu_0 I}{2\pi d} i \tag{3}$$

ja que estaria dirigit cap a les X negatives.

En el cas (a), la velocitat de l'electró (fig. 2a) s'expressa en forma vectorial com $v_a = -v j$. En l'apartat (b), la velocitat seria $v_b = v k$ (fig. 2b). En el cas (c) tindriem que $v_c = v i$ (fig. 2c).

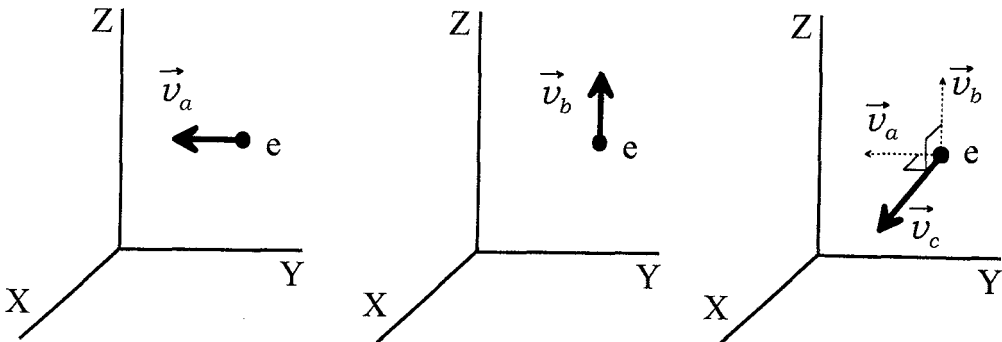


FIG. 2

D'aquesta manera, podem obtenir en cada cas la força que actua sobre l'electró. A partir de les eqs. (1) i (3), i després de substituir els valors corresponents de la velocitat, la

força val en cada cas

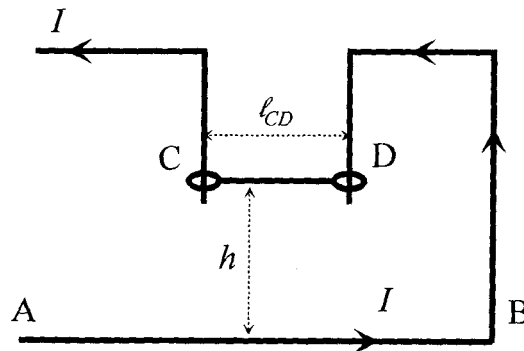
$$\mathbf{F}_a = q(-v \mathbf{j}) \times \left(\frac{-\mu_0 I}{2\pi d} \mathbf{i} \right) = q \frac{v\mu_0 I}{2\pi d} (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = 4 \cdot 10^{-15} \mathbf{k} \text{ N} \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_b = q(v \mathbf{k}) \times \left(\frac{-\mu_0 I}{2\pi d} \mathbf{i} \right) = 4 \cdot 10^{-15} \mathbf{j} \text{ N} \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_c = q(v \mathbf{i}) \times \left(\frac{-\mu_0 I}{2\pi d} \mathbf{i} \right) = 0 \text{ N} \quad (6)$$

En els casos (a) i (b) la força és la mateixa en mòdul però canvia la direcció. En el cas (c) no hi ha força, ja que el camp magnètic \mathbf{B} i la velocitat de l'electró \mathbf{v} són paral·lels.

10.5 Un conductor horitzontal i llarg, AB, es troba fix sobre la superfície horitzontal d'una taula. Un altre conductor, CD, que està situat sobre el primer, té 1 m de longitud i pot rrelliscar cap amunt i cap avall lliurement mitjançant dues guies metàl·liques situades en els punts C i D, respectivament, tal com s'indica en la figura. Pel circuit representat en la figura circula una intensitat de corrent de 100 A. Si la densitat lineal de massa dels conductors és de 10^{-2} kg/m, a quina altura sobre el conductor AB es trobarà en equilibri el conductor CD?



$l_{CD} = 1 \text{ m}$, $I = 100 \text{ A}$, $\lambda = 10^{-2} \text{ kg/m}$
 valor de h perquè el conductor CD estiga en equilibri?

Estudiarem les condicions d'equilibri del conductor CD. Les forces que actuen sobre CD són el pes,

$$P = m_{CD}g = l_{CD}\lambda g \quad (1)$$

aplicat al centre de massa del conductor CD i dirigit cap avall (fig. 1), i la força F que apareix entre dos corrents paral·lels quan per cadascun circula una intensitat I i I' , respectivament; com que els corrents circulen en sentits oposats, la força resultant entre aquests serà repulsiva (fig. 2) i val

$$F = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi h} l_{CD} \quad (2)$$

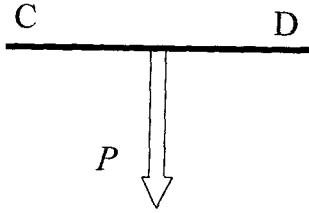


FIG. 1

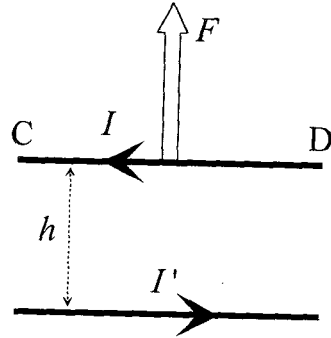


FIG. 2

Segons la segona llei de Newton, la condició d'equilibri és

$$\sum f = P + F = 0 \tag{3}$$

De manera que, en aquest cas, les dues forces que actuen sobre el conductor CD han de ser iguals en mòdul i de sentits oposats. Com que el sentit ja és oposat, segons es desprèn de les figs. 1 i 2, només haurà d'acomplir-se la igualtat entre mòduls

$$P = F \tag{4}$$

Si substituïm les eqs. (1) i (2) dins l'eq. (4), tenim

$$\ell_{CD} \lambda g = \frac{\mu_0 I^2 \ell_{CD}}{2\pi h} \tag{5}$$

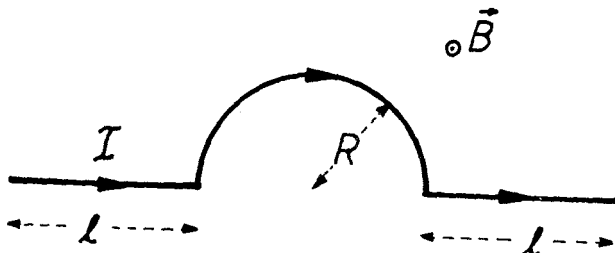
on hem considerat que I i I' són iguals en mòduls —el sentit d'aquests corrents ja s'ha tingut en compte en assignar el sentit de la força F . Aïllant h de l'eq. (5), obtenim

$$h = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi g \lambda} = 0.02 \text{ m} \tag{6}$$

Com podem comprovar, el resultat és independent de la longitud del conductor, ℓ_{CD} . Això és fàcil d'entendre perquè si el conductor CD fóra més llarg (curt) experimentaria més (menys) força repulsiva creada per l'altre conductor, però el seu pes també seria major (menor).

Noteu que, pel principi d'acció i reacció, també actua la mateixa força F , eq. (2), sobre el conductor AB però amb sentit contrari. Ara bé, no la tenim en compte per a resoldre aquest problema perquè només busquem la condició d'equilibri del conductor CD i, per tant, sols considerem les forces que actuen sobre aquest.

10.6 Un filferro corbat, com mostra la figura, duu un corrent I i està col·locat en un camp magnètic uniforme \vec{B} , que ix del pla de la figura. Calculeu la força que actua sobre el filferro.



\vec{B} = camp magnètic uniforme, perpendicular al pla del paper

I = intensitat del corrent

força sobre el filferro?

En aquest cas aplicarem les relacions referides a les forces que actuen sobre conductors situats en presència de camps magnètics. La força que actua sobre un filament, pel qual circula un corrent I i que es troba en presència d'un camp magnètic \vec{B} , val

$$\vec{F} = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (1)$$

on la integral s'estén al llarg de tot el filament conductor, l'element infinitesimal del qual denotem per $d\vec{\ell}$, que té el mateix sentit que el del corrent que hi circula.

Si situem el conductor sobre un sistema de coordenades, tal com es veu en la fig. 1, el camp magnètic, en forma vectorial, serà

$$\vec{B} = B \hat{i} \quad (2)$$

i la integral que ens permet calcular la força, eq. (1), haurà de fer-se al llarg d'un camí de la forma \curvearrowright . Aquesta integral pot descompondre's en tres integrals, en les regions I, II i III, respectivament (vegeu la fig. 1).

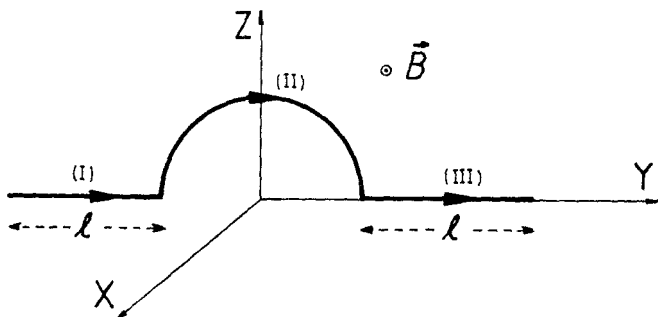


FIG. 1

Calculem en primer lloc, la integral sobre la regió I del filferro: En aquest cas hem considerat que la direcció del corrent és la de l'eix Y en tot el camí d'integració, és a dir, $d\ell = d\ell j$. Si tenim present que el camp magnètic \mathbf{B} és constant, eq. (2), obtenim

$$\mathbf{F}_I = I \int_I d\ell \times \mathbf{B} = I \int_I d\ell B(j \times i) = IB(j \times i) \int_I d\ell = -IB\ell_1 k \tag{3}$$

on la integral de l'element de línia $d\ell$ al llarg de tota la regió I és la longitud ℓ_1 del conductor en aquesta regió.

Calcularem seguidament la integral sobre la regió II del filferro: En aquest cas l'orientació de l'element de línia $d\ell$ no és constant al llarg del tros de filament en la regió II, quan abans sí que ho era al llarg del tros de filament en la regió I.

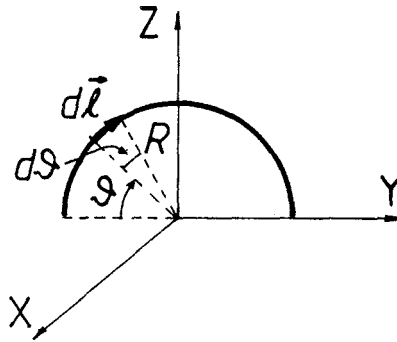


FIG. 2

A partir de la fig. 2, expressarem l'element de línia $d\ell$ com

$$d\ell = R d\vartheta \tag{4}$$

ja que el radi de la semicircumferència del filferro corbat, R , és constant al llarg de tot el camí d'integració. L'angle ϑ varia entre 0 i π .

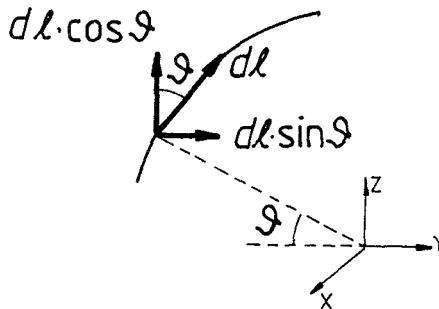


FIG. 3

De la fig. 3 s'obté que

$$d\ell = (d\ell_x, d\ell_y, d\ell_z) = (0, d\ell \sin \vartheta, d\ell \cos \vartheta) = (0, R \sin \vartheta d\vartheta, R \cos \vartheta d\vartheta) \quad (5)$$

per tant,


$$d\ell \times \mathcal{B} = (0, R \sin \vartheta d\vartheta, R \cos \vartheta d\vartheta) \times (\mathcal{B}, 0, 0) = R\mathcal{B}(\cos \vartheta \mathbf{j} - \sin \vartheta \mathbf{k}) d\vartheta \quad (6)$$

i la força en la regió II vindrà expressada per

$$\mathbf{F}_{II} = \mathcal{I} \int_{II} d\ell \times \mathcal{B} = \mathcal{I}R\mathcal{B} \int_{II} (\cos \vartheta \mathbf{j} - \sin \vartheta \mathbf{k}) d\vartheta \quad (7)$$

Com que l'angle ϑ varia entre 0 i π , aquests valors seran els límits de la integral, de manera que

$$\mathbf{F}_{II} = \mathcal{I}R\mathcal{B} \int_0^\pi (\cos \vartheta \mathbf{j} - \sin \vartheta \mathbf{k}) d\vartheta = -2\mathcal{I}R\mathcal{B} \mathbf{k} \quad (8)$$

Si considerem que el càlcul de la força en la regió III del filferro és anàleg al càlcul de la força en la regió I, eq. (3), obtindrem finalment que la força total que actua sobre el circuit conductor de forma  serà

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_{II} + \mathbf{F}_{III} = -\mathcal{I}B\ell_I \mathbf{k} - 2\mathcal{I}R\mathcal{B} \mathbf{k} - \mathcal{I}B\ell_{III} \mathbf{k} = -2\mathcal{I}B(\ell + R) \mathbf{k} \quad (9)$$

on hem usat que $\ell_I = \ell_{III} = \ell$.

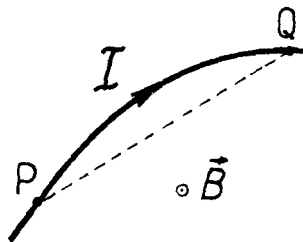


FIG. 4

Aquest resultat, que hem obtingut per a una geometria particular del conductor, està d'acord amb el resultat més general segons el qual "la força que actua sobre una part PQ d'un filferro conductor que transporta un corrent \mathcal{I} , el qual està col·locat en un camp magnètic \mathcal{B} uniforme, és $\mathcal{I}(\vec{PQ}) \times \mathcal{B}$, i és independent de la forma del conductor", on (\vec{PQ}) representa la longitud del tram PQ, en el sentit del corrent que hi circula (fig. 4). En el cas que ens ocupa, les parts del conductor eren les representades en la fig. 5.

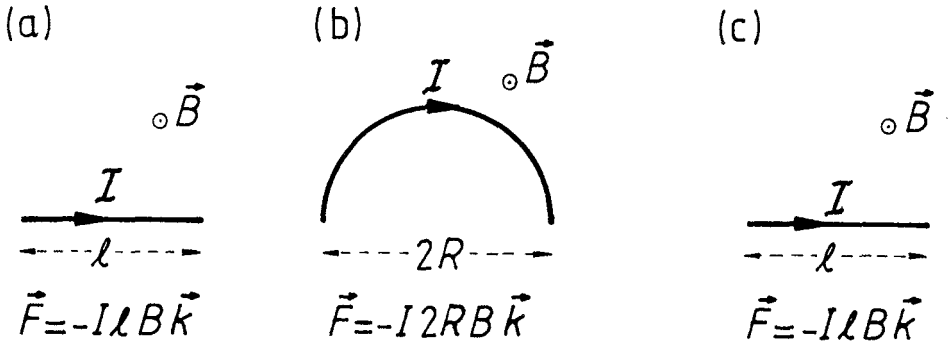
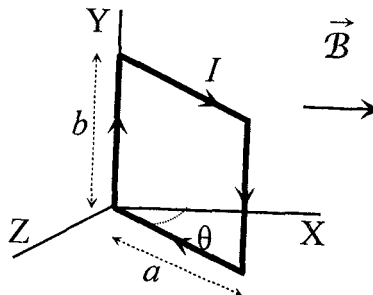


FIG. 5

Amb aquest resultat, podem traure immediatament la conclusió que la força que actua sobre un corrent tancat situat en presència d'un camp magnètic uniforme és nul·la.

El sentit que hem obtingut per a la força és lògic, ja que si considerem el corrent I com un conjunt de càrregues que es mouen amb velocitat constant, la força magnètica, $F = qv \times B$, que actua sobre aquestes càrregues en moviment (el corrent elèctric, en definitiva) és perpendicular a la direcció de moviment i al camp magnètic, tal com hem obtingut.

10.7 L'espina rectangular rígida de la figura pot girar sobre l'eix Y i duu un corrent de 10 A en el sentit que s'indica en el dibuix. (a) Si l'espina està en presència d'un camp magnètic uniforme de 0.2 T que és paral·lel a l'eix X , calculeu la força sobre cada costat de l'espina i el moment de les forces necessari per a mantenir l'espina en la posició que es mostra. (b) Repetiu l'apartat (a) però considerant ara que el camp magnètic és paral·lel a l'eix Z . (c) Quin moment seria necessari si l'espina poguera girar sobre un eix que passe pel seu centre i que siga paral·lel a l'eix Y ?



$I = 10 \text{ A}$, $B = 0.2 \text{ T}$, $a = 6 \text{ cm} = 0.06 \text{ m}$, $b = 8 \text{ cm} = 0.08 \text{ m}$, $\vartheta = 30^\circ$

(a) F sobre cada costat de l'espina?, τ_{apl} respecte de l'eix Y per tal que $\vartheta = 30^\circ$?

- (b) el mateix que a l'apartat (a) però amb $\mathcal{B} = 0.2 \mathbf{k} \text{ T}$?
 (c) τ_{apl} respecte de l'eix que passe pel centre de l'espira per tal que $\vartheta = 30^\circ$?

(a) Per a trobar la força sobre cada costat de l'espira caldrà calcular la força que actua sobre un corrent I en presència d'un camp magnètic \mathcal{B} . Aquesta força ve donada per

$$\mathbf{F} = I \int d\mathbf{l} \times \mathcal{B} \quad (1)$$

Sabem que en el nostre cas el camp magnètic és $\mathcal{B} = 0.2 \mathbf{i} \text{ T}$ i que:

- per al costat b de l'espira (fig. 1a), l'element diferencial de longitud és $d\mathbf{l} = d\ell \mathbf{j}$
- per al costat a de l'espira (fig. 1b), $d\mathbf{l} = -d\ell \cos \vartheta \mathbf{i} - d\ell \sin \vartheta \mathbf{k}$
- per al costat b' de l'espira (fig. 1c), $d\mathbf{l} = -d\ell \mathbf{j}$
- i, per últim, per al costat a' de l'espira conductora (fig. 1d), $d\mathbf{l} = d\ell \cos \vartheta \mathbf{i} + d\ell \sin \vartheta \mathbf{k}$.

Després d'usar en l'eq. (1) les expressions anteriors per a $d\mathbf{l}$, la força sobre cadascun dels costats de l'espira serà

$$\mathbf{F}_b = I \int_b d\mathbf{l} \times \mathcal{B} = I \int_b d\ell \mathcal{B}(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = I\mathcal{B}(-\mathbf{k}) \int_b d\ell = -I\mathcal{B}b \mathbf{k} \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_a = I \int_a (-d\ell \cos \vartheta \mathbf{i} - d\ell \sin \vartheta \mathbf{k}) \times (\mathcal{B} \mathbf{i}) = -I\mathcal{B}a \sin \vartheta \mathbf{j} \quad (3)$$

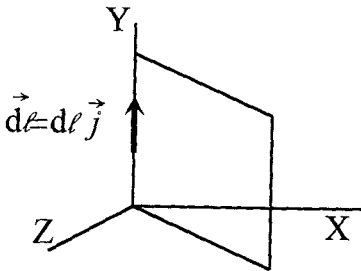


FIG. 1A

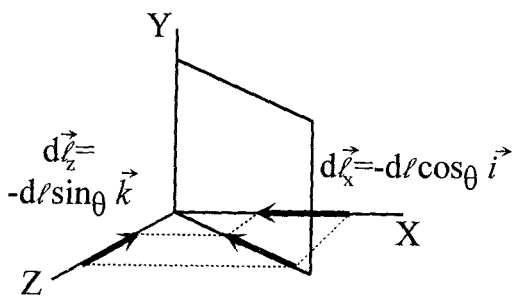


FIG. 1B

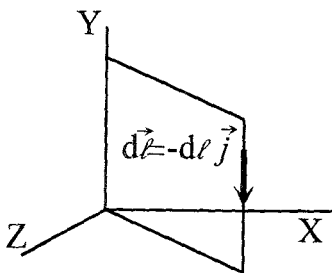


FIG. 1C

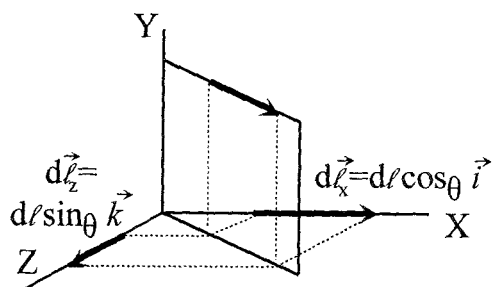


FIG. 1D

En les expressions anteriors hem tingut en compte que el camp magnètic és constant. Per a \mathbf{F}_b i \mathbf{F}_a obtenim, anàlogament,

$$\mathbf{F}_{b'} = I\mathcal{B}b \mathbf{k} \quad (4)$$

$$F_{a'} = IBa \sin \vartheta j \tag{5}$$

En les eqs. (2)-(5) hem considerat que la integració de l'element de longitud al llarg d'un costat de l'espira val la longitud d'aquest costat i que els costats que hem anomenat a' i b' tenen la mateixa longitud que els costats a i b , respectivament.

Les forces F_a i $F_{a'}$ (fig. 2) sobre els costats a i a' , respectivament, de l'espira tendeixen a deformar-la, però si suposem que l'espira és rígida, el resultat net d'aquestes dues forces és nul.

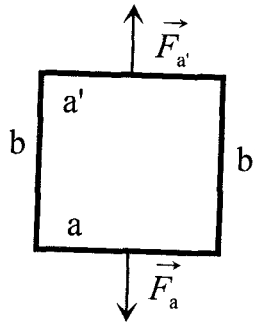


FIG. 2

Les forces F_b i $F_{b'}$ sobre els costats b i b' de l'espira produeixen un moment degut a un parell de forces, τ , sobre l'espira. En la fig. 3 apareixen representades F_b i $F_{b'}$ vistes des de dalt de l'eix Y. Després de substituir els valors en les eqs. (2)-(5), tenim $|F_a| = |F_{a'}| = 0.06 \text{ N}$ i $|F_b| = |F_{b'}| = 0.16 \text{ N}$.

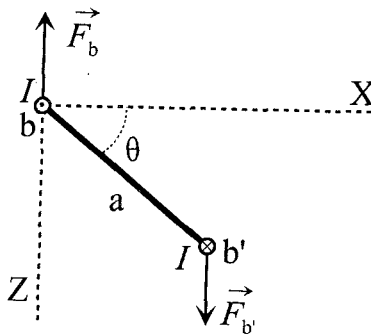


FIG. 3

El moment de les forces és la suma dels moments deguts a cada força,

$$\tau = \sum_i r_i \times F_i \quad (i = a, a', b, b') \tag{6}$$

Les forces F_a i $F_{a'}$ no donen lloc a cap moment net. Els moments que sí que hi con-

tribueixen són

$$\boldsymbol{\tau}_b = \mathbf{r}_b \times \mathbf{F}_b \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{b'} = \mathbf{r}_{b'} \times \mathbf{F}_{b'} \quad (8)$$

Els vectors posició dels punts d'aplicació de \mathbf{F}_b i de $\mathbf{F}_{b'}$ respecte del punt que prenem com l'origen de moments (fig. 4) són $\mathbf{r}_b = (0, 0, 0)$ i $\mathbf{r}_{b'} = (a \cos \vartheta, 0, a \sin \vartheta)$, respectivament. I com que, segons les eqs. (2)-(5), $\mathbf{F}_b = (0, 0, -IBb)$ i $\mathbf{F}_{b'} = (0, 0, IBb)$, tindrem que el moment total respecte de l'eix Y degut a les forces aplicades a l'espira, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_b + \boldsymbol{\tau}_{b'}$, valdrà

$$\boldsymbol{\tau} = -IBBa \cos \vartheta \mathbf{j} = -8.3 \cdot 10^{-3} \mathbf{j} \text{ N m} \quad (9)$$

Aquest moment tendeix a fer girar l'espira. Per a mantenir l'espira en la posició en què es troba és suficient aplicar-hi un moment de forces contrari a l'anterior; és a dir, el moment del parell de forces que hem d'aplicar-hi perquè l'espira no gire val $\boldsymbol{\tau}_{\text{apl}} = 8.3 \cdot 10^{-3} \mathbf{j} \text{ N m}$.

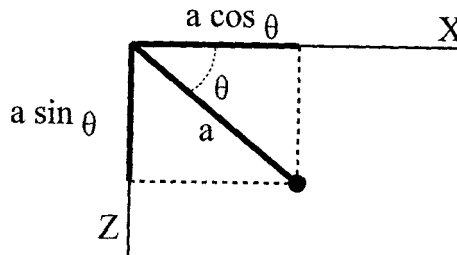


FIG. 4

(b) Ara el camp magnètic és paral·lel a l'eix Z , $\mathbf{B} = 0.2 \mathbf{k} \text{ T}$, i seguint un procediment similar al que hem usat en l'apartat (a) el resultat per a les forces és

$$\mathbf{F}_b = IBb \mathbf{i} = 0.16 \mathbf{i} \text{ N} \quad (10)$$

$$\mathbf{F}_{b'} = -IBb \mathbf{i} = -0.16 \mathbf{i} \text{ N} \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_a = IBa \cos \vartheta \mathbf{j} = 0.10 \mathbf{j} \text{ N} \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_{a'} = -IBa \cos \vartheta \mathbf{j} = -0.10 \mathbf{j} \text{ N} \quad (13)$$

Les forces \mathbf{F}_a i $\mathbf{F}_{a'}$ sobre els costats a i a' de l'espira estan dirigides al llarg de l'eix Y , per tant, novament, deformarien l'espira (fig. 5) si aquesta no fóra rígida. Però com que ho és, la força neta al llarg de l'eix Y és nul·la.

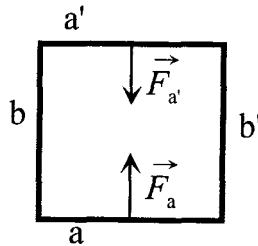


FIG. 5

Les forces \mathbf{F}_b i $\mathbf{F}_{b'}$ sobre els costats b i b' de l'espira apareixen representades en la fig. 6, vistes des de dalt de l'eix Y . Els moments de les forces respecte de l'eix Y són

$$\boldsymbol{\tau}_b = \mathbf{r}_b \times \mathbf{F}_b = 0 \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{b'} = \mathbf{r}_{b'} \times \mathbf{F}_{b'} = (a \cos \vartheta, 0, a \sin \vartheta) \times (-IBb, 0, 0) = -IBba \sin \vartheta \mathbf{j} \tag{15}$$

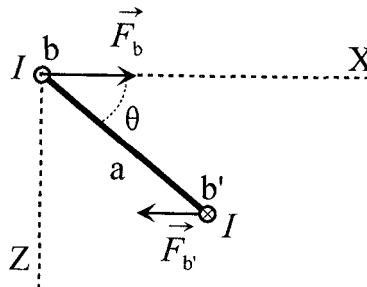


FIG. 6

En conseqüència, el moment total de les forces serà

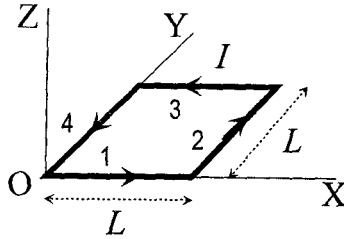
$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_b + \boldsymbol{\tau}_{b'} = -4.8 \cdot 10^{-3} \mathbf{j} \text{ N m} \tag{16}$$

En aquest cas, el moment contrari al que el camp magnètic \mathbf{B} exerceix sobre l'espira (que és el que hem d'aplicar-hi) serà $\boldsymbol{\tau}_{\text{apl}} = 4.8 \cdot 10^{-3} \mathbf{j} \text{ N m}$.

(c) El moment que hauríem d'aplicar-hi en aquest apartat seria el mateix que el que hem obtingut en els apartats anteriors (segons estiga orientat el camp magnètic \mathbf{B}), ja que el moment d'un parell de forces és independent de l'origen dels moments, i depèn només del valor de la força i del braç, o distància entre les forces.

Noteu que en els casos considerats anteriorment, les forces \mathbf{F}_a i $\mathbf{F}_{a'}$ no donen lloc a cap moment de forces.

10.8 Per una espira de filferro, amb forma de quadrat de 0.2 m de costat i que està disposada sobre el pla XY , circula un corrent de 15 A en el sentit que s'indica en la figura. Si apliquem un camp magnètic paral·lel a l'eix X i d'intensitat $\mathcal{B} = 0.3x$ T (on la coordenada x està expressada en metres), calculeu: (a) la força resultant sobre l'espira, i (b) el moment de les forces respecte del punt O .



$I = 15$ A, $L = 0.2$ m, $\mathcal{B} = 0.3x$ T

(a) \mathbf{F} sobre l'espira?

(b) moment degut a les forces sobre l'espira, τ , respecte del punt O ?

(a) La força total sobre l'espira serà la suma de les forces que actuen sobre cadascun dels quatre costats que apareixen enumerats en la figura de l'enunciat,

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_i \quad (1)$$

Per a calcular la força sobre cada costat, utilitzem l'expressió que dona la força sobre un corrent en presència d'un camp magnètic,

$$\mathbf{F} = I \int d\vec{\ell} \times \mathcal{B} \quad (2)$$

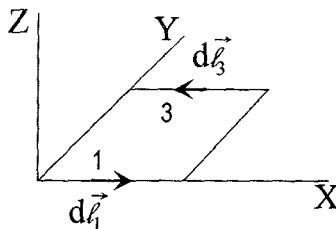


FIG. 1

Càlcul de les forces sobre els costats 1 i 3 de l'espira: Si considerem el sentit del corrent en aquests casos (fig. 1), els elements infinitesimals de longitud $d\ell$ són

$$\text{costat 1: } d\ell_1 = d\ell_1 \mathbf{i} = dx \mathbf{i} \quad (3)$$

$$\text{costat 3: } d\ell_3 = -d\ell_3 \mathbf{i} = -dx \mathbf{i} \quad (4)$$

En ambdós casos, els elements de longitud i el camp magnètic són paral·lels, per tant

$$d\ell \times \mathcal{B} = 0 \quad (5)$$

la qual cosa indica que les forces sobre els costats de l'espira paral·lels a l'eix X són nul·les, és a dir,

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_3 = 0 \text{ N} \quad (6)$$

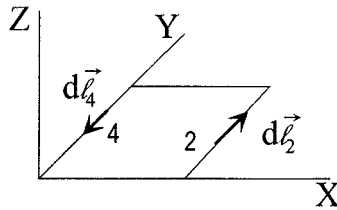


FIG. 2

Càlcul de les forces sobre els costats 2 i 4 de l'espira: Els elements infinitesimals de longitud $d\ell$ seran ara (fig. 2)

$$\text{costat 2: } d\ell_2 = d\ell_2 \mathbf{j} = dy \mathbf{j} \quad (7)$$

$$\text{costat 4: } d\ell_4 = -d\ell_4 \mathbf{j} = -dy \mathbf{j} \quad (8)$$

Hem de tenir present que el camp magnètic \mathcal{B} és nul sobre el costat 4, ja que la coordenada x del costat 4 és $x_4 = 0$; per tant, el camp magnètic serà $\mathcal{B}_4 = 0.3x_4 \mathbf{i} \text{ T} = 0 \text{ T}$. Utilitzant l'eq. (2) obtenim que la força sobre el costat 4 de l'espira és $\mathbf{F}_4 = 0 \text{ N}$. Sobre el costat 2 de l'espira el camp magnètic \mathcal{B} també és constant i val $\mathcal{B}_2 = 0.3x_2 \mathbf{i} \text{ T} = 0.3\ell \mathbf{i} \text{ T}$, ja que $x_2 = L$. Si apliquem l'eq. (2) a aquest costat de l'espira, obtenim

$$\mathbf{F}_2 = I \int_{\text{costat 2}} d\ell \times \mathcal{B}_2 = IB_2(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \int_{\text{costat 2}} dy = -IB_2L \mathbf{k} = -0.18 \mathbf{k} \text{ N} \quad (9)$$

Segons l'eq. (1), la força total sobre l'espira valdrà

$$\mathbf{F} = -0.18 \mathbf{k} \text{ N} \quad (10)$$

(b) El moment d'una força respecte de l'origen de coordenades (punt O en la figura de l'enunciat), ve donat per

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (11)$$

on \mathbf{r} és el vector de posició, respecte de l'origen de moments, corresponent al punt d'aplicació de la força \mathbf{F} . En el cas que ens ocupa, l'única força que hi actua és \mathbf{F}_2 sobre el costat 2 de l'espina.

El moment $\boldsymbol{\tau}$ degut a les forces que actuen sobre l'espina serà la suma dels moments, $\boldsymbol{\tau}_i$, de cadascuna de les forces, \mathbf{F}_i ,

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_2 \quad (12)$$

ja que $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_4 = 0 \text{ N}$.

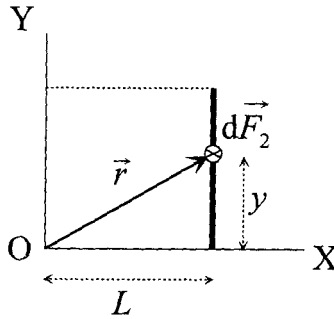


FIG. 3

Si observem l'espina des de la part superior de l'eix Z, ens adonem que el vector posició, \mathbf{r} , dels elements de línia del costat 2 de l'espina, on s'aplica cada força infinitesimal $d\mathbf{F}_2$, és variable (fig. 3). Per tant, cada element de línia donarà una contribució diferent al moment degut a \mathbf{F}_2 i haurem d'escriure

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \int_{\text{costat 2}} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_2 \quad (13)$$

Aquesta integral s'estén a tots els elements de línia del costat 2 de l'espina; segons la fig. 3, el vector de posició de cada element de línia sobre el qual actua la força infinitesimal $d\mathbf{F}_2$ és

$$\mathbf{r} = (L, y, 0) \quad (14)$$

i, atesa la geometria del problema, la força infinitesimal que actua sobre cada element de línia $d\ell_2 = dy$ és, a partir de l'eq. (2),

$$d\mathbf{F}_2 = (0, 0, -IB_2 dy) \quad (15)$$

Segons les expressions anteriors, el moment τ_2 s'obindrà com a

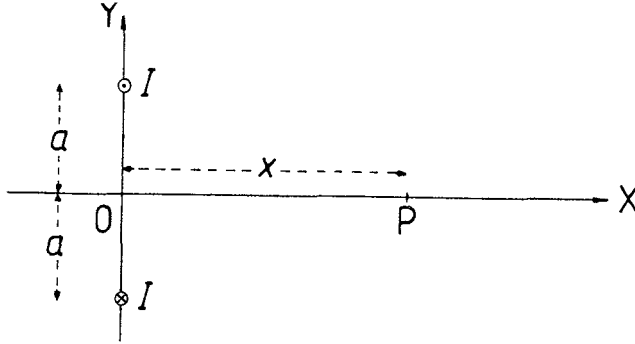
$$\begin{aligned}\tau_2 &= IB_2 L j \int_0^L dy - IB_2 i \int_0^L y dy = IB_2 \left(Ly j - \frac{y^2}{2} \right) i \Big|_0^L \\ &= IB_2 L^2 (j - 0.5i) = (-0.018 i + 0.036 j) \text{ N m}\end{aligned}\tag{16}$$

Segons l'eq. (12) aquest valor és també el moment total, respecte del punt O, degut a les forces que actuen sobre l'espira.

11

**Orígens i propietats
del camp magnètic**

11.1 La figura mostra les seccions frontals de sengles conductors paral·lels, molt llargs i perpendiculars al pla del paper. Cadascun transporta un corrent I , però en sentit oposat al de l'altre. (a) Expressiu el camp magnètic en qualsevol punt de l'eix X en funció de la coordenada x . (b) Per a quin valor de x és màxim el mòdul del camp magnètic? (c) Repetiu l'estudi anterior per als punts de l'eix Y .



I = intensitat dels corrents, $2a$ = distància entre els conductors

- (a) $\mathcal{B}(x)$?
- (b) x on $\mathcal{B}(x)$ és màxim?
- (c) $\mathcal{B}(y)$?, y on $\mathcal{B}(y)$ és màxim?

(a) Pel principi de superposició, el camp magnètic \mathcal{B} en un punt P sobre l'eix X serà la suma dels camps magnètics creats en el punt P pels corrents ixent (\odot) i entrant (\otimes),

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\odot} + \mathcal{B}_{\otimes} \tag{1}$$

Càlcul del camp magnètic creat pel corrent que ix del paper, \mathcal{B}_{\odot} : L'orientació de \mathcal{B}_{\odot} s'obté aplicant-hi la regla de la mà dreta (fig. 1) i el mòdul s'obté a partir de l'expressió que dona el camp magnètic creat per un corrent rectilini

$$\mathcal{B}_{\odot} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \tag{2}$$

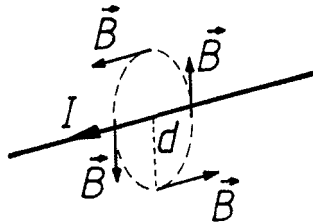


FIG. 1

on I és la intensitat del corrent ixent i d és la distància des del conductor per on discorre el corrent I fins al punt P. Segons la fig. 2, els components de \mathcal{B}_{\odot} són $\mathcal{B}_{\odot y} = \mathcal{B}_{\odot} \cos \vartheta$ i $\mathcal{B}_{\odot x} = \mathcal{B}_{\odot} \sin \vartheta$, per tant,

$$\mathcal{B}_{\odot} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \sin \vartheta \mathbf{i} + \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \cos \vartheta \mathbf{j} \tag{3}$$

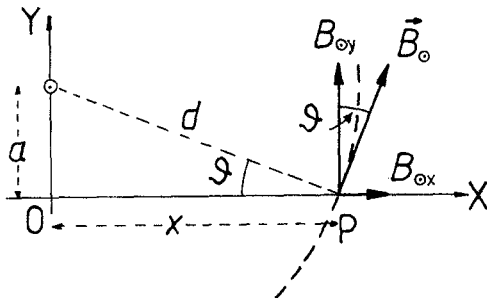


FIG. 2

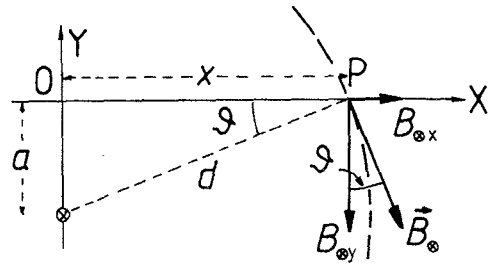


FIG. 3

Càlcul del camp magnètic creat pel corrent que entra al pla del paper, \mathcal{B}_\otimes : Pel mateix raonament d'abans, ara obtindrem (fig. 3).

$$\mathcal{B}_\otimes = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \sin \vartheta \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \cos \vartheta \mathbf{j} \quad (4)$$

El component horitzontal de \mathcal{B}_\otimes està dirigida cap a les x positives, però el component vertical de \mathcal{B}_\otimes es dirigeix cap a les y negatives, per això hi ha el signe menys en l'eq. (4). La distància d a la qual es troba el punt P del corrent ixent i de l'entrant és la mateixa, per tant, si substituïm les eqs. (3) i (4) en l'eq. (1), tenim que el camp magnètic en el punt P val

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \sin \vartheta \mathbf{i} \quad (5)$$

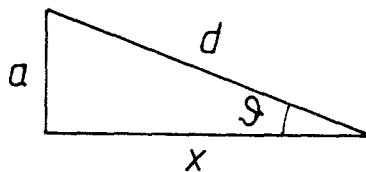


FIG. 4

Del triangle representat en la fig. 4 obtenim les relacions següents $d = (a^2 + x^2)^{1/2}$ i $\sin \vartheta = a/d$. Si substituïm aquests resultats en l'eq. (5), tenim

$$\mathcal{B}(x) = \frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2 + a^2)} \mathbf{i} \quad (6)$$

Com veiem, el camp magnètic resultant en el punt P de l'eix OX només té component horitzontal (fig. 5a). Si repetim el càlcul del camp magnètic resultant en la part esquerra

de la figura de l'enunciat (x negatives), el resultat és el mateix que el que hem obtingut en l'eq. (6), (fig. 5b), ja que la variable x apareix elevada al quadrat i el sentit del camp no canvia, com es pot comprovar immediatament.

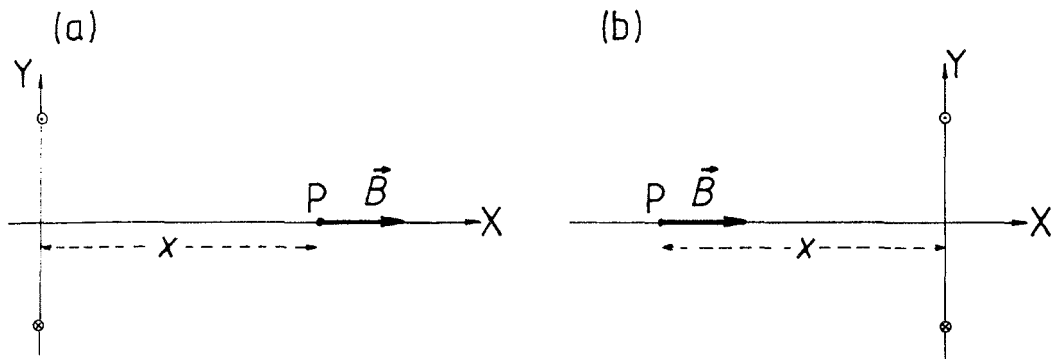


FIG. 5

(b) Per a calcular el valor de x que done un valor màxim per al mòdul del camp magnètic, $\mathcal{B}(x)$, hi aplicarem la teoria general de representació de funcions. És a dir, quan $d\mathcal{B}(x)/dx = 0$ hi ha un màxim o un mínim relatiu en els punts x que verifiquen l'equació anterior. En aquest cas, però, és més fàcil veure que el valor màxim de $\mathcal{B}(x)$ es produirà quan el denominador de l'eq. (6) siga mínim. Això té lloc en el punt $x = 0$, és a dir, quan $d = a$, i tenim

$$\mathcal{B}_{\text{màx}} = \mathcal{B}(x = 0) = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \tag{7}$$

En la fig. 6 apareix la representació gràfica del mòdul del camp magnètic.

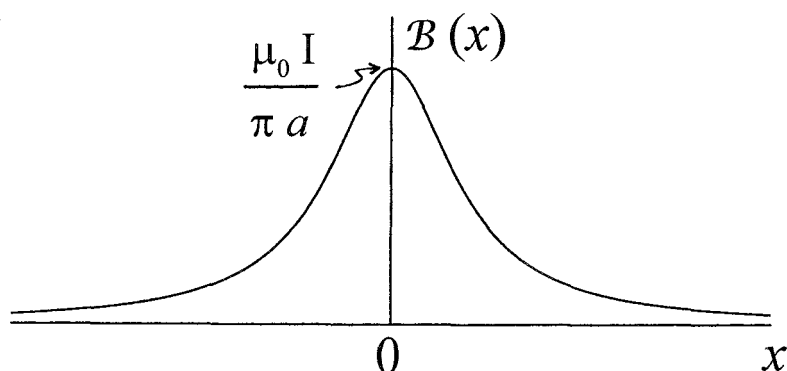


FIG. 6

(c) A partir de la fig. 7 repetim l'estudi per al camp magnètic sobre l'eix Y . L'orientació dels camps magnètics \mathcal{B}_{\odot} i \mathcal{B}_{\otimes} en els punts de l'eix Y que hem representat s'obtenen si hi apliquem de nou la regla de la mà dreta. La distància des del centre de la línia de corrent fins al punt de coordenada y , on es calcula el camp magnètic \mathcal{B} , és el mòdul de la diferència de posicions del punt y i del corrent, i val $d = |y - a|$ si $y > 0$ o $d = |y + a|$ si $y < 0$.

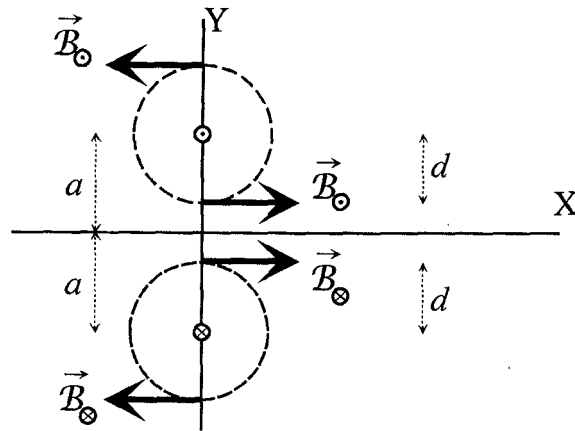


FIG. 7

Càlcul de \mathcal{B}_{\odot} : Ara, el mòdul del camp magnètic creat en un punt y pel corrent rectilini I que ix del paper és

$$\mathcal{B}_{\odot} = \frac{\mu_0 I}{2\pi |y - a|} \quad (8)$$

però l'orientació de \mathcal{B}_{\odot} serà cap a les x positives o les x negatives segons siga $y < a$ o $y > a$, respectivament (vegeu la fig. 7). Per tant, el camp magnètic ixent \mathcal{B}_{\odot} pot escriure's vectorialment com

$$\mathcal{B}_{\odot} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a - y)} \mathbf{i} = \frac{-\mu_0 I}{2\pi(y - a)} \mathbf{i} \quad (9)$$

Càlcul de \mathcal{B}_{\otimes} : Anàlogament al càlcul anterior, obtenim

$$\mathcal{B}_{\otimes} = \frac{\mu_0 I}{2\pi |y + a|} \quad (10)$$

Un raonament anàleg a l'anterior ens permet d'escriure

$$\mathcal{B}_{\otimes} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(y + a)} \mathbf{i} \quad (11)$$

Fent ús de nou del principi de superposició, el camp magnètic $\mathcal{B}(y)$ resultant sobre l'eix Y val

$$\mathcal{B}(y) = \left[\frac{-\mu_0 I}{2\pi(y - a)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(y + a)} \right] \mathbf{i} = \frac{\mu_0 I a}{\pi(a^2 - y^2)} \mathbf{i} \quad (12)$$

Aquest camp magnètic serà màxim en aquells punts y que facen mínim el denominador de l'eq. (12). En els punts $y = \pm a$ el mòdul del camp magnètic, pres en valor absolut, és infinit:

$$|\mathcal{B}(y = \pm a)| \rightarrow \infty \quad (13)$$

En la fig. 8 apareix la representació gràfica del valor absolut del mòdul del camp magnètic.

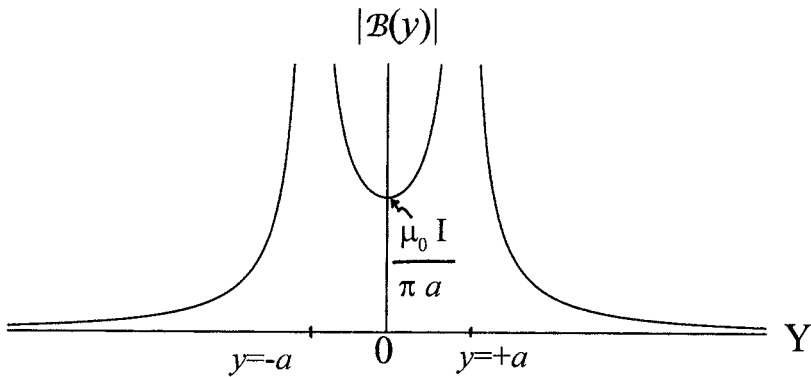
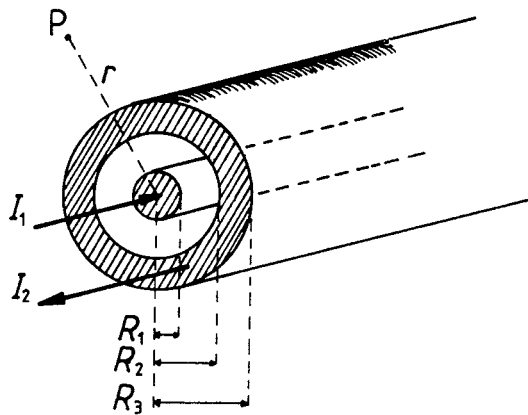


FIG. 8

11.2 Un cable coaxial es forma envoltant un conductor cilíndric sòlid, de radi R_1 , amb un cilindre conductor, de radi intern R_2 i radi extern R_3 , l'eix del qual coincideix amb el del primer cilindre. En la pràctica s'envia un corrent pel cilindre interior, que torna pel cilindre exterior, segons apareix representat en la figura adjunta. Determineu, mitjançant l'ús de la llei d'Ampère, el camp magnètic en punts de les diferents regions de l'espai. Suposem que la densitat de corrent és uniforme.



els corrents són iguals i de sentits oposats, $I_1 = -I_2$
 camp magnètic \mathbf{B} en un punt qualsevol P, a una distància genèrica r del centre del cable?

La llei d'Ampère,

$$\oint \mathbf{B} \, dl = \mu_0 I_{\text{neta}} \quad (1)$$

relaciona la circulació del camp magnètic al llarg d'un camí tancat, amb la intensitat neta del corrent, I_{neta} , que travessa la superfície delimitada pel camí tancat. Basant-nos en el

fet que el problema té simetria cilíndrica i, com que ja és conegut que les línies del camp magnètic d'un corrent rectilini són circumferències perpendiculars i concèntriques al corrent, per a calcular la circulació del camp magnètic elegirem circumferències concèntriques al cable coaxial. Així, doncs, el camí d'integració en l'eq. (1) serà una circumferència de radi r , tal com representa la fig. 1. El corrent que travessa per dins el camí d'integració es considera positiu (negatiu) si en resseguir el camí d'integració amb els dits índex-menovell de la mà dreta, el dit polze assenyalava en el mateix (distint) sentit que el corrent elèctric.

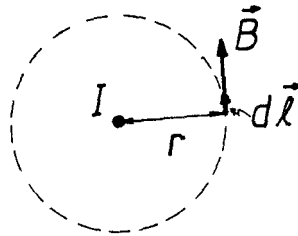


FIG. 1

El camp magnètic \mathbf{B} creat a una distància r per un corrent I és tangent a la circumferència de radi r i, per tant, \mathbf{B} és paral·lel a l'element de circumferència $d\ell$ (fig. 1). Segons la llei que dóna el camp magnètic produït per un corrent rectilini, el mòdul del camp magnètic en aquest cas només depèn de la distància radial r , per això el mòdul de \mathbf{B} és constant al llarg de tot el camí d'integració,

$$\oint \mathbf{B} d\ell = \oint B d\ell = B \oint d\ell = B 2\pi r \quad (2)$$

En l'eq. (2) hem considerat que la integral tancada de l'element de línia $d\ell$ en una circumferència de radi r val la longitud d'aquesta circumferència, és a dir $2\pi r$. D'ara endavant, aquest valor de r dependrà de la regió de l'espai que considerem.

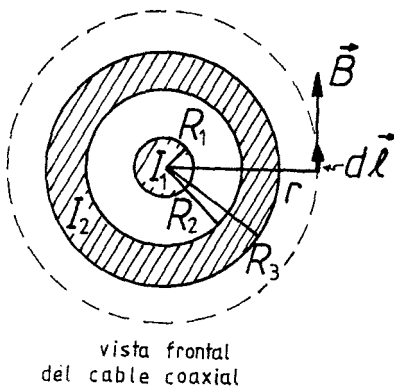


FIG. 2

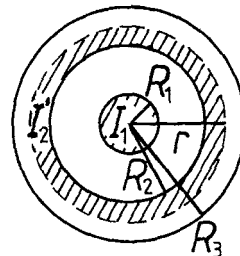


FIG. 3

Regió $r \geq R_3$: En aquest cas (fig. 2) la intensitat neta del corrent que travessa l'interior de la superfície tancada pel camí d'integració (línia discontinua en la fig. 2) és $I_{\text{neta}} = I_1 + I_2 = 0$, ja que $I_1 = -I_2$. Per aplicació de la llei d'Ampère, eq. (1), obtindrem que, en aquest cas,

$$B = 0 \quad \text{quan } r \geq R_3 \tag{3}$$

Regió $R_2 \leq r \leq R_3$: Ara prenem el camí d'integració representat en la fig. 3. La intensitat neta del corrent que travessa l'interior de la circumferència de radi r és $I_{\text{neta}} = I_1 + I'_2$, on I'_2 és la intensitat del corrent que passa entre les circumferències de radis R_2 i r . Si considerem que la densitat de corrent és uniforme, podem escriure

$$I'_2 = j_2 S = j_2 \pi (r^2 - R_2^2) \tag{4}$$

on j_2 és la densitat de corrent que passa pel cable exterior, i $S = \pi(r^2 - R_2^2)$ és la superfície de l'anell circular delimitat per r i R_2 , per on circula el corrent I'_2 . La densitat del corrent en l'anell exterior, j_2 , és

$$j_2 = \frac{I_2}{S_{23}} = \frac{I_2}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \tag{5}$$

on I_2 és el corrent total que circula pel cable exterior, i $S_{23} = \pi(R_3^2 - R_2^2)$ és la superfície de l'anell circular delimitat per les circumferències de radis R_2 i R_3 , per la qual circula el corrent I_2 . A partir del que hem fet abans, en la regió $R_2 \leq r \leq R_3$ obtenim

$$I_{\text{neta}} = I_1 + I_2 \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = I_1 \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) = I_1 \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \tag{6}$$

on hem substituït I_2 per $-I_1$, segons consta en l'enunciat del problema. Si hi apliquem la llei d'Ampère i l'eq. (2), obtindrem per al mòdul del camp magnètic

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \quad \text{quan } R_2 \leq r \leq R_3 \tag{7}$$

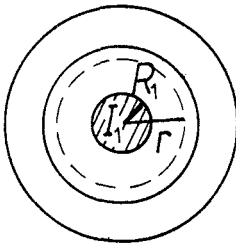


FIG. 4



FIG. 5

Regió $R_1 \leq r \leq R_2$: El camí d'integració apareix representat en la fig. 4 mitjançant la línia discontinua (per claredat, en el dibuix no hem representat els radis R_2 i R_3

del cilindre exterior). En aquest cas, la intensitat neta que travessa per l'interior de la circumferència de radi r és únicament I_1 . Per tant, $B2\pi r = \mu_0 I_1$, i obtenim per al mòdul del camp magnètic

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad \text{quan } R_1 \leq r \leq R_2 \quad (8)$$

Regió $0 \leq r \leq R_1$: El camí d'integració apareix en la fig. 5 (on només hem representat ampliada la regió central del cable coaxial). La intensitat neta que travessa per l'interior de la circumferència de radi r serà $I_{\text{neta}} = I'_1 = j_1 S$, on ara j_1 és la densitat de corrent que circula pel cable intern i S és la superfície compresa entre el centre del cable i la circumferència de radi r , $S = \pi r^2$. Com que la densitat de corrent és uniforme, j_1 valdrà $j_1 = I_1/(\pi R_1^2)$, on πR_1^2 és la superfície total per on travessa el corrent I_1 . Per tant,

$$I_{\text{neta}} = I'_1 = I_1 \frac{r^2}{R_1^2} \quad (9)$$

Si hi apliquem de nou les eqs. (1) i (2), obtenim

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_1 r}{2\pi R_1^2} \quad \text{quan } 0 \leq r \leq R_1 \quad (10)$$

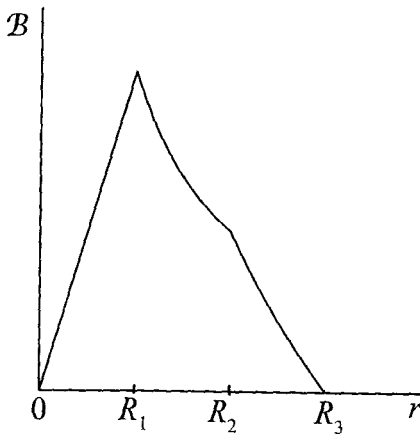


FIG. 6A

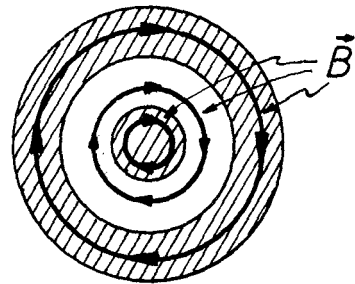


FIG. 6B

La fig. 6a representa esquemàticament el mòdul del camp magnètic, B , en funció de la distància, r , a l'eix del cable coaxial. Com pot apreciar-se, B és continu en tot l'espai (encara que la seua derivada no ho és en els punts R_1 , R_2 i R_3).

El sentit del camp magnètic es pot calcular per aplicació de la regla de la mà dreta.

En la regió interior del cable ($0 \leq r \leq R_3$) la intensitat neta de corrent és cap a dins de la fig. 6b, perquè sempre és més gran el corrent que entra pel cable central que el corrent que ix pel cable exterior (excepte quan $r = R_3$, cas en què ambdós són iguals). Per això, en el cable coaxial les línies del camp magnètic (representades en la fig. 6b amb traç gruix) serien circumferències concèntriques, amb el camp tangent a aquestes línies i orientat en sentit horari. El camp magnètic és nul fora del cable coaxial.

En els càlculs anteriors sempre hem considerat que les propietats magnètiques de les regions on calculàvem el camp magnètic estaven descrites per la permeabilitat del buit, μ_0 , encara que algunes regions on calculem \mathcal{B} (i, per tant, hi apliquem la llei d'Ampère) corresponen a medis materials (per exemple, els mateixos cables conductors). La raó d'usar sempre μ_0 en comptes d'usar la permeabilitat μ que correspon al material que hi ha en cada regió on calculem \mathcal{B} , està justificada pel fet que en la majoria de medis la seua permeabilitat no difereix gran cosa de la del buit, $\mu \simeq \mu_0$; encara que en els materials que presenten propietats magnètiques notables sí que és ben diferent μ de μ_0 .

11.3 L'electró d'un àtom d'hidrogen descriu una òrbita (suposada circular) de radi $r = 5.28 \cdot 10^{-11}$ m amb una velocitat $v = 2.19 \cdot 10^6$ m/s. Calculeu el camp magnètic produït en el centre de l'àtom per aquest electró en moviment. (La permeabilitat del buit val $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ m kg/C²).

$$r = 5.28 \cdot 10^{-11} \text{ m} = a_{\text{Bohr}}, v = 2.19 \cdot 10^6 \text{ m/s} = v_{\text{Bohr}}$$

\mathcal{B} en el centre de l'àtom?

Si suposem una descripció clàssica del moviment de l'electró al voltant del nucli atòmic, la trajectòria de l'electró seria una circumferència de radi a_{Bohr} amb centre en el nucli d'hidrogen (un protó).

La intensitat de corrent correspon a la càrrega per unitat de temps. L'electró passa pel mateix lloc cada període de temps; per tant, la intensitat I associada a l'electró en la seua òrbita serà $I = q/t$, on $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C és el valor absolut de la càrrega de l'electró i t és el temps necessari per a descriure una òrbita (circumferència) completa. Com que la velocitat v de l'electró és constant,

$$t = \frac{\text{espai}}{\text{velocitat}} \quad (1)$$

i com que l'espai recorregut en una òrbita completa és $2\pi a_{\text{Bohr}}$ i la velocitat és la de Bohr, obtenim

$$t = 2\pi \frac{a_{\text{Bohr}}}{v_{\text{Bohr}}} = 1.52 \cdot 10^{-16} \text{ s} \quad (2)$$

Així, doncs, la intensitat de corrent serà

$$I = \frac{q}{t} = 1.05 \cdot 10^{-3} \text{ A} \quad (3)$$

El corrent I té el mateix sentit que la velocitat de la càrrega, o l'oposat, segons que la càrrega en moviment siga positiva o negativa. En el cas de l'electró, la càrrega és negativa; per tant el corrent serà de sentit contrari al de la velocitat de l'electró, tal com es pot veure en la fig. 1.

El camp magnètic \mathcal{B} creat per un corrent I en un punt P està donat per la llei de Biot i Savart:

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (4)$$

on \mathbf{R} és el vector que va des de l'element de corrent $d\mathbf{l}$ fins al punt on es calcula el camp.

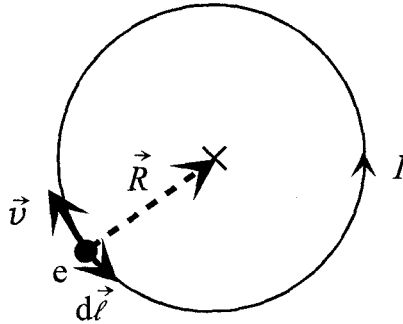


FIG. 1

En el cas de l'electró en l'àtom d'hidrogen, l'element diferencial de longitud $d\ell$ és perpendicular al vector \mathbf{R} (fig. 1), ja que \mathbf{R} coincideix en direcció amb el radi de l'òrbita i el seu sentit està dirigit cap al centre d'aquesta. El mòdul del camp magnètic val

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell R}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell}{R^2} \quad (5)$$

i té direcció perpendicular al pla del paper. Segons la regla de la mà dreta per al producte vectorial, el camp magnètic estaria dirigit cap a fora del paper. Com que la distància des de l'element de línia $d\ell$ fins al centre de l'àtom, que és el mòdul de \mathbf{R} , és constant i val $R = a_{\text{Bohr}}$, obtenim finalment

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a_{\text{Bohr}}^2} \int d\ell = \frac{\mu_0 I}{2a_{\text{Bohr}}} = 12.49 \text{ T} \quad (6)$$

on ens servim del fet que la integral de l'element de línia al llarg del recorregut que fa el corrent que causa el camp magnètic val $\int d\ell = 2\pi a_{\text{Bohr}}$, ja que és el perímetre de la circumferència de l'òrbita de Bohr.

El valor de \mathcal{B} que hem obtingut és molt més gran que el del camp magnètic terrestre, que, en mitjana, val $7 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

11.4 Calculeu el camp magnètic \mathcal{B} en el centre d'una espira rectangular, de costats a i b , recorreguda per un corrent I .

\mathcal{B} ?

El camp magnètic \mathcal{B} produït per un corrent I es pot calcular mitjançant l'expressió

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (1)$$

on $d\ell$ és l'element diferencial de línia recorregut pel corrent I , i \mathbf{R} és el vector que va des de l'element de línia $d\ell$ fins al punt P on volem calcular el camp magnètic. Segons la regla de la mà dreta per al producte vectorial, veiem que el camp magnètic creat per

una espira rectangular recorreguda per un corrent I en el sentit que s'indica en la fig. 1 té la direcció perpendicular al pla de l'espira i el sentit cap a l'interior del paper. Per tant, com que la direcció i el sentit ja estan determinats, només calcularem el mòdul \mathcal{B} del camp magnètic \mathcal{B} . Segons l'eq. (1), escriurem

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell R \sin \vartheta}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell \sin \vartheta}{R^2} \quad (2)$$

on ϑ és l'angle que formen $d\ell$ i \mathbf{R} (fig. 1).

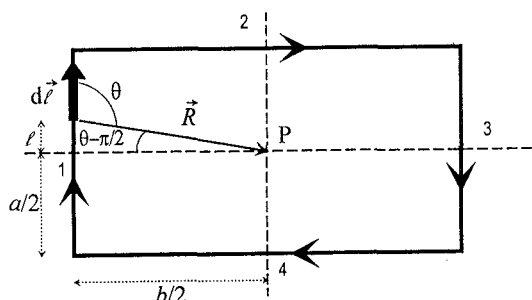


FIG. 1

A continuació obtindrem el mòdul del camp magnètic produït en el centre de l'espira per cada tram rectilini d'aquesta. El camp total serà la suma d'aquests camps. Segons l'eq. (2), hi ha 3 variables dins la integral que no són independents: ℓ , R i ϑ , segons es desprèn de la fig. 1. Com que hem de triar una variable en funció de la qual resoldre la integral, nosaltres escollim ϑ i, per això, expressarem ℓ i R a partir de l'angle ϑ .

Segons es pot observar en la fig. 1, per al tram 1 de l'espira podem emprar les següents relacions trigonomètriques

$$\cos(\vartheta - \pi/2) = \frac{(b/2)}{R} = \sin \vartheta \quad \Rightarrow \quad R = \frac{(b/2)}{\sin \vartheta} \quad (3)$$

$$\tan(\vartheta - \pi/2) = \frac{\ell}{(b/2)} = -\frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \quad \Rightarrow \quad \ell = -\frac{b \cos \vartheta}{2 \sin \vartheta} \quad (4)$$

Si diferenciem l'eq. (4), obtenim l'element diferencial de línia $d\ell$ en funció de l'angle ϑ ,

$$d\ell = \frac{b}{2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta \quad (5)$$

Si, per últim, substituïm les expressions anteriors dins l'eq. (2), obtenim el camp magnètic produït pel tram 1 de l'espira en el centre d'aquesta,

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} (-\cos \vartheta_2 + \cos \vartheta_1) \quad (6)$$

Com observem en la fig. 2, els angles ϑ_1 i ϑ_2 vénen donats en funció dels valors dels costats de l'espira mitjançant les expressions:

$$\cos \vartheta_1 = \frac{a/2}{[(a/2)^2 + (b/2)^2]^{1/2}} \quad (7)$$

$$\cos \vartheta_2 = -\sin(\vartheta_2 - \pi/2) = \frac{-a/2}{[(a/2)^2 + (b/2)^2]^{1/2}} \quad (8)$$

Finalment, el camp magnètic \mathcal{B}_1 que actua sobre el centre de l'espira i que és degut al tram 1 de l'espira serà

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\mu_0 I a}{\pi b (a^2 + b^2)^{1/2}} \quad (9)$$

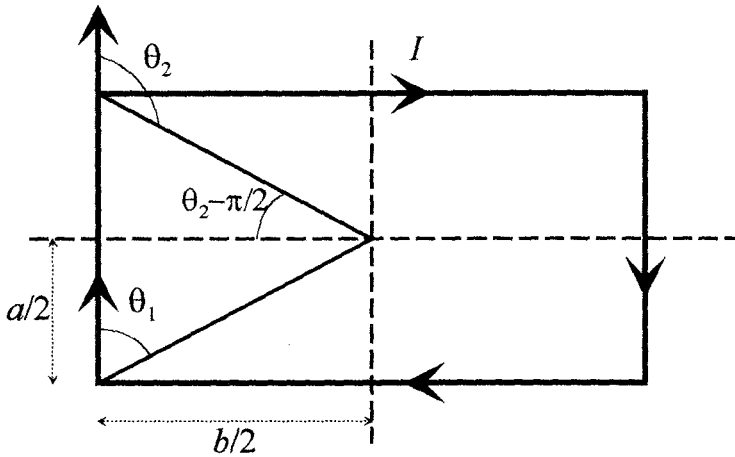


FIG. 2

Per simetria, és fàcil comprovar que el mòdul del camp magnètic creat pel tram 3 de l'espira és igual al mòdul del camp magnètic creat pel tram 1,

$$\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_1 = \frac{\mu_0 I a}{\pi b (a^2 + b^2)^{1/2}} \quad (10)$$

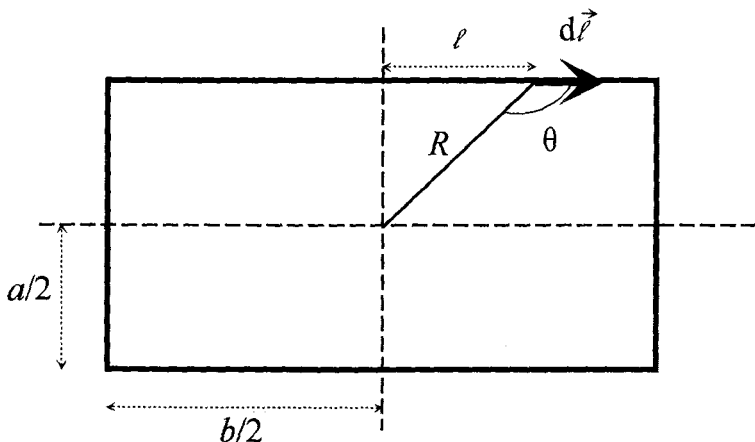


FIG. 3

A continuació calcularem el camp magnètic creat pel tram 2 en el centre de l'espira. De la mateixa manera que hem fet en el tram 1, després de relacionar les variables ϑ , R i ℓ (fig. 3), obtenim que

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell \sin \vartheta}{R^2} = \frac{\mu_0 I b}{\pi a(a^2 + b^2)^{1/2}} \quad (11)$$

Per simetria, el mòdul del camp magnètic creat pel tram 4 de l'espira serà igual al creat pel tram 2,

$$B_4 = B_2 = \frac{\mu_0 I b}{\pi a(a^2 + b^2)^{1/2}} \quad (12)$$

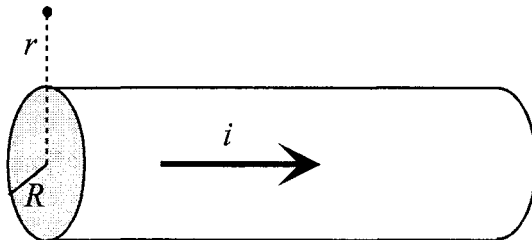
En definitiva, el mòdul del camp magnètic total en el centre de l'espira rectangular serà

$$B = \sum_{i=1}^4 B_i = \frac{\mu_0 I a}{\pi b(a^2 + b^2)^{1/2}} + \frac{\mu_0 I b}{\pi a(a^2 + b^2)^{1/2}} \quad (13)$$

que, després d'operar algebraicament, escriurem

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{(a^2 + b^2)^{1/2}}{ab} \quad (14)$$

11.5 Un corrent de 10 A circula per l'interior d'un conductor de secció cilíndrica de radi $4 \cdot 10^{-2}$ m, rectilini i molt llarg. Calculeu el(s) punt(s) en què el camp magnètic val 10^{-2} vegades el valor que té sobre la superfície del cilindre conductor.



$i = 10$ A, $R = 4 \cdot 10^{-2}$ m

valor(s) d' r en què es compleix que $B(r) = 10^{-2}B(R)$?

Com que hem de calcular el camp magnètic en funció de la distància r al centre del cilindre conductor, aprofitarem la simetria cilíndrica del sistema per a aplicar-hi la llei d'Ampère. Cal recordar que, encara que aquesta llei sempre és vàlida, la seua aplicació pràctica només és possible quan hi ha fortes simetries en el problema que s'estudia.

La llei d'Ampère estableix que la circulació del camp magnètic \mathcal{B} al llarg d'una línia tancada és μ_0 vegades la intensitat del corrent que travessa la superfície limitada per l'esmentada línia tancada

$$\oint \mathcal{B} d\ell = \mu_0 I \quad (1)$$

En els càlculs que segueixen necessitem conèixer la densitat de corrent: $j =$ intensitat/superfície. En el nostre cas, la intensitat i travessa la secció A del cilindre conductor, on $A = \pi R^2$ (fig. 1). Per tant,

$$j = \frac{i}{\pi R^2} \quad (2)$$

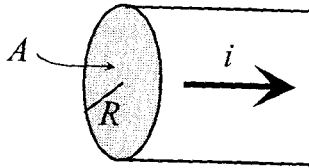


FIG. 1

Càlcul de \mathcal{B} dins el conductor: Elegim com a camí d'integració per a aplicar-hi la llei d'Ampère una circumferència, concèntrica al cilindre conductor i de radi $r > R$ (fig. 2). Per l'interior d'aquesta secció de radi r circula un corrent $I = j\pi r^2$. En substituir-hi el valor j , eq. (2), obtenim que la part dreta de la llei d'Ampère s'escriurà en aquest cas

$$\mu_0 I = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} i \quad (3)$$

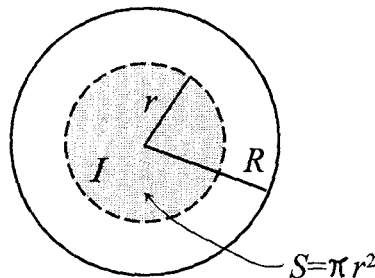


FIG. 2

Per a calcular la part esquerra de la llei d'Ampère, eq. (1), tenim en compte que les línies del camp magnètic creat per un corrent rectilini són circumferències centrades en l'eix del corrent, per això \mathcal{B} és paral·lel a $d\ell$ al llarg del camí d'integració que hem escollit, amb la qual cosa podem escriure que

$$\oint \mathcal{B} d\ell = \oint \mathcal{B} dl \quad (4)$$

La simetria cilíndrica del problema ens permet veure que el mòdul del camp magnètic és constant al llarg del camí d'integració, per això

$$\oint \mathcal{B} dl = \mathcal{B} \oint dl \quad (5)$$

i com que $\oint dl = 2\pi r^2$, finalment podem reescriure l'eq. (1) com

$$\mu_0 \frac{r^2}{R^2} i = \mathcal{B} 2\pi r \quad (6)$$

D'ací obtenim el camp magnètic

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r \quad r < R \quad (7)$$

Càlcul de \mathcal{B} fora del conductor: Ara prenem una circumferència de radi $r > R$ com a camí d'integració (fig. 3) per a aplicar-hi la llei d'Ampère. Seguint el mateix raonament que abans, obtenim que

$$\oint \mathcal{B} dl = \oint \mathcal{B} dl = \mathcal{B} \oint dl = \mathcal{B} 2\pi r \quad (8)$$

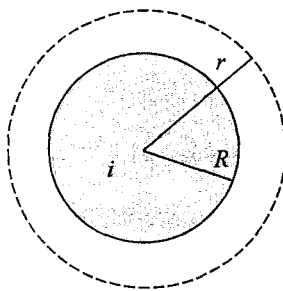


FIG. 3

El corrent que circula per l'interior del camí tancat per la circumferència de radi r és únicament el corrent que passa pel cilindre conductor, per això ara

$$\mu_0 I = \mu_0 i \quad (9)$$

A partir de les eqs. (8) i (9) obtenim que

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad r > R \quad (10)$$

Podem observar que aquest camp magnètic és continu en la superfície del conductor, $r = R$, i val

$$\mathcal{B}(R) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad (11)$$

Si hi apliquem ara la condició requerida en el problema, $\mathcal{B}(r) = 10^{-2}\mathcal{B}(R)$, obtenim que dins el cilindre conductor

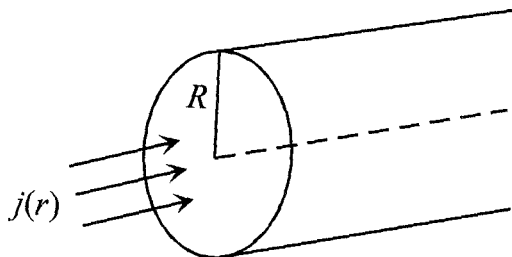
$$r < R : \quad \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r = 10^{-2} \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad \Rightarrow \quad r = 10^{-2} R \quad (12)$$

i fora del cilindre

$$r > R : \quad \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = 10^{-2} \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad \Rightarrow \quad r = 10^2 R \quad (13)$$

Les expressions (12) i (13) ens donen els dos punts en què el camp magnètic compleix que val la centèsima part del valor que té en la superfície del cilindre.

11.6 Per l'interior d'un cilindre conductor de radi R circula un corrent elèctric, la densitat de corrent del qual val $j(r) = r$, on r és la distància mesurada des de l'eix de simetria del cilindre. Calculeu el camp magnètic que produeix aquest corrent dins i fora del cilindre conductor. Totes les magnituds del problema estan expressades en unitats del SI.



$$j(r) = r$$

$\mathcal{B}(r)?$

A causa de la simetria cilíndrica del problema serà operatiu aplicar-hi la llei d'Ampère (fig. 1)

$$\oint \mathcal{B} d\ell = \mu_0 I \quad (1)$$

per a calcular el camp magnètic.

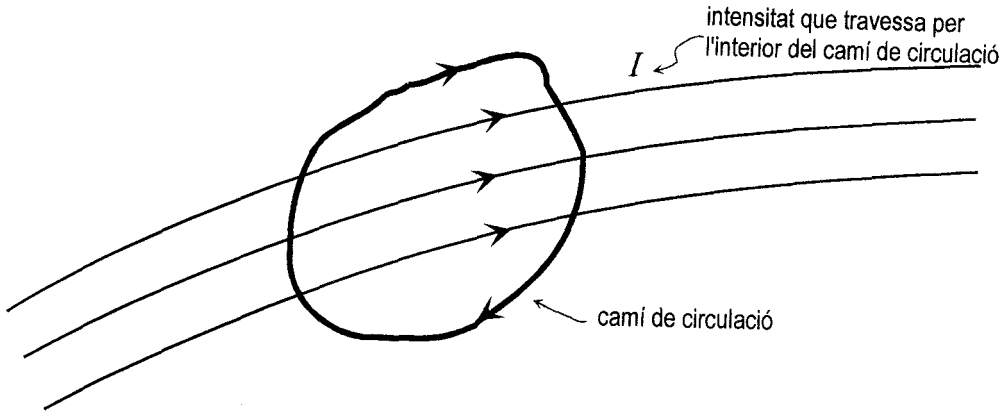


FIG. 1

Com que la densitat de corrent és axial [$j(r)$ només depén de la distància a l'eix de simetria del cilindre], les línies del camp magnètic creat per aquest corrent elèctric són circumferències concèntriques centrades en l'eix de simetria del corrent. L'orientació del camp magnètic ve especificada per la regla de la mà dreta, il·lustrada en la fig. 2.

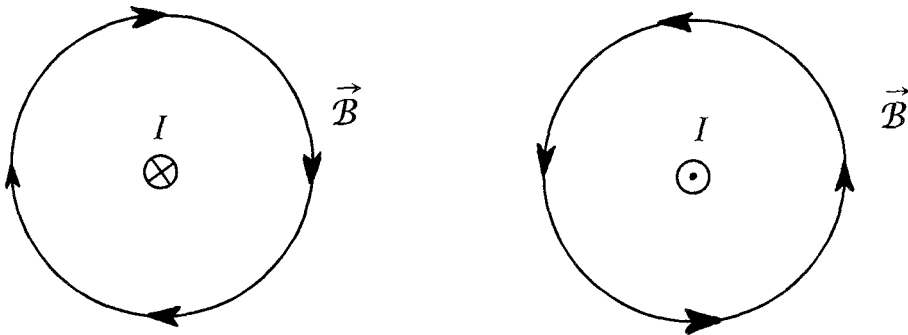


FIG. 2

Per a avaluar l'eq. (1) prenem com a camí d'integració una circumferència de radi r que coincideix amb una línia de camp magnètic. En aquest cas el camp \mathcal{B} és paral·lel al camí d'integració ($\mathcal{B} \parallel d\ell$) i el seu valor és constant al llarg de tot aquest camí (com que, a causa de la simetria axial, el camp magnètic només depén de la distància r a l'eix de simetria, i com que el valor de r és el mateix per a tot el camí d'integració, el mòdul del camp magnètic serà constant al llarg del camí d'integració). Així, doncs, pel fet que $\mathcal{B} \parallel d\ell$, tenim

$$\oint \mathcal{B} d\ell = \oint \mathcal{B} d\ell \tag{2}$$

i com que \mathcal{B} és constant

$$\oint \mathcal{B} d\ell = \mathcal{B} \oint d\ell = \mathcal{B} 2\pi r \tag{3}$$

on $\oint d\ell = 2\pi r$ i r és el radi de la circumferència que hem pres com a camí d'integració.

Càlcul de \mathcal{B} en punts interiors al cilindre conductor, $r < R$: La intensitat del corrent que passa per l'interior del camí d'integració, que es la circumferència de radi r (fig. 3), és

$$I = \int_0^r j(r') dS \quad (4)$$

on $dS = 2\pi r' dr'$ és l'element de superfície,

$$I = 2\pi \int_0^r j(r') r' dr' = 2\pi \int_0^r r'^2 dr' = \frac{2\pi}{3} r^3 \quad (5)$$

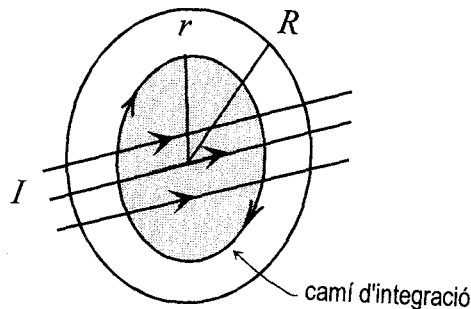


FIG. 3

De les eqs. (1), (3) i (5) obtenim que

$$\mathcal{B} 2\pi r = \mu_0 \frac{2\pi}{3} r^3 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} = \frac{\mu_0}{3} r^2 \quad r < R \quad (6)$$

Càlcul de \mathcal{B} en punts exteriors al cilindre conductor, $r > R$: Ara prenem com a camí d'integració la circumferència de radi $r > R$ representada en la fig. 4.

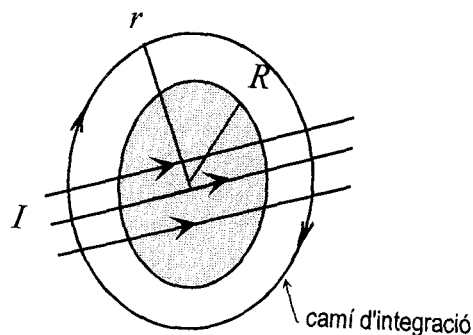


FIG. 4

Si procedim de forma anàloga al cas anterior, obtenim que el corrent que circula per l'interior del camí de circulació val

$$I = \int_0^R j(r) dS = 2\pi \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi}{3} R^3 \quad (7)$$

Notem que ara hem posat R com a límit superior en la integral, ja que no hi ha densitat de corrent fora del cilindre ($j = 0, r > R$).

De les eqs. (1), (3) i (7) obtenim que

$$B 2\pi r = \mu_0 \frac{2\pi}{3} R^3 \quad B = \frac{\mu_0}{3} \frac{R^3}{r} \quad r > R \quad (8)$$

El resultat que obtenim en l'exterior del cilindre conductor té el comportament típic ($\sim 1/r$) del camp magnètic creat per un corrent rectilini infinit. De fet, si multipliquem i dividim per 2π l'eq. (8) i usem l'eq. (7), $I = \frac{2\pi}{3} R^3$, obtenim

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (9)$$

com correspon al camp magnètic creat per un corrent rectilini infinit de valor I .

La fig. 5 il·lustra el comportament del camp magnètic que acabem de calcular.

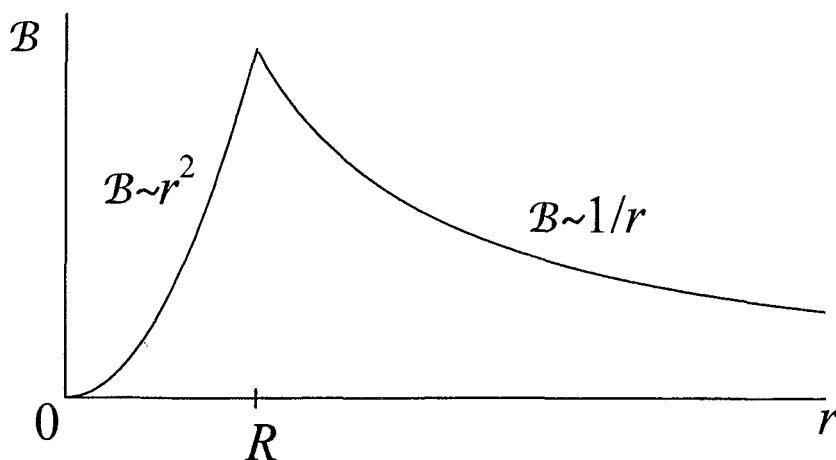
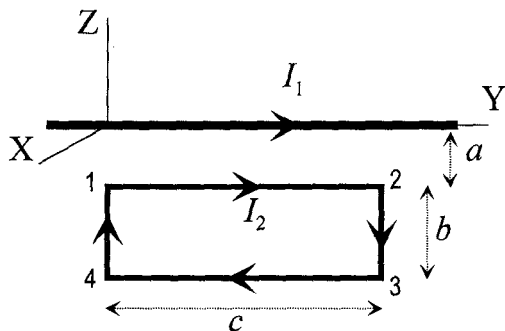


FIG. 5

11.7 Tenim un cable rectilini llarg que transporta un corrent $I_1 = 30$ A, i una espira rectangular de dimensions $b = 8$ cm i $c = 30$ cm, situada a 1 cm del cable, tal com representa la figura. Si per l'espira circula un corrent $I_2 = 20$ A, calculeu la força resultant que actua sobre aquesta.



$I_1 = 30$ A, $I_2 = 20$ A, $a = 0.01$ m, $b = 0.08$ m, $c = 0.3$ m

\mathbf{F} sobre l'espira?

La força que actua sobre l'espira serà la suma de les forces que actuen sobre els seus quatre costats.

La força produïda per un camp magnètic \mathbf{B} sobre un corrent I és

$$\mathbf{F} = I \int d\ell \times \mathbf{B} \quad (1)$$

on $d\ell$ és l'element diferencial de línia pel qual circula el corrent i la integració es fa per a tota la línia de corrent. Per tant, ens interessa conèixer \mathbf{B} , és a dir, el camp magnètic creat pel corrent I_1 , i calcular la força sobre cada costat de l'espira, recorreguda pel corrent I_2 .

El mòdul del camp magnètic \mathbf{B} creat pel corrent rectilini I_1 a la distància z és

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi z} \quad (2)$$

Només ens interessa conèixer el camp magnètic que actua sobre l'espira, i aquesta es troba sobre el pla YZ . Si considerem el sentit del corrent I_1 i els eixos de coordenades elegits, el camp magnètic en els punts del pla YZ s'escriu en notació vectorial com

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi z} \mathbf{i} \quad (3)$$

Cal assenyalar que per a $z > 0$ el camp magnètic està dirigit segons el sentit positiu de l'eix X , mentre que quan $z < 0$, el camp magnètic està dirigit en sentit negatiu de l'eix X . Per a valors de z negatius, com correspon a la figura de l'enunciat, el camp magnètic \mathbf{B} està orientat cap als valors de les x negatives.

D'ara endavant denominarem F_{ij} la força que actua sobre el costat ij (on $i, j = 1, 2, 3, 4$) de l'espira i farem servir la fig. 1 per a referir-nos als límits de les integrals que apareixeran a continuació.

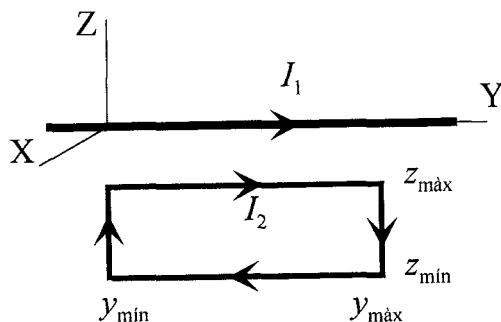


FIG. 1

Càlcul de la força F_{12} sobre el costat 12 de l'espira: Segons les eqs. (1) i (3), escrivim

$$F_{12} = I_2 \int d\ell \times \mathcal{B} = I_2 \mathcal{B} \mathbf{k} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy = I_2 \mathcal{B} (y_{\max} - y_{\min}) \mathbf{k} =$$

$$I_2 \mathcal{B} c \mathbf{k} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi a} \mathbf{k} \quad (4)$$

on hem tingut en compte que el corrent sobre el qual actua el camp magnètic és I_2 , que en aquest tram el corrent està dirigit cap a les y positives i per això $d\ell = dy \mathbf{j}$, que $(y_{\max} - y_{\min}) = c$, i que el camp magnètic és constant al llarg de tot el costat 12 de l'espira i val

$$\mathcal{B} = \frac{-\mu_0 I_1}{2\pi a} \mathbf{i} \quad (5)$$

ja que aquest costat es troba a una distància a del corrent I_1 i en la regió $z < 0$.

Càlcul de la força F_{34} sobre el costat 34 de l'espira: Anàlogament al cas anterior, el camp magnètic és constant al llarg de tot el costat 34 de l'espira i val

$$\mathcal{B} = \frac{-\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)} \mathbf{i} \quad (6)$$

ja que la distància entre aquest costat i el corrent I_1 és ara $(a+b)$ i es troba en la regió $z < 0$. També podem escriure que $d\ell = -dy \mathbf{j}$, ja que el sentit del corrent I_2 en aquest tram és contrari a l'eix Y . Per un raonament semblant al cas anterior, a partir de l'eq. (1) obtenim

$$F_{34} = I_2 \int d\ell \times \mathcal{B} = \frac{-\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)} \mathbf{k} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy = \frac{-\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi(a+b)} \mathbf{k} \quad (7)$$

Càlcul de de la força F_{41} : En aquest cas tenim que $d\ell = dz \mathbf{k}$, però ara el camp magnètic no és constant i val

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi z} \mathbf{i} \quad (8)$$

segons la distància z a la qual es calcule el camp \mathbf{B} . Per l'eq. (1), tenim que la força F_{41} val

$$\begin{aligned} F_{41} = I_2 \int d\ell \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \mathbf{j} \int_{-(a+b)}^{-a} \frac{dz}{z} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left(\frac{a}{a+b} \right) \mathbf{j} = \\ &= \frac{-\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (9)$$

Els límits que hem usat en la integració corresponen a la coordenada z del punt 4, $z = -(a+b)$, i a la coordenada z del punt 1, $z = -a$. Aquesta força F_{41} està orientada cap a les y negatives, ja que $(1 + \frac{b}{a}) > 1$ i, per tant, $\ln(1 + \frac{b}{a}) > 0$.

Càlcul de la força F_{23} : De forma similar al cas anterior, ara tenim

$$\begin{aligned} F_{23} = I_2 \int d\ell \times \mathbf{B} &= \frac{-\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \mathbf{j} \int_{-(a+b)}^{-a} \frac{dz}{z} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right) \mathbf{j} = \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (10)$$

Hem procedit de forma anàloga al cas de la força F_{41} , però ara $d\ell = -dz \mathbf{k}$ i el sentit d'integració és el mateix que abans, amb límit inferior $z = -(a+b)$ i límit superior $z = -a$; també podríem haver canviat el sentit d'integració i agafar $d\ell = dz \mathbf{k}$. Ara bé, no podem canviar el sentit del corrent dues vegades: en els límits d'integració i en la definició de l'element de línia. Per un raonament anàleg al que hem fet després de l'eq. (9), trobem que aquesta força està dirigida cap a les y positives.

La força total F_{total} que actua sobre l'espira val

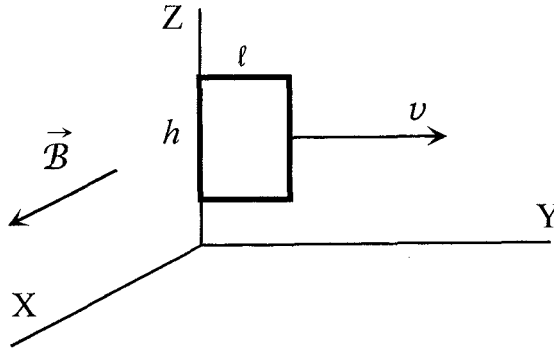
$$F_{\text{total}} = F_{12} + F_{23} + F_{34} + F_{41} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right) \mathbf{k} = 3.2 \cdot 10^{-3} \mathbf{k} \text{ N} \quad (11)$$

Noteu que les forces F_{41} i F_{23} tendeixen a deformat l'espira, és a dir, a eixamplar-la lateralment, però com que l'espira és rígida, no es deformatà. Com que aquestes forces actuen en sentits contraris i són iguals, si considerem que l'espira és rígida, és a dir, indeformable, la seua contribució a la força total és nul·la.

12

**Inducció
electromagnètica**

12.1 Una espira rectangular, de costats $h = 0.5 \text{ m}$ i $\ell = 0.2 \text{ m}$, es mou a través d'una regió en què el camp magnètic ve donat per $\mathcal{B}_y = \mathcal{B}_z = 0 \text{ T}$ i $\mathcal{B}_x = (6 - y) \text{ T}$, on y vindria expressat en metres. Si $t = 0$ quan l'espira està en la posició mostrada en la figura, calculeu la força electromotriu induïda en l'espira en funció del temps: (a) si la velocitat de l'espira és constant i val $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} \text{ m/s}$, i (b) si l'espira parteix del repòs i té una acceleració constant $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} \text{ m/s}^2$. (c) Repetiu els càlculs quan el moviment és paral·lel a l'eix OZ en comptes de ser paral·lel a l'eix OY. (d) Calculeu el corrent induït en l'espira si la seua resistència és $R = 2 \Omega$ i el seu coeficient d'autoinducció és negligible.



$\mathcal{B}_x = (6 - y) \text{ T}$, $\mathcal{B}_y = \mathcal{B}_z = 0 \text{ T}$
 $\mathbf{v} = (0, v, 0) \text{ m/s}$, $h = 0.5 \text{ m}$, $\ell = 0.2 \text{ m}$, $R = 2 \Omega$
 quan el costat dret de l'espira està en $y = 0 \text{ m}$, $t = 0 \text{ s}$
 $V_{\mathcal{E}}?$ si: $\begin{cases} \text{(a)} & \mathbf{v} = 2\mathbf{j} \text{ m/s}, \mathbf{a} = 0 \text{ m/s}^2 \\ \text{(b)} & v_0 = 0 \text{ m/s}, \mathbf{a} = 2\mathbf{j} \text{ m/s}^2 \end{cases}$
 (c) repetiu (a) i (b) quan $\mathbf{v} = (0, 0, v) \text{ m/s}$
 (d) I induïda?

Segons la llei de Faraday-Henry, la força electromotriu $V_{\mathcal{E}}$ està relacionada amb la variació amb el temps del flux del camp magnètic $\Phi_{\mathcal{B}}$ a través de la superfície tancada per l'espira,

$$V_{\mathcal{E}} = - \frac{d\Phi_{\mathcal{B}}}{dt} \tag{1}$$

i el flux magnètic $\Phi_{\mathcal{B}}$ està relacionat amb el camp magnètic \mathcal{B} per la integral a través de la superfície delimitada per l'espira,

$$\Phi_{\mathcal{B}} = \int_{\text{espira}} \mathcal{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{2}$$

Càlcul del flux magnètic $\Phi_{\mathcal{B}}$: Segons la figura de l'enunciat, els components del camp magnètic són $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_x, 0, 0)$, i l'element diferencial de superfície $d\mathbf{S}$ es troba sobre el pla YZ, per tant hi correspon un vector perpendicular a aquest pla, és a dir, amb direcció

X , $d\mathbf{S} = (dS, 0, 0)$. D'això obtenim que $\mathbf{B} d\mathbf{S} = B_x dS$.²¹ Així, doncs, de l'eq. (2) i de les expressions anteriors, tenim

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{E}} &= \int_{\text{espira}} \mathbf{B}_x dS = \int \int_{\text{espira}} (6 - y) dy dz = \int_{\text{espira}} dz \int (6 - y) dy \\ &= h \int_{y_i}^{y_e} (6 - y) dy = h \left(6y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y_i}^{y_e}\end{aligned}\quad (3)$$

on hem expressat l'element de superfície en coordenades cartesianes, $dS = dy dz$, i on dz és igual a la longitud del costat que es troba sobre l'eix Z , $\int dz = h$. Els límits de la integració en y de l'eq. (3) corresponen a la posició del costat esquerre (límit inferior, y_i) i a la posició del costat dret (límit superior, y_e). Però la posició d'aquests costats no és fixa, ja que (segons la descripció del problema) depèn del temps en la forma que correspon a un moviment uniformement accelerat,

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (4)$$

(a) Per al càlcul del límit inferior, y_i , en funció del temps, tindrem en compte que: $y_0 = 0$, $v_0 = v$, $a = 0$, i aplicant-hi l'eq. (4), tenim

$$y_i = vt \quad (5)$$

Per al límit superior, y_e , tenim que: $y_0 = \ell$, $v_0 = v$, $a = 0$, i de l'eq. (4) obtenim

$$y_e = \ell + vt \quad (6)$$

Si substituïm aquests límits d'integració en l'eq. (3), obtindrem el flux del camp magnètic a través de la superfície delimitada per l'espira

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{E}} &= h \left(6y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{vt}^{\ell+vt} = h \left[6\ell + 6vt - \frac{(\ell + vt)^2}{2} - 6vt + \frac{(vt)^2}{2} \right] \\ &= h \left(6\ell - \frac{\ell^2}{2} - \ell vt \right)\end{aligned}\quad (7)$$

Una vegada coneixem la dependència del flux magnètic amb el temps, podem aplicar-hi l'eq. (1) i obtindrem la força electromotriu induïda, $V_{\mathcal{E}}$,

$$V_{\mathcal{E}} = - \frac{d\Phi_{\mathcal{E}}}{dt} = h\ell v = 0.2 \text{ V} \quad (8)$$

(b) El procediment en aquest cas és igual al de l'apartat (a), però els límits superior i inferior de la integral en y en l'eq. (3) variaran de forma diferent. Per a calcular el límit inferior, y_i , sabem que $y_0 = 0$, $v_0 = 0$, $a = 2 \text{ m/s}^2$, i, segons l'eq. (4), tindrem que

$$y_i = \frac{1}{2} a t^2 \quad (9)$$

²¹Al final del problema es discuteix l'elecció del signe de $d\vec{S}$.

Per al límit superior, y_s , tenim que $y_0 = \ell$, $v_0 = 0$, $a = 2 \text{ m/s}^2$, i, de nou per l'eq. (4),

$$y_s = \ell + \frac{1}{2}at^2 \quad (10)$$

En aquest cas, després de substituir les eqs. (9) i (10) en l'eq. (3), el flux del camp magnètic serà

$$\Phi_B = h \left(6y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{at^2/2}^{\ell+at^2/2} = h \left(6\ell - \frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell at^2}{2} \right) \quad (11)$$

i la força electromotriu induïda serà

$$V_E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = h\ell at = 0.2t \text{ V} \quad (12)$$

Noteu que en el cas (a) la força electromotriu induïda era constant amb el temps, eq. (8), mentre que ara depèn del temps, eq. (12).

(c) Càlcul del flux del camp magnètic Φ_B per al cas en què la velocitat de l'espira estiga dirigida al llarg de l'eix Z , $\mathbf{v} = (0, 0, v)$: No ha canviat res pel que fa al camp magnètic \mathbf{B} i a l'element diferencial de superfície $d\mathbf{S}$. Només hi ha hagut canvi en el moviment de l'espira, és a dir, en els límits superior i inferior de la integral en y que apareix en l'expressió (3). La coordenada inicial, y_i , del costat esquerre es manté constant durant el moviment, ja que aquest moviment és cap amunt (eix Z) i val $y_i = 0$. El mateix raonament val per a la coordenada del costat dret de l'espira, per tant, el límit superior de la integral que apareix en l'expressió (3) valdrà $y_s = \ell$. Si fem les substitucions corresponents en l'eq. (3), i després d'operar, el flux magnètic serà

$$\Phi_B = h \left(6\ell - \frac{\ell^2}{2} \right) = 0.59 \text{ Wb} \quad (13)$$

Com podem veure, el flux del camp magnètic Φ_B no depèn del temps en aquest cas i, per tant, la força electromotriu induïda és nul·la, $V_E = -d\Phi_B/dt = 0$. Això és cert, tant en el cas en què la velocitat siga constant com quan hi ha acceleració vertical, ja que en els dos casos les coordenades y de l'espira no canvien.

(d) Per a calcular el corrent I induït en l'espira utilitzarem la relació

$$V_E = IR \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V_E}{R} \quad (14)$$

on R és la resistència de l'espira i V_E és la força electromotriu induïda, i no hem considerat la força electromotriu que s'hi ha induït. En l'eq. (14) només hem inclòs la força electromotriu induïda i no hem considerat la força electromotriu que s'autoinduiria l'espira quan per aquesta circula un corrent variable amb el temps, perquè en l'enunciat del problema hem dit que el coeficient d'autoinducció de l'espira, L , és negligible.

En els diferents casos en què coneixem la força electromotriu $V_{\mathcal{E}}$, tindrem²²

$$(a) I_a = \frac{V_{\mathcal{E},a}}{R} = 0.1 \text{ A} \quad (18)$$

$$(b) I_b = \frac{V_{\mathcal{E},b}}{R} = 0.1t \text{ A} \quad (19)$$

$$(c) I_c = \frac{V_{\mathcal{E},c}}{R} = 0 \text{ A} \quad (20)$$

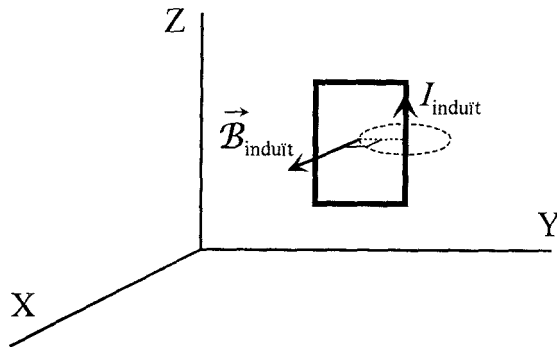


FIG. 1

Per a determinar el sentit del corrent induït en els casos (a) i (b) farem servir el raonament següent. Segons la llei de Lenz, la força electromotriu induïda s'oposa a la variació del flux del camp magnètic Φ_B i com que Φ_B disminueix en moure l'espira cap a la dreta, el camp magnètic induït $\mathcal{B}_{\text{induit}}$ —associat al corrent induït I , eq. (14)— ha d'augmentar en anar l'espira cap a la dreta (perquè el flux total degut als camps magnètics \mathcal{B} i $\mathcal{B}_{\text{induit}}$ no canvie). Això correspon a un corrent que circula per l'espira en sentit antihorari, tal com representa la fig. 1.

També podríem haver obtingut el sentit del corrent induït si tenim en compte que per haver elegit com a element de superfície $d\mathcal{S} = d\mathcal{S} \hat{i}$, això implica que hem triat un sentit de referència per a recórrer el perímetre de la superfície (és a dir, per a recórrer el

²²De fet, en incloure-hi la força electromotriu induïda, $-L dI/dt$, l'eq. (14) es convertiria en

$$V_{\mathcal{E}} - L \frac{dI}{dt} = IR \quad (15)$$

El nou terme afegit només tindria efecte en el cas (b), en què el corrent és funció del temps i l'equació diferencial en aquest cas seria

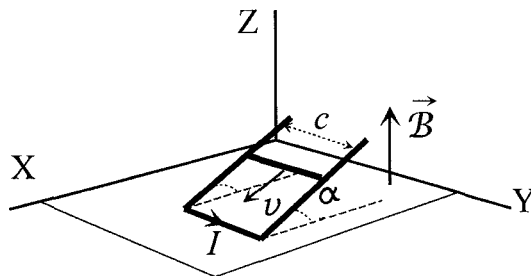
$$0.2t - L \frac{dI}{dt} = IR \quad (16)$$

la solució de la qual que satisfà la condició inicial $I(t=0) = 0$ s'escriu

$$I = \frac{0.2t}{R} - \frac{0.2L}{R^2} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (17)$$

circuit). Aquest sentit de referència s'obté amb la regla de la mà dreta quan fem coincidir el dit polze amb el sentit del vector superfície, i, en aquest cas, els altres dits assenyalen el sentit de referència per al corrent induït. En el nostre cas seria un sentit de referència antihorari. En aplicar-hi la llei de Faraday-Henry s'obtenen els resultats (18) i (19), per als casos (a) i (b), respectivament. Com que aquestes forces electromotrius tenen signe positiu, això significa que el corrent induït és en el mateix sentit que el que hem pres com a sentit de referència per a recórrer l'espira. Si el signe final de la força electromotriu fóra negatiu, això significaria que el corrent induït recorre l'espira en sentit contrari al que havíem proposat com a sentit de referència.

12.2 Una vareta conductora (massa $m = 20$ g, longitud $C = 50$ cm i resistència $R = 25 \Omega$) baixa relliscant per uns carrils conductors paral·lels, els quals formen un angle de 20° amb l'horitzontal. Els carrils estan units per la seua part inferior mitjançant un fil conductor, tal com indica la figura. En aquesta regió hi ha un camp magnètic uniforme, $\mathbf{B} = 5$ T, que és perpendicular al pla horitzontal sobre el qual recolzen els carrils. El moviment de la vareta sobre els carrils és, primerament, accelerat i es converteix, posteriorment, en uniforme. (a) Expliqueu raonadament per què el moviment de la vareta és tal com s'ha descrit. (b) Calculeu la velocitat de la vareta, la força electromotriu induïda en el seu extrem i el corrent que passa pel circuit durant l'interval de temps en què el moviment és uniforme. Supposeu que el circuit format per la vareta i els fils conductors té un coeficient d'autoinducció negligible.



$\mathbf{B} = 5$ T, $m = 20$ g = 0.02 kg, $C = 50$ cm = 0.5 m, $R = 25 \Omega$, $\alpha = 20^\circ$

(a) moviment de la vareta?

(b) quan la velocitat és constant: v, V_E, I ?

Farem la descripció del moviment de la vareta des del sistema de referència del pla horitzontal sobre el qual recolzen els carrils.

(a) Les forces que actuen sobre la vareta són: el seu pes, \mathbf{P} ; la força \mathbf{F} produïda pel camp magnètic \mathbf{B} sobre aquesta (considerada com una línia de corrent) i la força exercida entre corrents (més endavant veurem que és negligible davant les forces anteriors).

Inicialment no circula cap corrent pel circuit, ja que el camp magnètic \mathbf{B} és uniforme i això implica que el flux magnètic que travessa la superfície tancada per l'espira no varia amb el temps (ja que la superfície també es manté constant),

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \text{constant} \quad (1)$$

Segons la llei d'inducció de Faraday-Henry, no hi ha força electromotriu induïda (ni corrent induït) en l'espira. Per tant, inicialment l'única força que actua sobre la vareta conductora de longitud C és el seu pes.

La força produïda per un camp magnètic uniforme \mathbf{B} sobre un segment rectilini de corrent, ℓ , ve donada per $\mathbf{F} = I\ell \times \mathbf{B}$, i és nul·la inicialment, ja que la intensitat de corrent és zero, com hem dit abans. Com que el moviment de la vareta C transcorre al llarg d'un pla inclinat (l'angle del qual és α), el component de la força (pes) que actua a través del pla és $P \sin \alpha$ (fig. 1). Inicialment, el moviment de la vareta C serà uniformement accelerat, i l'acceleració al llarg del pla de caiguda val $a = g \sin \alpha$ i la força és

$$F = ma = mg \sin \alpha \quad (2)$$

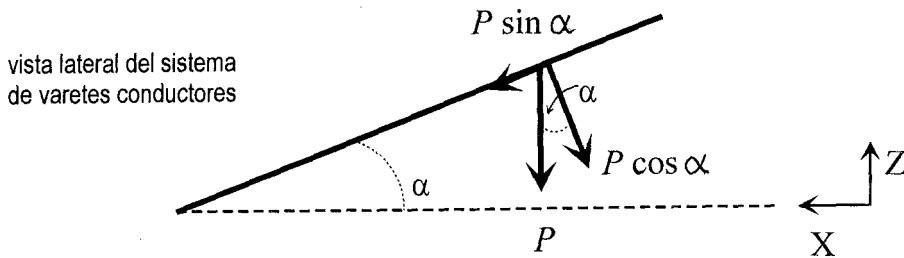


FIG. 1

En el moment en què comença a caure la vareta pels carrils conductors, la superfície tancada per l'espira canvia (es redueix) amb el temps, i per això el flux del camp magnètic que travessa aquesta superfície també canviarà amb el temps (recordeu que el camp magnètic \mathbf{B} és constant), cosa que donarà lloc a la inducció d'una força electromotriu, V_E . Segons la llei de Faraday-Henry, aquesta ve donada per

$$V_E = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (3)$$

Això vol dir que hi haurà un corrent induït I en l'espira.²³ En aparèixer aquest corrent

²³No tindrem en compte els efectes de l'autoinducció en el corrent induït perquè, com hem dit en l'enunciat, el coeficient d'autoinducció del circuit és molt petit.

començarà a actuar la força creada pel camp magnètic \mathcal{B} sobre les línies ℓ per les quals circula el corrent I ,

$$F = I\ell \times \mathcal{B} \quad (4)$$

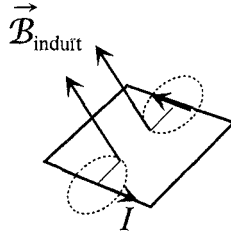


FIG. 2

El sentit del corrent induït ve determinat per la llei de Lenz. En baixar la vareta C , disminueix el flux del camp magnètic, ja que l'àrea envoltada per l'espira disminueix. Per tant, el corrent induït ha de ser tal que el camp magnètic que genera ($\mathcal{B}_{\text{induit}}$) s'opose a aquesta disminució del flux del camp magnètic. Aquesta situació correspon al sentit del corrent representat en la fig. 2. Segons hem dibuixat els eixos, el camp magnètic exterior serà $\mathcal{B} = \mathcal{B} \mathbf{k}$, i la línia de corrent corresponent a la vareta per $\ell = -C \mathbf{j}$ (fig. 3). Segons l'eq. (4), la força deguda al camp magnètic valdrà,

$$F = -ICB \mathbf{i} \quad (5)$$

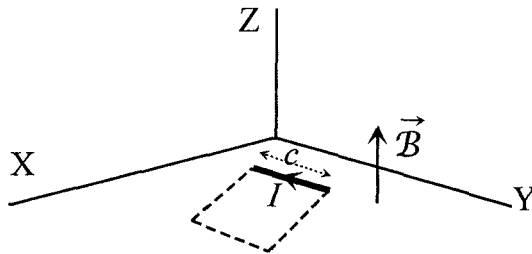


FIG. 3

La fig. 4 representa una vista lateral del sistema des de l'eix Y . I en la fig. 5 apareixen les forces que actuen sobre el pla de lliscament. Segons podem observar clarament en la fig. 5, al llarg del pla de caiguda apareix una força $ICB \cos \alpha$, oposada a la caiguda accelerada de la vareta C i, com a conseqüència, la vareta es frenarà.

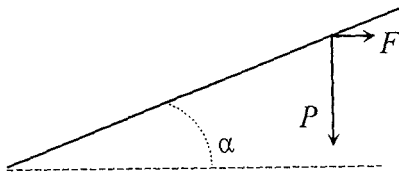


FIG. 4

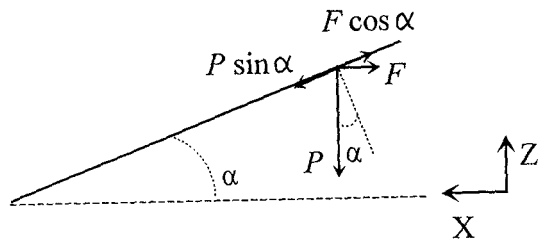


FIG. 5

El moviment que resulta verificarà la segona llei de Newton,

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (6)$$

Descriurem el moviment de la vareta C al llarg del pla de caiguda, així emprarem l'eq. (6) en forma escalar, $\sum F = ma$, on a és el component de l'acceleració al llarg d'aquest pla i la suma de forces que hi actuen són el component del pes més el component de la força magnètica projectats sobre el pla de lliscament. Per tant, el moviment que descriu la vareta ve donat per l'equació

$$mg \sin \alpha - ICB \cos \alpha = ma \quad (7)$$

En un principi, la vareta comença a lliscar a causa de el component del pes en la direcció del pla inclinat, eq. (2). Una vegada en moviment, el camp magnètic \mathbf{B} indueix un força electromotriu, i per tant, una intensitat de corrent en l'espina, això produeix una força magnètica sobre la vareta conductora, la qual cosa s'oposa al moviment accelerat inicial, eq. (7). El terme que s'oposa a la caiguda va augmentant amb la velocitat (ja que l'àrea envoltada per l'espina disminueix a mesura que augmenta la velocitat), fins que el terme de caiguda s'igualava al terme oposat a la caiguda. A partir d'ara el moviment de la vareta és uniforme.

(b) A continuació calculem el valor de la intensitat de corrent I . Per a fer això, ens basem en la llei d'inducció de Faraday-Henry, $V_E = -d\Phi_B/dt$, i en la llei d'Ohm, $V_E = IR$.²⁴

²⁴En la part esquerra de la llei d'Ohm només hem tingut en compte la força electromotriu induïda, V_E , i no hi hem afegit la diferència de potencial autoinduída per la variació de corrent en l'espina. Això està justificat perquè hem establert en l'enunciat que el coeficient d'autoinducció del circuit és molt petit.

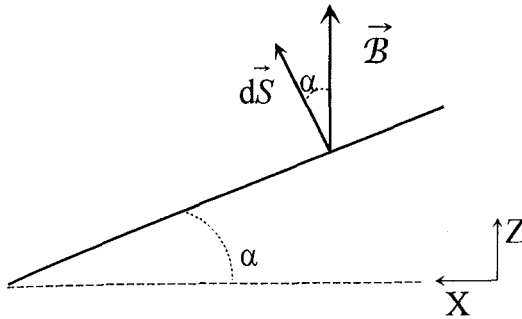


FIG. 6

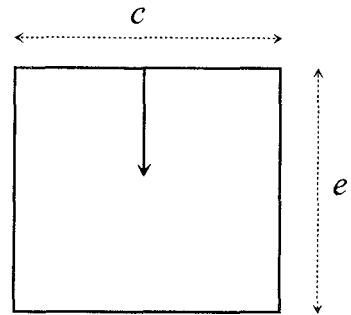


FIG. 7

Càlcul del flux del camp magnètic: $\Phi_B = \int_{\text{espira}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{espira}} B \cos \alpha \, dS$ segons la fig. 6. En aquest cas el camp magnètic B i el $\cos \alpha$ són constants, per tant, el flux del camp magnètic és $\Phi_B = B \cos \alpha \int dS = B \cos \alpha S$, i S és la superfície tancada per l'espina, la qual no és constant. Si expressem la superfície com $S = Ce$, on C és la longitud de la vareta i la longitud e és variable amb el temps (fig. 7), la força electromotriu induïda en l'espina serà

$$V_E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BCe \cos \alpha) = -BC \frac{de}{dt} \cos \alpha = -BCv \cos \alpha \quad (8)$$

hem considerat que $de/dt = v$ és la velocitat de caiguda de la vareta. A partir de la llei d'Ohm, i de l'expressió (8), obtenim el mòdul del corrent I ,

$$I = \frac{BCv \cos \alpha}{R} \quad (9)$$

que depèn de la velocitat v amb la qual es mou la vareta. Si substituïm aquest valor de la intensitat de corrent I en l'expressió (7), obtenim l'equació del moviment que descriu la vareta

$$mg \sin \alpha - (BC \cos \alpha)^2 \frac{v}{R} = ma \quad (10)$$

El moviment serà uniforme quan l'acceleració a siga nul·la; això ens permet calcular la velocitat uniforme de la vareta,

$$v = \frac{Rmg \sin \alpha}{(BC \cos \alpha)^2} = 0.30 \text{ m/s} \quad (11)$$

Si substituïm aquest valor uniforme de la velocitat v de la vareta en l'eq. (9), obtenim la intensitat de corrent I durant el moviment uniforme de la vareta

$$I = \frac{mg}{BC} \tan \alpha = 2.85 \cdot 10^{-2} \text{ A} \quad (12)$$

I si substituïm la velocitat v en l'eq. (8), obtenim la força electromotriu, que, en mòdul, val

$$V_{\mathcal{E}} = \frac{Rmg}{BC} \tan \alpha = 0.713 \text{ V} \quad (13)$$

Lògicament, aquest resultat coincideix amb el que s'obté a partir de la llei d'Ohm, $V_{\mathcal{E}} = IR$.

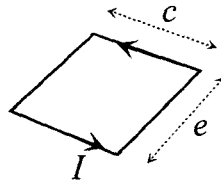


FIG. 8

En aquest problema no hem considerat la força exercida entre les dues línies de corrent, representades en la fig. 8. Seguidament demostrarem que aquesta suposició és raonable, ja que aquesta força, en mòdul, valdrà

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi e} C \quad (14)$$

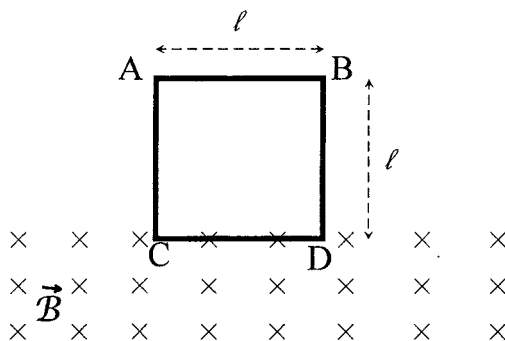
(on e és la separació entre les línies de corrent) i serà repulsiva, perquè les línies de corrent són antiparal·leles. Per a les dades del problema, tenim

$$F = \frac{1.3 \cdot 10^{-11}}{e} \text{ N} \quad (15)$$

on e seria expressat en metres. Si comparem aquest valor amb la força gravitatòria, la qual val $F = mg \sin \alpha = 6.70 \cdot 10^{-2} \text{ N}$ en la direcció que uneix les línies de corrent superior i inferior, apreciarem que la força exercida entre els corrents superior i inferior, eq. (15), és insignificant davant la resta de totes les forces del problema. Aquesta força només deixarà de ser insignificant, quan $e \rightarrow 0$, és a dir, quan la separació entre les línies de corrent siga molt menuda.

12.3 Un fil conductor, ABCD, constitueix una espira de forma quadrada, que està situada en un pla vertical de tal manera que el costat inferior, CD, es troba a la vora d'una regió on hi ha un camp magnètic uniforme, tal com representa la figura. La secció del fil conductor és $s = 1 \text{ mm}^2$, el costat de l'espira és $\ell = 2.5 \text{ cm}$ i el valor del camp magnètic és $B = 10^4 \text{ G}$; la densitat màssica i la resistivitat del fil són, respectivament, $\beta = 8.9 \text{ g/cm}^3$ i $\rho = 1.6 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ cm}$. Deixem caure l'espira, sense velocitat inicial,

de manera que la caiguda és una translació vertical. Si suposem que l'autoinducció és negligible, (a) calculeu l'equació del moviment, la velocitat de l'espira i la intensitat de corrent que la recorre, en funció del temps, fins a l'instant en què el costat AB penetra també en la regió on hi ha camp magnètic. (b) Quines característiques tindrà el moviment de l'espira quan estiga totalment immersa en la zona on hi ha el camp magnètic \vec{B} ?



$\ell = 2.5 \text{ cm} = 0.025 \text{ m}$, $s = 1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$, $B = 10^4 \text{ G} = 1 \text{ T}$
 $\beta = 8.9 \text{ g/cm}^3 = 8900 \text{ kg/m}^3$, $\rho = 1.6 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ cm} = 1.6 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$

- (a) abans que AB penetre en el camp \vec{B} : $\begin{cases} \text{equació del moviment?} \\ v(t)? \\ I(t)? \end{cases}$
 (b) característiques del moviment quan tota l'espira es troba dins de \vec{B} ?

(a) L'espira comença a caure pel seu propi pes. A mesura que va penetrant en el camp magnètic, va augmentant l'àrea de l'espira que és travessada per aquest camp magnètic \vec{B} . És a dir, a mesura que passa el temps va augmentant el valor del flux del camp magnètic, Φ_B . Per tant, hi haurà un corrent induït I , que, a partir de la llei d'Ohm

$$I = \frac{V}{R} \tag{1}$$

i de la llei de Faraday-Henry

$$V = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{2}$$

podem escriure com

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_B}{dt} \tag{3}$$

En les expressions anteriors R és la resistència de l'espira.²⁵

²⁵En la diferència de potencial no hem inclòs el terme degut a autoinducció, perquè l'hem considerada negligible, segons l'enunciat del problema.

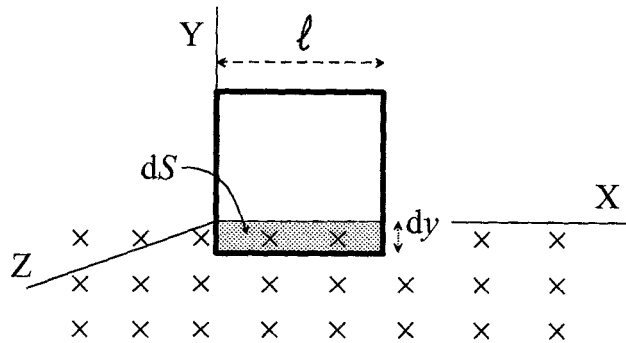


FIG. 1

El flux infinitesimal del camp magnètic, $d\Phi_B$, ve donat per (fig. 1)

$$d\Phi_B = \mathcal{B} dS = -\mathcal{B} dS = -\mathcal{B} \ell dy \quad (4)$$

Per a obtenir el resultat anterior hem tingut en compte que el camp magnètic \mathcal{B} és antiparal·lel a l'element diferencial de superfície dS , i que també podem escriure $dS = \ell dy$. Si substituïm l'eq. (4) en l'eq. (3), tindrem

$$I = \frac{1}{R} \mathcal{B} \ell \frac{dy}{dt} = -\frac{\mathcal{B} \ell}{R} v \quad (5)$$

on el mòdul de la velocitat val $v = dy/dt$, i com que aquesta és de caiguda, s'afegeix el signe menys en l'expressió anterior. Com veiem, la intensitat que circula per l'espira és una funció de la velocitat de caiguda (la qual calcularem més endavant).

Pel fet que hi ha un corrent I pel circuit, el camp magnètic hi produirà una força. Sobre els dos costats verticals de l'espira (AC i BD) actua la mateixa força magnètica, però de sentit contrari (ja que els corrents en ambdós costats són iguals però tenen sentits oposats). Per tant, si suposem que l'espira és indeformable, les forces magnètiques que actuen sobre els costats verticals no produeixen cap força magnètica neta. L'única força magnètica que hi actuarà serà sobre el costat CD de l'espira, immers en el camp magnètic \mathcal{B} , i, com que la direcció del corrent i del camp magnètic són perpendiculars, la força en mòdul val

$$F = I \ell \mathcal{B} \quad (6)$$

El sentit d'aquesta força serà a favor de la caiguda o contrari a la caiguda vertical, depenent del sentit del corrent I . Així, seguidament calcularem el sentit de la intensitat del corrent I .

El flux magnètic Φ_B que penetra en l'espira augmenta a mesura que aquesta entra en la regió on hi ha camp magnètic \mathcal{B} . La intensitat del corrent I induït produirà un camp magnètic induït \mathcal{B}_{ind} que s'oposarà a aquest augment del flux magnètic Φ_B (amb el camp magnètic \mathcal{B} dirigit cap a dins del paper), per tant, \mathcal{B}_{ind} ha d'eixir del paper dins

l'àrea de l'espira i, segons la regla de la mà dreta, el sentit de la intensitat de corrent que produeix això serà el que representa la fig. 2.

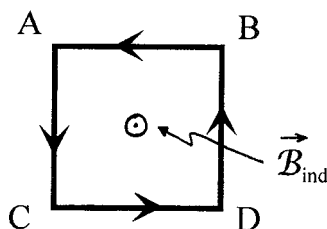


FIG. 2

La força magnètica sobre el costat CD de l'espina serà cap amunt, segons la relació $F = I\ell \times \mathcal{B}$, on cal recordar que \mathcal{B} és el camp magnètic aplicat, no l'induït. Així, doncs, les forces que actuen sobre l'espina són el pes, P (cap avall) i la força magnètica F sobre el costat CD (cap amunt). El pes és

$$P = mg = 4ls\beta g \quad (7)$$

on hem considerat que massa = volum · densitat. De la fig. 3 es desprèn que el volum de l'espina és $4ls$ (on s és la secció del fil que forma l'espina), i β n'és la densitat. Després de substituir el valor de I , eq. (5), dins l'eq. (6), la força magnètica és

$$F = \frac{\mathcal{B}^2 \ell^2}{R} v \quad (8)$$

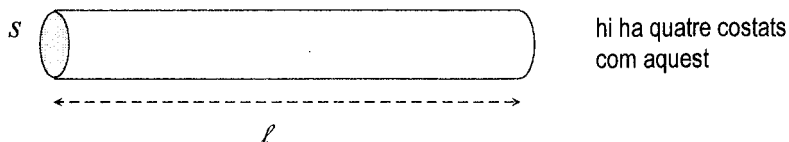


FIG. 3

La resultant de les forces verificarà la segona llei de Newton, $\sum F = ma$, escrita en forma escalar, perquè tot el moviment té lloc en una sola direcció. Si usem les expressions anteriors i que l'acceleració val $a = dv/dt$, escriurem

$$4\ell\beta g s - \frac{B^2 \ell^2}{R} v = 4\ell s \beta \frac{dv}{dt} \quad (9)$$

El signe menys entre les dues forces indica clarament que aquestes són de sentits oposats. L'equació diferencial que descriu la velocitat de l'espira és

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2}{16\rho\beta} v - g = 0 \quad (10)$$

on hem utilitzat la relació $R = \rho \cdot \text{longitud}/\text{secció}$; és a dir, $R = \rho 4\ell/s$, ja que la longitud total del fil d'aram és 4ℓ . En l'eq. (10) està continguda la descripció del moviment. Per a obtenir explícitament la velocitat v de l'espira en funció del temps, t , procedirem de la següent manera. Escriurem l'eq. (10) en la forma

$$\frac{-dv}{16\rho\beta g/B^2 - v} = -\frac{B^2}{16\rho\beta} dt \quad (11)$$

i integrarem els dos costats de la igualtat. Així obtenim

$$\ln\left(\frac{16\rho\beta g}{B^2} - v\right) = -\frac{B^2}{16\rho\beta} t + C \quad (12)$$

on C és la constant d'integració. Si utilitzem la relació que hi ha entre el logaritme neperià i l'exponencial, obtenim

$$\frac{16\rho\beta g}{B^2} - v = \exp\left(-\frac{B^2}{16\rho\beta} t + C\right) = A \exp\left(-\frac{B^2}{16\rho\beta} t\right) \quad (13)$$

amb $A = \exp(-C)$. Per tant,

$$v = \frac{16\rho\beta g}{B^2} + A \exp\left(-\frac{B^2}{16\rho\beta} t\right) \quad (14)$$

Si suposem que inicialment l'espira està en repòs, podem fer la substitució $t = 0$ i $v = 0$ en l'eq. (14) i així tindrem que la constant d'integració val $A = -16\rho\beta g/B^2$. Finalment, la solució per a la velocitat com a funció del temps, és

$$v(t) = \frac{16\rho\beta g}{B^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{B^2}{16\rho\beta} t\right)\right] = 2.23 \cdot 10^{-2} [1 - \exp(-439t)] \text{ m/s} \quad (15)$$

Si volem calcular la posició del costat CD de l'espira com a funció del temps, integrem l'expressió (15):

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} = v(t) &\Rightarrow y(t) = \int v(t) dt \Rightarrow \\ y(t) = \frac{16\rho\beta g}{B^2} t + \left(\frac{16\rho\beta g}{B^2}\right)^2 g \exp\left(-\frac{B^2}{16\rho\beta} t\right) + K &\quad (16) \end{aligned}$$

on ara K és una nova constant d'integració. Si assignem a la posició inicial el valor zero ($t = 0, y = 0$), després de substituir dins l'eq. (16), tindrem que

$$K = - \left(\frac{16\rho\beta}{\mathcal{B}^2} \right)^2 \cdot g \tag{17}$$

Segons les condicions inicials que hem pres, la posició del costat CD de l'espira en funció del temps és

$$y(t) = \frac{16\rho\beta g}{\mathcal{B}^2} \left\{ t - \frac{16\rho\beta}{\mathcal{B}^2} \left[1 - \exp \left(- \frac{\mathcal{B}^2}{16\rho\beta} t \right) \right] \right\}$$

$$= 2.23 \cdot 10^{-2} \{ t - 2.28 \cdot 10^{-3} [1 - \exp(-439t)] \} \text{ m} \tag{18}$$

El càlcul de la intensitat de corrent I en funció del temps és immediat a partir de les eqs. (5) i (15),

$$I = \frac{4\beta g s}{\mathcal{B}} \left[1 - \exp \left(- \frac{\mathcal{B}^2}{16\rho\beta} t \right) \right] = 0.35 [1 - \exp(-439t)] \text{ A} \tag{19}$$

(b) Quan tota l'espira penetra en el camp magnètic \mathcal{B} , el flux magnètic $\Phi_{\mathcal{B}}$ serà constant, ja que el camp magnètic \mathcal{B} és constant i la superfície de l'espira travessada per \mathcal{B} serà sempre la mateixa, una vegada estiga aquesta dins el camp magnètic \mathcal{B} . Això és, $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt = 0$, i no hi haurà força electromotriu induïda, és a dir, no hi ha corrent I induït. Segons l'eq. (6), no hi actuarà la força magnètica; l'única força que continua actuant-hi és la gravitatòria. En conseqüència, en entrar tota l'espira en el camp magnètic \mathcal{B} , el moviment serà uniformement accelerat (amb acceleració g) i amb velocitat inicial igual a la corresponent a la velocitat amb què arribà l'espira al final de la fase anterior.

En les figs. 4 apareixen les representacions gràfiques de $v(t)$, $y(t)$ i $I(t)$.

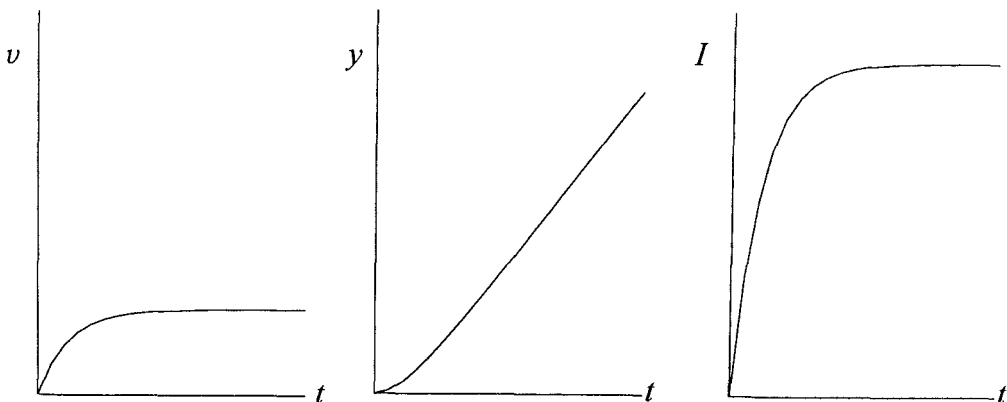
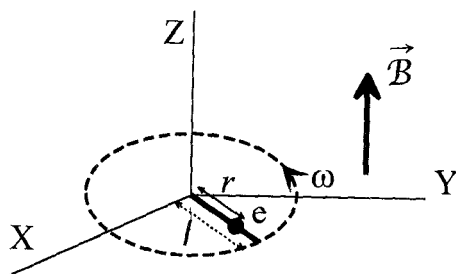


FIG. 4

12.4 Una vareta metàl·lica, de longitud ℓ , gira en un pla horitzontal amb velocitat angular constant ω al voltant d'un dels seus extrems, el qual es manté fix. La vareta es troba en una regió de l'espai en què hi ha un camp magnètic vertical \mathcal{B} . Calculeu: (a) la força magnètica sobre un electró situat a una distància r de l'extrem fix de la vareta; (b) el camp elèctric induït al llarg de la vareta, i (c) la diferència de potencial entre els extrems d'aquesta.



\mathcal{B} = camp magnètic, ℓ = longitud de la vareta,

ω = velocitat angular (= constant)

(a) \mathbf{F} sobre un electró a una distància r de l'extrem fix de la vareta?

(b) camp elèctric induït en la vareta, \mathcal{E} ?

(c) V entre els extrems de la vareta?

(a) La força que actua sobre una càrrega q en moviment, quan aquesta es troba en una regió on hi ha un camp magnètic \mathcal{B} , ve donada per

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathcal{B} \quad (1)$$

on \mathbf{v} és la velocitat de la càrrega. Segons el sistema de coordenades elegit en la figura de l'enunciat, el camp magnètic és $\mathcal{B} = \mathcal{B} \mathbf{k}$ i la velocitat de l'electró \mathbf{v} és un vector que es troba sempre en el pla XY i, per això, és perpendicular al camp magnètic \mathcal{B} . Per tant, el mòdul de la força magnètica s'escriurà

$$F = qv\mathcal{B} \sin 90^\circ = qv\mathcal{B} \quad (2)$$

on q és la càrrega de l'electró en valor absolut ($q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C). Si considerem que l'electró es troba a una distància r de l'eix de gir, la velocitat lineal d'aquest serà $v = r\omega$, i el mòdul de la força magnètica sobre l'electró valdrà

$$F = qr\omega\mathcal{B} \quad (3)$$

El sentit d'aquesta força el determinarem emprant la regla de la mà dreta per al producte vectorial representat en l'eq. (1). La velocitat \mathbf{v} de l'electró és sempre perpendicular al camp magnètic \mathcal{B} (vegeu la fig. 1), de forma que el seu producte vectorial està dirigit en la direcció radial allunyant-se del centre de gir; però com que la càrrega

de l'electró és negativa, $q = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C, l'eq. (1) dóna una força radial dirigida cap al centre de gir, segons mostra la fig. 1.

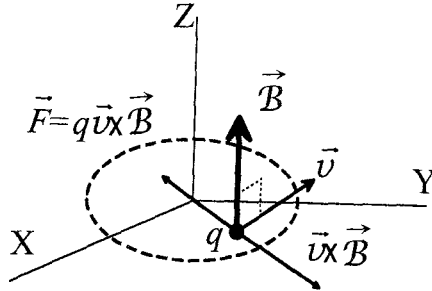


FIG. 1

(b) Si volem interpretar el moviment de la càrrega com si fóra degut a un camp elèctric que dóna lloc a una diferència de potencial (o força electromotriu) induïda, farem el següent raonament. A partir de la relació $F = q\mathcal{E}$ podem relacionar la força que experimenta la càrrega, eq. (3), amb el camp elèctric que induiria la diferència de potencial. Així, obtenim que el mòdul del camp elèctric induït en la vareta serà

$$\mathcal{E} = \frac{F}{q} = r\omega B \quad (4)$$

i la seua direcció és radial i dirigida allunyant-se del centre de gir de la vareta, perquè les càrregues negatives (com és el cas de l'electró) es mouen en sentit oposat al camp elèctric.

(c) El potencial elèctric V entre els extrems de la vareta està relacionat amb el camp elèctric, \mathcal{E} , per mitjà de la relació

$$\mathcal{E} = -\nabla V \quad (5)$$

Atesa la simetria del problema, treballarem en coordenades cilíndriques. Si escrivim l'eq. (5) per a l'única coordenada rellevant en aquest cas, que és la coordenada radial r , tenim

$$\mathcal{E} = -\frac{dV}{dr} \quad (6)$$

Noteu que hem usat derivades totals, en comptes de derivades parcials, perquè segons es desprén de l'eq. (4), només hi ha dependència amb la coordenada r .

De l'eq. (6) calcularíem el potencial tal com segueix

$$dV = -\mathcal{E} dr \quad \Rightarrow \quad \int dV = -\int \mathcal{E} dr \quad (7)$$

Per a obtenir la diferència de potencial entre els extrems de la vareta, $V(r = \ell) - V(r = 0) = V_\ell - V_0$, substituïm els límits corresponents en les integrals que apareixen en la relació (7),

$$\int_{V_0}^{V_\ell} dV = - \int_0^\ell \mathcal{E} dr \quad (8)$$

i si emprem l'expressió (4) per al camp elèctric,

$$V_\ell - V_0 = - \int_0^\ell r\omega\mathcal{B} dr = - \frac{\omega\mathcal{B}r^2}{2} \Big|_0^\ell \Rightarrow V_\ell - V_0 = - \frac{\omega\mathcal{B}\ell^2}{2} \quad (9)$$

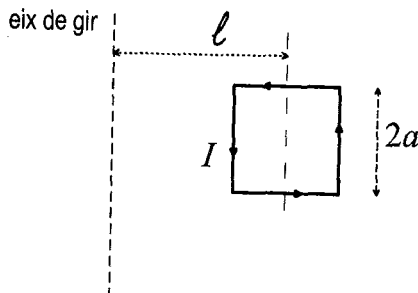
D'aquesta expressió concloem que el potencial és major en el centre de gir de la vareta que en l'extrem

$$V_\ell - V_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad V_\ell < V_0 \quad (10)$$

La força sobre els electrons estava dirigida cap al centre de gir (fig. 1). L'eq. (10) està d'acord amb aquell resultat perquè les càrregues positives es mouen en el sentit dels potencials decreixents i les càrregues negatives (com els electrons) en el sentit dels potencials creixents.

Aquest és un problema en què la inducció d'una diferència de potencial no s'ha degut a un flux magnètic variable amb el temps (lleï de Faraday-Henry), sinó que s'ha produït perquè un conductor es mou en una regió on hi ha camp magnètic i això provoca una força sobre els electrons del conductor.

12.5 Considerem la superfície tòrica engendrada per un quadrat, de costat $2a = 2$ cm, que gira al voltant d'un eix contingut en el seu pla i que és paral·lel a un dels seus costats. Sobre aquesta superfície es construeix una bobina enrotllant 600 espines distribuïdes regularment. La distància des de l'eix de gir fins al centre del quadrat és $\ell = 6$ cm i la intensitat que circula per cada espira és $I = 5$ A. Calculeu: (a) el flux total del camp magnètic a través de l'enrotllament d'espines; (b) el coeficient d'autoinducció de la bobina, i (c) el flux i l'autoinducció respectius quan el quocient a/ℓ és molt petit.



$2a = 2 \text{ cm} \Rightarrow a = 10^{-2} \text{ m}$, $N = 600$ espires, $I = 5 \text{ A}$, $\ell = 6 \text{ cm} = 0.06 \text{ m}$

(a) Φ_{total} ?

(b) L ?

(c) si a/ℓ és molt menut: Φ_{total} i L ?

La superfície tòrica engendrada pel gir del quadrat té la forma representada en la fig. 1.

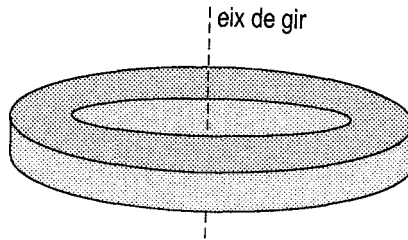


FIG. 1

(a) Per a calcular el flux del camp magnètic, Φ_B , a través de totes les espires que estan enrotllades, cal conèixer el camp magnètic en la regió interior de cada espira. Per a fer això utilitzarem la llei d'Ampère, la qual ens diu que la integral del camp magnètic al llarg d'una línia tancada és directament proporcional al corrent net que circula a través de la superfície delimitada per aquesta línia tancada,

$$\oint \mathbf{B} \, d\ell = \mu_0 I_{\text{net}} \tag{1}$$

la constant de proporcionalitat és la permeabilitat del medi on hi ha el camp magnètic, que en aquest cas és el buit,²⁶ i per això hem posat μ_0 en l'eq. (1).

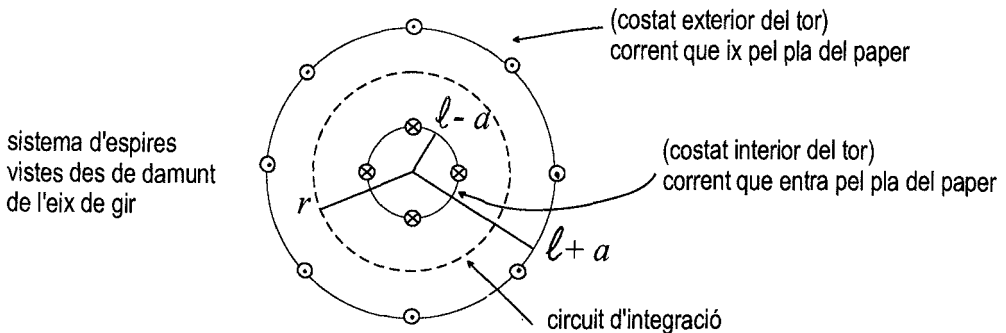


FIG. 2

²⁶Mentre no diguem el contrari, considerarem que tots els problemes transcorren en el buit.

Les operacions derivades d'aplicar aquesta llei es poden simplificar quan els sistemes que s'estudien presenten algun tipus de simetria, ja que en aquest cas es pot elegir el camí d'integració amb la mateixa simetria que la del problema.

En el problema que ens ocupa, ens interessa el valor del camp magnètic en els punts interiors a les espiras. Per tal d'aprofitar la simetria cilíndrica que presenta el tor d'espires, utilitzarem com a camí d'integració una circumferència de radi r centrada en l'eix de gir, de manera que $(\ell - a) \leq r \leq (\ell + a)$, tal com representa la fig. 2.

Segons la llei de Biot i Savart, el camp magnètic \mathbf{B} creat per cada espira en el seu interior serà normal al pla d'aquesta (fig. 3). En conseqüència, el camp magnètic en la zona interior del tor serà tangent a la circumferència de radi r . Això implica que \mathbf{B} i $d\mathbf{l}$ són paral·lels al llarg de tot el camí d'integració, i podem escriure

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint B d\mathbf{l} = B \oint d\mathbf{l} = 2\pi r B \quad (2)$$

Després del segon signe igual hem emprat el fet que el mòdul del camp magnètic val el mateix al llarg de tot el camí d'integració, ja que per simetria B només depèn de r i no pot tenir valors diferents quan la distància a què es troba de l'eix de simetria no varia. La integral $\oint d\mathbf{l}$ de l'element de línia al llarg de la circumferència de radi r que correspon al camí d'integració val $2\pi r$, és a dir, el perímetre d'aquesta.

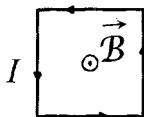


FIG. 3

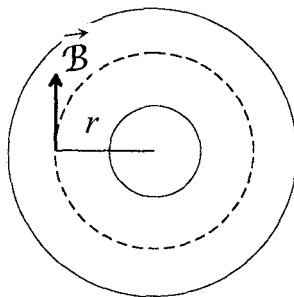


FIG. 4

La intensitat de corrent net que travessa la superfície delimitada pel circuit d'integració que estem considerant per a aplicar-hi la llei d'Àmpère, eq. (1), val

$$I_{\text{net}} = NI \quad (3)$$

ja que són N els costats de cada espira que es troben en la part interior del tor (fig. 2) i cadascun d'aquests porta un corrent I .

De les eqs. (1)-(3) obtenim que el mòdul del camp magnètic en un punt qualsevol de l'interior del tor, creat per tot el corrent, val

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r} \quad (4)$$

i el seu sentit és determinat pel sentit dels corrents en les espiras i per la regla de la mà dreta (fig. 4). Com podem apreciar per l'eq. (4), el camp magnètic no és uniforme, sinó que depèn de la distància r a l'eix de gir.

Ara que ja coneixem el camp magnètic \mathcal{B} , estem en condicions de calcular-ne el flux a través d'una espira,

$$\Phi = \int \mathcal{B} dS \tag{5}$$

Com hem vist abans, el camp \mathcal{B} és normal en la superfície delimitada per aquesta i això vol dir que és paral·lel al vector que representa la superfície; és a dir, $\mathcal{B} \parallel dS$. Per això, el flux a través d'una espira, eq. (5), es pot escriure

$$\Phi = \int \mathcal{B} dS \tag{6}$$

i com que, segons l'eq. (4), \mathcal{B} només depèn de la distància radial, podem escriure dS en la forma $dS = 2a dr$, segons il·lustra la fig. 5. Per tant,

$$\Phi = \int_{\ell-a}^{\ell+a} \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} 2a dr = \frac{\mu_0 I N a}{\pi} \int_{\ell-a}^{\ell+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I N a}{\pi} \ln \left(\frac{\ell+a}{\ell-a} \right) \tag{7}$$

El flux, a través de tota la bobina, del camp magnètic \mathcal{B} creat per les N espires serà la suma del flux a través de cadascuna de les N espires

$$\Phi_{\text{total}} = N\Phi = \frac{\mu_0 I N^2 a}{\pi} \ln \left(\frac{\ell+a}{\ell-a} \right) = 2.42 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} \tag{8}$$

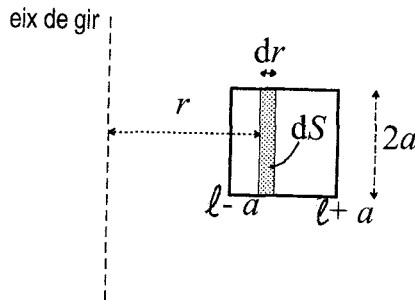


FIG. 5

(b) El coeficient d'autoinducció, L , està relacionat amb el flux del camp magnètic creat pel mateix corrent que circula per la bobina,

$$L = \frac{\Phi_{\text{total}}}{I} = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln \left(\frac{\ell+a}{\ell-a} \right) = 4.84 \cdot 10^{-4} \text{ H} \tag{9}$$

on hem fet ús de l'expressió (8). Aquest valor de L és una característica del circuit.

(c) En el cas en què a/ℓ és molt menut, podem intentar desenvolupar les expressions (8) i (9) en sèries de potències de a/ℓ . Quan $(a/\ell) \rightarrow 0$ el desenvolupament de $\ln[(\ell+a)/(\ell-a)]$ és

$$\ln\left(\frac{\ell+a}{\ell-a}\right) = \ln\left(\frac{1+a/\ell}{1-a/\ell}\right) \approx \frac{2a}{\ell} + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{\ell}\right)^3 + \dots \quad (10)$$

on hem usat que, quan $x^2 < 1$,

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (11)$$

$$\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \quad (12)$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \approx 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \dots\right) \quad (13)$$

Si en l'eq. (10) ens quedem fins a primer ordre en a/ℓ , ja que per ser a/ℓ molt menut podem negligir els termes d'ordre superior, en substituir dins les eqs. (8) i (9), obtenim

$$\Phi_{\text{tot}} \approx \frac{2\mu_0 N^2 I a^2}{\pi \ell} = 2.40 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} \quad (14)$$

$$L \approx \frac{2\mu_0 N^2 a^2}{\pi \ell} = 4.80 \cdot 10^{-4} \text{ H} \quad (15)$$

Com podem apreciar, aquests resultats són molt similars als que hem obtingut quan hem usat les fórmules exactes, eqs. (8) i (9). Això era de preveure, perquè $a/\ell = 0.17$ és un valor relativament menut, que justifica l'aproximació feta en aquest darrer apartat.

Aquesta quasicoincidència de resultats numèrics, eqs. (8) i (14), i eqs. (9) i (15), serveix com a comprovació, ja que, tant pel mètode exacte com pel mètode aproximat (quan aquest és possible), hem arribat pràcticament al mateix resultat.

12.6 Una línia de corrent està formada per dos fils conductors cilíndrics molt llargs (els quals suposarem que són infinits) i paral·lels, per cadascú dels quals circula un corrent I , en sentits oposats. Calculeu el coeficient d'autoinducció per unitat de longitud d'aquesta línia. El radi de cada fil és a i la separació que hi ha entre els centres d'ambdós és ℓ . Supposeu que $a \ll \ell$ i, per tant, es pot negligir el flux a través dels fils conductors.

$a =$ radi, $\ell =$ separació dels fils conductors, $a \ll \ell$, $I =$ constant

$\mathcal{L} = L/(\text{unitat de longitud})?$

Per a conèixer el coeficient d'autoinducció, L , hem de calcular el camp magnètic \mathbf{B} creat pels corrents, i després el flux del camp magnètic Φ_B a través de la superfície que hi ha entre els dos fils conductors, ja que el coeficient d'autoinducció està definit com

$$L = \frac{\Phi_B}{I} \quad (1)$$

on Φ_B és el flux del camp magnètic creat pel corrent I .

El mòdul del camp magnètic generat a una distància radial r del fil conductor que transporta un corrent I ve donat per l'expressió següent

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2)$$

i la seua direcció és tangent en cada punt a una circumferència centrada en la línia del corrent, amb el sentit determinat per la regla de la mà dreta.

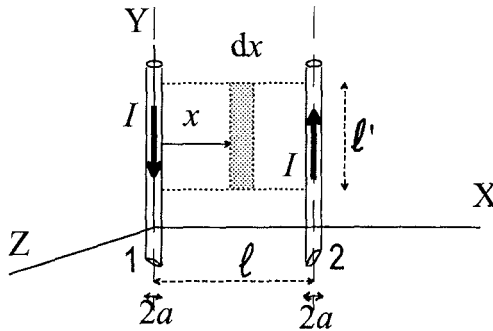


FIG. 1

Per tant, el camp magnètic \mathcal{B}_1 creat pel corrent de l'esquerra de la fig. 1, a una distància x de l'eix Y , el qual coincideix amb la disposició del primer corrent, serà

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \mathbf{k} \quad (3)$$

El camp magnètic \mathcal{B}_2 creat en el punt anterior pel corrent de la dreta de la fig. 1 ve donat per

$$\mathcal{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(\ell - x)} \mathbf{k} \quad (4)$$

Notem que els sentits dels camps magnètics \mathcal{B}_1 i \mathcal{B}_2 són correctes, tal com explicarem a continuació. Per al cas en què $x < 0$, el camp magnètic \mathcal{B}_1 en un punt de l'eix X val

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \mathbf{k} = \frac{-\mu_0 I}{2\pi |x|} \mathbf{k} \quad (5)$$

i per a $x > 0$ tenim

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \mathbf{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi |x|} \mathbf{k} \quad (6)$$

Anàlogament, per al camp magnètic \mathcal{B}_2 tindrem que, quan $x < \ell$,

$$\mathcal{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(\ell - x)} \mathbf{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi |\ell - x|} \mathbf{k} \quad (7)$$

i quan $x > \ell$,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(\ell - x)} \mathbf{k} = \frac{-\mu_0 I}{2\pi|\ell - x|} \mathbf{k} \quad (8)$$

Totes aquestes situacions apareixen representades en les figs. 2.

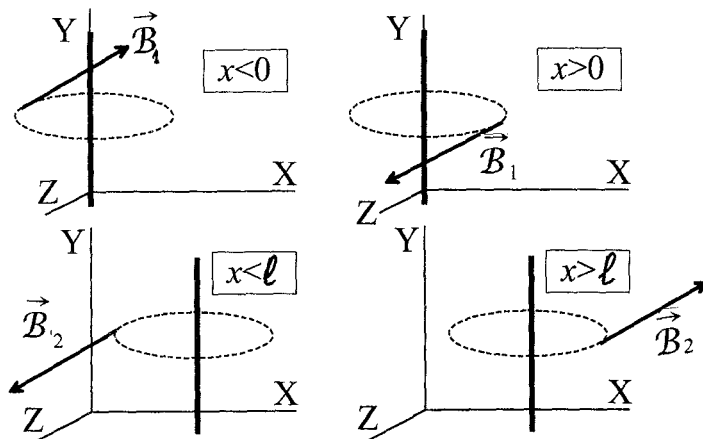


FIG. 2

El camp magnètic total en un punt x qualsevol valdrà

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\ell - x} \right) \mathbf{k} \quad (9)$$

El flux Φ_B del camp magnètic a través d'una superfície de costat vertical ℓ' , compresa entre els dos fils conductors (fig. 1), serà

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int B \, dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ell' \int dx \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\ell - x} \right) \quad (10)$$

ja que el camp magnètic \mathbf{B} és paral·lel a la superfície $d\mathbf{S}$. Hem utilitzat l'expressió (9) per al camp magnètic i que l'element diferencial de superfície és $dS = \ell' dx$, segons es veu en la fig. 3.

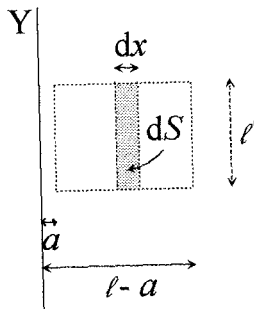


FIG. 3

Els límits d'integració de l'eq. (10) seran la coordenada x del costat que hi ha sobre el conductor esquerre, $x = a$, i la coordenada x del costat que hi ha sobre el conductor dret, $x = \ell - a$. Per tant, tindrem que el flux Φ_B del camp magnètic serà

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \frac{\mu_0 I \ell'}{2\pi} \int_a^{\ell-a} dx \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\ell-x} \right) = \frac{\mu_0 I \ell'}{2\pi} \ln \left(\frac{x}{\ell-x} \right) \Big|_a^{\ell-a} \\ &= \frac{\mu_0 I \ell'}{2\pi} \ln \left(\frac{\ell-a}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Segons l'eq. (1), el coeficient d'autoinducció L serà

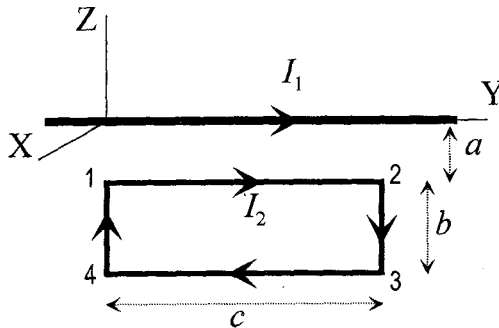
$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 \ell'}{\pi} \ln \left(\frac{\ell-a}{a} \right) \quad (12)$$

i per a calcular l'autoinducció per unitat de longitud, \mathcal{L} , hem de dividir el valor de l'autoinducció L , que hem obtingut prèviament, pel valor ℓ' (longitud del fil conductor que hem utilitzat en el càlcul). Així, doncs, l'autoinducció per unitat de longitud serà

$$\mathcal{L} = \frac{L}{\ell'} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{\ell-a}{a} \right) \quad (13)$$

Observeu que en els càlculs d'aquest problema no utilitzem el flux magnètic a través dels fils conductors. La superfície utilitzada per a calcular el flux Φ_B del camp magnètic exclou els punts interiors als fils conductors. Això ha sigut possible perquè la regió que exclouem en el càlcul de Φ_B té una grandària horitzontal que val $4a$ (els dos diàmetres dels fils conductors), i la seua contribució seria negligible davant la contribució a Φ_B deguda a la regió entre els fils, la grandària horitzontal de la qual és ℓ , i sabem, per l'enunciat del problema, que $a \ll \ell$.

12.7 Tenim un cable llarg que transporta un corrent $I_1 = 30$ A i una espira rectangular de dimensions $b = 8$ cm i $c = 30$ cm, situada a 1 cm del cable, tal com representa la figura. Si l'espira es mou amb velocitat uniforme $v = 10$ m/s després de partir de la posició inicial representada en la figura i s'allunya del corrent I_1 , calculeu la força electromotriu induïda al cap d'1 s, en el cas que per l'espira no circule inicialment cap corrent ($I_2 = 0$).



$I_1 = 30 \text{ A}$, $a = 0.01 \text{ m}$, $b = 0.08 \text{ m}$, $c = 0.3 \text{ m}$
 si $I_2 = 0 \text{ A}$ i $v = -10 \text{ m/s}$ \mathbf{k} : $V_E(t = 1 \text{ s})$?

Quan no hi ha cap corrent inicial sobre el circuit, la força electromotriu induïda V_E que hi apareix ve donada per la llei de Faraday-Henry:

$$V_E = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1)$$

on Φ_B és el flux del camp magnètic. Per a calcular Φ_B hem de saber que el camp magnètic \mathbf{B} creat pel corrent I_1 en un punt de l'interior de l'espira, que es troba a una distància z del cable, val

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi z} (-\mathbf{i}) \quad (2)$$

Càlcul del flux Φ_B del camp magnètic: La definició del flux del camp magnètic \mathbf{B} a través de la superfície delimitada per l'espira és

$$\Phi_B = \int_{\text{superfície}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3)$$

En la regió de l'espai on es troba l'espira, el camp magnètic està orientat cap a les z negatives. El vector $d\mathbf{S}$ serà normal en la superfície de l'espira, però el sentit que tinga podrà ser entrant cap al paper o eixint-ne. L'elecció d'aquest sentit la fem proposant un sentit per al corrent induït en l'espira. Si amb els dits de la mà dreta indiquem el sentit d'aquest corrent, el dit polze d'aquesta mà assenyalarà el sentit positiu del vector superfície. D'entrada proposarem un corrent induït en sentit horari (fig. 1). Segons acabem de comentar, el diferencial de superfície corresponent serà

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{i} \quad (4)$$

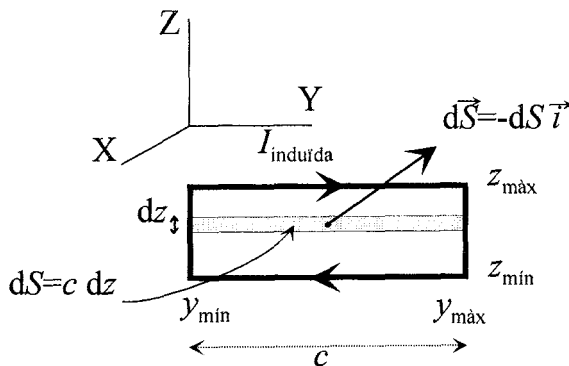


FIG. 1

Si amb aquesta proposta del sentit del corrent induït, quan calculem la força electromotriu ens apareix un signe negatiu, això voldria dir que el sentit del corrent induït és el contrari del que hem proposat. Si la força electromotriu resultara ser positiva, això implicaria que el sentit proposat per al corrent induït ha sigut el correcte.

L'element de superfície val, en forma escalar,

$$dS = c dz \quad (5)$$

tal com mostra la fig. 1. Hem utilitzat aquesta expressió per a l'element de superfície dS perquè el camp magnètic \mathbf{B} en l'eq. (3) només varia segons l'eix Z . A partir de les eqs. (2), (3), (4) i (5) tenim que el flux del camp magnètic val

$$\Phi_B = -\frac{\mu_0 I_1 c}{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{dz}{z} = \frac{\mu_0 I_1 c}{2\pi} \ln \left(\frac{z_{\min}}{z_{\max}} \right) \quad (6)$$

on z_{\min} i z_{\max} representen, respectivament, el mínim i el màxim valor que pren la coordenada z que apareix en la integració.

Com que l'espira té ara un moviment uniforme amb velocitat v cap avall, podrem obtenir les coordenades z_{\min} i z_{\max} en funció del temps a partir de l'expressió

$$z = z_0 - vt \quad (7)$$

que ens dona la coordenada z a partir de la coordenada inicial, z_0 , i del mòdul de la velocitat v (el signe menys que la precedeix ja ens indica que està dirigida cap a les Z negatives). Les coordenades inicials dels valors mínim i màxim de z són, respectivament, $z_{0,\min} = -(a+b)$ i $z_{0,\max} = -a$, per tant els valors que hem d'usar en l'eq. (6) són:

$$z_{\min} = -(a+b) - vt \quad (8)$$

$$z_{\max} = -a - vt \quad (9)$$

Després de substituir aquests valors, obtenim

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I_1 c}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b+vt}{a+vt} \right) \quad (10)$$

Una vegada coneixem el flux del camp magnètic en funció del temps, és immediat conèixer la força electromotriu induïda, ja que en aplicar-hi l'eq. (1) obtenim

$$V_E = \frac{-\mu_0 I_1 c}{2\pi} v \left(\frac{1}{a+b+vt} - \frac{1}{a+vt} \right) \quad (11)$$

Quan ha transcorregut un temps d'un segon des que es va iniciar el moviment de l'espira, la força electromotriu val

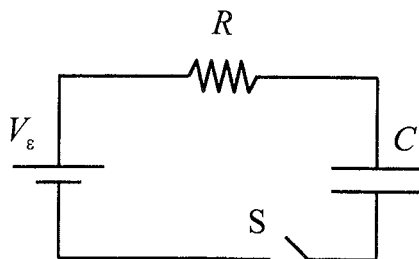
$$V_E(t = 1s) = 1.43 \cdot 10^{-8} \text{ V} \quad (12)$$

Com podem apreciar, $V_E > 0$, la qual cosa vol dir que era correcta la proposta inicial per al sentit del corrent induït. També podem comprovar que aquest corrent induït està d'acord amb la llei de Lenz, ja que el camp magnètic que donaria lloc estaria dirigit, en la regió dins l'espira, cap a l'interior del paper, i això vol dir que s'oposa a la disminució del flux magnètic que està tenint lloc quan l'espira baixa, ja que en allunyar-se del corrent I_1 es desplaça cap a regions on el camp magnètic disminueix.

13

**Circuits elèctrics.
Corrent continu**

13.1 Connectem una bateria, de força electromotriu V_E i resistència interna insignificant, en sèrie amb una resistència R i un condensador descarregat, de capacitat C , tal com apareix indicat en la figura. Demostreu que, després de tancar l'interruptor S , (a) el corrent, en funció del temps, és $I = (V_E/R) \exp(-t/RC)$, i (b) la càrrega en el condensador, en funció del temps, és $q = V_EC[1 - \exp(-t/RC)]$. Representeu q i I en funció del temps.



(a) $I(t)$?

(b) $q(t)$?

En tancar l'interruptor tenim un circuit format per una resistència i un condensador associats en sèrie, connectats a una bateria. La força electromotriu de la bateria, V_E , s'encarregarà de mantenir la diferència de potencial entre els extrems del sistema. Com que la resistència i el condensador estan disposats en sèrie, la diferència de potencial de tot el sistema serà la suma de les diferències de potencial corresponents a cada element del circuit, V_{Resist} i $V_{Condens}$,

$$V_E = V_{Resist} + V_{Condens} \quad (1)$$

Com $V_{Condens} = q/C$ i, segons la llei d'Ohm, $V_{Resist} = IR$, tindrem

$$V_E = IR + \frac{q}{C} \quad (2)$$

on I és el corrent instantani que circula pel circuit i és igual a la variació de càrrega per unitat de temps, $I = dq/dt$. Ara podem derivar l'eq.(2) respecte del temps, o considerar aquesta equació com una equació diferencial per a la càrrega en funció del temps, $q = q(t)$.

(a) Si seguim el primer camí (és a dir, derivar l'eq. (2) respecte del temps), obtindrem:

$$0 = R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} \quad (3)$$

on hem fet $dV_E/dt = 0$ perquè V_E és constant (aplicat per la bateria exteriorment al circuit). No hem derivat R ni C respecte del temps, perquè la resistència i la capacitat són característiques dels elements resistiu i capacitiu, respectivament, que formen el circuit i no varien amb el temps. També hem usat que $dq/dt = I$. Així, l'eq. (3) apareix escrita com una equació diferencial per a la intensitat de corrent I . Reescrivim l'eq. (3) en la forma

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dI}{I} = -\int \frac{dt}{RC} \quad (4)$$

i, després d'integrar-la, ens queda com

$$\ln I = -\frac{t}{RC} + K \quad (5)$$

on K és una constant d'integració. Podem reescriure l'eq. (5) com

$$I = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (6)$$

on A és una constant, $A = e^K$. Per a determinar la constant A hem de notar que la càrrega total Q acumulada en el condensador en estat estacionari ha de ser

$$Q = V_{\mathcal{E}}C \quad (7)$$

ja que la diferència de potencial entre els borns de la bateria ha de coincidir amb la diferència de potencial entre les armadures (eq. (2) amb $I = 0$ i $q = Q$ quan $t \rightarrow \infty$).

La càrrega Q acumulada en el condensador és deguda a la circulació de corrent des de l'instant $t = 0$ fins a $t = \infty$, per això

$$Q = \int_0^{\infty} I dt = \int_0^{\infty} A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) dt = ARC \quad (8)$$

De les eqs. (7) i (8) obtenim que $A = V_{\mathcal{E}}/R$. Aleshores, quan substituïm A en l'eq. (6), la intensitat de corrent en funció del temps serà

$$I(t) = \frac{V_{\mathcal{E}}}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (9)$$

tal com calia demostrar.

(b) Per a determinar la càrrega en funció del temps, $q(t)$, fem la integració del corrent, eq. (9), respecte del temps

$$q(t) = \int_0^t I(t') dt' = V_{\mathcal{E}}C \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right] \quad (10)$$

i, de nou, obtenim el resultat que demanava l'enunciat.

Seguidament farem de nou aquest problema, però ara seguirem el segon procediment que hem indicat al principi. És a dir, considerarem l'eq. (2) com una equació diferencial per a la càrrega en funció del temps. Si tenim en compte que $I = dq/dt$, l'eq. (2) es converteix en una equació diferencial per a la càrrega

$$V_{\mathcal{E}} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad (11)$$

Per a obtenir $q(t)$ a partir d'aquesta equació diferencial, la reescriurem en la forma

$$\frac{dq}{(V_{\mathcal{E}} - q/C)} = \frac{dt}{R} \quad (12)$$

Ara integrem l'eq. (12) i obtenim

$$-C \ln \left(V_{\varepsilon} - \frac{q}{C} \right) = \frac{t}{R} + K \quad (13)$$

on K és una constant d'integració. L'eq. (13) pot reescriure's com

$$V_{\varepsilon} - \frac{q}{C} = A \exp \left(-\frac{t}{RC} \right) \quad (14)$$

El valor de la constant $A = e^K$ el calcularem a partir del comportament conegut de la càrrega en l'instant inicial ($q = 0$ quan $t = 0$), la qual cosa dóna

$$A = V_{\varepsilon} \quad (15)$$

Fent ús de les eqs. (14) i (15), la dependència de la càrrega del condensador en funció del temps s'escriu

$$q(t) = V_{\varepsilon} C \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{RC} \right) \right] \quad (16)$$

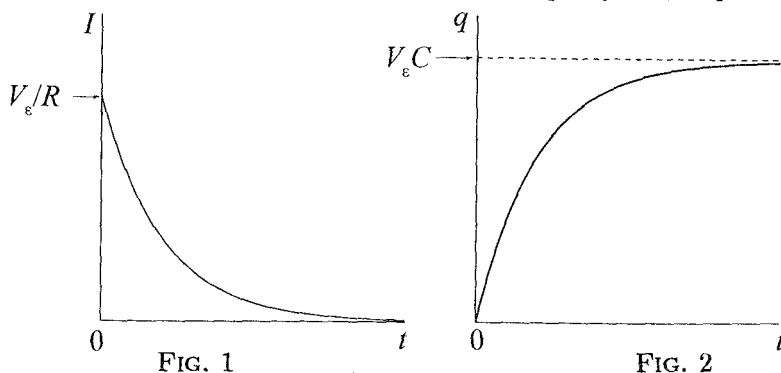
Aquesta expressió coincideix amb l'eq. (10), tal com volíem comprovar.

Una vegada coneixem com varia amb el temps la càrrega del condensador, podrem calcular el corrent en funció del temps a partir de la relació $I = dq/dt$ i de l'eq. (16). Això dóna

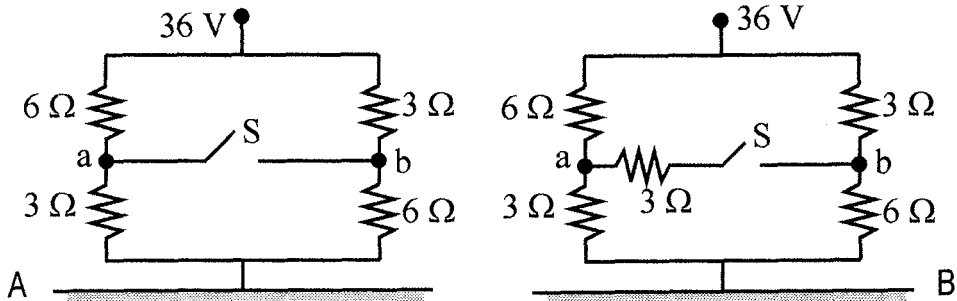
$$I(t) = \frac{Q}{RC} \exp \left(-\frac{t}{RC} \right) \quad (17)$$

que de nou coincideix amb el resultat obtingut pel primer mètode de càlcul, eq. (9), fent tan sols el canvi $Q = V_{\varepsilon} C$.

Hem obtingut els mateixos resultats usant dos procediments diferents, la qual cosa serveix per a comprovar que els resultats són correctes. En les figs. 1 i 2 podem apreciar les representacions gràfiques de la intensitat de corrent i de la càrrega, respectivament, en funció del temps. Podem observar que la intensitat decreix gradualment fins que s'anul·la quan $t \rightarrow \infty$, i que la càrrega del condensador creix des de zero, quan es connecta el circuit, fins a arribar al valor estacionari $q = Q = V_{\varepsilon} C$ quan $t \rightarrow \infty$.



13.2 En el circuit de la figura A (a) quina és la diferència de potencial V_{ab} quan l'interruptor S està obert? i (b) quin és el corrent que travessa l'interruptor quan aquest es tanca? En el circuit de la figura B, (c) quina és la diferència de potencial V_{ab} quan l'interruptor S està obert? i (d) ¿quin és el corrent que travessa l'interruptor S quan aquest és tancat? Quina és la resistència equivalent de cada circuit: (e) quan S és obert, i (f) quan S és tancat?



circuit A: $\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ interruptor obert: } V_{ab}? \\ (b) \text{ } I \text{ a través de l'interruptor tancat?} \end{array} \right.$

circuit B: $\left\{ \begin{array}{l} (c) \text{ interruptor obert: } V_{ab}? \\ (d) \text{ } I \text{ a través de l'interruptor tancat?} \end{array} \right.$

resistència equivalent per a cada circuit amb: $\left\{ \begin{array}{l} (e) \text{ l'interruptor obert?} \\ (f) \text{ l'interruptor tancat?} \end{array} \right.$

(a) La diferència de potencial entre els punts a i b del circuit A serà

$$V_{ab} = V_b - V_a \quad (1)$$

on V_a és el potencial respecte a terra en el punt a i V_b és el potencial respecte a terra en el punt b del circuit.

Tot seguit, calcularem els potencials V_a i V_b . El potencial en el punt a (b) és igual a la diferència de potencial respecte a terra, 36 V, menys la caiguda de potencial a través de la resistència esquerra de 6 Ω (resistència dreta de 3 Ω).

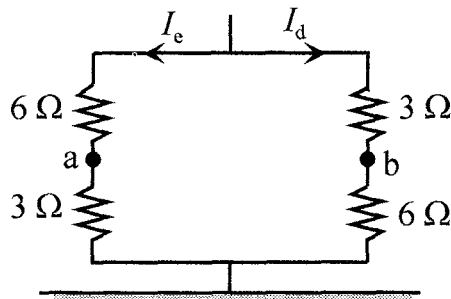


FIG. 1

Segons la fig. 1, I_e és el corrent que circula per tota la branca esquerra i I_d és el corrent que circula per tota la branca dreta. Per a cada branca del circuit es verificarà la llei d'Ohm

$$V = I_e R_e \quad V = I_d R_d \quad (2)$$

on $V = 36 \text{ V}$, $R_e = 9 \Omega$, $R_d = 9 \Omega$, ja que les resistències de cada branca estan en sèrie i, per tant, se sumen.

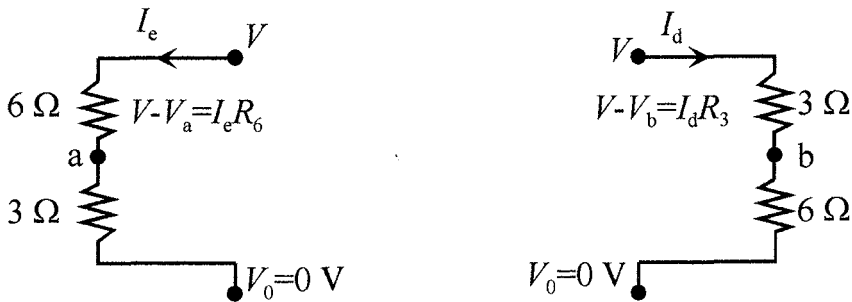


FIG. 2

Les intensitats de corrent per cada branca del circuit, que obtenim quan substituïm aquests valors en les eqs. (2), són $I_e = 4 \text{ A}$ i $I_d = 4 \text{ A}$. També coneixem (fig. 2) que

$$\left. \begin{array}{l} V_a = V - I_e R_6 = 36 - 4 \cdot 6 = 12 \text{ V} \\ V_b = V - I_d R_3 = 36 - 4 \cdot 3 = 24 \text{ V} \end{array} \right\} \Rightarrow V_{ab} = V_b - V_a = 12 \text{ V} \quad (3)$$

En les expressions anteriors, el subíndex que acompanya la resistència indica el valor d'aquesta expressat en ohms. També hem usat que $V - V_0 = 36 \text{ V}$, i com que $V_0 = 0 \text{ V}$, teníem que $V = 36 \text{ V}$.

(b) Per a calcular la intensitat de corrent que circula entre els punts a i b del circuit A quan l'interruptor és tancat, hi aplicarem les lleis de Kirchhoff, que diuen que per als nusos es verifica

$$\text{nusos: } \sum_i I_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{nus a: } I_1 + I_5 - I_3 = 0 \\ \text{nus b: } I_2 - I_5 - I_4 = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

i per a les malles del circuit es verifica

$$\text{malles: } \sum_i R_i I_i = \sum_i V_{\mathcal{E},i} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{malla superior: } I_1 R_6 - I_5 \cdot 0 - I_2 R_3 = 0 \\ \text{malla inferior: } I_3 R_3 - I_4 R_6 + I_5 \cdot 0 = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

Els corrents que entren i ixen en cada nus i el sentit proposat per a la circulació en cada malla apareixen representats en la fig. 3. Notem que no considerem el nus d'on ixen les intensitats I_1 i I_2 , ni el nus on conflueixen les intensitats I_3 i I_4 , perquè no sabem la intensitat que entra al primer nus o que ix de l'últim.

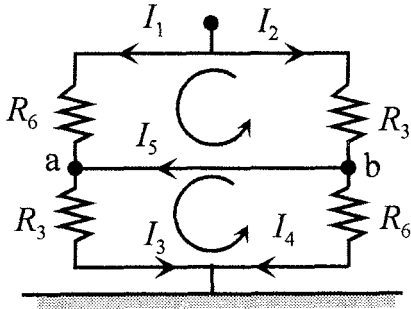


FIG. 3

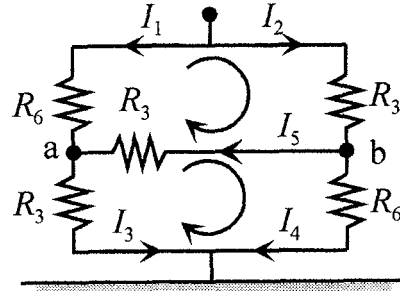


FIG. 4

Ara tenim quatre equacions i cinc incògnites (les intensitats de corrent I_1, I_2, \dots, I_5); ens fa falta, per tant, una altra equació. Si ens fixem en la branca esquerra de la fig. 3, per exemple, es verificarà que la diferència de potencial entre els extrems (36 V) serà la suma de la diferència de potencial que hi ha entre els extrems de cadascuna de les resistències que estan disposades en sèrie, i, per la llei d'Ohm, tindrem que

$$36 = I_1 R_6 + I_3 R_3 \quad (6)$$

El mateix raonament es podria haver aplicat a la branca dreta del circuit de la fig. 3. Les eqs. (3) - (5) formen un sistema de cinc equacions amb cinc incògnites, la solució del qual és

$$I_1 = 3 \text{ A}, \quad I_2 = 6 \text{ A}, \quad I_3 = 6 \text{ A}, \quad I_4 = 3 \text{ A}, \quad I_5 = 3 \text{ A} \quad (7)$$

on la intensitat $I_5 = 3 \text{ A}$ és la intensitat de corrent que circula a través de l'interruptor del circuit A, on hem suposat que no hi ha cap resistència.

(c) És fàcil adonar-se que si l'interruptor del circuit B no és tancat, la resistència horitzontal de 3Ω (vegeu la figura B de l'enunciat) no intervé de cap manera en el problema i el circuit B amb l'interruptor obert es comporta igual que el circuit A amb l'interruptor obert. Per tant, la diferència de potencial entre els punts a i b és $V_{ab} = 12 \text{ V}$, tal com havíem calculat en el cas (a).

(d) Quan l'interruptor és tancat aplicarem de nou les lleis de Kirchhoff per als nusos i les malles, però aquesta vegada en el circuit B (fig. 4):

$$\text{nus a:} \quad I_1 + I_5 - I_3 = 0 \quad (8)$$

$$\text{nus b:} \quad I_2 - I_5 - I_4 = 0 \quad (9)$$

$$\text{malla superior:} \quad I_1 R_6 - I_5 R_3 - I_2 R_3 = 0 \quad (10)$$

$$\text{malla inferior:} \quad I_3 R_3 - I_4 R_6 + I_5 R_3 = 0 \quad (11)$$

En aquesta ocasió tampoc no hem considerat els nusos que no consideràvem abans.

Igual que abans, sabem que la diferència de potencial entre l'extrem superior del circuit B i la terra és de 36 V. Si seguim el camí del corrent pel costat dret (també podríem fer-ho pel costat esquerre) entre l'extrem superior i la terra, per un raonament similar al del cas anterior, tindrem que la diferència de potencial val

$$36 = I_2 R_3 + I_4 R_6 \quad (12)$$

Si resollem les cinc eqs. (8)-(12), obtindrem el valor de les intensitats de corrent en el circuit B tancat

$$I_1 = \frac{24}{7} \text{ A}, \quad I_2 = \frac{36}{7} \text{ A}, \quad I_3 = \frac{36}{7} \text{ A}, \quad I_4 = \frac{24}{7} \text{ A}, \quad I_5 = \frac{12}{7} \text{ A} \quad (13)$$

La intensitat I_5 és la intensitat de corrent que travessa l'interruptor del circuit B.

(e) Per a calcular la resistència equivalent al circuit A obert tindrem present l'associació de resistències en sèrie i en paral·lel que hi ha representades en la fig. 5. Les dues resistències de cada branca estan associades en sèrie, per això la resistència total de cada branca és de 9Ω , com hem dit abans. La resistència que resulta de l'associació en paral·lel de les dues branques (després de fer l'associació de resistències en sèrie dins de cada branca) és R_{eq} i verifica que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = 4.5 \Omega \quad (14)$$

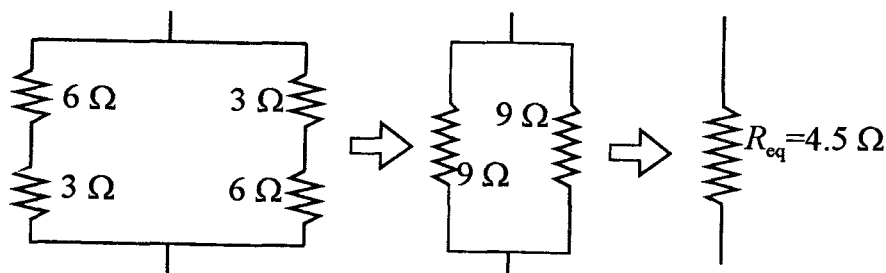


FIG. 5

En el cas de tenir el circuit A tancat, hem de considerar que els punts a i b estan al mateix potencial (fig. 6), perquè entre aquests no hi ha cap resistència. En la fig. 6 apareix representada la seqüència d'associacions de resistències que cal fer en cada pas. Així, les resistències equivalents a les malles superior ($R_{eq,1}$) i inferior ($R_{eq,2}$) del segon circuit de la fig. 6 verifiquen

$$\frac{1}{R_{eq,1}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \quad \frac{1}{R_{eq,2}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \quad (15)$$

amb la qual cosa $R_{eq} = R_{eq,1} + R_{eq,2} = 4 \Omega$.

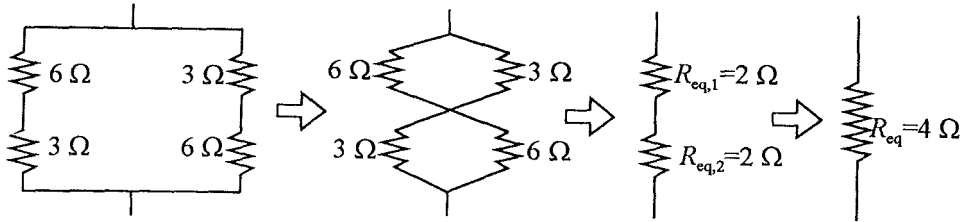


FIG. 6

(f) El càlcul de la resistència equivalent al circuit B obert és idèntic al que hem fet en la primera part de l'apartat anterior; per això la resistència equivalent al circuit B obert val 4.5Ω , igual que per al circuit A obert.

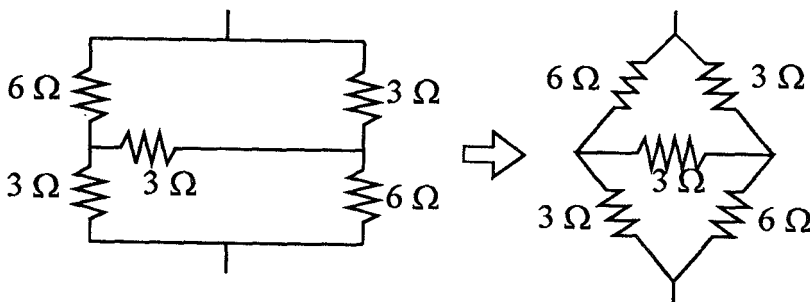


FIG. 7

Donat el cas que el circuit B estiga tancat (fig. 7), tenim una situació que pot esquematitzar-se tal com representa la fig. 8, on un corrent $I_1 + I_2$ circula a través d'un element de resistència desconeguda R_{eq} . Si considerem el corrent $I_3 + I_4$, en comptes de $I_1 + I_2$, veurem que arribem al mateix resultat, ja que $I_3 + I_4 = I_1 + I_2$, segons es dedueix de l'apartat (d). Per tant, si coneixem la intensitat que circula pel sistema de resistències (el qual hem anomenat R_{eq}) i la diferència de potencial entre els extrems, podem calcular R_{eq} per aplicació de la llei d'Ohm, $R_{eq} = V/I$. Dels resultats de l'apartat (d) sabem que $I_1 + I_2 = I_3 + I_4 = 60/7$ A, per tant, ja coneixem la intensitat I . La diferència de potencial entre els extrems del circuit és de 36 V, per tant

$$R_{eq} = \frac{36}{60/7} = 4.2 \Omega \quad (16)$$

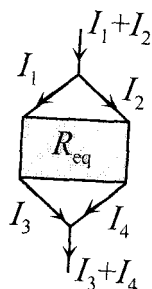


FIG. 8

13.3 Una bateria, la resistència interna de la qual és $r = 2 \Omega$, forma un circuit amb una certa resistència R i amb un amperímetre de resistència interna $r_A = 8 \Omega$. Calculeu el valor de R si l'amperímetre mesura el mateix corrent I tant si posem la resistència R en sèrie amb aquest (figura A) o com si ho fem en derivació sobre els extrems (figura B).

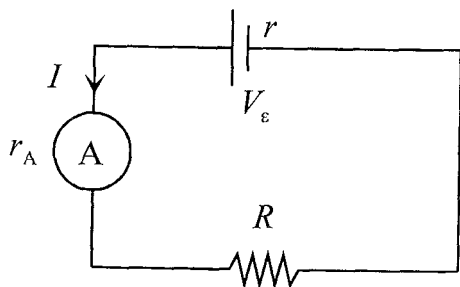


figura A

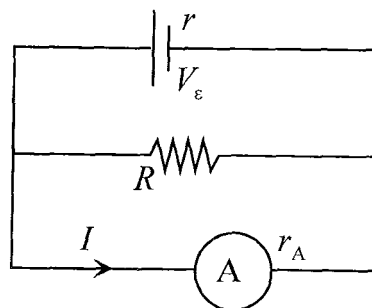


figura B

$$r = 2 \Omega, r_A = 8 \Omega$$

valor de R perquè el corrent I siga el mateix en els dos casos: sèrie (figura A) i paral·lel (figura B)?

Si apliquem la llei d'Ohm a la figura A, on tenim tots els elements en sèrie, la diferència de potencial V_E s'escriurà

$$V_E = I(r + r_A + R) \quad (1)$$

on I és el corrent que passa per l'amperímetre. r , r_A i R són les tres resistències del circuit en sèrie.

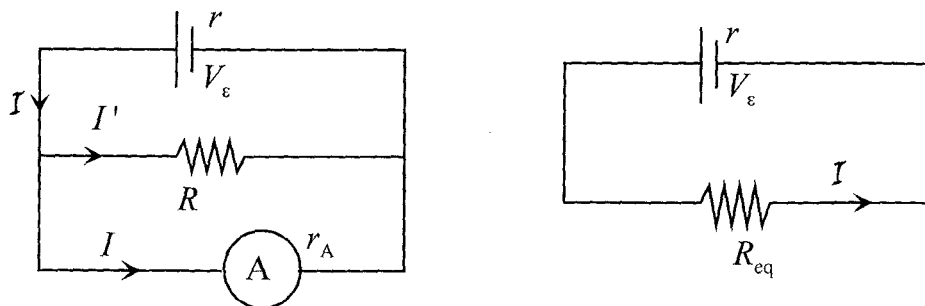


FIG. 1

El circuit de la figura B pot reduir-se al circuit representat en la fig. 1, tal com s'hi indica, on I' és el corrent que passa per la resistència R del circuit. La resistència equivalent del circuit en paral·lel format per les resistències R i r_A verificarà

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{eq}} = \frac{r_A R}{r_A + R} \quad (2)$$

D'altra banda, si apliquem la llei d'Ohm al circuit equivalent en sèrie, representat en la part dreta de la fig. 1, podem escriure

$$V_{\mathcal{E}} = \mathcal{I}(r + R_{\text{eq}}) \quad (3)$$

on \mathcal{I} és el corrent que circula per la resistència equivalent. També coneixem, segons es desprèn de la part esquerra de la fig. 1, que les intensitats de corrent estan relacionades per

$$\mathcal{I} = I + I' \quad (4)$$

i que els extrems de la resistència R i l'amperímetre estan a la mateixa diferència de potencial, ja que estan connectats en paral·lel, i per la llei d'Ohm s'obté que

$$I' R = I r_A \quad (5)$$

Si substituïm el valor del corrent I' deduït de l'eq. (5) en l'eq. (4) i aquesta en l'eq. (3), obtenim que la diferència de potencial del circuit, en funció de les resistències i del corrent que passa per l'amperímetre, és

$$V_{\mathcal{E}} = I \left(1 + \frac{r_A}{R} \right) (r + R_{\text{eq}}) \quad (6)$$

i si substituïm el valor de la resistència equivalent R_{eq} , segons l'eq. (2), obtenim

$$V_{\mathcal{E}} = I \left(1 + \frac{r_A}{R} \right) \left(r + \frac{r_A R}{r_A + R} \right) \quad (7)$$

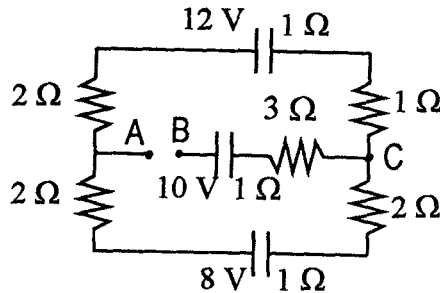
Finalment, si igualem l'eq. (7) i l'eq. (1), obtenim una expressió que relaciona les resistències del circuit entre si

$$r + r_A + R = \left(1 + \frac{r_A}{R}\right) \left(r + \frac{r_A R}{r_A + R}\right) \quad (8)$$

de la qual obtenim el valor de la resistència R que ens demanen

$$R = \sqrt{r r_A} = 4 \Omega \quad (9)$$

13.4 (a) Determineu la diferència de potencial entre els punts A i B de la figura. (b) Si suposem que A i B estan connectats, calculeu el corrent que passa per la pila de 12 V.



els valors de les dades apareixen representats sobre la figura de l'enunciat

(a) diferència de potencial entre A i B?

(b) si A i B estan connectats: I que circula per la pila de 12 V?

(a) La diferència de potencial entre els punts A i B del circuit és $V_B - V_A$, que podem escriure com

$$V_{AB} = V_B - V_C + V_C - V_A = V_{AC} + V_{CB} \quad (1)$$

Per tant, caldrà calcular $V_{AC} = V_C - V_A$ i $V_{CB} = V_B - V_C$.

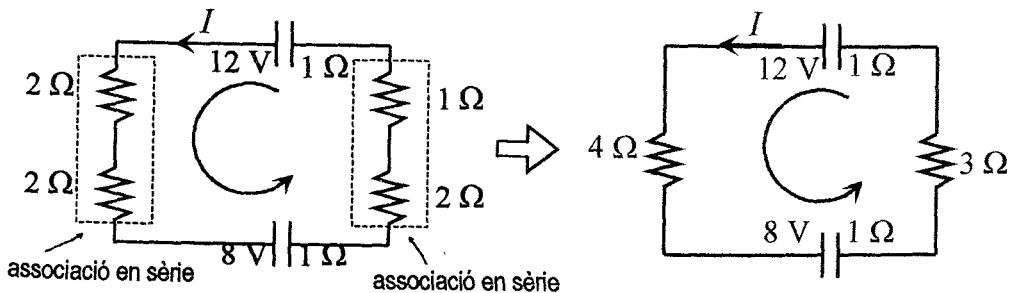


FIG. 1

Quan està desconnectat el punt A del punt B podem considerar el circuit anterior com es representa simplificat en la part dreta de la fig. 1. Notem que les dues resistències de $2\ \Omega$ en sèrie en la branca esquerra del circuit, les hem agrupades en una única resistència de valor $4\ \Omega$ i, de forma semblant, hem agrupat les dues resistències en sèrie de la branca dreta (l'una d' $1\ \Omega$ i l'altra de $2\ \Omega$) en una resistència de valor $3\ \Omega$.

La força electromotriu subministrada per les piles està relacionada amb la caiguda de potencial a través dels elements passius del sistema, de la forma

$$12 - 8 = I(4 + 1 + 3 + 1) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{4}{9}\ \text{A} \quad (2)$$

on $12\ \text{V}$ és la força electromotriu de la pila superior i li assignem el signe positiu perquè el corrent I que hem representat en la fig. 1 circula en sentit positiu respecte d'aquesta. En canvi, $8\ \text{V}$, que és la força electromotriu de la pila inferior, té signe negatiu perquè el corrent I la travessa en sentit negatiu respecte a la seua disposició d'electrodes. La suma $(4 + 1 + 3 + 1)$ en l'eq. (2) correspon a les quatre resistències, disposades en sèrie, del circuit de la part dreta de la fig. 1.

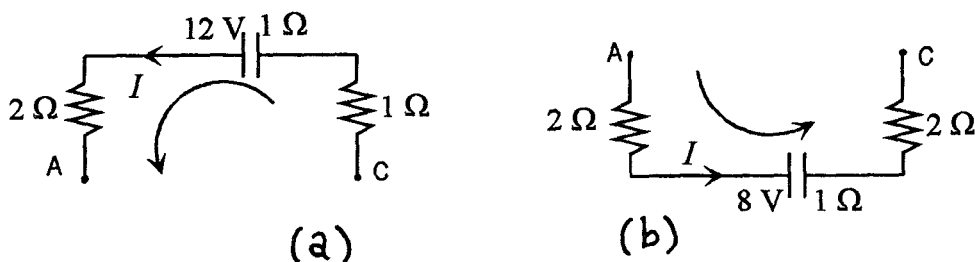


FIG. 2

Si ens fixem en la part superior del circuit, a partir de la fig. 2a és fàcil deduir que la diferència de potencial entre els punts C i A, $V_{CA} = V_A - V_C$ (en el sentit del corrent), serà la força electromotriu de la pila de $12\ \text{V}$ menys la caiguda de potencial deguda a les resistències:

$$V_{CA} = 12 - I(1 + 1 + 2) \quad (3)$$

La força electromotriu apareix amb signe positiu, 12 , perquè la disposició d'electrodes de la bateria de $12\ \text{V}$ coincideix amb el sentit assignat al corrent. Les tres resistències que travessa el corrent I entre els punts C i A estan disposades en sèrie, per això escrivim $(1 + 1 + 2)$ en l'eq. (3). Després de substituir el valor del corrent, eq. (2), obtenim que

$$V_{CA} = \frac{92}{9}\ \text{V} \quad (4)$$

També podríem haver fet un raonament semblant a partir de la fig. 2b, on apareix representada la part inferior del circuit. Ara, la diferència de potencial entre els punts A

i C, $V_{AC} = V_C - V_A$ (en el sentit del corrent), serà la força electromotriu de la pila de 8 V menys la caiguda de potencial provocada per les resistències, disposades en sèrie:

$$V_{AC} = -8 - I(2 + 1 + 2) \quad (5)$$

on, ara, la força electromotriu apareix amb signe negatiu, -8 , perquè la pila està disposada de manera que s'oposa al sentit del corrent I . En substituir el valor de I , eq. (2), obtenim

$$V_{AC} = -\frac{92}{9} \text{ V} \quad (6)$$

Com que $V_{CA} = -V_{AC}$, òbviament, les dues solucions donades per les eqs. (4) i (6) coincideixen.

Per a calcular V_{CB} ens fixem en la fig. 3. Pel tram BC del circuit no passa corrent, ja que no és tancat. Així, doncs, no inclourem la caiguda de potencial deguda a les resistències, ja que $I = 0$ per aquest tram.

La part esquerra de la pila de 10 V té un potencial major que la part dreta (el corrent que aquesta pila provocaria, en un circuit tancat, aniria des de $\leftarrow|$ fins a $| \rightarrow$), per això podem escriure

$$V_{CB} = V_B - V_C = 10 \text{ V} \quad (7)$$

Si substituïm els valors de V_{AC} , eq. (6), i V_{CB} , eq. (7), en l'eq. (1) obtenim la diferència de potencial entre els punts A i B del circuit, tal com demana l'enunciat del problema,

$$V_{AB} = V_{AC} + V_{CB} = -\frac{92}{9} + 10 = \frac{-2}{9} \text{ V} \quad (8)$$

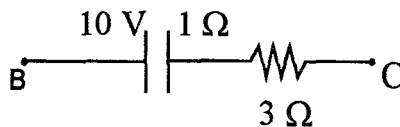


FIG. 3

(b) En aquest cas el circuit pot representar-se tal com il·lustra la fig. 4. Ara els corrents que circulen per cada malla (I_1 , I_2 i I_3) seran diferents del corrent que passava pel circuit en el cas (a) i els calcularem seguidament. Per a calcular la intensitat de corrent I_1 que circula a través de la pila de 12 V, utilitzarem les lleis de Kirchoff per als nusos i les

malles del circuit. Encara que hi ha dos nusos, la suma de les intensitats val el mateix en cada nus, de manera que només utilitzarem l'equació per a un nus i, com que només hi ha dues malles, tindrem, de manera semblant al problema anterior,

$$\text{nus: } I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (9)$$

$$\text{malla superior: } 12 - 10 = I_1(1 + 1 + 2) + I_3(1 + 3) \quad (10)$$

$$\text{malla inferior: } 8 - 10 = I_2(2 + 1 + 2) + I_3(1 + 3) \quad (11)$$

En la malla superior del circuit el recorregut és en el sentit antihorari i en la malla inferior el sentit elegit és l'horari. Els signes de les diferències de potencial de les piles que apareixen en cada malla han estat assignats d'acord amb el criteri esmentat abans, que relaciona el sentit de recorregut del corrent i la disposició d'elèctrodes de la pila (si tenim $\leftarrow| | \rightarrow$, la diferència de potencial es considera positiva respecte del sentit del corrent, i si tenim $\rightarrow| | \leftarrow$, la diferència de potencial de la pila es considera negativa respecte del sentit del corrent). En l'equació corresponent al nus hem assignat signe positiu als dos corrents (I_1 i I_2) que entren al nus (punt A) i signe negatiu al corrent (I_3) que n'ix. Per tant, tenim tres equacions i tres incògnites, i podem calcular les intensitats de corrent, el resultat de les quals és

$$I_1 = \frac{13}{28} \text{ A} \quad I_2 = -\frac{3}{7} \text{ A} \quad I_3 = \frac{1}{28} \text{ A} \quad (12)$$

Finalment tenim que la intensitat de corrent que circula a través de la pila de 12 V és I_1 i val $13/28$ A.

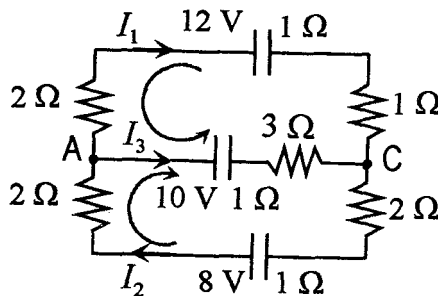
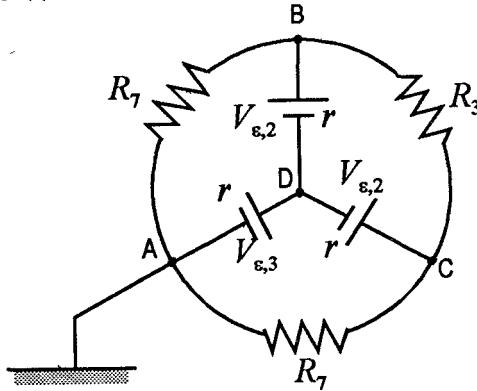


FIG. 4

Cal recordar que per a plantejar les equacions corresponents a les lleis de Kirchhoff hem seleccionat a priori uns recorreguts i uns sentits per als corrents. Si obtenim cap intensitat canviada de signe, com és el cas de la intensitat de corrent I_2 , això significa que el sentit d'aquesta intensitat I_2 és oposat al que hem proposat inicialment.

13.5 Calculeu el valor del potencial en els punts A, B, C i D del circuit representat en la figura adjunta. Els valors de les magnituds indicades són: $r = 1 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_7 = 7 \Omega$, $V_{\mathcal{E},2} = 2 \text{ V}$ i $V_{\mathcal{E},3} = 3 \text{ V}$.



$R_3 = 3 \Omega$, $R_7 = 7 \Omega$, $r = 1 \Omega$, $V_{\mathcal{E},2} = 2 \text{ V}$, $V_{\mathcal{E},3} = 3 \text{ V}$
 $V_A, V_B, V_C, V_D?$

Primerament hem d'indicar que el potencial en el punt A del circuit és $V_A = 0$, ja que està connectat a terra. Segons els corrents que hem disposat sobre el circuit (fig. 1), relacionarem les diferències de potencial entre els punts que ens interessa amb els corrents fent ús de la llei d'Ohm

$$V_{BA} = I_3 R_7 \quad V_{CA} = I_6 R_7 \quad V_{DA} = V_{\mathcal{E},3} - I_1 r \quad (1)$$

Ací hem considerat els sentits relatius entre els corrents I i les forces electromotrius $V_{\mathcal{E}}$ que apareixen en cada branca del circuit de la fig. 1. Com que $V_A = 0$, també sabem que

$$V_{BA} = V_B - V_A = V_B \quad (2)$$

$$V_{CA} = V_C - V_A = V_C \quad (3)$$

$$V_{DA} = V_D - V_A = V_D \quad (4)$$

Per tant, per a calcular les diferències del potencial V_B, V_C i V_D en els punts B, C i D, respectivament, de la figura de l'enunciat, cal conèixer els corrents (segons les relacions (1)), i per a fer això apliquem les lleis de Kirchoff als nusos i a les malles del circuit.

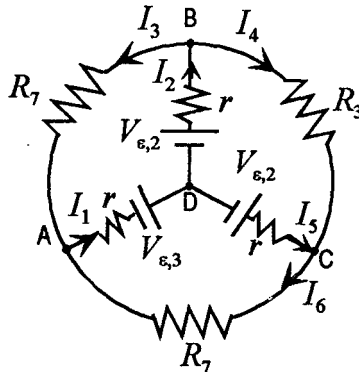


FIG. 1

En els nusos, s'ha de verificar que $\sum_i I_i = 0$, i aplicarem aquesta relació a tots els nusos excepte un. Elegim un sentit arbitrari de recorregut dels corrents, tal com representa la fig. 1.

$$\text{per al nus en el punt A tenim: } I_3 + I_6 - I_1 = 0 \quad (5)$$

$$\text{per al nus en el punt B tenim: } I_2 - I_3 - I_4 = 0 \quad (6)$$

$$\text{per al nus en el punt C tenim: } I_4 + I_5 - I_6 = 0 \quad (7)$$

En les expressions anteriors hem considerat que els corrents que entren en un nus tenen sentit contrari al dels que n'ixen.

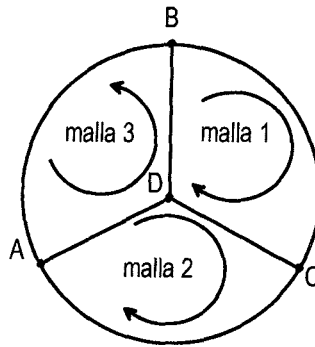


FIG. 2

En les malles s'ha de verificar que $\sum_i V_{\mathcal{E},i} = \sum_i I_i R_i$. Considerant el sentit del recorregut proposat en cada malla (fig. 2) i els sentits de les forces electromotrius i dels corrents (fig. 1), tenim

$$\text{malla 1: } V_{\mathcal{E},2} - V_{\mathcal{E},2} = I_4 R_3 - I_5 r + I_2 r \quad (8)$$

$$\text{malla 2: } V_{\mathcal{E},3} + V_{\mathcal{E},2} = I_6 R_7 + I_1 r + I_5 r \quad (9)$$

$$\text{malla 3: } V_{\mathcal{E},2} + V_{\mathcal{E},3} = I_2 r + I_3 R_7 + I_1 r \quad (10)$$

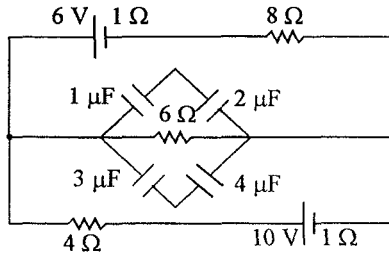
Les eqs. (5)-(10) formen un sistema de 6 equacions amb 6 incògnites, el qual ens permet calcular les intensitats de corrent que circulen pel circuit: I_1, I_2, \dots, I_6 . Una vegada calculades les intensitats, podem obtenir de seguida els potencials V_B, V_C i V_D , substituint només els seus valors en les expressions (1), i s'obté finalment:

$$V_{BA} = V_B = 3.5 \text{ V} \quad (11)$$

$$V_{CA} = V_C = 3.5 \text{ V} \quad (12)$$

$$V_{DA} = V_D = 2 \text{ V} \quad (13)$$

13.6 Calculeu la càrrega dels condensadors del circuit de la figura si suposem que inicialment estaven descarregats.



Q de cada condensador?

Per a calcular la càrrega en cada condensador, prèviament calcularem la diferència de potencial entre els extrems de la resistència central de 6 Ω. A partir d'aquest valor de la diferència de potencial podrem conèixer la càrrega en el condensador equivalent superior (fig. 1a),

$$Q_{\text{sup}} = VC_{\text{eq sup}} \tag{1}$$

i en el condensador equivalent inferior (fig. 1b),

$$Q_{\text{inf}} = VC_{\text{eq inf}} \tag{2}$$

on els condensadors en la part superior del dibuix de l'enunciat estan associats en sèrie. Per tant, la capacitat del condensador equivalent superior verifica

$$\frac{1}{C_{\text{eq sup}}} = \frac{1}{1 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C_{\text{eq sup}} = \frac{2}{3} 10^{-6} \text{ F} \tag{3}$$

i, anàlogament, per al condensador equivalent de la part inferior,

$$\frac{1}{C_{\text{eq inf}}} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{4 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C_{\text{eq inf}} = \frac{12}{7} 10^{-6} \text{ F} \tag{4}$$

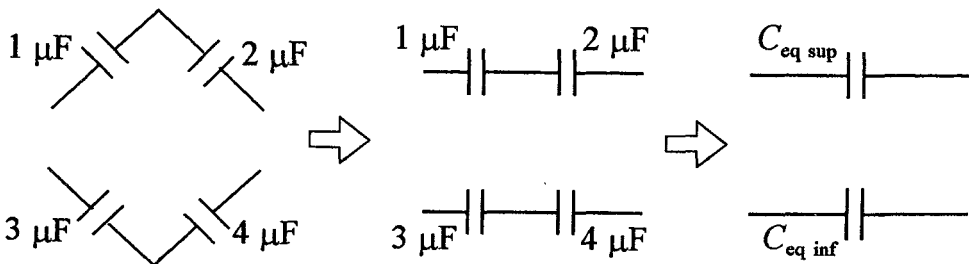


FIG. 1A

FIG. 1B

També coneixem que la càrrega d'un sistema de condensadors en sèrie és la mateixa en cadascun d'aquests, i igual a la càrrega del condensador equivalent; així, doncs,

$$Q_1 = Q_2 = Q_{\text{sup}} \quad (5)$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_{\text{inf}} \quad (6)$$

on Q_i representa la càrrega del condensador de $i \mu\text{F}$.

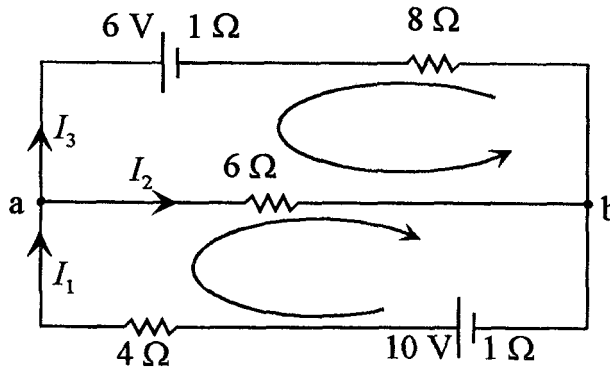


FIG. 2

Càlcul de la diferència de potencial V entre els extrems de la resistència de 6Ω : Com que, per la llei d'Ohm, $V = IR$, hem de calcular la intensitat que circula per la resistència de 6Ω . Aplicant les lleis de Kirchhoff a les malles i els nusos representats en la fig. 2, tenim per al nus a

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (7)$$

(l'equació corresponent al nus b seria idèntica a la que acabem d'escriure i no aportaria res de nou).

Per a les malles, segons la disposició de les bateries i el sentit elegit per a recórrer cada malla, tenim

$$-I_3(1 + 8) + I_2 6 = 6 \quad (8)$$

$$I_2 6 + I_1(4 + 1) = 10 \quad (9)$$

Les eqs. (7)-(9) formen un sistema de tres equacions amb tres incògnites, i podem calcular les intensitats, que són

$$I_1 = \frac{38}{43} \text{ A} \quad I_2 = \frac{40}{43} \text{ A} \quad I_3 = \frac{-2}{43} \text{ A} \quad (10)$$

La intensitat de corrent que ens interessa és I_2 ; per tant, la diferència de potencial entre els extrems de la resistència de 6Ω és

$$V = 6I_2 = 6 \frac{40}{43} \text{ V} \quad (11)$$

Si substituïm en les eqs. (1) i (2) i utilitzem les eqs. (3) i (4), obtenim

$$Q_{\text{sup}} = \frac{160}{43} 10^{-6} \text{ C} = \frac{160}{43} \mu\text{C} \quad (12)$$

$$Q_{\text{inf}} = \frac{2880}{301} 10^{-6} \text{ C} = \frac{2880}{301} \mu\text{C} \quad (13)$$

Portant aquests resultats a les eqs. (5) i (6) obtindrem finalment les càrregues dels condensadors

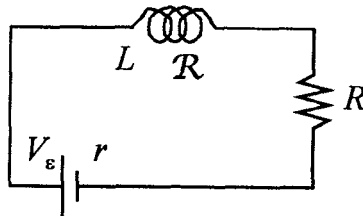
$$Q_1 = Q_2 = \frac{160}{43} \mu\text{C} \quad (14)$$

$$Q_3 = Q_4 = \frac{2880}{301} \mu\text{C} \quad (15)$$

14

**Circuits elèctrics.
Corrent altern**

14.1 Una bobina, l'autoinducció i la resistència de la qual són $L = 1.5 \text{ H}$ i $\mathcal{R} = 0.5 \Omega$, respectivament, es connecta en sèrie, mitjançant un fil conductor i una resistència $R = 0.5 \Omega$, a una bateria de força electromotriu 4.5 V i resistència interna $r = 0.5 \Omega$. Calculeu, al cap de 0.5 s (a) la diferència de potencial entre els borns de la bateria, (b) la diferència de potencial entre els extrems de la resistència, (c) la diferència de potencial entre els terminals de la bobina, i (d) la força electromotriu d'inducció.



$L = 1.5 \text{ H}$, $\mathcal{R} = 0.5 \Omega$, $R = 0.5 \Omega$, $r = 0.5 \Omega$, $V_{\varepsilon} = 4.5 \text{ V}$

- | | |
|---|-----------------------|
| (a) diferència de potencial entre els borns de la bateria? | } $t = 0.5 \text{ s}$ |
| (b) diferència de potencial al llarg de la resistència? | |
| (c) diferència de potencial entre els terminals de la bobina? | |
| (d) força electromotriu d'inducció? | |

Calcularem totes les quantitats que se'ns demanen en funció del temps, i després substituïm per al cas en què $t = 0.5 \text{ s}$ comptat des del moment en què tanquem el circuit.

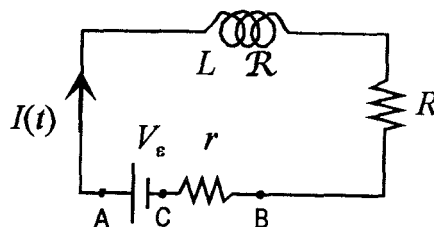


FIG. 1

(a) En l'esquema representat en la fig. 1 apareix explícitament la resistència interna de la bateria, disposada en sèrie amb tot el circuit, com també el sentit del corrent que hi circula. La diferència de potencial (V) entre els terminals de la bateria correspon a la diferència de potencial entre els punts A i B assenyalats en la fig. 1, que, si considerem el sentit del corrent, podem escriure:

$$V_{\text{bateria}} = V_A - V_B \quad (1)$$

Aquesta expressió la podem reescriure com

$$V_{\text{bateria}} = V_A - V_C + V_C - V_B \quad (2)$$

A partir de la fig. 1, tenim que

$$V_A - V_C = V_E \quad (3)$$

Si considerem que el corrent arriba pel punt B i després de passar per la resistència r arriba al punt C, s'haurà produït una disminució de potencial i per això és negatiu el terme que resulta d'aplicar-hi la llei d'Ohm,

$$V_C - V_B = -I(t)r \quad (4)$$

Finalment, tenim que

$$V_{\text{bateria}} = V_E - I(t)r \quad (5)$$

Com podem notar, en l'eq. (5) coneixem tots els termes excepte $I(t)$, de manera que seguidament calcularem el corrent com a funció del temps.

Aquest corrent com a funció del temps es pot obtenir seguint un procediment anàleg al que hem usat en el problema 13.1, però ara considerant que en el circuit no hi ha un condensador, com abans, sinó una autoinducció.

Tenint en compte que entre els extrems de l'autoinducció es genera una força electromotriu induïda V_L , segons la llei d'Ohm per a cada instant de temps l'equació de partida ara és

$$IR_{\text{tot}} = V_E + V_L \quad (6)$$

i com que $V_L = -L dI/dt$, perquè V_L s'oposa a la variació de corrent, tindrem que

$$V_E = IR_{\text{tot}} + L \frac{dI}{dt} \quad (7)$$

la qual és similar a l'eq. (2) del problema 13.1, però on el terme degut al condensador d'abans, (q/C) ha estat substituït per un terme degut a l'autoinducció d'ara $(-L dI/dt)$, i en aquest cas R_{tot} és la resistència total del circuit ($R_{\text{tot}} = R + r + \mathcal{R}$).

Per a resoldre aquesta equació diferencial farem ús del segon mètode que hem esmentat en el problema 13.1. Escriurem l'eq. (7) com

$$\frac{dI}{I - V_E/R_{\text{tot}}} = -\frac{R_{\text{tot}}}{L} dt \quad (8)$$

Ara integrem entre l'instant inicial ($I = 0$ quan $t = 0$) i un instant qualsevol ($I(t)$ per a un temps t)

$$\int_0^{I(t)} \frac{dI'}{I' - V_E/R_{\text{tot}}} = -\frac{R_{\text{tot}}}{L} \int_0^t dt' \quad (9)$$

(en l'integrant de l'eq. (9) hem posat I' i t' per a evitar la confusió amb els límits d'integració I i t , respectivament). El resultat de la integració és

$$\ln \left(I' - \frac{V_E}{R_{\text{tot}}} \right) \Big|_0^{I(t)} = - \frac{R_{\text{tot}}}{L} t' \Big|_0^t \quad (10)$$

és a dir,

$$\ln \left(I(t) - \frac{V_E}{R_{\text{tot}}} \right) - \ln \left(\frac{-V_E}{R_{\text{tot}}} \right) = - \frac{R_{\text{tot}}}{L} t \quad (11)$$

que podem reescriure com

$$\ln \left(\frac{I(t) - V_E/R_{\text{tot}}}{-V_E/R_{\text{tot}}} \right) = - \frac{R_{\text{tot}}}{L} t \quad (12)$$

D'aquesta darrera expressió, obtenim que la intensitat de corrent, mesurada des del moment en què tanquem el circuit, val

$$I(t) = \frac{V_E}{R_{\text{tot}}} \left[1 - \exp \left(- \frac{R_{\text{tot}}}{L} t \right) \right] \quad (13)$$

D'aquesta equació es dedueix que quan apliquem una força electromotriu V_E a un circuit com el de l'enunciat, el corrent elèctric augmenta gradualment fins a arribar a un estat estacionari en què es verifica la llei d'Ohm per al corrent continu, $I(t \rightarrow \infty) = V_E/R_{\text{tot}}$.

De les eqs. (5) i (13) obtenim

$$V_{\text{bateria}}(t) = V_E \left\{ 1 - \frac{r}{R_{\text{tot}}} \left[1 - \exp \left(- \frac{R_{\text{tot}}}{L} t \right) \right] \right\} \quad (14)$$

Després d'haver substituït els valors de les dades inicials i transcorreguts 0.5 s des del moment de tancar el circuit, tenim que la diferència de potencial entre els borns de la bateria val

$$V_{\text{bateria}}(t = 0.5 \text{ s}) = 3.91 \text{ V} \quad (15)$$

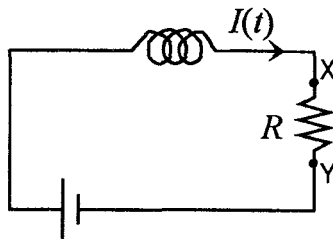


FIG. 2

(b) Segons el sentit del corrent en el circuit, la diferència de potencial entre els extrems de la resistència és

$$V_{\text{resistència}}(t) = V_x - V_y = I(t) R \quad (16)$$

on, a partir de la fig. 2, $V_x > V_y$. Si emprem les eqs. (13) i (16) tindrem que

$$V_{\text{resistència}}(t) = \frac{RV_{\mathcal{E}}}{R_{\text{tot}}} \left[1 - \exp\left(-\frac{R_{\text{tot}}}{L} t\right) \right] \quad (17)$$

que, al cap de 0.5 s, val

$$V_{\text{resistència}}(t = 0.5 \text{ s}) = 0.59 \text{ V} \quad (18)$$

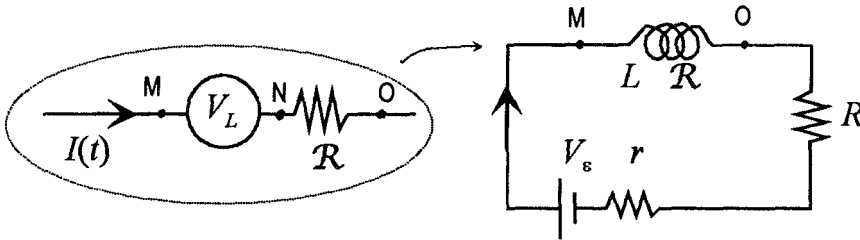


FIG. 3

(c) Tenint en compte el sentit del corrent i segons el detall representat en la fig. 3, la diferència de potencial entre els terminals M i O de la bobina serà

$$V_{\text{bobina}} = V_M - V_O = V_M - V_N + V_N - V_O \quad (19)$$

i com que $V_M - V_N$ és la diferència de potencial de l'autoinducció pura,

$$V_M - V_N = V_L \quad (20)$$

i $V_N - V_O$ correspon a la diferència de potencial que apareix entre la resistència de la bobina que, per la llei d'Ohm, val

$$V_N - V_O = I(t) R \quad (21)$$

tenim que

$$V_{\text{bobina}} = V_L + I(t) R \quad (22)$$

Com que $V_L = -L dI/dt$, després de substituir l'expressió (13) corresponent a $I(t)$, finalment obtenim que

$$V_{\text{bobina}}(t) = V_{\mathcal{E}} \left\{ \frac{R}{R_{\text{tot}}} - \left[1 + \frac{R}{R_{\text{tot}}} \right] \exp\left(-\frac{R_{\text{tot}}}{L} t\right) \right\} \quad (23)$$

i, al cap de 0.5 s,

$$V_{\text{bobina}}(t = 0.5 \text{ s}) = -2.14 \text{ V} \quad (24)$$

Com podem apreciar, aquesta diferència de potencial té sentit contrari a la força electromotriu de la bateria.

(d) La força electromotriu d'inducció és el que hem anomenat abans diferència de potencial de l'autoinducció pura

$$V_L = -L \frac{dI(t)}{dt} \quad (25)$$

que, després de substituir $I(t)$ donat per l'eq. (13), queda

$$V_L(t) = -V_E \exp\left(-\frac{R_{\text{tot}}}{L} t\right) \quad (26)$$

Al cap de 0.5 s, V_L val

$$V_L(t = 0.5 \text{ s}) = -2.73 \text{ V} \quad (27)$$

Notem que els resultats donats per les eqs. (24) i (27) corresponen a l'eq. (22) quan tots els termes d'aquesta els calculem en l'instant $t = 0.5 \text{ s}$.

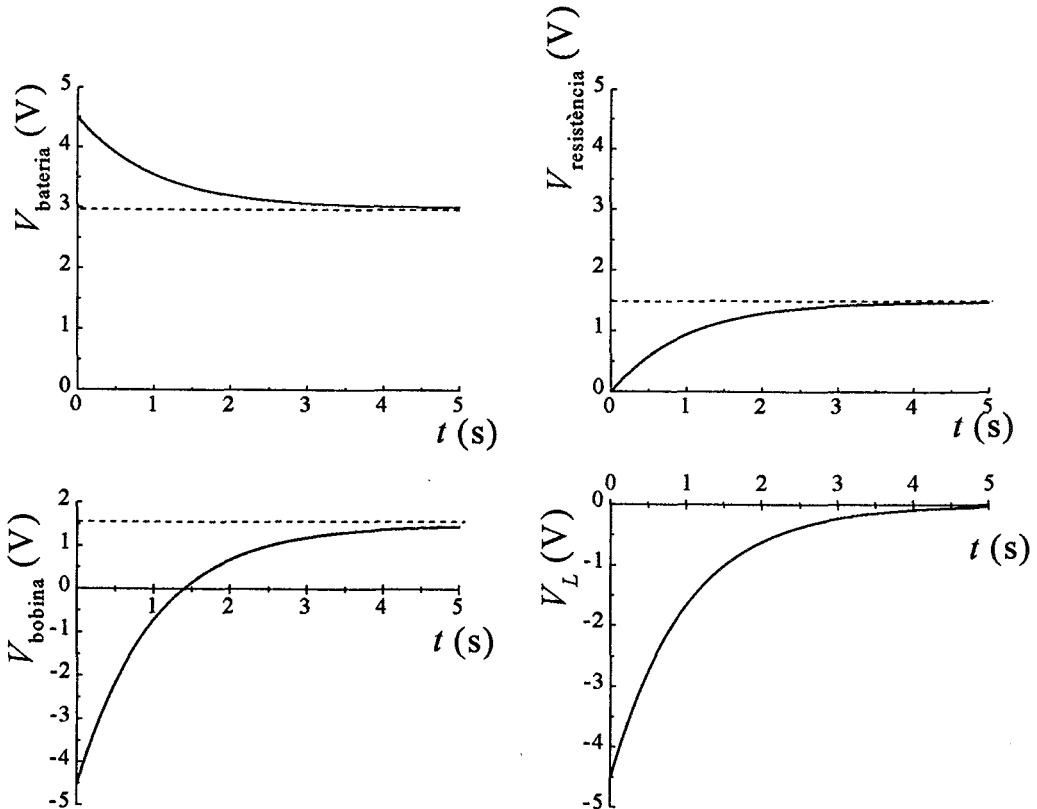


FIG. 4

En les figs. 4 apareixen representades en funció del temps les diferències de potencial entre els extrems de la bateria (fig. 4a), entre els extrems de la resistència (fig. 4b), entre els extrems de la bobina (fig. 4c) i la força electromotriu d'inducció (fig. 4d). La intensitat que circula pel circuit apareix representada en funció del temps en la fig. 5. Si ens fixem en aquestes representacions gràfiques, observarem clarament l'existència del règim transitori i que, al cap d'un cert temps, les magnituds representades tendeixen a valors constants, que corresponen aproximadament al valor que prenen en l'estat estacionari.

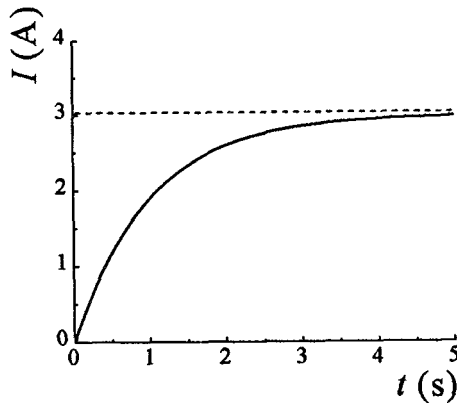
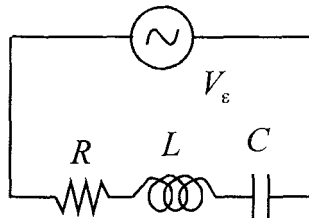


FIG. 5

14.2 Un circuit en sèrie està format per una resistència de 1200Ω , una autoinducció de 0.3 H i una capacitat de $0.5 \mu\text{F}$. Es connecta a una línia de 150 V de tensió màxima i 7500 rad/s de freqüència angular. Calculeu (a) la impedància del circuit per a la freqüència esmentada i la intensitat màxima del corrent que hi circula, (b) la diferència de fase entre el corrent i la tensió subministrada, (c) el factor de potència, i (d) la potència mitjana absorbida pel circuit. (e) Aprofitant els resultats obtinguts, dibuixeu el diagrama vectorial del circuit.



$R = 1200 \Omega$, $L = 0.3 \text{ H}$, $C = 5 \cdot 10^{-7} \text{ F}$, $V_{E,0} = 150 \text{ V}$, $\omega = 7500 \text{ rad/s}$

- (a) Z, I_0 ?
 (b) desfasament entre I i V_E ?
 (c) factor de potència?
 (d) potència mitjana absorbida?
 (e) diagrama vectorial?

(a) La impedància del circuit RCL de la figura de l'enunciat (on els elements estan disposats en sèrie) val

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (1)$$

En l'expressió anterior hem representat per j el nombre imaginari $\sqrt{-1}$ (no hem usat la lletra habitual, i , per a evitar confusions amb el símbol del corrent elèctric).

El mòdul d'aquesta impedància, per tractar-se d'una quantitat complexa, s'escriu

$$|Z| = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2} = 2318.11 \Omega \quad (2)$$

L'argument de la impedància val

$$\varphi = \arctan \frac{[\omega L - 1/(\omega C)]}{R} = 58.82^\circ = 1.03 \text{ rad} \quad (3)$$

En les expressions (2) i (3) hem tingut en compte que donat un nombre complex, $c = a + jb$, el seu mòdul és $|c| = (a^2 + b^2)^{1/2}$ i el seu argument és $\varphi = \arctan(b/c)$.

La intensitat màxima de corrent que circula pel circuit està relacionada, per la llei d'Ohm, amb la impedància i amb la tensió màxima que produeix la força electromotriu mitjançant la relació

$$I_0 = \frac{V_{E,0}}{|Z|} = 0.065 \text{ A} \quad (4)$$

(b) En els circuits de corrent altern, la diferència de fase entre el corrent I i la tensió V_E ve donada per l'argument de la impedància, és a dir,

$$\varphi = \text{diferència de fase} = 1.03 \text{ rad} \quad (5)$$

(c) La potència en un circuit de corrent altern es defineix per mitjà de la relació $V_{E,0} \cdot I_E \cdot (\text{factor de potència})/2 = V_{E,0} \cdot (I_0/2) \cos \varphi$, on $V_{E,0}$ i I_0 són els valors màxims de la tensió i la intensitat de corrent, φ és la diferència de fase entre la tensió i la intensitat. Per tant

$$\text{factor de potència} = \cos \varphi = 0.52 \quad (6)$$

(d) La potència mitjana absorbida en el circuit valdrà

$$P = \frac{V_{E,0} I_0 \cos \varphi}{2} = 2.54 \text{ W} \quad (7)$$

Noteu que, com que totes les dades inicials estaven expressades en unitats del SI, els resultats que hem obtingut també vénen expressats en les corresponents unitats del SI.

(e) Representarem en l'eix horitzontal les magnituds reals i en l'eix vertical les magnituds imaginàries de la impedància del circuit. Així, podem escriure $Z = R + jX$, on Z és la impedància, $X = X_L - X_C$ és la reactància del circuit, $R = 1200 \Omega$ és la resistència, $X_L = \omega L = 2250 \Omega$ és la reactància inductiva, i $X_C = 1/(\omega C) = 266.67 \Omega$ és la reactància capacitiva. En la fig. 1 apareixen representades detalladament totes aquestes magnituds.

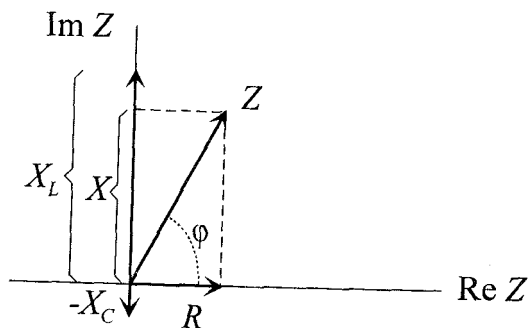
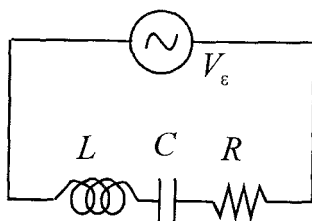


FIG. 1

14.3 Un circuit està format per una autoinducció de 0.2 H , un condensador de $7 \mu\text{F}$ i una resistència de 200Ω disposats en sèrie. Si la intensitat eficaç del corrent que circula pel circuit és de 3 A i la freqüència del generador és de 50 Hz , calculeu el valor de la força electromotiu instantània quan el corrent és nul.



$L = 0.2 \text{ H}$, $C = 7 \cdot 10^{-6} \text{ F}$, $R = 200 \Omega$, $\nu = 50 \text{ Hz}$, $I_{ef} = 3 \text{ A}$
 V_E quan $I = 0$?

Per a calcular la força electromotriu instantània V_E que correspon a un circuit de corrent altern, utilitzarem l'expressió següent, que ens dóna la seua variació respecte del temps,

$$V_E = V_{E,0} \cos(\omega t) \quad (1)$$

on $V_{E,0}$ és la força electromotriu màxima i ω la freqüència angular amb què canvia el sentit del corrent que circula pel circuit. Com veiem, ens cal conèixer $V_{E,0}$ i (ωt) .

Càlcul de $V_{E,0}$: A partir de la llei d'Ohm, obtenim que

$$V_{E,0} = I_0 |Z| \quad (2)$$

on I_0 és el corrent màxim i $|Z|$ és el mòdul de la impedància del circuit. Si considerem que el circuit està format per una autoinducció L , un condensador C i una resistència R en sèrie, tenim que

$$|Z| = \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right]^{1/2} = 439.98 \, \Omega \quad (3)$$

ja que la freqüència angular és $\omega = 2\pi\nu = 314.16$ rad/s. De manera anàloga al problema anterior, en aquest cas les reactàncies inductiva i capacitiva valen, respectivament, $X_L = \omega L = 62.83 \, \Omega$ i $X_C = 1/(\omega C) = 454.73 \, \Omega$.

La intensitat màxima de corrent està relacionada amb la intensitat eficaç per $I_0 = I_{\text{ef}}\sqrt{2} = 4.24$ A. De l'eq. (2), obtenim que el valor de la força electromotriu màxima del circuit és $V_{E,0} = 1865.52$ V.

Càlcul de (ωt) : Sabem que per al circuit de corrent altern la intensitat instantània de corrent és

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

on φ és el desfasament entre la força electromotriu i el corrent, i val

$$\varphi = \arctan \frac{[\omega L - 1/(\omega C)]}{R} = -62.96^\circ = -1.10 \text{ rad} \quad (5)$$

En el moment en què ens demanen la força electromotriu, V_E , s'ha de verificar que la intensitat de corrent siga nul·la, $I = 0$. Per tant, de l'eq. (4) obtenim

$$0 = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

i com que el corrent màxim no és nul, tindrem que

$$\cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad (7)$$

la qual cosa implica que

$$\omega t + \varphi = 90^\circ, 270^\circ, \dots = (2n + 1) 90^\circ \quad \text{on} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Com que el desfasament φ és conegut, eq. (5), podem obtenir ωt

$$\omega t = (2n + 1) 90^\circ + 62.96^\circ \quad \text{on} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

i a partir de l'eq. (1) podrem conèixer la força electromotriu en el moment demanat

$$V_E = 1865.52 \cos[(2n + 1) 90^\circ + 62.96^\circ] \quad (10)$$

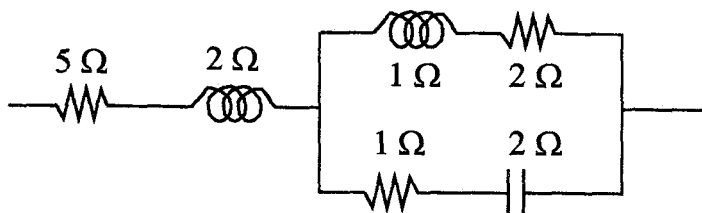
En el primer dels casos, quan $n = 0$, tenim que la força electromotriu instantània quan $I = 0$, val

$$V_{\mathcal{E}}(n = 0) = -1661.60 \text{ V} \quad (11)$$

Pot comprovar-se que la forma general del resultat per a la força electromotriu instantània quan $I = 0$ és

$$V_{\mathcal{E}} = (-1)^{n+1} 1661.60 \text{ V} \quad \text{on} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

14.4 En el circuit de la figura hi ha representades diverses resistències i reactàncies (totes expressades en ohms) connectades tal com s'indica. Calculeu la impedància total del circuit.



les dades del problema apareixen representades en la figura de l'enunciat impedància total del circuit?

Les úniques unitats que han d'aparèixer en aquest problema són ohms, ja que, en definitiva, només es tracta d'associar resistències i reactàncies. De manera que per a simplificar l'escriptura no escriurem les unitats en les expressions següents.

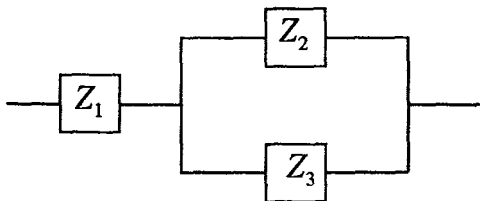


FIG. 1

El procediment de resolució d'aquest problema és anàleg al cas d'un circuit de corrent continu, però ara hem de tenir en compte que treballem amb impedàncies (que són quantitats complexes), ja que en el circuit de la figura de l'enunciat hi ha resistències, autoinduccions i capacitats.

Per a facilitar l'agrupació d'impedàncies en sèrie i en paral·lel, tornarem a dibuixar el circuit de l'enunciat segons representa la fig. 1, on hem agrupat les resistències, les impedàncies i les capacitats del circuit original en les impedàncies Z_1 , Z_2 i Z_3 , tal com s'esquemmatitza en la fig. 2.

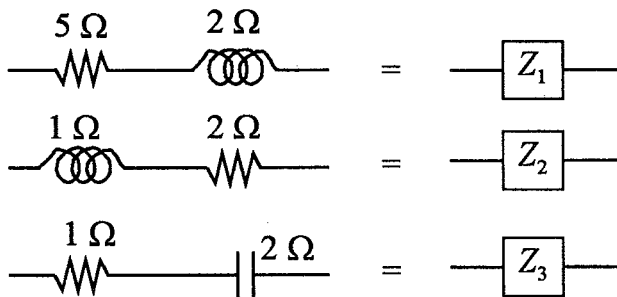


FIG. 2

Així, doncs, la primera associació que hem fet és la següent:

$$Z_1 = 5 + 2j \quad Z_2 = 2 + j \quad Z_3 = 1 - 2j \quad (1)$$

on hem tingut present el caràcter de resistència, reactància inductiva i/o reactància capacitiva de cada element del circuit. En la fig. 1 observem que les impedàncies Z_2 i Z_3 estan en paral·lel entre si i en sèrie amb la impedància Z_1 . En conseqüència, el pas següent és calcular la impedància equivalent Z_{23} a les impedàncies en paral·lel Z_2 i Z_3 . El procediment que hi cal seguir és idèntic al que es fa servir en el cas de circuits de corrent continu, on només hi ha resistències, però ara les resistències (quantitats reals) s'han de reemplaçar per les impedàncies (quantitats complexes)

$$\frac{1}{Z_{23}} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \quad \Rightarrow \quad Z_{23} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{4 - 3j}{3 - j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j \quad (2)$$

Ara, el circuit original (fig. 1) s'ha quedat reduït a dues impedàncies, Z_1 i Z_{23} , associades en sèrie (fig. 3). Per tant, la impedància equivalent, o impedància total del circuit original, serà la suma de les dues impedàncies en sèrie Z_1 i Z_{23}

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_{23} = (5 + 2j) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}j \right) = \frac{13}{2} + \frac{3}{2}j \quad (3)$$

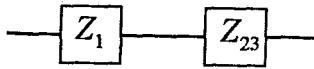
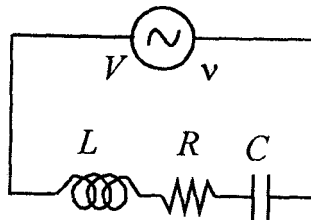


FIG. 3

Com podem apreciar, aquest problema es redueix, bàsicament, a un exercici amb nombres complexos.

14.5 Un circuit està format per una autoinducció ($L = 0.1$ H), una resistència ($R = 1000 \Omega$) i una capacitat determinada, totes connectades en sèrie. Si hi apliquem una tensió eficaç $V_{ef} = 1000$ V, amb $\nu = 2000$ Hz, calculeu: (a) el valor de la capacitat per tal que el corrent eficaç siga màxim, (b) la potència mitjana consumida pel circuit, i (c) el valor de la capacitat quan la potència mitjana siga $3/4$ de l'anterior.



$L = 0.1$ H, $R = 1000 \Omega$, $V_{ef} = 1000$ V, $\nu = 2000$ Hz

- (a) C per a I_{ef} màx?
 (b) potència mitjana, $\langle P \rangle$?
 (c) si $\langle P' \rangle = (3/4)\langle P \rangle$: C' ?

(a) La intensitat eficaç I_{ef} que circula per un circuit de corrent altern val

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{|Z|} \quad (1)$$

Per a un valor donat del potencial eficaç V_{ef} , aquesta I_{ef} serà màxima quan el mòdul de la impedància, $|Z|$, siga mínim, ja que es troba en el denominador,

$$I_{ef \text{ màx}} = \frac{V_{ef}}{|Z|_{\text{mín}}} \quad (2)$$

La impedància Z corresponent a una resistència R , una autoinducció L i una capacitat C associades en sèrie és

$$Z = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \quad (3)$$

El mòdul d'aquesta impedància val

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (4)$$

Per a R i L fixos, de l'eq. (4) es dedueix que $|Z|$ serà mínim quan

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (5)$$

D'aquesta expressió podem aïllar C , i, si tenim en compte que $\omega = 2\pi\nu$, escriurem la capacitat en termes de magnituds que són dades conegudes del problema

$$C = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 L} = 6.33 \cdot 10^{-8} \text{ F} \quad (6)$$

Aquest valor de la capacitat fa que siga màxim el corrent eficaç que passa pel circuit, el qual, segons les eqs. (1), (4) i (5), val $I_{ef \text{ màx}} = 1 \text{ A}$.

(b) L'expressió que proporciona la potència mitjana és

$$\langle P \rangle = I_{ef} V_{ef} \cos \varphi \quad (7)$$

i quan el corrent és màxim, $I_{ef \text{ màx}}$, el desfasament φ entre el corrent i la tensió és nul (ja que φ és l'argument de la impedància, la qual, segons les eqs. (4) i (5), és real en aquest cas). Així, doncs,

$$\langle P \rangle = I_{ef \text{ màx}} V_{ef} = 1 \text{ A} \cdot 1000 \text{ V} = 1000 \text{ W} \quad (8)$$

(c) Per a una altra potència mitjana $\langle P' \rangle$, escriurem

$$\langle P' \rangle = I'_{ef} V'_{ef} \cos \varphi' \quad (9)$$

Si canvia el valor de la capacitat, C' , també variarà el valor del mòdul de la impedància segons la relació

$$|Z'| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C'}\right)^2} \quad (10)$$

La tensió aplicada exteriorment sobre el circuit és la mateixa d'abans, per tant

$$V'_{ef} = V_{ef} \quad (11)$$

En canvi, el corrent i el desfasament ja no són els mateixos que teníem anteriorment, ja que

$$I'_{\text{ef}} = \frac{V'_{\text{ef}}}{|Z'|} \quad \cos \varphi' = \frac{R'}{|Z'|} \quad (12)$$

Encara que els valors de la tensió i de la resistència no hagen variat, $V'_{\text{ef}} = V_{\text{ef}}$ i $R' = R$, sí que s'ha modificat el valor de la impedància. Així, tenim

$$I'_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{ef}}}{|Z'|} \quad \cos \varphi' = \frac{R}{|Z'|} \quad (13)$$

En substituir les eqs. (13) dins de l'eq. (9) obtenim

$$\langle P' \rangle = \frac{V_{\text{ef}}^2}{|Z'|^2} R \quad (14)$$

i, segons l'enunciat, sabem que aquesta potència ha de ser 3/4 de la potència calculada en l'apartat anterior

$$\langle P' \rangle = \frac{3}{4} \langle P \rangle \quad (15)$$

Igualant les eqs. (14) i (15) i substituint l'expressió de $|Z'|$, eq. (10), tenim

$$\frac{V_{\text{ef}}^2}{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C')]^2} R = \frac{3}{4} \langle P \rangle \quad (16)$$

En l'eq. (16) són coneguts els valors de totes les magnituds que hi apareixen, excepte el de C' , que és el que volem calcular. Si fem un poc d'àlgebra en l'eq. (16), obtenim una equació de segon grau per a $1/C'$,

$$\frac{1}{C'^2} - 2\omega^2 L \frac{1}{C'} + \omega^4 L^2 + \omega^2 \left(R^2 - \frac{4V_{\text{ef}}^2 R}{3\langle P \rangle} \right) = 0 \quad (17)$$

En aïllar $1/C'$ de l'eq. (17), s'obté

$$\frac{1}{C'} = \omega \left(\omega L \pm \sqrt{\frac{4V_{\text{ef}}^2 R}{3\langle P \rangle} - R^2} \right) \quad (18)$$

Els dos valors que resulten per a C' són

$$C' = 1.17 \cdot 10^{-7} \text{ F} \quad (19)$$

i

$$C' = 4.34 \cdot 10^{-8} \text{ F} \quad (20)$$

Si substituïm aquests valors en la segona de les eqs. (13), obtindrem que el desfasament val $\varphi' = \pm 0.52$ rad. Si el desfasament és positiu, el corrent elèctric va darrere de la tensió i si el desfasament és negatiu, el corrent elèctric precedeix la tensió.

Com que el desfasament també pot calcular-se a partir de

$$\tan \varphi' = \frac{\omega L - 1/(\omega C')}{R} \quad (21)$$

és senzill comprovar que el cas $\varphi' = 0.52$ rad correspon a $C' = 1.17 \cdot 10^{-7}$ F i el cas $\varphi' = -0.52$ rad correspon a $C' = 4.34 \cdot 10^{-8}$ F, tal com representen les fig. 1a i 1b, respectivament.

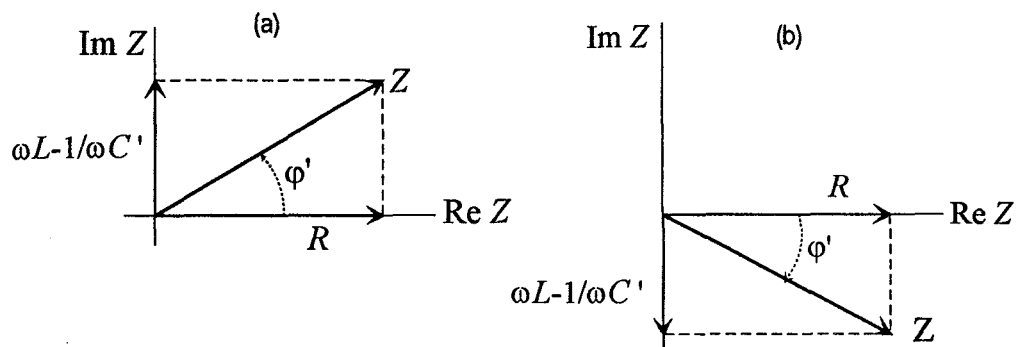


FIG. 1

15

Ones

15.1 L'equació d'una ona és $\Psi = 10 \sin[2\pi(2x - 100t)]$, on Ψ i x es mesuren en metres i t en segons. Calculeu: (a) l'amplitud, (b) la longitud d'ona, (c) la freqüència, (d) la velocitat de propagació, i (e) la direcció i el sentit de la propagació de l'ona. (f) Dibuixeu l'ona i indiqueu l'amplitud i la longitud d'ona. (g) Escriviu l'expressió corresponent a una ona que siga idèntica a l'anterior però que es propague en sentit oposat.

$$\Psi = 10 \sin[2\pi(2x - 100t)]$$

(a) Ψ_0 ?

(b) λ ?

(c) ν ?

(d) v ?

(e) \hat{v} ?

(f) dibuix de l'ona?

(g) ona en sentit oposat?

La descripció matemàtica del desplaçament Ψ d'una ona que viatja al llarg d'un eix qualsevol, per exemple, l'eix X , és de la forma

$$\Psi = \Psi_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] = \Psi_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \quad (1)$$

quan el sentit de la propagació és cap a les x positives. Si el sentit de propagació de l'ona fóra cap a les x negatives, l'expressió matemàtica de l'ona seria

$$\Psi = \Psi_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x + vt) \right] = \Psi_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) \right] \quad (2)$$

Els paràmetres que apareixen en les expressions (1) i (2) són:

– Ψ_0 , amplitud de l'ona: representa el valor màxim de la pertorbació del desplaçament associat a l'ona.

– λ , longitud d'ona: per a un instant donat, és la distància entre les crestes consecutives de l'ona (o entre qualsevol parell de valors successius de la coordenada x , de manera que els valors corresponents de l'ona siguin idèntics, i que també tinguin els mateixos valors els pendents de l'ona en aquests punts).

– v , velocitat de l'ona: és a dir, l'ona, com un tot es mou amb una velocitat v .

– T , període de l'ona: en un punt fix, representa l'interval de temps necessari perquè l'ona repetesca les mateixes característiques de desplaçament i de pendent del desplaçament.

Seguidament justificarem el que acabem de dir sobre el sentit de propagació de les ones representades per les expressions (1) i (2).

Si ens fixem en un valor determinat del desplaçament Ψ , el qual té lloc en certs valors de x i de t , podem preguntar-nos on trobarem el mateix valor de Ψ en un instant un poc posterior, $t + \Delta t$. Si anomenem $x + \Delta x$ aquesta nova posició, haurà de complir-se que

$$\Psi(x, t) = \Psi(x + \Delta x, t + \Delta t) \quad (3)$$

Per tant, de l'eq. (1) obtindríem que

$$\sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] = \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [(x + \Delta x) - v(t + \Delta t)] \right\} \quad (4)$$

En conseqüència, per tal que es verifiqui l'equació anterior, els valors de Δx i de Δt estaran relacionats per l'equació

$$\Delta x - v\Delta t = 0 \quad (5)$$

és a dir,

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (6)$$

i el que indica això és que l'ona està viatjant en la direcció positiva de l'eix X amb velocitat v , tal com representa la fig. 1. De la mateixa manera, a partir de les eqs. (2) i (3) obtenim que

$$v = -\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (7)$$

la qual cosa vol dir que aquesta ona es propagaria cap a les x negatives.

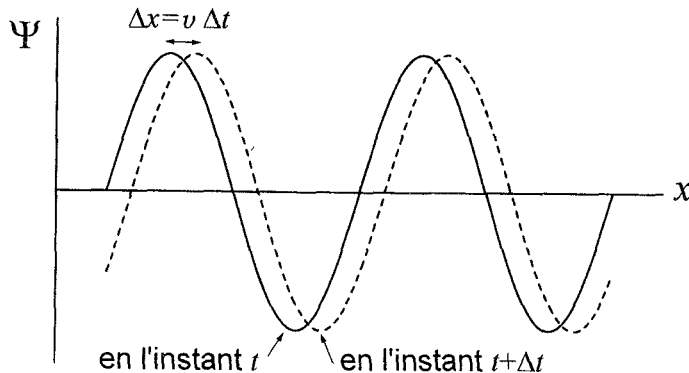


FIG. 1

Si l'ona viatjara al llarg d'un altre eix que no fóra l'eix X , caldria canviar la coordenada x per la coordenada corresponent a la direcció de propagació.

De tot el que hem dit abans i per comparació de l'expressió $\Psi = 10 \sin[2\pi(2x - 100t)]$ amb l'eq. (1), tenim que:

- (a) L'amplitud d'ona val $\Psi_0 = 10$ m.
- (b) La longitud de l'ona és $\lambda = 1/2$ m.
- (c) La freqüència és la inversa del període, per tant, $\nu = T^{-1} = (1/100)^{-1} \text{ s}^{-1} = 100$ Hz.
- (d) La velocitat de propagació de l'ona està relacionada amb la longitud d'ona i amb la freqüència per l'expressió

$$v = \lambda\nu = 50 \text{ m/s} \quad (8)$$

tal com pot deduir-se a partir de les dues expressions (1) i dels resultats previs.

(e) A partir de la discussió feta al principi del problema és fàcil adonar-se que l'ona $\Psi = 10 \sin[2\pi(2x - 100t)]$ es propaga segons el sentit positiu de l'eix X .

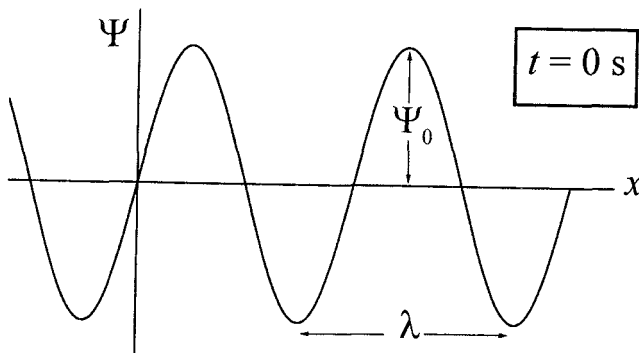


FIG. 2

(f) En la fig. 2 apareix representada l'ona en un instant determinat, corresponent a $t = 0$ s. Sobre la figura s'ha indicat la longitud d'ona, λ , i l'amplitud de l'ona, Ψ_0 .

(g) A partir de l'expressió (2), l'ona idèntica a la de l'enunciat del problema, però que es propaga cap a les x negatives, és

$$\Psi = 10 \sin[2\pi(2x + 100t)] \tag{9}$$

15.2 Un tub d'acer massís transmet ones longitudinals mitjançant un oscil·lador acoblat a un dels extrems. El diàmetre del tub és de 4 mm. L'amplitud de les oscil·lacions és de 0.1 mm i la freqüència és de 10 oscil·lacions per segon. Calculeu: (a) la forma de les ones que es propaguen al llarg del tub; (b) l'energia total mitjana per unitat de volum; (c) el flux mitjà d'energia, i (d) la potència mitjana requerida perquè l'oscil·lador produeixi les ones. El mòdul de Young i la densitat de l'acer són, respectivament, $Y_{\text{acer}} = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ i $\rho_{\text{acer}} = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.



$\Psi_0 = 0.1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}$, $\nu = 10 \text{ Hz}$, $d = 4 \text{ mm} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $Y_{\text{acer}} = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$,
 $\rho_{\text{acer}} = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

(a) expressió matemàtica de l'ona?

(b) energia/volum?

(c) energia mitjana/(temps·secció)?

(d) potència mitjana?

Farem tots el càlculs en el sistema internacional (SI) d'unitats.

(a) L'equació d'ones per al camp de deformacions longitudinals, Ψ , que es propaguen al llarg de l'eix X en una barra de mòdul de Young Y i densitat ρ , és

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (1)$$

La velocitat v de propagació de l'ona està relacionada amb les característiques Y i ρ del material que constitueix la barra mitjançant l'expressió

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (2)$$

La forma explícita de l'ona serà una solució de l'eq. (1) i vindrà donada per

$$\Psi = \Psi_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] = \Psi_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \quad (3)$$

on Ψ_0 , λ , v i T tenen el mateix significat que en el problema anterior.

El signe *menys* de l'argument del sinus que apareix a l'eq. (3) ha estat triat (en comptes d'un signe *més*) perquè considerarem que l'ona es propaga en el sentit de les x positives.

Els paràmetres que apareixen en qualsevol de les dues expressions de l'ona, eq. (3), són fàcils de calcular a partir de les dades de l'enunciat:

$$\Psi_0 = 10^{-4} \text{ m} \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ s} \quad (5)$$

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 5063.70 \text{ m/s} \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = 506.37 \text{ m} \quad (7)$$

L'expressió de l'ona serà (en unitats del SI)

$$\Psi = 10^{-4} \sin [2\pi (1.97 \cdot 10^{-3} x - 10t)] \quad (8)$$

(b) Les densitats d'energia cinètica i d'energia potencial són funcions periòdiques, com correspon a un moviment periòdic; però el valor mitjà de la densitat d'energia total (suma de les dues anteriors) d'una ona sinusoidal és proporcional al quadrat de l'amplitud de l'oscil·lació i al quadrat de la freqüència,

$$\bar{E} = 2\pi^2 \rho \nu^2 \Psi_0^2 \quad (9)$$

i, després de substituir valors numèrics, obtenim que $\bar{E} = 0.154 \text{ J/m}^3$.

(c) El flux mitjà representa l'energia mitjana que, en la unitat de temps, travessa la unitat d'àrea perpendicular a la direcció de propagació de l'ona,

$$I = \frac{d\bar{W}}{dt dA} \tag{10}$$

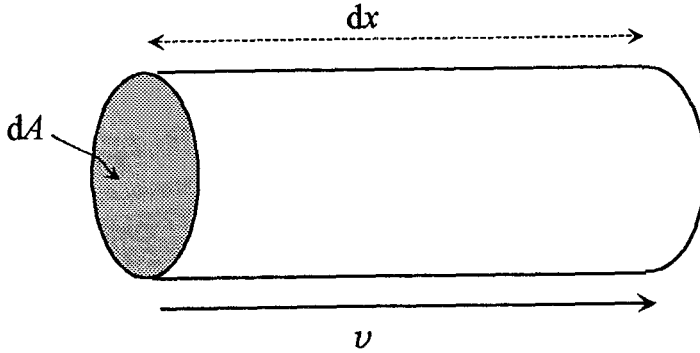


FIG. 1

Considerarem un element infinitesimal de volum, de forma cilíndrica, paral·lel a la direcció de propagació de l'ona (fig. 1). Tota l'energia mitjana continguda dins d'aquest travessa perpendicularment l'àrea dA en un temps $dt = dx/v$. A partir de la densitat d'energia i del volum del petit cilindre, $dV = dx dA$, l'energia mitjana que el travessa durant l'interval de temps dt serà

$$d\bar{W} = \bar{E} dV = \bar{E} dx dA = \bar{E} v dt dA \tag{11}$$

Per tant, després de substituir les eqs. (9) i (11) en l'eq. (10), obtenim que el flux d'energia mitjana és

$$I = \bar{E} v = 2\pi^2 \rho v^2 \Psi_0^2 v \tag{12}$$

i, després de substituir els valors numèrics de les dades, val $I = 779.64 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2}$,

El flux d'energia mitjana també s'anomena intensitat de l'ona. Com que la potència mitjana és $d\bar{W}/dt$, el flux d'energia o (la intensitat) representa la potència mitjana que l'ona transporta a través de la unitat de superfície, tal com es pot deduir a partir de l'eq. (10).

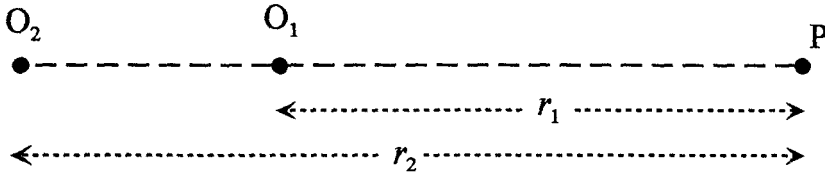
(d) La potència mitjana que l'oscil·lador ha de proporcionar per a mantenir les ones longitudinals del tub serà aquella que subministre la potència que l'ona transporta. Segons el que hem dit adés, la potència mitjana està relacionada amb la intensitat de l'ona i la superfície a través de la qual circula aquesta,

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = IS \tag{13}$$

i com que la superfície del cercle que forma la base del tub val $S = \pi r^2 = \pi(d/2)^2$, on d és el diàmetre del tub, després de substituir l'expressió (12), obtenim

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \bar{E} v \pi \frac{d^2}{4} = 9.80 \cdot 10^{-3} \text{ J s}^{-1} \tag{14}$$

15.3 Tenim dos focus sonors O_1 i O_2 que emeten ones de la mateixa freqüència ($\nu = 100$ Hz), les amplituds de les quals són 4 cm i 6 cm, respectivament. Determineu la llei de vibració en un punt P separat dels dos focus 100 m i 103.3 m, respectivament, tal com representa la figura adjunta. Supposeu que ambdós focus són síncrons (això és, que la diferència de fase és nul·la). La velocitat del so val 330 m/s.



focus sonor O_1 : $r_1 = 100$ m, $\nu_1 = 100$ Hz, $\Psi_{01} = 0.04$ m
 focus sonor O_2 : $r_2 = 103.3$ m, $\nu_2 = 100$ Hz, $\Psi_{02} = 0.06$ m
 diferència de fase: $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, $v = 330$ m/s
 ona que resulta en P?

Per tractar-se d'ones sonores en un medi isòtrop, tindrem ones esfèriques, la descripció matemàtica de les quals ve donada per l'equació

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{r} \cos \left[2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \quad (1)$$

on r és la distància des del focus sonor fins al punt on es fa el càlcul, t és el temps en què es fa el càlcul, Ψ_0 és l'amplitud de l'ona, λ és la longitud d'ona i T és el període de l'ona. Seguidament calcularem en el punt P el valor de cadascuna de les ones sonores emeses pels focus O_1 i O_2 , respectivament.

L'ona que va ser emesa pel focus sonor O_1 té el següent valor en el punt P

$$\Psi_1(P) = \frac{\Psi_{01}}{r_1} \cos \left[2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T_1} \right) \right] = \frac{\Psi_{01}}{r_1} \cos \left[2\pi \nu_1 \left(\frac{r_1}{v} - t \right) \right] \quad (2)$$

on la longitud d'ona està relacionada amb la freqüència i la velocitat de l'ona, $\lambda_1 = v/\nu_1 = 3.3$ m, i el període és $T_1 = 1/\nu_1 = 0.01$ s; v és la velocitat de l'ona, que en aquest cas és el so.

Anàlogament, per al focus sonor O_2 tindrem

$$\Psi_2(P) = \frac{\Psi_{02}}{r_2} \cos \left[2\pi \left(\frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{t}{T_2} \right) \right] = \frac{\Psi_{02}}{r_2} \cos \left[2\pi \nu_2 \left(\frac{r_2}{v} - t \right) \right] \quad (3)$$

on ara la longitud d'ona és $\lambda_2 = v/\nu_2 = 3.3$ m i el període és $T_2 = 1/\nu_2 = 0.01$ s. Cal notar que en les eqs. (2) i (3) hem emprat el mateix temps, t , perquè els càlculs en el

punt P es faran en el mateix instant, tant per a l'ona que prové del focus O_1 com per a l'ona que prové del focus O_2 . En canvi, les distàncies r_1 i r_2 que hi apareixen sí que són diferents, perquè el punt P es troba a diferents distàncies dels punts O_1 i O_2 .

En el punt P la vibració que resulta és descrita per la superposició de les dues ones sonores

$$\Psi(P) = \Psi_1(P) + \Psi_2(P) = \frac{\Psi_{01}}{r_1} \cos \left[2\pi\nu \left(\frac{r_1}{v} - t \right) \right] + \frac{\Psi_{02}}{r_2} \cos \left[2\pi\nu \left(\frac{r_2}{v} - t \right) \right] \quad (4)$$

En aquest resultat hem considerat que la freqüència i la velocitat són les mateixes per a les dues ones sonores. Notem que les distàncies entre els focus sonors i el punt P estan relacionades per $r_2 = r_1 + 3.3$ m, per tant

$$\frac{r_2}{v} = \frac{r_1}{v} + \frac{3.3}{v} = \frac{r_1}{v} + 0.01 \text{ s} \quad (5)$$

Això ens permet escriure el segon terme de l'eq. (4) tal com segueix

$$\cos \left[2\pi\nu \left(\frac{r_2}{v} - t \right) \right] = \cos \left[200\pi \left(\frac{r_1}{v} - t \right) + 2\pi \right] = \cos \left[200\pi \left(\frac{r_1}{v} - t \right) \right] \quad (6)$$

En l'última igualtat hem tingut en compte la periodicitat de la funció cosinus: $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$.

Si tornem a l'expressió de l'ona en el punt P, eq. (4), tenim que

$$\Psi(P) = \frac{\Psi_{01}}{r_1} \cos \left[200\pi \left(\frac{r_1}{v} - t \right) \right] + \frac{\Psi_{02}}{r_2} \cos \left[200\pi \left(\frac{r_1}{v} - t \right) \right] \quad (7)$$

i si substituïm valors, obtenim finalment

$$\Psi(P) = 9.8 \cdot 10^{-4} \cos \left[200\pi \left(\frac{10}{33} - t \right) \right] \quad (8)$$

en unitats del SI.

15.4 (a) Dues ones sonores, l'una en l'aire i l'altra en l'aigua, tenen la mateixa intensitat. Quin és el quocient entre les amplituds de l'ona en l'aigua i en l'aire, respectivament? (b) Quin seria el quocient de les seues intensitats si les amplituds de les ones de pressió foren les mateixes? (c) Quin és el nivell d'intensitat de l'ona en l'aire si la intensitat és $5 \cdot 10^{-5} \text{ W m}^{-2}$? (Dades: velocitat del so en l'aire: $v = 330 \text{ m/s}$; densitat de l'aire: $\rho_{\text{aire}} = 1.29 \text{ kg/m}^3$; velocitat del so en l'aigua: $V = 1500 \text{ m/s}$; densitat de l'aigua: $\rho_{\text{aigua}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$).

ones sonores $\left\{ \begin{array}{l} \text{aire: } v = 330 \text{ m/s, } \rho_{\text{aire}} = 1.29 \text{ kg/m}^3 \\ \text{aigua: } V = 1500 \text{ m/s, } \rho_{\text{aigua}} = 10^3 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right.$

(a) si $I_{\text{aire}} = I_{\text{aigua}}$: $\Psi_{0,\text{aire}}/\Psi_{0,\text{aigua}}$?

(b) si $P_{0,\text{aire}} = P_{0,\text{aigua}}$: $I_{\text{aire}}/I_{\text{aigua}}$?

(c) si $I_{\text{aire}} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$: $B(\text{dB})$?

(a) Per a determinar la relació entre la intensitat I de l'ona sonora i l'amplitud del desplaçament de l'ona, hem d'utilitzar la relació següent

$$I = \frac{P_0^2}{2\rho v} \quad (1)$$

on P_0 és l'amplitud de l'ona de pressió associada a l'ona sonora i val $P_0 = 2\pi v \rho \nu \Psi_0$, Ψ_0 és l'amplitud de les ones de desplaçament, v és la velocitat de propagació de l'ona, ν és la freqüència de l'ona i ρ és la densitat del medi on es propaga l'ona. De les expressions anteriors podem aïllar Ψ_0 i obtenir que el quocient entre les amplituds de l'ona en l'aigua i en l'aire val

$$\frac{\Psi_{0,\text{aigua}}}{\Psi_{0,\text{aire}}} = \frac{\sqrt{2V\rho_{\text{aigua}} I_{\text{aigua}} / (2\pi V\rho_{\text{aigua}} \nu_{\text{aigua}})}}{\sqrt{2v\rho_{\text{aire}} I_{\text{aire}} / (2\pi v\rho_{\text{aire}} \nu_{\text{aire}})}} = \left(\frac{\rho_{\text{aire}} v}{\rho_{\text{aigua}} V} \right)^{1/2} \left(\frac{I_{\text{aigua}}}{I_{\text{aire}}} \right)^{1/2} \quad (2)$$

En l'expressió anterior hem tingut en compte que la freqüència d'una ona no canvia en passar d'un medi a un altre, per això hem considerat que $\nu_{\text{aigua}} = \nu_{\text{aire}}$. Si utilitzem el fet que, tal com diu l'enunciat, la intensitat de les dues ones és la mateixa, $I_{\text{aire}} = I_{\text{aigua}}$, tindrem finalment

$$\frac{\Psi_{0,\text{aigua}}}{\Psi_{0,\text{aire}}} = \left(\frac{\rho_{\text{aire}} v}{\rho_{\text{aigua}} V} \right)^{1/2} = 1.68 \cdot 10^{-2} \quad (3)$$

És a dir, l'amplitud de les oscil·lacions sonores és menor en l'aigua que en l'aire.

(b) Si fem servir la relació (1) per a calcular el quocient de les intensitats de les ones en l'aigua i en l'aire, tindrem

$$\frac{I_{\text{aigua}}}{I_{\text{aire}}} = \frac{P_{0,\text{aigua}}^2 / (2V\rho_{\text{aigua}})}{P_{0,\text{aire}}^2 / (2v\rho_{\text{aire}})} = \frac{v\rho_{\text{aire}}}{V\rho_{\text{aigua}}} \left(\frac{P_{0,\text{aigua}}}{P_{0,\text{aire}}} \right)^2 \quad (4)$$

Segons l'enunciat, ara les amplituds de les ones de pressió són les mateixes, $P_{0,\text{aire}} = P_{0,\text{aigua}}$, per això podem simplificar l'expressió anterior i tindrem

$$\frac{I_{\text{aigua}}}{I_{\text{aire}}} = \frac{v\rho_{\text{aire}}}{V\rho_{\text{aigua}}} = 2.84 \cdot 10^{-4} \quad (5)$$

(c) Com que en acústica hi ha un rang molt ampli de valors de la intensitat sonora (pot arribar a abastar diverses potències de 10), en la pràctica es fa servir una magnitud logarítmica associada a la intensitat. D'aquesta manera, es defineix el *nivell d'intensitat* (mesurat en decibels, dB) d'una ona com

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (6)$$

on I és la intensitat de l'ona i I_0 és una intensitat de referència. Per al so, es pren el nivell de referència de la intensitat de l'ona com $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$, que és de l'ordre de magnitud de la intensitat mínima audible. Si substituïm valors en el nostre cas, obtenim que el nivell d'intensitat de l'ona en l'aire és

$$B = 10 \log \left(\frac{5 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}} \right) = 76.99 \text{ dB} \quad (7)$$

15.5 Dues ones de les mateixes amplitud i velocitat, però de freqüències 1100 Hz i 1000 Hz, respectivament, viatgen en la mateixa direcció amb una velocitat de 10 m/s. (a) Escriviu les expressions corresponents a cada ona i l'expressió de la suma d'ambdues. Feu un dibuix de l'ona resultant. (b) Repetiu els càlculs anteriors quan una de les ones té una amplitud doble que l'altra.

$$v_1 = v_2 = 10 \text{ m/s}, \nu_1 = 1100 \text{ Hz}, \nu_2 = 1000 \text{ Hz}$$

les dues ones viatgen en la mateixa direcció

(a) $\Psi_{01} = \Psi_{02}$: expressió de cada ona i expressió de la suma d'ones?

(b) $\Psi_{01} = 2\Psi_{02}$: expressió de cada ona i expressió de la suma d'ones?

Suposarem que les ones viatgen en el sentit positiu de l'eix X . En aquest cas, l'expressió genèrica d'una ona ve donada per

$$\Psi = \Psi_0 \sin(kx - \omega t) \tag{1}$$

on Ψ_0 és l'amplitud, k el nombre d'ona i ω la freqüència angular de l'ona. A partir de les relacions entre la freqüència angular ω i la freqüència de l'ona ν ($\omega = 2\pi\nu$), el nombre d'ona k i la longitud d'ona λ ($k = 2\pi/\lambda$), la longitud d'ona λ , la velocitat de propagació v i la freqüència de l'ona ν ($\lambda = v/\nu$), i les dades del problema, calcularem la longitud d'ona λ , el nombre d'ona k i la freqüència angular ω de cada ona.

$$\lambda_1 = 9.09 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad k_1 = 220 \pi \text{ m}^{-1} \quad \omega_1 = 2200 \pi \text{ rad s}^{-1} \tag{2}$$

$$\lambda_2 = 10^{-2} \text{ m} \quad k_2 = 200 \pi \text{ m}^{-1} \quad \omega_2 = 2000 \pi \text{ rad s}^{-1} \tag{3}$$

(a) Per a dues ones amb amplituds iguals, $\Psi_{01} = \Psi_{02} = \Psi_0$, l'expressió de les ones, segons l'eq. (1), serà

$$\Psi_1 = \Psi_0 \sin(k_1x - \omega_1t) = \Psi_0 \sin(220\pi x - 2200\pi t) \tag{4}$$

$$\Psi_2 = \Psi_0 \sin(k_2x - \omega_2t) = \Psi_0 \sin(200\pi x - 2000\pi t) \tag{5}$$

En la fig. 1 apareixen les representacions gràfiques de les dues ones, Ψ_1 i Ψ_2 . Per comoditat, hem suposat que l'amplitud Ψ_0 val 1 m i hem representat les ones en l'instant $t = 0$ s.

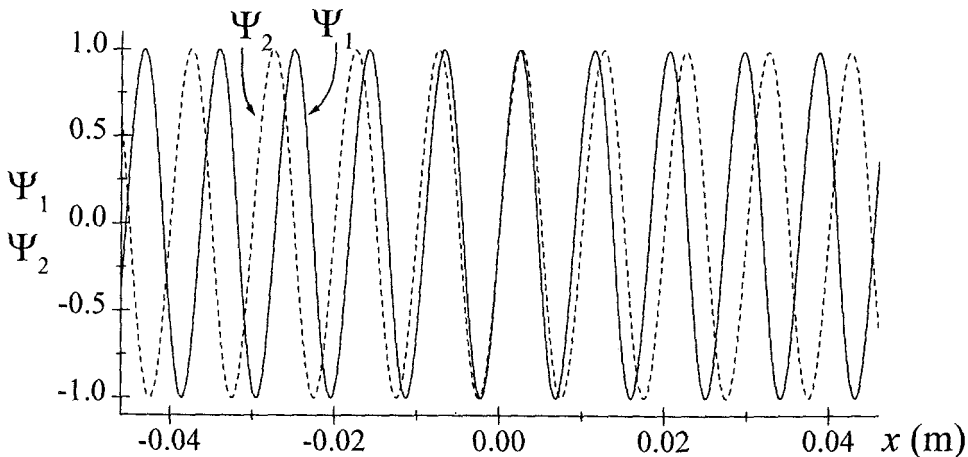


FIG. 1

L'expressió corresponent a la suma de les dues ones Ψ_1 i Ψ_2 serà, pel principi de superposició,

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = \Psi_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t) + \Psi_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t) \quad (6)$$

Si tenim en compte la relació trigonomètrica

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7)$$

obtenim que l'ona resultant és

$$\Psi = 2\Psi_0 \cos \left\{ \frac{1}{2} [(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t] \right\} \cdot \sin \left\{ \frac{1}{2} [(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t] \right\} \quad (8)$$

que és l'expressió d'una ona (compareu-la amb l'eq. (1)) amb freqüència angular $(\omega_1 + \omega_2)/2$ i nombre d'ona $(k_1 + k_2)/2$. L'amplitud d'aquesta ona composta serà tot allò que precedeix la funció sinus, en analogia amb l'eq. (1). Aquesta amplitud la representarem per A i val

$$A = 2\Psi_0 \cos \left\{ \frac{(k_1 - k_2)}{2} x - \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t \right\} \quad (9)$$

que és una amplitud oscil·lant, dependent dels valors de l'espai x i del temps t en què es calcula; en aquest cas se'n diu que l'amplitud del moviment està modulada. Aquesta situació és més notable quan els nombres d'ona de les dues ones són molt semblants, $k_1 \simeq k_2$, i les freqüències angulars també, $\omega_1 \simeq \omega_2$, com passa en el nostre cas. Això fa que observem unes fluctuacions en la intensitat de l'ona resultant, anomenades pulsacions, que són degudes al canvi en l'amplitud del moviment oscil·latori resultant.

Com que el nombre d'ona de l'envolupant (la pulsació) val $K = (k_1 - k_2)/2 = 10\pi \text{ m}^{-1}$, la longitud d'ona de la pulsació serà $\Lambda = 2\pi/K = 0.2 \text{ m}$, la seua freqüència angular és $\Omega = (\omega_1 - \omega_2)/2 = 100\pi \text{ rad/s} = 314.16 \text{ rad/s}$ i la velocitat de grup valdrà $v_{\text{grup}} = \Delta\omega/\Delta k = (\omega_1 - \omega_2)/(k_1 - k_2) = 10 \text{ m/s}$.

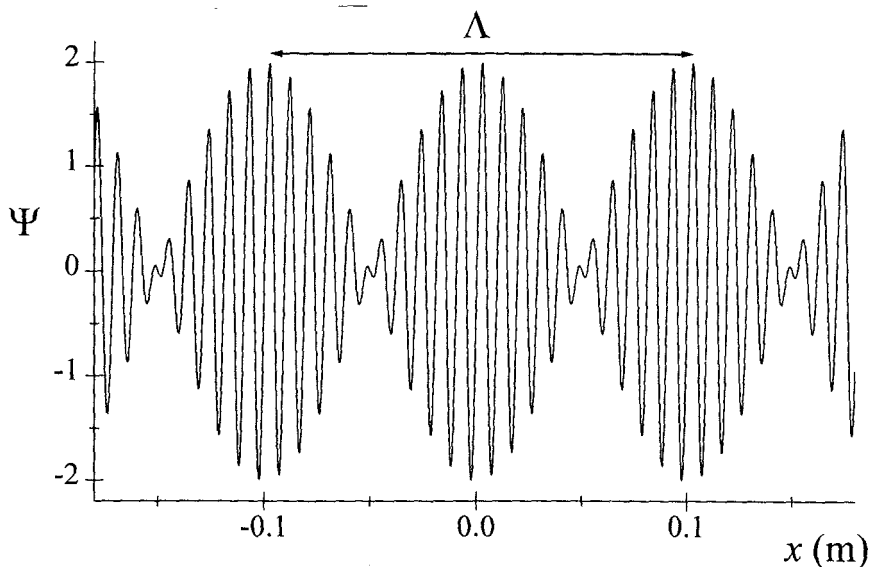


FIG. 2

En la fig. 2 representem, segons l'eq. (8), la suma de les ones $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, d'igual amplitud, per a l'instant $t = 0$ s i prenent $\Psi_0 = 1$ m per simplificar.

(b) Ara, l'amplitud d'una ona és doble que l'altra, és a dir, $\Psi_{01} = 2\Psi_{02} = 2\Psi_0$. Les expressions de les ones, a partir de les eqs. (1), (2) i (3), seran

$$\Psi_1 = 2\Psi_0 \sin(k_1x - \omega_1t) = 2\Psi_0 \sin(220\pi x - 2200\pi t) \quad (10)$$

$$\Psi_2 = \Psi_0 \sin(k_2x - \omega_2t) = \Psi_0 \sin(200\pi x - 2000\pi t) \quad (11)$$

De nou, pel principi de superposició, la suma de les dues ones, Ψ , serà

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 = 2\Psi_0 \sin(k_1x - \omega_1t) + \Psi_0 \sin(k_2x - \omega_2t) \\ &= \Psi_0 [\sin(k_1x - \omega_1t) + \sin(k_1x - \omega_1t) + \sin(k_2x - \omega_2t)] \end{aligned} \quad (12)$$

Si en els dos últims termes d'aquesta equació apliquem la relació trigonomètrica representada per l'eq. (7), tindrem

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 \left\{ \sin(k_1x - \omega_1t) + \right. \\ &\left. + 2 \cos \left\{ \frac{1}{2} [(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t] \right\} \cdot \sin \left\{ \frac{1}{2} [(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Si considerem que, igual que abans, els nombres d'ona i les freqüències angulars de les dues ones són molt semblants ($k_1 \simeq k_2$ i $\omega_1 \simeq \omega_2$), farem l'aproximació $k_1 + k_2 \simeq 2k_1$ i $\omega_1 + \omega_2 \simeq 2\omega_1$. Així, obtindrem que la suma de les dues ones val

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 \left\{ \sin(k_1x - \omega_1t) + 2 \cos \left\{ \frac{1}{2} [(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t] \right\} \cdot \sin(k_1x - \omega_1t) \right\} \\ &= \Psi_0 \sin(k_1x - \omega_1t) \cdot \left\{ 1 + 2 \cos \left\{ \frac{1}{2} [(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

Representant gràficament l'eq. (14), és a dir, la suma de les dues ones de diferent amplitud, obtenim pulsacions, que, igual que en el cas anterior, són degudes a la modulació de l'amplitud. En la fig. 3 apareix representada la suma Ψ per a l'instant $t = 0$ s i en el cas en què $\Psi_0 = 1$ m.

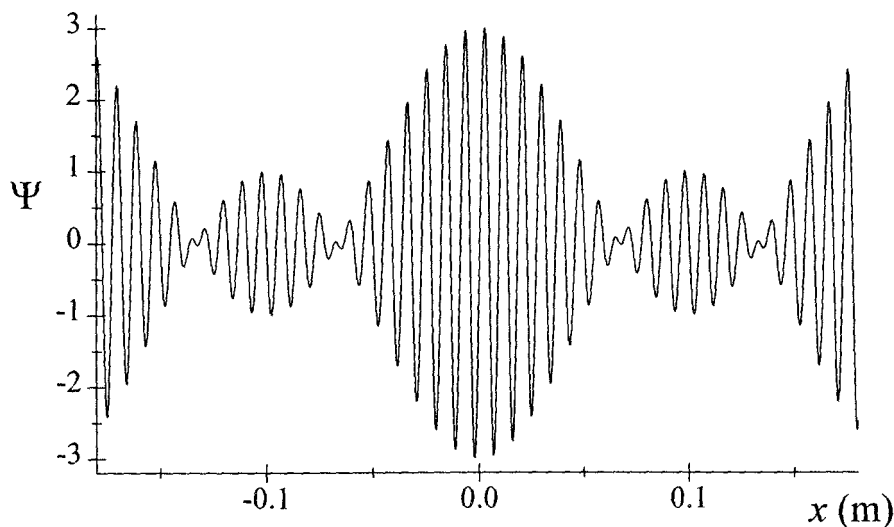


FIG. 3

15.6 Dos moviments ondulatoris de la mateixa longitud d'ona, $\lambda = 35$ cm, i de la mateixa amplitud, es propaguen en la mateixa direcció i amb idèntica velocitat, però amb una diferència de marxa de 15 cm. (a) Quant val l'amplitud de l'ona resultant? (b) Quant val, al cap de mig període, el desplaçament d'un punt que dista 7 cm de l'origen?

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 35 \text{ cm}, \Psi_{01} = \Psi_{02}, v_1 = v_2$$

propagació al llarg de la mateixa direcció, diferència de marxa = 15 cm

(a) amplitud de l'ona resultant?

(b) desplaçament en $x = 7$ cm i $t = T/2$?

La descripció del desplaçament que correspon a un moviment ondulatori que viatja sobre la recta corresponent a l'eix X és

$$\Psi = \Psi_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \quad (1)$$

on Ψ_0 és l'amplitud, λ és la longitud d'ona i T és el període de l'ona; x i t representen, respectivament, el lloc i l'instant en què es vol calcular el desplaçament Ψ .

L'eq. (1) representa el cas en què el desplaçament és zero en un punt que prenem com a origen de coordenades ($x = 0$ cm) i en un instant que prenem com a origen de temps ($t = 0$ s). Si en aqueixes condicions el desplaçament d'una altra ona no fóra nul, caldria afegir una diferència de fase respecte del moviment de la primera ona dins l'argument de la funció sinus en l'eq. (1).

En el problema que ens ocupa tenim dues ones: l'una, Ψ_1 , que podem descriure tal com es fa en l'eq. (1), i l'altra, Ψ_2 , que té un retard de 15 cm respecte de la primera. En altres paraules, el valor de la segona ona en un punt i un instant qualsevol ha de coincidir

amb el valor que té la primera ona en el mateix instant, però en un punt que està situat 15 cm per davant. Si, per simplificar, prenem l'instant $t = 0$ s i volem conèixer el valor de la segona ona en el punt $x = 0$ cm, aquest haurà de coincidir amb el valor de la primera ona en el punt $x = 15$ cm, tal com representa la fig. 1. Per a poder dibuixar les ones, d'ara endavant farem $\Psi_0 = 1$.

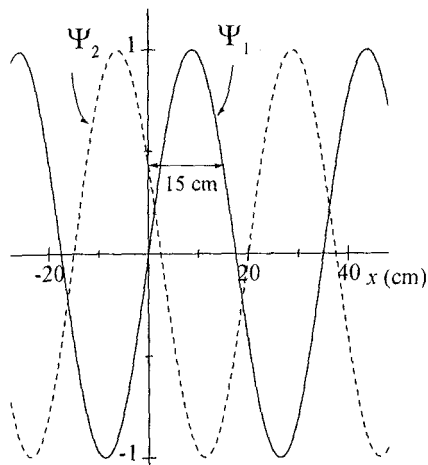


FIG. 1

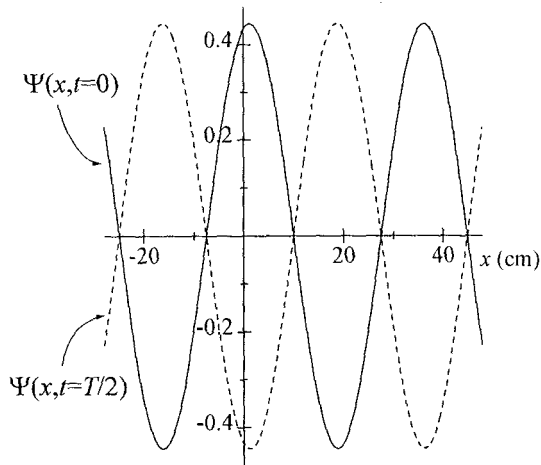


FIG. 2

Segons el que hem discutit abans, l'eq. (1) sense cap fase descriu l'ona Ψ_1 , però per a descriure l'ona Ψ_2 representada en la fig. 1a s'hi ha d'incorporar una fase:

$$\Psi_1 = \Psi_{01} \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{t}{T_1} \right) \right] \tag{2}$$

$$\Psi_2 = \Psi_{02} \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda_2} - \frac{t}{T_2} \right) + \varphi \right] \tag{3}$$

φ representa la diferència de fase entre les dues ones. En les expressions anteriors, els subíndexs 1 i 2 es refereixen a la primera i a la segona ona, respectivament. En la fig. 1 hem representat Ψ_1 i Ψ_2 quan $t = 0$ s.

Seguidament calcularem aquesta diferència de fase. Per a fer-ho ens fixem en la fig. 1a i tenim en compte el que hem dit abans: en l'instant $t = 0$ s el valor de la segona ona en el punt $x = 0$ cm ha de coincidir amb el valor de la primera ona en el punt $x = 15$ cm

$$\Psi_{02} \sin \left[2\pi \left(\frac{0}{\lambda_2} - \frac{0}{T_2} \right) + \varphi \right] = \Psi_{01} \sin \left[2\pi \left(\frac{15}{\lambda_1} - \frac{0}{T_1} \right) \right] \tag{4}$$

Com que en el nostre cas sabem que les amplituds, les longituds d'ona i les velocitats d'ambdues ones són iguals, això significa que els períodes respectius també són iguals, ja que $T = \lambda/v$; és a dir, $\Psi_{01} = \Psi_{02} = \Psi_0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $v_1 = v_2 = v$, $T_1 = T_2 = T$. Segons això, de l'eq. (4) es dedueix que $\varphi = 2\pi \cdot 15 \text{ cm}/\lambda = 6\pi/7$.

Tota la discussió anterior l'hem feta a força de considerar la posició inicial $x = 0$ cm de l'ona Ψ_2 i la posició $x = 15$ cm de l'ona Ψ_1 , ambdues per a l'instant inicial, $t = 0$ s. Hem fet això per simplificar, però també podríem haver fet l'estimació de φ fixant-nos en el desplaçament en qualsevol punt de l'ona Ψ_2 i comparant-lo amb el desplaçament en la posició de l'ona Ψ_1 en un punt que es trobe 15 cm (diferència de marxa) per davant del primer punt (tot això en el mateix instant de temps, que no cal que siga l'instant inicial, necessàriament),

$$\Psi_{01} \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{t}{T_1} \right) + \varphi \right] = \Psi_{02} \sin \left[2\pi \left(\frac{x + \text{diferència de marxa}}{\lambda_2} - \frac{t}{T_2} \right) \right] \quad (5)$$

Si tenim en compte que les característiques d'ambdues ones (Ψ_0, λ, T) són iguals, d'aquesta equació es dedueix que

$$\varphi = \frac{2\pi \cdot \text{diferència de marxa}}{\lambda} \quad (6)$$

En definitiva, trobem la mateixa diferència de fase que trobàvem abans,

$$\varphi = \frac{2\pi \cdot 15 \text{ cm}}{\lambda} = \frac{6\pi}{7} \quad (7)$$

(a) Pel principi de superposició, el desplaçament en un punt sotmés a dos moviments ondulatoris serà el desplaçament corresponent al moviment ondulatori suma dels dos originals: $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. A partir de les eqs. (2) i (3) i dels valors que coneixem per a les longituds d'ona, els períodes i la diferència de fase, escriurem

$$\Psi = \Psi_0 \left\{ \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] + \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \frac{6\pi}{7} \right] \right\} \quad (8)$$

A més a més, com que per trigonometria es verifica que

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left[\frac{1}{2} (\alpha + \beta) \right] \cdot \cos \left[\frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right] \quad (9)$$

podem utilitzar aquesta relació en l'equació anterior i ens queda

$$\Psi = 2\Psi_0 \cos \left(\frac{3\pi}{7} \right) \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \frac{3\pi}{7} \right] \quad (10)$$

En allò que es refereix a la variació del desplaçament amb la posició i el temps, aquesta equació és de la forma representada en l'eq. (3), -o en l'eq. (1), però amb una fase no nul·la. El terme que precedeix la funció sinus és l'amplitud, de manera que podem dir que el moviment resultant de la superposició dels dos moviments ondulatoris originals és un altre moviment ondulatori amb la mateixa longitud d'ona i el mateix període que els originals -tal com s'observa en l'eq. (10)- i la seua amplitud val

$$\text{amplitud del moviment resultant} = 2\Psi_0 \cos \left(\frac{3\pi}{7} \right) = 0.445 \Psi_0 \quad (11)$$

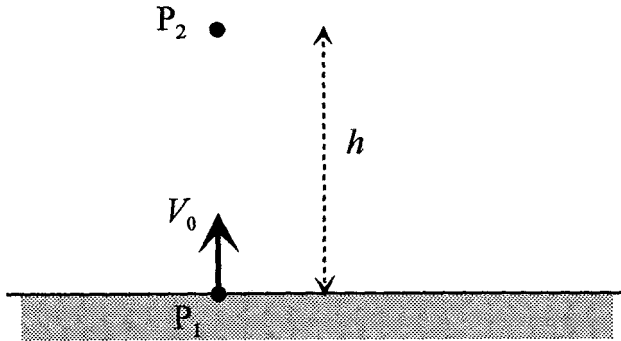
Aquesta amplitud és menor que l'amplitud de cadascun dels dos moviments ondulatoris separatament.

(b) A 7 cm de l'origen i després de transcórrer mig període des de l'inici dels moviments, en substituir $x = 7$ cm i $t = T/2$ en l'eq. (10), obtenim

$$\Psi = 2\Psi_0 \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) \sin\left(\frac{-6\pi}{35}\right) = -0.228 \Psi_0 \quad (12)$$

En la fig. 2 hem representat l'ona resultant en els instants $t = 0$ i $t = T/2$.

15.7 Una persona llança des de terra una sirena, amb una velocitat vertical cap amunt de 100 m/s. Quina serà la relació entre les freqüències dels sons percebuts per la persona que llança la sirena i per una altra persona a 510.20 m d'altura sobre la mateixa vertical del llançament: (a) durant l'ascens i (b) durant el descens de la sirena? (c) Feu la representació gràfica del quocient de freqüències en funció del temps, des que es llança la sirena fins que cau a terra. (d) En quin instant serà màxim aquest quocient?



$h = 510.20$ m, $V_0 = 100$ m/s, sirena de freqüència ν
 velocitat del so: $v = 330$ m/s

- (a) (ν_1/ν_2) per a l'ascens de la sirena?
- (b) (ν_1/ν_2) per al descens de la sirena?
- (c) representació gràfica de ν_1/ν_2 en funció del temps
- (d) (ν_1/ν_2) màxim?

Quan una font de so, de freqüència ν , i un observador es troben en moviment relatiu, la freqüència ν' detectada per l'observador és diferent de la freqüència tal com l'emet la font. Per l'efecte Doppler, aquesta freqüència val²⁷

$$\nu' = \nu \frac{v \pm |v_O|}{v \pm |v_E|} \quad (1)$$

on ν és la freqüència de l'emissor, v_E és la velocitat de l'emissor, v_O és la velocitat de l'observador, i v és la velocitat de l'ona, totes respecte del medi en què es propaga l'ona ($v = 330$ m/s en el cas del so en l'aire). Notem que les velocitats que apareixen

²⁷En l'article de R. Morehouse titulat "Doppler-Effect Equations" i publicat en *The Physics Teacher* 35 (1997) 509, es discuteix sobre la forma d'escriure d'una manera compacta l'equació per a l'efecte Doppler.

en l'expressió de l'efecte Doppler, eq. (1), es consideren en valor absolut (magnitud de la velocitat, sense signe); ara bé, caldrà tenir en compte el sentit del moviment relatiu (allunyament o apropament) entre l'observador i l'emissor, per a l'elecció dels signes que hauran de precedir $|v_O|$ i $|v_E|$ en l'eq. (1). Discutirem tot això seguidament.

(a) Cas en què la sirena puja: La persona que llança la sirena està en repòs sobre el terra (situada en el punt 1 de la figura de l'enunciat); per això, en aquest cas la velocitat de l'observador és nul·la, $v_{O,1} = 0$ m/s. Segons l'eq. (1), la freqüència ν_1 que sent la persona en el punt 1 serà

$$\nu_1 = \nu \frac{v \pm |v_{O,1}|}{v \pm |v_E|} = \nu \frac{v}{v \pm |v_E|} \quad (2)$$

on ν és la freqüència emesa per la sirena, $v_E = V_0 - gt$ és la velocitat de la font de so (és a dir, la sirena emissora) i correspon a la d'un cos que puja contra el camp gravitatori amb velocitat inicial V_0 .

Arribats en aquest punt convé tenir en compte si la font s'allunya o s'acosta a l'observador. Com que la font s'allunya de l'observador situat en el punt 1, la longitud d'ona λ que aquest percep augmenta en relació amb la de l'ona emesa per la font, per tant, la freqüència que es nota en el punt 1 disminueix, ja que $\lambda = v/\nu$ i la velocitat v del so és constant, és a dir, $\nu_1 < \nu$. Per tot això, el signe que correspon posar davant de $|v_E|$ en el denominador de l'eq. (2) és positiu, ja que així $(v + |v_E|) > v$, i aquesta equació s'escriurà (en el cas en què l'emissor i el receptor s'allunyen) com

$$\nu_1 = \nu \frac{v}{v + |v_E|} = \nu \frac{v}{v + V_0 - gt} \quad (3)$$

on hem tingut en compte que la velocitat de l'emissor v_E és positiva.

La freqüència sentida per la persona situada a una altura h (punt 2 en la figura de l'enunciat), que també es troba en repòs, serà

$$\nu_2 = \nu \frac{v \pm |v_{O,2}|}{v \pm |v_E|} = \nu \frac{v}{v \pm |v_E|} \quad (4)$$

ja que, com en l'eq. (2), $v_{O,2} = 0$ m/s. Recordem que estem en el cas d'ascens de la sirena, de manera que la velocitat de la sirena és la mateixa que abans, $v_E = V_0 - gt$.

Però, s'acosta sempre o s'allunya en cap moment la font emissora respecte del punt 2? Per a contestar aquesta pregunta veurem fins on puja la sirena, que és fins que la seua velocitat siga nul·la i, llavors, tornarà a caure. Si apliquem la relació de cinemàtica $v_f^2 = v_i^2 + 2as$, on la velocitat final és $v_f = 0$ m/s, la velocitat inicial és $v_i = V_0 = 100$ m/s, i l'acceleració és $a = -g$, tindrem que l'espai recorregut per la sirena durant l'ascens és $s = v_i^2 / (2g) = 510.20$ m. És a dir, la sirena puja fins a l'altura de l'observador situat en el punt 2, però no el sobrepassa.

Per això la sirena sempre s'acosta al punt 2 en el moviment d'ascens, per tant, la longitud d'ona que percebrà l'observador en el punt 2 serà menor que la de l'ona emesa per la sirena, i això, per analogia amb el cas previ, vol dir que $\nu_2 > \nu$, la qual cosa correspon a un denominador en l'eq. (4) que siga menor que la velocitat del so, v . És a dir, cal posar el signe menys davant de $|v_E|$ en el denominador, ja que d'aquesta manera

$(v - |v_E|) < v$. Així, en l'ascens de la sirena, l'observador situat en el punt 2 percebrà una freqüència

$$\nu_2 = \nu \frac{v}{v - |v_E|} = \nu \frac{v}{v - V_0 + gt} \quad (5)$$

on, igualment que en l'eq. (3), hem tingut en compte que durant l'ascens v_E és positiva.

A partir de les eqs. (3) i (5), la relació entre les freqüències sentides pels observadors situats en els punts 1 i 2 durant l'ascens de la sirena és

$$\left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)_{\text{ascens}} = \frac{v - V_0 + gt}{v + V_0 - gt} \quad (6)$$

És fàcil obtenir el temps d'ascens de la sirena a partir de l'expressió $v_f = v_i + at$, i com que $v_f = 0$ m/s (quan arriba dalt del tot, està en repòs), $v_i = V_0 = 100$ m/s i $a = -g$ (el moviment és en sentit contrari a l'acceleració causada per la gravetat), tindrem que $t_{\text{ascens}} = 100/9.8 = 10.2$ s.

(b) Cas en què la sirena baixa: El tractament ara és anàleg al cas d'ascens. Si mantenim l'origen de temps amb l'instant en què va a ser llançada la sirena des de terra, la velocitat d'aquesta pot escriure's ara com

$$v_E = V_0 - gt \quad (7)$$

que, per a un temps $t > t_{\text{ascens}}$, dóna una v_E negativa, és a dir, representa correctament el descens de la sirena emissora de so.

Tenint en compte que durant el descens la sirena s'acosta a l'observador, en el punt 1, la freqüència sentida per aquest és ara

$$\nu_1 = \nu \frac{v}{v - |v_E|} \quad (8)$$

i la freqüència sentida per l'observador en el punt 2 (del qual s'allunya la sirena) és ara

$$\nu_2 = \nu \frac{v}{v + |v_E|} \quad (9)$$

Si tenim en compte que per a $t > t_{\text{ascens}}$, com correspon al cas de descens, $v_E < 0$, podríem substituir $|v_E|$ per $-v_E$ en les eqs. (8) i (9) i obtindríem

$$\nu_1 = \nu \frac{v}{v + V_0 - gt} \quad (10)$$

i

$$\nu_2 = \nu \frac{v}{v - V_0 + gt} \quad (11)$$

per a $t > t_{\text{ascens}}$. En definitiva, la relació entre les freqüències dels dos observadors en els punts 1 i 2 és ara

$$\left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)_{\text{descens}} = \frac{v - V_0 + gt}{v + V_0 - gt} \quad (12)$$

És molt senzill comprovar que el temps de descens de la sirena és el mateix que el temps d'ascens, $t_{\text{ascens}} = t_{\text{descens}}$.

(c) En la fig. 1 hem dibuixat el quocient de les freqüències (ν_1/ν_2) en funció del temps.

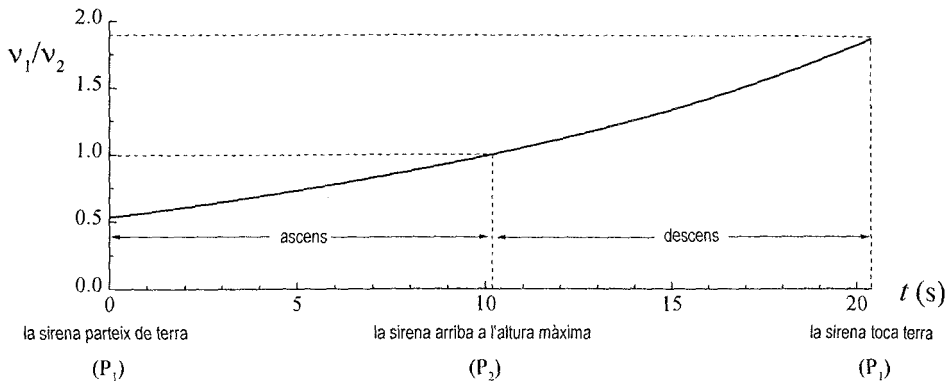


FIG. 1

(d) En la representació gràfica (fig. 1) es veu que el mínim del quocient ν_1/ν_2 de les freqüències en els punts 1 i 2 correspon a l'instant $t = 0$ s. El màxim del quocient ν_1/ν_2 apareix en el moment en què la sirena toca terra, és a dir, quan $t = 20.4$ s. També s'observa que $\nu_1/\nu_2 = 1$, és a dir, $\nu_1 = \nu_2$ en l'instant en què la sirena arriba a l'altura màxima, perquè en aquest cas la sirena està en repòs respecte dels dos observadors; de fet, en aquest cas la freqüència percebuda per ambdós observadors coincidiria amb la freqüència emesa per la sirena.

15.8 (a) Un avió que es desplaça amb una velocitat constant de 720 km/h a una altura d'1 km sobre el sòl, duu a bord una sirena que emet un so de freqüència 435 Hz. Quina freqüència sentirà un observador situat en el sòl 5 s després que l'avió haja passat sobre la seua vertical? (b) La mateixa sirena està fixa en un punt situat a 200 m sobre el sòl i un observador es desplaça sobre el sòl amb una velocitat constant de 36 km/h, de manera que la seua trajectòria defineix un pla vertical amb el punt on es troba la sirena. Calculeu la freqüència sentida per l'observador 50 s després d'haver passat per la vertical de la sirena.

velocitat del so: $v = 330$ m/s

(a) $h = 1$ km = 1000 m, $\nu = 435$ Hz, $v_A = 720$ km/h = 200 m/s, $t = 5$ s: ν' ?

(b) $h = 200$ m, $\nu = 435$ Hz, $V_O = 36$ km/h = 10 m/s, $t = 50$ s: ν' ?

La relació entre la freqüència ν emesa per una font d'ones i la freqüència ν' que percep un observador, quan entre els dos hi ha un moviment relatiu (efecte Doppler), ve expressada per

$$\nu' = \nu \frac{v \pm |v_O|}{v \pm |v_E|} \quad (1)$$

on v és la velocitat del so respecte del medi en el qual es propaga, v_O és la velocitat de l'observador respecte del medi i v_E la velocitat de l'emissor respecte del medi. En aquest cas el medi és l'aire. Però aquesta fórmula només és vàlida quan la direcció del moviment

relatiu entre l'emissor (E) i l'observador (O) coincideix amb la direcció definida per la recta que uneix els punts O i E (fig. 1), és a dir, totes les velocitats considerades estan en la mateixa recta.

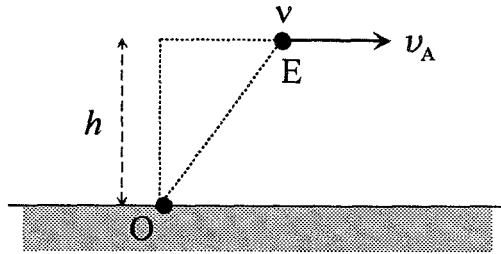


FIG. 1

Això no ocorre en aquest cas, però podem fer servir la relació (1) només utilitzant els components de les velocitats referits a la recta que uneix l'observador i l'emissor. La velocitat de l'observador és nul·la, per tant la seua projecció sobre la recta OE val $v_O = 0$ m/s; la velocitat de l'avió és $v_A = 200$ m/s, i segons la fig. 2, la seua projecció sobre la recta OE val $v_A \cos \alpha$ i aquesta seria la velocitat de l'emissor que haurà de fer-se servir en l'eq. (1); per últim, la velocitat del so no depèn de la direcció en un medi isòtrop, com és l'aire, per això no cal fer cap projecció en aquest cas i $v = 330$ m/s.

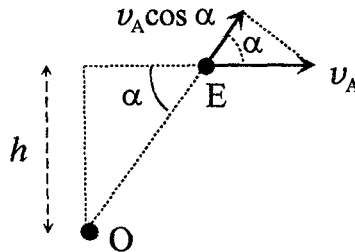


FIG. 2

Així, doncs, hem de calcular el valor de l'angle α (fig. 2), que depèn de l'instant en què es va emetre el so, ja que l'emissor està movent-se. Sabem que transcorren 5 s des que l'avió passa sobre l'observador fins que aquest sent el so. Per tant, en aquests 5 s, primer l'avió recorre una distància $v_A t_1$ i, després, el so viatja una distància vt_2 des del punt E en què es troba l'avió fins a l'observador, O (fig. 3), de manera que $t_1 + t_2 = 5$ s. El triangle rectangle (fig. 3) format per h , $v_A t_1$ i vt_2 verificarà que

$$h^2 + (v_A t_1)^2 = (vt_2)^2 \tag{2}$$

i la suma dels temps és $t_1 + t_2 = 5$ s. Tenim dues equacions amb dues incògnites, t_1 i t_2 ;

després de fer les operacions corresponents, el resultat és $t_1 = 1.78$ s i $t_2 = 3.22$ s. En la fig. 3 també és verifica que

$$\cos \alpha = \frac{v_A t_1}{v t_2} = 0.335 \quad (3)$$

Amb la qual cosa la projecció de la velocitat de l'avió v_A sobre la recta OE -necessària per a poder usar l'eq. (1)- és $v_E = v_A \cos \alpha = 67.01$ m/s. Com que la projecció de la velocitat de l'avió, que és la velocitat v_E de l'emissor, s'allunya de l'observador, segons la discussió feta en el problema 15.7, aquest percebrà una freqüència ν' menor que l'original ν , i això correspon a usar el signe *més* entre les velocitats v i $|v_E|$ del denominador en l'eq. (1). Així, la freqüència percebuda per l'observador situat en el sòl serà

$$\nu' = \nu \frac{v}{v + |v_E|} = 361.58 \text{ Hz} \quad (4)$$

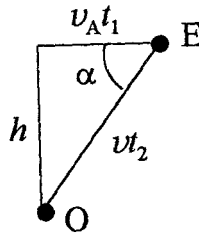


FIG. 3

(b) El plantejament d'aquest apartat és semblant al cas (a), però ara és l'observador qui es mou. Per a poder aplicar l'expressió de l'efecte Doppler, eq. (1), hem de conèixer les velocitats referides a la recta que uneix l'emissor (E) amb l'observador (O). Aquestes seran projeccions de les velocitats corresponents sobre la recta EO (fig. 4). La velocitat de l'observador projectada (fig. 5) serà $v_O = V_O \cos \beta$. Com que la font està ara en repòs, la seua velocitat projectada sobre l'eix EO serà zero: $v_E = 0$ m/s.

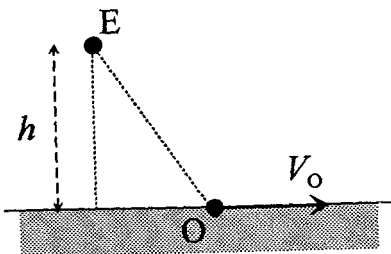


FIG. 4

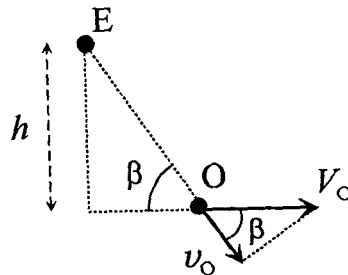


FIG. 5

Com que coneixem la velocitat V_O de l'observador, calcularem l'angle β (fig. 5). Sabem que transcorren $t = 50$ s des que l'observador passa per la vertical de la sirena fins que sent la sirena, per tant, l'observador O haurà recorregut una distància $V_O t$ (fig. 6). Com que coneixem dos catets del triangle rectangle representat en la fig. 6, podem calcular l'angle β ,

$$\tan \beta = \frac{h}{V_O t} = 0.4 \quad \Rightarrow \quad \beta = 21.80^\circ \quad (5)$$

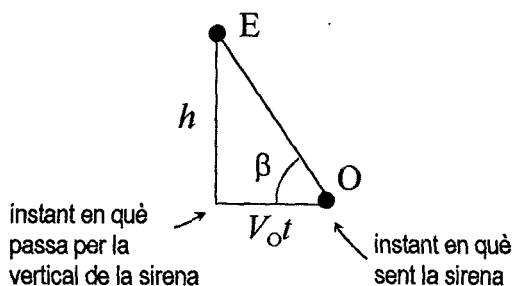


FIG. 6

Per tant, la projecció que ens interessa de la velocitat de l'observador és $v_O = V_O \cos 21.80^\circ = 9.28$ m/s. Com que l'observador s'allunya de la font, es compleix que $\nu' < \nu$, com ocorria abans; per aquest motiu s'ha de treballar amb el signe negatiu que apareix en el numerador de l'eq. (1), ja que com que $v_E = 0$ m/s, això fa que $(v - |v_O|)/v < 1$ i, llavors es verifica que $\nu' = \nu(v - |v_O|)/v < \nu$. Finalment, la freqüència sentida per l'observador val

$$\nu' = \nu \frac{v - |v_O|}{v} = 422.76 \text{ Hz} \quad (6)$$

15.9 Un vaixell s'aproxima a una costa escarpada i fa sonar una sirena, la freqüència de la qual és 600 Hz. El so es reflecteix en la costa i se sent en el vaixell 10 s després, de manera que interfereix amb el so emès directament per la sirena i dóna lloc a pulsacions amb una freqüència de 12 Hz. Si el vaixell manté la velocitat constant, quin és el temps que tardarà aquest vaixell a arribar a la costa des que emet el so?

$\nu = 600$ Hz, $\nu' - \nu = 12$ Hz
 velocitat del so: $v = 330$ m/s
 $t' = 10$ s = temps emissor-costa-observador
 t , temps vaixell-costa?

Per l'efecte Doppler, sabem que la freqüència ν' que sent un observador està relacionada amb la freqüència ν que emet l'emissor, i és

$$\nu' = \nu \frac{v \pm |v_O|}{v \pm |v_E|} \quad (1)$$

on v és la velocitat del so respecte del medi a través del qual es propaga, v_O és la velocitat de l'observador respecte del medi i v_E és la velocitat de l'emissor respecte del medi. En aquest cas, el medi és l'aire. Si la font s'acosta a l'observador, com en aquest cas, la longitud d'ona λ' que percep l'observador és menor que l'emesa per la font, i la freqüència ν' serà major que ν , ja que $\lambda' = v/\nu'$ on v és la velocitat del so (que és constant). A més a més, si la velocitat relativa entre l'emissor i l'observador no és molt gran, no hi haurà gaire diferència entre ν i ν' .

En el nostre problema hi ha interferència entre l'ona que emet la sirena i la que es reflecteix a la costa i, segons acabem de veure, les freqüències d'ambdues seran molt similars. En aquest cas en què hi ha interferència d'ones de freqüències semblants es produeixen pulsacions, de manera que la freqüència de l'ona resultant és la mitjana de les dues originals i la seua amplitud varia periòdicament amb el temps (tal com hem vist en el problema 15.5). La freqüència de les pulsacions és la diferència de les freqüències individuals de les dues ones originals.

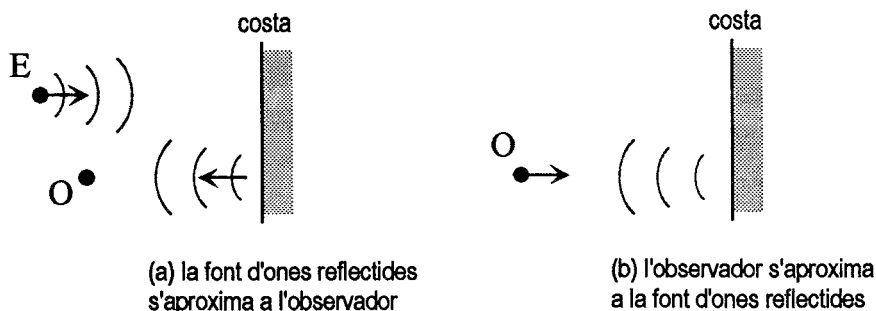


FIG. 1

Segons el que hem dit en el primer paràgraf, com que el vaixell s'acosta al so reflectit, la freqüència que sent l'observador és major que la de l'emissor, $\nu' > \nu$. Com que la freqüència de la pulsació correspon a la diferència de freqüències dels sons que interfereixen, per això hem escrit $\nu' - \nu = 12$ Hz en les dades del problema, en comptes de $\nu - \nu' = 12$ Hz.

Si la velocitat del vaixell és constant, el temps que aquest tardarà a arribar a la costa serà

$$t = \frac{d}{v_v} \quad (2)$$

on d és la distància del vaixell a la costa i v_v és la velocitat del vaixell. Per a calcular el temps transcorregut des que el vaixell emet el so fins que arriba a la costa, necessitem calcular la velocitat v_v i la distància d en el moment d'emissió del so. Utilitzarem

l'expressió corresponent a l'efecte Doppler, eq. (1), però tindrem present que el vaixell és emissor (la sirena) i receptor (observador) del so en moments diferents.

Per a calcular la velocitat v_v del vaixell hem de tenir present, segons la discussió feta en el problema anterior: (i) que la font s'acosta a l'observador (fig. 1a), per això la freqüència que sent l'observador és major que la que sent l'emissor, $\nu' > \nu$, i en el denominador de l'eq. (1) ha d'haver-hi un signe negatiu, i (ii) que l'observador s'aproxima a la costa (fig. 1b), que és la font de les ones reflectides, i com que $\nu' > \nu$, per tant el numerador de l'eq. (1) ha de ser positiu. Així, l'equació corresponent a l'efecte Doppler és en aquest cas,

$$\nu' = \nu \frac{v + |v_O|}{v - |v_E|} = \nu \frac{v + v_v}{v - v_v} \tag{3}$$

on hem de tenir present que la velocitat de l'observador i de l'emissor són les mateixes (la velocitat del vaixell): $v_O = v_v$ i $v_E = v_v$. Com que coneixem la freqüència de la pulsació, $\nu' - \nu = 12$ Hz, i el valor de la freqüència de l'emissor, $\nu = 600$ Hz, i la velocitat del so, $v = 330$ m/s, substituïm valors en l'eq. (3) i obtenim la velocitat del vaixell

$$v_v = \frac{12v}{2\nu + 12} = 3.267 \text{ m/s} \tag{4}$$

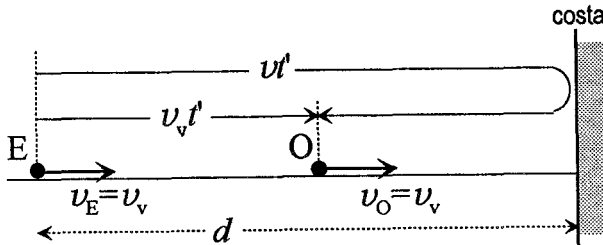


FIG. 2

Per a calcular la distància des del vaixell fins a la costa en el moment de fer sonar la sirena, ens fixarem en la fig. 2. Durant el temps t' que tarda el so des que ix del vaixell (emissor), rebota en la costa i torna al vaixell (observador), el vaixell s'ha desplaçat un espai $v_v t'$. Evidentment, l'espai recorregut pel so des que ix del vaixell fins que hi torna (per a la qual cosa empra un temps t') val vt' , on $v = 330$ m/s és la velocitat del so. Si observem la fig. 2 podem veure que es verifica la relació

$$2d = v_v t' + vt' \tag{5}$$

Si substituïm el valor de la velocitat del vaixell v_v i el temps t' en l'eq. (5), obtenim la distància d del vaixell a la costa

$$d = \frac{v_v + v}{2} t' = 1666.34 \text{ m} \tag{6}$$

Finalment, el temps t que tardarà el vaixell a arribar a la costa des del moment en què fa sonar la sirena és, segons l'eq. (2),

$$t = \frac{d}{v_v} = 510.05 \text{ s} \quad (7)$$

16

Ones
electromagnétiques

16.1 Considereu una ona electromagnètica representada per

$$\mathcal{E}_x = 0, \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \sin[2\pi(x/\lambda - t/T)] \text{ i } \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \sin[2\pi(x/\lambda - t/T + 1/8)],$$

en unitats del SI. (a) Calculeu el mòdul del vector camp elèctric i l'angle que forma aquest vector amb l'eix Y en els instants $t = 0$ i $t = T/4$, en els punts $x = 0$, $x = \lambda/4$, $x = \lambda/2$, $x = \lambda$. Digueu, en cada cas, quin és el camp magnètic corresponent. (b) Si $\mathcal{E}_0 = 0.5 \text{ N/C}$, calculeu la intensitat mitjana o flux d'energia per unitat d'àrea.

$$\text{o.e.m.} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_x = 0 \\ \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \sin[2\pi(x/\lambda - t/T)] \\ \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \sin[2\pi(x/\lambda - t/T + 1/8)] \end{cases}$$

(a) $|\mathcal{E}|$, ϑ , \mathcal{B} ? per a $t = 0, t = T/4$ i $x = 0, x = \lambda/4, x = \lambda/2$ i $x = \lambda$

(b) si $\mathcal{E}_0 = 0.5 \text{ N/C}$: \bar{I} ?

Tenim una ona electromagnètica que es propaga en la direcció de l'eix X , ja que el camp elèctric és descrit per una funció periòdica de la forma $\sin[2\pi(x/\lambda - t/T)]$, i en el sentit de les X positives, perquè en l'expressió $\sin[2\pi(x/\lambda - t/T)]$ apareix un signe menys entre la dependència espacial i la temporal. A més, segons l'enunciat, aquest camp elèctric no té component x , de manera que l'angle ϑ que forma el vector camp elèctric \mathcal{E} amb l'eix Y és (fig. 1)

$$\vartheta = \arctan \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{E}_y} \tag{1}$$

i el mòdul $|\mathcal{E}|$ del camp elèctric és

$$|\mathcal{E}| = (\mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z^2)^{1/2} \tag{2}$$

on hem considerat que $\mathcal{E}_x = 0$.

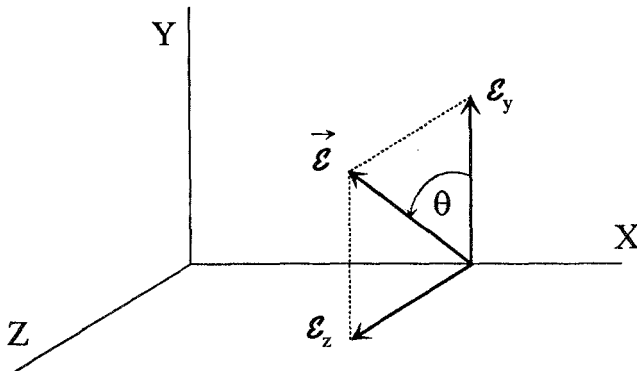


FIG. 1

Per a calcular el mòdul $|\mathcal{E}|$ del camp elèctric i l'angle ϑ , utilitzarem les expressions anteriors i substituïrem en cada cas els valors de l'espai x i del temps t corresponents. D'aquesta manera, obtenim la següent taula de valors (tots expressats en el SI):

t	x	\mathcal{E}_y	\mathcal{E}_z	$ \mathcal{E} $	ϑ
0	0	0	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/2$	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/2$	$\pi/2$
0	$\lambda/4$	\mathcal{E}_0	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/2$	$\mathcal{E}_0\sqrt{6}/2$	0.62
0	$\lambda/2$	0	$-\mathcal{E}_0\sqrt{2}/2$	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/2$	$-\pi/2$
0	λ	0	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/2$	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/2$	$\pi/2$
$T/4$	0	$-\mathcal{E}_0$	$-\mathcal{E}_0\sqrt{2}/2$	$\mathcal{E}_0\sqrt{6}/2$	$\pi + 0.62$
$T/4$	$\lambda/4$	0	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/2$	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/2$	$\pi/2$
$T/4$	$\lambda/2$	\mathcal{E}_0	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/2$	$\mathcal{E}_0\sqrt{6}/2$	0.62
$T/4$	λ	$-\mathcal{E}_0$	$-\mathcal{E}_0\sqrt{2}/2$	$\mathcal{E}_0\sqrt{6}/2$	$\pi + 0.62$

Observeu que per a un valor donat del temps, després de cada cicle espacial ($x = 0, \dots, \lambda$) es repeteixen els valors del camp elèctric \mathcal{E} i de l'angle ϑ que forma el camp elèctric amb l'eix Y .

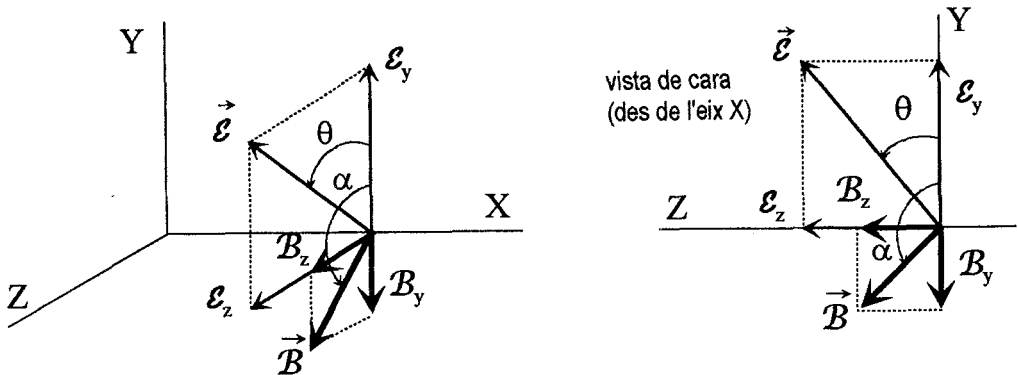


FIG. 2

Ara calcularem el camp magnètic \mathcal{B} . Sabem que el camp magnètic \mathcal{B} i el camp elèctric \mathcal{E} són perpendiculars (fig. 2) i que els components del camp magnètic \mathcal{B} estan relacionats amb els components perpendiculars del camp elèctric \mathcal{E} que es troben en el mateix pla (perpendicular al de propagació de l'ona electromagnètica). Així, doncs

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{E}}{c} \quad (3)$$

per als components \mathcal{B} i \mathcal{E} perpendiculars entre si, i c indica la velocitat de la llum, que és la velocitat de propagació de l'ona electromagnètica en el buit. De l'eq. (3) obtenim que els components dels camps \mathcal{E} i \mathcal{B} estan relacionats mitjançant

$$\mathcal{B}_y = -\frac{\mathcal{E}_z}{c} = -\frac{\mathcal{E}_0}{c} \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{1}{8} \right) \right] \quad (4)$$

$$B_z = \frac{\mathcal{E}_y}{c} = \frac{\mathcal{E}_0}{c} \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \tag{5}$$

Per últim, cal dir que $B_x = 0$, ja que l'ona electromagnètica es propaga al llarg de l'eix X i, per això, els camps elèctric i magnètic no tenen component x : $B_x = 0$ i $\mathcal{E}_x = 0$.

Els signes de les equacions anteriors són correctes, ja que quan $\mathcal{E}_y > 0$ s'ha de verificar que $B_z > 0$ (i quan $\mathcal{E}_y < 0$, tindrem que $B_z < 0$), per la relació d'ortogonalitat entre \mathcal{E} i \mathcal{B} . D'altra banda, quan $\mathcal{E}_z > 0$, tindrem que $B_y < 0$, i quan $\mathcal{E}_z < 0$, obtindrem que $B_y > 0$. Totes aquestes relacions de perpendicularitat entre els components dels camps apareixen representades en la figura 3.

Si substituïm valors en les equacions anteriors obtenim el valor del mòdul del camp magnètic $|\mathcal{B}|$ i l'angle α que forma el camp magnètic amb l'eix Y positiu. De manera semblant a la d'abans, expressem els resultats en una taula:

t	x	B_y	B_z	$ \mathcal{B} $	α
0	0	$-\mathcal{E}_0\sqrt{2}/(2c)$	0	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/(2c)$	π
0	$\lambda/4$	$-\mathcal{E}_0\sqrt{2}/(2c)$	$+\mathcal{E}_0/c$	$\mathcal{E}_0\sqrt{6}/(2c)$	$\pi/2 + 0.62$
0	$\lambda/2$	$+\mathcal{E}_0\sqrt{2}/(2c)$	0	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/(2c)$	0
0	λ	$-\mathcal{E}_0\sqrt{2}/(2c)$	0	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/(2c)$	π
$T/4$	0	$+\mathcal{E}_0\sqrt{2}/(2c)$	$-\mathcal{E}_0/c$	$\mathcal{E}_0\sqrt{6}/(2c)$	$3\pi/2 + 0.62$
$T/4$	$\lambda/4$	$-\mathcal{E}_0\sqrt{2}/(2c)$	0	$\mathcal{E}_0\sqrt{2}/(2c)$	π
$T/4$	$\lambda/2$	$-\mathcal{E}_0\sqrt{2}/(2c)$	$+\mathcal{E}_0/c$	$\mathcal{E}_0\sqrt{6}/(2c)$	$\pi/2 + 0.62$
$T/4$	λ	$+\mathcal{E}_0\sqrt{2}/(2c)$	$-\mathcal{E}_0/c$	$\mathcal{E}_0\sqrt{6}/(2c)$	$3\pi/2 + 0.62$

Pot comprovar-se que els angles α que hem obtingut per al camp magnètic es poden obtenir sumant $\pi/2$ als corresponents angles ϑ obtinguts per al camp elèctric. Això posa de manifest que \mathcal{E} i \mathcal{B} són perpendiculars, tal com hem dit.

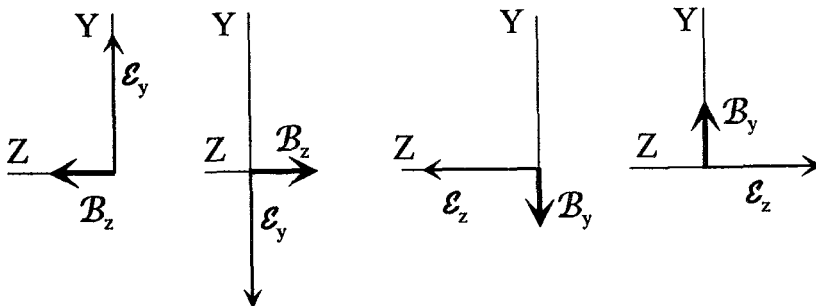


FIG. 3

(b) En aquest apartat sabem que l'amplitud de l'ona electromagnètica val $\mathcal{E}_0 = 0.5 \text{ N/C}$. La intensitat mitjana \bar{I} de l'ona electromagnètica, o el flux d'energia per unitat d'àrea, és

$$\bar{I} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 = 3.32 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2 \tag{6}$$

on hem substituït els valors de l'amplitud de l'ona electromagnètica, la velocitat de la llum $c = 3 \cdot 10^8$ m/s i la constant dielèctrica en el buit $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ C² m⁻² N⁻¹.

16.2 Una ona electromagnètica plana sinusoidal, amb polarització circular i longitud d'ona $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m, es propaga en el buit en la direcció de l'eix X . Quan $t = 0$, el camp elèctric en el punt $x = 0$ està dirigit en el sentit positiu de l'eix Z . Si la intensitat mitjana de l'ona val 0.1 W/m², escriu les expressions que descriuen els camps elèctric i magnètic d'aquesta ona.

$\bar{I} = 0.1$ W/m², $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m, polarització circular
 \mathcal{E} , \mathcal{B} ?

El camp elèctric \mathcal{E} només té components y i z : \mathcal{E}_y i \mathcal{E}_z . És a dir, el component x és nul, $\mathcal{E}_x = 0$, ja que l'ona electromagnètica es propaga en la direcció X i el camp elèctric és perpendicular a la direcció de propagació de l'ona (fig. 1). La polarització circular de l'ona electromagnètica implica que les amplituds dels dos components y i z del camp elèctric són iguals, $\mathcal{E}_{0y} = \mathcal{E}_{0z} = \mathcal{E}_0$ (les amplituds dels dos components ortogonals de cada camp són iguals en la polarització circular), i la diferència de fase entre aquests dos components, \mathcal{E}_y i \mathcal{E}_z , és $\pm\pi/2$, el signe + o - depèn del sentit de la rotació (dextrògir o levògir) del camp elèctric. També hem de notar que quan $x = 0$ i $t = 0$, el camp elèctric només té component z .

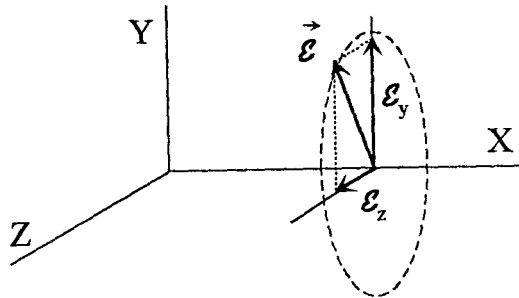


FIG. 1

Així, escriurem

$$\mathcal{E}_x = 0 \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \quad (2)$$

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (3)$$

El fet que quan $x = 0$ i $t = 0$ el camp elèctric estiga dirigit en el sentit positiu de l'eix Z ens ha permès escriure les eqs. (2) i (3) tal com acabem de fer, ja que aquestes

expressions verifiquen que $\mathcal{E}_y(x = 0, t = 0) = 0$ i $\mathcal{E}_z(x = 0, t = 0) = \mathcal{E}_0$. En les anteriors equacions λ és la longitud d'ona, T el període i \mathcal{E}_0 l'amplitud del camp elèctric de l'ona electromagnètica. Ara hem de calcular aquestes magnituds \mathcal{E}_0 , λ i T . La longitud d'ona λ és una dada del problema, $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m. L'amplitud \mathcal{E}_0 de l'ona electromagnètica s'obté de la seua relació amb la intensitat mitjana \bar{I} , que és una altra dada del problema,

$$\bar{I} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_0 = \left(\frac{2\bar{I}}{c \epsilon_0} \right)^{1/2} = 8.68 \text{ N/C} \quad (4)$$

on ϵ_0 és la constant dielèctrica del buit ($\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ m}^{-2} \text{ N}^{-1}$) i c és la velocitat de propagació de l'ona, és a dir, la velocitat de la llum en el buit ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$), ja que l'ona electromagnètica es desplaça en el buit. El període T de l'ona s'obté de la relació $T = \lambda/c = 1.67 \cdot 10^{-15}$ s. Si substituïm els valors calculats anteriorment per a la longitud d'ona λ , l'amplitud \mathcal{E}_0 i el període T de l'ona electromagnètica en les expressions (1)-(3), s'obté el camp elèctric \mathcal{E} :

$$\mathcal{E}_x = 0 \quad (5)$$

$$\mathcal{E}_y = 8.68 \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{5 \cdot 10^{-7}} - \frac{t}{1.67 \cdot 10^{-15}} \right) \right] = \sqrt{24\pi} \sin [4\pi \cdot 10^6 (x - ct)] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z &= 8.68 \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{5 \cdot 10^{-7}} - \frac{t}{1.67 \cdot 10^{-15}} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \sqrt{24\pi} \sin \left[4\pi \cdot 10^6 (x - ct) + \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

en unitats del SI.

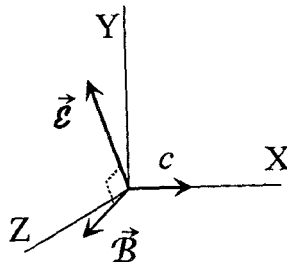


FIG. 2

La relació entre el camp elèctric \mathcal{E} i el camp magnètic \mathcal{B} és $\mathcal{B} = \mathcal{E}/c$ per als components dels camps \mathcal{E} i \mathcal{B} perpendiculars entre si. A més, el camp magnètic \mathcal{B} és perpendicular al

camp elèctric \mathcal{E} i a la direcció de propagació de l'ona electromagnètica (fig. 2), per tant, els components del camp magnètic són

$$B_x = 0 \quad B_y = -\frac{\mathcal{E}_z}{c} \quad B_z = \frac{\mathcal{E}_y}{c} \quad (8)$$

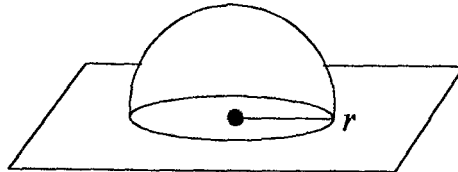
És a dir:

$$B_x = 0 \quad (9)$$

$$B_y = -\frac{\sqrt{24\pi}}{c} \sin \left[4\pi \cdot 10^6 (x - ct) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (10)$$

$$B_z = \frac{\sqrt{24\pi}}{c} \sin [4\pi \cdot 10^6 (x - ct)] \quad (11)$$

16.3 La potència mitjana d'una emissora de ràdio és 10^5 W. Si suposem que aquesta potència s'irradia homogèniament sobre qualsevol semiesfera concèntrica amb l'estació emissora, determineu les amplituds dels camps elèctric i magnètic en un punt que es troba allunyat 10 km de l'estació emissora. Teniu en compte que a aquesta distància podeu considerar que l'ona electromagnètica emesa per l'emissora és plana.



$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= 10^5 \text{ W} \\ r &= 10 \text{ km} = 10^4 \text{ m} \\ \mathcal{E}_0(r = 10^4 \text{ m})? \\ \mathcal{B}_0(r = 10^4 \text{ m})? \end{aligned}$$

L'ona electromagnètica que emet l'estació és esfèrica, encara que tota l'energia s'emet en una semiesfera.

Si suposem que no hi ha dissipació d'energia mentre es propaga l'ona, en aplicar-hi la conservació de l'energia, podem concloure que la potència emesa per l'emissora serà la mateixa que travesse la superfície semiesfèrica de radi $r = 10^4$ m.

La potència mitjana $\langle P \rangle$ d'una ona electromagnètica que travessa una superfície està relacionada amb la intensitat I de l'ona:

$$\langle P \rangle = \int I dS \tag{1}$$

Segons podem veure en la figura 1, la intensitat I de l'ona és paral·lela a l'element de superfície de la semiesfera concèntrica amb l'emissora, per això

$$\int I dS = \int I dS \tag{2}$$

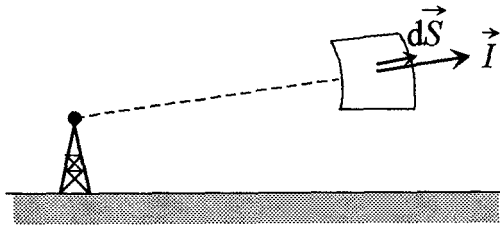


FIG. 1

A més a més, el mòdul de la intensitat té un valor constant en tota la superfície semiesfèrica, per això podrà eixir fora de la integral,

$$\int I dS = I \int dS = IS \tag{3}$$

on $S = 4\pi r^2/2$ és la superfície d'una semiesfera de radi r .

El mòdul de la intensitat d'una ona electromagnètica plana és

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \tag{4}$$

on \mathcal{E}_0 és el mòdul del camp elèctric de l'ona, i els altres símbols tenen el seu significat habitual.

A partir de les eqs. (1), (3) i (4) escrivim

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} (c \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2) (2\pi r^2) \tag{5}$$

d'on obtenim que el mòdul del camp elèctric a una distància r del focus emissor val

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\langle P \rangle}{\pi c \epsilon_0}} \tag{6}$$

En el cas que ens ocupa, $\mathcal{E}_0(r = 10^4 \text{ m}) = 0.346 \text{ V/m}$, i com que $\mathcal{B}_0 = \mathcal{E}_0/c$, obtenim que $\mathcal{B}_0(r = 10^4 \text{ m}) = 1.15 \cdot 10^{-9} \text{ T}$. Aquests serien els valors dels mòduls dels camps elèctric i magnètic del front d'ona plana que permet descriure de forma aproximada l'ona esfèrica a 10 km de distància del focus emissor.

16.4 L'amplitud del camp elèctric d'una ona electromagnètica plana val 10^{-2} V/m . Calculeu: (a) l'amplitud del corresponent camp magnètic, i (b) la densitat d'energia mitjana de l'ona. (c) Si l'ona és absorbida totalment quan incideix perpendicularment sobre un cos, determineu el valor mitjà de la pressió de radiació exercida sobre aquest cos. (d) Quin seria el valor mitjà de la pressió de radiació si l'ona incidira sobre un cos que la reflecteix totalment?

o.e.m. plana, $\mathcal{E}_0 = 10^{-2} \text{ V/m}$

- (a) \mathcal{B}_0 ?
 (b) $\langle E_{\text{oem}} \rangle$?
 (c) $\langle \text{pressió}_{\text{abs}} \rangle$
 (d) $\langle \text{pressió}_{\text{refl}} \rangle$

(a) A partir de la relació entre els mòduls dels camps elèctric i magnètic

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{E}}{c} \quad (1)$$

és fàcil obtenir l'amplitud del camp magnètic de l'ona electromagnètica plana, que val

$$\mathcal{B}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{c} = \frac{10^{-2}}{3 \cdot 10^8} = 3.33 \cdot 10^{-11} \text{ T} \quad (2)$$

(b) La densitat d'energia instantània d'una ona electromagnètica depèn del valor del camp elèctric en cada instant

$$E_{\text{oem}} = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 \quad (3)$$

però la densitat d'energia mitjana depèn de l'amplitud del camp elèctric, i val

$$\langle E_{\text{oem}} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \quad (4)$$

ja que el valor mitjà del quadrat del camp elèctric és $\langle \mathcal{E}^2 \rangle = \mathcal{E}_0^2/2$. En substituir valors numèrics, obtenim:

$$\langle E_{\text{oem}} \rangle = \frac{1}{2} (8.854 \cdot 10^{-12}) (10^{-2})^2 = 4.427 \cdot 10^{-16} \text{ J/m}^3 \quad (5)$$

(c+d) La pressió de radiació és la pressió exercida per l'ona electromagnètica, i per a calcular-la seguirem el raonament següent.

La pressió és força per unitat de superfície, i la força es pot obtenir a partir de la variació de moment lineal per unitat de temps.

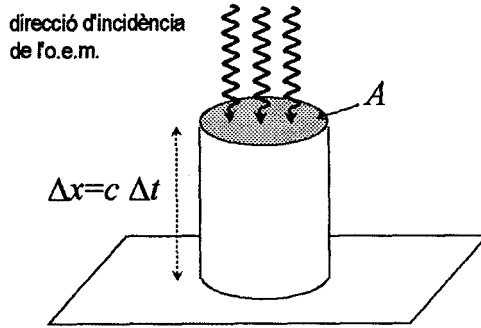


FIG. 1

Primerament calcularem el moment lineal de l'o.e.m. que està incidint perpendicularment sobre la superfície A durant l'interval de temps Δt (fig. 1). A partir de la densitat de moment lineal d'una o.e.m.

$$p = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}^2}{c} \tag{6}$$

podem obtenir el moment lineal de l'o.e.m. que està contingut en l'element de volum representat pel cilindre de base A i altura $\Delta x = c \Delta t$ (que correspon a l'espai recorregut durant l'interval de temps Δt per l'o.e.m. que viatja amb velocitat c):

$$V = A c \Delta t \tag{7}$$

Així, doncs, a partir de les eqs. (6) i (7), el moment lineal inicial serà:

$$p^{\text{inicial}} = p V = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 A \Delta t \tag{8}$$

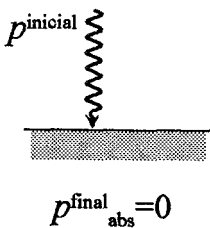


FIG. 2A

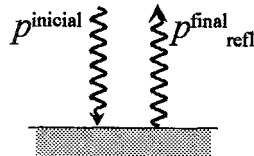


FIG. 2B

En el cas que l'ona incideix sobre una superfície totalment absorbent, el moment final de l'ona serà nul, ja que aquesta s'absorbeix en la superfície (fig. 2a):

$$p_{\text{abs}}^{\text{final}} = 0 \quad (9)$$

En canvi, si l'ona incideix sobre una superfície totalment reflectant, el moment final de l'ona serà igual a l'inicial però de signe contrari, ja que l'ona es reflecteix (fig. 2b)

$$p_{\text{refl}}^{\text{final}} = -p^{\text{inicial}} = -\epsilon_0 \mathcal{E}^2 A \Delta t \quad (10)$$

La variació de moment lineal que experimenta l'o.e.m. és igual (però de signe contrari) al moment transferit a la superfície del cos:

$$\Delta p^{\text{o.e.m.}} = -\Delta p^{\text{superfície}} \quad (11)$$

La variació de moment lineal de l'o.e.m. quan és absorbida per la superfície absorbent valdrà:

$$p_{\text{abs}}^{\text{o.e.m.}} = p^{\text{final}} - p_{\text{abs}}^{\text{inicial}} = -\epsilon_0 \mathcal{E}^2 A \Delta t \quad (12)$$

i quan l'o.e.m. és reflectida per la superfície, tindrem:

$$\Delta p_{\text{refl}}^{\text{o.e.m.}} = p^{\text{final}} - p_{\text{refl}}^{\text{inicial}} = -2\epsilon_0 \mathcal{E}^2 A \Delta t \quad (13)$$

D'acord amb l'eq. (11), el canvi de moment lineal experimentat per la superfície A , i que ha sigut provocat per la porció d'o.e.m. continguda en el volum V , donat per l'eq. (7), és:

$$\Delta p_{\text{abs}}^{\text{superfície}} = -\Delta p_{\text{abs}}^{\text{o.e.m.}} = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 A \Delta t \quad (14)$$

$$\Delta p_{\text{refl}}^{\text{superfície}} = -\Delta p_{\text{refl}}^{\text{o.e.m.}} = 2\epsilon_0 \mathcal{E}^2 A \Delta t \quad (15)$$

Considerant Δp i Δt com a quantitats infinitesimals i d'acord amb la definició de força

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (16)$$

la força que exerceix l'o.e.m. sobre la superfície en cada cas val

$$F_{\text{abs}} = \frac{\Delta p_{\text{abs}}^{\text{superfície}}}{\Delta t} = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 A \quad (17)$$

$$F_{\text{refl}} = \frac{\Delta p_{\text{refl}}^{\text{superfície}}}{\Delta t} = 2\epsilon_0 \mathcal{E}^2 A \quad (18)$$

Com que la pressió és força per unitat de superfície, tindrem que, en el cas de la superfície absorbent,

$$\text{pressió}_{\text{abs}} = \frac{F_{\text{abs}}}{A} = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 \quad (19)$$

i, en el cas de la superfície reflectant,

$$\text{pressió}_{\text{refl}} = \frac{F_{\text{refl}}}{A} = 2\epsilon_0 \mathcal{E}^2 \quad (20)$$

La pressió mitjana valdrà, en cada cas,

$$\langle \text{pressió}_{\text{abs}} \rangle = \epsilon_0 \langle \mathcal{E}^2 \rangle = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2}{2} \quad (21)$$

$$\langle \text{pressió}_{\text{refl}} \rangle = 2\epsilon_0 \langle \mathcal{E}^2 \rangle = \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \quad (22)$$

on hem tingut present que $\langle \mathcal{E}^2 \rangle = \mathcal{E}_0^2/2$. Com veiem, sobre la superfície reflectant actua el doble de pressió que sobre la superfície absorbent.

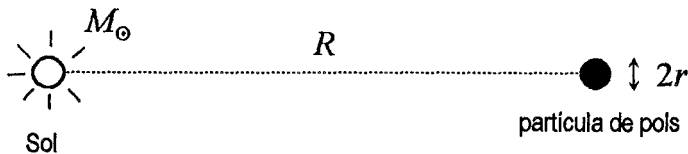
Finalment, en substituir valors numèrics, obtenim que el valor mitjà de la pressió de radiació sobre la superfície absorbent val

$$\langle \text{pressió}_{\text{abs}} \rangle = \frac{1}{2} (8.854 \cdot 10^{-12}) (10^{-2})^2 = 4.427 \cdot 10^{-16} \text{ N/m}^2 \quad (23)$$

i sobre la superfície reflectant val

$$\langle \text{pressió}_{\text{refl}} \rangle = (8.854 \cdot 10^{-12}) (10^{-2})^2 = 8.854 \cdot 10^{-16} \text{ N/m}^2 \quad (24)$$

16.5 La intensitat de la radiació solar que incideix sobre l'atmosfera terrestre és $1.4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$. Considereu una partícula de pols de diàmetre 10^{-6} m i densitat massica $3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, la superfície de la qual absorbeix completament la radiació. Si la partícula es troba a $1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ del Sol, compareu la força que exerceix la radiació solar sobre la partícula de pols amb la corresponent força deguda a l'atracció gravitatòria solar. La massa del Sol és $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.



$$I = 1.4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$$

$$\text{radi de la partícula: } r = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$\text{densitat de la partícula: } \rho = 3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{distància partícula-Sol: } R = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$\text{massa del Sol: } M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$F_{\text{rad}}, F_{\text{grav}}?$$

Sobre la partícula de pols està incidint radiació electromagnètica procedent del Sol. Això produirà una pressió de radiació sobre la partícula, que la farà allunyar-se del Sol al llarg de la direcció radial. Per tant, la pressió de radiació produirà una força repulsiva sobre la partícula de pols.

Càlcul de la força de radiació, F_{rad} : Obtindrem F_{rad} a partir del valor de la intensitat de la radiació solar, el qual coneixem. Sabem que la força que experimenta un sistema està relacionada amb la variació del seu moment lineal per unitat de temps:

$$F_{\text{rad}} = \frac{dp}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (1)$$

Com que la partícula és totalment absorbent, no es reflectirà res de la radiació electromagnètica que incideix sobre aquesta. En ser absorbida tota la radiació, tot el moment lineal que transporta l'o.e.m. serà transferit a la partícula. La variació del moment lineal de la partícula en un interval de temps Δt serà igual a tot el moment lineal que incideix sobre la partícula (la secció transversal de la qual és A) en l'interval de temps Δt . El moment lineal que hi incideix serà el moment lineal de l'o.e.m. contingut en un volum de secció A i longitud $\Delta x = c \Delta t$, ja que l'o.e.m. viatja amb la velocitat de la llum c (fig. 1).

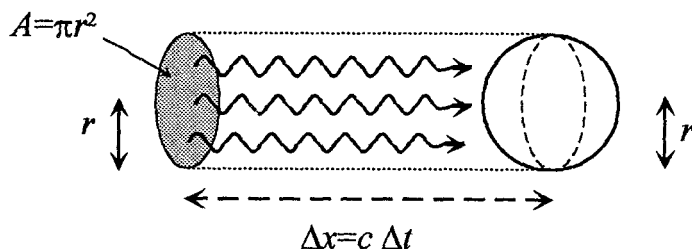


FIG. 1

La densitat de moment lineal d'una o.e.m. és

$$p = \frac{E_{\text{oem}}}{c} \quad (2)$$

on $E_{\text{oem}} = \epsilon_0 \mathcal{E}^2$ és la densitat d'energia associada a l'o.e.m. i \mathcal{E} és el seu camp elèctric.

A partir de l'eq. (2) podem obtenir el moment lineal contingut en el volum $V = A c \Delta t$

$$\Delta p = p A c \Delta t = \frac{E_{\text{oem}}}{c} A c \Delta t \quad (3)$$

Com que la dada que ens dona el problema, la intensitat I , correspon a un valor mitjà, podem escriure la variació del moment lineal, en terme mitjà, de la partícula de pols durant el temps Δt :

$$\langle \Delta p \rangle = \langle E_{\text{oem}} \rangle A \Delta t = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2}{2} A \Delta t = \frac{I}{c} A \Delta t \quad (4)$$

on ara \mathcal{E}_0 és l'amplitud del camp elèctric de l'o.e.m., ja que $\langle \mathcal{E}^2 \rangle = \mathcal{E}_0^2/2$. La intensitat de l'o.e.m. està relacionada amb \mathcal{E}_0^2 mitjançant l'expressió

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \quad (5)$$

Així, doncs, usant les eqs. (1) i (4), la força de radiació que experimenta la partícula en terme mitjà, serà

$$F_{\text{rad}} = \frac{\langle \Delta p \rangle}{\Delta t} = \frac{IA}{c} \quad (6)$$

En substituir valors en l'eq. (6), obtenim

$$F_{\text{rad}} = \frac{I\pi r^2}{c} = \frac{1.4 \cdot 10^3 \pi (5 \cdot 10^{-7})^2}{3 \cdot 10^8} = 3.7 \cdot 10^{-18} \text{ N} \quad (7)$$

Com veiem, hem obtingut una relació entre F_{rad} i I , eq. (6), que és vàlida quan podem tractar l'ona com a plana. Això és possible fer-ho en el nostre cas, en què tenim una ona esfèrica —emesa pel Sol— a grans distàncies del seu origen, i per tant, la porció d'o.e.m. que incideix sobre la partícula de pols pot tractar-se com si fóra una ona plana.

A títol d'exemple de com poden emprar-se diversos mètodes per a arribar al mateix resultat, tot seguit presentem una altra deducció de l'eq. (6) emprant uns arguments més qualitius i senzills que els que hem fet servir abans.

Sabem que la intensitat d'una ona és igual a la seua potència per unitat de superfície

$$I = \frac{P}{A} = \frac{W}{At} \quad (8)$$

i com que el treball W està relacionat amb la força F_{rad} i l'espai s en què hi actua, mitjançant $W = Fs$, l'equació anterior s'escriurà

$$I = \frac{F_{\text{rad}} s}{At} = \frac{F_{\text{rad}}}{A} c \quad (9)$$

perquè la velocitat de l'ona és igual a l'espai que recorre per unitat de temps $c = s/t$. De l'eq. (9) és immediat aïllar F_{rad} i obtenir la mateixa expressió que l'eq. (6).

Càlcul de la força gravitatòria, F_{grav} : La partícula de pols, de massa m , es troba a una distància R del Sol, de massa M_{\odot} , i per tant es troba sotmesa a una força gravitatòria atractiva que és donada per la llei de la gravitació universal de Newton:

$$F_{\text{grav}} = G \frac{m M_{\odot}}{R^2} \quad (10)$$

on $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ és la constant universal de la gravitació. Com que la partícula de pols és esfèrica, la seua massa és donada per

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \quad (11)$$

i, substituint m en l'eq. (10), tenim

$$F_{\text{grav}} = G \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho M_{\odot}}{R^2} \quad (12)$$

Usant els valors numèrics que proporciona l'enunciat, obtenim

$$F_{\text{grav}} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\frac{4}{3}\pi (5 \cdot 10^{-7})^3 3 \cdot 10^3 2 \cdot 10^{30}}{(1.5 \cdot 10^{11})^2} = 9.3 \cdot 10^{-18} \text{ N} \quad (13)$$

Podem apreciar que, en aquest cas, la força gravitatòria, eq. (13), i la força de radiació, eq. (7), són comparables, encara que la primera és una mica més gran. Com que F_{rad} és una força repulsiva i F_{grav} és una força atractiva (fig. 2), sobre la partícula de pols actuarà una força resultant atractiva, però de menor magnitud que la força gravitatòria.

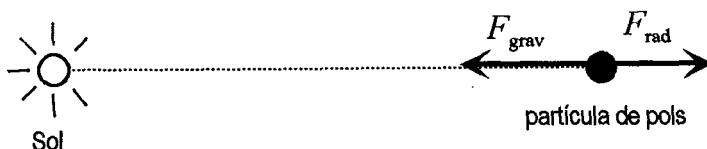


FIG. 2

De fet, en alguns casos, segons la grandària, la naturalesa i la situació de la partícula de pols, la pressió de radiació evita que algunes partícules caiguen al Sol. Aquests tipus de partícules de pols són típiques en l'espai interplanetari.

16.6 (a) L'electró d'un àtom d'hidrogen té una energia cinètica de 13.6 eV i es mou descrivint una òrbita circular de radi 0.529 Å. Suposant que hi podem aplicar la teoria de la radiació emesa per una càrrega accelerada, calculeu l'energia que aquest electró irradiaria per revolució. (b) Torneu a fer els càlculs per a un electró de 50 keV que recorre una trajectòria circular d'1 m de radi. (c) Repetiu els càlculs per a un protó de 50 keV que es mou sobre una trajectòria circular d'1 m de radi.

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, q_p = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

T , temps que dura una revolució

$$\left. \begin{array}{l} E_{k,e} = 13.6 \text{ eV} = 2.18 \cdot 10^{-18} \text{ J} \\ r_e = 0.529 \text{ Å} = 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m} \end{array} \right\} (a) E_{\text{rad}}(T)?$$

$$\left. \begin{array}{l} E_{k,e} = 50 \text{ keV} = 8 \cdot 10^{-15} \text{ J} \\ r_e = 1 \text{ m} \end{array} \right\} (b) E_{\text{rad}}(T)?$$

$$\left. \begin{array}{l} E_{k,p} = 50 \text{ keV} = 8 \cdot 10^{-15} \text{ J} \\ r_p = 1 \text{ m} \end{array} \right\} (c) E_{\text{rad}}(T)?$$

Una càrrega q amb acceleració a perd una energia per unitat de temps que és donada per

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (1)$$

Aquesta energia que perd és irradiada en forma d'o.e.m.

En els casos que ens ocupen, sobre la càrrega actua una acceleració centrípeta,

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

on v i r són, respectivament, la velocitat i el radi de la trajectòria. Així, doncs, l'eq. (1) s'escriurà ara

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 v^4}{6\pi\epsilon_0 c^3 r^2} \quad (3)$$

i, si tenim en compte que l'energia cinètica val $E_k = mv^2/2$, finalment obtenim una expressió en termes de E_k i r per a l'energia perduda per unitat de temps

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2 E_k^2}{3\pi\epsilon_0 c^3 m^2 r^2} \quad (4)$$

El temps que dura una revolució serà el període

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{2E_k/m}} \quad (5)$$

on hem fet servir la relació entre E_k i v .

Així, doncs, l'energia irradiada durant una revolució completa serà:

$$E_{\text{rad}}(T) = T \frac{dE}{dt} = \frac{4q^2 E_k^2}{3\epsilon_0 c^3 m^2 r} \sqrt{\frac{m}{2E_k}} \quad (6)$$

Ara només cal substituir els valors numèrics corresponents a cada apartat de l'enunciat. Tenint en compte que $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2 \text{ C}^2$ i $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, obtenim en cada cas:

$$(a) E_{\text{rad}}(T) = 7.07 \cdot 10^{-24} \text{ J}$$

$$(b) E_{\text{rad}}(T) = 8.29 \cdot 10^{-29} \text{ J}$$

$$(c) E_{\text{rad}}(T) = 1.06 \cdot 10^{-33} \text{ J}$$

A partir de l'eq. (4) podem obtenir l'energia perduda durant 1 s. En els tres casos del problema, obtenim que:

$$(a) E_{\text{rad}}(1 \text{ s}) = 4.64 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

$$(b) E_{\text{rad}}(1 \text{ s}) = 1.75 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$(c) E_{\text{rad}}(1 \text{ s}) = 5.21 \cdot 10^{-28} \text{ J}$$

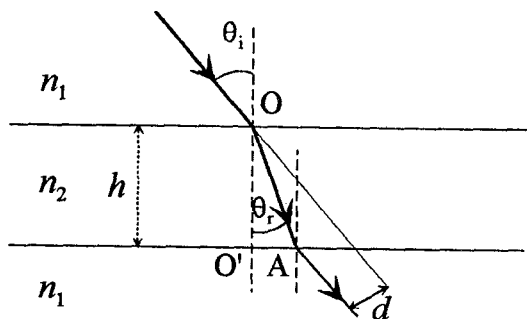
El resultat de l'apartat (a) ens dóna a entendre que un electró que descriu òrbites circulars no duraria ni tan sols 1 s, perquè molt abans hauria perdut tota la seua energia cinètica [$E_{\text{rad}}(1 \text{ s}) \gg E_{k,e}$]. Això explica les fortes crítiques rebudes pel model atòmic que va proposar Rutherford el 1911, el qual consistia en electrons orbitant al voltant d'un nucli amb càrrega positiva, a l'estil d'un petit sistema planetari; aquest model era incompatible amb les lleis de la física clàssica, que predeien una pèrdua d'energia, per tractar-se els electrons de càrregues accelerades que descriuen òrbites circulars. El 1913 Bohr va proposar un model atòmic en el qual apareixia la quantificació dels nivells energètics en l'àtom, els quals ja no estaven sotmesos a les regles de la física clàssica.

A partir de les eqs. (4) o (6) és fàcil comprovar que hi haurà menys pèrdua d'energia per radiació quan el radi de la trajectòria siga més gran. Per això els acceleradors circulars de partícules es construeixen de grans dimensions, per tal que l'energia que s'inverteix a accelerar les partícules no es dissipe en energia irradiada per les partícules en forma d'o.e.m.

17

**Transmissió, reflexió
i polarització de la llum**

17.1 Un raig de llum incideix des de l'aire sobre una làmina de plàstic transparent de cares planes i paral·leles, formant un angle de 45° amb la normal a la superfície. Si el gruix de la làmina és d'1 cm i el seu índex de refracció val 1.6, calculeu el desplaçament d del raig emergent.



$n_1 = 1$, $n_2 = 1.6$, $\theta_i = 45^\circ$, $h = 1$ cm
desplaçament, d ?

Per a calcular el desplaçament d del raig emergent hem de fixar-nos en el triangle en el qual la distància OA és la hipotenusa i un dels catets és la prolongació del raig incident (fig. 1). O és el punt en què el raig incident penetra des del medi 1 (l'aire) en el medi 2 (la làmina). El punt A és on el raig refractat passa del medi 2 (la làmina) una altra vegada a l'aire. d és l'altre catet en aquest triangle. Per tractar-se d'un triangle rectangle (fig. 1) es verifica que

$$d = OA \sin \alpha \quad (1)$$

on α és l'angle que formaria el raig incident, si no es desviara, amb el raig refractat. Per tant, hem de calcular la longitud OA i l'angle α .

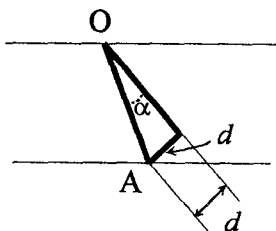


FIG. 1

Per a calcular la distància OA tenim en compte el triangle rectangle $OO'A$ representat en la fig. 2, on ara la distància OA és la hipotenusa i $OO' = h$ és un catet. En conseqüència, es verificarà la relació

$$OA \cos \vartheta_r = OO' = h \quad \Rightarrow \quad OA = \frac{h}{\cos \vartheta_r} \quad (2)$$

on ϑ_r és l'angle que forma el raig refractat en la làmina respecte de la normal en la làmina, i h és el gruix de la làmina, l'índex de refracció de la qual val n_2 .

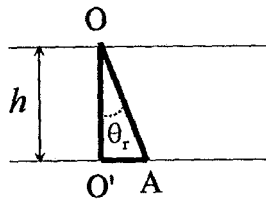


FIG. 2

D'altra banda, segons la llei de Snell, es verifica que

$$n_i \sin \vartheta_i = n_r \sin \vartheta_r \quad (3)$$

on n_i representa l'índex de refracció del medi sobre el qual incideix el raig i n_r representa l'índex de refracció del medi on es refracta el raig; ϑ_i i ϑ_r són els angles que formen els raigs incident i refractat, respectivament, respecte de la normal a la superfície. En el problema que ens ocupa, $n_i = n_1$ és l'índex de refracció de l'aire, $n_r = n_2$ és l'índex de refracció de la làmina i l'angle del raig incident val $\vartheta_i = 45^\circ$. De l'eq. (3) obtenim que l'angle del raig refractat respecte de la normal a la superfície és $\vartheta_r = 26.23^\circ$.

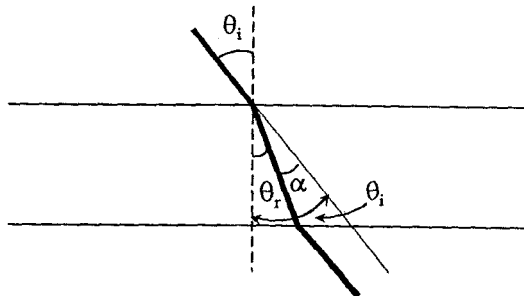


FIG. 3

Per a calcular l'angle α hem de tenir en compte que aquest està relacionat amb l'angle del raig incident ϑ_i i del refractat ϑ_r mitjançant

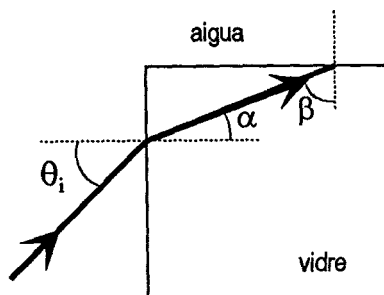
$$\alpha = \vartheta_i - \vartheta_r \quad (4)$$

tal com pot observar-se en la fig. 3.

Si substituïm en l'eq. (1) el valor de la distància OA, eq. (2), i l'angle α , eq. (4), obtindrem la distància d que es desplaçarà el raig emergent de l'incident en travessar la làmina

$$d = \frac{h}{\cos \vartheta_r} \sin(\vartheta_i - \vartheta_r) = 0.36 \text{ cm} \quad (5)$$

17.2 Un raig lluminós incideix sobre la cara vertical esquerra d'un cub de vidre d'índex de refracció $n_v = 1.5$, tal com representa la figura. El pla d'incidència coincideix amb el de la figura i el cub està envoltat d'aigua ($n_a = 1.33$). Quin serà el valor de l'angle màxim amb què pot incidir el raig sobre la superfície vertical del cub per tal que s'hi produeixi una reflexió interna total en la cara superior?



$$n_a = 1.33, n_v = 1.5$$

ϑ_i perquè hi haja reflexió interna total en la cara superior del cub?

Quan la llum passa d'un medi a un altre, de manera que l'índex de refracció del segon medi és menor que el del primer, hi ha un angle d'incidència, denominat angle crític, per al qual es produeix reflexió interna total i no passa llum del primer medi al segon.

Perquè es produeixi reflexió total en la part interna de la cara superior del cub, l'angle β que forma el raig refractat en el cub de vidre amb la normal a la cara superior del cub haurà de ser major que l'angle crític per a reflexió interna total corresponent a la superfície vidre-aigua, ja que els índexs de refracció verifiquen la relació $n_a < n_v$.

L'angle crític ϑ_c per a la refracció vidre-aigua és aquell per al qual l'angle del raig refractat val 90° . Per la llei de Snell, $n_i \sin \vartheta_i = n_r \sin \vartheta_r$, això implica que

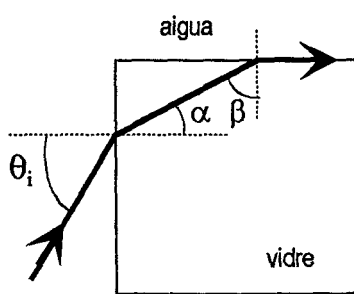
$$\sin \vartheta_c = \frac{n_a}{n_v} \Rightarrow \vartheta_c = 62.46^\circ \quad (1)$$

on hem usat que $n_i = n_v$, $n_r = n_a$, $\vartheta_i = \vartheta_c$ i $\vartheta_r = 90^\circ$. Així, quan l'angle β és igual a l'angle crític ϑ_c ($\beta = \vartheta_c = 62.46^\circ$), el raig emergeix paral·lel a la cara superior del cub de vidre (fig. 1). Per a angles majors que l'angle crític corresponent a la refracció vidre-aigua, $\beta > \vartheta_c$, es produirà reflexió interna total (fig. 2).

Si hi apliquem la llei de Snell per a la refracció aigua-vidre, podrem calcular l'angle del raig incident ϑ_i que dona lloc a un angle $\beta = \vartheta_c$,

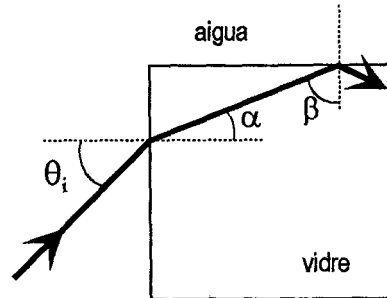
$$n_i \sin \vartheta_i = n_r \sin \alpha \quad (2)$$

on ara el medi d'on prové el raig és l'aigua, el medi on es refracta el raig és el vidre, i α és l'angle de refracció en passar el raig de l'aigua al vidre.



$\beta = \vartheta_c$ (refracció vidre-aigua)

FIG. 1



$\beta > \vartheta_c$ (refracció vidre-aigua)

FIG. 2

Si, segons la fig. 2, tenim en compte que l'angle refractat és $\alpha = 90^\circ - \beta$, de l'eq. (2) tenim que l'angle ϑ_i que forma el raig incident amb la normal a la superfície vertical del cub verifica

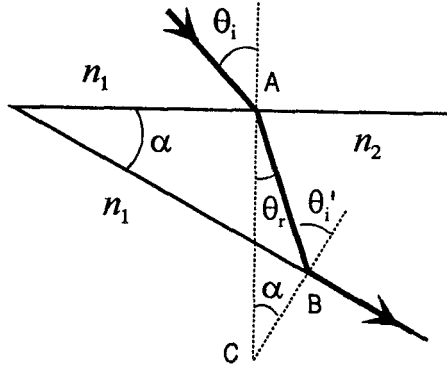
$$\begin{aligned} \sin \vartheta_i &= \frac{n_v}{n_a} \sin(90^\circ - \beta) = \frac{n_v}{n_a} \sin(90^\circ - \vartheta_c) \quad \Rightarrow \\ \sin \vartheta_i &= 0.52 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_i = 31.43^\circ \quad (3) \end{aligned}$$

Si l'angle del raig incident des de l'aigua augmenta respecte del valor obtingut en l'eq. (3), és a dir, si $\vartheta_i > 31.43^\circ$ l'angle α del raig refractat augmenta per la llei de Snell, eq. (2), i, per tant, l'angle β disminueix. Aleshores, l'angle β serà menor que l'angle crític, $\beta < \vartheta_c$, i no hi haurà reflexió total.

Si l'angle del raig incident és menor que el valor donat per l'eq. (3), $\vartheta_i < 31.43^\circ$, això implica que l'angle de refracció α disminueix i l'angle β augmenta. Per tant, l'angle β serà major que l'angle crític, $\beta > \vartheta_c$ i sí que hi haurà reflexió total en la cara interna del cub.

En definitiva, hi haurà reflexió interna total en la cara superior del cub de vidre quan l'angle del raig incident des de l'aigua siga $\vartheta_i < 31.43^\circ$.

17.3 Una làmina de vidre té forma de falca i el seu índex de refracció val 1.75. Sabem que si un raig de llum incideix sobre una de les cares amb un angle de 30° , després de refractar-se incideix sobre l'altra cara formant l'angle crític de reflexió interna total. Si la làmina està envoltada per aire ($n_a = 1$), calculeu l'angle α que formen les dues cares de la làmina entre si.



$n_1 = 1, n_2 = 1.75, \vartheta_i = 30^\circ$
 $\alpha?$

Les rectes perpendiculars a les dues cares del prisma s'intersequen i formen un angle α , que és el mateix que formen les cares del prisma. Si ens fixem en la fig. 1, els angles \hat{A} , \hat{B} i \hat{C} del triangle ABC han de verificar la relació

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \tag{1}$$

Podem observar, segons la fig. 1 i la figura de l'enunciat, que aquests angles tenen els valors: $\hat{A} = \vartheta_r, \hat{B} = 180^\circ - \vartheta'_i$ i $\hat{C} = \alpha$. Si substituïm aquests valors en l'eq. (1), tenim que $\vartheta_r + 180^\circ - \vartheta'_i + \alpha = 180^\circ$, i podem obtenir l'angle α que formen les cares del prisma en funció de l'angle de refracció en la làmina per a la refracció de l'aire al vidre, ϑ_r , i l'angle crític per a la refracció del vidre a l'aire, ϑ'_i ,

$$\alpha = \vartheta'_i - \vartheta_r \tag{2}$$

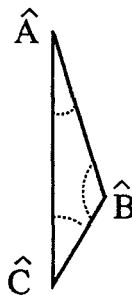


FIG. 1

Ara calcularem l'angle de refracció ϑ_r . Si apliquem la llei de Snell a un raig que passa de l'aire al vidre (punt A de la figura de l'enunciat), tenim que

$$n_i \sin \vartheta_i = n_r \sin \vartheta_r \quad \Rightarrow \quad \sin \vartheta_r = \frac{n_i}{n_r} \sin \vartheta_i \quad \Rightarrow \quad \vartheta_r = 16.60^\circ \quad (3)$$

on $n_i = n_1$ és l'índex de refracció de l'aire, $n_r = n_2$ és l'índex de refracció del vidre i $\vartheta_i = 30^\circ$ és l'angle que forma el raig incident des de l'aire amb la normal a la superfície de separació entre l'aire i la làmina.

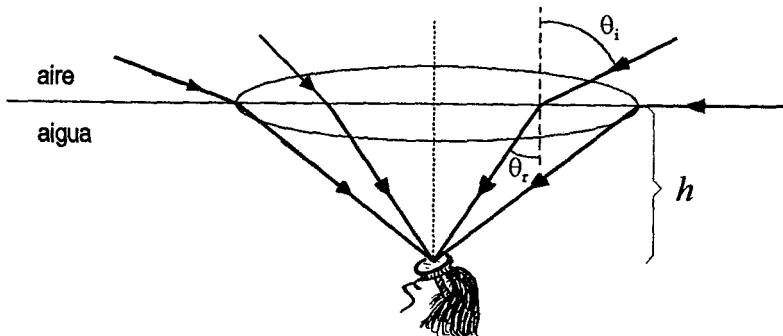
Per a calcular l'angle ϑ'_i apliquem la llei de Snell a un raig que passa del vidre a l'aire amb l'angle crític (punt B de la figura de l'enunciat). Això vol dir que l'angle de refracció és 90° . En aquest cas obtenim

$$n_i \sin \vartheta'_i = n_r \sin 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin \vartheta'_i = \frac{n_r}{n_i} \quad \Rightarrow \quad \vartheta'_i = 34.85^\circ \quad (4)$$

on ara hem usat que $n_i = n_2$ i que $n_r = n_1$. Si ara substituïm aquests valors dels angles ϑ_r i ϑ'_i en l'expressió (2), obtenim que l'angle α que formen les dues cares de la làmina en forma de falca és

$$\alpha = 18.25^\circ \quad (5)$$

17.4 Calculeu l'obertura del con de visió d'una submarinista i l'àrea que veuria sobre la superfície de l'aigua si estiguera situada a 10 m de profunditat. L'índex de refracció de l'aigua i de l'aire valen 1.33 i 1, respectivament.



$n_1 = 1, n_2 = 1.33, h = 10 \text{ m}$

obertura del con de visió?

àrea?

Una observadora amb un angle de visió de 180° , suposant que tinguera facilitat per a girar completament el glòbul ocular, pot veure tot l'horitzó que té al seu davant (fig. 1a). En canvi, si hi ha cap obstacle entre l'observadora i l'horitzó, l'angle de visió serà menor que 180° i hi haurà zones de l'horitzó que no podrà veure (fig. 1b).

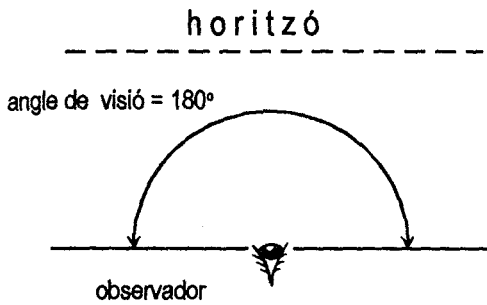


FIG. 1A

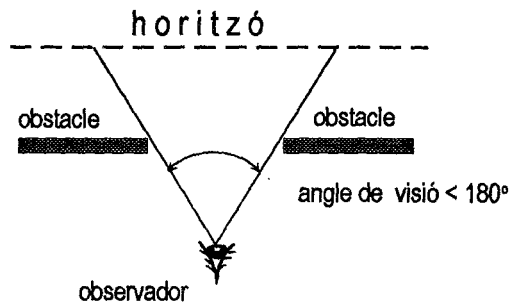


FIG. 1B

En el problema que ens ocupa, la submarinista submergida veurà tots aquells objectes que es troben fora de l'aigua i dels quals li arriben raigs lluminosos, tal com hem representat en la figura de l'enunciat.²⁸ En la fig. 2 apareixen representats els raigs que, provinents de diversos punts de fora de l'aigua, poden arribar fins a la submarinista.

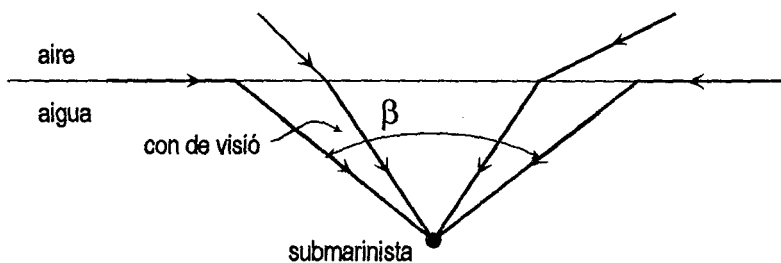


FIG. 2

Segons la llei de Snell es compleix que

$$n_i \sin \vartheta_i = n_r \sin \vartheta_r \quad (1)$$

on n_i i n_r són els índexs de refracció de l'aire i de l'aigua, i ϑ_i i ϑ_r són els angles del raig

²⁸Per a tenir una idea de com veuria un peix sota l'aigua un objecte que estiga en l'aire, podeu consultar el laboratori virtual que es troba en la següent pàgina web: <http://physicsweb.org/TIPTOP/VLAB>, sota el títol "The world above the water surface viewed from fishes eyes".

incident i del refractat, respectivament, respecte de la normal a la superfície de separació dels dos medis.

El con de visió de la submarinista està delimitat pels raigs que provenen de l'exterior de l'aigua amb l'angle màxim d'incidència, $\vartheta_i = 90^\circ$. De manera que si considerem que l'angle dels raigs incidents és $\vartheta_i = 90^\circ$ i el dels raigs refractats és $\vartheta_r = \beta/2$, tal com hem representat en la fig. 3, de la llei de Snell, eq. (1), podem deduir que

$$\frac{\beta}{2} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{aigua}}}\right) = 48.75^\circ \quad (2)$$

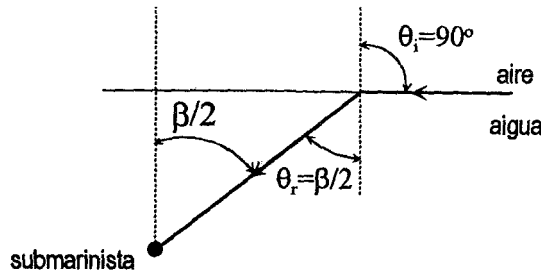


FIG. 3

Lògicament, l'angle β del con de visió de la submarinista valdrà el doble del valor que acabem d'obtenir, és a dir $\beta = 97.50^\circ$.

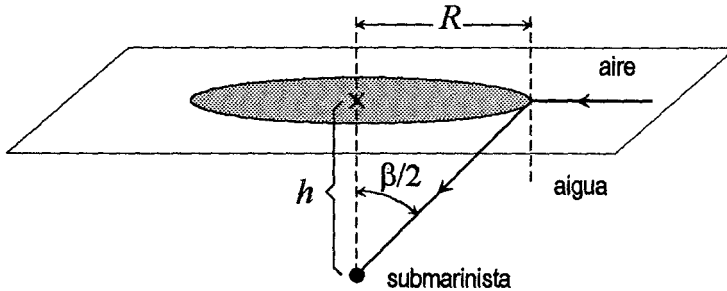


FIG. 4

L'àrea del con de visió de la submarinista serà l'àrea ratllada de la fig. 4, que correspon a l'àrea d'un cercle de radi R , i val $A = \pi R^2$. Per trigonometria (fig. 4) podem calcular la distància R tal com segueix

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{R}{h} \quad \Rightarrow \quad R = h \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (3)$$

on h és la distància vertical des de la submarinista fins a l'aire, i l'àrea A que veuria la

submarinista sobre la superfície de l'aigua serà

$$A = \pi \left[h \tan \left(\frac{\beta}{2} \right) \right]^2 = 408.48 \text{ m}^2 \tag{4}$$

Notem que, aprofitant la reversibilitat del camí òptic, els raigs que li arriben a la submarinista des de l'aire són els mateixos que aquesta pot fer passar des de l'aigua fins a l'aire.

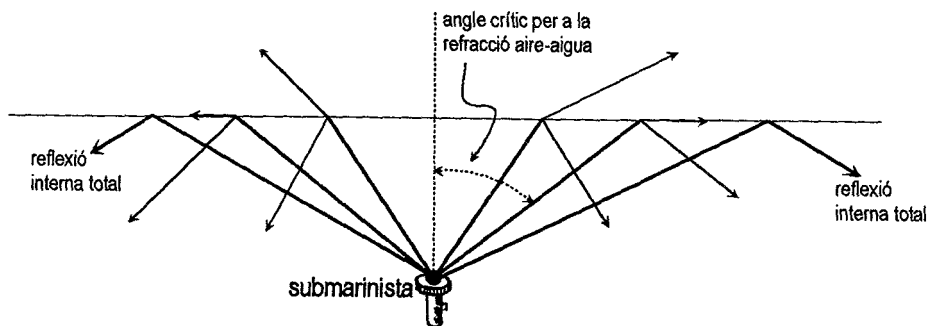


FIG. 5

En general, qualsevol raig que emet la submarinista en part és transmès i en part és reflectit per la superfície aigua-aire, però si l'envia amb un angle superior a l'angle crític per a la refracció aigua-aire, es reflecteix totalment sobre la superfície interior de l'aigua i no passa a l'aire, tal com il·lustra la fig. 5. Així, doncs, la semiobertura del con de visió de la submarinista, $\beta/2$, coincideix amb l'angle crític per a la refracció aigua-aire, el qual verifica la relació

$$\sin \vartheta_c = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{aigua}}} \Rightarrow \vartheta_c = \arcsin \left(\frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{aigua}}} \right) \tag{5}$$

Aquest resultat coincideix amb el que hem obtingut en l'eq. (2).

17.5 Un medi no homogeni estratificat té un índex de refracció que varia segons la direcció Y , això és: $n = n(y)$. Demostreu que l'equació del camí d'un raig en aquest medi és

$$x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{n^2(y)/K^2 - 1}} \tag{6}$$

on K és una constant.

equació del camí d'un raig?

Considerem el medi estratificat com si fóra dividit en capes, cadascuna de les quals té un índex de refracció diferent (però pròxim) al de les capes adjacents (fig. 1). Si apliquem la llei de Snell a la refracció cada dues capes consecutives s'obté que les refraccions successives verifiquen les equacions

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2 \quad (1)$$

$$n_2 \sin \vartheta_2 = n_3 \sin \vartheta_3 \quad (2)$$

$$n_3 \sin \vartheta_3 = n_4 \sin \vartheta_4 \quad (3)$$

$$\dots = \dots \quad (4)$$

En la fig. 1 s'han representat els índexs de refracció en cada capa (n_1, n_2, \dots) i els angles de refracció entre capes consecutives ($\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$). A partir de les eqs. (1)-(4) podem observar que el producte $n \sin \vartheta$ en qualsevol capa és igual al valor que correspon a la primera capa (el qual seria determinat per les condicions inicials d'incidència), i, per tant, es manté constant al llarg del camí del raig dins el medi estratificat. Així, doncs, per a un medi estratificat al llarg de l'eix Y , podem escriure

$$n(y) \sin \vartheta = K \quad (5)$$

on K és una constant especificada per les condicions inicials d'incidència, $n(y)$ és l'índex de refracció en cada valor de la coordenada y del medi estratificat i ϑ és l'angle de refracció en cada punt.

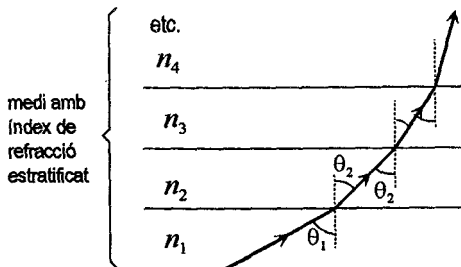


FIG. 1

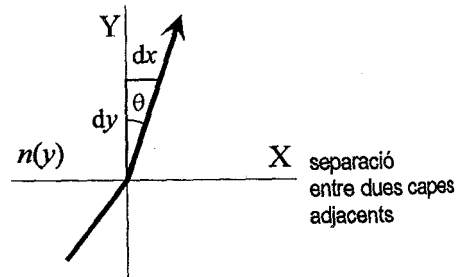


FIG. 2

L'angle de refracció ϑ en cada punt de la trajectòria del raig en el medi no homogeni està relacionat amb l'angle α , representat en la fig. 2, mitjançant

$$\alpha = 90^\circ - \vartheta \quad (6)$$

Per a obtenir l'equació del camí d'un raig hem de relacionar les coordenades x i y del raig en qualsevol moment. Si suposem que el medi està estratificat amb una variació

contínua de l'índex de refracció, per a una variació infinitesimal dy en la direcció de l'eix Y es verifica que (fig. 2)

$$\tan \vartheta = \frac{dx}{dy} \tag{7}$$

Aquesta expressió relaciona la coordenada x amb la coordenada y , i a partir d'aquesta podem calcular l'equació del camí del raig. De l'eq. (7) obtindrem que

$$\frac{dx}{dy} = \tan \vartheta = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta}} \tag{8}$$

Si tenim en compte l'eq. (5) i substituïm $\sin \vartheta = K/n(y)$ en l'eq. (8), quedarà

$$dx = \frac{K/n(y)}{\sqrt{1 - K^2/n^2(y)}} dy \tag{9}$$

Si integrem aquesta expressió,

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{1 - K^2/n^2(y)} n(y)/K} \tag{10}$$

obtindrem que l'equació del camí d'un raig que penetra en aquest medi és

$$x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{n^2(y)/K^2 - 1}} \tag{11}$$

tal com volíem demostrar.

Notem que si $K = 0$, la qual cosa correspon al fet que inicialment el raig incideix perpendicularment sobre la primera superfície ($n_0 \sin \vartheta_0 = 0 \Rightarrow \vartheta_0 = 0$, en la fig. 1), de l'eq. (11) s'obté que

$$x = x_0 + K \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{n^2(y) - K^2}} = x_0 \tag{12}$$

És a dir, en incidència normal, i independentment de la dependència funcional de $n(y)$, la coordenada x del raig té sempre el valor inicial x_0 , per on va entrar el raig (fig. 3a).

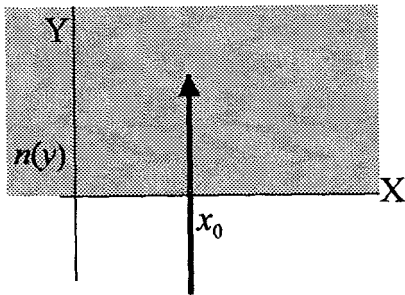


FIG. 3A

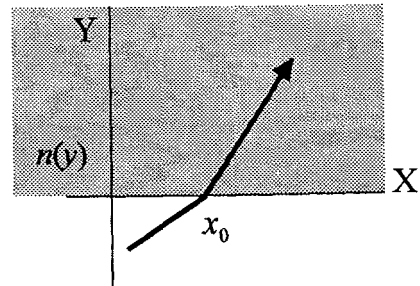


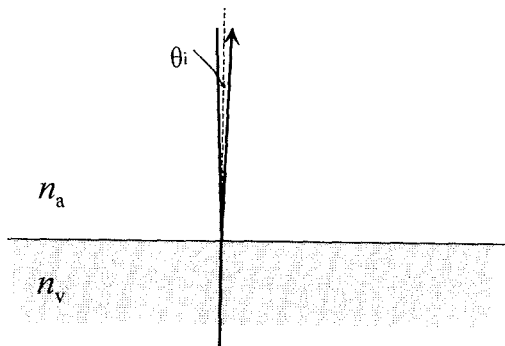
FIG. 3B

Si el medi no és estratificat i $n(y)$ és una constant, $n(y) = n_1$, l'eq. (11) dóna que

$$x = x_0 + K \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{n_1^2 - K^2}} = x_0 + \frac{K}{\sqrt{n_1^2 - K^2}}(y - y_0) \quad (13)$$

que és l'equació d'una recta, la qual cosa representaria propagació rectilínia del raig (fig. 3b).

17.6 Un feix de llum incideix des de l'aire perpendicularment sobre una placa de vidre, l'índex de refracció del qual val 1.5. (a) Calculeu els coeficients i els factors de reflexió i transmissió. (b) Repetiu el càlcul considerant ara que la llum passa del vidre a l'aire. Els índexs de refracció de l'aire i del vidre valen 1 i 1.5, respectivament.



$$n_a = 1, n_v = 1.5, \vartheta_i = 0^\circ$$

- (a) coeficients i factors de reflexió i de transmissió de l'aire al vidre?
 (b) coeficients i factors de reflexió i de transmissió del vidre a l'aire?

Quan parlem de l'amplitud de l'ona electromagnètica que es reflecteix o es transmet, ens referirem als *coeficients* de reflexió i de transmissió, R i T , respectivament. En canvi, si parlem de la intensitat (o energia) de l'ona electromagnètica que es reflecteix o es transmet, usarem el nom de *factors* de reflexió i de transmissió, r i t , respectivament.

Primer farem els càlculs per als coeficients de reflexió i transmissió de l'amplitud de l'ona electromagnètica. Segons les equacions de Fresnel, els coeficients de reflexió R i de transmissió T de l'amplitud de l'ona electromagnètica en els plans perpendicular (\perp) i paral·lel (\parallel) al pla d'incidència són

$$R_{\parallel} = \left(\frac{\mathcal{E}_{0r}}{\mathcal{E}_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \vartheta_r - n_2 \cos \vartheta_i}{n_1 \cos \vartheta_r + n_2 \cos \vartheta_i} \quad (1)$$

$$R_{\perp} = \left(\frac{\mathcal{E}_{0r}}{\mathcal{E}_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_1 \cos \vartheta_i - n_2 \cos \vartheta_r}{n_1 \cos \vartheta_i + n_2 \cos \vartheta_r} \quad (2)$$

$$T_{\parallel} = \left(\frac{\mathcal{E}_{0t}}{\mathcal{E}_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_i}{n_1 \cos \vartheta_r + n_2 \cos \vartheta_i} \quad (3)$$

$$T_{\perp} = \left(\frac{\mathcal{E}_{0t}}{\mathcal{E}_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_i}{n_1 \cos \vartheta_i + n_2 \cos \vartheta_r} \quad (4)$$

n_1 i n_2 són els índexs de refracció dels medis on el feix de llum incideix i on es refracta, respectivament, ϑ_i i ϑ_r són els angles que formen el raig incident i el raig refractat amb la normal a la superfície de separació dels medis 1 i 2, respectivament. Les eqs. (1)-(4) són vàlides quan les permeabilitats dels dos medis coincideixen, pràcticament, amb la del buit.

En les eqs. (1)-(4), les amplituds \mathcal{E}_{0i} , \mathcal{E}_{0r} i \mathcal{E}_{0t} dels camps elèctrics incident, reflectit i transmés, respectivament, estan donades prenent com a referència les amplituds dibuixades en la fig. 1a per al cas de camp elèctric paral·lel al pla d'incidència i en la fig. 1b per al cas de camp elèctric perpendicular al pla d'incidència.

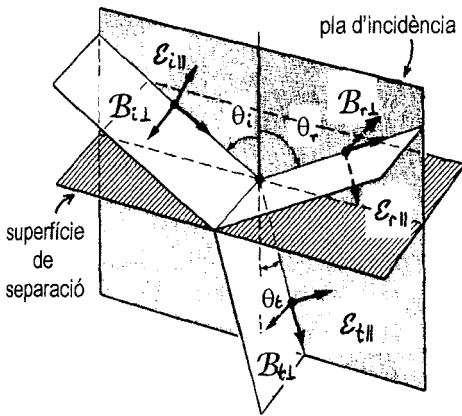


FIG. 1A

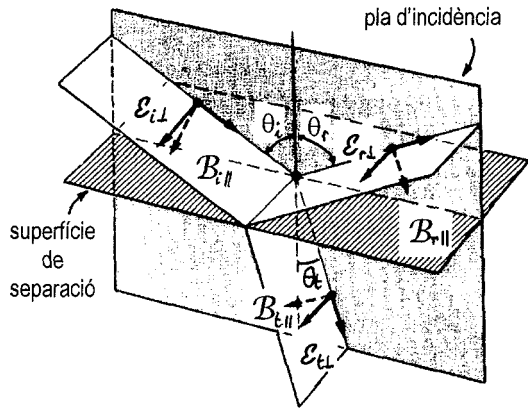


FIG. 1B

(a) Per al cas en què el feix de llum passa de l'aire al vidre, tindrem que l'índex de refracció del medi 1, que és l'aire, val $n_1 = n_a$, i l'índex de refracció del medi 2, que és el vidre, val $n_2 = n_v$. També coneixem que el feix incideix en el vidre perpendicularment. Per tant, l'angle del raig incident és $\vartheta_i = 0^\circ$, i quan apliquem la llei de Snell $n_i \sin \vartheta_i = n_r \sin \vartheta_r$ a un raig que passa de l'aire al vidre, obtenim que l'angle de refracció és $\vartheta_r = 0^\circ$. Si substituïm valors en les expressions (1)-(4), obtenim que els coeficients de reflexió de l'ona electromagnètica (la llum) són els mateixos quan el camp elèctric és paral·lel, R_{\parallel} , o perpendicular, R_{\perp} , al pla d'incidència,

$$R_{\parallel} = R_{\perp} = \frac{n_a - n_v}{n_a + n_v} = -0.2 \quad (5)$$

Anàlogament, per als coeficients de transmissió de la llum quan passa de l'aire al vidre tindrem

$$T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{2n_a}{n_a + n_v} = 0.8 \quad (6)$$

El signe menys que apareix en l'eq. (5) ens indica que, en la reflexió, tant l'ona amb polarització paral·lela com la que té polarització perpendicular al pla d'incidència han

experimentat un canvi de fase de 180° respecte de l'ona incident, tal com es pot apreciar en la figura 2a.

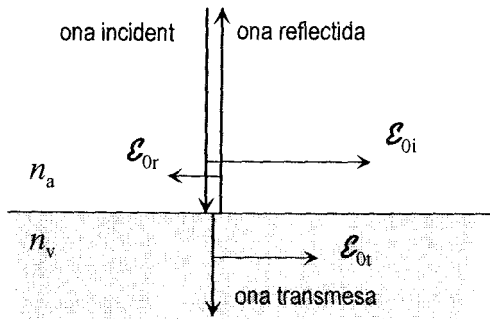


FIG. 2A

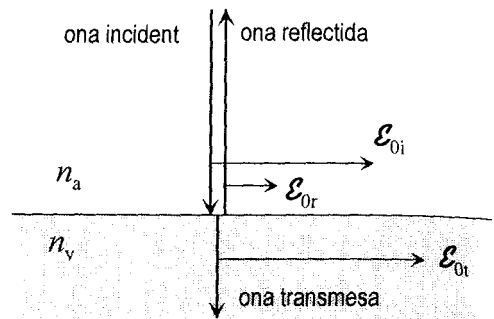


FIG. 2B

L'ona transmesa no canvia mai la fase respecte de l'ona incident, ja que les eqs. (3) i (4) són sempre positives. En canvi, l'ona reflectida sí que pot variar la fase respecte de la incident, ja que les eqs. (1) i (2) poden prendre valor positiu o negatiu segons quins siguin els valors de ϑ_i , ϑ_r , n_1 i n_2 .

(b) Per al cas en què el feix de llum passa del vidre a l'aire tenim, anàlogament al cas anterior, que $n_1 = n_v$, $n_2 = n_a$ i $\vartheta_i = 0^\circ$. I per la llei de Snell aplicada a raigs que passen del vidre a l'aire, obtenim que l'angle de refracció val $\vartheta_r = 0^\circ$, igual que abans. A partir de les eqs. (1)-(4), els coeficients de reflexió i de transmissió seran,

$$R_{\parallel} = R_{\perp} = \frac{n_v - n_a}{n_v + n_a} = 0.2 \quad (7)$$

$$T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{2n_v}{n_v + n_a} = 1.2 \quad (8)$$

En aquest cas, l'ona reflectida no ha variat la fase respecte de l'ona incident, ja que tots els coeficients de reflexió i de transmissió són positius. En la fig. 2b apareixen representades les amplituds dels camps elèctrics associats a les ones incident, reflectida i transmesa.

(a') A continuació farem els càlculs dels factors de reflexió i de transmissió, que fan referència a la intensitat (o l'energia) de l'ona electromagnètica. El factor de reflexió r corresponent a la intensitat mitjana de l'ona electromagnètica val

$$r = \frac{\bar{I}_r}{\bar{I}_i} \quad (9)$$

i el factor de transmissió t és

$$t = \frac{\bar{I}_t}{\bar{I}_i} \quad (10)$$

on \bar{I}_r és la intensitat mitjana de l'ona electromagnètica reflectida, \bar{I}_t és la intensitat mitjana de l'ona transmesa i \bar{I}_i és la intensitat mitjana de l'ona electromagnètica incident.

En tot allò que segueix caracteritzarem l'ona electromagnètica pel valor del camp elèctric associat -ja que el camp magnètic s'obtidria immediatament a partir del camp elèctric i de la direcció en què viatja l'ona.

La velocitat de propagació d'una ona electromagnètica en un medi val $v = 1/(\epsilon\mu)^{1/2} = c/n$, on n és l'índex de refracció, ϵ la permitivitat (o constant dielèctrica) i μ la permeabilitat del medi. La intensitat mitjana de l'ona electromagnètica està relacionada amb l'amplitud \mathcal{E}_0 del camp elèctric mitjançant

$$\bar{I} = \frac{1}{2} v \epsilon \mathcal{E}_0^2 \quad (11)$$

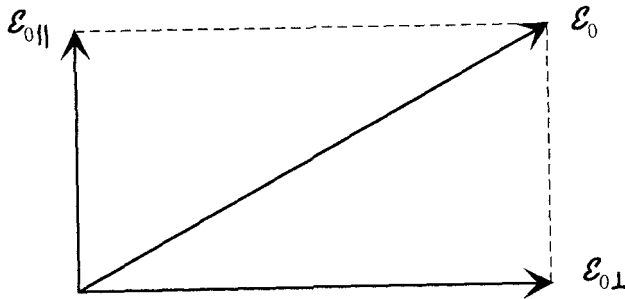


FIG. 3

Per això, en el cas de l'ona que viatja en l'aire, tindrem

$$\bar{I} = \frac{1}{2} v_a \epsilon_a \mathcal{E}_0^2 \quad (12)$$

i en el cas de l'ona en el vidre, tindrem

$$\bar{I} = \frac{1}{2} v_v \epsilon_v \mathcal{E}_0^2 \quad (13)$$

on els subíndexs a i v fan referència a l'aire i al vidre, respectivament.

L'amplitud \mathcal{E}_0 de l'ona electromagnètica està relacionada amb els components paral·lel, $\mathcal{E}_{0||}$, i perpendicular, $\mathcal{E}_{0\perp}$, de l'amplitud (fig. 3) per la relació

$$\mathcal{E}_0^2 = \mathcal{E}_{0||}^2 + \mathcal{E}_{0\perp}^2 \quad (14)$$

Si en l'eq. (9) fem la substitució de la intensitat de l'ona electromagnètica, eq. (12), usant l'amplitud del camp elèctric reflectit podem obtenir el factor de reflexió r per al cas en què el feix de llum incideix sobre la superfície aire-vidre perpendicularment a la superfície de separació entre ambdós medis,

$$r = \frac{\bar{I}_r}{\bar{I}_i} = \frac{v_a \epsilon_a \mathcal{E}_{0r}^2 / 2}{v_a \epsilon_a \mathcal{E}_{0i}^2 / 2} = \left(\frac{\mathcal{E}_{0r}}{\mathcal{E}_{0i}} \right)^2 \quad (15)$$

on v_a és la velocitat de la llum en l'aire. Anàlogament, per al factor de transmissió t , tenim

$$t = \frac{\bar{I}_t}{\bar{I}_i} = \frac{v_v \epsilon_v \mathcal{E}_{0t}^2/2}{v_a \epsilon_a \mathcal{E}_{0i}^2/2} = \frac{v_v \epsilon_v}{v_a \epsilon_a} \left(\frac{\mathcal{E}_{0t}}{\mathcal{E}_{0i}} \right)^2 \quad (16)$$

on v_v és la velocitat de la llum en el vidre. En les expressions anteriors, \mathcal{E}_{0i} , \mathcal{E}_{0r} i \mathcal{E}_{0t} són, respectivament, les amplituds del camp elèctric de l'ona electromagnètica incident, reflectida i transmesa. Per altra banda, si escrivim l'amplitud del camp elèctric de cadascuna d'aquestes ones electromagnètiques en funció de els seus components paral·lel i perpendicular, tindrem

$$\mathcal{E}_{0i}^2 = \mathcal{E}_{0i,\parallel}^2 + \mathcal{E}_{0i,\perp}^2 \quad (17)$$

$$\mathcal{E}_{0r}^2 = \mathcal{E}_{0r,\parallel}^2 + \mathcal{E}_{0r,\perp}^2 \quad (18)$$

$$\mathcal{E}_{0t}^2 = \mathcal{E}_{0t,\parallel}^2 + \mathcal{E}_{0t,\perp}^2 \quad (19)$$

Per la definició del coeficient de reflexió per a l'amplitud de l'ona electromagnètica, sabem que el component paral·lel de l'amplitud de l'ona electromagnètica reflectida, $\mathcal{E}_{0r,\parallel}$, és igual al coeficient de reflexió R_{\parallel} multiplicat pel component paral·lel de l'amplitud de l'ona incident, $\mathcal{E}_{0i,\parallel}$,

$$\mathcal{E}_{0r,\parallel} = R_{\parallel} \mathcal{E}_{0i,\parallel} \quad (20)$$

Es pot establir una relació similar per a l'altre component de l'amplitud de l'ona reflectida, $\mathcal{E}_{0r,\perp}$,

$$\mathcal{E}_{0r,\perp} = R_{\perp} \mathcal{E}_{0i,\perp} \quad (21)$$

Si substituïm aquests resultats, eqs. (20) i (21), en les eqs. (17)-(19), s'obté que l'amplitud \mathcal{E}_{0r} de l'ona electromagnètica reflectida val

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{0r}^2 &= (R_{\parallel} \mathcal{E}_{0i,\parallel})^2 + (R_{\perp} \mathcal{E}_{0i,\perp})^2 = \left(\frac{n_a - n_v}{n_a + n_v} \right)^2 (\mathcal{E}_{0i,\parallel}^2 + \mathcal{E}_{0i,\perp}^2) \\ &= \left(\frac{n_a - n_v}{n_a + n_v} \right)^2 \mathcal{E}_{0i}^2 \end{aligned} \quad (22)$$

on hem considerat que els components paral·lel, R_{\parallel} , i perpendicular, R_{\perp} , del coeficient de reflexió de l'ona electromagnètica són els mateixos, eq. (5). Un tractament similar per a l'ona transmesa ens dóna

$$\mathcal{E}_{0t}^2 = \left(\frac{2n_a}{n_a + n_v} \right)^2 (\mathcal{E}_{0i,\parallel}^2 + \mathcal{E}_{0i,\perp}^2) = \left(\frac{2n_a}{n_a + n_v} \right)^2 \mathcal{E}_{0i}^2 \quad (23)$$

Després de substituir l'eq. (22) en l'eq. (15), arribem al factor de reflexió r per a la intensitat de l'ona electromagnètica

$$r = \left(\frac{n_a - n_v}{n_a + n_v} \right)^2 = 0.04 \quad (24)$$

Si considerem que la permeabilitat de l'aire i del vidre són les mateixes que la del buit ($\mu_a \approx \mu_v \approx \mu_0$), la qual cosa succeeix en molts materials, podem escriure

$$\frac{\epsilon_v}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_v \mu_v}{\epsilon_a \mu_a} = \frac{1/v_v^2}{1/v_a^2} = \left(\frac{v_a}{v_v}\right)^2 \quad (25)$$

En aquest cas, després de substituir l'expressió (23) en l'eq. (16), el factor de transmissió t per a l'ona electromagnètica és

$$t = \frac{v_a}{v_v} \left(\frac{2n_a}{n_a + n_v} \right)^2 \quad (26)$$

i si tenim en compte que

$$\frac{v_a}{v_v} = \frac{c}{v_v} \frac{v_a}{c} = \frac{n_v}{n_a} \quad (27)$$

escriurem finalment

$$t = \frac{4n_v n_a}{(n_v + n_a)^2} = 0.96 \quad (28)$$

(b') Per al cas en què el raig de llum incideix des del vidre cap a l'aire, únicament hem d'intercanviar n_a per n_v en les eqs. (15), (16), (24) i (28), ja que on abans teníem aire ara tenim vidre, i viceversa. Anàlogament al cas anterior, el resultat per als factors de reflexió i de transmissió de l'ona electromagnètica, després d'adaptar les equacions a aquest cas, és

$$r = \frac{v_v \epsilon_v \mathcal{E}_{0r}^2/2}{v_v \epsilon_v \mathcal{E}_{0i}^2/2} = \left(\frac{n_v - n_a}{n_v + n_a} \right)^2 = 0.04 \quad (29)$$

$$t = \frac{v_a \epsilon_a \mathcal{E}_{0t}^2/2}{v_v \epsilon_v \mathcal{E}_{0i}^2/2} = \frac{4n_a n_v}{(n_v + n_a)^2} = 0.96 \quad (30)$$

Observeu que la intensitat (la qual està relacionada amb l'energia) de l'ona electromagnètica es conserva: $r + t = 0.04 + 0.96 = 1$. És a dir, la suma de les intensitats de l'ona reflectida i transmesa és igual a la intensitat de l'ona incident, tant en el cas (a') com en el (b').

Podríem haver abreujat els càlculs si tenim en compte que en incidència normal no està definit el pla d'incidència i, per tant, no té sentit distingir entre polarització perpendicular i paral·lela, de manera que només hi ha un tipus de coeficient de reflexió, $R = R_{\parallel} = R_{\perp}$ i de transmissió, $T = T_{\parallel} = T_{\perp}$, i un tipus de factor de reflexió, $r = r_{\parallel} = r_{\perp}$, i de transmissió, $t = t_{\parallel} = t_{\perp}$, tal com hem vist abans fent els càlculs explícitament.

El càlcul del factor de transmissió també es podria haver simplificat si tenim en compte que la intensitat de l'ona es conserva, de forma que la intensitat incident és igual a la intensitat reflectida més la intensitat transmesa

$$\bar{I}_i = \bar{I}_r + \bar{I}_t \quad (31)$$

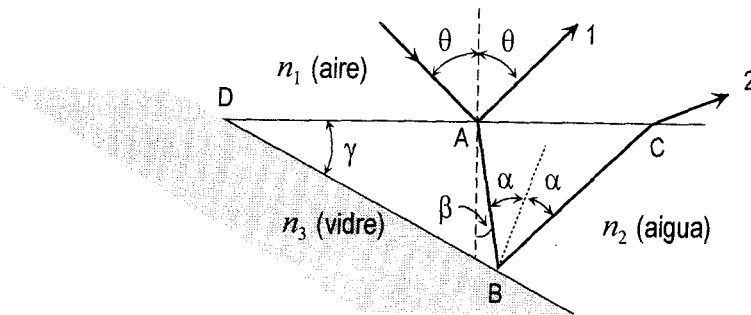
i si dividim per \bar{I}_i tota aquesta expressió, obtenim, segons les eqs. (15) i (16), que

$$1 = r + t \quad (32)$$

Per tant, després de calcular r obtenim que t val

$$t = 1 - r \quad (33)$$

17.7 La llum incideix des de l'aire sobre una superfície d'aigua, amb un angle tal que la llum reflectida (raig 1 de la figura) està completament polaritzada en un pla perpendicular al pla d'incidència. Un bloc de vidre, que té la superfície superior plana, està submergit dins l'aigua tal com s'indica en la figura. La llum reflectida en la superfície del vidre (raig 2 de la figura) està totalment polaritzada en un pla perpendicular al pla d'incidència. Determineu l'angle format per les superfícies de l'aigua i del vidre. (Els índexs de refracció de l'aire, de l'aigua i del vidre valen 1, 1.333 i 1.5, respectivament).



$$n_1 = 1, n_2 = 1.333, n_3 = 1.5$$

raigs 1 i 2 totalment polaritzats en un pla perpendicular al d'incidència
 γ ?

La polarització total del feix de llum reflectit s'obté quan el raig incident forma un angle amb la normal a la superfície determinat per la llei de Brewster. Quan un raig incideix sobre una superfície formant l'angle de Brewster, ϑ_B , tal com representa la fig. 1, el raig reflectit està totalment polaritzat en la direcció perpendicular al pla determinat pels raigs incident i reflectit (és a dir, el pla d'incidència).

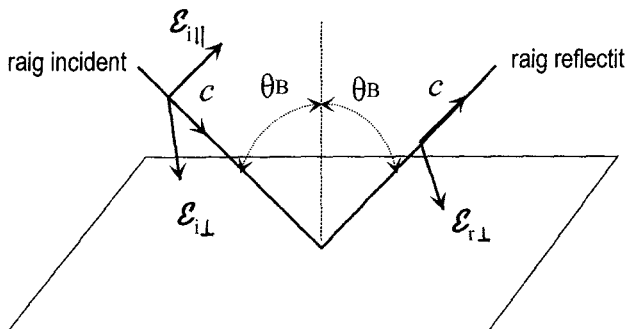


FIG. 1

L'angle de Brewster corresponent a la incidència des del medi amb índex n_1 cap al medi amb índex n_2 verifica la relació

$$\tan \vartheta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (1)$$

Si ens fixem en el triangle DAB, representat en la fig. 2, tenim que la suma dels angles interns val $\hat{D} + \hat{A} + \hat{B} = \pi$, i per la figura podem comprovar que el valor d'aquests angles és $\hat{D} = \gamma$, $\hat{A} = (\beta + \pi/2)$ i $\hat{B} = (\pi/2 - \alpha)$. Si substituïm valors, obtenim $\gamma + \beta + \pi/2 + \pi/2 - \alpha = \pi$. És a dir, l'angle γ que formen les superfícies de l'aigua i del vidre val

$$\gamma = \alpha - \beta \quad (2)$$

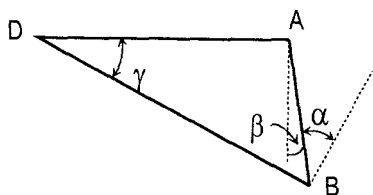


FIG. 2

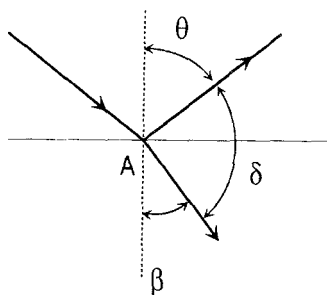


FIG. 3

Càlcul de l'angle α : Aquest és l'angle que forma amb la normal a la superfície de vidre el raig que incideix des de l'aigua cap al vidre (raig que incideix en el punt B de la figura de l'enunciat). Com que el raig 2 està totalment polaritzat en la direcció perpendicular al pla d'incidència, això vol dir que la llum ha incidit amb l'angle de Brewster sobre el vidre; per tant, l'angle α és igual a l'angle de Brewster per a la reflexió aigua-vidre. Segons l'eq. (1), tenim

$$\tan \vartheta_{B,\text{aigua-vidre}} = \frac{n_{\text{vidre}}}{n_{\text{aigua}}} = \frac{1.5}{1.333} = 1.125 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = \vartheta_{B,\text{aigua-vidre}} = 48.37^\circ \quad (3)$$

Càlcul de l'angle β : La polarització total del raig 1 de la figura inicial en un pla perpendicular al d'incidència ens diu que el valor de l'angle d'incidència ϑ per a la reflexió aire-aigua coincideix amb l'angle de Brewster per a la reflexió aire-aigua, el qual verificarà que

$$\tan \vartheta_{B,\text{aire-aigua}} = \frac{n_{\text{aigua}}}{n_{\text{aire}}} = \frac{1.333}{1} = 1.333 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \vartheta_{B,\text{aire-aigua}} = 53.12^\circ \quad (4)$$

Si coneixem l'angle ϑ del raig incident des de l'aire, calcularem l'angle β aplicant la llei de Snell a la refracció aire-aigua, ja que β és l'angle de refracció. És a dir,

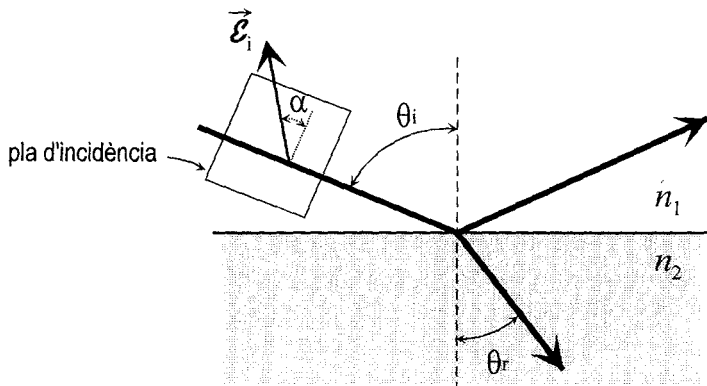
$$n_1 \sin \vartheta = n_2 \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \vartheta = 0.60 \quad \Rightarrow \quad \beta = 36.87^\circ \quad (5)$$

Si substituïm els valors dels angles α i β en l'eq. (2), obtenim l'angle γ format per les superfícies de l'aigua i del vidre,

$$\gamma = 11.50^\circ \quad (6)$$

Noteu que quan el feix de llum incideix amb l'angle de Brewster, el raig reflectit i el refractat formen entre si un angle recte, $\delta = 90^\circ$. Per exemple, en la superfície aire-aigua l'angle del raig reflectit val $\vartheta = 53.12^\circ$ i l'angle de refracció és $\beta = 36.87^\circ$, i a partir de la fig. 3 obtenim que $\delta = 180^\circ - (\vartheta + \beta) = 90.01^\circ$. Aquest valor difereix lleugerament dels 90° esperats, a causa dels arrodoniments que hem hagut de fer per a escriure els resultats amb unes poques xifres decimals.

17.8 Una ona lluminosa plana i polaritzada linealment es propaga en l'aire i incideix sobre una superfície d'aigua amb un angle d'incidència de 70° . El vector camp elèctric de l'ona forma un angle de 45° amb el pla d'incidència. Calculeu el factor de reflexió de la intensitat lluminosa. (Els índexs de refracció de l'aire i de l'aigua valen 1 i 1.333, respectivament).



$$n_1 = 1, n_2 = 1.333, \vartheta_i = 70^\circ, \alpha = 45^\circ$$

$r?$

El factor de reflexió r de l'energia o de la intensitat lluminosa (la qual està relacionada amb l'energia) d'una ona electromagnètica és

$$r = \frac{\bar{I}_r}{\bar{I}_i} \quad (1)$$

on \bar{I}_r és la intensitat mitjana de l'ona electromagnètica reflectida i \bar{I}_i és la intensitat mitjana de l'ona electromagnètica incident. Les ones electromagnètiques reflectida i incident es troben en l'aire, i la intensitat mitjana de l'ona electromagnètica val

$$\bar{I} = \frac{1}{2} v_a \epsilon_a \mathcal{E}_0^2 \quad (2)$$

on ϵ_a és la constant dielèctrica de l'aire, v_a és la velocitat de la llum en l'aire²⁹ i \mathcal{E}_0 és l'amplitud del camp elèctric de l'ona electromagnètica. Per tant, si substituïm en l'eq. (1) aquest valor de la intensitat mitjana, el factor de reflexió r serà

$$r = \frac{v_a \epsilon_a \mathcal{E}_{0r}^2/2}{v_a \epsilon_a \mathcal{E}_{0i}^2/2} = \frac{\mathcal{E}_{0r}^2}{\mathcal{E}_{0i}^2} \quad (3)$$

que depèn només de les amplituds del camp elèctric de l'ona electromagnètica reflectida, \mathcal{E}_{0r} , i de l'ona incident, \mathcal{E}_{0i} . Si descomponem (fig. 1) l'amplitud \mathcal{E}_0 del camp elèctric de l'ona electromagnètica en els seus components paral·lel, $\mathcal{E}_{0,\parallel}$, i perpendicular, $\mathcal{E}_{0,\perp}$, al pla d'incidència, és a dir, $\mathcal{E}_0^2 = \mathcal{E}_{0,\parallel}^2 + \mathcal{E}_{0,\perp}^2$, ens queda que el factor de reflexió val

$$r = \frac{\mathcal{E}_{0r,\parallel}^2 + \mathcal{E}_{0r,\perp}^2}{\mathcal{E}_{0i,\parallel}^2 + \mathcal{E}_{0i,\perp}^2} \quad (4)$$

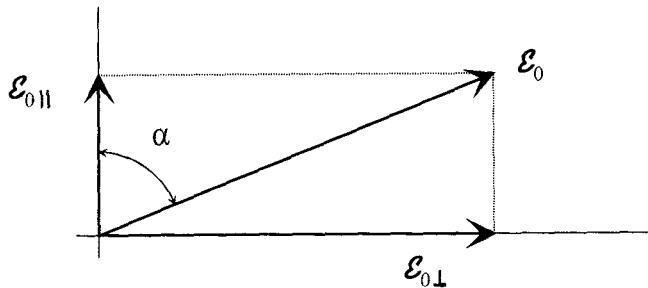


FIG. 1

Sabem que el coeficient de reflexió R (per a l'amplitud de l'ona electromagnètica) està relacionat amb l'amplitud del camp elèctric de l'ona electromagnètica mitjançant les relacions

$$R_{\parallel} = \frac{\mathcal{E}_{0r,\parallel}}{\mathcal{E}_{0i,\parallel}} \quad R_{\perp} = \frac{\mathcal{E}_{0r,\perp}}{\mathcal{E}_{0i,\perp}} \quad (5)$$

on R_{\parallel} i R_{\perp} són els components paral·lel i perpendicular del coeficient de reflexió. En substituir aquestes expressions, obtindrem que el factor de reflexió val

$$r = \frac{R_{\parallel}^2 \mathcal{E}_{0i,\parallel}^2 + R_{\perp}^2 \mathcal{E}_{0i,\perp}^2}{\mathcal{E}_{0i,\parallel}^2 + \mathcal{E}_{0i,\perp}^2} \quad (6)$$

Ara fem ús de la dada inicial sobre el vector camp elèctric que incideix i forma un angle de 45° amb el pla d'incidència; això vol dir que els components paral·lel i perpendicular de l'amplitud del camp elèctric de l'ona electromagnètica són iguals: $\mathcal{E}_{0i,\parallel} = \mathcal{E}_{0i,\perp}$ (ja que $\mathcal{E}_{0i,\parallel} = \mathcal{E}_{0i} \cos 45^\circ$ i $\mathcal{E}_{0i,\perp} = \mathcal{E}_{0i} \sin 45^\circ$). Això ens permet simplificar en l'expressió (6), i el factor de reflexió r serà

$$r = \frac{R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2}{2} \quad (7)$$

²⁹ Que val, aproximadament, la velocitat de la llum en el buit.

Per a calcular els coeficients de reflexió de l'amplitud de l'ona electromagnètica, R_{\parallel} i R_{\perp} , respectivament, empren les equacions de Fresnel,³⁰

$$R_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \vartheta_r - n_2 \cos \vartheta_i}{n_1 \cos \vartheta_r + n_2 \cos \vartheta_i} \quad R_{\perp} = \frac{n_1 \cos \vartheta_i - n_2 \cos \vartheta_r}{n_1 \cos \vartheta_i + n_2 \cos \vartheta_r} \quad (8)$$

on l'única dada que cal conèixer ara és l'angle de refracció ϑ_r de l'ona en l'aigua. Per la llei de Snell, quan l'ona passa de l'aire a l'aigua, tenim

$$n_1 \sin \vartheta_i = n_2 \sin \vartheta_r \quad (9)$$

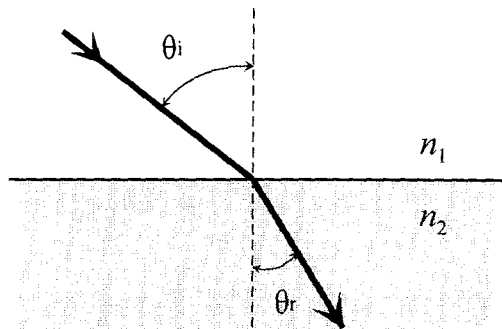
on n_1 és l'índex de refracció de l'aire, n_2 és l'índex de refracció de l'aigua i ϑ_i és l'angle del raig incident, que val 70° . Amb tot això s'obté que l'angle de refracció val $\vartheta_r = 44.825^\circ$. Per tant, obtindrem que els coeficients de reflexió de l'ona electromagnètica seran

$$R_{\parallel} = 0.374 \quad R_{\perp} = -0.592 \quad (10)$$

i, a partir de l'eq. (7), el factor de reflexió r de la intensitat lluminosa de l'ona electromagnètica val

$$r = 0.245 \quad (11)$$

17.9 Un feix de llum polaritzada circularment incideix des de l'aigua sobre una superfície de vidre, formant un angle de 45° amb la normal a la superfície. Descriu amb detall l'estat de polarització dels feixos reflectit i refractat. (Els índexs de refracció de l'aigua i del vidre valen 1.333 i 1.55, respectivament).



$$\vartheta_i = 45^\circ, n_1 = 1.333, n_2 = 1.55$$

$$\text{ona incident polaritzada circularment} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_{i,\perp} = \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t) \\ \mathcal{E}_{i,\parallel} = \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t + \pi/2) \end{cases}$$

polarització de l'ona reflectida?

polarització de l'ona transmesa?

³⁰Aquestes equacions es poden aplicar quan les permeabilitats dels medis involucrats són molt similars a la del buit ($\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$), la qual cosa ocorre molt sovint.

En tot aquest problema caracteritzarem l'ona electromagnètica mitjançant el seu vector camp elèctric \mathcal{E} .

Els components paral·lel i perpendicular, respecte al pla d'incidència, de l'amplitud de l'ona electromagnètica reflectida i transmesa estan relacionats amb els components de l'ona incident, $\mathcal{E}_{i,\parallel}$ i $\mathcal{E}_{i,\perp}$, i amb els coeficients de reflexió, R , i transmissió, T , per

$$\mathcal{E}_{r,\parallel} = R_{\parallel} \mathcal{E}_{i,\parallel} \quad \mathcal{E}_{r,\perp} = R_{\perp} \mathcal{E}_{i,\perp} \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_{t,\parallel} = T_{\parallel} \mathcal{E}_{i,\parallel} \quad \mathcal{E}_{t,\perp} = T_{\perp} \mathcal{E}_{i,\perp} \quad (2)$$

Per altra banda, la llei de Snell aplicada a la refracció del feix de llum quan passa de l'aigua cap al vidre ens dóna

$$n_1 \sin \vartheta_i = n_2 \sin \vartheta_r \quad (3)$$

on n_1 és l'índex de refracció de l'aigua, n_2 és l'índex de refracció del vidre i ϑ_i és l'angle que forma el raig incident en relació amb la normal a la superfície del vidre. Com que coneixem tots aquests valors, podem calcular el valor de l'angle de refracció en el vidre, que val $\vartheta_r = 37.453^\circ$.

Per les equacions de Fresnel coneixem que els coeficients de reflexió i de transmissió, quan \mathcal{E} és paral·lel o perpendicular al pla d'incidència, són

$$R_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \vartheta_r - n_2 \cos \vartheta_i}{n_1 \cos \vartheta_r + n_2 \cos \vartheta_i} \quad R_{\perp} = \frac{n_1 \cos \vartheta_i - n_2 \cos \vartheta_r}{n_1 \cos \vartheta_i + n_2 \cos \vartheta_r} \quad (4)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_i}{n_1 \cos \vartheta_r + n_2 \cos \vartheta_i} \quad T_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_i}{n_1 \cos \vartheta_i + n_2 \cos \vartheta_r} \quad (5)$$

Si substituïm els valors coneguts de n_1 , n_2 , ϑ_i i ϑ_r obtenim que els components dels coeficients de reflexió i de transmissió per a l'amplitud de l'ona electromagnètica valen

$$R_{\parallel} = 0.098 \quad R_{\perp} = -0.244 \quad T_{\parallel} = 0.776 \quad T_{\perp} = 0.756 \quad (6)$$

Considerem que l'ona es propaga en el sentit positiu de l'eix X , per això escriurem $kx - \omega t$ en l'argument de la funció harmònica que descriu matemàticament l'ona.

Sabem que l'ona incident està polaritzada circularment. Això significa que els components paral·lel i perpendicular (respecte al pla d'incidència) de l'amplitud del camp elèctric incident són iguals, però estan desfasades en $\pi/2$, és a dir,

$$\mathcal{E}_{i,\perp} = \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t) \quad \mathcal{E}_{i,\parallel} = \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t + \pi/2) \quad (7)$$

Hem usat un desfasament $+\pi/2$ per a indicar una polarització dextrògira, però podríem haver resolt també el problema considerant una polarització levògira (i, per tant, emprant $-\pi/2$).³¹

A partir de les eqs. (1), tenim per a l'ona electromagnètica reflectida

$$\mathcal{E}_{r,\parallel} = 0.098 \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t + \pi/2) \quad (8)$$

³¹Si observem l'ona electromagnètica polaritzada circularment acostant-se cap a nosaltres, el camp elèctric pot girar en el sentit horari o en el sentit antihorari. Per conveni, en el primer cas se'n diu que la polarització circular és dextrògira, mentre que en el segon cas és levògira.

$$\mathcal{E}_{r,\perp} = -0.244 \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t) = 0.244 \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t + \pi) \quad (9)$$

El desfasament entre els dos components del camp elèctric de l'ona electromagnètica reflectida és $\pi/2$, però les amplituds dels dos components són diferents. Per tant, la polarització de l'ona electromagnètica reflectida és el·líptica $\mathcal{E}_{0r,\parallel} \neq \mathcal{E}_{0r,\perp}$, i amb sentit de gir oposat al d'abans (ara el component perpendicular, $\mathcal{E}_{r,\perp}$, va per davant del component paral·lel, $\mathcal{E}_{r,\parallel}$).

Anàlogament, segons les eqs. (2), per a l'ona electromagnètica transmesa tenim

$$\mathcal{E}_{t,\parallel} = 0.776 \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t + \pi/2) \quad (10)$$

$$\mathcal{E}_{t,\perp} = 0.756 \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t) \quad (11)$$

El desfasament entre els dos components de l'ona electromagnètica transmesa és $\pi/2$, i les amplituds són diferents. Per tant, l'ona transmesa té polarització el·líptica, igual que passava amb l'ona reflectida. El component paral·lel del camp elèctric de l'ona transmesa, $\mathcal{E}_{t,\parallel}$, duu un desfasament de $\pi/2$ per davant del component perpendicular, $\mathcal{E}_{t,\perp}$, igual que en el cas de l'ona electromagnètica que incideix, i el sentit de gir és el mateix que el de l'ona incident.

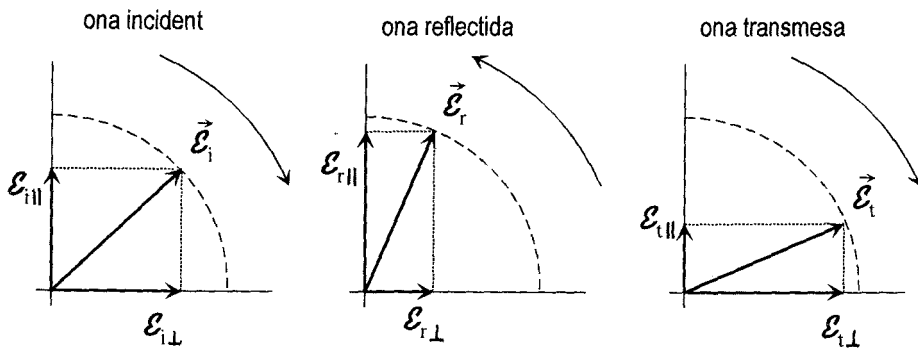
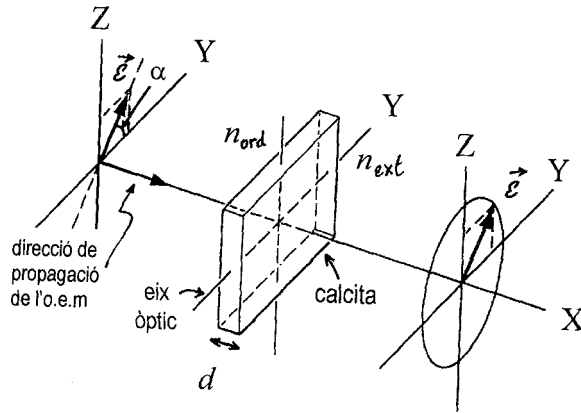


FIG. 1

En la fig. 1 representem esquemàticament els components i els sentits de gir de les ones incident, reflectida i transmesa, respectivament.

17.10 Un feix de llum de sodi polaritzada linealment incideix perpendicularment sobre una làmina de calcita, els costats oposats de la qual estan tallats paral·lelament a l'eix òptic. La longitud d'ona de la llum de sodi és 5890 \AA i el vector camp elèctric forma un angle de 45° amb l'eix òptic. Calculeu el gruix de la làmina per tal que la llum emergent estiga polaritzada circularment. (Els índexs de refracció ordinari i extraordinari de la calcita per a la llum de 5890 \AA són, respectivament, $n_{\text{ord}} = 1.6583$ i $n_{\text{ext}} = 1.4864$).



$\lambda = 5890 \text{ \AA} = 5.89 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, $n_{ord} = 1.6583$, $n_{ext} = 1.4864$, $\alpha = 45^\circ$
 d , per tal que la llum emergent estiga polaritzada circularment?

Segons la figura de l'enunciat, perquè la llum emergent estiga polaritzada circularment s'ha de verificar, per una banda, que el desfasament entre els components \mathcal{E}_y i \mathcal{E}_z (és a dir, entre \mathcal{E}_{ext} i \mathcal{E}_{ord}) del camp elèctric siga $\pi/2$ o un múltiple sencer imparell de $\pm\pi/2$

$$\delta = \pm(2N + 1)\frac{\pi}{2} \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Per altra part, les amplituds de l'ona ordinària, \mathcal{E}_{ord} , i extraordinària, \mathcal{E}_{ext} , han de ser iguals.

Per a l'ona incident, que es propaga al llarg de l'eix X de la figura de l'enunciat, tenim que els components del camp elèctric són

$$\mathcal{E}_{ord} = \mathcal{E}_0 \cos \alpha \sin(k_{ord}x - \omega t) \quad (2)$$

$$\mathcal{E}_{ext} = \mathcal{E}_0 \sin \alpha \sin(k_{ext}x - \omega t) \quad (3)$$

on $\alpha = 45^\circ$ és l'angle que forma el camp elèctric amb l'eix Y i \mathcal{E}_0 és l'amplitud del camp elèctric; k_{ord} i k_{ext} són els nombres d'ona dels raigs ordinari i extraordinari, respectivament. Com que aquesta ona incident té polarització lineal, el desfasament entre les components del camp elèctric és nul i les amplituds són iguals. L'ona no té component x perquè la propagació és al llarg de l'eix X.

Com que la incidència de l'ona electromagnètica sobre la calcita és normal a la seua superfície, a partir de les equacions de Fresnel (vegeu l'apartat a del problema 17.6) s'obté que les amplituds de les ones transmeses dins la calcita seran iguals entre si, encara que diferents de les amplituds de l'ona incident. El desfasament δ entre les dues ones (ordinària i extraordinària) és

$$\delta = (k_{ext} - k_{ord}) d \quad (4)$$

Expressarem ara el desfasament δ en termes de les dades inicials del problema: λ , n_{ord} i n_{ext} . Per a fer això usem la relació entre el nombre d'ona i la longitud d'ona, $k = 2\pi/\lambda$, i reescrivim l'eq. (4) en la forma

$$\delta = 2\pi d \left(\frac{1}{\lambda_{ext}} - \frac{1}{\lambda_{ord}} \right) \quad (5)$$

Si ara apliquem a les ones ordinària i extraordinària la relació entre la longitud d'ona, la freqüència i la velocitat de l'ona, $\lambda\nu = v$, podem escriure

$$\delta = 2\pi d \left(\frac{\nu}{v_{\text{ext}}} - \frac{\nu}{v_{\text{ord}}} \right) \quad (6)$$

on ν és la freqüència de l'ona en el buit, i hem tingut en compte que la freqüència d'una ona no canvia quan passa d'un medi a un altre, és a dir $\nu = \nu_{\text{ord}} = \nu_{\text{ext}}$. Si multipliquem i dividim l'eq. (6) per λ , que és la longitud d'ona en el buit, tindrem

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \left(\frac{\lambda\nu}{v_{\text{ext}}} - \frac{\lambda\nu}{v_{\text{ord}}} \right) \quad (7)$$

i si tenim en compte que en el buit $\lambda\nu = c$ i que l'índex de refracció d'una substància és el quocient entre la velocitat de la llum en el buit, c , i la velocitat de la llum en la substància, v ,

$$n = \frac{c}{v} \quad (8)$$

obtenim finalment

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_{\text{ext}} - n_{\text{ord}}) \quad (9)$$

on d és el gruix de calcita que ha travessat l'ona electromagnètica, λ és la longitud d'ona de l'ona electromagnètica en el buit, i n_{ext} i n_{ord} són els índexs de refracció ordinari i extraordinari, respectivament, de la calcita. Quan l'ona electromagnètica passa de la calcita al buit (ona emergent), els components de l'amplitud canviaran respecte als seus valors dins la calcita, però seran iguals entre si (ja que l'ona incideix perpendicularment sobre la superfície interior de la calcita), és a dir, $\mathcal{E}_{0,z}^{\text{emerg}} = \mathcal{E}_{0,y}^{\text{emerg}}$. No es produirà un nou canvi de fase pel fet de penetrar en el buit, ja que aquest és un medi isòtrop.

Així, tenim una ona electromagnètica emergent amb els components de l'amplitud iguals i un canvi de fase donat per l'eq. (1). Per tant, a partir de les eqs. (1) i (9) s'obté que el gruix d de la làmina de calcita serà (en metres)

$$d = \left| \frac{\pm(2N+1)\lambda\pi/2}{2\pi(n_{\text{ext}} - n_{\text{ord}})} \right| = 8.57 \cdot 10^{-7} (2N+1) \text{ m} \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Hi hem pres el valor absolut perquè el gruix ha de ser positiu. Si $N = 0$ tindrem que el gruix mínim de la làmina de calcita valdrà $d = 8.57 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

17.11 Un feix de llum polaritzada linealment incideix des del buit perpendicularment sobre una placa de quars, els costats oposats de la qual estan tallats paral·lelament a l'eix òptic. La longitud d'ona de la llum és $5.9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ i el vector camp elèctric forma un angle de 60° amb l'eix òptic del quars. Calculeu: (a) el quocient de les intensitats mitjanes de les ones ordinària i extraordinària, (b) la freqüència i la longitud d'ona de les ones ordinària i extraordinària, i (c) el gruix que hauria de tenir la placa de quars per a produir un desfasament de $\lambda/2$ entre les ones extraordinària i ordinària. (Els índexs de refracció ordinari i extraordinari del quars per a la llum de $5.9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ de longitud d'ona són, respectivament, $n_{\text{ord}} = 1.5442$ i $n_{\text{ext}} = 1.5533$).

feix de llum polaritzada linealment, $\lambda = 5.9 \cdot 10^{-7}$ m, $\vartheta_i = 0^\circ$

$n_{\text{ord}} = 1.5442$, $n_{\text{ext}} = 1.5533$, $\alpha = 60^\circ$

(a) $\bar{I}_{\text{ord}}/\bar{I}_{\text{ext}}$?

(b) ν i λ , per a les ones ordinària i extraordinària?

(c) d , si el desfasament entre les ones ordinària i extraordinària val $\lambda/2$?

(a) En un medi anisòtrop uniaxial, com és el quars, es verifica que els components ordinari i extraordinari del vector camp elèctric verifiquen

$$\mathcal{E}_{\text{ord}} = \mathcal{E}_0 \sin \alpha \sin(k_{\text{ord}}x - \omega t) \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_{\text{ext}} = \mathcal{E}_0 \cos \alpha \sin(k_{\text{ext}}x - \omega t) \quad (2)$$

on el component extraordinari està orientat al llarg de l'eix òptic i el component ordinari és perpendicular a aquest eix (fig. 1). Els nombres d'ona dels raigs ordinari i extraordinari, respectivament, són k_{ord} i k_{ext} . En les expressions anteriors hem suposat que l'ona es propaga en el sentit positiu de l'eix X .

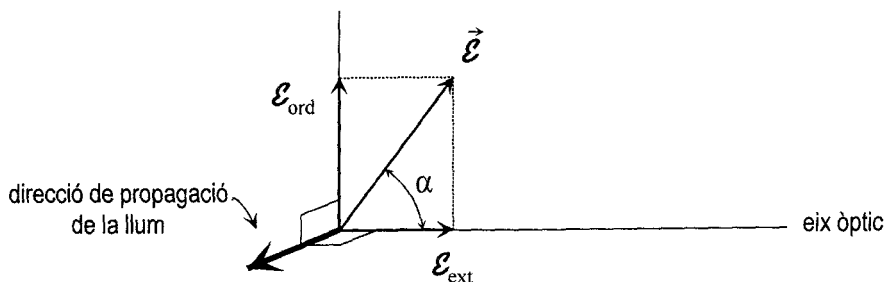


FIG. 1

L'expressió general de la intensitat mitjana d'una ona electromagnètica, el camp elèctric de la qual té una amplitud \mathcal{E}'_0 , que es propaga amb velocitat v a través d'un medi amb constant dielèctrica ϵ és

$$\bar{I} = \frac{1}{2} v \epsilon \mathcal{E}'_0{}^2 \quad (3)$$

Sabem que la velocitat v de propagació de l'ona està relacionada amb l'índex de refracció n del medi per on viatja l'ona, mitjançant la relació $v = c/n$, on c és la velocitat de la llum en el buit. Així, doncs, per a les ones ordinària i extraordinària, escriurem

$$v_{\text{ord}} = \frac{c}{n_{\text{ord}}} \quad v_{\text{ext}} = \frac{c}{n_{\text{ext}}} \quad (4)$$

També coneixem que la constant dielèctrica està relacionada amb la velocitat de propagació per la relació $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. Això ens permet relacionar els índexs de refracció

i les constants dielèctriques corresponents a les propagacions ordinària i extraordinària de la forma següent

$$\epsilon_{\text{ord}} = \frac{1}{\mu_0 v_{\text{ord}}^2} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{n_{\text{ord}}}{c} \right)^2 \quad \epsilon_{\text{ext}} = \frac{1}{\mu_0 v_{\text{ext}}^2} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{n_{\text{ext}}}{c} \right)^2 \quad (5)$$

Hem suposat que la permeabilitat del medi no difereix molt de la del buit, cosa que passa molt sovint.

Les intensitats mitjanes de l'ona ordinària i de l'extraordinària, les obtindrem a partir de l'eq. (3), tenint en compte les eqs. (4) i (5) i considerant que les amplituds dels components ordinari i extraordinari del camp elèctric és tot allò que precedeix l'expressió de la forma $\sin(kx - \omega t)$ de les eqs. (1) i (2). Així, obtenim

$$\bar{I}_{\text{ord}} = \frac{1}{2} \frac{n_{\text{ord}}}{\mu_0 c} (\mathcal{E}_0 \sin \alpha)^2 \quad (6)$$

$$\bar{I}_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \frac{n_{\text{ext}}}{\mu_0 c} (\mathcal{E}_0 \cos \alpha)^2 \quad (7)$$

El quocient d'intensitats mitjanes de les ones ordinària i extraordinària serà

$$\frac{\bar{I}_{\text{ord}}}{\bar{I}_{\text{ext}}} = \frac{n_{\text{ord}}}{n_{\text{ext}}} \tan^2 \alpha = \frac{1.5442}{1.5533} (\tan 60^\circ)^2 = 2.98 \quad (8)$$

(b) Per a calcular la freqüència de les ones ordinària i extraordinària hem de tenir present que la freqüència d'una ona és una quantitat que no varia quan l'ona passa d'un medi a un altre. Per tant, si ν és la freqüència de la llum en el buit, tant per al raig ordinari com per a l'extraordinari tindrem que

$$\nu = \nu_{\text{ord}} = \nu_{\text{ext}} = \frac{c}{\lambda} = 5.08 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \quad (9)$$

on λ és la longitud de l'ona electromagnètica en el buit.

En canvi, la longitud d'ona λ és el quocient entre la velocitat de la llum en el medi on es propaga l'ona i la freqüència de l'ona. Aquesta longitud d'ona serà diferent quan la llum es propague al llarg de l'eix òptic o perpendicularment a aquest, ja que la velocitat de propagació de l'ona electromagnètica és diferent segons siga al llarg de l'eix òptic o en la direcció perpendicular. A partir de les eqs. (4) obtenim que les longituds d'ona de les ones ordinària i extraordinària són

$$\lambda_{\text{ord}} = \frac{c/n_{\text{ord}}}{\nu} = \frac{\lambda}{n_{\text{ord}}} = 3.821 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (10)$$

$$\lambda_{\text{ext}} = \frac{c/n_{\text{ext}}}{\nu} = \frac{\lambda}{n_{\text{ext}}} = 3.798 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (11)$$

(c) El desfasament δ entre les ones extraordinària i ordinària després de travessar el guix d de quars és donat per

$$\delta = (k_{\text{ext}} - k_{\text{ord}}) d \quad (12)$$

Si després de travessar el quars hi ha una diferència de mitja longitud d'ona, $\lambda/2$, entre les ones ordinària i extraordinària, això implica que el desfasament és $\delta = \pi$. I si considerem que $k_{\text{ord}} = 2\pi/\lambda_{\text{ord}}$ i $k_{\text{ext}} = 2\pi/\lambda_{\text{ext}}$, en aïllar el gruix d en l'eq. (12), tindrem que

$$d = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{(1/\lambda_{\text{ext}}) - (1/\lambda_{\text{ord}})} = 3.15 \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad (13)$$

És a dir, es produirà un desfasament de mitja longitud d'ona entre l'ona ordinària i l'extraordinària quan el quars tinga un gruix de $3.15 \cdot 10^{-5}$ m.

18

Formació d'imatges

18.1 Determineu la distància focal i la naturalesa d'una sèrie d'espills esfèrics si a un objecte col·locat a 1.20 m de l'espill correspon una imatge: (a) real i a 0.80 m de l'espill; (b) virtual i a 3.20 m de l'espill; (c) virtual i a 0.60 m de l'espill; (d) real i dues vegades major; (e) virtual i dues vegades major; (f) real i tres vegades menor, i (g) virtual i tres vegades menor.

espill esfèric, $p = 1.20$ m

focal i naturalesa de l'espill per a obtenir una imatge: $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{real i } |q| = 0.80 \text{ m} \\ \text{(b)} \quad \text{virtual i } |q| = 3.20 \text{ m} \\ \text{(c)} \quad \text{virtual i } |q| = 0.60 \text{ m} \\ \text{(d)} \quad \text{real i doble} \\ \text{(e)} \quad \text{virtual i doble} \\ \text{(f)} \quad \text{real i } 1/3 \\ \text{(g)} \quad \text{virtual i } 1/3 \end{array} \right.$

La relació que hi ha entre la distància objecte-espill (p), imatge-espill (q) i la focal de l'espill (f), és

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

Com que la distància focal de l'espill està relacionada amb el radi r de l'espill mitjançant $f = r/2$, per l'eq. (1), tindrem que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r} \quad (2)$$

Aquesta equació és la fórmula de Descartes per a la reflexió en una superfície esfèrica. Ara aplicarem les expressions (1) i (2) als diversos casos que es plantegen en l'enunciat del problema.

(a) En aquest cas, la imatge de l'objecte és real, per tant, la distància imatge-espill serà positiva, $q > 0$, i amb un valor $q = 0.80$. La distància de l'objecte a l'espill és $p = 1.20$ m i, per l'eq. (1), obtenim que la distància focal val $f = 0.48$ m. Com que la distància focal és positiva, l'espill és convergent. El radi de l'espill val $r = 2f = 0.96$ m. Com que r és positiu, això vol dir que l'espill és còncau.

(b) Ara la imatge de l'objecte és virtual, és a dir, la distància imatge-espill és negativa, $q < 0$, i val $q = -3.20$ m. Igual que abans, la distància de l'objecte a l'espill és $p = 1.20$ m i obtenim que la distància focal val $f = 1.92$ m. Com que f és positiva, l'espill és convergent. El radi és també positiu, $r = 3.84$ m, per tant l'espill té naturalesa còncau.

(c) Anàlogament al cas anterior, la imatge de l'objecte és virtual, perquè q és negativa, $q = -0.60$ m. Com que coneixem que $p = 1.20$ m, per l'eq. (1) tenim que la distància focal val $f = -1.2$ m, que és negativa. Això vol dir que l'espill és divergent. Per al radi tenim un valor negatiu, $r = -2.4$ m, per tant, l'espill és convex.

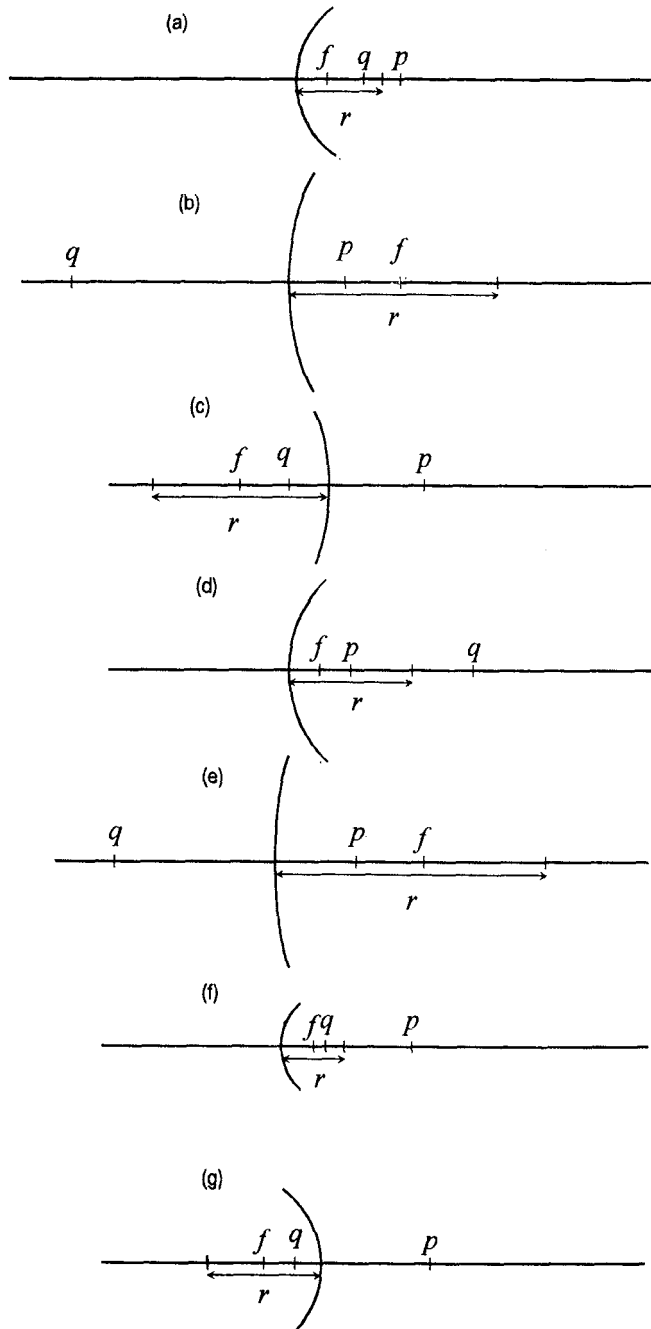


FIG. 1

(d) En aquest cas la imatge de l'objecte és real, és a dir, la distància imatge-espill és positiva, $q > 0$. La grandària de la imatge és el doble de la de l'objecte. Coneixem que l'augment M produït per un espill esfèric està relacionat amb les distàncies imatge-espill i objecte-espill, q i p , respectivament, per la relació

$$M = -\frac{q}{p} \quad (3)$$

Com que p i q són quantitats positives, i la imatge és el doble de l'objecte, tindrem que $M = -2$. Així, obtenim que $q = 2.4$ m, i per l'eq. (1), la distància focal és $f = 0.8$ m, la qual cosa implica que es tracta d'un espill convergent. El radi val $r = 1.6$ m i, en conseqüència, l'espill és còncau.

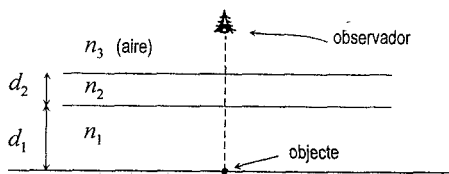
(e) Tenim que la imatge és virtual, per tant, $q < 0$. Com que $p > 0$, i la imatge és el doble de l'objecte, això junt amb l'eq. (3) dóna que $M = 2$. D'aquest valor, del de p i de l'eq. (3) obtenim que $q = -2.4$ m, valor que portat a l'eq. (1) ens dóna la distància focal $f = 2.4$ m. De nou tenim un espill convergent. El radi de l'espill és $r = 4.8$ m i correspon a un espill còncau.

(f) La imatge de l'objecte és real, per això la distància imatge-espill és positiva, $q > 0$. Sabem que $p = 1.20$ m i la imatge és tres vegades menor que l'objecte, per tant, $M = -1/3$. Així, doncs, mitjançant l'eq. (3) s'obté que $q = 0.4$ m. Si substituïm els valors de p i q dins l'eq. (1) obtenim que la distància focal val $f = 0.3$ m, per tant, es tracta d'un espill convergent. El radi val $r = 0.6$ m, és a dir, l'espill és còncau.

(g) La imatge és virtual, això vol dir que $q < 0$, i com $p > 0$, això implica que $M = 1/3$. A partir dels valors $p = 1.20$ m i $M = 1/3$, de l'eq. (3) s'obté que la distància imatge-espill val $q = -0.4$ m. En aquest cas, a partir de l'eq. (1) tenim que la distància focal és negativa, $f = -0.6$ m, i l'espill és divergent. Com que el radi es negatiu, $r = -1.2$ m, l'espill és convex.

En la fig. 1 hem dibuixat, aproximadament a escala, l'espill que correspon a cada cas, i també les distàncies objecte i imatge, la focal i el radi de l'espill.

18.2 Dos líquids no miscibles es troben superposats en una cubeta. El de menor densitat forma una capa de 2 cm de gruix i el seu índex de refracció és 1.63; la capa que forma el de major densitat té 4 cm de gruix i el seu índex de refracció és 1.33. En el fons de la cubeta hi ha un petit objecte. (a) A quina altura sobre el fons es veurà l'objecte quan s'observa des de la vertical? (b) Quin n'és l'augment? (c) Determineu l'angle màxim del con format pels raigs que, procedint de l'objecte, poden eixir a l'exterior.



$n_1 = 1.33$, $d_1 = 4$ cm, $n_2 = 1.63$, $d_2 = 2$ cm, $n_3 = 1$

(a) imatge de l'objecte vist per l'observador?

(b) augment?

(c) angle del con de raigs que ixen a l'exterior?

Pel principi d'Arquimedes, el líquid menys dens (amb índex de refracció $n_2 = 1.63$) es troba per damunt del líquid més dens (que té índex de refracció $n_1 = 1.33$), i no es mesclen entre si perquè es tracta de líquids no miscibles.

Col·loquem el sistema de la manera usual en òptica geomètrica, és a dir, amb l'eix òptic horitzontal, tal com representa la fig. 1.

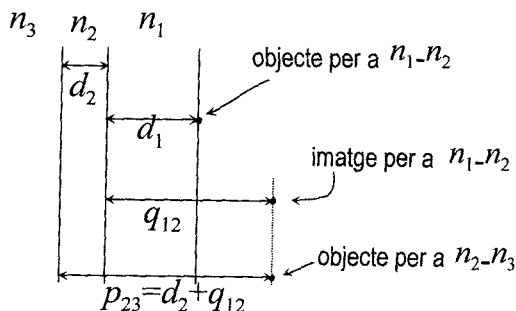


FIG. 1

(a) La imatge final vista per l'observador serà la que produeix la refracció entre els medis 1 i 2, amb índexs de refracció n_1 i n_2 , respectivament, i la causada per la refracció entre el medi 2 i l'aire (que serà el medi 3), amb índexs de refracció n_2 i n_3 , respectivament.

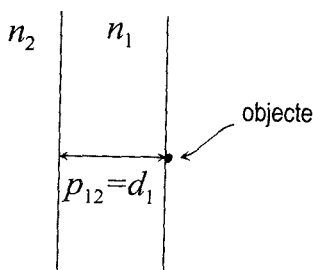


FIG. 2

Per a la refracció entre els medis 1 i 2 (fig. 2) es verifica que

$$\frac{n_1}{p_{12}} - \frac{n_2}{q_{12}} = \frac{n_1 - n_2}{r} \quad (1)$$

on p_{12} és la posició de l'objecte respecte de la superfície de separació dels medis 1 i 2, i q_{12} és la posició de la imatge respecte de la mateixa superfície de separació. Segons

l'enunciat, la distància des de l'objecte fins a la superfície de separació entre els dos medis coincideix amb el gruix del líquid 1, és a dir, $p_{12} = d_1$. En aquest cas, com que la superfície de separació dels dos medis és plana, el radi de curvatura val $r = \infty$, i per l'eq. (1) obtenim que

$$\frac{n_1}{p_{12}} - \frac{n_2}{q_{12}} = 0 \tag{2}$$

D'aquesta expressió s'obté que $q_{12} = p_{12}n_2/n_1 = 4.90$ cm. Com que $q_{12} > 0$, la imatge donada per la superfície entre els medis 1 i 2 està situada 4.90 cm a la seua dreta. Aquesta primera imatge servirà d'objecte per a la refracció a través de la superfície entre el medi 2 i l'aire (medi 3), però ara la distància objecte respecte a aquesta superfície serà $p_{23} = d_2 + q_{12}$, (fig. 3).

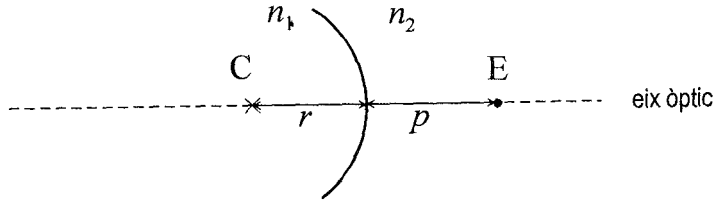


FIG. 3

Per a la refracció entre el medi 2 i l'aire, anàlogament al que hem fet anteriorment, tenim

$$\frac{n_2}{p_{23}} - \frac{n_3}{q_{23}} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{23} = \frac{n_3}{n_2} p_{23} = \frac{n_3}{n_2} (d_2 + q_{12}) = 4.23 \text{ cm} \tag{3}$$

La imatge final de l'objecte es troba a 4.23 cm a la dreta de la superfície entre el medi 2 i l'aire. Per tant, la distància d des de la imatge final fins al fons de la cubeta serà (fig. 4)

$$d = (d_1 + d_2) - q_{23} = 1.77 \text{ cm} \tag{4}$$

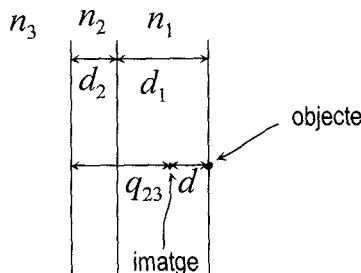


FIG. 4

(b) L'augment final M de la imatge és el resultat dels augments que es produeixen en cada refracció. Així, escrivim

$$M = M_{12}M_{23} = \frac{n_1q_{12}}{n_2p_{12}} \frac{n_2q_{23}}{n_3p_{23}} = 0.999 \approx 1 \quad (5)$$

on $M_{12} = (n_1q_{12})/(n_2p_{12})$ i $M_{23} = (n_2q_{23})/(n_3p_{23})$ són els augments corresponents produïts en la refracció entre els medis 1 i 2, i entre el medi 2 i l'aire (medi 3), respectivament. Si les superfícies de separació entre els medis són planes, l'augment sempre és la unitat, ja que s'hi verifica que

$$\frac{n_1}{p} = \frac{n_2}{q} \quad (6)$$

(c) Eixiran a l'exterior els raigs que no siguin reflectits. Calcularem el recorregut d'un raig que ix paral·lel a la superfície entre el medi 2 i l'aire (fig. 5), ja que una refracció de més de 90° és, de fet, una reflexió. L'angle d'incidència a partir del qual es passa a tenir reflexió interna total és l'angle crític. Per la llei de Snell, l'angle crític ϑ_c entre el medi 2 i l'aire verificarà

$$n_2 \sin \vartheta_c = n_3 \sin 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \vartheta_c = 37.84^\circ \quad (7)$$

Si apliquem la llei de Snell una altra vegada entre el medi 1 i 2, calcularem el valor de l'angle α (fig. 5) a partir de la relació

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \vartheta_c \quad \Rightarrow \quad \alpha = 48.75^\circ \quad (8)$$

Eixiran a l'exterior aquells raigs provinents de l'objecte que no es reflectesquen en la superfície entre el medi 2 i l'aire, és a dir, que estiguen dins el con de semiangle $\alpha = 48.75^\circ$.

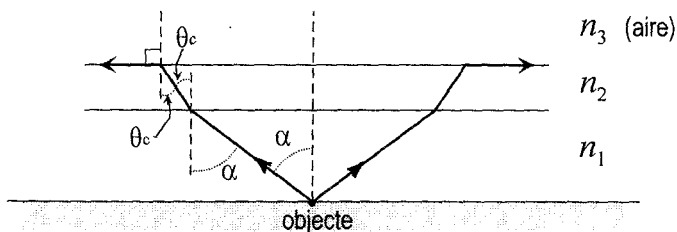
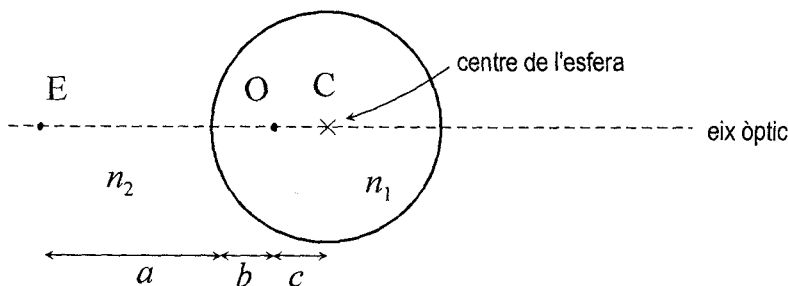


FIG. 5

És fàcil comprovar que els raigs que provenen de l'objecte amb un angle major que α seran reflectits en la superfície entre el medi 2 i l'aire.

En passar el raig del medi 1 al medi 2 no hi ha possibilitat de reflexió total, ja que els índexs de refracció verifiquen que $n_1 < n_2$.

18.3 Un peix es troba en el punt O de l'interior d'una peixera esfèrica plena d'aigua ($n_{\text{aigua}} = 1.33$), tal com s'indica en la figura adjunta. (a) Determineu la posició i l'augment lateral de la imatge del peix vista per un observador situat en el punt E. (b) Determineu la posició i l'augment lateral de la imatge de l'ull de l'observador segons és vist pel peix. No tingueu en compte l'efecte de les parets primes del vidre de la peixera.



$a = 30 \text{ cm}$, $b = c = 8 \text{ cm}$, $n_1 = 1.33$, $n_2 = 1$

(a) imatge de O vista per E?

(b) imatge de E vista per O?

En tot aquest problema no tindrem en compte els efectes deguts a les parets de vidre de la peixera.

(a) L'observador situat en el punt E veurà la imatge del peix situat en el punt O a través de la superfície entre l'aigua i l'aire, que nosaltres hem considerat com a medis 1 i 2, respectivament. No tindrem en compte l'efecte del vidre de la peixera, tal com proposa l'enunciat, perquè suposem que les parets de la peixera són molt primes. L'únic efecte que produeixen és fer que la superfície de separació entre l'aigua i l'aire adopte una forma corba.

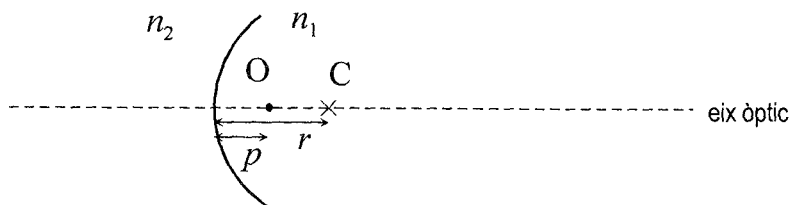


FIG. 1

La imatge del punt O serà donada per la refracció entre els medis 1 i 2, per a la qual es verifica que

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r} \tag{1}$$

on p és la distància entre l'objecte i la superfície de separació entre els medis 1 i 2, i q és la distància entre la imatge i la superfície de separació, el radi de curvatura de la

qual és r . En aquest cas, si comparem la figura de l'enunciat amb la fig. 1, tenim que $p = b = 8$ cm, el radi de curvatura és positiu ja que la superfície de separació és còncaua i val $r = b + c = 16$ cm. A partir de l'eq. (1) obtenim que $q = 6.87$ cm. L'observador situat en el punt E veurà el peix com si es trobava situat a 6.87 cm a la dreta de la paret de la peixera. L'augment de la imatge és

$$M = \frac{n_1 q}{n_2 p} = 1.14 \quad (2)$$

Per tant com que $q > 0$, la imatge és virtual, i com que $M > 0$, és dreta i 1.14 vegades més gran que l'objecte.

(b) El peix veurà la imatge de l'ull de l'observador, situat en el punt E, a través de la superfície de separació entre els medis 2 i 1. Disposarem el sistema de manera que la llum vaja de dreta a esquerra. Per a la refracció entre els medis 2 i 1 (fig. 2) tenim que ara l'ull de l'observador fa la funció d'objecte, $p = 30$ cm, i el radi de curvatura de la superfície de separació entre els dos medis és $r = -16$ cm, ja que és còncaua, tal com hem representat ara el sistema. L'equivalent de l'eq. (1) per al cas representat en la fig. 2 és

$$\frac{n_2}{p} - \frac{n_1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (3)$$

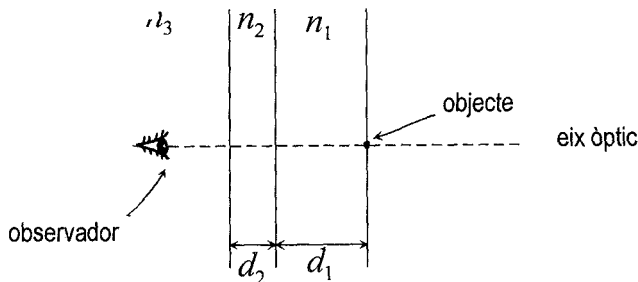


FIG. 2

En aïllar q de l'eq. (3) s'obté que la distància entre la imatge i la superfície de separació dels dos medis val $q = 104.66$ cm, que és positiva. D'acord amb la disposició de la fig. 2, el peix veurà l'ull de l'observador a 104.66 cm a la dreta de la paret de la peixera. L'augment és $M = (n_2 q)/(n_1 p) = 2.62$. Per tant, la imatge és virtual ($q > 0$), dreta ($M > 0$) i 2.62 vegades més gran que l'objecte.

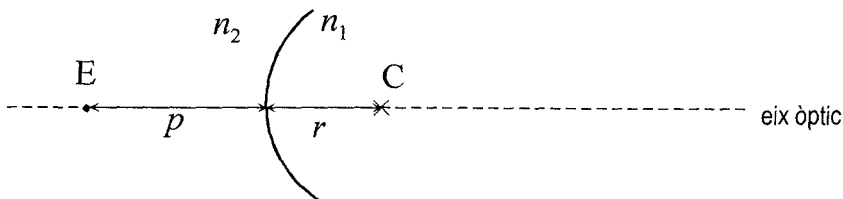


FIG. 3

L'apartat (b) també s'hauria pogut calcular de la manera següent. Per a la refracció entre els medis 2 i 1, tal com hem disposat en la fig. 3, podem considerar que $p = -30$ cm i $r = 16$ cm; així, tindriem la relació

$$\frac{n_2}{p} - \frac{n_1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (4)$$

En substituir-hi valors, s'obté que $q = -104.66$ cm. És a dir, la imatge es troba a 104.66 cm a l'esquerra de la paret de la peixera, tal com hem dibuixat en la fig. 3.

Òbviament, s'obté el mateix resultat que abans, ja que el resultat no depèn del procediment de càlcul utilitzat, sinó de la disposició i la naturalesa del sistema.

18.4 Es posen en contacte tres lents primes de vidre ($n_v = 1.5$), de distàncies focals $f_1 = -25$ cm, $f_2 = 40$ cm i $f_3 = 50$ cm. (a) Calculeu la distància focal del sistema equivalent. (b) Calculeu la distància focal del sistema quan se submergeix en aigua ($n_a = 1.33$).

$$f_1 = -25 \text{ cm}, f_2 = 40 \text{ cm}, f_3 = 50 \text{ cm}, n_a = 1.33, n_v = 1.5$$

(a) distància focal del sistema equivalent?

(b) distància focal del sistema submergit en aigua?

Per a un sistema de dues lents primes en aire, la imatge donada per la primera lent fa d'objecte per a la segona lent. Tenim per a la primera lent, de focal f_1 ,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} \quad (1)$$

on p és la distància objecte i q és la distància imatge.

Anàlogament, per a la segona lent, de focal f_2 , es verifica la mateixa relació. Però ara q actua com a distància objecte i q' és la distància imatge,

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{q'} = \frac{1}{f_2} \quad (2)$$

Si sumem les dues expressions anteriors, obtenim

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (3)$$

i si comparem amb l'equació típica per a una lent prima,

$$\frac{1}{\text{distància objete}} - \frac{1}{\text{distància imatge}} = \frac{1}{\text{focal}} \quad (4)$$

podem concloure que la focal F d'un sistema de dues lents primes amb focals f_1 i f_2 , que estan en contacte, verifica la relació

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (5)$$

(a) Primer associarem les dues lents que tenen les distàncies focals f_1 i f_2 . Mitjançant l'eq. (5) obtenim que la distància focal equivalent F_{12} val

$$\frac{1}{F_{12}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (6)$$

La lent equivalent a aquestes dues lents, l'associem ara amb la tercera lent, de distància focal f_3 . Si usem de nou l'eq. (5), tenim

$$\frac{1}{F_{123}} = \frac{1}{F_{12}} + \frac{1}{f_3} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \quad (7)$$

on en l'última igualtat hem fet servir l'eq. (6). Si hi substituïm valors, obtenim que la distància focal del sistema equivalent de les tres lents en l'aire val $F_{123} = 20$ cm.

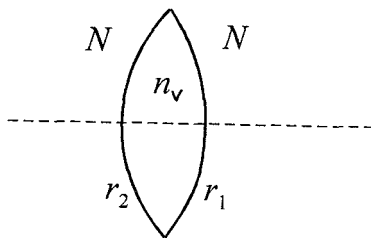


FIG. 1

(b) Si una lent d'índex de refracció n_v , com la representada en la fig. 1, es troba immersa en un medi d'índex de refracció N , tenim

$$\frac{N}{p} - \frac{n_v}{q} = \frac{N - n_v}{r_1} \quad (8)$$

$$\frac{n_v}{q} - \frac{N}{q'} = \frac{n_v - N}{r_2} \quad (9)$$

p és la distància objecte corresponent a la primera superfície de refracció (que és la superfície de l'esquerra, amb radi de curvatura r_1), q és la distància imatge corresponent a la superfície esmentada. Si suposem que la lent és prima, la distància imatge per a la primera lent actua com a distància objecte per a la segona lent (que és la superfície a la dreta, amb radi de curvatura r_2); q' és la distància imatge que correspon a aquesta segona superfície de refracció.

Si sumem les eqs. (8) i (9), obtenim

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q'} = \frac{n_v - N}{N} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (10)$$

Si considerem el sistema representat en la fig. 1 com una lent prima, la distància objecte serà p i la distància imatge serà aproximadament la suma de q' més el gruix de la lent, que anomenarem ara q . Així, per a una lent prima submergida en un medi d'índex de refracció N tenim

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{n_v - N}{N} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (11)$$

La focal f d'aquesta lent correspondrà a la posició p d'un objecte que done la imatge en l'infinit (és a dir, $q = -\infty$), i per tant

$$\frac{1}{f} = \frac{n_v - N}{N} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (12)$$

Aquesta equació de la focal d'una lent depèn del medi en què es trobe immersa. Així, la focal f d'una lent prima submergida en l'aire (l'índex de refracció del qual és $N = 1$) verifica la relació

$$\frac{1}{f} = (n_v - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (13)$$

La focal f' d'una lent prima submergida en aigua, amb índex de refracció n_a , verifica que

$$\frac{1}{f'} = \frac{n_v - n_a}{n_a} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (14)$$

El quocient de les eqs. (13) i (14) ens dóna la relació entre la focal de la lent en l'aigua i la focal en aire,

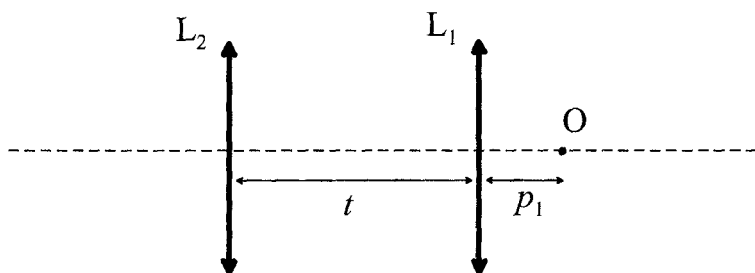
$$\frac{f'}{f} = \left(\frac{n_v - 1}{n_v - n_a} \right) n_a \quad (15)$$

D'acord amb les eqs. (7) i (15), la lent equivalent al sistema de tres lents primes submergides en aigua té una focal F'_{123} que és donada per

$$\begin{aligned} \frac{1}{F'_{123}} &= \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{f'_3} = \frac{n_v - n_a}{(n_v - 1)n_a} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \right) \\ &= \frac{n_v - n_a}{(n_v - 1)n_a} \frac{1}{F_{123}} \end{aligned} \quad (16)$$

Si hi substituïm els valors de $n_v = 1.5$, $n_a = 1.33$ i $F_{123} = 20$ cm obtenim que $F'_{123} = 782$ cm.

18.5 Dues lents primes convergents, les distàncies focals de les quals són $f_1 = 2$ cm i $f_2 = 5$ cm, respectivament, estan separades 10 cm entre si. Si situem un objecte a una distància de 3 cm de la primera lent, tal com indica la figura adjunta, calculeu la naturalesa, la posició i l'augment de la imatge formada per la combinació d'ambdues lents.



$t = 10$ cm, $f_1 = 2$ cm, $f_2 = 5$ cm, $p_1 = 3$ cm
imatge de O a través del sistema de les dues lents?

La imatge final de l'objecte es produeix per la refracció a través de les dues lents primes. La refracció a través de la primera lent prima (fig. 1) verificarà que

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \quad (1)$$

on p_1 és la distància de l'objecte a la lent 1 i f_1 és la distància focal d'aquesta lent. Després de substituir valors en l'eq. (1), obtenim que $q_1 = -6$ cm; és a dir, la imatge que dona la primera lent es troba a 6 cm a la seua esquerra.

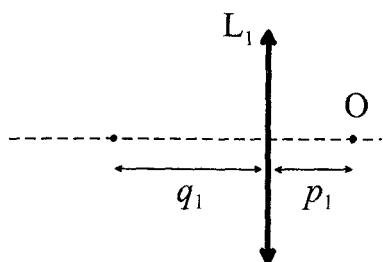


FIG. 1

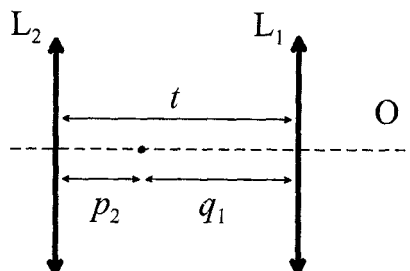


FIG. 2

La imatge que dona la primera lent farà d'objecte per a la segona lent. A partir de la fig. 2, deduïm que la seua posició respecte a la segona lent és $p_2 = (t - q_1) = 4$ cm.

Com que $p_2 > 0$, l'objecte per a la lent de focal f_2 està situat a la seua dreta. Ara, per a calcular la imatge a través de la segona lent prima, hi apliquem l'expressió

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} \quad (2)$$

i obtenim que la distància imatge val $q_2 = 20$ cm, i està situada a la dreta de la lent de distància focal f_2 . La imatge donada per la segona lent es troba a 20 cm a la seua dreta (fig. 3).

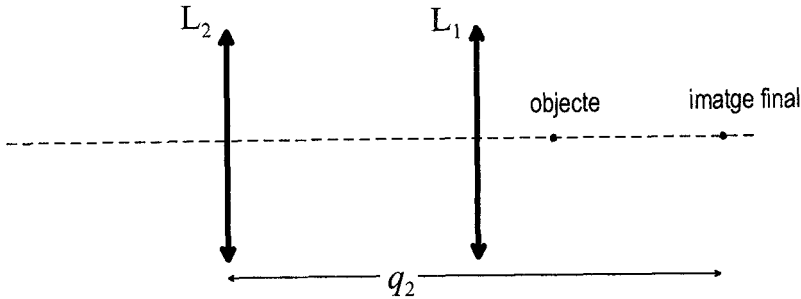


FIG. 3

L'augment final de la imatge serà el producte dels augments $M_1 = q_1/p_1$ i $M_2 = q_2/p_2$, produïts per les lents de focals f_1 i f_2 , respectivament,

$$M = M_1 M_2 = \frac{q_1}{p_1} \frac{q_2}{p_2} = \left(\frac{-6}{3}\right) \left(\frac{20}{4}\right) = -10 \quad (3)$$

En definitiva, la imatge final es troba 10 cm a la dreta de la primera lent, és virtual (perquè $q_2 > 0$), és invertida (ja que l'augment és negatiu) i és 10 vegades més gran que l'objecte original.

18.6 La superfície útil d'una diapositiva és un quadrat de 35 mm de costat. (a) Determineu la distància focal que ha de tenir una lent de projecció per a produir imatges d'1 m de costat sobre una pantalla que dista 4 m de la lent. (b) La il·luminació de la diapositiva es fa mitjançant una altra lent de focal $f = 2.5$ cm situada a 1 cm de la diapositiva. En quina posició cal situar la bombeta elèctrica per tal que la imatge de la diapositiva es forme en el pla de la lent de projecció?

$$\ell_0 = 35 \text{ mm} = 3.5 \text{ cm}$$

(a) lent L_1 : $\ell_1 = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, $q_1 = 4 \text{ m} = 400 \text{ cm}$
focal f_1 de la lent de projecció?

(b) lent L_2 : $f_2 = 2.5 \text{ cm}$, $d_2 = 1 \text{ cm}$
distància bombeta-lent?

(a) Segons podem observar en la fig. 1, tenim que el costat ℓ_0 de la diapositiva correspon a la longitud AB de l'objecte i que la longitud de la imatge, ab, és equivalent a la grandària del costat de la imatge, ℓ_1 .

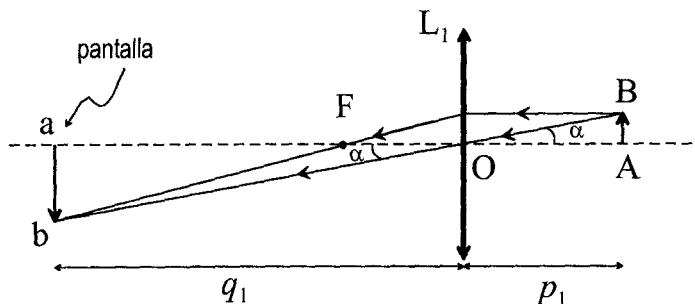


FIG. 1

L'augment M es defineix com el quocient entre la grandària de la imatge i la de l'objecte,

$$M = \frac{ab}{AB} \quad (1)$$

En substituir-hi valors tindrem

$$M = \frac{-100 \text{ cm}}{3.5 \text{ cm}} = -28.6 \quad (2)$$

el signe menys davant la xifra de 100 cm corresponent a la grandària ab de l'objecte indica que la seua imatge és invertida. Per altra banda, i segons observem en la fig. 1, tenim que

$$\tan \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{ab}{Oa} \quad (3)$$

Si considerem la relació (1), obtenim que

$$OA = \frac{Oa}{M} \quad (4)$$

En l'eq. (4) observem que apareix la distància OA , que podem identificar amb la distància objecte-lent, p_1 , i també la distància Oa , que coincideix amb la separació imatge-lent, q_1 . La distància imatge-lent val $q_1 = -400 \text{ cm}$ (el signe menys és perquè la imatge es troba a l'esquerra de la lent). Per tant, de l'eq. (4) i usant els valors de q_1 i M , obtindrem la distància objecte-lent $p_1 = OA = 14 \text{ cm}$.

A partir de la relació entre la distància imatge, (q_1), la distància objecte, (p_1), i la distància focal de la lent prima (f_1),

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \quad (5)$$

i, ja que coneixem p_1 i q_1 , calcularem la distància focal de la lent de projecció, que val $f_1 = 13.5 \text{ cm}$.

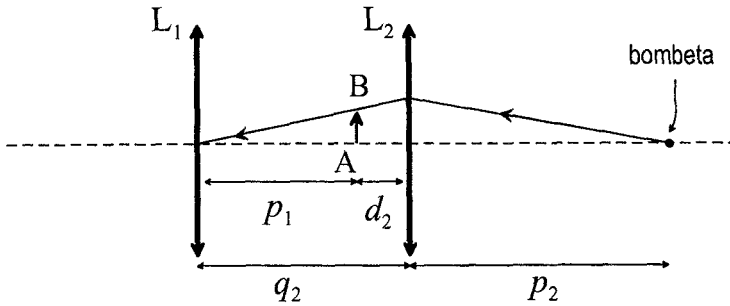


FIG. 2

(b) Ara tenim la situació representada en la fig. 2, on p_1 és la distància entre la diapositiva i la lent de focal f_1 i val 14 cm, segons hem calculat en l'apartat anterior, $d_2 = 1$ cm és la distància entre la diapositiva i la lent de focal f_2 .

Ara podem aplicar la relació entre la distància objecte (p_2), la distància imatge (q_2) i la focal (f_2) corresponents a la lent prima 2,

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} \quad (6)$$

El valor de la focal de la lent L_2 és $f_2 = 2.5$ cm. Per a calcular q_2 haurem de tenir en compte que la imatge de la diapositiva es forma en la lent 1, per tant és fàcil adonar-se (fig. 2) que $q_2 = -(p_1 + d_2) = -15$ cm; tenim el signe *menys* perquè la imatge es troba a l'esquerra de la lent L_2 . A partir de l'eq. (6) i dels valors de q_2 i f_2 podem calcular p_2 , que és la distància demanada en el problema, i que val $p_2 = 3$ cm.

18.7 Dues lents convergents de 10 i 15 diòptries, respectivament, estan situades de forma que la segona lent es troba en el pla focal de la primera. Si col·loquem un objecte a 40 cm a la dreta de la primera lent, (a) calculeu la posició i l'augment de la imatge final. (b) On es trobarà la imatge final si afegim al sistema anterior un espill pla situat en el pla focal de la segona lent?

lent L_1 : 10 diòptries $\Rightarrow f_1 = 1/10$ m = 10 cm

lent L_2 : 15 diòptries $\Rightarrow f_2 = 1/15$ m = 6.67 cm

(a) $p_1 = 40$ cm: q i M finals?

(b) $L_1 + L_2 +$ espill pla en f_2 : q final?

(a) En primer lloc discutirem la formació de la imatge a través de la lent L_1 (fig. 1). Emprarem la fórmula que correspon a una lent prima,

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \quad (1)$$

i com que coneixem els valors de la posició de l'objecte ($p_1 = 40$ cm) i de la focal de la lent ($f_1 = 10$ cm), és immediat calcular la posició de la imatge formada per la lent L_1 , que val $q_1 = -13.33$ cm.

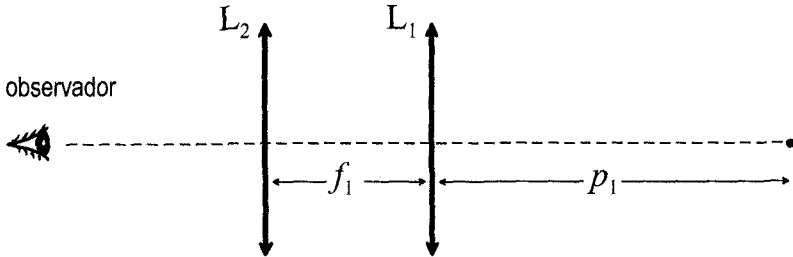


FIG. 1

Aquesta imatge actuarà com a objecte per a la lent L_2 . Com que $q_1 < 0$, la imatge donada per la lent L_1 es troba a la seua esquerra; i com que $|q_1| > |f_1|$, aquesta imatge també es troba a l'esquerra de la lent L_2 , tal com representa la fig. 2. En conseqüència, la distància p_2 entre la lent L_2 i la imatge formada per la lent L_1 serà negativa, tal com es pot observar en la fig. 2. El seu valor absolut és $|p_2| = |q_1| - |f_1|$. Per tant, $p_2 = -3.33$ cm.

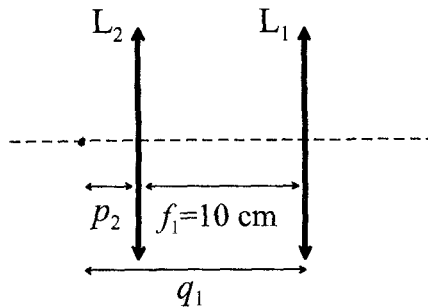


FIG. 2

Ara podem aplicar novament l'equació d'una lent prima per al cas de la lent L_2 ,

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} \quad (2)$$

i, com que coneixem p_2 i f_2 , obtenim finalment que la imatge es troba a $q_2 = -2.22$ cm de la lent L_2 .

Aquesta imatge formada per la lent L_2 és també la imatge final formada pel sistema de dues lents (L_1 i L_2), i es troba a 2.22 cm a l'esquerra de la lent de focal f_2 .

L'augment final, M , serà el producte dels augments produïts per cada lent, $M_1 = q_1/p_1$ i $M_2 = q_2/p_2$,

$$M = M_1 M_2 = \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} = -0.22 \quad (3)$$

En conclusió, podem dir que la imatge final formada pel sistema de dues lents L_1 i L_2 és real ($q < 0$), invertida ($M < 0$) i menor que l'objecte original ($M < 1$).

(b) Després d'afegir l'espill pla a les dues lents, la disposició del sistema òptic és tal com representa la fig. 3.

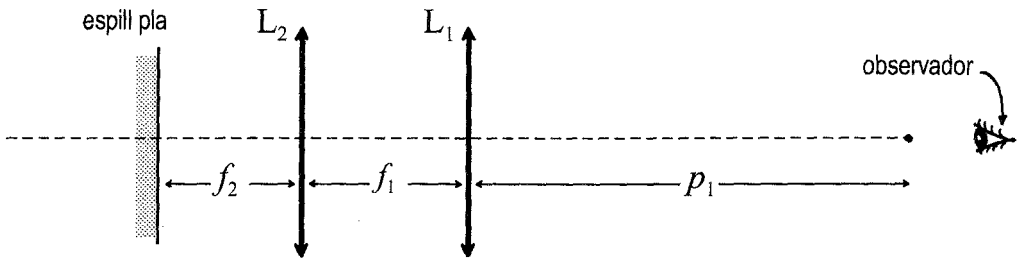


FIG. 3

Aprofitarem els resultats de l'apartat anterior i prendrem la imatge en q_2 , que donen les dues lents, com a objecte per a la reflexió en l'espill. En la fig. 4 podem observar que la distància objecte respecte de l'espill val, en valor absolut, $|p_3| = |f_2| - |q_2| = 4.45$ cm. Com que l'objecte per a la reflexió es troba a la dreta de l'espill, segons es desprén de la fig. 4, escriurem que $p_3 = 4.45$ cm.

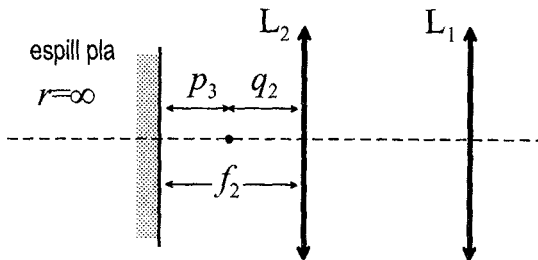


FIG. 4

Per a calcular la posició de la imatge formada per l'espill, q_3 , emprarem una expressió similar a les eqs. (1) i (2), però ara tenint en compte que la focal d'un espill pla és infinita i que la imatge que dona l'espill sempre es troba a la seua esquerra (tal com representa la fig. 5); és a dir, que $q_3 < 0$. Per tant, l'equació que relaciona les distàncies objecte i imatge en el cas de l'espill pla és

$$\frac{1}{p_3} + \frac{1}{q_3} = 0 \tag{4}$$

de la qual obtenim que $q_3 = -4.45$ cm.

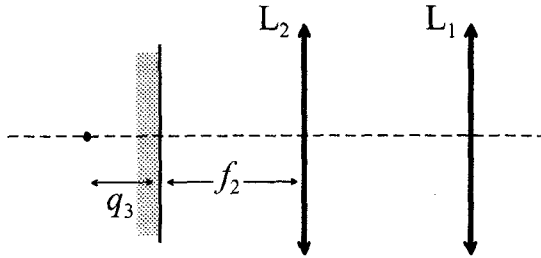


FIG. 5

Notem la posició de l'observador en la fig. 3. Així, per a calcular la imatge final, q₃ actua ara com a objecte per al sistema de lents L₂ i L₁ (en aquest ordre!).

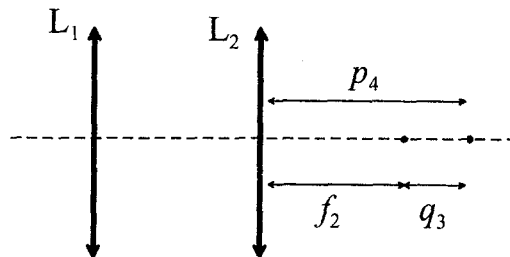


FIG. 6

Disposarem les lents i la distància q₃ tal com s'indica en la fig. 6 (on només hem canviat l'esquerra per la dreta de la fig. 5) i així podrem començar a fer l'estudi de la formació de la imatge tal com hem fet en l'apartat anterior, amb el raig de llum viatjant de dreta a esquerra. L'objecte ara es troba a la distància p₄ de la lent L₂ (que és la primera a formar la seua imatge). Segons la fig. 6, aquesta distància val p₄ = f₂ + q₃ = 11.12 cm. La imatge q₄ de p₄ a través de la lent L₂ s'obté a partir de l'expressió -anàloga a les eqs. (1) i (2):

$$\frac{1}{p_4} - \frac{1}{q_4} = \frac{1}{f_2} \quad (5)$$

I d'ací s'obté que q₄ = -16.67 cm; és a dir, la imatge es troba a 16.67 cm a l'esquerra de la lent L₂ (segons la disposició de lents adoptada en la fig. 6).

Ara q₄ actua com a objecte per a la lent L₁. La distància de l'objecte a la lent L₁ és p₅ i apareix representada en la fig. 7. D'aquesta figura s'obté que p₅ = -6.67 cm, i si tornem a aplicar-hi l'equació que dona la imatge q₅ a través de la lent L₁,

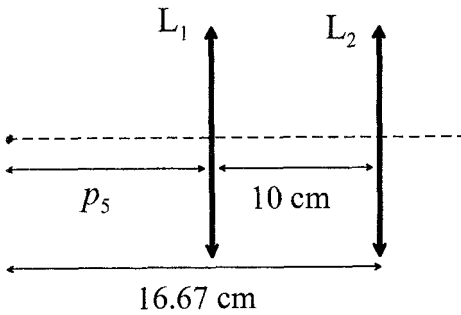


FIG. 7

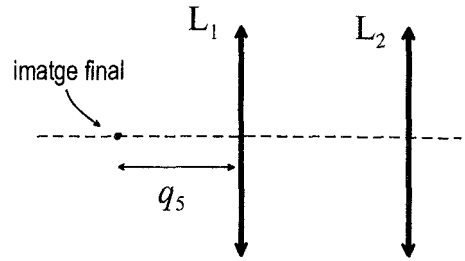


FIG. 8

$$\frac{1}{p_5} - \frac{1}{q_5} = \frac{1}{f_1} \tag{6}$$

tenim que $q_5 = -4$ cm. Aquest valor correspon a la imatge final del sistema, que es troba (fig. 8) 4 cm a l'esquerra de la lent L_1 (segons la disposició de la fig. 6).

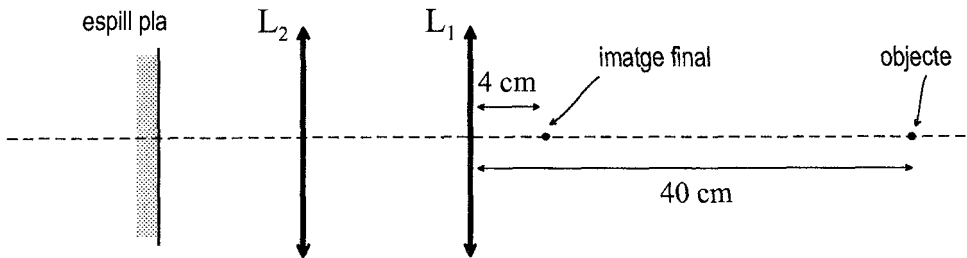


FIG. 9

Finalment, en la fig. 9 apareix representada la disposició original del sistema de les lents i l'espill pla, juntament amb la posició de l'objecte i de la imatge final.

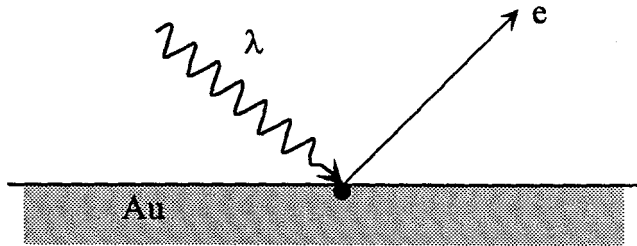
19

**Comportament corpuscular
de la llum**

19.1 Quan incideix llum sobre una superfície d'or, neta i en el buit, s'observa que aquesta emet electrons. Els valors experimentals de la longitud d'ona de la llum, λ , i de la diferència de potencial, V , que cal aplicar entre l'or i un col·lector per a suprimir el corrent d'electrons, són:

$\lambda (10^{-9} \text{ m})$	216	184	160	142
$V (\text{ V})$	1	2	3	4

Deduïu els valors aproximats de: (a) la constant de Planck, (b) la funció de treball de l'or i (c) la freqüència llindar de l'or.



$\lambda (10^{-9} \text{ m})$	$V (\text{ V})$	$c/\lambda = \nu (10^{15} \text{ s}^{-1})$
216	1	1.39
184	2	1.63
160	3	1.88
142	4	2.11

- (a) h ?
 (b) ϕ_0 ?
 (c) ν_0 ?

Notem que ens referim a una superfície d'or neta. Això és important per tal que no hi haja impureses en la superfície, ja que podrien distorsionar els resultats. És a dir, podríem creure que alguns dels valors mesurats corresponen a l'or, quan en realitat podrien ser deguts a alguna de les impureses que hi hauria en la superfície.

També es diu en l'enunciat que l'or es troba en el buit, la qual cosa es fa perquè l'or no s'oxide i així assegurar que les mesures preses no corresponen a cap òxid de l'or. A més a més, així s'intenta evitar que la superfície s'embrute i arrebegue impureses després de tenir-la neta.

D'ara endavant, anomenarem fotoelectrons els electrons extrets del metall per la incidència de llum. Aquest és un problema típic d'efecte fotoelèctric, en què l'extracció d'electrons del metall pot explicar-se a partir del caràcter corpuscular de la llum. Cada fotó o corpuscle de llum interacciona amb un electró del metall, al qual transfereix tota l'energia que transporta.

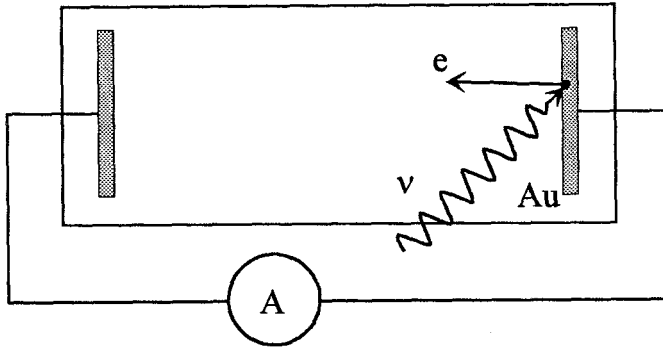


FIG. 1

($a + b + c$) La diferència de potencial V aplicada per a suprimir el corrent de fotoelectrons és la que aconseguix frenar els electrons que s'extrauen de l'or per efecte fotoelèctric (fig. 1). Si els electrons que s'extrauen d'un elèctrode per efecte fotoelèctric arriben a l'altre elèctrode, l'amperímetre indica un pas de corrent. Si els electrons no arriben a l'altre elèctrode, l'amperímetre no indica cap pas de corrent. Per tant, si apliquem una diferència de potencial V que s'oposa al moviment dels electrons de manera que pugui aconseguir frenar els electrons d'energia màxima, no arribarà cap electró dels extrems a l'altre elèctrode, és a dir, no s'enregistrerà corrent. El potencial aplicat ha de proporcionar tanta energia com l'energia màxima $E_{\text{màx}}$ que tenen els electrons quan ixen del metall, però ha d'actuar contra el moviment d'aquests. Així, per a cada freqüència ν de la llum (o de la mateixa manera, per a cada longitud d'ona λ , ja que $\lambda = c/\nu$) el potencial aplicat perquè no hi haja corrent ens donarà el valor de l'energia màxima dels fotoelectrons.

Sabem que l'energia màxima que pot tenir cada electró que s'extraiu és igual a l'energia $h\nu$ que li proporciona cada fotó incident, menys l'energia que ha de superar per a eixir del metall

$$E_{\text{màx}} = h\nu - \phi_0 \quad (1)$$

on h és la constant de Planck, ϕ_0 és la funció de treball³² dels electrons del metall (de l'or en aquest problema) i ν és la freqüència de la llum incident. Si la llum que incideix sobre el metall té una freqüència menor que la freqüència llindar, $\nu < \nu_0$, no s'extrauen fotoelectrons perquè els fotons incidents tenen una energia menor que el treball d'extracció dels electrons del metall, $h\nu < \phi_0$. La freqüència llindar ν_0 és aquella que proporciona l'energia d'extracció, segons la relació $h\nu_0 = \phi_0$.

Per altra banda, sabem que hem d'aplicar-hi un potencial V perquè no es produeixi corrent. Amb aquest potencial estariem proporcionant als electrons una energia eV perquè viatjaren en contra del sentit en què s'extrauen, i així no arribarien a l'altre elèctrode. Quan eV siga igual a $E_{\text{màx}}$ no es produirà corrent, i podrem escriure

$$eV = h\nu - \phi_0 \quad (2)$$

³²La funció de treball també sol denominar-se energia o treball d'extracció.

on e és la unitat de càrrega elemental i V és el potencial aplicat per a evitar el corrent. Aquesta equació correspon a una recta de la forma $y = mx + n$, on l'eix d'ordenades és l'energia eV , l'eix d'abscisses és la freqüència ν de la llum, el pendent és h , i l'ordenada en l'origen és $-\phi_0$. De la representació gràfica de l'energia eV en funció de la freqüència ν obtindrem un conjunt de punts disposats aproximadament —a causa de possibles errors experimentals— com una recta (fig. 2). D'aquesta recta podrem obtenir els valors de la funció de treball ϕ_0 (l'ordenada en l'origen) i de la freqüència llindar ν_0 (el punt d'intersecció amb l'eix horitzontal) de l'or. Una estimació aproximada ens dona que la funció de treball de l'or és $\phi_0 \simeq 4.3$ eV i la freqüència llindar val $\nu_0 \simeq 1.1 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$.

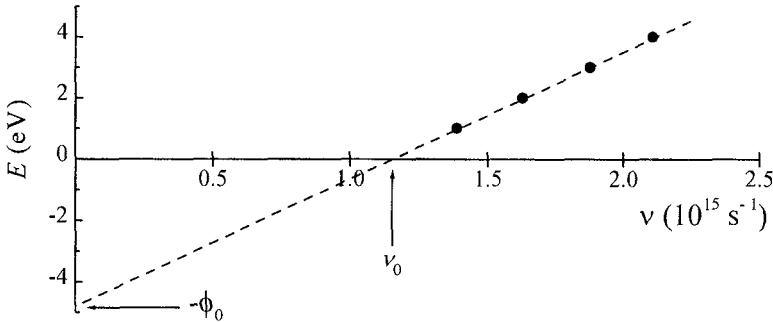


FIG. 2

A més, per l'eq. (2) sabem que el llindar de freqüències ν_0 i la funció de treball ϕ_0 verifiquen que $h\nu_0 - \phi_0 = 0$. Així, si coneixem les dues magnituds ν_0 i ϕ_0 , es pot calcular h a partir de $h = \phi_0/\nu_0$. Si hi substituïm valors, obtenim que $h \simeq 4.3 \text{ eV}/(1.1 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}) = 3.9 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$. Aquesta estimació de h que hem fet a partir d'una representació gràfica no difereix gaire del valor que calcularem tot seguit.

També es podrien calcular la funció de treball ϕ_0 i la constant de Planck h si ajustem la recta $eV = h\nu - \phi_0$ per mínims quadrats i obtenim el pendent h i l'ordenada en l'origen ϕ_0 . L'ajust per mínims quadrats ens dona $\phi_0 = 4.77 \text{ eV}$ i $h = 4.15 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$.

Una vegada coneguda la constant de Planck h , també es pot calcular la funció de treball ϕ_0 calculant-ne el valor mitjà a partir dels valors de ϕ_0 obtinguts per a cada parella de valors (ν, E) :

$\nu (10^{15} \text{ s}^{-1})$	$E (\text{eV})$	$\phi_0 (\text{eV})$
1.39	1	4.77
1.63	2	4.77
1.88	3	4.80
2.11	4	4.77

El valor mitjà de la funció de treball és $\phi_0 = 4.78 \text{ eV}$. A partir d'aquest valor mitjà de la funció de treball ϕ_0 es pot calcular el llindar de freqüències ν_0 .

Com podem veure tots els mètodes ens donen resultats similars. L'aplicació de cada mètode de càlcul dependrà de la situació concreta i del grau de precisió que vulguem. Ja hem calculat la constant de Planck h anteriorment, però també podem fer una estimació aproximada agafant dues parelles de punts (freqüència, energia) qualssevol, i a partir

d'aquestes aïllar h ,

$$\left. \begin{array}{l} eV_1 = h\nu_1 - \phi_0 \\ eV_2 = h\nu_2 - \phi_0 \end{array} \right\} \Rightarrow h = \frac{eV_1 - eV_2}{\nu_1 - \nu_2} \quad (3)$$

Per exemple, si utilitzem els valors extrems del conjunt de dades:

$(\nu_1, eV_1) = (1.39 \cdot 10^{15}, 1)$ i $(\nu_2, eV_2) = (2.11 \cdot 10^{15}, 4)$, obtenim que $h = 4.17 \cdot 10^{-15}$ eV s.

Podem comprovar que el resultat obtingut en tots els casos és raonable, ja que el valor de la constant de Planck h que apareix en les taules és $h = 4.136 \cdot 10^{-15}$ eV s.

19.2 Un feix monocromàtic de $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ m incideix sobre una superfície de cesi, la funció de treball del qual val 2.14 eV. Si el feix té una intensitat mitjana de $3 \cdot 10^{-9}$ W/m², calculeu: (a) el nombre d'electrons emesos per metre quadrat i per segon, i (b) l'energia que la superfície de cesi absorbeix per metre quadrat i per segon. El valor de la constant de Planck és $h = 4.136 \cdot 10^{-15}$ eV s.

$\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ m, $\phi_0 = 2.14$ eV, $\bar{I} = 3 \cdot 10^{-9}$ W/m²

constant de Planck: $h = 4.136 \cdot 10^{-15}$ eV s

(a) $e^- / (\text{m}^2 \text{ s})$?

(b) $E_{\text{absorbida}} / (\text{m}^2 \text{ s})$?

En l'efecte fotoelèctric, el nombre d'electrons que s'extrauen d'un metall és proporcional a la intensitat de la radiació electromagnètica que incideix sobre la superfície metàl·lica. L'energia que té cadascun dels electrons emesos depèn de la freqüència de la radiació incident sobre el metall.

L'efecte fotoelèctric es descriu en termes de l'intercanvi d'energia entre els fotons (corpúscles associats a la radiació electromagnètica) i els electrons del metall.

En primer lloc comprovarem si cada fotó té energia suficient per a extraure un electró del metall. Això significa que l'energia E_γ de cada fotó ha de ser major que la funció de treball $\phi_0 = 2.14$ eV. L'energia d'un fotó de la radiació de longitud d'ona $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ m val

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 4.965 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3.10 \text{ eV} \quad (1)$$

on hem tingut en compte que es verifica la relació $\lambda\nu = c$, amb $c = 3 \cdot 10^8$ m/s sent la velocitat de la llum en el buit. Com podem apreciar, $E_\gamma > \phi_0$, la qual cosa significa que sí que s'extrauen electrons.

(a) Com a primera aproximació per a resoldre el problema, suposarem el cas ideal en què tota l'energia que transporta cada fotó és transferida a un electró, el qual inverteix aquesta energia en el treball d'extracció, per tal d'escapar-se del metall, i la resta d'energia que li queda correspon a l'energia cinètica màxima que adquireix l'electró després d'escapar-se'n. Així, doncs, si calculem el nombre de fotons que incideixen sobre el metall, podem obtenir el nombre d'electrons extrets (en les condicions ideals esmentades anteriorment).

A partir de la intensitat mitjana coneixem l'energia mitjana que arriba al metall per unitat de temps i de superfície, i com que l'energia de cada fotó és $E_\gamma = hc/\lambda$, el nombre

de fotons que, en termes mitjans, arriben per metre quadrat i per segon a la superfície serà:

$$\frac{\text{nombre de fotons}}{\text{m}^2 \text{ s}} = \frac{\bar{I}}{hc/\lambda} = 6.04 \cdot 10^9 \text{ fotons/m}^2 \text{ s} \quad (2)$$

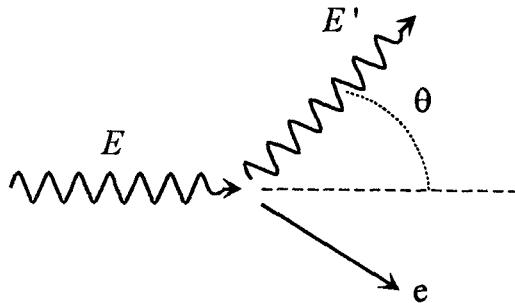
D'acord amb el raonament que hem fet abans, podem afirmar que el nombre d'electrons emesos per metre quadrat i per segon val $6.04 \cdot 10^9$ electrons/ $\text{m}^2 \text{ s}$.

(b) En el cas idealizat que estem considerant, l'energia que transporta un fotó del feix incident se la transfereix a un electró del metall, però aquest electró, per tal d'escapar-se de la superfície, ha de passar al metall una energia equivalent al treball d'extracció i, com ja hem dit abans, s'emportarà la resta d'energia en forma d'energia cinètica.

Per tant, en acabar el procés d'extracció, es queda en el metall l'energia d'extracció de cada electró, que multiplicada pel nombre d'electrons extrets per metre quadrat i per segon, ens dóna l'energia que ha absorbit el metall per metre quadrat i per segon:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{absorbida}}}{\text{m}^2 \text{ s}} &= \frac{\text{nombre d'electrons emesos}}{\text{m}^2 \text{ s}} \phi_0 = (6.04 \cdot 10^9 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}) (2.14 \text{ eV}) \\ &= 1.29 \cdot 10^{10} \text{ eV/m}^2 \text{ s} = 2.07 \cdot 10^{-9} \text{ J/m}^2 \text{ s} \quad (3) \end{aligned}$$

19.3 Un fotó amb una energia de 10^4 eV xoca amb un electró lliure que es troba en repòs, i es difon formant un angle de 60° . Calculeu: (a) la variació d'energia, de freqüència i de longitud d'ona del fotó, i (b) l'energia cinètica, el moment lineal i la direcció de l'electró després de la col·lisió.



fotó γ : $E = 10^4$ eV, $\vartheta = 60^\circ$

electró en repòs

(a) ΔE , $\Delta \nu$, $\Delta \lambda$ per al fotó?

(b) E_e , p_e , \hat{p}_e ?

(a) La col·lisió entre un fotó i una partícula material lliure (efecte Compton) pot estudiar-se mitjançant la mecànica relativista si es considera que el fotó té moment lineal, que és una propietat típica d'un corpuscle. Aplicant les expressions relativistes per a la conservació de moment lineal i la conservació d'energia en la col·lisió entre un fotó i un electró en repòs, s'arriba a la relació següent³³

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2}(1 - \cos \vartheta) \quad (1)$$

on ν i ν' són les freqüències del fotó abans i després de la col·lisió, ϑ és l'angle entre la direcció inicial i final del fotó, m és la massa de la partícula difusora (en aquest cas, l'electró), c és la velocitat de la llum en el buit i h és la constant de Planck. Amb les dades del problema i a partir de les taules de les constants físiques podem escriure:³⁴ $m = 9.1094 \cdot 10^{-31}$ kg, $c = 2.9979 \cdot 10^8$ m/s, $E = 10^4$ eV = $1.6022 \cdot 10^{-15}$ J i $\vartheta = 60^\circ$. Si tenim en compte que l'energia E del fotó i la seua freqüència ν , estan relacionades per $E = h\nu$, ja que el fotó és una partícula que té massa nul·la, i si anomenem E i E' les energies inicial i final del fotó, respectivament, de l'eq. (1) podem obtenir l'energia final del fotó després de la col·lisió,

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{1}{mc^2}(1 - \cos \vartheta) \quad \Rightarrow \quad E' = 1.587 \cdot 10^{-15} \text{ J} \quad (2)$$

La variació de l'energia del fotó, deguda a la col·lisió amb l'electró, serà

$$\Delta E = E' - E = -1.55 \cdot 10^{-17} \text{ J} = -96.74 \text{ eV} \quad (3)$$

Aquesta variació d'energia del fotó és negativa perquè el fotó ha perdut energia després de ser difós per l'electró. Si tenim en compte que $E = h\nu$ i $E' = h\nu'$, podem aprofitar l'eq. (3) per a calcular la diferència de freqüències i escriure

$$\Delta \nu = \nu' - \nu = \frac{\Delta E}{h} = -2.33 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1} \quad (4)$$

El fotó també ha disminuït la seua freqüència, igual que l'energia, en la seua col·lisió amb l'electró, ja que ambdues magnituds són proporcionals. Si tenim en compte que la longitud d'ona val $\lambda = c/\nu$, la variació de la longitud d'ona del fotó serà

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \vartheta) = 1.22 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (5)$$

El fotó ha augmentat la seua longitud d'ona λ en la col·lisió amb l'electró, al contrari del que passa amb la freqüència i l'energia.

³³Una deducció detallada pot trobar-se en la nota 30.1 del llibre *Física*, de M. Alonso i E. J. Finn (Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1995), o en la p. 1216 del llibre *Física para ciencias e ingeniería*, vol. 2, de P. M. Fishbane, S. Gasiorowicz i S. T. Thornton (Prentice Hall, Mèxic, 1994).

³⁴En aquest problema convé treballar amb més xifres significatives del que és habitual, perquè així evitarem errors d'arrodoniment, que ens donarien dificultats per a comprovar la conservació de l'energia, tal com discutirem més avant.

(b) Si apliquem la llei de conservació de l'energia a la col·lisió entre el fotó i l'electró en repòs, s'obté la següent expressió per a l'energia cinètica E_e de l'electró en retrocés, és a dir, després de la col·lisió,

$$E_e = \frac{(h\nu)^2}{mc^2} \frac{1 - \cos \vartheta}{[1 + (1 - \cos \vartheta) h\nu/(mc^2)]} = 1.55 \cdot 10^{-17} \text{ J} \quad (6)$$

on, per a obtenir el resultat numèric, hem substituït tots els valors que són coneguts.

Observeu que l'energia cinètica E_e que porta l'electró és la que ha guanyat en col·lidir el fotó contra aquest (que estava en repòs) i correspon a l'energia perduda pel fotó, eq. (3). La igualtat entre els resultats de les eqs. (3) i (6) era de esperar, ja que s'hi ha de verificar el principi de conservació de l'energia.³⁵

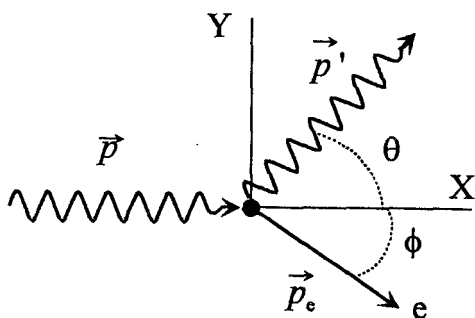


FIG. 1

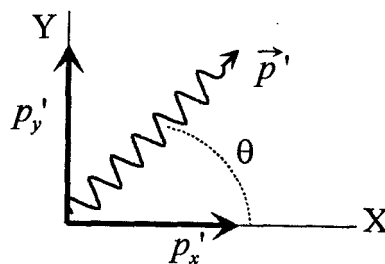


FIG. 2

Per la conservació del moment lineal abans i després de la col·lisió, s'obté (fig. 1)

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}' \quad (7)$$

on \mathbf{p}_e és el moment lineal de l'electró després de la col·lisió, ja que abans estava en repòs, \mathbf{p} i \mathbf{p}' són els moments del fotó abans i després de la col·lisió, respectivament. La relació relativista entre el moment lineal i l'energia per a partícules d'una massa nul·la (com el fotó) és $p = E/c$. Així, l'eq. (7) es transforma en

$$\mathbf{p}_e = \frac{E}{c} \mathbf{u} - \frac{E'}{c} \mathbf{u}' \quad (8)$$

on \mathbf{u}' és el vector unitari en la direcció i el sentit del fotó difós, i \mathbf{u} és el vector unitari en la direcció i el sentit del fotó incident. En el sistema de coordenades que hem elegit (fig. 2), tenim que els moments lineals del fotó abans (\mathbf{p}) i després (\mathbf{p}') de la col·lisió són

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c} \mathbf{i} \quad (9)$$

$$\mathbf{p}' = |\mathbf{p}'| \cos \vartheta \mathbf{i} + |\mathbf{p}'| \sin \vartheta \mathbf{j} = \frac{E'}{c} \cos \vartheta \mathbf{i} + \frac{E'}{c} \sin \vartheta \mathbf{j} \quad (10)$$

³⁵Si en els càlculs previs haguérem usat els valors numèrics $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ J s i $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}$ J podria donar-se el cas que, si no fem les operacions amb la precisió suficient, els resultats de les eqs. (3) i (6) serien molt semblants, però no coincidirien. Això seria degut a la pèrdua de precisió produïda pels errors d'arrodoniment fets per la calculadora i/o l'usuari.

A partir de les eqs. (7), (9) i (10) obtenim que el moment lineal p_e de l'electró després de la col·lisió amb el fotó val

$$p_e = \frac{(E - E' \cos \vartheta) \mathbf{i} - E' \sin \vartheta \mathbf{j}}{c} = 2.698 \cdot 10^{-24} \mathbf{i} - 4.584 \cdot 10^{-24} \mathbf{j} \text{ kg m/s} \quad (11)$$

També podem expressar el moment lineal de l'electró pel seu mòdul $|p_e|$,

$$\begin{aligned} |p_e| &= \frac{1}{c} \sqrt{(E - E' \cos \vartheta)^2 + (E' \sin \vartheta)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \vartheta} \\ &= 5.319 \cdot 10^{-24} \text{ kg m/s} = 1.594 \cdot 10^{-15} \text{ eV/c} \end{aligned} \quad (12)$$

i per l'angle ϕ amb la direcció del fotó incident (fig. 1). Aquest angle ϕ ens donarà la direcció de l'electró després de la col·lisió

$$\phi = \arctan \frac{p_{e,y}}{p_{e,x}} = -59.52^\circ \quad (13)$$

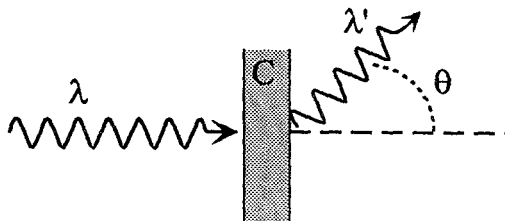
on $p_{e,x}$ i $p_{e,y}$ són els components en les direccions X i Y respectivament, del moment lineal de l'electró.

També hauríem pogut calcular l'energia de l'electró de retrocés a partir del seu moment lineal, ja que en un tractament no relativista,³⁶ l'energia cinètica i el moment lineal estan relacionats per

$$E_e = \frac{p_e^2}{2m} \quad (14)$$

i, en substituir els valors de p_e (donat per l'eq. (12)) i de m , obtenim que $E_e = 1.55 \cdot 10^{-17}$ J. Aquest resultat coincideix amb el que hem obtingut per l'altre procediment, eq. (6), tal com calia esperar.

19.4 Un feix de raigs X monocromàtics de longitud d'ona $\lambda = 0.124 \text{ \AA}$ es difon en un bloc de carboni. Calculeu la longitud d'ona dels raigs X difosos: (a) un angle de 45° i (b) un angle tal que l'energia cinètica de l'electró de retrocés resulte màxima.



³⁶Encara que l'efecte Compton siga un efecte relativista, com que la velocitat de l'electró de retrocés és molt lenta comparada amb la de la llum, eq. (12), podem estudiar el moviment d'aquest electró usant dinàmica no relativista.

$$\lambda = 0.124 \text{ \AA} = 1.24 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$$(a) \lambda' \text{ si } \vartheta = 45^\circ?$$

$$(b) \lambda' \text{ si } E_e = E_{e,\text{m\grave{a}x}}?$$

El bloc de carboni està format per nuclis de carboni i electrons que, en una primera aproximació, suposarem lliures i en repòs, perquè la velocitat d'aquests electrons és negligible comparada amb la velocitat dels fotons.

(a) L'angle de difusió dels raigs X per part del bloc de carboni és $\vartheta = 45^\circ$. Aplicarem el formalisme de l'efecte Compton (discutit en el problema anterior) per a estudiar ara la difusió dels raigs X pels nuclis de carboni i pels electrons.

Pel que fa a la difusió dels raigs X pels nuclis de carboni, la variació de la longitud d'ona dels raigs X és

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{Mc}(1 - \cos \vartheta) = 3.251 \cdot 10^{-17} \text{ m} \quad (1)$$

on M és la massa del nucli de carboni ($M = 1.99 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$), ϑ és l'angle de difusió dels raigs X ($\vartheta = 45^\circ$), h és la constant de Planck ($h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$) i c és la velocitat de la llum ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$). λ i λ' són les longituds d'ona dels raigs X abans i després, respectivament, de produir-s'hi la difusió Compton.

Anàlogament, si apliquem la relació anterior a la difusió dels raigs X pels electrons del bloc de carboni que suposem lliures, tenim

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \vartheta) = 7.10 \cdot 10^{-13} \text{ m} \quad (2)$$

En aquest cas, m és la massa de l'electró ($m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$).

Com podem veure, la variació de longitud d'ona dels raigs X difosos pels nuclis de carboni és quatre ordres de magnitud (10^4 vegades) menor que la variació de la longitud d'ona deguda als electrons. Per tant, està justificat considerar que la difusió Compton es deu únicament als electrons del sòlid. En conseqüència, la longitud d'ona dels raigs X difosos pel carboni és, per l'eq. (2),

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 1.311 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (3)$$

(b) Per conservació de l'energia, l'energia E_e de l'electró de retrocés per efecte de la difusió amb els raigs X és

$$E_e = \frac{(h\nu)^2}{m c^2} \frac{1 - \cos \vartheta}{[1 + (1 - \cos \vartheta)h\nu/(m c^2)]} \quad (4)$$

Aquesta energia E_e de l'electró serà màxima quan el factor $(1 - \cos \vartheta)[1 + h\nu(1 - \cos \vartheta)/(m c^2)]^{-1}$ siga màxim. El valor de l'angle de difusió dels raigs X per al qual aquest factor és màxim, s'obté derivant respecte a l'angle ϑ i igualant a zero. Després de procedir d'aquesta manera tenim que el valor de l'angle ϑ dels raigs X difosos per al qual l'energia de l'electró E_e és màxima és $\vartheta = \pi$, (fig. 1). Per tant, l'energia màxima de l'electró de retrocés $E_{e,\text{m\grave{a}x}}$ val, segons l'eq. (4),

$$E_{e,\text{m\grave{a}x}} = \frac{(h\nu)^2}{h\nu + \frac{1}{2}m c^2} = 4.5 \cdot 10^{-15} \text{ J} \quad (5)$$

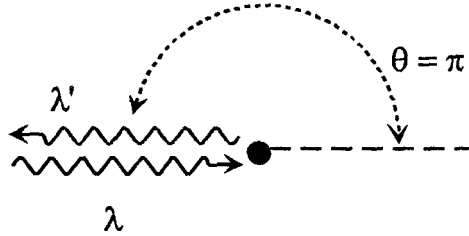


FIG. 1

El valor de la longitud d'ona dels raigs X difosos, λ' , per a aquest cas en què l'angle de difusió val $\vartheta = \pi$, serà

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos \vartheta) = \lambda + \frac{2h}{mc} = 1.725 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (6)$$

Noteu que l'energia màxima $E_{e,\text{màx}}$ de l'electró de retrocés no correspon a tota l'energia dels raigs X,

$$E_X = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = 1.6 \cdot 10^{-14} \text{ J} \quad (7)$$

Això és lògic, ja que un electró lliure no pot absorbir totalment un fotó.³⁷

També podríem haver determinat l'angle que fa màxima l'energia cinètica de l'electró de retrocés mitjançant el raonament següent.

Per conservació d'energia, una energia màxima de l'electró correspon a una pèrdua màxima d'energia per part del fotó. Això correspondrà a una variació màxima de les seues propietats ondulatories (longitud d'ona, per exemple). Segons l'eq. (2), la variació de longitud d'ona és

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) \quad (8)$$

i $\Delta\lambda$ serà màxim quan $\cos \theta = -1$ (ja que les altres quantitats que apareixen en l'eq. (8) són constants). Així, doncs, a partir de l'eq. (8) i amb $\cos \theta = -1$ obtenim que

$$\lambda'_{\text{màx}} = \lambda + \frac{2h}{mc} \quad (9)$$

i que la màxima transferència d'energia té lloc quan el fotó difós ix formant un angle de 180° respecte de la direcció incident (és a dir, ix rebotat). Òbviament, aquests resultats coincideixen amb els que hem obtingut per l'altre mètode.

19.5 Una llàntia, que considerem com un punt, de vapor de sodi ($\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$) emet uniformement en totes les direccions amb una potència mitjana de 100 W. (a) Calculeu l'energia dels fotons que emet. (b) A quina distància de la llàntia hi haurà una densitat mitjana de 10^6 fotons/ m^3 ? (c) Calculeu les amplituds dels camps elèctric i magnètic a 10 m de la llàntia.

³⁷Això és discutit en la secció 30.5 del llibre *Física*, de M. Alonso i E. J. Finn (Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1995).

$$\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}, \partial \overline{W} / \partial t = 100 \text{ W}$$

(a) E_γ ?

(b) r quan la densitat mitjana de fotons siga 10^6 fotons/m³?

(c) \mathcal{E}_0 i \mathcal{B}_0 quan $r = 10$ m?

(a) Sabem que l'energia E_γ d'un fotó està relacionada amb la seua freqüència ν mitjançant

$$E_\gamma = h\nu \quad (1)$$

on h és la constant de Planck ($h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s). La freqüència està relacionada amb la longitud d'ona, λ , i la velocitat de l'ona (que en aquest cas és la de la llum, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s) per l'expressió

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (2)$$

Finalment, tenim que l'energia del fotó expressada en termes de λ s'escriu

$$E_\gamma = h \frac{c}{\lambda} \quad (3)$$

Després de substituir els valors de h , c i λ , obtenim

$$E_\gamma = 3.31 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (4)$$

que també podem expressar en electró volts com segueix

$$E_\gamma = 2.07 \text{ eV} \quad (5)$$

on hem usat que $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

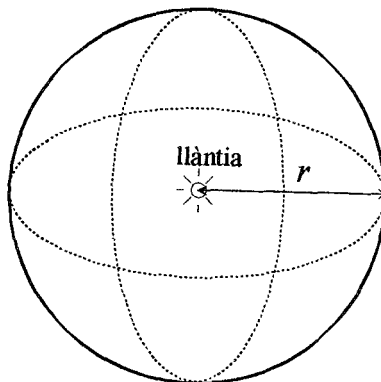


FIG. 1

(b) La densitat mitjana d'energia \bar{E} a una distància r de la llàntia ve donada per la densitat mitjana de fotons que hi ha a aquesta distància, 10^6 fotons/m³, multiplicada per l'energia que correspon a cada fotó (que acabem de calcular):

$$\bar{E} = 10^6 E_\gamma \quad (6)$$

La relació entre la potència mitjana i la densitat mitjana d'energia s'obté a partir del raonament següent. La intensitat d'una ona és l'energia mitjana que passa per una superfície A per unitat de temps:

$$I = \frac{1}{A} \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \quad (7)$$

Però també sabem que la intensitat de l'ona s'obté a partir de la velocitat de propagació i de la densitat mitjana d'energia

$$I = c \bar{E} \quad (8)$$

(en l'expressió anterior hem tingut en compte que la velocitat de propagació que hem de considerar és la velocitat de la llum, c). A partir de les eqs. (7) i (8) obtenim que

$$\bar{E} = \frac{\partial \bar{W} / \partial t}{c A} \quad (9)$$

i com que la llum produïda per la llàntia es propaga en forma d'ones esfèriques, la superfície A que travessa l'ona serà la superfície d'una esfera de radi r (fig. 1), que val $A = 4\pi r^2$. Això substituïnt en l'eq. (9) dóna que

$$\bar{E} = \frac{\partial \bar{W} / \partial t}{4\pi r^2 c} \quad (10)$$

A partir de les eqs. (6) i (10) obtenim que

$$\frac{(\partial \bar{W} / \partial t)}{4\pi r^2 c} = 10^6 E_\gamma \quad (11)$$

i d'ací podem deduir que la distància per a la qual la densitat de fotons val 10^6 fotons/m³ és

$$r = \sqrt{\frac{(\partial \bar{W} / \partial t)}{4\pi c 10^6 E_\gamma}} = 283.09 \text{ m} \quad (12)$$

(c) Sabem que la potència mitjana val $\partial \bar{W} / \partial t = 100$ W, i si substituïm aquest valor en l'eq. (10), quan $r = 10$ m, tindrem

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi c} \quad (13)$$

També sabem que quan la radiació electromagnètica es propaga a través del buit (amb constant dielèctrica $\epsilon_0 = 10^7 / (4\pi c^2)$), la intensitat I de l'ona i l'amplitud \mathcal{E}_0 del camp elèctric estan relacionades segons l'expressió

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \quad (14)$$

A partir de l'eq. (8), obtenim que

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \quad (15)$$

Una altra forma d'arribar al mateix resultat consisteix a escriure la densitat d'energia d'una ona electromagnètica com a suma de les densitats d'energia degudes al camp elèctric \mathcal{E} i al camp magnètic \mathcal{B} , respectivament,

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{B}^2 \quad (16)$$

Si tenim en compte que en una ona electromagnètica $\mathcal{B} = \mathcal{E}/c$ i que $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, l'eq. (16) es converteix en

$$\bar{E} = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 \quad (17)$$

La densitat mitjana d'energia, \bar{E} , s'obtéindrà calculant la mitjana de l'eq. (17). Això ens dona que

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \quad (18)$$

on hem tingut en compte que si considerem que el camp elèctric és una funció harmònica, el valor mitjà del quadrat del camp elèctric és

$$\bar{\mathcal{E}}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2 \quad (19)$$

Com podem apreciar, hem obtingut el mateix resultat, eqs. (15) i (18), per dos camins diferents.

A partir de les eqs. (13) i (18) obtenim el valor de l'amplitud del camp elèctric

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{1}{2\pi c \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2c}{10^7}} = 7.75 \text{ N/C} \quad (20)$$

Una vegada coneixem \mathcal{E}_0 , calcularem l'amplitud del camp magnètic, \mathcal{B}_0 , mitjançant la relació

$$\mathcal{B}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{c} \quad (21)$$

i, en substituir-hi els valors de \mathcal{E}_0 i c , obtenim

$$\mathcal{B}_0 = 2.58 \cdot 10^{-8} \text{ T} \quad (22)$$

CONSTANTS FÍSQUES

Magnitud	Símbol	Valor
velocitat de la llum en el buit	c	$2.998 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
càrrega elemental	e	$1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
constant de Planck	h	$6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
constant de Planck reduïda	$\hbar \equiv h/(2\pi)$	$1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
nombre d'Avogadro	N_A	$6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
unitat de massa atòmica	u	$1.661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
massa de l'electró	m_e	$9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
massa del protó	m_p	$1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
massa del neutró	m_n	$1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
permitivitat del buit	ϵ_0	$8.854 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{C}^2$
constant de Coulomb	$K_e \equiv 1/(4\pi\epsilon_0)$	$8.987 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$
permeabilitat del buit	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{A}^{-2}$
constant molar dels gasos	R	$8.315 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
constant de Boltzmann	k	$1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
radi de Bohr	a_0	$5.292 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
constant de Rydberg	R_∞	$1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
volum normal d'un gas ideal	V_0	$22.414 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3\cdot\text{mol}^{-1}$
constant gravitatòria	G	$6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
acceleració de la gravetat a nivell del mar	g	$9.807 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
radi equatorial de la Terra		$6.378 \cdot 10^6 \text{ m}$
massa de la Terra		$5.976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
massa de la Lluna		$7.350 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
massa del Sol	M_\odot	$1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
radi mitjà de l'òrbita lunar al voltant de la Terra		$3.844 \cdot 10^8 \text{ m}$
radi mitjà de l'òrbita terrestre al voltant del Sol	AU	$1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$

ALTRES RELACIONS ÚTILS

$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$	$1 \text{ dina} = 10^{-5} \text{ N}$
$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$	$1 \text{ cal (IT)} = 4.1868 \text{ J}$
$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$	$0^\circ \text{ C} = 273.15 \text{ K}$
$1 \text{ atm} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$	$1 \text{ gauss (G)} = 10^{-4} \text{ tesla (T)}$
$1/(4\pi\epsilon_0) = 8.987 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$	$\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$

CONSTANTS MATEMÀTIQUES

$\pi = 3.1415927$	$e = 2.7182818$	$\sqrt{2} = 1.4142136$	$\sqrt{3} = 1.7320508$
-------------------	-----------------	------------------------	------------------------

DESENVOLUPAMENTS EN SÈRIE

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (-\pi/2 < x < \pi/2)$$

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (x^2 < 1)$$

TEOREMA DEL BINOMI

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\text{on} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \text{i} \quad m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m, \quad 0! = 1$$

RELACIONS TRIGONOMÈTRIQUES

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

ISBN 84-7908-502-9



9 788479 085025

<http://www.ua.es/publica>



TEXTOS DOCENTS

PROBLEMES DE FÍSICA

Aquest llibre conté més d'un centenar de problemes de física, que cobreixen gran part dels continguts típics que s'imparteixen en una assignatura de Física, en els primers cursos d'una carrera científica o tècnica.

La selecció del material no s'ha fet pensant d'oferir ni molts problemes ni que aquests siguin originals, sinó que hem fet èmfasi en el procediment sistematitzat i detallat de la seua resolució. Per fer això hem seguit la metodologia consistent a: (i) descriure breument l'enunciat, amb símbols i dibuixos, per a saber si hem entés bé allò que ens demana l'enunciat, (ii) planificar el camí que seguirem per a trobar la solució, seleccionant les relacions físiques adients en cada cas, (iii) executar els càlculs i resoldre les equacions fins a arribar al resultat final, i, per últim, (iv) comprovar que el resultat al qual hem arribat està bé o que, almenys, siga raonable.

UNIVERSITAT D'ALACANT