Esta tesis doctoral contiene un índice que enlaza a cada uno de los capítulos de la misma.
Existen asimismo botones de retorno al índice al principio y final de cada uno de los capítulos.

Ir directamente al índice

Para una correcta visualización del texto es necesaria la versión de Adobe Acrobat Reader 7.0 o posteriores

Aquesta tesi doctoral conté un índex que enllaça a cadascun dels capítols.
Existeixen així mateix botons de retorn a l'index al principi i final de cadascun deis capítols .

Anar directament a l'index

Per a una correcta visualització del text és necessària la versió d' Adobe Acrobat Reader 7.0 o posteriors.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

DEPARTAMENTO DE INNOVACIÓN Y FORMACIÓN DIDÁCTICA

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DE DIVISIBILIDAD EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Tesis Doctoral

Samuel David Bodí Pascual

Alicante, 2006

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DE DIVISIBILIDAD EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Memoria que presenta D. Samuel David Bodí Pascual para optar al grado de doctor

Samuel D. Bodí

Fdo. Samuel David Bodí Pascual

Realizada bajo la dirección de Dra. Julia Valls González

Julia Valls

Fdo. Dra. Julia Valls González

Alicante, Febrero de 2006

AGRADECIMIENTOS

Desde estas líneas quiero mostrar mi agradecimiento a la Directora de esta Tesis, la Dra. Dª Julia Valls González, y al Director del Departamento de Innovación y Formación Didáctica de la Universidad de Alicante, Dr. D. Salvador Llinares Císcar, por su ayuda continua, por su apoyo, por su rigor y por su contribución científica, y sin los cuales esta Tesis no podría haber sido una realidad. Gracias por estar ahí y por enseñarme a aprender, a mejorar la práctica docente y a enseñar.

Al Dr. D. Leandro Navas Martínez por sus consejos, orientaciones y ayuda para realizar el análisis cuantitativo de los datos de la investigación.

A los profesores y alumnos de los diferentes Centros educativos que colaboraron en la realización de esta investigación.

Por último, quiero dar las gracias a nuestros familiares, sobre todo a los ausentes, por su estímulo y por su paciencia, dando siempre su ánimo para la realización y conclusión de esta Tesis.

A ma mare, per tot i per tant

Car no perdura el vent de les paraules,
ans el risc de donar-se per comprendre
i el que compta és l'esforç de cada dia
compartit tenaçment amb els qui creuen
que cada gest eixampla l'esperança,
que cap dia no es perd per als qui lluiten.

Martí i Pol

¿Qué es la vida? Un frenesí.
¿Qué es la vida? Una ilusión,
una sombra, una ficción,
y el mayor bien es pequeño:
que toda la vida es sueño,
y los sueños, sueños son.

Calderón de la Barca

Índice

Lista de Tablas y Esquemas

CAPÍTULO 1

Capítulo 1. Identificación del Problema

El presente trabajo trata de la comprensión de los alumnos de Educación Secundaria sobre la divisibilidad en el conjunto de los números naturales. El estudio se centra en las formas de conocer y de construir el conocimiento de los conceptos de divisibilidad en el conjunto de los números naturales, en un rango de edad de 12 a 17 años- 1° de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), 4° de ESO, tanto en la modalidad de la opción A como B, y de 1° de Bachillerato, opciones Científico-Técnica y de Humanidades y Ciencias Sociales- (D.O.G.V de 8 de marzo de 2002 y D.O.G.V de 5 de abril de 2002). El campo en que se ubica el trabajo realizado es el de Pensamiento Numérico, dentro de la investigación en Didáctica de la Matemática.

En este primer capítulo realizaremos una breve reflexión sobre la divisibilidad en el conjunto de los números naturales tanto en el currículo de la educación primaria como en el de educación secundaria, y su tratamiento en los libros de texto de la educación secundaria ubicados en este momento en el primer ciclo. Finalizamos este capítulo exponiendo distintas aportaciones de diferentes investigadores sobre la comprensión de la divisibilidad en N.

La reflexión sobre la importancia del pensamiento, del razonamiento, de la resolución de problemas y de la comunicación centran los actuales esfuerzos de las matemáticas escolares (Silver et al., 1997). Señalan estos autores que no es suficiente que los alumnos conozcan los procedimientos aritméticos básicos, si no que además es necesario que sepan aplicarlos cuando corresponda y dar sentido a las situaciones que aparezcan desarrollando estrategias que les permitan formular y resolver problemas. Por ello, se espera que los alumnos sean capaces de dar una estructura a las nuevas situaciones, que generen hipótesis y analicen críticamente las estrategias más adecuadas en cada situación, de modo que estos estudiantes lleguen a ser ciudadanos más capacitados y estén preparados para afrontar los desafíos del nuevo siglo.

Los Decretos Curriculares de Educación Secundaria (Decretos 1007/1991, 831/2003, 47/1992 y 39/2002) y Bachillerato (1178/1992, 832/2003, 174/1994 y 50/2002) destacan la importancia de la aplicación de las matemáticas, más allá de la especialización científica, de su relación con las demás ciencias, y de su carácter instrumental, que ayude al alumno a comprender la realidad que le rodea. En Educación Secundaria cabe considerar la etapa obligatoria donde se han de cubrir las necesidades matemáticas básicas y proporcionar los instrumentos necesarios para posteriores estudios. Todos los alumnos deben adquirir los conocimientos necesarios para desenvolverse como ciudadanos capaces de ejercer sus derechos y sus deberes en una sociedad que incorpora cada vez más a su funcionamiento, a sus actividades y a su lenguaje ciertos aspectos matemáticos.

Para encuadrar nuestra investigación sobre la comprensión de la Divisibilidad hemos realizado un análisis histórico de contenidos de la divisibilidad a partir del desarrollo del currículo y del que realizan los proyectos editoriales. El análisis histórico y el estudio de significados institucionales (Godino, 1996) permiten concebir el funcionamiento mental y los contextos sociales y culturales como entidades que actúan conjuntamente, constituyendo aspectos de la acción humana. Además, es necesario destacar que los individuos se desarrollan en diferentes contextos culturales e institucionales, encontrándose los objetos matemáticos mediatizados por los significados institucionales.

1.1. La Divisibilidad en N.

En este apartado vamos a ofrecer un breve desarrollo histórico de la Divisibilidad. Presentaremos el por qué de su nacimiento y su formalización a lo largo de los siglos.

1.1.1. Desarrollo histórico de la Divisibilidad.

La organización de las relaciones existentes entre los números constituye el origen de la teoría de la divisibilidad (Sierra et al., 1989). Entre los hechos en los que intervenían los conceptos de divisibilidad en la Antigüedad se pueden situar las necesidades de la agricultura y de la ganadería, y su dependencia y relación con las estaciones climáticas y ciclos lunares que hizo que se desarrollaran distintos tipos de calendarios.

Desde la Antigüedad hasta principios del siglo XIX los objetos principales de las matemáticas estaban constituidos por los números, las magnitudes y las figuras. Existía la creencia generalizada de que los objetos matemáticos nos son dados y no se tiene el poder de asignarles propiedades arbitrarias (Bourbaki, 1972). En la matemática de la Grecia clásica destacan las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Ptolomeo y Diofanto. Éstas jugaron un papel relevante en la matemática de los siglos XVI, XVII y XVIII (Bochner, 1991; Kline 1992; Boyer, 1999). La matemática griega poseía limitaciones que impedían modelar el pensamiento científico como nosotros lo entendemos en estos momentos.

El estudio de los múltiplos, de los divisores y de la descomposición factorial de los números naturales ha constituido un capítulo fundamental de la Aritmética desde el comienzo de la Matemática. Entre los matemáticos más prominentes de la Antigüedad se encuentra Euclides de Alejandría (año 300 a.C.), cuyos "*Elementos*", conjunto de trece volúmenes, recoge de manera axiomatizada el saber matemático de su tiempo. Los libros VII, VIII y IX, en particular, reúnen los tratados de Aritmética, y ofrecen una descripción de la Teoría de Números, es decir, de las propiedades de los números enteros y de las razones entre los mismos.

Euclides en el libro VII, mediante 22 definiciones, establece los conceptos de:

- **"Número"**- "*Un número es una pluralidad compuesta de unidades*" (Definición 2) "*Una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de las cosas que hay, se llama una*" (Definición 1). El "número" para Euclides es una magnitud.
- **"Parte"** (Divisor)- "*Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor*"- **"Partes"** (no divisor) - "*cuando no lo mide*". **"Múltiplo"**- "*Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor*"- (Definiciones 3, 4 y 5, respectivamente).
- Clasifica los números en pares e impares; parmente par e impar; imparmente (desde las definiciones 6 a 10). Número **"primo"**- "el medido por la sola unidad"- Números **"primos entre sí"** –"los medidos por la sola unidad como medida común" (Definición 11 y 12, respectivamente). Número **"compuesto"** –"*es el medido por algún número*"- Números **"compuestos entre sí"** –"*son los medidos por algún número como medida común*"- (Definiciones 13 y 14, respectivamente). Por último, tras establecer que "*un número multiplica a un número cuando el multiplicado se añade a sí mismo tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número*", completa la categorización de los números definiendo número plano, sólido, cuadrado, cubo y perfecto, y estableciendo algunas relaciones entre estos números.

Las definiciones de número, divisor, múltiplo y de las distintas clases de números fueron realizadas en términos de magnitudes. Los griegos no concibieron los números tal como hoy los concebimos. Consideraron razones (P : Q) entre magnitudes o proporciones, pero conceptualmente no pudieron formar el producto P x L entre magnitudes genéricas, noción que nunca definieron. Generalmente, entendieron el "producto" de dos longitudes como un área o un volumen, si uno de los factores era una longitud y el otro un área, si bien estos "productos" nunca constituyeron actos reflexivos y conscientes (Bochner, 1991).

El libro VII se completa con 22 proposiciones que junto con las 27 del libro VIII y las 36 del libro IX constituyeron investigaciones teóricas con, entre otros, los siguientes objetivos:

- Establecer un procedimiento, llamado "*antenaresis*" y conocido actualmente como "**Algoritmo de Euclides**", para calcular el máximo común divisor de dos o más números desarrollado a través de las proposiciones VII-1 a VII-3:

  "*Dados dos números desiguales y restando sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí*" (Proposición 1)

  "*Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima*" (Proposición 2) Corolario: "*Si un número mide a dos números, entonces también mide a su medida común máxima*"

  "*Dados tres números no primos entre sí, hallar su medida común máxima*" (Proposición 3).

- Proponer distintas **propiedades de la divisibilidad** desde la proposición VII-4 a la proposición VII-11. Por ejemplo: "*Todo número es parte de todo número, el menor del mayor*" (Proposición 4) "*Si un número es parte de un número, y otro es la misma parte de otro, la suma será también la misma parte de la suma que el uno del otro*" (Proposición 5).
- Desarrollar la teoría de las proporciones para números mediante las proposiciones VII-12 a VII-20.
- Definir y establecer propiedades de los números primos entre sí a partir de las proposiciones VII-21 a VII-29.
- Clasificar los números en compuestos y primos (Proposición VII-31 y VII-32 respectivamente).
- Establecer un procedimiento para calcular **el mínimo común múltiplo** de dos o más números desarrollado a través de las proposiciones VII-33 a VII-39. Por ejemplo:

  "*Dados tantos números como se quiera, hallar los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos*" (Proposición 33).

  "*Dados dos números, hallar el menor número al que miden*" (Proposición 34).

  "*Si dos números miden a algún número, el número menor medido por ellos también medirá al mismo número*" (Proposición 35).

  "*Dados tres números, hallar el número menor al que miden*" (Proposición 36).

Por último, en el libro IX de Euclides encontramos, entre las 36 proposiciones que lo conforman, las proposiciones IX-1 a IX-11, donde se establecen propiedades de los "productos" entre números sólidos, cubos, cuadrados; a partir de las proposiciones IX-21 a IX-34, propiedades de los números pares e impares, de los parmente pares e impares y de los imparmente pares e impares. Además se incluye la proposición IX-20- "*Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos*"- que establece que el conjunto de números primos es infinito, junto con proposiciones próximas al Teorema Fundamental de la Aritmética.

Las proposiciones IX-12, 13 y 14 - "*Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales, por cuantos números primos sea medido el último, por los mismos será medido también el siguiente a la unidad*" (Proposición 12); "*Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales y el siguiente a la unidad es un número primo, el mayor no será medido por ningún otro fuera de los que se encuentran entre los números proporcionales*" (Proposición 13) y "*Si un número es el menor medido por números primos, no será medido por ningún otro número primo fuera de los que le medían desde un principio*" (Proposición 14), constituyen teoremas silogísticamente cercanos al Teorema Fundamental de la Aritmética, pero este teorema, según Bochner (1991), no pudo ser concebido por los griegos, ya que éstos

- no llegaron a concebir el **producto** de números reales, y
- nunca llegaron a darse cuenta de que en matemáticas se puede concebir una "**existencia**" totalmente independiente de la "constructibilidad".

Estos dos aspectos son necesarios para idear el Teorema Fundamental de la Aritmética. Este teorema es un teorema de **existencia** que asegura **una representación única** de cualquier número en **producto** de factores primos para cuya **construcción no existen fórmulas específicas**.

A partir del siglo XVI, y debido a las necesidades tecnológicas, científicas y mercantiles, se mejoraron y extendieron los métodos operativos. La extensión de la teoría de la divisibilidad a otros conjuntos tiene su referente histórico en Stevin, quien en un libro publicado en 1634, extiende el algoritmo de Euclides al cálculo del máximo común divisor de dos polinomios.

En el siglo XVII Fermat consideraba la aritmética como un dominio propio y sus trabajos determinaron la dirección de la Teoría de Números hasta Gauss. Destaca en su obra sobre Teoría de Números la teoría de la divisibilidad, los números primos, el tratamiento de los números perfectos[1], números amigos[2] y cuadrados mágicos.

Euler en 1770 trató de ampliar el concepto de divisor más allá de los conjuntos de los números enteros y de los polinomios, encontrándose con el problema de que no es posible conservar todas las propiedades en esa extensión, en especial, las de la existencia del máximo común divisor y de la unicidad de la descomposición en factores primos.

Hasta el siglo XIX con Gauss, la teoría de la divisibilidad se desarrolló en el campo de los números enteros. En las obras de Gauss "*Disquisiciones arithmeticae*" se encuentra por primera vez el concepto de número congruente y se desarrollan las propiedades de la teoría de congruencias. En el trabajo de Gauss se incluía el Teorema Fundamental de la Aritmética para el dominio de integridad de los números enteros, que indica que *todo número entero puede expresarse como un producto finito de número primos, en el que algunos factores pueden repetirse, y tal que su representación es única.* Gauss también introdujo la noción de grupo abeliano y demostró que en los grupos abelianos finitos existe un elemento del grupo cuyo orden es m.c.m de los órdenes de todos los elementos.

Uno de los corolarios al teorema de Euclides sobre la existencia de infinitos números primos, lo enunció Dirichlet en este mismo siglo. En el siglo XIX, autores como Kummer, Dedekind y Kronecker generalizan la Teoría de Números, en particular la teoría de la divisibilidad, mediante la creación de la estructura de ideal.

[1] Un número a es *perfecto* cuando puede ser expresado como suma de todos sus divisores (excepto él mismo).
[2] Dos números a y b son *amigos* si la suma de todos los divisores de a, distintos de a, da como resultado b.

El álgebra conmutativa moderna empezó a formalizarse hacia 1910 y en esta década aparece la noción general de anillo debido a Fraenkel. La Teoría de Números (Rey, 1941) ocupa a partir del siglo XX una posición prominente respecto de la Aritmética, del Álgebra y de la Geometría. La Teoría Elemental de Números abarca desde este siglo un amplio espectro en el ámbito de las Matemáticas, y en ella, en particular, podemos destacar el estudio de la estructura multiplicativa y de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Entre aquellos aspectos que cabe mencionar en el estudio de la divisibilidad en N, se encuentran los conceptos de múltiplo, divisor, factor, ser divisible y criterios de divisibilidad; divisores y múltiplos comunes: el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo; número primo y número compuesto, o el Teorema Fundamental de la Aritmética, tratándose de un tema de gran potencialidad.

Esta breve revisión histórica nos permite conformar la Divisibilidad en N, en particular, y la Teoría de Números, en general, en tres grandes fases:

- 1ª Fase o de conceptualización.
- 2ª Fase o de las propiedades y procedimientos.
- 3ª Fase o de generalización.

Las dos primeras debidas a Euclides y la última a matemáticos posteriores.

- **1ª Fase o de conceptualización**

La noción de número entendida como una magnitud (magnitud de un segmento) forzó a describir los conceptos de múltiplo, divisor, número primos y compuesto... en términos de "medida", de medida de una magnitud. Esta forma de pensar estos conceptos impidió que los griegos concibieran el "producto" entre magnitudes genéricas. No llegaron a imaginar el producto de números reales.

- **2ª Fase o de las propiedades y procedimientos**

Euclides formuló propiedades y procedimientos fundamentales para la Teoría de Números. Entre las propiedades destacamos las relativas a

- ♦ "la infinitud de los números primos"
- ♦ los teoremas silogísticamente próximos al Teorema Fundamental de la Aritmética.

Este teorema no pudo ser enunciado por los matemáticos griegos en los términos actuales al (a) no concebir el producto entre números reales; (b) no admitir una "existencia" independientemente de la "construcción".

En cuanto a los procedimientos, Euclides estableció las bases de los procedimientos de cálculo del mínimo común múltiplo de dos o más números y del máximo común múltiplo de dos números, el hoy conocido como "Algoritmo de Euclides".

- **3ª Fase o de generalización**

La estructura del conocimiento sobre divisibilidad en los tres últimos siglos ha permitido integrar dicho conocimiento en una configuración más amplía de estructuras algebraicas y consolidar a la Teoría de Números como un campo de investigación.

1.2. Currículo de Divisibilidad en Educación Primaria y Secundaria en el siglo XX.

En los siguientes apartados realizamos un resumen de las adaptaciones curriculares de la Divisibilidad en N en la Enseñanza Primaria y Secundaria en nuestro país desde principios del siglo XX hasta la actualidad. Los manuales escolares son un instrumento transmisor de los contenidos aceptados socialmente resultando interesante su contribución en la historia de la educación matemática (Sierra et al., 1999). La descripción de las características más importantes del tratamiento de la divisibilidad, ejemplificadas a través de distintos proyectos editoriales, la hemos dividido en seis periodos marcados por las reformas educativas y acontecimientos políticos:

I. Periodo anterior a 1931
II. Periodo comprendido entre 1931 y 1936
III. Periodo comprendido entre 1939 y 1950
IV. Periodo 1950 a 1970
V. Periodo de 1970 a 1990
VI. Periodo de 1990 hasta la actualidad.

Las principales características del tratamiento curricular de la divisibilidad en estos periodos hacen referencia a (a) las acepciones léxicas- divisor, ser divisible, múltiplo, factor- con las que se inicia el estudio de la divisibilidad; (b) las operaciones a las que se asocian los conceptos de múltiplo y divisor; (c) cómo es considerada la divisibilidad: propiedad entre números y/o vinculada con la magnitud; (d) el carácter procedimental o representacional del Teorema Fundamental de la Aritmética.

I. Periodo anterior a 1931.

En el último tercio del siglo XIX se iniciaron las discusiones sobre educación, en asuntos tales como la libertad de cátedra, la libertad de creación de centros, exámenes, o titulaciones. La enseñanza primaria se convirtió en un asunto principal desde el punto de vista pedagógico aunque no político, destacando las aportaciones de la Institución Libre de Enseñanza (Prellezco, 1994). La Ley de Instrucción Pública del ministro Claudio Moyano de 1857, fue la que marcó las líneas principales de la Instrucción Pública en España hasta prácticamente la Segunda República, con pequeños retoques a lo largo de su vigencia. Esta Ley de Instrucción Pública constaba de cuatro secciones. En la Sección I se estructuraba la enseñanza en tres niveles: primera enseñanza, segunda enseñanza y superior, componiéndose la segunda enseñanza de seis años de estudios generales y estudios de aplicación a profesiones industriales.

En 1900, con García Alix, se creó el Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes y la educación dejó de depender del Ministerio de Fomento. Se instituyeron diversos organismos en su estructura funcional y se tomó como punto principal de referencia la lucha contra el analfabetismo (Samaniego, 1994a). La presencia de un alto índice de analfabetismo entre la población española, del 64% a comienzos del siglo XX, refleja unas fuertes carencias de la enseñanza primaria (Del Valle, 1994).

Hasta 1931 la Enseñanza Primaria y su organización fueron reguladas por diversos decretos - 1901, 1905, 1913-. En 1901 se fijó el programa de la **enseñanza primaria**, integrado por diversas materias entre las que se encontraba la Aritmética. La metodología era decisión del maestro y el aprendizaje solía ser eminentemente memorístico.

En esta época, una concreción curricular de los contenidos de divisibilidad en educación primaria y profesional la podemos obtener en el libro del profesor Dalmáu

(1899) "*Soluciones analíticas de los ejercicios y problemas de aritmética*", que presentaba como "*un conjunto, ordenado, metódico, gradual y completo de problemas y ejercicios prácticos*" y que se enmarcaba en un movimiento de renovación pedagógica del momento. Para el tema de divisibilidad plantea ejercicios sobre (a) la obtención de números divisibles por otro dado, (b) formación de múltiplos de un número natural expresándolos como la multiplicación del número por otros números naturales, (c) obtención de todos los divisores de un número a través de la representación factorial y (d) obtención del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo por dos métodos.

Estos ejercicios se plantean desde una perspectiva eminentemente procedimental. Este hecho puede observarse en la manera en que Dalmáu (1899) usa, por ejemplo, el Teorema Fundamental de la Aritmética en el cálculo del mínimo común múltiplo y en la obtención de los divisores de un número. El problema 22 presenta dos procedimientos de obtención del mínimo común múltiplo de dos números, diferenciándolos explícitamente como el "*del método ordinario y el de los factores primos*". Por el método ordinario entiende utilizar el "algoritmo de Euclides" y por el de factores primos el "Teorema Fundamental de la Aritmética".

22. *Operando por el método ordinario y por el de factores primos, hállese el m. c. m. de los siguientes números:* 1.º, 490 *y* 625; 2.º, 719 *y* 3,701; 3.º, 2,000 *y* 970.

Solución por el método ordinario:

1.º El m. c. d. de 490 y 625 es 5; su m. c. m. es, pues, $\frac{490 \times 625}{5} = 61{,}250$.

2.º El m. c. d. de 719 y 3,701 es 1, pues son primos entre sí; su m. c. m. es, pues, $719 \times 3{,}701 = 2.661{,}019$.

3.º El m. c. d. de 2,000 y 970 es 10; su m. c. m. es, pues, $\frac{2{,}000 \times 970}{10} = 194{,}000$.

Solución por el método de factores primos:

1.º, $490 = 2 \times 5 \times 7^2$; $625 = 5^4$; su m. c. m. es, pues, $2 \times 7^2 \times 5^4 = 61{,}250$.
2.º, 719 y 3,701. Ambos son primos entre sí; su m. c. m. es $719 \times 3{,}701 = 2.661{,}019$.
3.º, $2{,}000 = 2^4 \times 5^3$; $970 = 2 \times 5 \times 97$; su m. c. m. es, pues, $2^4 \times 5^3 \times 97 = 194{,}000$

Cálculo del mínimo común múltiplo

(Soluciones analíticas. Libro del profesor. Dalmáu, J.1899. p. 85)

Por otra parte, los problemas 12 y 13 nuevamente evidencian el uso procedim del Teorema Fundamental de la Aritmética en la obtención de divisores de un núm divisores comunes de dos números, respectivamente. La resolución del problema número 13 esta basada en la propiedad "*los divisores comunes a dos números son todos los divisores de su máximo común divisor y sólo estos*" y en el Teorema Fundamental de la Aritmética.

12. *Hállense todos los divisores de los siguientes números:* 960 — 1,728 *y* 8,398.

Result. 1.º, $960 = 2^6 \times 3 \times 5$. Sus divisores son: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 15, 30, 60, 120, 240, 480 y 960.
2.º, $1{,}728 = 2^6 \times 3^3$. Sus divisores son: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 9, 18, 36, 72, 144, 288, 576, 27, 54, 108, 216, 432, 864 y 1,728.
3.º, $8{,}398 = 2 \times 13 \times 17 \times 19$. Sus divisores son 1, 2, 13, 26, 17, 34, 221, 442, 19, 38, 247, 494, 323, 646, 4,199 y 8,398.

13. *Hallar los divisores comunes á los números* 360 *y* 240.

Solución. El m. c. d. de estos dos números es 120; los divisores comunes á ambos son, pues, los divisores de 120, esto es, 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60 y 120. (*Aritm. Razonada*, número 100.)

Cálculo de divisores

(Soluciones analíticas. Libro del profesor. Dalmáu, J. 1899. p. 85)

En relación a la **enseñanza secundaria** cabe destacar que a partir de 1901 y hasta 1914 se iniciaron distintas reformas para reorientarla (Díaz de la Guardia, 1988). Los contenidos de divisibilidad formaban parte de la Aritmética y se desarrollaban en tercer curso: "*Divisibilidad. Números primos. Máximo común divisor. Mínimo común múltiplo*". Estos contenidos se mantuvieron hasta 1934, con mayor o menor extensión (Bruno y Martinón, 2000, pp. 23 y 29).

Un ejemplo del desarrollo curricular de estos contenidos se encuentra en el capítulo "Propiedades de los números" del libro "Elementos de Aritmética con algunas nociones de álgebra" (Bruño, 1900), donde se ofrecen como definiciones independientes las acepciones léxicas del concepto de divisibilidad:

(a) ser divisible- "*Un número es divisible por otro cuando al partir el primero por el segundo resulta un cuociente entero, sin quedar ningún residuo*-;

(b) múltiplo- "*Llámese múltiplo el número que contiene a otro dos ó más veces exactamente*"-;

(c) submúltiplo, factor o divisor- "*Llámese submúltiplo, factor o divisor de un número entero, otro número entero contenido exactamente en el primero dos ó más veces*"-;

junto con las definiciones de número par, número primo, máximo común divisor y mínimo común múltiplo y teoremas y corolarios referentes a las propiedades de los divisores y múltiplos (divisor de una suma o de una diferencia, múltiplo de una suma o de una diferencia; divisores de los múltiplos de un número) y de los números primos; distintos criterios de divisibilidad (por 10, 100 ó 100; por 2, 4, 8 y 2^n; por 5, 25, 125 y 5^n; por 3 y por 9; por 11).

Todas las definiciones y propiedades se presentan a través de números concretos expresados en su representación decimal. El cálculo del máximo común divisor de dos números se realiza a través del algoritmo de Euclides (sin citarlo) y éste se generaliza a más de dos números en virtud de la propiedad asociativa. Se utilizan las propiedades de los números primos para expresar un número natural como producto de factores primos.

La representación factorial se usa para:

(a) buscar todos los divisores de un número;
(b) para obtener máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números.

Esta representación factorial, como en educación primaria, tiene un marcado carácter procedimental como evidencia el hecho que el autor presenta, desde el epígrafe "A*plicación de la teoría de los números primos*", la obtención procedimental de los divisores de un número a través de dos reglas.

A continuación mostramos una de ellas basada en la multiplicación de factores y en la representación factorial del número.

Segundo método.

345. También podría procederse como sigue:
Sea 210 el número dado.
Descomponiéndolo en sus factores primos, resulta:

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \qquad (342)$$

Todos los productos de los factores de 210, que son primos entre sí, combinados de dos en dos, de tres en tres, etc., dividen á 210 (**335**).

Dispongamos, para esto, en una línea vertical, los factores primos de 210 por orden de valor:

210	2							
105	3	6						
35	5	10	15	30				
7	7	14	21	42	35	70	105	210

Multiplicando 2 por 3, se escribe el producto 6 á la derecha del 3; multiplicando en seguida por 5 las dos primeras líneas compuestas de los números 2, 3 y 6, se escriben los productos á la derecha del 5; por fin se multiplican por 7 las tres primeras líneas, y resulta la cuarta. Todos los números del cuadro dividen á 210 (**335**).

El número 210 no admite otros divisores, porque si hubiera otro, por ejemplo $2^2 \times 7$, sería preciso que 210 encerrase el factor 2^2 (**185**), lo que es absurdo (**340**).

346. **Encontrar cuántos divisores tiene un número.** — *Para saber cuántos divisores tiene un número, basta añadir una unidad á los exponentes de sus factores primos, y multiplicar entre sí estos números así aumentados; el producto dará el número de divisores pedido.*

Obtención de todos los divisores de un número

(Elementos de Aritmética. Bruño, G.M.; 1900. p. 82)

En educación secundaria la representación factorial de los números naturales, y su tratamiento procedimental y mecánico, se realiza a través de reglas muy estructuradas (obtención de divisores de un número, del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo). La divisibilidad se entendía como una propiedad entre los números, partiendo de la división entre los dos números y de la observación del resto que se producía al dividir, o bien si un número se encuentra contenido un número de veces en otro, formando "parte" del mismo. Estas definiciones a nuestro juicio solo permitían establecer relaciones lógicas de equivalencia entre múltiplo y divisor.

En esta época, tanto en Primaria como en Secundaria, el papel que desempeña la representación factorial es eminentemente procedimental y la divisibilidad se entiende como una propiedad entre números expresados en su representación decimal. Su estudio se inicia a través de la acepción léxica "ser divisible" seguida de las acepciones "múltiplo y divisor".

II. Periodo comprendido entre 1931 y 1936.

En 1931, con la llegada de la República, se reorganizó el Consejo de Instrucción Pública y se estableció la libertad de cátedra y la escuela laica, poniéndose en marcha una nueva política educativa articulada a través de innovaciones pedagógicas, de la enseñanza popular, de la lucha contra el analfabetismo o de la instrucción elemental, incentivando además las construcciones escolares (Samaniego, 1994b). En este periodo se sucedieron distintos gobiernos lo que originó una serie de programas donde primaron las ideas de la pedagogía institucionista, pero sin conseguir un plan que estructurara definitivamente la enseñanza.

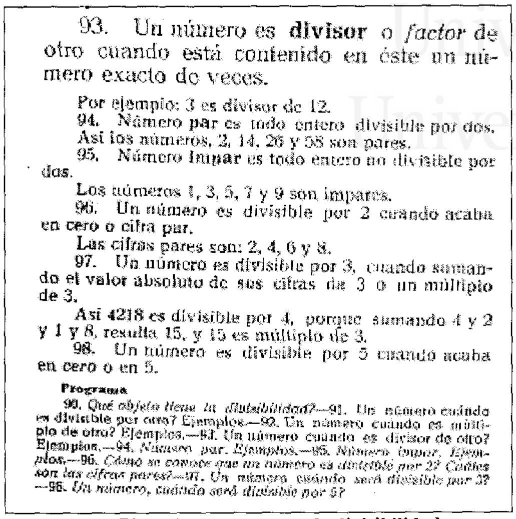
La **enseñanza primaria** durante este periodo constaba de tres grados, el preparatorio, el elemental y el medio. La ejemplificación de los desarrollos curriculares de los contenidos de divisibilidad en los distintos grados los encontramos en la Enciclopedia de Dalmáu (1932) y en los libros del alumno de Porcel (1932, 1934).

En la Enciclopedia de Dalmáu (1932), correspondiente al grado preparatorio, aparecen, formando parte de la Aritmética, contenidos sobre divisibilidad en un apartado titulado "*múltiplos y divisores de las unidades de longitud, peso y capacidad*". En este grado, la divisibilidad se muestra vinculada a la magnitud.

En los libros del alumno de Porcel (1932, 1934) se incluyen, en los grados elemental y medio, distintos contenidos de la divisibilidad formando parte de la Aritmética. En el grado elemental, la divisibilidad se desarrolla en diferentes lecciones. En la primera lección, después de la operación división y de sus propiedades, se presenta la divisibilidad, entendida como una propiedad de los números, a través de las definiciones:

(a) "ser divisible"- "*cuando el número es múltiplo del otro*" -;
(b) múltiplo de un número- "*cuando lo contiene un número de veces*"-;
(c) divisor de un número o factor- "*cuando está contenido en éste un número exacto de veces*" -;

y las reglas de divisibilidad por 2, por 3 y por 5. No hay ninguna mención a la representación factorial de los números naturales, reseñándose únicamente la representación decimal de los números y la relación entre ellos a través de las operaciones de multiplicación o división.



93. Un número es **divisor** o *factor* de otro cuando está contenido en éste un número exacto de veces.

Por ejemplo: 3 es divisor de 12.

94. Número **par** es todo entero divisible por dos. Así los números, 2, 14, 26 y 58 son pares.

95. Número **impar** es todo entero no divisible por dos.

Los números 1, 3, 5, 7 y 9 son impares.

96. Un número es divisible por 2 cuando acaba en cero o cifra par.

Las cifras pares son: 2, 4, 6 y 8.

97. Un número es divisible por 3, cuando sumando el valor absoluto de sus cifras da 3 o un múltiplo de 3.

Así 4218 es divisible por 4, porque sumando 4 y 2 y 1 y 8, resulta 15, y 15 es múltiplo de 3.

98. Un número es divisible por 5 cuando acaba en cero o en 5.

Programa

90. *Qué objeto tiene la divisibilidad?*—91. Un número cuándo es divisible por otro? Ejemplos.—92. Un número cuándo es múltiplo de otro? Ejemplos.—93. Un número cuándo es divisor de otro? Ejemplos.—94. *Número par. Ejemplos.*—95. *Número impar. Ejemplos.*—96. *Cómo se conoce que un número es divisible por 2? Cuáles son las cifras pares?*—97. *Un número cuándo será divisible por 3?* —98. *Un número, cuándo será divisible por 5?*

Ejemplos y programa de divisibilidad

(Enciclopedia Grado Elemental. Porcel, M. 1932. p.23)

En lecciones posteriores, se muestra la divisibilidad vinculada a la magnitud desarrollándose los conceptos de "*múltiplos y divisores referidos al sistema métrico decimal*" e incidiendo en "*los divisores y múltiplos de unidades de medida de longitud, superficie, volumen y capacidad*" de eminente uso práctico.

Por lo que respecta al grado medio, la divisibilidad nuevamente aparece vinculada a la magnitud, se habla de "*múltiplos y divisores de unidades de longitud, de superficie*". Los múltiplos se formaban con los prefijos miria, kilo, hecto, deca, y los divisores con los prefijos deci, centi o mili.

En esta etapa escolar la divisibilidad se presenta con un carácter eminentemente práctico como lo demuestra el hecho que en dos de los tres grados que conforman la enseñanza primaria se vincula la divisibilidad a la magnitud.

En la **enseñanza secundaria** la divisibilidad se presenta como una propiedad entre los números, como podemos ver en el capítulo "Propiedades de los números" del libro "*Tratado teórico-práctico de Aritmética razonada. Curso Superior*" de Ediciones Bruño, de los años cuarenta y cuya primera edición es de 1932. En este capítulo el concepto de divisibilidad se expone a través de las acepciones léxicas:

(a) múltiplo -"*Múltiplo de un número es el producto de este número por otro número entero cualquiera*"-

(b) divisor o submúltiplo - "*un número es divisor o submúltiplo de otro si lo divide exactamente*"-;

completándose cada una de ellas con las definiciones de

(c) múltiplo común -"*Múltiplo común de varios números es todo número divisible por cada uno de ellos*"-;

(d) divisor común -"*Un número es divisor común de otros varios cuando los divide exactamente a cada uno de ellos*"-.

Se tratan las propiedades de los múltiplos y divisores, enunciadas como teoremas sobre la suma o diferencia de múltiplos y divisores a través de números concretos; distintos criterios de divisibilidad (del 2, del 4, del 5, del 8, del 25, del 125, del 9, del 3, del 11 y del 7), demostrados a través de números concretos; las definiciones de máximo común divisor de dos números, sus propiedades y el algoritmo de Euclides (sin citar el nombre) para su obtención.

Por ultimo, el Teorema Fundamental de la Aritmética, aunque no se le denomine explícitamente en el texto, se presenta como un teorema de representación de un número en producto de factores primos. No obstante, la representación de los números que se utiliza a lo largo de estos capítulos es preferentemente decimal.

Sólo en el último capítulo, bajo el epígrafe "*Aplicación de la teoría de los números primos*" se hace mención expresa de la representación factorial de un número en la obtención de todos los divisores de un número, del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de diversos números, como ejemplificamos en la siguiente figura, donde se expone el procedimiento de obtención del mínimo común múltiplo de dos números.

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$$
$$3.780 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$$
$$3.960 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11.$$

El m. c. m. *se compone del producto de todos los factores primos de los números dados con su mayor exponente* ; será, por lo tanto :

$$2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11.$$

En efecto : 1.° Este número es *múltiplo común*, puesto que contiene todos los factores de los números dados, con el mayor exponente.

2.° Es el *menor múltiplo común*, pues dejaría de ser múltiplo común si se le disminuyese, ya suprimiendo un factor, ya disminuyendo un exponente ; luego $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$ es el *m. c. m.* que se busca.

Regla.—*Para hallar el* m. c. m. *de varios números descompuestos en sus factores primos, se multiplican entre sí todos los factores primos diferentes, tomados con su mayor exponente.*

Nota.—*Si varios números son primos entre sí, su* m. c. m. *es igual al producto de dichos números.*

Procedimiento de obtención del mínimo común múltiplo

(Tratado teórico-práctico de Aritmética razonada. Curso Superior. Bruño G.M. 1932. p. 121)

En este periodo, el concepto de la divisibilidad, en las dos etapas escolares, muestra diferencias significativas tanto en cuanto a las acepciones léxicas presentadas como a la manera de entender la divisibilidad. En Primaria se inicia el concepto de divisibilidad a través de la definición de "ser divisible" y en secundaria de "múltiplo". La divisibilidad en Primaria se manifiesta como una propiedad de los números y vinculada a la magnitud, en Secundaria solo como una relación entre números. En ambas etapas escolares la representación factorial tiene carácter procedimental y el desarrollo curricular de los contenidos no favorece que los alumnos establezcan relaciones entre las distintas acepciones léxicas del concepto de divisibilidad.

III. Periodo comprendido entre 1939 y 1950.

Una vez terminada la guerra civil, el régimen del general Franco suprimió los planes de la República y definió una educación de carácter católico y nacional. La Ley de Educación Primaria estaba preparada desde 1939 y se aprobó en 1945. La falta de legislación originó que los cuestionarios de educación primaria no estuviesen organizados por cursos, que no fuera posible obtener el Certificado de Estudios Primarios, ni que existiera un reglamento para la Inspección educativa. Había mucho por hacer, y la situación internacional, en plena Segunda Guerra Mundial, agravaba la delicada situación del régimen del general Franco (Navarro, 1990).

En la Ley de Educación Primaria de 1945 (B.O.E de 18 de julio) se establecía la educación obligatoria hasta los doce años, graduada en cuatro etapas, siendo obligatorias las dos etapas que comprendían las edades de 6 a 12 años. En esta Ley de Educación Primaria se daban normas precisas sobre los cuestionarios y sobre la práctica metodológica. Se situaba la escuela al servicio de la doctrina católica y de la patria, como preparación del escolar en el camino del servicio de la cultura o del trabajo. Valga como ejemplo el siguiente párrafo que aparece en el Preámbulo de la Ley, referente a los ejercicios que se tenían que realizar en la escuela: "*práctica de ejercicios adecuados, que permite iniciar ya en la misma escuela al futuro agricultor, al pequeño industrial, al obrero del taller o al comerciante.*"

En los manuales del alumno del primer grado y segundo grado de **enseñanza primaria**, usados en años inminentemente posteriores a 1939, podemos observar que los tópicos de matemáticas continuaban versando sobre Aritmética y Geometría. No obstante en el capítulo de "*Detalles prácticos de la división*", del libro "Aritmética de segundo grado" de la Editorial Edelvives (1945) se hace mención al concepto de divisibilidad a través de las definiciones de:

(a) múltiplo -"*Cuando la división de un número por otro es exacta, se dice que el primero es divisible por el segundo o múltiplo del segundo*"-;

(b) divisor - "*Cuando la división de un número por otro es exacta, se dice que el primero es divisible por el segundo o múltiplo del segundo, y a éste se le denomina factor o divisor*".

A continuación se ofrecen las reglas de divisibilidad por 2, por 3, por 4, por 6, por 8 por 9 y por 11. Los siguientes apartados se dedican a la descomposición factorial de un número en sus factores primos, a las definiciones y procedimientos de obtención del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor a partir del "producto de los factores comunes elevados al menor exponente" como podemos ver en la siguiente figura.

72. **Máximo común divisor de dos o más cantidades.** — Llámase *máximo común divisor* (m. c. d.) de dos o más cantidades, el mayor factor común de éstas.

Así, las cantidades 120, 330 y 420 son todas divisibles por 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30. El número 30 es su *máximo común divisor.*

Para hallar el m. c. d. de varias cantidades puede procederse del modo siguiente: *se descomponen en sus factores primos, y se hace el producto de los factores* comunes *a todas, con el menor exponente.*

Sean los tres números anteriores. Sus factores primos son:

120	2	330	2	420	2
60	2	165	3	210	2
30	2	55	5	105	3
15	3	11	11	35	5
5	5			7	7

Resulta, $2^3 \times 3 \times 5$, $2 \times 3 \times 5 \times 11$ y $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$. El m. c. d. es:

$2 \times 3 \times 5 =$ **30.**

Procedimiento de obtención del máximo común divisor

(Aritmética de segundo grado. Edelvives, 1945. p. 81)

En esta etapa es importante reseñar que, a nuestro juicio:

(a) las definiciones dadas a múltiplo y divisor podrían favorecer el establecimiento por parte del alumno de las equivalencias entre "*a es múltiplo de b sí, y sólo sí, b es divisor de a sí, y sólo sí, b es factor de a sí, y sólo sí a es divisible por b*";

(b) los desarrollos curriculares realizados, tal como podemos observar en la figura anterior, permiten diferenciar los contenidos conceptuales y procedimentales de máximo común divisor.

La **enseñanza secundaria** fue regulada por la Ley de 20 de septiembre de 1938 (B.O.E de 23 de septiembre). Al Bachillerato se accedía mediante un examen de ingreso a los 10 años de edad. La distribución de los contenidos de matemáticas se estructuraba a lo largo de los siete cursos académicos que duraba el bachillerato. En los tres primeros cursos se desarrollaban los contenidos de Aritmética y Geometría y en el resto los de Geometría, Álgebra y Trigonometría. Indican Bruno y Martinón (2000) que los contenidos matemáticos en el Bachillerato se correspondían con los de la reforma de 1934.

Un ejemplo de la concreción curricular de la divisibilidad en N en la etapa de secundaria es el libro de Bruño "Tratado teórico-práctico de Aritmética razonada. Curso Superior", con diferentes ediciones en los años 1932, 1940 y 1957, por lo que deducimos la vigencia del libro en la práctica de la educación secundaria durante estas tres décadas. Queremos, no obstante, hacer mención al carácter practico de los problemas de Aritmética y Geometría que se solicitaba en la reforma de 1938 (Bruno y Martinón, 2000).

En el desarrollo curricular de la divisibilidad, como en épocas anteriores, se observa un marcado carácter procedimental de la representación factorial de un número natural, como evidencia su utilización en la determinación de las "reglas" (procedimientos) de obtención del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo. En este periodo, la divisibilidad se introduce como una propiedad entre dos números y asociada a la división de ambos.

IV. Periodo de 1950 a 1970.

En la década de los 50 el Banco Mundial emitió un informe sobre España en el que, entre otras indicaciones, se sugería la necesidad de aumentar cualitativamente y cuantitativamente la educación primaria en España.

En el año 1951, es nombrado ministro Joaquín Ruiz Giménez que aportó un carácter más liberal y aperturista para la época, con una visión distinta de los problemas que incumbían a la educación. El analfabetismo cuando Ruiz Giménez llego al cargo rondaba el 17 % (Navarro, 1990).

Las manifestaciones y protestas universitarias causaron el cambio de Ruiz Giménez por Rubio García-Mina al frente del Ministerio de Educación Nacional en 1956. En esta nueva etapa, se abordó una política escolar donde se priorizó la construcción de unidades escolares, se elaboró el primer mapa escolar español y se marcó como objetivo aumentar la calidad de la enseñanza.

En estos años España dejó de lado la autarquía y se embarcó en la época del desarrollismo económico. En el ámbito educativo, en 1962 se produjo el primer trabajo sobre planeamiento del desarrollo educativo bajo los auspicios de la UNESCO y de la OCDE. En 1963 se obligó a que las escuelas comprobasen el rendimiento escolar del alumnado y organizasen la enseñanza por cursos, aspecto abandonado hasta el momento.

En los 20 años que abarca este periodo se promulgaron distintos programas ministeriales que regularon las actividades didácticas de educación primaria y secundaria. En educación primaria se promulgaron los Cuestionarios Nacionales de 1953 y de 1965 y en educación secundaria la Ley de Ordenación de la Enseñanza Media (1953 y 1957).

En los Cuestionarios Nacionales de **Enseñanza Primaria** de 1953 los contenidos de divisibilidad, se desarrollaron a lo largo de tres periodos y en cinco de los nueve cursos en los que se organizó la enseñaza, el tercer curso de enseñanza elemental, el segundo de perfeccionamiento y en los tres de iniciación profesional. Por su parte, los contenidos de divisibilidad en los Cuestionarios de 1965, clasificados en ejercicios y adquisiciones, se distribuyeron en tres de los ocho cursos en que se organizó la enseñanza primaria, sexto, séptimo y octavo.

En los Cuestionarios de 1953 se postulaba "*la repetición, los ejercicios mecánicos, el aprendizaje escalonado y la adecuación a las diferencias individuales*" (Sierra et al., 1989; p.44), mientras que en los de 1965 se aconsejaba una enseñanza activa, con ejercicios de carácter operativo, soluciones de problemas de la vida diaria y coincidían con el Cuestionario de 1953 "*en llegar al concepto a través de ejercicios*" (p.47).

En la Tabla 1.1 mostramos los contenidos de divisibilidad que presentaban los Cuestionarios Nacionales de 1953 y de 1965:

	Contenidos	
Años	**Cuestionario de 1953**	**Cuestionario de 1965**
8-9	• *Buscar números y divisores de números dados (de dos cifras, buscando su mitad, tercio, cuarto, duplo, triplo, cuádruplo).*	
11-12	• *Idea general de divisibilidad. Condiciones generales de divisibilidad de los números* • *La divisibilidad por 2, 5 y 10. Ejercicios y problemas.* • *Divisibilidad por 4, 3, 9, 25 y 125. Ejercicios y problemas.*	• *Ejercicios elementales sobre divisibilidad de los números, ejercicios de descomposición factorial de los números.* • *Adquisiciones: Divisibilidad, reglas fundamentales.*
12-13	• *Repaso y ampliación de la teoría de la divisibilidad. Ejercicios y problemas.* • *Múltiplos y divisores de un número. Repaso y ampliación de la divisibilidad. Ejercicios y problemas.*	• *Descomposición factorial de los números.* • *Adquisiciones: Divisibilidad: máximo común divisor y mínimo común múltiplo.*
13-14	• *Divisibilidad de los números y números primos. Propiedades más importantes.* • *Descomposición factorial de los números, aplicaciones. Ejercicios y problemas.*	• *Adquisiciones: Estudio de la divisibilidad en todos sus casos.*
14-15	• *Repaso de divisibilidad.* • *Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Modos de determinarlos, por divisiones sucesivas y por descomposición factorial.*	

Tabla 1.1. Contenidos de Divisibilidad en los Cuestionarios Nacionales de 1953 y 1965

La concreción curricular de los cuestionarios de 1953 se efectuaba mediante un texto genérico, la enciclopedia, donde se trataba de todas las materias que formaban parte del currículo del alumno. Las enciclopedias estaban organizadas por ciclos y en un conjunto de textos de distintos grados. Los tópicos matemáticos se ofrecían mediante definiciones y reglas elementales que permitían al alumno alcanzar sólo conocimientos básicos.

La Enciclopedia de Álvarez (1962, 1962, 1964) de primer, segundo y tercer grado es un ejemplo de concreción curricular y metodológica de los Cuestionarios de 1953 en **educación primaria**. La divisibilidad en primer grado y en segundo grado se presenta vinculada a la magnitud: "*múltiplos y divisores del sistema métrico*". Por el contrario, en el tercer grado la divisibilidad se presenta de manera sucinta como una propiedad de los números a través de las acepciones léxicas: múltiplo - "*cuando lo contiene un número exacto de veces. Por ejemplo 72 es múltiplo de 8, porque 72 : 8 = 9*"-; submúltiplo, factor o divisor entre números - "*se llama así el número que está contenido en otro un número exacto de veces. Por ejemplo, 8 es submúltiplo, factor o divisor de 72, porque está contenido 9 veces exactamente en dicho 72*"; junto con distintas reglas de divisibilidad- "*por 2, por 3, por 4 ó 25, por 5, por 6, por 8 ó 125, por 9, por 10, por 100 ó por 1000*"- presentadas a través de ejemplos concretos.

La divisibilidad es entendida como una propiedad de los números y vinculada a la magnitud sólo se desarrolla entre números con representación decimal sin mención alguna a la representación factorial de éstos. Los contenidos de divisibilidad tienen un carácter memorístico y procedimental.

La concreción curricular de los Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria de 1965 se realiza a través de distintos libros de texto, uno por materia y curso. Esto contribuye a que se ahonde mucho más en los contenidos y que los alumnos profundicen más en ellos. Una ejemplificación de estas concreciones la encontramos en el libro de 6° curso de la editorial Prima Luce (1967). El concepto de divisibilidad en esta editorial se presenta a través de:

(a) múltiplo- " *7, 7 x 1, 7 x 2, 7 x 3 ..., son los múltiplos de 7*"- ,

(b) divisor- "*si un número natural es múltiplo de otro, decimos también que éste es divisor del primero*"-,

junto con las propiedades de los múltiplos (la suma de dos múltiplos de un mismo número, la diferencia de dos múltiplos de un mismo número); criterios de divisibilidad por 10, por 2, por 5 y por 3 y la definición de números primos y compuestos.

La representación factorial de un número se presenta bajo el epígrafe "*Descomposición factorial*". Ésta se obtiene a través de distintos productos de diferentes números de factores que se van descomponiendo en otros hasta obtener la representación factorial del número en producto de factores primos, sin citar el Teorema Fundamental de la Aritmética, tal como se muestra en la figura. La representación factorial de un número tiene carácter procedimental y no se realiza ninguna aplicación posterior.

6. *Descomposición factorial*

Si partimos de un número compuesto podremos obtener, como su mismo nombre nos recuerda, una descomposición en factores menores que el mismo número. Estos factores pueden ser, a su vez, números compuestos o primos. Si son compuestos, descompongámoslos en sus factores y así sucesivamente, hasta conseguir una descomposición del número de partida con todos los factores PRIMOS.

Ejemplo

$$420 = 42 \times 10$$

$$6 \times 7 \quad 2 \times 5$$

$$2 \times 3$$

En definitiva

$$420 = 2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 5$$

y ordenando los factores y agrupando los iguales

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

En todos los ejemplos podrás comprobar que partiendo de un mismo número, aunque sigas órdenes distintos en las operaciones, siempre llegarás, para cada número, a una misma descomposición en factores primos.

Descomposición factorial. (Matemáticas 6º curso. Prima Luce, 1967. p.15)

Esta editorial presenta la divisibilidad como una propiedad de los números. Las definiciones dadas a múltiplo y a divisor ayudan al establecimiento de relaciones de equivalencia lógica entre ambos conceptos. El tratamiento dado a la descomposición factorial de un número, de un número compuesto- "*los números que tienen otros divisores*"- podría favorecer, a nuestro juicio, el estudio de los divisores de un número representado como un producto de factores.

La Ley de Ordenación de la Enseñanza Media de 1953 estructuró **la enseñanza secundaria** en 7 cursos y tres ciclos: Bachillerato Elemental (10-14 años), Bachillerato

Superior (14-16 años) y Curso Preuniversitario (Ciencias y Letras) (17 años). En 1957 este plan sufrió una pequeña modificación (Decreto de 31 de mayo de 1957). Esta ley fue un primer intento de enseñanza obligatoria hasta los 14 años. Una vez finalizada cada etapa se procedía a realizar una prueba de revalida para obtener el correspondiente título (Bruno y Martinón, 2000).

Una ejemplificación de la concreción de los contenidos de divisibilidad impartidos en **educación secundaria**, la podemos encontrar en dos libros de texto de 2º curso de Bachiller, Gironza (1960) y Segura (1966).

En los dos libros de 2º curso de Bachiller se desarrollan los mismos contenidos de divisibilidad organizados de forma similar:

(a) Múltiplos y divisores. Propiedades.

(b) Criterios de divisibilidad.

(c) Números primos y compuestos. Obtención de números primos. Descomposición de un número en factores primos. Divisibilidad de números descompuestos en factores primos.

(d) Divisores comunes de dos o más números. Máximo común divisor. Cálculo del máximo común divisor de dos o más números. Propiedades obtención de todos los divisores. Mínimo común múltiplo. Calculo del mínimo común múltiplo de dos o más números. Propiedades del mínimo común múltiplo.

No obstante, presentan diferencias significativas en (a) la definición de múltiplo y divisor; (b) la forma de "entender" el Teorema Fundamental de la Aritmética.

En el libro de Gironza (1960), los conceptos de múltiplo y divisor se presentan asociados a la operación de multiplicación- "*un número es múltiplo de otro si es igual al producto de éste por otro cualquiera. También se dice que el primero es divisible por el segundo, y que éste es un divisor o factor de aquel*" -. En Segura (1966), estos conceptos se asocian a la operación de división- "*Un número es divisible por otro cuando es exacta la división del primero por el segundo. El primero de los números también se llama múltiplo del segundo. Y el segundo, divisor, factor o submúltiplo del* *primero*"-. En ambas definiciones se favorece el establecimiento de las relaciones de equivalencia lógica:

a es múltiplo de $b \Leftrightarrow b$ *es divisor de* $a \Leftrightarrow a$ *es divisible por* $b \Leftrightarrow b$ *es un factor de a.*

El Teorema Fundamental de la Aritmética, sin mención explicita, se presenta en los libros de Segura (1966) y de Gironza (1960), después de la definición de número primo y número compuesto y sus propiedades. Posteriormente, Gironza (1960) desde el epígrafe "*Divisibilidad de números descompuestos en factores primos*" muestra la "*Condición de divisibilidad de un número*" mientras que Segura (1966) lo hace directamente desde el epígrafe "*Condición de divisibilidad de un número por otro, descompuestos ambos en sus factores primos*".

Como podemos observar en la figura siguiente también existen diferencias en la forma de definir y ejemplificar el concepto "ser divisible". Gironza (1960) ejemplifica el concepto "ser divisible" mediante números representados factorialmente. Por el contrario, Segura (1966) presenta los números en su representación decimal, utilizando posteriormente la representación factorial con un carácter eminentemente procedimental.

27. Divisibilidad de números descompuestos en factores primos.

II. Es fácil reconocer si un número es o no divisible por otro cuando ambos estén descompuestos en factores primos, ya que si del dividendo hemos de suprimir uno a uno los factores primos del divisor, *es preciso que el divisor no contenga factores primos distintos de los que tiene el dividendo ni los contenga con exponentes mayores.*

Ejemplos: El número igual a $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ es divisible por el número igual a $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$, ya que

$$(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7) : (2^2 \cdot 3^4 \cdot 5) = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

(Gironza, 1960, p. 30)

Condición de divisibilidad de un número por otro, descompuestos ambos en sus factores primos.—Para que un número sea divisible por otro, debe contener el dividendo todos los factores primos del divisor con exponentes iguales o mayores.

EJEMPLO:

$72 = 2^3 \times 3^2$ es divisible por $18 = 2 \times 3^2$, porque 72 contiene los factores del 18 con exponentes iguales o mayores.
Su cociente es $72 : 18 = 2^2 = 4$.

(Segura, 1966. p.50)

Condición de Divisibilidad de un número

(Matemáticas 1° de Bachiller . Gironza, 1960. p. 30 ; Ecir, 1966. p. 50)

Los autores no llegan a darle un carácter representativo al Teorema Fundamental de la Aritmética. Gironza (1960), también bajo el epígrafe "*Divisibilidad de números descompuestos en factores primos*", utiliza la representación de los números, como él mismo dice, para "*calcular mucho más fácil y rápido los productos de dos números y la división de ambos*", para "*reconocer más fácil si un número es divisible por otro cuando este se compone de factores primos sencillos*". Segura (1966), por su parte, presenta las mismas ideas que Gironza (1960) con un carácter más procedimental y bajo los epígrafes "*División de números descompuestos en factores primos*" y "*Aplicación de la divisibilidad de un número por un producto de factores*", respectivamente. La figura adjunta nos muestra las ideas descritas en este párrafo.

I. ...

27. Divisibilidad de números descompuestos en factores primos.

Si queremos *dividir dos productos*, sin necesidad de efectuarlos, *podremos dividir el primer producto por cada uno de los factores del divisor.*

Ejemplo: Si se trata de efectuar la división

$$(15 \cdot 7 \cdot 24) : (3 \cdot 6)$$

bastará dividir el factor 15 del dividendo por el factor 3 del divisor, y el factor 24 del dividendo por el factor 6 del divisor, obteniendo como resultado

$$5 \cdot 7 \cdot 4 = 120$$

modo de calcular mucho más fácil y rápido que si se efectúa previamente los productos y luego la división de ellos.

III. Es fácil *reconocer si un número es divisible por otro cuando éste se compone de factores primos sencillos*, pues basta que aquél cumpla las condiciones de divisibilidad de cada uno de los factores.

Así, para que un número sea divisible por 6 basta que termine en cifra par y que la suma de sus cifras sea múltiplo de 3.

Ejemplo: El número 6705 es divisible por 45, ya que $45 = 9 \cdot 5$, y aquél es divisible por 9 y por 5. Adviértase que 9 no es primo, pero nada tiene que ver con el 5, como se desprende de lo que diremos en la próxima lección.

(Gironza, 1960 p. 30)

División de números descompuestos en factores primos.—*Para dividir dos números descompuestos en factores primos, se suprimen del dividendo los factores que contiene el divisor.*

EJEMPLOS:

1.º $210 : 15$
$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$15 = 3 \cdot 5$
Luego $210 : 15 = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) : (3 \cdot 5) = 2 \cdot 7 = 14$

2.º $360 : 18 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) : (2 \cdot 3^2) = 2^2 \cdot 5 = 20$

Aplicación de la divisibilidad de un número por un producto de factores primos.—Un número es divisible por 6 ($= 2 \times 3$) cuando es divisible por 2 y por 3.

EJEMPLOS:

126, 5 328, 504 son divisibles por 6.

Un número es divisible por 12 ($= 2^2 \times 3$) cuando es divisible por 3 y por 4.

EJEMPLOS:

96, 528, 1 404 son divisibles por 12.

Un número es divisible por 15 ($= 3 \times 5$) cuando lo es por 3 y por 5.

EJEMPLOS:

525, 435, 570 son divisibles por 15.

(Segura, 1966, p. 50)

La representación factorial

(Matemáticas 1º de Bachiller . Gironza, 1960. p. 30 ; Ecir, 1966. p. 50)

El estudio del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo desde los divisores y múltiplos comunes, respectivamente, permite establecer una diferenciación entre el contenido conceptual y procedimental de estos conceptos. Para el cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo los autores proponen una regla basada en el Teorema Fundamental de la Aritmética. El carácter procedimental de la representación factorial de los números naturales también es utilizado para obtener todos los divisores de un número.

En este amplio periodo la divisibilidad en la enseñanza se mostraba como una relación entre los números, evidenciando un cambio progresivo a lo largo de las dos décadas hacia una enseñanza activa con el empleo de situaciones más próximas a los estudiantes a través el tratamiento de problemas de aplicación real. Cabe mencionar el uso procedimental que se hacía del Teorema Fundamental de la Aritmética para la obtención de los divisores de un número o para el cálculo del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor de dos números.

V. Periodo de 1970 a 1990.

En este periodo, España pasa de ser un país agrícola a ser un país industrial y de servicios. La demanda de profesionales más especializados requería una mejor instrucción. Las últimas reformas educativas si bien consiguieron la alfabetización de un amplio sector de la sociedad no formaron profesionales especializados. La Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, 14/1970 de 4 de agosto, promulgada siendo ministro de educación Villar Palasí, desarrolló el sistema educativo en distintos niveles, desde el preescolar hasta el universitario. Villar Palasí aprobó una nueva ley de educación cuyo objetivo fue adaptar el sistema educativo a las necesidades de una sociedad capitalista (Navarro, 1990).

Esta Ley determinó un cambio en los contenidos, en la metodología y en la evaluación. Las Orientaciones Pedagógicas de 1970 defendían una enseñanza activa y establecían como objetivos la adquisición de vocabulario matemático, el logro de mecanismos de cálculo operatorio elemental, demostraciones matemáticas, agilidad de cálculo mental y creación de símbolos y estructuras matemáticas.

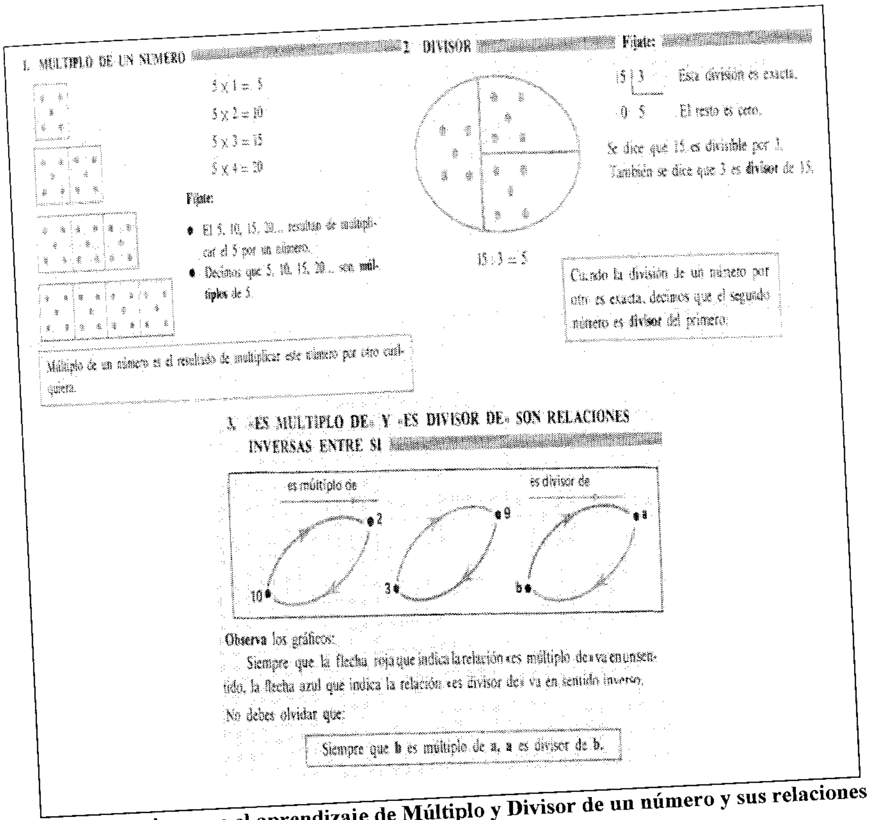
La falta de concreción de las orientaciones pedagógicas de la Ley de 1970 creó la necesidad de elaborar unos nuevos programas, los llamados Programas Renovados publicados en 1981 (ciclo inicial) y en 1982 (ciclo medio y superior). Entre la Ley General de Educación y los Programas Renovados se implantó en España la democracia. En la Constitución de 1978 se establecieron principios generales de educación que supusieron la regulación de nuevas leyes educativas.

La **educación primaria** en la Ley General de Educación de 1970 y en los Programas Renovados de 1981 y 1982 recibió el nombre de Educación General Básica (E.G.B). Era obligatoria desde los 6 años hasta los 14 años y se dividió en dos etapas organizadas en ocho cursos. Como indican Sierra et al. (1989) en los Programas Renovados de principios de los ochenta se estructuró la E.G.B. en tres ciclos, inicial superior y medio, organizados en ocho cursos escolares. El aprendizaje matemático debía realizarse desde dos aspectos, el formativo y el instrumental. El formativo debía capacitar a los alumnos a pensar, a discurrir, permitiendo el desarrollo interdisciplinar. El instrumental por su parte prepararía a los estudiantes para desenvolverse en la vida, a utilizar la matemática como herramienta para otras áreas. En estos programas se señalaba que el paso de lo concreto a lo abstracto se debía realizar pasando de la etapa experimental hasta la simbólica, a través de la figurativa.

En las orientaciones pedagógicas de la E.G.B, publicadas con posterioridad a la Ley General de Educación, la divisibilidad se programa en la primera etapa, en 5º nivel, y de ésta sólo se especifican los conceptos de "*múltiplo y divisor*" aunque se señala la posibilidad de ampliar y adaptar los contenidos y la metodología a la evolución de los alumnos. En los Programas Renovados el estudio de la divisibilidad se pasa al Ciclo Superior con "*el objeto de llegar al estudio del m.c.d. y m.c.m. que permitirá la operatividad en Q y a la resolución de problemas*" y se especifican los siguientes objetivos a conseguir: "*Adquirir el concepto de múltiplo y divisor y saber reconocer múltiplos y divisores*"; "*Reconocer y definir números primos y compuestos*"; "*Conocer y memorizar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 11*"; "*Adquirir el concepto de máximo común divisor y mínimo común múltiplo*"; "*Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo*"; "*Plantear y resolver problemas con máximo común divisor y mínimo común múltiplo*".

Los diferentes proyectos editoriales concebidos para desarrollar los contenidos de matemáticas en general y la divisibilidad en particular, según Ley General de Educación y Programas Renovados, estuvieron "impregnados" de una matemática moderna que propició el uso de distintos sistemas de representación- diagramas de Venn, correspondencias, recta numérica, configuraciones puntuales, escaleras...- con el objetivo de favorecer la comprensión de los distintos contenidos del currículo.

En el libro de texto de 5º curso de la editorial Anaya (1981) el concepto de múltiplo- "*Múltiplo de un número es el resultado de multiplicar este número por otro cualquiera*" y el de divisor - *Cuando la división de un número por otro es exacta, decimos que el segundo número es divisor del primero*", se presentan, como nos muestra la figura adjunta, a través de dibujos, diagramas de Venn y representaciones simbólicas. La relación de equivalencia lógica entre ambos conceptos se muestra mediante diagramas de flechas.



1. MULTIPLO DE UN NUMERO

5 x 1 = 5
5 x 2 = 10
5 x 3 = 15
5 x 4 = 20

Fíjate:

- El 5, 10, 15, 20... resultan de multiplicar el 5 por un número.
- Decimos que 5, 10, 15, 20... son **múltiplos** de 5.

Múltiplo de un número es el resultado de multiplicar este número por otro cualquiera.

2. DIVISOR

15 : 3 = 5

Fíjate:

15 | 3 Esta división es exacta.
0 5 El resto es cero.

Se dice que 15 es divisible por 3.
También se dice que 3 es **divisor** de 15.

Cuando la división de un número por otro es exacta, decimos que el segundo número es **divisor** del primero.

3. «ES MULTIPLO DE» Y «ES DIVISOR DE» SON RELACIONES INVERSAS ENTRE SI

Observa los gráficos:

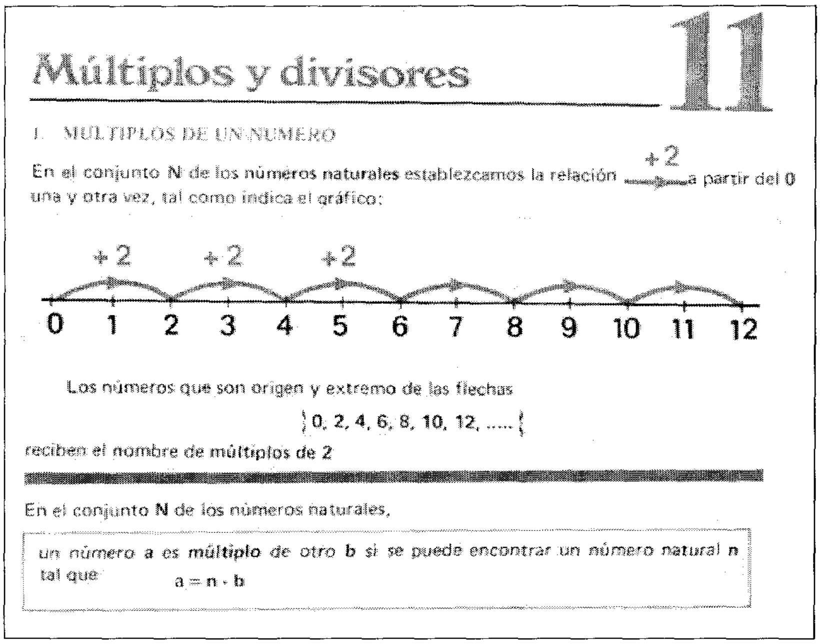
Siempre que la flecha roja que indica la relación «es múltiplo de» va en un sentido, la flecha azul que indica la relación «es divisor de» va en sentido inverso.

No debes olvidar que:

Siempre que **b** es múltiplo de a, **a** es divisor de b.

Las representaciones en el aprendizaje de Múltiplo y Divisor de un número y sus relaciones (Matemáticas básicas. 5º Primaria. Anaya, 1981. pp.174-176)

Por su parte, el proyecto editorial "Matemáticas. Orbe 5" de la editorial Vicens-Vives (1980) introduce, por ejemplo, mediante la recta numérica y la representación simbólica de los números los conceptos de múltiplo- *"un número **a** es **múltiplo** de otro **b** si se puede encontrar un número natural **n** tal que $a = n.b$" y* el concepto de divisor- *"Si un número **a** es **múltiplo** de otro **b**, entonces **b** es **divisor** de **a**"*-. Los autores, a través de la recta numérica como se muestra en la figura, definen "múltiplo de un número" asociado a la operación multiplicación entendida como una suma reiterada de un número del que son múltiplos los números obtenidos en la suma. Al número de sumandos se le llama divisor. También obtienen el "divisor de un número" mediante el reparto a través de diagramas de Venn.


Múltiplos y divisores 11

1. MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

En el conjunto N de los números naturales establezcamos la relación $\xrightarrow{+2}$ a partir del 0 una y otra vez, tal como indica el gráfico:

Los números que son origen y extremo de las flechas

{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}

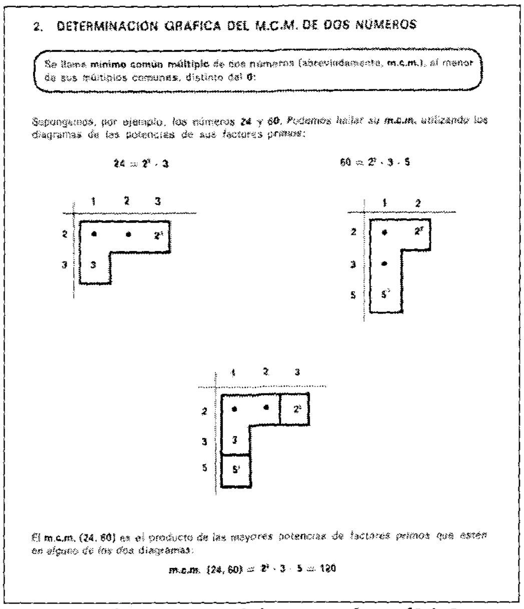
reciben el nombre de múltiplos de 2

En el conjunto N de los números naturales,

un número a es **múltiplo** de otro b si se puede encontrar un número natural n tal que $a = n \cdot b$

Las representaciones y el aprendizaje de Múltiplo de un número
(Matemáticas Orbe 5º EGB. Vicens-Vives, 1980. pp. 78-79)

En este periodo destacamos la presencia de múltiples representaciones de los números- diagramas, configuraciones puntuales...- y sus conversiones junto a la representación decimal de éstos con el objetivo de favorecer la comprensión de los diferentes conceptos de divisibilidad. No obstante, el uso de este tipo de representaciones no favoreció el estudio de la divisibilidad entre números con representación factorial. En esta época, el Teorema Fundamental de la Aritmética sigue teniendo el mismo carácter procedimental que en épocas anteriores. La figura adjunta muestra cómo el proyecto editorial "Matemáticas. Línea 6. EGB" de Vicens-Vives (1984), bajo el epígrafe "*Determinación gráfica del m.c.m. de dos números*", utiliza con carácter procedimental la representación factorial y los Diagramas de escalera o redes cuadriculares para obtener la regla de obtención del mínimo común múltiplo de dos números.


2. DETERMINACIÓN GRÁFICA DEL M.C.M. DE DOS NÚMEROS

Se llama **mínimo común múltiplo** de dos números (abreviadamente, **m.c.m.**), al menor de sus múltiplos comunes, distinto del **0**:

Supongamos, por ejemplo, los números **24** y **60**. *Podemos hallar su* **m.c.m.** *utilizando los diagramas de las potencias de sus factores primos:*

$24 = 2^3 \cdot 3$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

El **m.c.m.** (24, 60) es el producto de las mayores potencias de factores primos que estén en alguno de los dos diagramas:

m.c.m. $(24, 60) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

Cálculo del mínimo común múltiplo

(Matemáticas Línea 6 EGB. Vicens Vives. 1984. p. 59)

La Ley General de Educación de 1970 también produjo un cambio sustancial en la **enseñanza secundaria**. Ésta se iniciaba después de la enseñanza primaria, periodo obligatorio hasta los 14 años. Posibilitando estudios de Bachillerarlo Unificado Polivalente (B.U.P) o de Formación Profesional. El B.U.P constaba de tres cursos, entre los catorce y los dieciséis años. La acción docente en el Bachillerato debía basarse en el aprendizaje del alumno y no en una enseñanza centrada exclusivamente en la explicación de la materia (Rodríguez, 1977). El Curso de Orientación Universitaria

(C.O.U) era un curso más de la enseñanza secundaria y se cursaba a los diecisiete años una vez finalizado el B.U.P o la Formación Profesional de segundo grado. La divisibilidad sólo formó parte de los programas de B.U.P, específicamente en primer curso y centrada en el anillo de polinomios: "*Anillo de polinomios. Binomio de Newton. Divisibilidad de polinomios. Divisibilidad*"

En este periodo se postula una enseñanza activa, determinándose un cambio orientativo en los contenidos, en la metodología y en la evaluación, proponiendo un muestrario de propuestas pedagógicas que en las primeras décadas no se encontraba en la realidad de los centros. La divisibilidad aparece vinculada a las representaciones de carácter gráfica que ayudan a introducir los conceptos de múltiplo y divisor, aunque el Teorema Fundamental continua utilizándose de forma procedimental para mostrar la descomposición de un número natural en producto de factores primos y usarlo en el cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo.

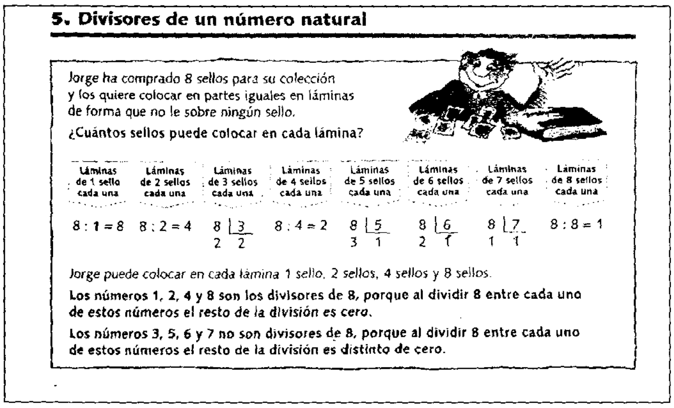
VI. Periodo de 1990 hasta la actualidad.

En los años ochenta se estableció un amplio debate sobre el sistema educativo. En 1988 se presentó el Libro Blanco para la Reforma del Sistema Educativo y en 1990 se aprobó la reforma educativa mediante la Ley General de Ordenación del sistema educativo (L.O.G.S.E) (1/1990, de 3 de octubre). Esta Ley estableció un cambio significativo en el sistema educativo de nuestro país. La educación obligatoria se amplió hasta los 16 años; el sistema educativo se reordenó estableciendo las etapas de educación infantil, educación primaria, educación secundaria obligatoria, bachillerato y formación profesional de grado medio y de grado superior.

La Ley fijó los objetivos, expresados en términos de capacidades, los contenidos y los criterios de evaluación del currículo así como los aspectos básicos que constituyeron las enseñanzas mínimas para la Educación Primaria y Secundaria (Reales Decretos 1006/1991 y 1007/91, respectivamente). En virtud de las transferencias autonómicas las Comunidades Autónomas establecieron los Decretos 20/1992 y 47/1992 fijando los principios esenciales de la propuesta educativa: objetivos generales, objetivos de área y criterios de evaluación de la enseñanza primaria y secundaria, respectivamente. Optaron por un currículo abierto y flexible que requería una posterior concreción en los centros educativos a través de los proyectos curriculares de las distintas áreas, la secuenciación le los mismos, la metodología adecuada a cada tipo de contenido y los objetivos a lcanzar.

La **Educación Primaria**- de 6 a 12 años- se dividió en tres ciclos de dos cursos cadémicos cada uno, organizada en áreas obligatorias de carácter global e integrador, onsiderando importante que los niños y las niñas de Primaria encontraran sentido a lo que hacían. Las matemáticas deberían presentarse en distintos contextos, tanto de resolución de problemas, como de juegos e investigaciones. Atendiendo a las transferencias autonómicas, los contenidos de divisibilidad del currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Valenciana (Decreto 20/1992) se englobaban dentro del bloque de Números, en el apartado 6, bajo el epígrafe "*Relaciones entre los números*" con los siguientes contenidos: "*Múltiplos y divisores*". "*Divisibilidad*". "*Números primos y compuestos*". "*Composición y descomposición*". No se especificaba, por tratarse de un currículo abierto, el ciclo o curso en que se debía impartir.

En este periodo, las editoriales mayoritariamente presentan los contenidos a través de distintos contextos: de resolución de problemas, de juegos, etc. Por ejemplo, la editorial Santillana, en su libro de 6º curso de Primaria (1997) muestra los divisores de un número a partir de un contexto de reparto tal como muestra la figura adjunta.



5. Divisores de un número natural

Jorge ha comprado 8 sellos para su colección y los quiere colocar en partes iguales en láminas de forma que no le sobre ningún sello.

¿Cuántos sellos puede colocar en cada lámina?

Láminas de 1 sello cada una	Láminas de 2 sellos cada una	Láminas de 3 sellos cada una	Láminas de 4 sellos cada una	Láminas de 5 sellos cada una	Láminas de 6 sellos cada una	Láminas de 7 sellos cada una	Láminas de 8 sellos cada una
8 : 1 = 8	8 : 2 = 4	8 | 3 ; 2 2	8 : 4 = 2	8 | 5 ; 3 1	8 | 6 ; 2 1	8 | 7 ; 1 1	8 : 8 = 1

Jorge puede colocar en cada lámina 1 sello, 2 sellos, 4 sellos y 8 sellos.

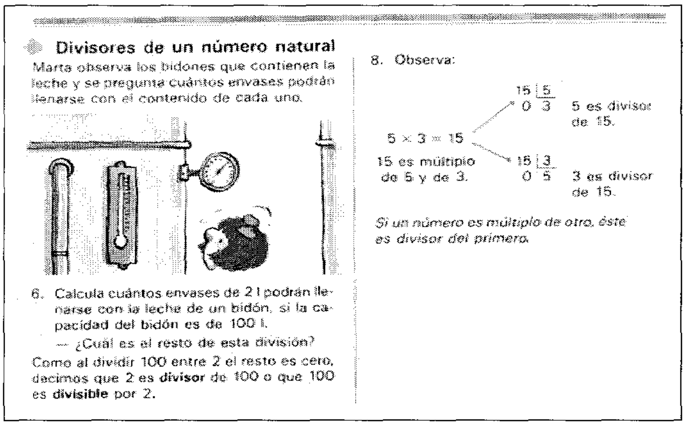
Los números 1, 2, 4 y 8 son los divisores de 8, porque al dividir 8 entre cada uno de estos números el resto de la división es cero.

Los números 3, 5, 6 y 7 no son divisores de 8, porque al dividir 8 entre cada uno de estos números el resto de la división es distinto de cero.

Divisores de un número natural

(Matemáticas 6º Primaria. Santillana. 1997. p. 41)

La relación entre "divisor y múltiplo de un número", la presenta la editorial Marjal (1995), en su libro de Matemáticas de 6°, a partir de la relación inversa de la división y multiplicación. Una situación problemática perteneciente a un contexto de reparto sirve de referente para mostrar como sinónimos los conceptos de "divisor y ser divisible".



Divisores de un número natural

Marta observa los bidones que contienen la leche y se pregunta cuántos envases podrán llenarse con el contenido de cada uno.

6. Calcula cuántos envases de 2 l podrán llenarse con la leche de un bidón, si la capacidad del bidón es de 100 l.
   — ¿Cuál es el resto de esta división?

Como al dividir 100 entre 2 el resto es cero, decimos que 2 es **divisor** de 100 o que 100 es **divisible** por 2.

8. Observa:

$5 \times 3 = 15$ — 15 es múltiplo de 5 y de 3.

$15 \div 5 = 3$, resto 0 — 5 es divisor de 15.

$15 \div 3 = 5$, resto 0 — 3 es divisor de 15.

Si un número es múltiplo de otro, éste es divisor del primero.

Relaciones de equivalencia lógica entre Múltiplo, divisor y ser divisible.

(Matemáticas 6° Primaria. Marjal, 1995. pp. 38)

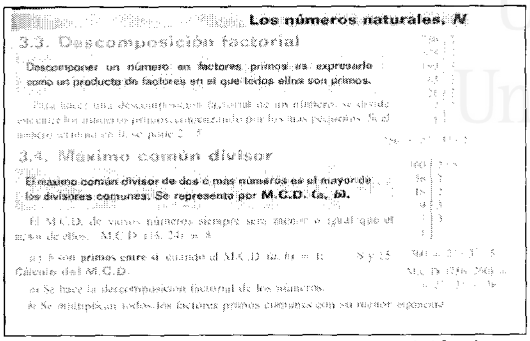
Los distintos proyectos editoriales generalmente han situado el estudio de la divisibilidad en el último ciclo de la Educación Primaria. La concreción curricular de los contenidos en las distintas editoriales presentan ciertas diferencias, unos textos sólo desarrollan la divisibilidad a partir de los conceptos "múltiplos y divisores", otros también incluyen los de máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números naturales o incluso estudian los números primos y compuestos. La divisibilidad en todos ellos se entiende como una propiedad entre números con representación decimal. Establecen, explicita o implícitamente, relaciones entre las distintas acepciones de la divisibilidad. El Teorema Fundamental de la Aritmética no forma parte del currículo de la mayoría de los proyectos editoriales.

La educación obligatoria establecida por la L.O.G.S.E configuró una etapa de **educación secundaria** con identidad propia, estructurada en dos ciclos de dos años cada uno, entre los doce y los dieciséis años, cuyo objetivo principal fue preparar a los adolescentes para ser ciudadanos en una sociedad democrática, plural y tecnológicamente avanzada. En la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) se estableció un aprendizaje activo de las matemáticas, buscando la comprensión antes que la formalización, planteando los conceptos y procedimientos en contextos variados y próximos al entorno de relaciones y experiencias de los estudiantes. La actividad matemática debía desarrollarse resolviendo problemas, analizando juegos, consolidando destrezas con la convicción de que tal actividad despliega cualidades y propicia actitudes intrínsecamente interesantes y permite crear conocimientos y ampliar destrezas útiles para el individuo y para la sociedad.

En virtud de las transferencias autonómicas, la Generalitat Valenciana estableció el currículo de Educación Secundaria de las diferentes áreas (Decreto 1007/91), presentando la temporalización de sus contenidos de manera abierta, sin asignarlos a un curso concreto. Los contenidos de divisibilidad del currículo de la Educación Secundaria en la Comunidad Valenciana se engloban dentro del bloque de Números, bajo el epígrafe "*Relaciones entre los números*" con los siguientes contenidos: "*múltiplos y divisores, máximo común divisor y mínimo común múltiplo*".

En el desarrollo curricular de la **Educación Secundaria Obligatoria** que ofrecen diferentes editoriales, sitúan a la divisibilidad en el primer ciclo y sólo en algunas de ellas aparecen referencias explícitas de la divisibilidad en el tercer curso, como repaso de los conceptos de cursos anteriores.

En esta etapa, al igual que en educación primaria, los contenidos se desarrollan a través de distintos contextos. La divisibilidad en la mayoría de las editoriales consultadas es entendida como una propiedad entre números con representación decimal. Las conexiones entre las diferentes acepciones de léxicas de la divisibilidad se muestran explícitamente. La descomposición factorial de los números naturales, tal como vemos en la figura adjunta, se vincula a los procedimientos de cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de dos o más números.



Los números naturales, N

3.3. Descomposición factorial

Descomponer un número en factores primos es expresarlo como un producto de factores en el que todos ellos son primos.

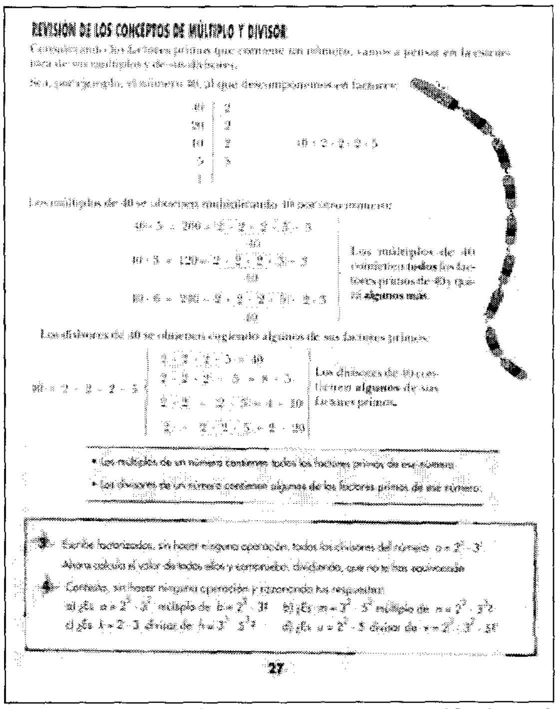
3.4. Máximo común divisor

El máximo común divisor de dos o más números es el mayor de los divisores comunes. Se representa por M.C.D. (a, b).

Carácter procedimental de la descomposición factorial

(Matemáticas 1° ESO. Casals, 2000. p.13)

No obstante, nos parece importante señalar que la editorial Anaya (1998), bajo el epígrafe "*Revisión de los conceptos de múltiplo y divisor*" y como un apartado de la "*Descomposición factorial de un número en sus factores primos*", estudia, define y propone actividades sobre múltiplos y divisores entre números con representación factorial tal como muestra la figura. adjunta:



REVISIÓN DE LOS CONCEPTOS DE MÚLTIPLO Y DIVISOR

27

Divisibilidad entre números con representación factorial

(Matemáticas 2° ESO. Anaya, 1998. p.27)

Los autores de este proyecto editorial utilizan los modos de representación de los números como organizadores de la unidad didáctica "*Números. Divisibilidad*". Los conceptos de múltiplo, divisor, múltiplos comunes (máximo común divisor y mínimo común múltiplo) son definidos entre números con representación decimal y factorial, usando como nexo de unión entre ambos desarrollos el Teorema Fundamental de la Aritmética. Consideramos que este desarrollo curricular podría favorecer que los alumnos pensaran el Teorema Fundamental de la Aritmética como otra forma de representar los números y, en consecuencia, los llamados procedimientos de obtención de divisores de un número, del máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números como una forma de entender y aplicar las definiciones de estos conceptos desde la representación factorial.

El estudio realizado sobre el currículo de divisibilidad en la enseñanza obligatoria nos proporciona una visión esquematizada del desarrollo de la divisibilidad en la enseñanza obligatoria en España durante el siglo XX y principios del XXI. En los sucesivos planes de estudio que han regulado la enseñanza obligatoria en estos años, los contenidos de matemáticas en general y de divisibilidad, en particular, han sufrido importantes cambios. Hasta mediados de los años setenta, en los currículos de **educación primaria**, como evidencian los proyectos editoriales con los que hemos trabajado, se enfatiza la divisibilidad como "una relación entre números con representación decimal". En algunos libros de texto de educación primaria, anteriores a 1960 la divisibilidad se vinculó a la magnitud. Las distintas acepciones léxicas de divisibilidad se presentaron sin ningún tipo de conexión entre ellas y los conceptos de múltiplo y divisor se asociaron a las operaciones de multiplicación y de división. El Teorema Fundamental de la Aritmética tuvo un carácter procedimental. La descomposición factorial de los números naturales siempre estuvo vinculada a los procedimientos de cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de dos o más números. En **educación secundaria** además de consolidarse, con mayor profundidad, los contenidos de divisibilidad de los currículos de Primaria, se establecieron relaciones de equivalencia lógica entre las distintas acepciones léxicas de la divisibilidad:

$$a \text{ es múltiplo de } b \Leftrightarrow b \text{ es divisor de } a \Leftrightarrow a \text{ es divisible por } b \Leftrightarrow b \text{ es un factor de } a$$

y en algunos de los proyectos editoriales analizados se estudió la divisibilidad entre números con representación factorial.

A finales del siglo XX y principios del siglo XXI, la concreción curricular de los contenidos de divisibilidad ha experimentando cambios en cuanto a la metodología. Hasta los años 90, la enseñanza de los distintos contenidos se articuló a través de múltiples representaciones de los números- diagramas, configuraciones puntuales..... No obstante, el uso de este tipo de recursos no favoreció que el estudio de la divisibilidad entre números con representación factorial se generalizara. Desde los años 90 hasta la actualidad, se ha pasado de una enseñanza de la matemática centrada en "*el proceso de matematización de problemas, creación de sistemas formales, utilización de las leyes de estos sistemas para obtener unos resultados e interpretación de los mismos*" a una enseñanza de la matemática "*más práctica donde la pretensión de rigor no es una parte prioritaria*". En este periodo, el desarrollo de los contenidos de matemáticas en general, y de divisibilidad en particular, se presenta a través de situaciones problemáticas. Desde estas situaciones se establecen los conceptos y relaciones entre los conceptos de divisibilidad entre números naturales con representación decimal. La divisibilidad entre números con representación factorial no forma parte del currículo de la mayoría de los proyectos editoriales.

1.3. La Divisibilidad en la Educación Secundaria actual en los libros de texto.

En el año 2002, en el Boletín Oficial del estado de 24 de diciembre de 2002, se publicó la Ley Orgánica 10/2002 de Calidad de la Educación (L.O.C.E.). Esta nueva reforma del sistema educativo tiene como objetivo adaptar la enseñanza a las características de los alumnos, favoreciendo su capacidad para aprender por sí mismos y para trabajar en equipo, integrando los recursos de las tecnologías de la información y de las comunicaciones en el aprendizaje. El Decreto 39/2002 estableció el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana. Este decreto fijó los contenidos mínimos del tema de divisibilidad en el primer ciclo- primer y segundo curso-, enmarcados en el bloque de Aritmética y Álgebra. Éstos en primer curso se presentan bajo el epígrafe de "*Divisibilidad*", y en segundo curso, "*Relación de* *divisibilidad. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números naturales*".

Al establecer las enseñanzas comunes de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) para toda la Comunidad Valenciana se optó por un currículo abierto y flexible. Ello implicó que los currículos aprobados requiriesen posteriores niveles de concreción por parte del profesorado y de los proyectos editoriales. Para obtener una aproximación de la concreción curricular sobre los contenidos de divisibilidad que se viene desarrollando en las aulas de ESO hemos analizado distintas editoriales por ser los libros el referente fundamental de los docentes. Se examinaron diez libros de texto, elegidos entre editoriales de gran difusión y otras de menor difusión en la Comunidad Valenciana. Los libros de texto consultados se adaptan al nuevo currículo de ESO.

Los textos examinados tratan la divisibilidad en el conjunto de los números naturales, reforzando y ampliando, en primer curso de ESO, contenidos que los estudiantes han trabajado en educación primaria: múltiplo y divisor de un número, criterios de divisibilidad (por 2 y por 3), número primo y compuesto, factorización de un número. En segundo curso y en algunos casos también en primer curso, desarrollan los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números, los algoritmos correspondientes para su obtención y la aplicación de los conceptos y algoritmos estudiados en la resolución de situación problemáticas reales y próximas a los estudiantes. En nueve de los diez textos seleccionados se encontró un elevado nivel de coincidencia en los contenidos de divisibilidad y en el desarrollo de los mismos, concretamente en los siguientes contenidos: múltiplos de un número natural, divisores de un número natural, criterios de divisibilidad (por 2, por 3 y por 5), números primos y compuestos, factorización de un número, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, cálculo de todos los divisores de un número. Las propiedades de los múltiplos y divisores sólo son estudiadas por dos de los libros de texto examinados.

En función del desarrollo curricular que realizan y las actividades que proponen hemos clasificados los libros de texto recopilados en dos tipos. Un primer tipo, que lo integran nueve de los diez libros, cuya característica principal es introducir los conceptos y procedimientos y posteriormente proponer ejemplos y actividades de complemento para cada uno de ellos. Al finalizar cada unidad didáctica se plantean actividades y ejercicios de aplicación teórica y procedimental, y problemas de aplicación práctica en contextos cercanos (baldosas, ordenación de libros, distancias, coincidencias de días, coincidencias horarias, número de grupos escolares, etc.). Algunos de estos libros también proponen actividades de autoevaluación, otros juegos y curiosidades relacionados con la divisibilidad. La Tabla 1.2 presenta el desarrollo curricular de un texto de 1° de ESO de la editorial S.M. (2002) como ejemplo representativo de esta primera categoría.

Contenidos de Divisibilidad correspondientes a 1° de ESO. Comunidad Valenciana				
Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
S.M.	Matemáticas 1° Secundaria - Números	Bujanda, Mª Paz Mansilla, Serafín	Madrid	2002
Contenidos				
Múltiplos de un número natural	• Se define el concepto de múltiplo de un número natural. • Cómo obtener los múltiplos de un número natural.			
Divisores de un número natural	• Se define el concepto de divisor de un número.			
Propiedades de los múltiplos y divisores	--			
Criterios de divisibilidad	• Por 2, por 3, por 4, por 5, por 9, por 10, por 11, por 25, por 100.			
Números primos y compuestos	• Definición de número primo y número compuesto			
Construcción de tabla de números primos	--			
Factorización de un número	• Cálculo de la descomposición de un número en factores primos.			
Cálculo de los divisores de un número	• Cómo averiguar los divisores de un número natural.			
Máximo común divisor	• Definición de máximo común divisor de 2 ó más números • Procedimiento para el cálculo del m.c.d			
Mínimo común múltiplo	• Definición de mínimo común múltiplo • Procedimiento para el cálculo del m.c.m de 2 ó más números			
Ejercicios	• Cada apartado tiene ejercicios de complemento. • Al finalizar la unidad didáctica se propone una colección de 65 ejercicios de aplicación teórica y procedimental, y 16 problemas de aplicación práctica en contextos cercanos (agrupaciones, distribución de árboles, construcciones con baldosas, coincidencias de días, distribuciones de piezas, distribuciones de objetos, número primo, colocación de cromos, distribución de personas, volúmenes, coincidencia horaria) • Completa la unidad didáctica con una sección sobre divisores de un número, cuadrados mágicos, potencias en la calculadora.			

Tabla 1.2. Contenidos, desarrollo curricular y actividades sobre divisibilidad. Editorial S.M.

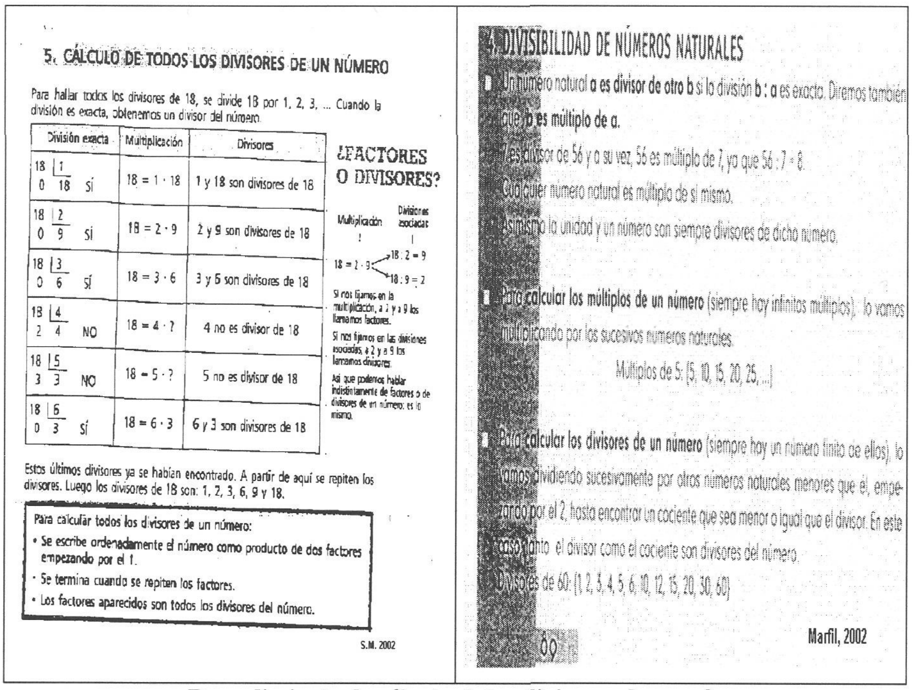
A la segunda categoría establecida sólo pertenece un libro de texto de 1° de ESO de la editorial Marfil (2002). Este libro de texto se caracteriza por presentar un desarrollo curricular con un marcado carácter constructivista, utilizando las actividades como eje vertebrador de los distintos contenidos de divisibilidad. El desarrollo curricular de este texto se muestra en la Tabla 1.3

Contenidos de Divisibilidad correspondientes a 1° de ESO. Comunidad Valenciana				
Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Marfil	Matemáticas 1r Curso ESO	Botella, Luis M. Millán, Luis M. Pérez, Pascual	Alcoy	2002
Contenidos				

Múltiplos de un número natural	• Definición de múltiplo de un número • Cálculo de múltiplos de un número
Divisores de un número natural	• Definición de divisor de un número. • Relación inversa entre múltiplo y divisor
Propiedades de los múltiplos y divisores	--
Criterios de divisibilidad	• Por 2, por 3, por 5.
Números primos y compuestos	• Definición de número primo y número compuesto
Construcción de tabla de números primos	--
Factorización de un número	• Descomposición de un número en factores primos
Cálculo de los divisores de un número	--
Máximo común divisor: m.c.d.	• Definición del máximo común divisor de dos ó más números. • Procedimiento para el cálculo del m.c.d.
Mínimo común múltiplo: m.c.m.	• Definición del mínimo común múltiplo de dos ó más números • Procedimiento para el cálculo del m.c.d.
Ejercicios	• El desarrollo curricular de la unidad didáctica se realiza reflexionando sobre distintas situaciones problemáticas, juegos: operación necesaria en un juego, búsqueda del resto en un reparto, lados en un terreno rectangular, número de tres cifras múltiplo de otros, juego de los divisores, números primos distribuidos en un hexágono, el panal de los divisores, distribuciones de objetos. • Al finalizar la unidad didáctica se proponen 7 ejercicios de aplicación teórica o procedimental, y 4 problemas de aplicación próxima (construcciones con baldosas, longitud de elementos, distribuciones de grupos y pagos con billetes)

Tabla 1.3. Contenidos, desarrollo curricular y actividades sobre divisibilidad. Editorial Marfil

Estos proyectos editoriales acreditados por el Decreto 39/2002 del Gobierno Valenciano no presentan diferencias curriculares significativas con respecto a los proyectos curriculares homologados por el Decreto 47/1992 y descritos en el apartado anterior (pp. 33-39). Los desarrollos curriculares llevados a cabo por la editorial S.M. (2002) y Marfil (2002) aunque se conciben desde perspectivas distintas como ya hemos reseñado, establecen explícitamente desde la definición operativa de Divisor – "a es divisor de b si la división b : a es exacta. Diremos que b es múltiplo de a"- relaciones lógicas entre divisor y múltiplo. El proceso de cálculo de todos los divisores de un número planteado por la editorial S.M. (2002) y descrito en la figura adjunta podría favorecer (a) el establecimiento de relaciones entre divisor y factor y (b) el uso de la representación factorial. No ocurre lo mismo con la editorial Marfil (2002).



5. CÁLCULO DE TODOS LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Para hallar todos los divisores de 18, se divide 18 por 1, 2, 3, ... Cuando la división es exacta, obtenemos un divisor del número.

División exacta	Multiplicación	Divisores
18 : 1 = 18, resto 0 SÍ	18 = 1 · 18	1 y 18 son divisores de 18
18 : 2 = 9, resto 0 SÍ	18 = 2 · 9	2 y 9 son divisores de 18
18 : 3 = 6, resto 0 SÍ	18 = 3 · 6	3 y 6 son divisores de 18
18 : 4 = 4, resto 2 NO	18 = 4 · ?	4 no es divisor de 18
18 : 5 = 3, resto 3 NO	18 = 5 · ?	5 no es divisor de 18
18 : 6 = 3, resto 0 SÍ	18 = 6 · 3	6 y 3 son divisores de 18

¿FACTORES O DIVISORES?

Multiplicación — Divisiones asociadas

18 = 2 · 9 → 18 : 2 = 9; 18 : 9 = 2

Si nos fijamos en la multiplicación, a 2 y a 9 los llamamos factores.

Si nos fijamos en las divisiones asociadas, a 2 y a 9 los llamamos divisores.

Así que podemos hablar indistintamente de factores o de divisores de un número: es lo mismo.

Estos últimos divisores ya se habían encontrado. A partir de aquí se repiten los divisores. Luego los divisores de 18 son: 1, 2, 3, 6, 9 y 18.

Para calcular todos los divisores de un número:
- Se escribe ordenadamente el número como producto de dos factores empezando por el 1.
- Se termina cuando se repiten los factores.
- Los factores aparecidos son todos los divisores del número.

S.M. 2002

4. DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES

- Un número natural **a es divisor de otro b** si la división **b : a** es exacta. Diremos también que **b es múltiplo de a**.

  7 es divisor de 56 y a su vez, 56 es múltiplo de 7, ya que 56 : 7 = 8.

  Cualquier número natural es múltiplo de sí mismo.

  Asimismo la unidad y un número son siempre divisores de dicho número.

- **Para calcular los múltiplos de un número** (siempre hay infinitos múltiplos), lo vamos multiplicando por los sucesivos números naturales.

  Múltiplos de 5: {5, 10, 15, 20, 25, ...}

- **Para calcular los divisores de un número** (siempre hay un número finito de ellos), lo vamos dividiendo sucesivamente por otros números naturales menores que él, empezando por el 2, hasta encontrar un cociente que sea menor o igual que el divisor. En este caso tanto el divisor como el cociente son divisores del número.

  Divisores de 60: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

89

Marfil, 2002

Procedimiento de cálculo de los divisores de un número
(Matemáticas 1º ESO. S.M. 2002. p. 9; Marfil, 2002. p. 89)

La representación factorial no es tratada explícitamente en la editorial Marfil (2002) y en la editorial S.M. (2002) se presenta desde el epígrafe "Descomposición de un número en factores primos" tal como muestra la figura adjunta.

8. DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

Comprueba que $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Los números 2, 3 y 5 son los factores primos de 360.

Se dice que $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ es la descomposición de 360 en factores primos.

La descomposición de un número en factores primos es la expresión del número como un producto de factores primos.

Descomposición de un número en factores primos

(Matemáticas 1º ESO. S.M. 2002. p. 13)

Posteriormente, la descomposición factorial de un número en la editorial S.M. :002) es utilizada como procedimiento de cálculo del máximo común divisor y el ıínimo común múltiplo de dos números tal y como se describe en la figura adjunta.

9. EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE VARIOS NÚMEROS

Máximo común divisor (m.c.d.)

Se quiere fabricar un rompecabezas de 30 cm de largo por 18 cm de ancho con piezas cuadradas iguales de modo que:

A. No sobre ni falte ninguna pieza.

B. El lado de la pieza sea el mayor posible.

Para cumplir la primera condición, la medida de la longitud del lado de la pieza debe ser un divisor común de las medidas de longitud del largo y del ancho. Calculamos los divisores comunes a 30 y 18.

Divisores de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Los divisores comunes a 30 y 18 son: 1, 2, 3 y 6.

Por tanto, se puede completar el rompecabezas utilizando piezas cuadradas cuyos lados midan: 1 cm, 2 cm, 3 cm o 6 cm.

Para que la pieza sea lo mayor posible (condición B), su lado será de 6 cm.

Se dice que 6 es el **máximo común divisor** de 30 y 18.

El máximo común divisor de varios números es el mayor de sus divisores comunes. Abreviadamente suele indicarse así: **m.c.d.**

Cálculo del máximo común divisor

Se descompone cada número como producto de sus factores primos.
En el ejemplo anterior:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$$

Si 2 y 3 son divisores comunes de 30 y 18, su producto también lo es.
El máximo común divisor de 30 y 18 es 6. Se escribe: m.c.d. (30, 18) = 6.

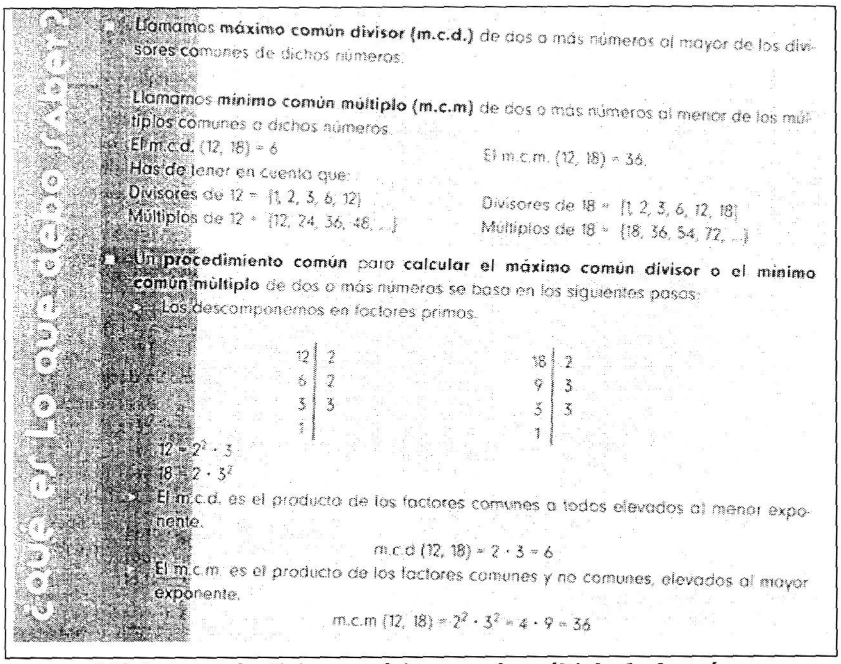
Para calcular el máximo común divisor de varios números:

- Escribe cada número como producto de factores primos.
- El máximo común divisor es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente con que aparezcan en la descomposición de cada número.

Máximo común divisor de dos números: definición y cálculo

(Matemáticas 1º ESO. S.M. 2002. p. 14)

La editorial Marfil (2002) por su parte define y calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números desde la representación decimal y posteriormente con un carácter procedimental utiliza la descomposición factorial.


¿Qué es lo que debo saber?

Llamamos **máximo común divisor (m.c.d.)** de dos o más números al mayor de los divisores comunes de dichos números.

Llamamos **mínimo común múltiplo (m.c.m)** de dos o más números al menor de los múltiplos comunes a dichos números.

El m.c.d. (12, 18) = 6 — El m.c.m. (12, 18) = 36.

Has de tener en cuenta que:

Divisores de 12 = {1, 2, 3, 6, 12} — Divisores de 18 = {1, 2, 3, 6, 12, 18}

Múltiplos de 12 = {12, 24, 36, 48, ...} — Múltiplos de 18 = {18, 36, 54, 72, ...}

Un **procedimiento común** para **calcular el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo** de dos o más números se basa en los siguientes pasos:

- Los descomponemos en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2 \cdot 3$

$18 = 2 \cdot 3^2$

- El m.c.d. es el producto de los factores comunes a todos elevados al menor exponente.

$$\text{m.c.d } (12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$$

- El m.c.m. es el producto de los factores comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.

$$\text{m.c.m } (12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números
(Matemáticas 1º ESO. Marfil: 2002. pp. 90-91)

La divisibilidad es entendida mayoritariamente como una propiedad entre números con representación decimal. Las definiciones de las acepciones léxicas de divisibilidad múltiplo-divisor favorecen explícitamente el establecimiento por parte de los alumnos de relaciones lógicas entre estas acepciones. El Teorema Fundamental de la Aritmética sigue teniendo un marcado carácter procedimental.

El estudio de los contenidos sobre divisibilidad que presentan los distintos libros de textos examinados, el desarrollo curricular que realizan y las actividades planteadas nos ha permitido fijar los tópicos- múltiplos y divisores de un número natural, criterios de divisibilidad, números primos y compuestos, factorización de un número (Teorema Fundamental de la Aritmética), máximo común divisor y mínimo común múltiplo- que van a formar parte de nuestra investigación y seleccionar actividades y problemas sobre los contenidos de divisibilidad que se desarrollan en la etapa, y su ampliación y comparación con estudios como los de Zazkis y Campbell (1996a), y Brown et al. (2002), con el objetivo de realizar un cuestionario, validarlo y evaluar el desarrollo de la compresión de la divisibilidad en N de los alumnos de enseñanza secundaria, en sus diversos ciclos, desde la perspectiva de la teoría APOS.

Podemos concluir señalando que la enseñanza de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales en las etapas de educación primaria y media se ha centrado principalmente en los alumnos comprendidos entre 10 y 14 años a lo largo de los siglos XX y XXI, dependiendo otras eventualidades de los planes de estudios establecidos por las circunstancias políticas y sociales.

La evolución de los tiempos y de la sociedad ha postulado el paso de una metodología principalmente memorística, a excepción del periodo de 1931 a 1936, hasta la propuesta de una enseñanza más activa a partir de la década de los 60, hasta la época actual donde la propuesta metodológica establece un currículo flexible con la concreción educativa en los diferentes centros educativos, desarrollando las capacidades propias de los alumnos y atendiendo a la diversidad en el aula.

Hemos podido observar cómo la divisibilidad se ha vinculado en las primeras décadas en los primeros años de educación primaria a la magnitud. Por lo general, la divisibilidad se ha tratado tanto en educación primaria como secundaria como una propiedad entre números, destacando que a partir de 1970 se utilizan representaciones gráficas para introducir los conceptos de divisibilidad, bien fueran diagramas o representaciones puntuales, hasta la década de 1990, o representaciones de figuras de contextos cercanos (flores, juguetes, trenes) a partir de la introducción de la L.O.G.S.E.

A lo largo de los periodos estudiados se ha podido ver que la divisibilidad se introduce en las primeras décadas del siglo XX, principalmente, a través de la acepción léxica de "ser divisible" (formando parte del número) y a partir de la cual se definen múltiplo y divisor de un número. Por otra parte también encontramos la definición de múltiplo asociado a la operación de multiplicar o bien a la de dividir (si la división es exacta) y la definición de divisor asociada a la operación de dividir. Estas últimas definiciones favorecen el establecimiento por parte del alumno de las equivalencias lógicas "*a es múltiplo de b* $\Leftrightarrow$, *b es divisor de a* $\Leftrightarrow$ *b es factor de a* $\Leftrightarrow$ *a es divisible por b*". A partir de la década de los 60, la mayor variedad editorial, muestra que los autores utilizan unas u otras acepciones para introducir la divisibilidad. Queremos reseñar que después de la puesta en funcionamiento de la Ley de 1970, y bajo la influencia de las "matemática modernas", algún libro de texto presenta la definición de múltiplo a través de los puntos de una recta graduada y después de haber introducido la "*relación de ser divisor*" como una relación de equivalencia.

Por último, los libros de texto no suelen introducir el Teorema Fundamental de la Aritmética para los cursos cuyos alumnos no alcanzan los 12 años. En las épocas estudiadas, cuando las editoriales tratan este Teorema Fundamental no especifican su nombre y lo introducen, generalmente, como la descomposición en factores primos de un número natural. El modo de representación factorial es utilizado en los libros de texto de manera procedimental para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, y algunas editoriales lo emplean también para la obtención de todos los divisores de un número.

1.4. La "comprensión de la divisibilidad" como ámbito de investigación.

Las investigaciones sobre la comprensión de los tópicos de la Teoría Elemental de Números revelan la existencia de dificultades en el aprendizaje y comprensión de estos conceptos y la necesidad de una mayor indagación en este campo. La gran mayoría de las investigaciones realizadas con estos tópicos se han planteado inicialmente con estudiantes para maestros y desde la perspectiva del análisis de la comprensión de los contenidos matemáticos que se deben enseñar.

Sin embargo, estas investigaciones nos aportan una información inicial para plantearnos nuestras cuestiones de investigación sobre la comprensión de la divisibilidad en alumnos de secundaria.

Dos han sido los criterios de organización de esta investigación:

- las centradas básicamente en el análisis de la comprensión de las relaciones entre las diferentes acepciones léxicas, y
- el papel que desempeñan las diferentes representaciones de los números (decimal y factorial) en la comprensión de los contenidos de la divisibilidad.

Zazkis y Campbell (1996a) en su estudio con estudiantes para maestros de enseñanza primaria indican que si bien los conceptos elementales de la Teoría de Números tienen una gran importancia, no han recibido la atención que requieren en las distintas investigaciones de Educación Matemática. Campbell (2000) señala la influencia de la investigación en Educación Matemática en la práctica docente, en particular, en la Teoría Elemental de Números aplicada a futuros maestros de enseñanza primaria. Este autor subraya que las investigaciones en el aula pueden ayudar a superar determinadas dificultades de la comprensión de las nociones de la aritmética elemental y, en particular, de la divisibilidad. Además toma como referencia fundamental la necesidad de corregir las dificultades que se muestran en la comprensión de la aritmética básica y la manera en que se enseña a los niños.

En relación a la comprensión de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales, Zazkis (2000) analiza las conexiones que efectúan los estudiantes para maestros entre los conceptos de factor, divisor y múltiplo, y entre otros conceptos de la teoría elemental del número, tales como factores primos, descomposición en factores primos, mínimo común múltiplo, máximo común divisor o reglas de divisibilidad.

Zazkis considera la equivalencia de las siguientes relaciones entre dos números naturales cualesquiera:

- b es un factor de a
- b es un divisor de a
- a es múltiplo de b

con la existencia de dos formas adicionales para expresar la misma relación entre dos números:

- b divide a a

- a es divisible por b

Para analizar qué equivalencias establecían los estudiantes para profesores de enseñanza primaria, realizó 19 entrevistas donde las preguntas que formuló eran del estilo:

a) Enumera los factores primos de 117 = $3^2 \times 13$.

b) Indica los factores de 117 = $3^2 \times 13$.

c) Indica los divisores de 117 = $3^2 \times 13$.

d) ¿De qué números es múltiplo 117?

e) ¿Existen factores que no sean divisores de un número?

f) ¿Existen números que son múltiplos y divisores de 117?

El análisis de los datos resultantes de las entrevistas realizadas a estudiantes para profesores de enseñanza primaria, efectuado desde la perspectiva de considerar el conocimiento como una red en la que los conceptos matemáticos se estudian relacionándose con otros, aportó los siguientes resultados:

a) la comprensión del concepto de "factor" parecía ser el menos problemático de los tres estudiados. No obstante, los estudiantes tenían una comprensión incompleta del mismo. La mayoría de ellos lo asociaban con la operación de multiplicación y no lo entendían como una relación entre los números,

b) el concepto de "divisor" resultó más problemático que el de factor. Existía una gran tendencia entre los alumnos a asociarlo con el papel que puede desempeñar un número en la división,

c) el concepto de "múltiplo" fue el más problemático de los tres conceptos. Éste fue asociado a la operación de multiplicación.

d) la mayoría de estudiantes sólo establecían equivalencia lógicas entre factor y divisor. El resto de conexiones, por ejemplo entre factor y múltiplo, se realizaban de forma errónea. Las conexiones entre los conceptos de factor, múltiplo y divisor no fueron establecidas por ningún estudiante.

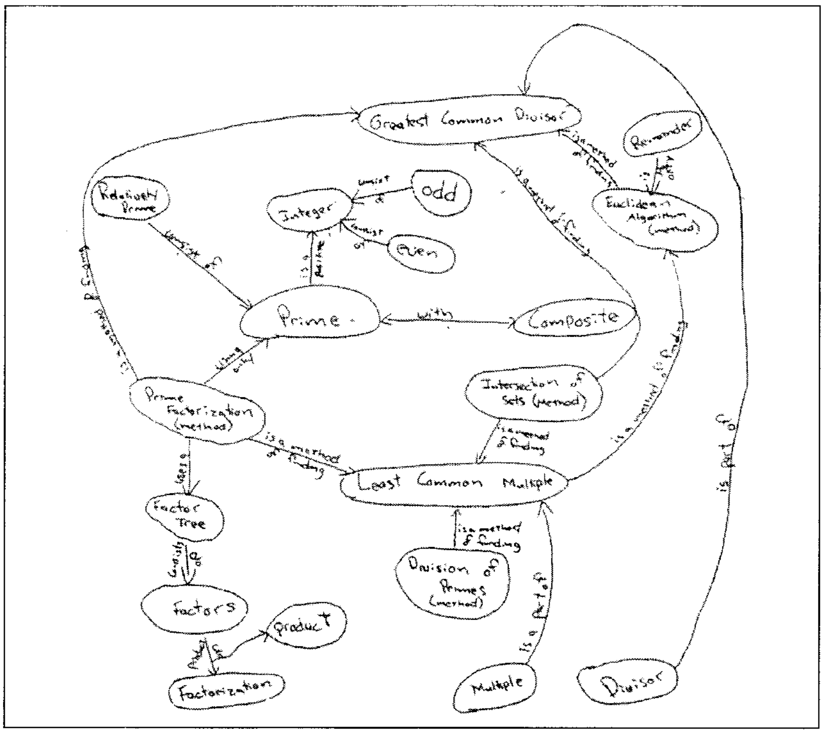
Esta investigación aporta como resultado relevante que los estudiantes a menudo asignan a los conceptos significados diferentes a los asignados por los matemáticos en el contexto de la Teoría de Números, y que las conexiones que establecen entre estos conceptos son la mayoría de las veces débiles o incompletas.

La divisibilidad es uno de los conceptos en la Teoría de Números que presenta una amplia gama de descripciones léxicas, pudiéndose establecer, como ya se ha indicado, equivalencia lógicas entre las siguientes expresiones: a es divisible por b; b divide a a; b es un factor de a; b es un divisor de a; a es múltiplo de b. Zazkis (2002) desarrolló, a lo largo de cuatro años, una investigación sobre el uso del lenguaje en la Teoría Elemental de Números (divisibilidad, descomposición en factores primos, factores, divisores y múltiplos) con estudiantes para maestros realizando entrevistas clínicas individuales.

La autora en sus conclusiones pone de manifiesto el intercambio constante e incoherente que realizan los estudiantes entre el lenguaje formal y no formal. El concepto "ser divisible", entendido como relación entre números, es sustituido por "ser dividido", entendido como un número que puede ser dividido por otro con resto cero, considerando que un número puede ser dividido por otro aunque el cociente no sea entero. Los conceptos de divisibilidad también son aprehendidos a través de imágenes mentales de reparto de objetos como es el caso del concepto "ser divisible" que los estudiantes representan mentalmente como conjuntos de objetos de igual número. A través de este estudio, Zazkis (2002) demanda metodologías de enseñanza que promuevan y ayuden al uso formal y riguroso del lenguaje matemático a fin de dar sentido al significado de los conceptos.

Bolte (1999), por su parte, expone las pautas que se pueden seguir para la formalización, de forma individual o colectiva, de mapas conceptuales sobre temas de matemáticas en general, y de divisibilidad en particular. La realización por parte de los estudiantes para maestros de los mapas conceptuales puso de manifiesto su comprensión de los conceptos implicados y las conexiones que establecen entre éstos. El autor planteó la elaboración de un mapa conceptual de los conceptos de factor, factorización, descomposición factorial, primo, múltiplo, divisible, compuesto, divisor, producto, mínimo común múltiplo, división por números primos, algoritmo de Euclides o máximo común divisor. Los estudiantes debían establecer y organizar las relaciones existentes entre los conceptos a través de nudos y líneas, ofreciendo al final de la actividad un informe sobre las relaciones establecidas entre los conceptos por ellos.

El mapa conceptual que se muestra a continuación fue calificado como débil, 6 puntos sobre 10, debido a su organización y a la explicitación de algunas relaciones superficiales.



Mapa conceptual de la divisibilidad. (Bolte, 1999. p 170)

La combinación de elementos visuales y narrativos de los mapas conceptuales es considerada por el autor como beneficiosa para la construcción de conocimiento matemático. Los mapas conceptuales aportan a los estudiantes representaciones más completas al integrarse en ellos la representación visual y narrativa. Igualmente, proporcionan a los profesores la oportunidad de descubrir los errores de sus alumnos y evaluar el progreso de la comprensión de los conceptos matemáticos.

Este grupo de investigaciones pone de manifiesto que un aspecto a considerar en el análisis del desarrollo de la comprensión de la divisibilidad en N puede venir dado por el establecimiento de relaciones entre las distintas acepciones léxicas de la divisibilidad.

Entre las investigaciones relativas al papel de las distintas representaciones de los números y las dificultades que éstas generan en la comprensión de determinados conceptos de la Teoría de Números, Zazkis y Gadowsky (2001), en sus trabajos con estudiantes para profesores y con alumnos de enseñanzas medias, destacan las diferentes características de las representaciones de los números naturales en las tareas que sobre Teoría de Números fueron planteadas.

El tipo de tareas planteadas en los cuestionarios y entrevistas permitieron analizar el papel de diferentes representaciones y la dificultad que éstas suponían para los alumnos. En este sentido cabe destacar la tendencia de los estudiantes a obtener la representación decimal de los números naturales para resolver las tareas planteadas, sin observar las características de las representaciones utilizadas. Por ejemplo:

a) *Representaciones factoriales*:

Entre las distintas respuestas dada a la pregunta "*Dado el número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. *¿M es divisible por 7?*" se destaca que la estrategia mayoritaria es la de obtención de la representación decimal de M para efectuar la división, al no considerar que 7 es un factor de M. Esta estrategia pone de manifiesto que (a) para algunos alumnos era más fácil discutir la divisibilidad por 7 del número 675 x 7 que del número M; (b) para otros era más fácil discutir la divisibilidad por 7 de M (factor que aparece en la representación factorial) que la indivisibilidad por 11 (factor que no aparece en la representación factorial), e incidiendo en el papel primordial que juega la unicidad de la descomposición factorial de un número (Teorema Fundamental de la Aritmética).

Para analizar el uso que los estudiantes hacían de las representaciones factoriales en la identificación de cuadrados perfectos, los autores plantearon tareas del tipo: "*¿Es* 71^2 *un cuadrado perfecto? ¿Es* 71^6 *un cuadrado perfecto?*" En el primer caso, dada la evidencia de la representación, la respuesta mayoritariamente fue correcta, en el segundo caso, los estudiantes obtuvieron el valor de 71^6 y calcularon la raíz cuadrada, sin observar que la representación dada se puede transformar en $(71^3)^2$.

b) Representaciones fundamentadas en el algoritmo de la división.

De nuevo, para resolver la tarea "*Dado el número K = 6 x 147 + 1. ¿Cuáles son el cociente y el resto en la división de K por 6?*", la preferencia de los estudiantes fue obtener la representación decimal de K y hacer la división por 6. Algunos estudiantes contestaron que K es múltiplo de 6 porque 6 está contenido en la representación del número mostrado, aunque este tipo de contestación no fue la mayoritaria.

c) Representaciones basadas en la propiedad distributiva.

La mayor parte de los estudiantes para resolver la tarea "*Considere el número A =15 x 5623 + 60. ¿Se puede expresar como múltiplo de 15?*" obtenían la representación decimal de A y dividían por 15. No eran capaces de aplicar la propiedad distributiva para discernir que A es múltiplo de 15:

"*15 x 5623 + 60 = 15 x 5623 + 1 5 x 4 = 15 x (5623 + 4)*".

La resolución de otras tareas ofreció pobres respuestas por la dificultad que supuso para los estudiantes el tipo de representación utilizada. Por ejemplo:

a) La dificultad de la tarea "*El número 1215, representado en base 6, ¿es impar?*" radica en que los alumnos están acostumbrados a representar los números en el sistema de numeración decimal.
b) La tarea "*El número 36^3. ¿Es un cuadrado perfecto?*" presenta dificultad a los alumnos porque la representación decimal del número no permite observar otra representación alternativa y consideran que el número es un cubo perfecto.

Zazkis y Gadowsky (2001) creen que estos resultados son debidos a las experiencias previas de los alumnos en la escuela. En la escuela se da mayor preponderancia a los cálculos, en detrimento del estudio de la estructura y de las características de las representaciones de los números. La importancia de las representaciones de los números debe destacarse mediante la presentación de diferentes expresiones y situaciones, estimulando a los alumnos con representaciones que excedan a las capacidades de cálculo de las calculadoras. La elección de actividades con estas características puede ayudar a los estudiantes en la comprensión de las peculiaridades de los números naturales, en especial de su estructura multiplicativa.

Brown (2002), en su investigación sobre divisibilidad, también estudia las dificultades que tienen los estudiantes para maestros en encontrar múltiplos comunes entre números descompuestos en factores primos. Las actividades desarrolladas se basaron en la secuencia: $2^2 \times 3^4$; $2^3 \times 3^4$; $2^2 \times 3^5$; $2^4 \times 3^5$; $2^4 \times 3^4$; $2^3 \times 3^5$..., a partir de la cual se pidió a los estudiantes que buscarán los seis términos siguientes y que expresaran, en producto de factores primos, el término que ocupaba la posición 200, describiendo a través de la representación factorial el método de obtención del término n-ésimo.

Las distintas estrategias empleadas por parte de los estudiantes en la resolución de la actividad propuesta fueron:

a) *Simbolizar los términos de la secuencia numérica mediante su representación decimal: 324, 648, 972, 1296, 1620, 1944...* A partir de esta nueva representación se obtuvo la diferencia entre términos consecutivos, 324 y el término n-ésimo, 324 x n, que posteriormente fue representado factorialmente, $2^2 \times 3^4 \times n$.

b) *Conservar la representación factorial de los números:* (a) expresando los términos siguientes de la sucesión en su representación decimal, 2268, 2592 y así sucesivamente, simbolizándolos posteriormente mediante su representación factorial; (b) realizando las diferencias sucesivas entre dos términos de la sucesión a partir de su representación factorial y expresando la diferencia en producto de factores primos $2^2 \times 3^4$.

c) *Obtener los cocientes entre términos sucesivos* $\frac{f(n)}{f(n-1)}$, con n>1, que produce una sucesión recurrente de la forma $\frac{n}{n-1}\times f(n-1)$, con f(1) = 2^2 x 3^4, y observando la relación existente $f(n) = n\times f(1)$, o bien $f(n) = f(n-1)+324$.

Brown (2002) observó que mayoritariamente los estudiantes optaban por obtener la representación decimal de los números y, posteriormente, buscaban la representación factorial para ofrecer la respuesta.

Por su parte, Zazkis y Liljedahl (2004) estudian el papel de la representación en la comprensión de los números primos por parte de los estudiantes para maestro de escuela elemental. Los autores indican que la representación de las propiedades de los números sirve como "lente" para el análisis de las respuestas dadas por los participantes. Sugiriendo que la falta de una representación transparente para un número primo puede ser un obstáculo para la comprensión del concepto de primalidad de los números.

El punto de partida de esta investigación fue entender los números primos como ideas básicas, o "*elementos constructivos*", de la Teoría de Números. Los números primos son descritos como "*elementos constructivos*" de los números naturales. El término "*elementos constructivos*" podría ser visto como "*una interpretación metafórica del Teorema Fundamental de la Aritmética*". La propiedad de existencia que está detrás de la metáfora "*elementos constructivos*" es la que crea una imagen de los números compuestos como construcciones multiplicativas de números primos. La unicidad de la descomposición en factores primos presenta un desafío para muchos alumnos, su existencia es una propiedad que a menudo está dada por sentada (Zazkis y Campbell, 1996b). No obstante, señalan los autores que el hecho de que los números primos sean una idea básica no significa que deban ser presentados y estudiados en solitario porque la comprensión de los conceptos matemáticos presenta una compleja red de relaciones y conexiones con otros conceptos. La comprensión de los estudiantes de los números primos está conectada a la comprensión de las relaciones multiplicativas entre números naturales, factores, múltiplos, números compuestos, y divisibilidad. La importancia de la comprensión de los números primos, según los autores, está en la comprensión de los números, los modos de representar los números y las relaciones entre números, aspectos que han sido identificadas por el Nacional Council of Teachers of Mathematics como fundamentales en los estándares de Números y Operaciones para todos los niveles (NCTM, 2000).

De las preguntas que se formularon en el estudio de Zazkis y Liljedahl (2004) destacamos las que tuvieron como objetivo establecer la influencia que ejercería la representación factorial en las respuestas de los participantes:

2) *Sea el número F = 151 x 157. ¿F es un número primo? Conteste si ó no y razone su respuesta.*
3) *Sea m(2k+1), con m y k números enteros. ¿Este número es primo? ¿Puede ser siempre un número primo?*

De los 116 estudiantes que participaron en la investigación, 74 contestaron correctamente la pregunta 2, indicando que F es un número compuesto. De ellos, 52, justificaron su respuesta a partir de la definición de número primo o compuesto. Las respuestas incorrectas correspondieron a 42 estudiantes, que para dar su respuesta utilizaron la representación decimal de F y las reglas de divisibilidad. Las respuestas a la Pregunta 3 estuvieron condicionadas por la notación algebraica utilizada para representar el número. Esta notación impidió el uso de cualesquiera de los métodos algorítmicos más familiares para los participantes. Sin la opción de utilizar algoritmos los estudiantes centraron su atención en:

a) La definición (o una interpretación de la definición) de número primo y compuesto.

   Los alumnos que entendían los números primos como "*aquellos que sólo son divisibles por 1 y por sí mismo*" tuvieron dificultades para generar una respuesta. Esta definición les llevó a pensar que "*los números primos no pueden ser representados como un producto*" ignorando la posibilidad de la factorización trivial,

b) El poder de convicción de los ejemplos.

   Cuando el número primo fue entendido como "*aquel que tiene dos factores*", los alumnos fueron capaces de reconocer la factorización trivial y utilizarla como guía para generar ejemplos que les permitieron dar una respuesta.

Zazkis y Liljedahl (2004) consideran que (a) conocer las definiciones de número primo no significa que los alumnos sean capaces de utilizar este conocimiento en una situación problemática; (b) una forma de construir una comprensión adecuada del concepto de número primo está relacionada con la descomposición factorial de los números como demuestra las limitaciones y obstáculos que tenían los estudiantes para maestros para resolver tareas cuando los números estaban representados factorialmente; (c) la existencia de una "representación transparente" para una propiedad específica de los números puede ayudar a la abstracción y generalización de esta propiedad. La falta de "representaciones transparentes" para la primalidad es un obstáculo en la construcción de este concepto; (d) es necesario involucrar a los estudiantes en la consideración de grandes números. Entienden por grandes números aquellos que van más allá de la capacidad de una calculadora de bolsillo. Plantean una posible variación de la cuestión 2 que impida a los estudiantes determinar la expresión decimal del número, por ejemplo, el número 151^{157}, para establecer la primalidad o no de éste. Esta sugerencia pedagógica, sin demostrar empíricamente, les hace suponer que la incapacidad de realizar cálculos forzará a más estudiantes a atender a la representación que hace la "conclusión transparente".

Este segundo grupo de investigaciones pone de manifiesto que un nuevo aspecto a considerar en el análisis del desarrollo de la comprensión de la divisibilidad en N por parte de los alumnos de educación secundaria podría estar centrado en la manera en qué las representaciones decimal y factorial de los números afecta a la compresión de la divisibilidad en N.

En resumen, las investigaciones anteriores subrayan la importancia de la comprensión de la Teoría Elemental de Números, en particular de la divisibilidad, señalando la trascendencia de las relaciones entre los diferentes conceptos y de los modos de representación. Dado que los alumnos adquieren sus concepciones acerca de los conceptos de divisibilidad en los últimos años de la educación primaria y en el primer ciclo de la educación secundaria, y las usan a lo largo de sus estudios como herramienta complementaria de otros temas de matemáticas, es importante profundizar en la comprensión que tienen los alumnos de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales en los tres niveles educativos (1° de Educación Secundaria Obligatoria, 4° de Enseñanza Secundaria Obligatoria y 1° de Bachillerato) desde (a) el tipo de relaciones lógicas que establecen los alumnos entre los distintos conceptos de divisibilidad y (b) la influencia que tienen los sistemas de representación de los números en la comprensión de la divisibilidad en N por parte de los estudiantes en estos niveles.

CAPÍTULO 2

Capítulo 2. Marco Teórico

La investigación en Educación Matemática se consolida y fortalece cuando se basa en un marco teórico. Una teoría de aprendizaje de las matemáticas puede proporcionar explicaciones de los fenómenos de construcción por parte de los alumnos de los conocimientos sobre los conceptos matemáticos, (a) sugiriendo orientaciones pedagógicas que favorezcan este proceso, (b) apoyando el pronóstico desde un carácter explicativo, (c) aplicándola a un amplio espectro de fenómenos, (d) interrelacionando fenómenos, (e) sirviendo como herramienta de análisis de los datos, ó (f) proveyendo de un lenguaje para la comunicación de las ideas (Dubinsky y McDonald, 2001).

La forma en que se produce por parte de un alumno la construcción mental de la comprensión de un determinado concepto matemático puede ser propuesta desde un marco teórico concreto, y a través de él dar una explicación de aquello que los estudiantes pueden haber aprendido (Dubinsky, 2000b). Una teoría debe ayudar a resolver problemas, a demostrar nuevos teoremas, a realizar aplicaciones dentro las matemáticas y a proponer las construcciones mentales que puede realizar un estudiante para la comprensión de un concepto.

Piaget y García (1982) señalan que la construcción del conocimiento pued depender de las preguntas que se formulen en la investigación y de la epistemología (los conceptos, y "*cómo el estudio de las normas cognoscitivas del sujeto permite lleg* *a los procesos propios de la construcción del saber, está claro que no habrá que recurrir a declaraciones verbales, ni aún a un análisis de la toma de conciencia, sino esencialmente a un análisis de lo que "hace" el sujeto (por oposición a lo que piensa que hace) para adquirir y utilizar un conocimiento o un "saber hacer", o para considerarlo como bien fundado*" (p.13). Por tanto podemos preguntarnos ¿cómo construyen los estudiantes el conocimiento de los conceptos matemáticos, qué mecanismos utilizan y qué construcciones realizan?

2.1. La construcción de objetos matemáticos.

Sfard (1991) subraya que los conceptos matemáticos abstractos pueden ser concebidos desde dos perspectivas. Una como concepciones operacionales (procesos, algoritmos y acciones) y otra como concepciones estructurales (conceptos matemáticos considerados objetos abstractos), siendo las concepciones operacionales previas a las estructurales. El paso de las concepciones operacionales a las estructurales se realiza a través de tres fases de evolución: interiorización, condensación y reificación.

El grado de interiorización es una fase de familiarización con los procesos que darán lugar al nuevo concepto. Estos procesos son operaciones con objetos matemáticos de nivel más elemental y que se van adquiriendo de forma gradual. La condensación es un periodo de cambio en el que se concentran largas secuencias de operaciones en unidades más manejables. El individuo piensa en el proceso como un todo, en términos de entrada y salida, sin necesidad de considerar todos los detalles que lo componen. En esta fase se puede dar nombre al concepto que nace. La reificación es el momento en el individuo es capaz de pensar en la nueva noción como un objeto en sí mismo con sus propias características.

En este modelo teórico una concepción matemática, para constituir constructos matemáticos más avanzados, se transforma de proceso a objeto abstracto desarrollado éste en un nivel superior. La diferencia entre condensación y reificación radica en que la condensación es un cambio técnico de aproximación que se traduce en la habilidad para trabajar con un proceso sin considerar todos los pasos, constituyendo un cambio gradual y cuantitativo. La reificación sin embargo debe ser entendida como un salto cualitativo e instantáneo. Aunque un concepto haya sido bien interiorizado y condensado en una entidad propia, no significa que se haya adquirido la capacidad de pensar sobre él como una concepción estructural. En este sentido, sin la reificación el concepto no deja de ser puramente operacional (Sfard, 1992). La concepción estructural supone considerar la idea como una estructura estática, reconociendo la idea para poder manipularla pero sin especificar detalles. Por el contrario, la concepción como proceso implica tomarla de forma potencial desarrollándose en cada momento mediante una secuencia de acciones.

Sfard y Thompson (1994) consideran que el modelo de reificación es útil para la descripción de la comprensión de los conceptos matemáticos. La reificación resulta difícil para los estudiantes. Pensar en el proceso como un objeto requiere la manipulación previa del concepto en cuestión, a la vez que el estudiante necesita conocer el concepto que se quiere comprender para poder determinar los procesos matemáticos necesarios para lograr esta comprensión. Todo ello puede ocasionar la desmotivación del estudiante para la construcción de objetos intangibles. Sfard (2000) señala que es importante comunicar eficazmente los significados que han sido reificados en objetos, destacando en esta comunicación los comportamientos del individuo y los objetos que ha utilizado.

Desde esta perspectiva, Dörfler (2002) subraya que los estudiantes construyen objetos matemáticos combinando el objeto en sí mismo con las propiedades y relaciones que lo constituyen, configurando un todo diferente de los elementos que lo constituyen. Se forman como una decisión individual sobre la manera de describir y pensar en una parte de la propia experiencia del individuo. La construcción de objetos matemáticos es interpretada como una decisión del estudiante por tratar algo como una entidad reificada, y por tanto las construcciones matemáticas tienen que ser aceptadas por los estudiantes para que puedan construirse. Por ello, es fundamental en la formación de objetos matemáticos que la actividad matemática que realicen los estudiantes sea admitida y los motive, por lo que la comprensión resulta una actividad consciente de los estudiantes.

Otro punto de vista en la construcción de objetos matemáticos es el expuesto por Tall (1991) y Gray y Tall (1994). Estos autores proponen determinar los procedimientos o procesos de las nociones matemáticas mediante un simbolismo de naturaleza dual que sirva para referirse tanto al procedimiento como al concepto. Gray y Tall (1994) indican que la ambigüedad simbólica permite la flexibilidad entre el proceso para llevar a cabo una tarea matemática y el concepto que se ha de manipular intelectualmente como parte del esquema mental del individuo. Gray y Tall (1994) denominan "procepto" a la ambigüedad representada por la amalgama del proceso, del concepto producido por ese proceso y el símbolo que se utiliza para representar a ambos. Estos autores distinguen entre proceso y procedimiento. El término proceso lo usan de manera general para significar un conocimiento o un proceso matemático. El término procedimiento para referirse a un algorítmico específico empleado en la realización de un proceso. Los símbolos suelen usarse de forma idéntica para representar a un proceso o para especificar el resultado de ese proceso. Esta dualidad del simbolismo requiere la combinación de la comprensión del proceso y del concepto. El término "procepto" lo definen para referirse a la combinación de proceso y de objeto utilizando el mismo símbolo. El "procepto" está formado por un conjunto de "proceptos elementales" que tiene el mismo objeto. Por ejemplo, el "procepto 6" incluye el proceso de contar 6, y una colección de representaciones: 3 + 3, 4 + 2, 2 + 4, 2 x 3, 8 – 2, etc. Todos estos símbolos se consideran representaciones del mismo objeto, obtenido a través de procesos diferentes.

Tall (1995a) clasifica los "proceptos" en tres categorías:

1) Proceptos operacionales: como los aritméticos, que disponen de algoritmos explícitos para la obtención del resultado.
2) Proceptos potenciales: como las expresiones algebraicas, que contienen variables donde pueden evaluarse los "proceptos" asignando valores a las variables, o bien ser manipulado simbólicamente como conceptos matemáticos.
3) Proceptos estructurales: como los límites, que tienen un proceso asociado para obtener el resultado pero no tienen un procedimiento invariable para calcularlos.

Los "proceptos" se encuentran en la base de la capacidad humana para utilizar las ideas matemáticas que requieren símbolos manipulables (Tall et al., 2001), empezando el desarrollo matemático en las percepciones de, y en las acciones en, objetos del entorno del individuo (Tall, 1995b; Tall et al. 2000). Las acciones finalizan en éxito cuando se utilizan representaciones simbólicas flexibles como "proceptos" (los procesos para hacer y los conceptos para pensar en). La sucesión de percepción de objetos externos, realización de acciones en ellos y la reflexión sobre los mismos, es considerada por Gray et al. (1999) como la actividad cognitiva fundamental que puede conducir a la comprensión, o no, de los conceptos matemáticos, influenciados por la actividad desarrollada por el individuo. Por ejemplo, en la construcción de conceptos geométricos es fundamental la percepción de las figuras y su forma, basando su comprensión principalmente en la acción y en la reflexión, mientras que para construir el concepto de número y el proceso de contar la aritmética se apoya en la acción y en la manipulación simbólica.

En este mismo sentido, Barnard y Tall (1997) consideran que la capacidad de los sujetos para concebir y manipular partes de la estructura del conocimiento es fundamental para facilitar el pensamiento matemático. A estas porciones de la estructura cognitiva que se reducen a niveles manejables que contienen la información esencial sin detalles superfluos la denominan "unidad de cognitiva". Por ello, la construcción del pensamiento matemático se fundamenta en dos factores: la capacidad de condensar la información de las estructuras cognitivas y la habilidad para realizar conexiones entre las "unidades cognitivas". Cuando se establecen conexiones entre los procedimientos que generan el mismo proceso, se desarrolla el "procepto" y se forman "unidades cognitivas" más complejas. Barnard y Tall (1997) y Dörfler (2003) consideran que la dualidad proceso-objeto constituye el germen de teorías sobre la comprensión de los conceptos matemáticos como las de Dubinsky (1991) y Sfard (1991).

2.2. Una aproximación piagetiana de la construcción del conocimiento.

Tzur y Simon (2004), desde la noción de abstracción reflexiva de Piaget, asumen que los procesos mentales son elementos constituyentes de la comprensión de un objeto, postulando que la transición del proceso a objeto involucra dos fases de transformación conceptual: la fase participativa y la fase anticipadora. En la fase participativa los estudiantes aprenden a adelantarse a los resultados de una actividad, pudiendo explicar porqué los resultados proceden de la actividad. El conocimiento en esta fase sólo está disponible en el contexto de la actividad. En contraste, en la segunda fase, la anticipadora, el estudiante usa los resultados de la actividad. La relación ya no se limita al momento en que se desarrolla y puede ser utilizada en otras situaciones.

La distinción entre las dos fases surge de la observación del fracaso de los estudiantes en el uso de concepciones matemáticas que habían utilizado con éxito en ocasiones anteriores. Los estudiantes que se encuentran en la fase participativa no pueden construir el nuevo concepto como un objeto al ser incapaces de usarlos en ocasiones posteriores. Sólo cuando se encuentran en la fase anticipadora pueden establecer el nuevo concepto como objeto, utilizándolo para realizar inferencias en las diferentes situaciones en que pueda ser requerido.

Dubinsky (1991) propone la "abstracción reflexiva" de Piaget como base teórica para el análisis de la comprensión de los conceptos matemáticos. Para Dubinsky (2000a) el origen de la teoría APOS se encuentra en la reformulación de la teoría piagetiana de la abstracción reflexiva para ser aplicada al Pensamiento Matemático Avanzado.

2.2.1. Teoría APOS.

La Teoría APOS, desarrollada por Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores **R**esearch in **U**ndergraduate **M**athematics **E**ducaction **C**ommunity (RUMEC), está basada en una interpretación del constructivismo a partir de la adaptación de algunas ideas desarrolladas por Piaget al Pensamiento Matemático Avanzado. Una de estas ideas es la de "abstracción reflexiva" introducida por Piaget para describir cómo construyen los individuos las estructuras lógico-matemáticas. Dubinsky (1991) considera que el concepto de "abstracción reflexiva" constituye una poderosa herramienta que dota a los investigadores de una base teórica para la comprensión del desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado.

Dubinsky y colaboradores basan su trabajo en el análisis teórico de un determinado concepto matemático, el desarrollo de unas determinadas estrategias de enseñanza y aprendizaje, y el análisis de los datos para probar y perfeccionar el análisis teórico inicial y la instrucción. La perspectiva pedagógica correspondiente considera que la comprensión conceptual debe converger hacia una comprensión del formalismo matemático. En esta perspectiva teórica del conocimiento matemático Dubinsky (1991, 2000a), Zazkis y Campbell (1996a) y Asiala et al. (1996) consideran que los individuos realizan construcciones mentales para obtener significados de los problemas y situaciones matemáticas. Estas construcciones mentales las denominan **a**cciones, **p**rocesos, **o**bjetos y **e**squemas. Los mecanismos que utilizan para dichas construcciones son la interiorización, la coordinación, la inversión, la encapsulación, la desencapsulación y la tematización, entre otros.

2.2.1.1. Las construcciones mentales

Según la Teoría APOS, las construcciones mentales que realizan los individuos para obtener significado de los problemas y de las situaciones matemáticas son: las acciones, los procesos, los objetos y los esquemas. En la realización de una tarea los estudiantes constituyen y usan sus construcciones mentales. En el desarrollo del conocimiento matemático, las construcciones mentales pueden ser reconstrucciones exactas (correspondientes a la memoria y a la repetición de métodos previamente conocidos) o adaptaciones de algo previamente aprendido. La última de los dos es esencial en el progreso y desarrollo de conocimiento matemático. Se caracterizan las construcciones mentales como sigue (DeVries, 2001):

- Acción
  Es la transformación de un objeto percibida por el individuo como externa.
  Un ejemplo de acción es cuando para determinar si un número es divisible por otro se realiza una división.

- Proceso
  Es la interiorización de una acción. Es una construcción interna, no necesariamente dirigida por un estímulo externo.
  Un ejemplo de proceso es cuando la actividad de división puede ser interiorizada como un proceso en el que la acción se piensa pero no se realiza.

- Objeto
  Un individuo reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso concreto, siendo consciente del proceso como una totalidad, aprecia que la transformación (acción o proceso) puede actuar sobre él y es capaz de construir la transformación. Entonces el individuo ha reconstruido este proceso en un objeto cognitivo. El proceso se ha "encapsulado" en un objeto.

- ESquema
  Es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados, consciente o inconscientemente, en una estructura coherente en la

mente del individuo y que puede ser evocada para tratar una situación problemática de esa área de la matemática.

Reflexionando sobre un esquema, el individuo puede transformarlo en un objeto para ejecutar nuevas acciones (Baker et al., 2000). Un esquema se desarrolla de forma dinámica y cambiante. Los objetos se pueden transformar en un nivel superior, lo que hace que aparezcan nuevas acciones, procesos, objetos y esquemas que permitan construir nuevos conceptos.

La conexión consciente o no de las diversas construcciones que en la mente del individuo pueden considerarse en un problema que implique tanto al concepto como a su coherencia puede permitir al individuo observar qué es lo que se encuentra en el esquema (Barbosa, 2003).

Otra forma de construir un objeto se da cuando el individuo reflexiona sobre un esquema, observando el esquema como una totalidad y realizando acciones sobre él. Entonces se dice que el individuo ha "tematizado" el esquema en un objeto. Un ejemplo de objeto es cuando un alumno es capaz de establecer que un número representado en factores primos es divisible por cualquiera de sus factores.

Señalan Dubinsky y MacDonald (2001), que aunque la sucesión acción, proceso, objeto y esquema se describe de manera lineal, en la realidad, cuando un individuo está desarrollando la construcción de un concepto, no sucede necesariamente así. Este aspecto también es reseñado en la investigación de Asiala et al. (1996).

2.2.1.2. Los mecanismos

Los mecanismos para realizar las construcciones mentales se llaman abstracciones reflexivas y son la interiorización, la coordinación, la inversión, la encapsulación, la desencapsulación y la tematización, entre otros. Estos mecanismos han sido caracterizados por el grupo de investigadores RUMEC de la siguiente manera:

- Interiorización
  Es la construcción mental de un proceso relativa a una serie de acciones sobre objetos cognitivos. La acción se interioriza en un proceso.

- Coordinación

  Dubinsky (1991) explica la coordinación volviendo a los procesos, considerando el acto cognitivo de coger dos o más procesos y usarlos para construir un nuevo proceso. Piaget usa "coordinaciones de acciones" para referirse a todas las formas de usar una o más acciones para construir nuevas acciones u objetos.

- Inversión

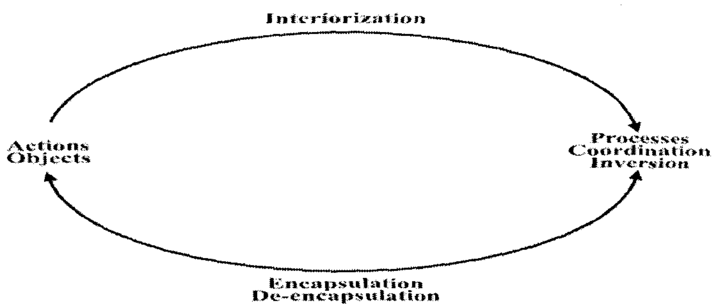
  Una vez que el proceso existe internamente, al sujeto le es posible pensarlo invertido, en el sentido de deshacer, como un medio de construir un nuevo proceso que consiste en el inverso del proceso original. Piaget no lo trata en el contexto de abstracción reflexiva. Dubinsky (1991) lo incluye como una forma adicional de construcción.

- Encapsulación-Desencapsulación.

  Es la transformación mental de un proceso en un objeto cognitivo. Este objeto puede ser visto como una entidad total y puede ser transformado por acciones o procesos. En este caso decimos que un proceso ha sido encapsulado en un objeto. Al proceso mental de retroceder desde un objeto al proceso desde el cual fue encapsulado el objeto se le llama desencapsulación.

- Tematización

  Cuando un individuo reflexiona sobre la comprensión misma de un esquema, viéndolo como un "todo" y es capaz de realizar acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema se ha tematizado en un objeto.



Esquema 2.1. Esquema del marco teórico APOS. Dubinsky, E.

2.2.1.3. La descomposición genética

Desde la teoría APOS, el desarrollo de la comprensión de un concepto puede explicarse desde las acciones, procesos, objetos y esquemas que desarrollan los estudiantes. Las descomposiciones genéticas son una manera de plantear las hipótesis de cómo se construyen los conceptos matemáticos. El análisis teórico desde APOS, en forma de descomposición genética, ofrece un conjunto de construcciones mentales que puede realizar un estudiante para comprender el concepto matemático que está estudiando.

Asiala et al. (1996, p.7) definen la descomposición genética del concepto como "*conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del individuo*". Para el grupo RUMEC (DeVries, 2001, p.4) la descomposición genética "*es el primer paso del análisis teórico de un concepto matemático en términos de las construcciones mentales que un aprendiz puede hacer en orden a desarrollar la comprensión del concepto*". Se trata de una vía para aprender un determinado concepto, considerando además que la descomposición genética de un concepto no es única.

Zazkis y Campbell (1996a) plantean una descomposición genética del concepto de divisibilidad a través de un análisis hipotético de la manera en que la divisibilidad, entendida como una propiedad de los números, podría ser construido por un alumno:

1. La construcción de la divisibilidad como un objeto conceptual comienza con ejemplos específicos de divisores. Los primeros ejemplos de divisores son números pequeños tales como 2, 3, 4 y 5.
2. Inicialmente, por ejemplo, **la divisibilidad** por 3 **es una acción**. Un alumno tiene que realizar la división y obtener el cociente de un número entero (sin resto) para concluir a posteriori que el número es divisible por 3. Es decir, se realiza la división y se discute la divisibilidad o no en función del resultado.
3. Posteriormente, **la acción** de dividir **puede ser interiorizada** como un proceso, en que la acción se piensa pero realmente no se realiza. El estudiante ha comprendido la idea de que es el propio procedimiento de la división el que determina si un número entero satisface o no el criterio de divisibilidad, pero no tiene necesidad de realizarlo.

4. Pueden **coordinarse o invertirse procesos** de divisibilidad de números particulares para crear nuevos procesos de divisibilidad. Por ejemplo, cuando la divisibilidad por 2 y 3 se usa para inferir la divisibilidad por 6 se coordinan dos procesos. O bien, sabiendo que la suma de los dígitos de un número entero es divisible por 3 implica que el propio número también es divisible por 3 puede invertirse y construir números divisibles por 3.
5. La **encapsulación** de la divisibilidad como un objeto podría llevar a entender el concepto de divisibilidad como una propiedad esencial de los números enteros, independiente de los procedimientos de la división. El concepto de divisibilidad es visto como propiedad de los números enteros, en términos de dicotomía, " sí o no".
6. Cuando **la divisibilidad se relaciona** con otras estructuras cognoscitivas tales como la factorización y la descomposición en factores primos, se ha tematizado el esquema de divisibilidad para formar un objeto.

El análisis de los datos de una investigación puede ratificar una primera descomposición genética de un concepto o bien conllevar la realización de la revisión y cambios en esa descomposición genética (Clark et al., 1997). En palabras de Dubinsky (2000a, p.68) "*los resultados proporcionaron un fuerte apoyo a nuestro paradigma de investigación, a nuestra perspectiva teórica y a nuestro acercamiento pedagógico. En muchos casos, la teoría APOS se probaba como una herramienta eficaz para describir y explicar el desarrollo de un concepto en la mente de los estudiantes. En varios casos el análisis de los datos nos condujo a revisar nuestra descripción teórica de dicho desarrollo. Incluso hubo, al menos, un ejemplo de esquemas en nuestras investigaciones, que nos condujo a revisar la teoría APOS al relacionarlo con la idea de la tríada de Piaget y García (Clark et al., 1997). Además, como resultado de muchos análisis específicos, obtuvimos las definiciones operativas de las acciones, de los procesos y de los esquemas que se han incluido en los artículos que reportan los resultados*".

Los investigadores pueden desarrollar una evolución de la descomposición genética para ofrecer una nueva descomposición genética más avanzada y un conveniente tratamiento del proceso de aprendizaje. Como señala Meel (2003, pp.247-248) "*la descomposición genética no refleja necesariamente la manera en que un matemático en* *particular analizaría el concepto para formular un método y enseñar dicho concepto. Por tanto, una descomposición genética es una descripción idealizada de las representaciones, vínculos, procesos y acciones esperadas matemáticamente, que casi siempre se atribuyen al concepto*".

En nuestra investigación planteamos como primera descomposición genética la propuesta por Zazkis y Campbell (1996a) que ha sido descrita en los párrafos anteriores, añadiendo en la misma otros conceptos como el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor. Brown et al. (2002) subrayan la facilidad con que suelen aplicar los estudiantes el algoritmo de obtención del mínimo común múltiplo de dos números naturales mediante la descomposición factorial en producto de números primos, y la importancia de que los alumnos puedan explicar por qué este procedimiento genera el mínimo común múltiplo.

Brown et al. (2002) formulan la hipótesis de que se han de coordinar los conceptos de multiplicación con el de descomposición en factores primos para construir el proceso de generación de un múltiplo del número en su forma de descomposición factorial. Con ello el estudiante puede inferir que la descomposición factorial de un múltiplo de un determinado número ha de contener la descomposición factorial del número.

2.2.1.4. Desarrollo de un esquema.

Reforzar la teoría APOS con la incorporación de las tres fases de desarrollo del esquema propuesta por Piaget y García (1982) ha conllevado el perfeccionamiento de la comprensión del desarrollo de los esquemas. Los tres niveles de desarrollo del esquema para categorizar la comprensión de los estudiantes, propuesta por la teoría APOS, permitió entender algunos comportamientos de los alumnos basados en la interacción de los esquemas (Baker et al., 2000). La terna de los niveles Intra, Ínter y Trans permite una comprensión más profunda del desarrollo de los esquemas y una mejor explicación de los datos (Dubinsky y MacDonalds, 2001).

El paso de un nivel al siguiente no se caracteriza por el aumento de los conocimientos respecto al nivel anterior, sino por una reinterpretación total de los fundamentos conceptuales. En Piaget y García (1982, p.7) se indica que "*los mecanismos del progreso del conocimiento pueden ser aprehendidos en las transiciones* *que conducen de un nivel de organización de menor adaptación del sujeto al medio (en tanto medio por conocer), a los niveles secundarios ulteriores. Piaget ha intentado dar cuenta de esta superación o aumento de conocimiento a través de un modelo basado en mecanismos biológicos: la equilibración. Este mecanismo, que obedece a una guía de origen endógeno, permite neutralizar las perturbaciones productoras de desequilibrios. Las reequilibraciones pueden ser fuentes de novedades en lugar de conducir necesariamente a una homeostasis*[1]". Señalan Piaget y García (1982, p.246) que la asimilación es "*la fuente general de los instrumentos de adquisición*" la cual se encuentra en todos los temas y en todos los niveles. La asimilación consiste en (a) incorporar los objetos a los esquemas de comportamiento como una estructura de acciones que puede realizar el individuo en la realidad; (b) considerar el conocimiento como una relación entre el objeto y el individuo. El objeto es un contenido al que el individuo da forma, extrayéndola ésta de las estructuras previas y ajustándolas al contenido, modificando el esquema asimilador a través de la acomodación mediante diferenciaciones en función del objeto que el individuo tiene que asimilar; y (c) modificar la organización existente como respuesta a las demandas del medio y mediante las que el individuo se ajusta a las condiciones externas.

Cada vez que el individuo aborda un dominio nuevo de cognición, implica una equilibración entre la asimilación de los propios esquemas y la acomodación de estos a las propiedades dadas. Piaget y García (1982) indican que la sucesión: Intra, Ínter y Trans, se da en todas las disciplinas, con el mismo orden establecido, no tratándose de un proceso específico del pensamiento científico, y donde cada nivel repite en su seno las propias fases al igual que el proceso total.

En el trabajo de Piaget y García (1982) se detallan los niveles de desarrollo de un esquema para distintos campos, cuyos aspectos generales son:

Intra: se identifica por conducir al descubrimiento de un conjunto de propiedades en los objetos, pero sin otras explicaciones que no sean locales o particulares. Las razones que se establecen pueden encontrase en las relaciones entre objetos, lo que es equivalente a decir que se encuentran en transformaciones de segundo nivel. Los individuos cuando

[1] *Conjunto de fenómenos de autorregulación que conducen al mantenimiento de la constancia en la composición y propiedades del medio interno de un organismo.*

abordan nuevos dominios de conocimiento tiene que asimilar los datos a sus propios esquemas (de acción o conceptuales). Estos datos son objetos, figuras, relaciones, etc, que implican en su análisis la equilibración entre su asimilación a los esquemas y la acomodación de éstos a las propiedades dadas.

Ínter: se caracteriza por transformaciones que, una vez descubiertas, requieren el establecimiento de vínculos entre ellas. Los nuevos esquemas construidos en la fase intra no pueden permanecer aislados y el proceso de asimilación conducirá a ciertas asimilaciones de carácter recíproco, y la necesidad de equilibración requerirá a los esquemas así vinculados formas más o menos estables de coordinación y transformación.

Trans: se caracteriza por la necesidad de un nuevo equilibrio debido a la diversidad de subesquemas que dificultan la unidad del todo. Las diferenciaciones serán contrarrestadas por las tendencias integradoras. El equilibrio que se impone entre las diferenciaciones y la integración no podrá alcanzarse sin lograr sistemas de interacciones que produzcan que se engendren las diferenciaciones, en lugar de que sean sometidas, armonizándolas internamente y sin que entren en conflicto entre sí.

Las estructuras logradas en este nivel dan lugar a nuevos análisis intra que conducen a nuevos ínter y a nuevas estructuras trans.

Esta descripción ha sido utilizada en distintas investigaciones apoyadas en la teoría APOS (Sánchez-Matamoros, 2004). DeVries (2001) adapta los niveles de desarrollo de un esquema de la siguiente manera:
Intra: se identifica por centrarse en los aspectos individuales aislados de otras acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. El individuo no ha construido ninguna relación entre ellos.

Ínter: se caracteriza por la construcción de relaciones entre acciones, procesos y objetos. En este nivel se empiezan a agrupar las informaciones de similar naturaleza.

Trans: se tiene construida una estructura subyacente completa en la que las relaciones descubiertas en el nivel Ínter son comprendidas dándose coherencia al esquema. La coherencia del esquema permite decidir qué se encuentra dentro del ámbito del esquema y qué no.

En opinión de Baker et al. (2000), el uso de estos tres niveles para analizar el conocimiento de los estudiantes ayuda a los investigadores a considerar la riqueza de las situaciones y de los problemas. Señalan que "*en cada nivel de la terna, el estudiante reorganiza el conocimiento adquirido durante el nivel anterior. La progresión es gradual y no necesariamente lineal. En el proceso de aprendizaje se desarrollan diferentes esquemas y el desarrollo y cambio de cada esquema puede describirse usando la terna. Mientras el conocimiento se desarrolla, los sujetos construyen esquemas coexistentes, los cuales cambian constantemente variando sus niveles de evolución. Por lo tanto, en algunas situaciones problemáticas una persona puede necesitar coordinar varios esquemas. Cada esquema, en sí mismo, se compone de acciones, procesos, objetos, otros esquemas y sus transformaciones. En particular, un esquema puede depender mucho del desarrollo de uno o más esquemas. En tales casos, se ha de estar preparado para identificar esos esquemas componentes y su multidimensionalidad. Por consiguiente, en la comprensión del desarrollo de un esquema global, se deben identificar no sólo los esquemas componentes del desarrollo sino también su coordinación. Dentro del esquema global, su coordinación nos conduce a nuevas estructuras que se construyen sobre las propiedades de los esquemas componentes.*" (Baker et al., 2000, p. 59).

2.2.2. Potencialidad de la Teoría APOS.

Distintos trabajos de investigación han asumido la teoría APOS (**A**cción-**P**roceso-**O**bjeto-Esquema) como marco teórico para analizar la comprensión que tienen los estudiantes de diferentes conceptos matemáticos. La descripción de las formas de conocer y los mecanismos utilizados en la comprensión de los conceptos matemáticos constituyen el eje fundamental de estas investigaciones en el marco teórico APOS. Desde este marco se han llevado a cabo investigaciones sobre el concepto de límite (Cottrill et al., 1996), de derivada (Asiala et al., 1997; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al. 2006), de integral definida (Czarnocha et al., 2001), clases laterales y grupos cocientes (Asiala et al. 1997), grupos y subgrupos (Brown et al., 1997) o inecuaciones (Barbosa, 2003), entre otras.

Cottrill et al. (1996) en su estudio sobre la comprensión del esquema de límite se plantearon los siguientes objetivos: reinterpretar la literatura referente al concepto de límite, describir el desarrollo de las descomposiciones genéticas planteadas y hacer propuestas pedagógicas para el aprendizaje del concepto de límite. El estudio se llevó a cabo con 25 estudiantes universitarios que cursaban la asignatura de Cálculo. La instrucción que recibieron los alumnos consistió en prácticas con ordenador, debates y trabajos de clase en grupos de 3 ó 4 alumnos. Posteriormente, se realizaron entrevistas clínicas. El concepto de límite se revisó a lo largo del proceso de enseñanza utilizando derivadas, integrales y sucesiones.

Los resultados obtenidos indicaron que (a) existía una fuerte tendencia por parte de los estudiantes a identificar el límite de la función en un punto con el valor de la función en dicho punto. Esta identificación planteó problemas de comprensión cuando el límite no existía; (b) la comprensión estática del límite en un punto podía evolucionar a la evaluación de los límites laterales o a la obtención de valores cercanos en el dominio estudiado. Cuando los estudiantes pueden dar valores en varios puntos, más o menos próximos al punto, se interioriza en un proceso el concepto de límite determinando que si $x \to a$ entonces $f(x) \to L$.

Cottrill et al. (1996) consideran fundamental para la comprensión del concepto de límite en un punto la coordinación de los procesos $x \to a$ y $f(x) \to L$ para la determinación del proceso que permita describir que $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$. No obstante, los estudiantes tienen dificultades con el concepto formal de límite por dos razones, una es la propia coordinación de los procesos y no todos los estudiantes pueden determinarla con inmediatez, y la otra se refiere al conocimiento necesario de la cuantificación para comprender el concepto de límite.

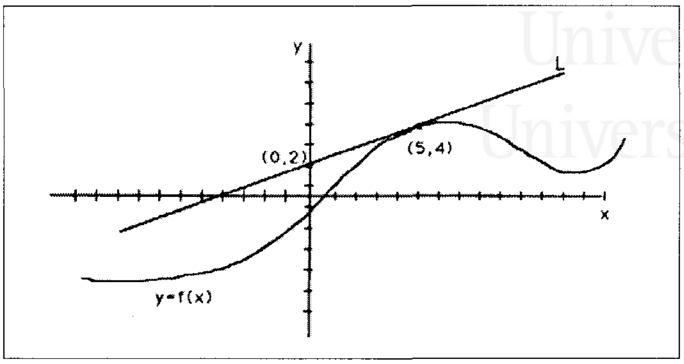
Señalan los autores que se puede interiorizar en un proceso el concepto de límite si los estudiantes son capaces de evaluar el concepto de límite en varios puntos más o menos próximos antes de dar el valor del límite. Una conceptualización objeto del límite requiere pensar, por ejemplo, en el límite de la combinación de dos funciones como proceso y coordinar la suma de ambas para encapsular en objeto el limite en la función suma.

Los resultados de esta investigación subrayaron la dificultad mostrada por los estudiantes en la comprensión del concepto de límite ya que sólo algunos estudiantes construyeron el dominio y el conjunto imagen de la función como proceso, sugiriendo la importancia de coordinar los procesos construidos tanto en el dominio como en la imagen de la función.

Cottrill et al. (1996) destacan que la concepción dinámica del concepto de límite es más complicada que un mero proceso. Para los autores el concepto de límite no es estático y constituye un esquema muy complejo que es producto de aspectos dinámicos y subrayan el insuficiente tratamiento instruccional de la concepción dinámica del concepto de límite. La construcción del esquema de límite requiere la coordinación de procesos que impliquen fuertes concepciones así como la cuantificación del límite, en lugar de los ε y δ de la definición formal de límite que resulta inaccesible para gran número de los estudiantes.

Asiala et al. (1997) en su investigación sobre la comprensión gráfica de una función y su derivada propusieron una descomposición genética inicial basada en dos modos de representación, el gráfico y el analítico. La encapsulación como objeto del concepto derivada se produciría cuando la recta tangente a una función en un punto se comprendiese como (a) el límite de las rectas secantes (modo gráfico) y (b) el límite de los cocientes incrementales de una función en un punto (modo analítico).

En el estudio participaron 41 estudiantes de Ingeniería y Matemáticas distribuidos en dos grupos, el grupo que siguió una enseñanza tradicional (24 estudiantes) y el grupo C^4L que recibió una instrucción experimental (17 estudiantes). La investigación también pretendía realizar un estudio comparativo entre la forma de comprensión que sobre los tópicos estudiados mostraban ambos grupos de alumnos. Para recoger los datos se realizaron entrevistas cuyas preguntas versaron sobre la gráfica y la recta tangente a una función en el punto (5, 4) y sobre la construcción de funciones que cumplieran determinadas propiedades de la función y de sus dos primeras derivadas.



Gráfica y recta tangente en el punto (5,4) (Asiala et al.; 1997, p.404)

El objetivo de las preguntas de las entrevistas fue inferir información sobre cómo los estudiantes

a) comprenden "la notación y = f(x)"; "una recta tangente horizontal"; "la monotonía de una función a través de su derivada" y "que f'(x) es la pendiente de la recta tangente a f(x) en (x, f(x))";
b) pueden "trabajar con la representación gráfica de la función sin disponer de la expresión analítica f(x)"; "deducir información sobre f y f' a partir de la representación gráfica"; "ser capaces de tratar f' sólo con la gráfica de la función"

Los resultados mostraron que cuando los estudiantes trabajaban con gráficas la función era conocida como proceso. Muchos alumnos necesitaban tener una expresión analítica de f(x) que se adaptase a la representación gráfica. La comprensión de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto presentó dificultades cuando los alumnos no comprendían el concepto de función como proceso, es decir, no entendían f' como una función. Los estudiantes que siguieron el curso C^4L alcanzaron una comprensión proceso de la función y pocos requirieron una expresión analítica de f(x) que se correspondiera con la gráfica. Además, estos estudiantes mostraban una comprensión más completa de f y f' que los alumnos que seguían la instrucción tradicional.

A partir de los resultados de la investigación, Asiala et al. (1997) señalan que debía reforzarse la comprensión del concepto de (x, f(x)) enfatizando la comprensión de la derivada como una función e invirtiendo el concepto de derivada de una función para construir la función original. La descomposición genética inicial debía modificarse en tanto a fin de dar mayor énfasis a la concepción de función que poseen los estudiantes, y a la creación de conexiones entre las interpretaciones analíticas y gráficas.

La coordinación de esquemas también fue utilizada por Czarnocha et al. (2001) en su investigación sobre la comprensión del concepto de integral definida. Según los autores, el desarrollo del esquema de integral definida comporta la coordinación del esquema visual de suma de Riemann y el del esquema del concepto de límite de la sucesión numérica. La integral definida comprende la composición de construcciones de tipo geométrico y de construcciones de tipo numérico (sucesiones infinitas y límites).

La descomposición genética inicial planteada por Czarnocha et al. (2001) contemplaba el concepto de función y suma de Riemann como objeto, la coordinación del proceso de función y de suma de Riemann, y la aplicación del esquema de límite a las sumas de Riemann para obtener un número (integral definida).

En la investigación participaron 32 estudiantes de Ingeniería, Ciencias y Matemáticas. Se formularon diez preguntas sobre el concepto de integral definida en las entrevistas individuales que se realizaron. Estas preguntas tuvieron como objetivos investigar:

a) ¿Cuál es la relación que existe entre la descomposición genética inicial y las construcciones mentales que sobre la integral definida tienen los estudiantes?
b) ¿Qué construcciones mentales no realizan los estudiantes?
c) ¿Qué debe modificarse en la descomposición genética inicial para que los alumnos puedan realizar construcciones mentales adecuadas?

El análisis de los datos de las entrevistas puso de manifiesto que (a) los alumnos que tenían una concepción objeto de la suma de Riemann eran capaces de obtener las sumas a partir de particiones de distinto tamaño (2, 3, 4, 5,..., n,...); (b) la dificultad de la comprensión como objeto del esquema de la suma de Riemann estaba vinculada a las dificultades que los alumnos tenían con el esquema de límite. El límite de la suma de Riemann era visto como una suma infinita de rectángulos de pequeña amplitud, o bien como suma de "líneas", es decir, como suma de infinitos rectángulos de amplitud 0- suma del límite de las áreas de los rectángulos- y no como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos; (c) la dificultad en la comprensión del límite de una sucesión creó problemas en la comprensión del esquema de integral definida, resultando fundamental la comprensión del concepto de límite de una sucesión para que los estudiantes comprendan el concepto de integral definida como el límite de sumas parciales.

En función de los resultados obtenidos Czarnocha et al. (2001) describieron las construcciones mentales realizadas por los alumnos sobre la comprensión del concepto de integral definida. Propusieron una modificación de la descomposición genética inicial que incluyese el concepto de medida de la distancia y la forma de conocer como objeto del concepto de límite de una sucesión. El esquema del concepto de la suma de Riemann y la coordinación de este esquema y el de límite no sufrió ningún cambio. En el ámbito de instrucción, se sugirió que se enfatizase en los planes de estudios la comprensión de los conceptos necesarios para mejorar el conocimiento de la integral definida como el límite de la suma de Riemann.

Desde el campo algebraico también fue investigada por Brown et al. (1997) y por Asila et al. (1997) la coordinación de varios esquemas. En estas investigaciones se estudió la comprensión de los estudiantes sobre operaciones binarias, grupos y subgrupos y sobre clases laterales, normalidad y grupos cocientes, respectivamente. En ambos estudios se utilizó la teoría APOS para describir las formas de conocer y los mecanismos de construcción de los conceptos de álgebra que utilizaban los estudiantes. En estos estudios participaron 51 estudiantes nuevamente distribuidos en dos grupos, el que siguió una enseñanza experimental (31 estudiantes) y el que recibió una enseñanza tradicional (20 estudiantes). La metodología del grupo experimental se apoyó en el uso del programa informático **I**nterative **SET** **L**anguage (ISETL). Los datos se recogieron mediante la realización de tres pruebas escritas y dos entrevistas individuales a lo largo del curso.

En el estudio de Brown et al. (1997) resultó de especial interés el conjunto de construcciones mentales, denominadas *esquema*, que los estudiantes pueden desarrollar para la comprensión del concepto de grupo y subgrupo. La descomposición genética inicial planteada por los autores incluyó las operaciones binarias entendidas como funciones lo que supuso la inclusión del esquema de función previamente construido. El esquema de grupo que a su vez comprendía otros esquemas como el de conjunto, operaciones binarias y axiomas que podían coordinarse entre sí. Por ejemplo, el esquema de axioma incluía una operación binaria que podía cumplir o no una determinada propiedad o el esquema de subgrupo que contenía los esquemas de grupo, subconjunto y función. Las actividades que se plantearon incluían relaciones de congruencias ((x + y) mod.6), permutaciones, clases modulares y grupos de simetrías.

Los resultados mostraron las distintas formas de comprensión de los alumnos. Por ejemplo, las operaciones binarias eran comprendidas como acción cuando los alumnos no eran capaces de comprender el concepto de relación binaria con ejemplos específicos. La composición de dos simetrías específicas era comprendida como proceso cuando los alumnos podían usar ejemplos concretos y generalizarlos. La compresión de la relación binaria se encontraba en un nivel superior si los alumnos la entendían como una función de dos variables.

Por otra parte, el trabajo de Asila et al. (1997) estudiaba la epistemología de los grupos laterales, de la normalidad y de los grupos cocientes. En la descomposición genética propuesta por estos autores el concepto de grupo lateral se comprende como una acción cuando el estudiante lo observa y lo trabaja como una situación próxima, como si estuviera descrito mediante la aplicación de una fórmula. La concepción como proceso del grupo lateral permite al estudiante pensar en clases a la izquierda o en los subgrupos (p.e. en el producto de los elementos del subgrupo) sin realizar los cálculos. Por último, las clases laterales serán conocidas como objeto cuando el alumno pueda pensar en cómo se forman éstas o realizar acciones sobre las mismas o bien hacer comparaciones sobre los cardinales o utilizar el teorema de Lagrange. De igual modo propusieron la descomposición genética de los conceptos de normalidad y grupos cocientes. El esquema de grupo cociente lo integraban los esquemas de grupo lateral, de operación binaria y de grupo, pudiéndose coordinar entre sí para realizar construcciones mentales específicas que puedan ser aplicadas en el grupo cociente.

Los resultados del estudio de Asiala et al. (1997) mostraron que la comprensión de los conceptos de álgebra era mayor en el grupo que recibió instrucción experimental. Los alumnos de este grupo alcanzaron concepciones objeto de los esquemas de clase lateral y de normalidad. La normalidad en este grupo fue observada mayoritariamente como una propiedad de un subgrupo que está contenido en un grupo y la comprensión de la idea de grupo fue asociada a un conjunto con ley de composición interna.

Otra investigación que usa el marco teórico de Acción-Proceso-Objeto-Esquema es la que desarrolló Barbosa (2003) sobre la comprensión del concepto de inecuación que tienen los estudiantes universitarios. El esquema de inecuación planteado por Barbosa debía ser comprendido desde dos construcciones mentales diferentes: interpretación de inecuación y resolución de inecuación.

El esquema de *interpretación* es entendido como un ente matemático que se necesita describir y que se puede manipular mediante propiedades tales como operar, analizar, observar equivalencias o verificar conjuntos de números reales que cumplen la inecuación. Por otra parte, el esquema de *resolución* consiste en indicar las transformaciones que están permitidas, las modificaciones que sufre el conjunto solución después de las transformaciones o el procedimiento de resolución específico que permite resolver una determinada inecuación con el menor número de operaciones. Además, desde el punto de vista gráfico, este esquema de resolución comprende las funciones que pueden ser utilizadas para representar la inecuación o cuándo se han de comparar dos gráficas para analizar los signos de las imágenes.

El autor indica que para entender el esquema de inecuación es necesario conocer los significados dados a los términos **interpretar**[2] y **resolver**[2] una inecuación. Para Barbosa (2003, p.201) "***Interpretar*** *una inecuación implica, asimilar el significado de variable real y del conjunto solución, por otro, si se presenta como una relación entre expresiones algebraicas, puede ser interpretada como una relación entre funciones y su conjunto solución puede eventualmente ser determinado mediante gráficos*". Por otra parte, para el autor (p.202) "***Resolver*** *una inecuación consiste en hallar su conjunto solución o su descripción más simple posible*".

La investigación se llevó a cabo con 136 estudiantes universitarios de informática y matemáticas. Se comparó la comprensión del concepto de inecuación que tenían los estudiantes que recibían una enseñanza tradicional con la del grupo de alumnos que

[2] En negrita en el texto original.

seguían una metodología experimental basada en el uso de ordenadores y el lenguaje de programación ISETL.

Las preguntas de la investigación que se planteó Barbosa (2003) fueron:

a) ¿Cuáles son los conceptos previos que se requieren para la comprensión de inecuaciones?
b) ¿Cómo construye o comprende el alumno el concepto de inecuación?
c) ¿Cuáles son las estructuras mentales y las conexiones con otros conceptos matemáticos necesarios para la comprensión del concepto de inecuación?
d) ¿Cómo influye la interpretación de inecuación en la resolución de problemas que implican el concepto?

La concepción acción del esquema de inecuación consistió en resolver una inecuación siguiendo los pasos de resolución de otra inecuación o sustituyendo valores específicos de la incógnita comprobando si éstos satisfacen o no la inecuación. Interiorizar una inecuación en un proceso requería que el estudiante resolviese la inecuación sin imitar necesariamente un modelo de resolución, pudiendo describir los pasos necesarios para resolver una inecuación sin ejecutarla realmente, es decir, cuando era capaz de pensar en una inecuación de manera generalizada y dinámica. Si el estudiante reflexiona sobre las acciones aplicadas a un proceso específico, percibe sus transformaciones, las puede construir y actuar en el proceso, habrá encapsulado en un objeto el concepto de inecuación. Por ejemplo, cuando es capaz de analizar equivalencias entre inecuaciones utilizando propiedades de los números reales.

En las conclusiones de su investigación, Barbosa (2003) indica que es necesario que los estudiantes (a) utilicen transformaciones adecuadas para hallar la solución de la inecuación; (b) conozcan las condiciones y las razones de porqué se utilizan esas transformaciones, porqué funcionan y son adecuadas para alcanzar la solución de la inecuación. Destaca que un *"fuerte esquema de resolución, tanto en el contexto algebraico como en el gráfico, debe tener un esquema fuerte de interpretación"*. Sugiere que es necesario proponer actividades basadas en el esquema de inecuación que involucren la interpretación y la resolución tanto algebraica como gráfica.

Cuando la perspectiva **A**cción-**P**roceso-**O**bjeto-**ES**quema precisó de nuevos elementos de interpretación del desarrollo del esquema, se incorporó para la caracterización de la construcción y desarrollo de los esquemas de conceptos matemáticos la tríada de niveles de desarrollo del esquema propuesta por Piaget y García (1982) (**Intra**, **Ínter** y **Trans**). Clark et al. (1997) fueron los primeros que analizaron la comprensión de los estudiantes de la regla de la cadena a través de los tres niveles de desarrollo de un esquema. A este estudio le siguió el de Cottrill (1999), también sobre la regla de la cadena, el de Baker et al. (2000) y el de Cooley et al., (2003) sobre cálculo gráfico, y los trabajos de Sánchez-Matamoros (2004) y Sánchez-Matamoros et al. (2006) sobre el concepto de derivada, entre otros.

Clark et al. (1997) analizaron la comprensión de los estudiantes de la regla de la cadena y sus aplicaciones, estableciendo el desarrollo del esquema de la regla de la cadena a través de la terna -Intra, Ínter y Trans- lo que les facultó para clasificar las respuestas dadas por los 41 alumnos que participaron en la investigación. Estos alumnos pertenecían a un grupo experimental C^4L y a un grupo de enseñanza tradicional. El estudio se llevó a cabo mediante entrevistas realizadas al total de participantes. En la entrevistas se les hicieron preguntas sobre la derivación de una función por métodos distintos, sobre la función integral o sobre la regla de la cadena y su comprensión.

Las preguntas de investigación que se plantearon fueron:

a) ¿Cómo comprende los estudiantes la regla de la cadena?
b) ¿Cuáles son los conceptos matemáticos necesarios para la comprensión de la regla de la cadena?
c) ¿Cómo reconocen y aplican los estudiantes la regla de la cadena en diferentes situaciones matemáticas?

Clark et al. (1997) plantearon una descomposición genética inicial que describía la forma en que los estudiantes pueden llegar a comprender como objeto el esquema de función, el esquema de composición de funciones y el esquema de diferenciación. También describieron cómo debían coordinarse los esquemas de composición de funciones y de diferenciación para desarrollar el esquema de la regla de la cadena y cómo podían aplicar la regla de la cadena en situaciones específicas.

El análisis de las entrevistas evidenció la existencia de estudiantes que podían generalizar la regla de la cadena desde una función concreta realizando acciones externas y poseyendo únicamente una concepción acción de la regla de la cadena. Estas evidencias impulsaron a los investigadores a utilizar nuevos elementos de interpretación basados en la caracterización de los niveles Intra, Ínter y Trans. La redefinición de la descomposición genética inicial del esquema de la regla de la cadena usando la caracterización de los tres niveles de desarrollo se plasmó en los siguientes términos. En el nivel Intra el estudiante posee una colección de reglas de derivación para encontrar todo tipo de derivadas incluidas la de algunos casos difíciles, sin que ello suponga que establecen relaciones entre ellas. El nivel Ínter está caracterizado por la habilidad del alumno para discriminar entre todos los tipos de derivadas y establecer algún tipo de relaciones entre ellos. Por último, en el nivel Trans el estudiante construye el esquema subyacente de la regla de la cadena vinculando la composición de funciones y la diferenciación, pudiendo generalizar la regla de la cadena.

El estudio realizado por Clark et al. (1997) fue complementado por Cottrill (1999). En este nuevo estudio sobre la comprensión de la regla de la cadena Cottrill planteó la hipótesis de que la regla de la cadena no era difícil en sí misma sino que lo que dificultaba su comprensión por parte de los estudiantes era la composición de funciones.

La investigación se realizó en dos fases, la primera fase se centró en el análisis cuantitativo de los cuestionarios que se pasaron a 34 estudiantes de la asignatura de Cálculo distribuidos en dos grupos que recibían enseñanza a través de metodologías diferentes. En la segunda fase se realizó un análisis cualitativo de las 6 entrevistas realizadas. Las preguntas que se realizaron en las entrevistas pretendían responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cómo comprenden los estudiantes la regla de la cadena?
b) ¿Cómo entienden los estudiantes la composición de funciones en la regla de la cadena?
c) ¿El concepto de la regla de la cadena es descrito correctamente mediante un esquema?, ¿los resultados que se obtienen describen el esquema? (basadas en los resultados del estudio de Clark et al. (1997))

Los resultados cuantitativos mostraron que aquellos estudiantes que habían recibido una enseñanza tradicional obtuvieron mejores resultados en diferenciación y en la regla de la cadena que los estudiantes que siguieron el curso C^4L. Por su parte, el análisis cualitativo de los datos mostró que (a) el tipo de instrucción era importante en la forma en que los alumnos realizaban las tareas. Los alumnos que siguieron el curso experimental mostraron mejor comprensión del concepto de la regla de la cadena que los que recibieron la metodología estándar; (b) la descomposición genética inicial formulada para el concepto de la regla de la cadena a través de los niveles de desarrollo de esquema era consistente; (c) era imprescindible que los alumnos entendiesen el concepto de composición de funciones para lograr un nivel adecuado de comprensión del concepto de regla de la cadena.

Otra investigación que desde el marco teórico APOS se centra en el desarrollo del esquema a través de los niveles Intra, Ínter y Trans es la que realizaron Baker et al. (2000) sobre la comprensión de los estudiantes acerca de los conceptos de cálculo utilizados en la resolución de un problema atípico de cálculo gráfico (esbozar la gráfica de una función en intervalos específicos de su dominio conocidas distintas propiedades de la misma).

En esta investigación participaron 41 estudiantes de Ingeniería, Ciencias y Matemáticas. Estos alumnos habían realizado previamente un curso de cálculo de una variable. El objetivo era estudiar la conceptualización de los estudiantes sobre la primera y segunda derivada, la continuidad y los límites de la función y analizar la coordinación que establecían los estudiantes de los elementos anteriores cuando esbozaban la gráfica de la función correspondiente. Para ello se formularon preguntas tales como:

a) ¿Los estudiantes pueden trabajar con la representación gráfica de la función sin disponer de la expresión analítica f(x)?
b) ¿Pueden los estudiantes visualizar las características gráficas de monotonía y concavidad de una función sin que les sean mostradas éstas?
c) ¿Para los alumnos es igual de relevante la primera derivada que la segunda?
d) ¿Cómo coordinan los alumnos diferentes características de una gráfica en un mismo intervalo?

Según los autores, el esquema de cálculo gráfico, tal como se podía esperar que lo desarrollaran los estudiantes que habían realizado el curso de cálculo con una variable, está caracterizado por una combinación de los niveles de desarrollo en la comprensión de los conceptos de derivada, de límite, de continuidad e ideas de precálculo que pudieran tener los estudiantes. La descomposición genética inicial del esquema de cálculo gráfico se utilizó para analizar tres de las 41 entrevistas realizadas. Los resultados de estos análisis se plasmaron en una nueva descomposición genética a partir de la cual se analizaron las 38 entrevistas restantes. Este último análisis mostró que los alumnos tenían dificultades para coordinar las propiedades de la primera y segunda derivada a través de los intervalos, para establecer conexiones entre dos gráficas cóncavas, para interpretar el límite infinito de la función derivada en $x = 0$, para relacionar la derivabilidad y la continuidad, etc. Por tanto, según los investigadores el esquema de "cálculo gráfico" requería la comprensión y coordinación de dos esquemas, el llamado "de las propiedades" de las funciones y el llamado "de intervalo" de dominio específico de éstas.

El esquema "de las propiedades" implicaba entender cómo los estudiantes coordinan las condiciones analíticas de una función (primera y segunda derivada, límites de la función y de su derivada y continuidad de la función) y las relacionan con una propiedad gráfica de ésta. El desarrollo del esquema "de intervalo" involucraba comprender la notación de los intervalos, la unión de intervalos contiguos y la coordinación de intervalos superpuestos. Los autores describieron los niveles Intra, Ínter y Trans de ambos esquemas por separado. A continuación, mediante las combinaciones duales correspondientes a los niveles de desarrollo de los esquemas "propiedad" e "intervalo", determinaron los tres niveles de desarrollo Intra, Ínter y Trans del esquema global de "cálculo gráfico". La utilización de este esquema global de "cálculo gráfico" y el análisis a través del desarrollo del esquema en los tres niveles permitió a los investigadores analizar y comprender el comportamiento de algunos estudiantes.

Posteriormente, este estudio fue ampliado por Cooley et al. (2003) con el objetivo de observar si el análisis desde la perspectiva dual del esquema -"propiedad" e "intervalo"- resultaba útil en otras situaciones. Así como para observar si los estudiantes eran capaces de "tematizar" el esquema de "cálculo gráfico".

El nuevo estudio se realizó a partir de los datos que proporcionaron las entrevistas realizadas a 27 estudiantes universitarios que habían seguido un curso de cálculo. En las entrevistas se les propusieron cuestiones sobre función, primera y segunda derivada, continuidad, límites y sus relaciones. Las cuestiones se presentaron en diferentes sistemas de representación. Resultó especialmente interesante, como indicador de la tematización del esquema de "cálculo gráfico", el análisis realizado a las respuestas sobre la construcción de la gráfica de una función a partir de determinadas características de su primera y segunda derivada. Sólo dos alumnos alcanzaron la tematización del esquema.

Los resultados mostraron que la comprensión de los estudiantes que participaron en esta investigación fue similar a la de los estudiantes que participaron en el estudio que realizaron los autores el año 2000 sobre "la comprensión de los conceptos de cálculo utilizados en la resolución de un problema atípico de cálculo gráfico". Los estudiantes tuvieron dificultades para establecer relaciones entre los distintos conceptos implicados. Su comprensión no era estable, pudiendo manifestar dificultades en un momento dado aún cuando no las hubiesen mostrado en sus respuestas iniciales. El esquema de "cálculo gráfico" fue una herramienta eficaz para estudiar la coordinación de los diferentes conceptos implicados en los problemas de cálculo gráfico en diferentes contextos de representación. No obstante, según los autores, el esquema de "cálculo gráfico" requiere de técnicas que ayuden a los alumnos a la construcción de este esquema y necesita del diseño de metodologías didácticas que permitan un adecuado desarrollo del esquema.

Por último, Sánchez-Matamoros (2004) y Sánchez-Matamoros et al. (2006) se centran en el desarrollo de la comprensión del concepto de Derivada en estudiantes de Bachillerato y primer curso de la Licenciatura de Matemáticas desde el desarrollo de un esquema a través de las fases Intra, Ínter y Trans.

En el este estudio de Sánchez-Matamoros et al. (2006) participaron un total de 150 estudiantes de 1° de Bachillerato (50), 2° de Bachillerato (50) y 1° de la Licenciatura de Matemáticas (50). Los participantes de cada uno de los cursos considerados respondieron a los cuestionarios escritos que habían sido expresamente diseñados para ellos. Se seleccionaron 69 de los alumnos participantes a los que se les realizó la entrevista sobre la noción de derivada, a fin de obtener mayor información sobre la resolución de los problemas propuestos. El análisis de la noción de derivada se realizó estudiando los elementos matemáticos y la relaciones que la conforman. Las relaciones se entendieron como *"coordinación entre operaciones"*, relaciones lógicas (conjunción lógica, contrarrecíproco y equivalencia lógica) que se establecen entre los elementos matemáticos cuando se resuelve un problema.

Los resultados obtenidos permitieron subrayar que había una construcción progresiva del esquema de derivada y que el desarrollo de éste no estaba necesariamente vinculado a conocer muchos elementos constitutivos del concepto de derivada sino al establecimiento de relaciones lógicas entre los elementos. Los estudiantes de 1° de Licenciatura de Matemáticas podían conocer más elementos matemáticos del concepto de derivada que los de Bachillerato. Sin embargo, un número importante de ellos sólo eran capaces de usar los elementos de manera aislada o de relacionarlos con un número limitado de éstos para obtener información relevante del problema que tenían que resolver. Los elementos matemáticos que mayoritariamente eran recordados hacían referencia a la primera derivada. La relación que presentó mayor dificultad a los estudiantes fue la equivalencia lógica. A la hora de establecer relaciones lógicas o de hacer uso de los elementos matemáticos necesarios en determinadas situaciones existía cierta influencia de los modos de representación. El tipo de relaciones lógicas que eran posibles establecer en cada momento fueron utilizadas como indicadores para describir el comportamiento de los estudiantes en cada nivel de desarrollo así como para el paso de un nivel al siguiente. Para los autores *"un estudiante pasa de un nivel de desarrollo del esquema a otro por la manera que realiza la síntesis*[3] *de los modos de representación"*.

Las investigaciones presentadas acreditan la potencialidad del marco teórico APOS. La asunción de este marco permite a los investigadores obtener información sobre las características de los significados de los conceptos investigados y sobre las características de la evolución de los mismos (desarrollo de la comprensión). Por otra parte, la descomposición genética de un concepto permite identificar los mecanismos y formas de conocer que presentan los estudiantes del desarrollo del esquema del

[3] *Síntesis entendida como una actividad mental del estudiante. "Ser capaces de generar información"*

concepto matemático. La identificación de los elementos matemáticos y el tipo de relaciones establecidas entre ellos permite determinar los diferentes niveles de desarrollo del esquema del concepto.

Tall (1999) señala que la teoría APOS presenta muchas aplicaciones en aritmética, álgebra y cálculo siendo de menor relevancia en el estudio del espacio y de la forma. Contreras y Font (2002) subrayan que la teoría APOS permite observar con claridad, en el desarrollo de un esquema, el papel de las transformaciones entre los distintos sistemas de representación, elementos fundamentales en la construcción del conocimiento matemático. No obstante, estos mismos autores indican que sería importante reflexionar sobre la conveniencia de trasladar al Pensamiento Matemático Avanzado las investigaciones de Piaget sobre la abstracción reflexiva realizadas con niños pequeños. Por su parte, Godino (2001) argumenta que el modelo teórico APOS se centra en el sujeto. Describe la construcción del conocimiento de un concepto matemático por parte del sujeto pero no da respuesta a las deficiencias de la comprensión lograda, clasifica a los individuos en niveles de compresión de los conceptos sin asignar un papel explícito a las situaciones problemáticas que motivan la acción del sujeto y tampoco es capaz de modelizar el lenguaje (simbólico, gráfico, etc.).

2.2.3. La comprensión de la divisibilidad en N desde la Teoría APOS

En el Capítulo 1 hemos revisado los estudios centrados en caracterizar la compresión de la divisibilidad. En este apartado completamos la revisión anterior con investigaciones sobre la comprensión de la divisibilidad que asumieron como marco teórico la teoría APOS.

Zazkis y Campbell (1996a) basaron su estudio en las entrevistas clínicas realizadas a 21 estudiantes para maestros de primaria sobre los conocimientos de divisibilidad y la estructura multiplicativa en el conjunto de los números naturales, tales como la factorización, descomposición en factores primos, el Teorema Fundamental de la Aritmética ó las reglas de divisibilidad por 2, 3, 5 y 9. Para ello formularon a los estudiantes preguntas de distintos tipos:

1) *Dado el número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$.
   a) ¿M es divisible por 7? Justifica.
   b) ¿M es divisible por 5, 2, 9, 63, 11, 15? Explica.

2) *¿391 es divisible por 23?, ¿391 es divisible por 46?*
3) *Dados los números 12358 y 12368. ¿Hay un número entre estos dos que sea divisible por 7? ¿Y por 12?*
4) *a) El número 15 tiene exactamente cuatro divisores. ¿Puedes hacer un listado de todos ellos? ¿Puedes pensar en algunos otros números que tengan exactamente cuatro divisores?*

   b) El número 45 tiene exactamente seis divisores. ¿Puedes hacer un listado de todos ellos? ¿Puedes pensar en varios números que tengan exactamente seis divisores?

Zazkis y Campbell (1996a) observaron que:

(a) un gran número de estudiantes discutieron de forma consistente la divisibilidad como una propiedad sin tener necesidad de realizar la división, pero la coordinación e inversión de dos o más procesos para construir un nuevo proceso resultó difícil para los participantes;

(b) la encapsulación de la divisibilidad involucraba la coordinación e inversión de ejemplos específicos de divisibilidad por números específicos. La encapsulación de la divisibilidad como un objeto tiene que empezar discerniendo entre la divisibilidad como una propiedad y la división como un procedimiento. La divisibilidad siempre puede determinarse realizando la división pero las reglas de divisibilidad dan la posibilidad de deducir la divisibilidad sin realizar la división y pueden ayudar a la comprensión y a la encapsulación de la divisibilidad por un número específico como un objeto;

(c) la divisibilidad se encapsula como un objeto antes que la indivisibilidad. La indivisibilidad requiere la comprensión conceptual de la unicidad de la descomposición en factores primos; y

(d) la tematización de la divisibilidad como un esquema requiere, para los autores, la construcción de conexiones con otras acciones, procesos y objetos que involucren a la multiplicación, la división, la factorización, la descomposición en factores primos, etc. La construcción de la conexión entre la divisibilidad y la descomposición en factores primos parece contribuir enormemente a la tematización de la divisibilidad como un esquema.

Zazkis y Campbell (1996a) señalaron que "*existen fuertes evidencias de que los estudiantes para profesor concebían la divisibilidad en términos de multiplicación y* *división. Es decir, por lo que se refiere a la división, a / b (a divide b) sí, y sólo sí, b: a = d, dónde d es un número natural; y por lo que se refiere a la multiplicación,* a / b *sí, y sólo sí, existe un número natural d tal que a x d = b. Parece que conexiones insuficientes entre estas dos definiciones son una fuente de discordia cognoscitiva para muchos de los participantes en este estudio. Un acercamiento pedagógico progresivo con respecto a esta relación inversa parecería ser muy viable, resaltaría la equivalencia de factores y divisores y, como consecuencia, la descomposición en factores primos*" (p.562). En este sentido, parece que la encapsulación de la "divisibilidad por n", donde n es un número natural, necesita de un conocimiento profundo de la relación inversa entre las operaciones de multiplicación y división.

Por su parte, Brown et al. (2002) analizaron cómo los estudiantes para maestro comprendían los conceptos de divisibilidad aplicando sus concepciones a situaciones problemáticas. La investigación se realizó desde la caracterización de la construcción del conocimiento y desde el desarrollo de los esquemas de conceptos matemáticos.

El estudio se llevó a cabo mediante entrevistas clínicas en la que participaron de forma voluntaria 10 estudiantes para maestros de primaria. Las entrevistas constaban de un protocolo con preguntas del siguiente estilo:

1) *Considere el siguiente listado de números:*
   1, 3, 6, 7, 8, 12, 15, 18, 24, 39, 42, 48, 69, 96, 2400, 2401, 2412,...
   a) Los números del listado que son divisores de 24 son:
   b) Los números del listado que son múltiplos de 24 son:
   c) Los números del listado que son divisibles por 24 son:
   d) Los números del listado por los que 24 es divisible son:
2) *Defina con sus palabras el significado de:*
   a) divisor de un número
   b) múltiplo de un número.
3) *Defina en sus propias palabras el significado de " M es divisible por N."*
4) *Dado el número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$.
   a) ¿M es divisible por 7? Justifique.
   b) ¿M es divisible por 5? ¿Por 2? ¿Por 9? ¿Por 63? ¿Por 11? ¿Por 15? Justifique.
   c) ¿$3^2 \times 5 \times 7^3$ *es un múltiplo de M? Justifique.*
   d) ¿$3^4 \times 5^5 \times 7^3 \times 13^{18}$ *es múltiplo de M? Justifique.*

5) *Obtenga el número más pequeño que es múltiplo de 72 y 378. Justifique.*
6) *Un científico empieza dos experimentos al mismo tiempo. En el primer experimento las mediciones tienen que tomarse cada 168 segundos mientras que para el segundo tienen que hacerse cada 108 segundos. ¿Después de cuántos segundos tiene el científico que realizar la medición en el mismo momento? Justifique.*
7) *Obtenga un par de números, más pequeños que 200, cuyo mínimo común múltiplo sea 200. Explique su respuesta. Encuentre otro par de números, distinto del primer par.*

Los objetivos de las cuestiones planteadas fueron (a) analizar la comprensión de las acepciones léxicas de la divisibilidad en general y su aplicación entre números con representación decimal (preguntas 2, 3 y 1); (b) observar hasta qué punto la representación factorial de los números influía en la comprensión de la estructura multiplicativa de los números naturales. Para conseguir este objetivo se hicieron las preguntas 4a y 4b (Zazkis y Campbell, 1996a) sobre los conceptos "ser divisible" entre números con representación factorial y decimal, y las preguntas 4c y 4d (diseñadas por Brown et al., 2002) sobre "múltiplo" entre números con representación factorial; (c) indagar las estrategias de obtención del mínimo común múltiplo, especialmente en situaciones reales (cuestiones 5 y 6) y (d) examinar en qué medida los estudiantes "invertían" los procesos de obtención del mínimo común múltiplo para obtener números con un mínimo común múltiplo predeterminado (ítem 7).

Del análisis de las respuestas ofrecidas por los estudiantes se desprende "*la fuerte tendencia a asociar los conceptos de divisor con la acción de dividir*" (p.51) así como la asociación del concepto de múltiplo con la operación de multiplicar. Brown et al. (2002) subrayan que la comprensión de los conceptos de la estructura multiplicativa requiere la comprensión de la descomposición única de los números naturales como producto de factores primos. Esto contribuirá a que la obtención de los divisores y múltiplos de un número natural no se desarrolle únicamente procedimentalmente (acciones para obtener la representación decimal de los números y comprobación de resultados a través de la multiplicación o división). Para determinar la divisibilidad de un número por otros dados, sin necesidad de obtener la representación decimal del número, sugirieron obtener otros números a través de la multiplicación y la descomposición factorial de un número natural, aplicando las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación. En semejantes términos, los autores plantean la comprensión del concepto de mínimo común múltiplo. La comprensión del concepto de múltiplo y de sus propiedades debe permitir a los alumnos realizar inferencias sobre la estructura de la descomposición factorial y del mínimo común múltiplo. Las distintas formas alternativas de obtención del mínimo común múltiplo de dos números deben posibilitar que los alumnos comprendan el procedimiento de la descomposición factorial como generador del mínimo común múltiplo de esos dos números. La estructura del esquema de Divisibilidad para Brown et al. (2002) requiere la comprensión de cómo se construyen los conceptos fundamentales y cómo se relacionan para formar la estructura coherente y subyacente de un esquema. Para los autores el esquema de la estructura multiplicativa *"podría incluir los esquemas para las operaciones aritméticas, los esquemas para sus propiedades y un esquema para la factorización de números naturales como producto único de factores primos."* (Brown et al., 2002, p.76).

La coordinación de la teoría APOS y de la tríada de niveles utilizada en esta investigación facilitó el análisis de los datos, a la vez que permitió a los investigadores realizar diferentes sugerencias de carácter pedagógico tales como (a) la necesidad de enfatizar el papel prioritario de la operación de multiplicar sobre el de la operación de dividir al introducir los conceptos de divisibilidad; (b) el papel fundamental de la relación inversa existente entre la multiplicación y la división en la comprensión de la divisibilidad como proceso; (c) la necesidad de establecer la equivalencia lógica de las acepciones " *a es divisible por b* "; " *a es un múltiplo de b* "; " *b es un factor de a* ", y *"b es un divisor de a"* al considerar que éstas forman parte de la concepción de la idea de divisibilidad como un proceso.

Ferrari (2002), por su parte, estudió la comprensión de la divisibilidad desde el marco teórico APOS y desde una aproximación semiótica entendida como *"la habilidad para interpretar y tratar las expresiones simbólicas y las relaciones que aparecen en las tareas matemáticas y en los enunciados"* (p.101), asumida como instrumento para analizar y descubrir las dificultades que ocasiona un dominio insuficiente del lenguaje.

En este estudio participaron 39 estudiantes de primer curso de Informática. Los datos se obtuvieron a partir de las respuestas dadas a un cuestionario, que se pasó después de que los alumnos hubieran recibido un curso de introducción al álgebra, y de las entrevistas realizadas a la mayoría de los participantes. Las preguntas que se realizaron en la entrevista presentaron características similares a las utilizadas por Zazkis y Campbell (1996a) en su estudio. Por ejemplo, las preguntas que se exponen a continuación (p.109):

Dado el número $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$.Conteste a las siguientes preguntas y justifique sus respuestas.

a) ¿M es divisible por 63?

b) ¿M es divisible por18?

c) ¿$M + 5$ es divisible por10?

d) ¿Existe un número entero x tal que $M \leq x \leq M + 10$ y 8 es divisor de x?

En los dos primeros ítems se esperaba que los estudiantes relacionaran la divisibilidad con la descomposición factorial de un número. Debían expresar 63 ó 18 en su descomposición factorial y discutir la divisibilidad de M por estos números buscando sus factores en la expresión de M. Esta actuación podría suponer la tematización de "ser divisible" en un objeto. La resolución de este ítem no implicaba ningún grado de aproximación semiótica. En la cuestión c) se esperaba que los alumnos fueran capaces de interpretar y trabajar con la expresión M + 5. Este ítem para su resolución necesitaba de la coordinación de acciones y procesos. Desde la perspectiva semiótica la representación de M + 5 debía interpretarse usando la información sobre M. De la cuarta cuestión se esperaba que el estudiante fuese capaz de construir un elemento con unas determinadas características. Para esta construcción el estudiante necesitaba ser consciente de que el número existe y que en consecuencia puede determinarse o construirse.

El análisis de los resultados desde la perspectiva semiótica mostró que algunos estudiantes tenían un pobre dominio del lenguaje. Esta deficiencia lingüística fue un obstáculo para la interiorización y tratamiento de las operaciones elementales así como para las interpretaciones simbólicas que formaban parte de las tareas. Por ejemplo, algunos estudiantes contestaron que M + 5 no era divisible por 10 al no ser 2 un factor de M + 5. Otros realizaron operaciones incorrectas. Desde la teoría APOS estas respuestas evidenciaron que la comprensión de la divisibilidad y de la descomposición factorial que mostraban estos alumnos era acción. Desde la perspectiva semiótica podría significar que estos estudiantes no comprendían la distinción entre un número y sus representaciones. Igualmente desde el análisis realizado a partir de la teoría APOS se observó que la división euclídea y la simplificación de las descomposiciones factoriales se tematizaban como procedimientos y no como objetos al carecer los alumnos de la necesaria comprensión conceptual.

En las tres investigaciones presentadas hay consideraciones que deberemos tener en cuenta en nuestra investigación:

- Los conceptos matemáticos de divisibilidad objeto de investigación y los modos de representación utilizados.
- Las características de la comprensión de los conceptos de divisibilidad utilizados.

En relación a los elementos matemáticos que han sido objeto de investigación, Zazkis y Campbell (1996a) y Ferrari (2002) estudiaron los conceptos de múltiplo, divisor, factores primos, descomposición factorial, Teorema Fundamental de la Aritmética y reglas de divisibilidad por 2, 3, 5 y 9. Junto con estos conceptos Brown et al. (2002) estudió el concepto de mínimo común múltiplo. Los modos de representación que utilizaron para analizar la influencia que estos ejercían sobre la construcción de los significados por parte de los estudiantes fueron el decimal y el factorial. Ferrari (2002) también utilizó el modo de representación algebraico.

Respecto a las características de la comprensión de los conceptos de divisibilidad estudiados en todas estas investigaciones se subraya que la comprensión de los conceptos de divisibilidad requiere la comprensión de la descomposición única de los números naturales como producto de factores primos y la conexión entre los modos de representación decimal y factorial de los números naturales. Zazkis y Campbell (1996a) señalan la dificultad que manifiestan los estudiantes en la coordinación e inversión de los procesos de divisibilidad. Para estos autores el concepto de divisibilidad se encapsula como un objeto antes que el concepto de indivisibilidad. La indivisibilidad requiere de la comprensión conceptual de la unicidad de la descomposición en factores primos de los números. Según estos autores la tematización de divisibilidad demanda realizar conexiones entre los divisores (factores) y la representación decimal de los números naturales, resultando fundamental para la encapsulación de la divisibilidad como un objeto la diferenciación entre la divisibilidad como una propiedad y la división como un procedimiento. De igual modo Brown et al. (2002) y Ferrari (2002) destacan la importancia de la representación factorial y del Teorema Fundamental de la Aritmética en la comprensión de los conceptos del esquema de Divisibilidad.

Entre los investigadores también existen discrepancias en cuanto a las características de la comprensión de los conceptos de divisibilidad estudiados. Zazkis y Campbell (1996a) señalan la importancia de las operaciones de multiplicar y de dividir para la tematización de la divisibilidad. Brown et al. (2002) por su parte priorizan la operación de multiplicar sobre la de dividir al introducir los conceptos de divisibilidad, destacando el papel fundamental de la relación inversa existente entre la multiplicación y la división en la comprensión de la divisibilidad como proceso.

Desde estas orientaciones nuestra investigación se va a centrar en el estudio de la comprensión por parte de los estudiantes de secundaria de los conceptos de divisibilidad tratados en las anteriores investigaciones junto con el concepto de máximo común divisor, las relaciones entre los mismos y los modos de representación (decimal y factorial), atendiendo a las formas de conocer que manifiestan los alumnos y al nivel de desarrollo del esquema de Divisibilidad.

2.3. Objetivos de la Investigación

Los objetivos planteados en esta investigación van dirigidos a profundizar en la comprensión de los alumnos de Educación Secundaria del concepto de divisibilidad en el conjunto de los números naturales.

Así, los objetivos de la investigación quedan concretados en los siguientes puntos:

1. *Estudiar las formas de conocer la divisibilidad en el conjunto de los números naturales y los mecanismos que utilizan los alumnos de 12 a 17 años, usando el marco teórico constructivista APOS.*

2. *Caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de divisibilidad en el conjunto de los números naturales en alumnos de 12 a 17 años.*

CAPÍTULO 3

Capítulo 3. Diseño de la Investigación

En este capítulo se presenta el diseño y desarrollo de la investigación llevada a cabo. En primer lugar, mostramos cómo se diseñaron, se aplicaron y analizaron los instrumentos de recogida de datos del estudio piloto con el objetivo de construir los instrumentos de recogida de datos definitivos. El diseño correccional (no hay manipulación intencional de las variables) del cuestionario piloto nos ha permitido ajustar todos los ítems del cuestionario a las características correlacionales básicas: índice de dificultad de los ítems, congruencia de cada uno de éstos con la prueba, conveniencia o no de descartar algunos de ellos, grado de covarianza de los ítems entre sí, validez del contenido del cuestionario, análisis de la coincidencia o no entre las hipótesis teóricas y los resultados obtenidos y análisis factorial.

En segundo lugar, analizamos las características de los participantes en la investigación, el por qué de los instrumentos de recogida de datos definitivos (cuestionario y entrevista) y, en último lugar, presentaremos el proceso de análisis de los datos.

3.1. Diseño, aplicación y análisis cuantitativo del cuestionario piloto

En este apartado describiremos en primer lugar las características de los participantes en la prueba piloto. Después presentaremos cómo se identificaron y seleccionaron los contenidos del cuestionario piloto. Concluimos el apartado con la aplicación, análisis cuantitativo y resultados del cuestionario piloto.

3.1.1. Sujetos.

Los participantes en el cuestionario piloto fueron 94 alumnos de 1º de ESO, 4º de ESO y 1º de Bachillerato. De los 94 alumnos, 32 correspondían a dos grupos de 1º de ESO, 31 a dos grupos de 4º de ESO y los 31 restantes a dos grupos de 1º de Bachillerato. Todos los alumnos estaban cursando, en los momentos de la realización de la prueba, la asignatura de Matemáticas en sus distintas opciones.

La muestra elegida para realizar el cuestionario piloto es sesgada, en tanto en cuanto no se ha efectuado una elección aleatoria de los centros por la necesaria disponibilidad del investigador para pasar el cuestionario. No obstante, su representatividad está garantizada pues se escogieron alumnos de las diversas opciones de Matemáticas que se imparten en los niveles de 4º de ESO y 1º de Bachillerato, y por el número y tipo de alumnado seleccionado, en unos casos eligiendo todos los alumnos del centro que se encontraban en un nivel determinado, y en los que no, se aseguraba que participaran más del 50 %. La muestra elegida, al tratarse de grupos ya formados, fue disponible e intencional (Cardona, 2002).

3.1.2. Identificación de los contenidos del cuestionario piloto.

Para identificar los contenidos matemáticos que debían formar parte de la prueba piloto se analizaron, en primer lugar, todos los aspectos curriculares referentes a divisibilidad en los números naturales del currículo oficial de la enseñanza secundaria en la Comunidad Valenciana. En el currículo de Bachillerato no aparecen contenidos de divisibilidad en N, y en el currículo de ESO los contenidos de divisibilidad, escasamente desarrollados, se reseñan en el bloque de Aritmética y Álgebra desde los epígrafes "*Divisibilidad*" y "*Relación de divisibilidad. Máximo común denominador y mínimo común múltiplo de dos números naturales*" situados en primer curso y segundo curso de ESO, respectivamente. En segundo lugar, dada la importancia que se da al libro de texto como recurso didáctico en la enseñanza (Cobo y Batanero, 2004), se seleccionaron y analizaron los desarrollos curriculares que sobre divisibilidad hacían 10 editoriales. Los libros de 1º de ESO analizados corresponden tanto a editoriales de gran difusión como de menor difusión, una reseña de este análisis ha sido presentado en el Capítulo 1. Del análisis realizado, que presentamos en la Tabla 3.1, obtuvimos los contenidos sobre divisibilidad cuya comprensión por parte de los alumnos participantes podría ser objeto de análisis en nuestra investigación:

- Múltiplos y divisores de un número.
- Criterios de divisibilidad por 2, por 3, por 5 y por 9.
- Números primos y compuestos.
- Factorización de un número.
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Contenidos sobre divisibilidad en libros de texto correspondientes a 1º de Enseñanza Secundaria Obligatoria de la Comunidad Valenciana										
	EDITORIAL									
	Mc Graw Hill	Santillana	Bruño	SM	Anaya	Oxford	Almadraba	Ecir	Vicens Vives	Marfil
CONTENIDOS	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Múltiplos de un número natural	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Divisores de un número natural	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Propiedades de los múltiplos y divisores		x							x	
Criterios de divisibilidad										
* Por 2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
* Por 3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
* Por 4	x			x						
* Por 5	x	x	x	x	x	x	x			x
* Por 6	x									
* Por 7	x									
* Por 8	x									
* Por 9	x		x	x		x		x	x	
* Por 10	x			x	x	x			x	
* Por 11	x			x		x	x	x	x	
* Por 25	x			x				x		
• Por 100 y/o 1000, etc				x		x				
Números primos y compuestos	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Construcción de tabla de números primos	x						x	x	x	
Factorización de un número	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo de todos los divisores de un número		x		x	x	x	x	x	x	
Máximo común divisor: m.c.d.	x	x	x	x	x	x	x	x		x
Mínimo común múltiplo: m.c.m.	x	x	x	x	x	x	x	x		x

Tabla 3.1. Desarrollo Curricular de la Divisibilidad en N

3.1.3. Elaboración del cuestionario piloto.

Para la elaboración del cuestionario piloto se confeccionó una colección de 100 problemas tomando como referentes (a) el desarrollo curricular identificado en los libros de texto, (b) las actividades planteadas en los mismos, (c) la colección de problemas Olímpicos de la Sociedad de Profesores de Matemáticas de la Comunidad Valenciana, (d) los Cuadernillos de Materiales Curriculares de Matemáticas de la Conselleria d'Educació y (e) los problemas utilizados en las investigaciones sobre divisibilidad de Zazkis y Campbell (1996a) y de Brown et al. (2002).

Los problemas seleccionados se clasificaron, en función de los contenidos a los que hacían referencia, en cinco grandes bloques: Múltiplos y divisores; Criterios de divisibilidad; Números primos y compuestos; Descomposición factorial; Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Los problemas seleccionados podían aparecer en más de un bloque.

Para elaborar el cuestionario se consideró qué problemas y por qué debían ser seleccionados, atendiendo a:

- qué dificultades podrían plantear en los distintos niveles, y
- el número máximo de cuestiones que debía contener para que pudieran ser contestadas en el transcurso de una clase habitual de un Instituto.

La selección se llevó a cabo entre el autor de la investigación y diversos miembros del Departamento de Innovación y Formación Didáctica de la Universidad de Alicante. Una vez elaborado un primer borrador del cuestionario piloto, éste fue analizado por tres profesores de Enseñanza Secundaria. Tras los debates e intervenciones, se convino elaborar una misma prueba para los tres grados de alumnos participantes.

En un principio se seleccionaron 10 problemas con varios ítems. El total de ítems del cuestionario fue 46. Para aquellos alumnos que contestaran las 10 cuestiones con suficiente tiempo se propusieron 4 problemas de reserva. Fueron muy pocos alumnos los que resolvieron más de 10 problemas.

El formato de presentación del cuestionario en los distintos cursos fue diferente si bien, como ya hemos indicado, las cuestiones planteadas fueron las mismas. En la etapa de Educación Secundaria Obligatoria se presentó la prueba con espacios entre las cuestiones donde los alumnos debían contestar y justificar sus respuestas. En Bachillerato las cuestiones se enunciaron sin espacios en blanco. Los alumnos de este curso debían contestar a las distintas cuestiones en hojas aparte. En todos los niveles se permitió el uso de calculadora científica. En cada una de las cuestiones se pedía información sobre (a) el uso o no de calculadora por parte del alumno, (b) el grado de dificultad de la cuestión percibido por el alumno. La valoración la debían hacer de 1 (muy fácil) a 5 (muy difícil). Las pruebas con los formatos correspondientes pueden consultarse en el Anexo II.

3.1.4. Aplicación y análisis cuantitativo del cuestionario piloto.

Del total de alumnos de Enseñanza Secundaria que habían servido de base para el análisis de la prueba piloto se descartaron, dado su nivel de competencia y dificultades con las matemáticas, alumnos de 1º de ESO y 4º de ESO previa consulta con los servicios de orientación del Instituto, quedando la muestra definitiva conformada por 94 alumnos de los tres cursos estudiados. La prueba duró 55 minutos. Se realizó en horario escolar durante los meses de marzo y de abril de 2003. Los profesores de los grupos participantes conocieron de antemano la hora y el proceso de realización de las pruebas. Los alumnos no fueron informados sobre los contenidos de éstas.

Para realizar el análisis cuantitativo del cuestionario se acordó una valoración dicotómica, 0 ó 1, de las respuestas dadas por los estudiantes:

a) Valoración 0: Respuesta incorrecta. El alumno da un resultado incorrecto o no contesta al ítem del cuestionario.

b) Valoración 1: Respuesta correcta. El alumno responde desde alguna de las siguientes peculiaridades:

- utiliza un procedimiento adecuado o parcialmente adecuado que produce una respuesta correcta,
- opera y alcanza la respuesta correcta,
- da una justificación y resultado correcto,
- obtiene un resultado correcto sin justificar,
- utiliza un procedimiento adecuado, justifica la respuesta o da respuestas correctas en función de lo que "esperamos" como profesores.

La toma de datos se realizó mediante plantillas. Una para cada uno de los 46 ítems del cuestionario y una para cada uno de los grupos. En estas plantillas se recogieron los valores correspondientes a las siguientes variables: el código de identificación del alumno- una letra que representa al grupo de pertenencia y un número aleatorio entre los posibles de la clase-; el grado de dificultad atribuido a la cuestión por el estudiante; la utilización o no de calculadora; la fecha de realización de la prueba; la valoración otorgada y una línea para efectuar si se consideraba oportuno cualquier comentario sobre la respuesta dada.

Para seleccionar las cuestiones que debían formar parte del cuestionario definitivo y con el objetivo de que todos los ítems del cuestionario se ajustarán a las características correlaciónales básicas (García y Pérez, 1989; Álvaro, 1993; Castejón, 1997; Muñiz, 2001; García et al., 2002; Cobo, 2003), se realizó un estudio psicométrico del cuestionario piloto en el que se analizaron:

1. Índice de dificultad.
2. Homogeneidad.
3. Índice de discriminación (correlación biserial puntual).
4. Coeficiente de fiabilidad (Alpha de Cronbach).
5. Validez.
6. Análisis factorial.
7. Generalizabilidad.

El análisis de los datos estadísticos del cuestionario piloto fue realizado con el programa informático SPSS 11.5 y completado con la hoja de cálculo Microsoft Excel. Los datos obtenidos se comentan a continuación:

1. Índice de Dificultad.

Considerando el índice de dificultad como "*el cociente entre el número de respuestas correctas del ítem, A, y el número de sujetos que han contestado, N*" (García y Pérez, 1989, p.461), podemos establecer, dado el carácter dicotómico otorgado a cada una de las respuestas, que el índice de dificultad de los ítems "es equivalente a la media aritmética de cada uno de éstos".

El valor más alto de las medias de los ítems es de 0,8298. Este valor corresponde al ítem 4a - "*¿Es* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$, *divisible por 7?*"-. Por su parte, el valor menor es de 0,1809 y en este caso es el del ítem 4d -"*¿Es* $3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ *divisible por M?*"- (véase Tabla III 1.1 del Anexo III). Por tanto, el mayor rango de variación de las medias entre dos ítems corresponde a dos ítems de la pregunta 4. Buena parte de los alumnos utilizaron la calculadora científica. En consecuencia, los cálculos de la cuestión 4d, dada la magnitud de los números implicados, presentaron dificultades. La prueba podría calificarse de dificultad media en función de los valores obtenidos. La media global de la prueba se situó en 0,5204 con varianza de esas medias de 0,0374 y desviación típica de 0,1934 (véase Tabla III.1.3 del Anexo III).

La Tabla 3.2 muestra las medias globales de todo el grupo y de los 46 ítems, en cada uno de los cursos estudiados. Se observa que los estudiantes de 1º de Bachillerato y 4º de ESO contestaron correctamente más del 55 % de los ítems. En 1º de ESO sólo se alcanza un 35%.

Nivel	ESO 1	ESO 4	BACH 1	MUESTRA GLOBAL
Índice de Dificultad	0,3533	0,5596	0,6529	0,5204

Tabla 3.2. Índice de Dificultad en cada uno de los cursos estudiados

La categorización establecida por García y Pérez (1989) para el índice de dificultad - medias globales por grupo- podemos observar en la Tabla 3.3. cómo se categorizan los 46 ítems considerados en el total del cuestionario para cada uno de los cursos y en la muestra global:

Tipo de prueba	Valores que los limitan	Grupo según resultado
Muy difícil	< 0,25	----------------
Difícil	0,25 a 0,44	ESO 1 (0,3533)
Dificultad media	0,45 a 0,54	MUESTRA GLOBAL (0,5204)
Fácil	0,55 a 0,74	ESO 4 (0,5596) BACHILLERATO 1 (0,6529)
Muy fácil	>0,74	----------------

Tabla 3.3. Categorización de los Índices de Dificultad

Según los datos presentados el cuestionario piloto se considera aceptable dado que se obtiene un resultado global del índice de dificultad de 0,5204. En función del índice de dificultad no es necesario variar el planteamiento inicial de los ítems propuestos en la prueba definitiva.

2. **Homogeneidad.**

El índice de homogeneidad[1], es decir, "*la correlación pregunta-puntuación total del cuestionario (coeficiente "r" de Pearson)*" (Molina, 1999, p.104) alcanza su máximo valor, 0,6084, para el ítem 4b2- "*¿Es* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$, *divisible por 2?*"-, mientras que el valor mínimo, 0,0479, se obtiene para el ítem 1b2- "*Dados los números: 0, 2, 4, 6, 8, 10 y 16. ¿Alguno es divisor de 48? ¿Cuál? Justifica tu respuesta*". El estudio completo de la homogeneidad de los ítems se puede ver en la Tabla III.1.4 del Anexo III.

Son 8 los ítems (17,4 %) que presentan una correlación superior a 0,5; entre 0,40 y 0,50 tenemos 17 ítems (37 %); 15 los situados entre 0,20 y 0,40 (32,6 %). Por último, 6 ítems (13%) están por debajo de 0,20 y podrían ser eliminados de la prueba definitiva si así lo confirma el análisis psicométrico global. Estos ítems son:

1b2 -"*Dados los números: 0, 2, 4, 6, 8, 10 y 16. ¿Alguno es divisor de 48? ¿Cuál? Justifica tu respuesta*"-;
1c1- "*Considere la siguiente colección de números: 1, 3, 6, 8, 15, 24, 39, 42, 48, 69, 2400, 2412. Los números del listado que son múltiplos de 24 son...*"-;
3b –"*¿Por qué cifras hay que sustituir las letras **a** y **b**, para que el número **19a9b** sea divisible por 3? Justifica tu respuesta*"-;
4c – "*¿*$3^4 \times 5 \times 7^3$ *es un múltiplo de* $M = 3^3 x 5^2 x 7$*? Explica tu respuesta*"-;
7c –"*¿Qué quiere decir que m.c.d (60,50) =10?*"-, y
7d –"*¿Qué quiere decir que m.c.m (60,50) = 300?*".

3. **Índice de Discriminación (correlación biserial puntual).**

El índice de discriminación de un ítem permite "*diferenciar claramente a los sujetos que poseen en mayor grado el rasgo o característica que se está midiendo de los que lo poseen en menor grado*" (Álvaro, 1993; p. 23). Los individuos que poseen un nivel alto de desarrollo del rasgo medido alcanzan puntuaciones más altas que aquellos que lo

[1] Entendido por otros autores como *"la congruencia de cada ítem con toda la prueba"* o *"la correlación entre la puntuación de un ítem y la suma de puntuaciones de los ítems restantes"* (García et al. 2002)

tienen bajo. Una forma de medir el índice de discriminación es el "coeficiente de correlación biserial puntual" basado en la comparación de medias entre los sujetos que responden correctamente el ítem y los que lo hacen incorrectamente (Álvaro, 1993). En el análisis del cuestionario piloto hemos obtenido un valor máximo de la correlación biserial puntual de 0,7451 correspondiente al ítem **8b2** - "*Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm, 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud. ¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado*"-. El valor inferior de este coeficiente es de 0,0856 y es el del ítem **4c** - "*Consideremos el número:* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$, *¿*$3^4 \times 5 \times 7^3$ *es un múltiplo de M? Explica tu respuesta*" --. La relación de valores de los índices de discriminación de cada uno de los ítems la podemos encontrar en la Tabla III.1.5 del Anexo III.

La regla de Ebel y Frisbie (1986)[2] sobre interpretación de los valores del índice de discriminación nos indica que 28 ítems del cuestionario piloto (60'9 %) se pueden considerar como excelentes, como buenos 6 ítems (13 %) y como regulares 5 ítems (10,9 %). Los ítems **1b2, 1c1, 3a3, 3b, 4c, 7c y 7d**, que suponen un 15,2% del total de ítems del cuestionario, deberían ser descartados por tener índices de discriminación menores que 0,20. Todos estos ítems excepto el ítem **3a3** - "*Indica, justificando tu respuesta, el valor de **b**, para que el número **2b45** sea divisible por 5*"- ya fueron discriminados por el índice de homogeneidad.

4. Índice de Fiabilidad.

Se dice que un test es fiable "*cuando aplicado a una misma muestra diversas veces se obtienen resultados idénticos*" (Álvaro, 1993). Cobo (2003) define la fiabilidad como "*la extensión por la que en ensayos repetidos una prueba o test produce los mismos resultados*". La fiabilidad hace referencia a la consistencia de la medida. Para analizar la **fiabilidad** de nuestro cuestionario piloto hemos calculado el índice Alpha de Cronbach. Para García et al. (2002) el índice Alpha de Cronbach es un índice de consistencia interna. Se relaciona con el grado en que los ítems covarían entre sí. A través de este

[2] Regla de Ebel y Frisbie (1986)

Valor del índice de discriminación	Calidad ítem	Recomendación
$p \geq 0,40$	Excelente	Mantener
$0,30 \leq p < 0,40$	Bueno	Poca o ninguna revisión
$0,20 \leq p < 0,30$	Regular	Posibilidad de revisión
$p < 0,20$	Malo	Descartar

índice pretendemos analizar cada uno de los ítems con respecto al total del cuestionario piloto.

El coeficiente de consistencia interna Alpha de Cronbach es de 0,8999, lo que indica que la fiabilidad del cuestionario piloto es buena, es decir, que el grado o precisión con que el cuestionario piloto mide la competencia del alumno en divisibilidad es alto. Este cuestionario mediría con mayor precisión la competencia del alumno en divisibilidad si eliminásemos cualquiera de los ítems con índice de homogeneidad inferior a 0,20. La eliminación de cualquiera de estos ítems conllevaría un aumento del índice Alpha de Cronbach, éste pasaría de 0,8999 a 0,90, como podemos observar en los datos que se ofrecen en la Tabla III.1.6 del Anexo III.

5. Validez.

La validez se refiere a "*la correlación del test con otro test o con cualquier otro criterio externo*" (Álvaro, 1993, p.37). El criterio externo indica si el test es válido para los fines propuestos, es decir, si cumple con los fines para los que fue creado. Un test puede ser muy fiable pero no válido en tanto en cuanto no lo sea para la meta planteada. No es igual saber que los ítems del test miden lo mismo, que saber qué es lo que está midiendo. Respecto a la validez consideraremos dos tipos:

a. de contenido.
b. de constructo.

a. Validez de contenido.

Creemos que el cuestionario piloto es representativo del rasgo que se intenta medir dado que:

- los elementos matemáticos implicados cubren suficientemente el currículo de los niveles escolares objeto de estudio tal como hemos comentado y justificado en el apartado de identificación de los elementos de la prueba (Pérez y García, 1989, p. 444; Muñiz, 2001, p.151; Álvaro, 1993, p.38).
- en el proceso de selección, valoración y revisión lógica del cuestionario piloto ha participado el investigador, investigadores de Didáctica de la Matemática y tres profesores de Enseñanza Secundaria, uno con docencia en primer ciclo y dos con docencia en toda la etapa (Molina, 1999, p.95; Castejón, 1997, p.317).

b. **Validez de constructo.**

A través de la validez de constructo tratamos de analizar la coincidencia entre las hipótesis teóricas y los resultados obtenidos en la prueba. Utilizaremos una técnica de reducción de dimensionalidad de los datos, el **análisis factorial**. El objetivo de esta técnica es encontrar grupos homogéneos a través de un nutrido grupo de variables, es decir, encontrar el número mínimo de factores que pueda explicar el máximo de información contenida en los datos (Álvaro, 1993; Muñiz, 2001).

Para alcanzar el objetivo de este procedimiento- obtener las dimensiones comunes de forma que el número de dimensiones globales sea menor que el número de variables (García et al., 2002)- nos hemos visto obligados a *comprobar si es oportuno aplicar el análisis factorial*, es decir, si la correlación entre las variables es suficientemente grande para que sea justificable la factorización de la matriz de los coeficientes de correlación.

Los resultados obtenidos superan los criterios de significación estadística dado que la medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin es igual a 0,713 y la prueba de esfericidad de Bartlett presenta un Chi-cuadrado aproximado de 3321,435 con 1035 grados de libertad y una significación $p < 0,001$.

También ha sido necesario obtener *la matriz factorial* por el método de las *componentes principales* y la *comunalidad para cada variable original*. Las Comunalidades presentan coeficientes positivos. Por tanto, pensamos que las variables miden elementos en común. Más del 50 % de la variabilidad en cada uno de los ítems es explicada en todos los casos por todos los factores comunes. Los factores resultantes fueron 13 y explican el 78,17 % de la varianza total.

El factor 1 explica aproximadamente el 21 % de la varianza total mientras que el factor 2 lo hace en torno al 10%, el factor 3 un 9% y el resto de factores explican cada uno entre el 2 % y el 6 % de la varianza total. Para facilitar la interpretación de los factores retenidos se han rotado los ejes por el método Varimax, obteniéndose la matriz de componentes rotados que se adjunta en la Tabla 3.4.

	Componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ítem1A1			,901										
Ítem1A2			,943										
Ítem1A3			,941										
Ítem1A4			,873										
Ítem1B1												,869	
Ítem1B2													,870
Ítem1C1							,761						
Ítem1C2							,740						
Ítem1C3							,512	,307					
Ítem1C4							,657						
Ítem2						,589							
Ítem3A1				,809									
Ítem3A2				,882									
Ítem3A3				,879									
Ítem3A4				,835									
Ítem3B				,430								,407	-,362
Ítem4A		,653											
Ítem4B1		,890											
Ítem4B2		,848											
Ítem4B3		,857											
Ítem4B4		,866											
Ítem4B5		,812											
Ítem4C		,307				-,511		,338					
Ítem4D					,399	,357		,310					
Ítem5A					,826								
Ítem5B					,885								
Ítem5C					,798								
Ítem5D					,489				,363				
Ítem6											,796		
Ítem7A										,844			
Ítem7B										,774			
Ítem7C									,783				
Ítem7D									,805				
Ítem7E					,393						,587		
Ítem7F			,340		,376						,436		
Ítem8A						,627							
Ítem8B1						,717							
Ítem8B2						,741							
Ítem9A	,533							,698					
Ítem9B	,470							,681					
Ítem9C			,316			,301		,674					
Ítem10A	,924												
Ítem10B	,926												
Ítem10C	,886												
Ítem10D	,918												
Ítem10E	,901												

Método de extracción: Análisis de componentes principales. Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser. a La rotación ha convergido en 19 iteraciones. Presenta mayor saturación en otro factor.

Tabla 3.4. Matriz de componentes rotados. Cuestionario piloto

Dado que los tres primeros factores explican conjuntamente un 40 % de la varianza total y los 10 restantes sólo explican el 38 %, únicamente analizaremos y nombraremos a los tres primeros factores. Tendremos en cuenta exclusivamente los ítems de mayor peso que los configuran. Los ítems que saturan a más de un factor sólo los hemos considerado en aquellos factores donde presentaban mayor saturación. Tampoco se han tenido en cuenta los ítems discriminados por el índice de homogeneidad.

Primer Factor.

Este factor explica aproximadamente el 21 % de la varianza total. En él saturan, con un peso aproximado de 0,9, todos los ítems de la cuestión 10:

10a – "*Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta: El número* $K = 2^2 \text{ x } 3 \text{ x } 5 \text{ x } 11 + 3$ *es divisible por 5*"-.

10b –"*Divisible por 2 y por 4*" -.

10c – "*Divisible por 3*"-.

10d –"*Divisible por 6*"-.

10e – "*Divisible por 15*"-.

Para la resolución de los ítems anteriores, gran parte de los alumnos ha necesitado obtener la representación decimal del número K, recurriendo a la calculadora para realizar esta conversión. Sólo algunos alumnos discuten la divisibilidad o indivisibilidad sin realizar una conversión entre las dos representaciones.

A este factor lo hemos nombrado:

"*Comprensión del concepto ser divisible y aplicación de la propiedad si p divide a q y p divide a k entonces p divide a q+k*".

Segundo Factor.

Este factor explica aproximadamente el 10% de la varianza total y lo saturan con pesos superiores a 0,65 los ítems:

4a – "*Consideremos el número:* $M = 3^3 \text{ x } 5^2 \text{ x } 7$ *a) ¿M es divisible por 7? Explica tu respuesta*".

4b1- "*¿M es divisible por 5? Explica tu respuesta*"-.

4b2 – "*¿M es divisible por 2? Explica tu respuesta*"-.

4b3 – "*¿M es divisible por 9? Explica tu respuesta*".

4b4 – "*¿M es divisible por 11? Explica tu respuesta*"-.

4b5 – "*¿M es divisible por 15? Explica tu respuesta*"-.

Estos ítems provienen del trabajo de Zazkis y Campbell (1996a). Los estudiantes presentaron una fuerte tendencia a discutir la divisibilidad del número M a partir de su representación decimal al igual que lo hicieran en los ítems que saturan el primer factor. En este caso el tamaño de los exponentes permitió, en gran parte de los casos, la operatividad con la calculadora.

Este factor lo hemos denominado como:

"*Comprensión del concepto de ser divisible de un número natural expresado mediante factores y exponentes pequeños*"

Tercer Factor.

Este factor explica el 8'7 % de la varianza y lo forman los ítems:

1a1- "*Completa con las palabras: **divisor ó múltiplo**. Razona tu respuesta.*

8 es _____________ de 2".

1a2 – "*4 es _____________ de 16*" .

1a3 – "*21 es _____________ de 7*"-.

1a4 – "*25 es _____________ de 625*"-.

Todos estos ítems tienen un peso cercano o superior a 0,9. Una de las características observadas en los ítems que determinan este factor es que mayoritariamente los estudiantes asocian el concepto divisor con la operación de dividir y el concepto de múltiplo con la operación de multiplicar desde un carácter operativo.

Este tercer factor lo hemos designado

"*Comprensión de los conceptos de divisor y múltiplo y la relación existente entre ellos*"

Podemos observar que los factores que explican la mayor varianza del total del cuestionario piloto están formados principalmente por ítems que hacen referencia a las acepciones léxicas "ser divisible", "múltiplo" y "divisor" entre números con representación factorial. Esta representación factorial está formada por "*factores sencillos y exponentes pequeños*". El tamaño de los exponentes de la descomposición factorial ha permitido en gran parte de los casos la operatividad de la calculadora y discernir la divisibilidad entre números con representación decimal.

6. Generalizabilidad.

La teoría de la generalizabilidad (Cronbanch et al., 1972) permite estudiar los diversos factores de error en un proceso de medida, que pueden ser modificadas y hacer variar los posibles resultados que se obtengan. El error se puede dar en la observación, en el momento, en las condiciones o en las preguntas que se formulen. Esta teoría pretende mejorar el diseño de medida. Se puede inferir sobre el grado de generalización a otros grupos de población con las necesidades que se puedan tener sobre la medida, la evaluación, etc.

En esta teoría el coeficiente de generalizabilidad permite estimar la posibilidad de generalizar la medida realizada a las diversas observaciones que se pudieran realizar, evalúa la posibilidad de generalizar cualquier instrumento de medida a otros ítems o a otras muestras. Como podemos ver en Cobo (2003) y Batanero (2003), el coeficiente de generalizabilidad queda definido como cociente entre la varianza de las verdaderas puntuaciones de la prueba y de la varianza observada (varianza verdadera más varianza debida al error): $G = \dfrac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \sigma_e^2}$

En el cuestionario piloto, la generalizabilidad obtenida, que puede ser en función de los ítems o de los alumnos, permite concluir que:

- Se podría generalizar a otros ítems la aplicación de la prueba ya que el coeficiente de generalizabilidad respecto a otros ítems es 0,8999.

- Existe una probabilidad alta de generalizar los resultados obtenidos si se pasa la misma prueba a otros alumnos, ya que el coeficiente de generalizabilidad respecto a otros alumnos es de 0,9488.

3.1.5. Conclusiones del análisis del cuestionario piloto.

El estudio psicométrico realizado a la prueba piloto permite concluir que:

(a) El cuestionario piloto se puede considerar aceptable según el índice de dificultad del total de la muestra. Éste índice es de 0,5204 sobre 1, es decir, la prueba tiene dificultad media;

(b) un 72 % de los 46 ítems están clasificados en una zona intermedia de dificultad, un 9 % son muy difíciles y el 19 % muy fáciles;

(c) el cuestionario piloto puede ser considerada fiable a tenor del coeficiente Alpha de Cronbach cuyo valor es igual a 0,8999. Si eliminamos los 7 ítems (15,2%) cuyo coeficiente de homogeneidad se encuentra por debajo de 0,2, el valor del coeficiente Alpha de Cronbach aumenta a 0,9;

(d) deberíamos eliminar de la prueba los ítems:

- **1b2** "*Dados los números: 0, 2, 4, 6, 8, 10 y 16. ¿Alguno es divisor de 48? ¿Cuál? Justifica tu respuesta*",
- **1c1** "*Considere la siguiente colección de números: 1, 3, 6, 8, 15, 24, 39, 42, 48, 69, 2400, 2412. Los números del listado que son múltiplos de 24 son:_______________ . Justifica tu respuesta*",
- **3a3** "*Indica, justificando tu respuesta, el valor de **b** para que el número **2b45** sea divisible por 5*",
- **3b** "*¿Por qué cifras hay que sustituir las letras **a** y **b** para que el número **19a9b** sea divisible por 3? Justifica tu respuesta*",
- **4c** "*¿3^4 x 5 x 7^3 es un múltiplo de M = 3^3x5^2x7? Explica tu respuesta*"-.
- **7c** "*¿Qué quiere decir que m.c.d (60,50) =10?*",
- **7d** "*¿Qué quiere decir que m.c.m (60,50) = 300?*",

cuyo coeficiente r de Pearson ó coeficiente de correlación biserial puntual se encuentran por debajo de 0,20. Si se eliminan estos ítems, la dimensionalidad de la prueba se reduciría al desaparecer los factores 13 y 9;

(e) la generalizabilidad del cuestionario piloto respecto a otros ítems y respecto a otros sujetos alcanza valores muy elevados, 0,8999 y 0,9488, respectivamente. Esto supone una alta generalizabilidad de la prueba que hemos realizado.

El análisis cuantitativo realizado al cuestionario piloto nos ha permitido diseñar el cuestionario definitivo que será presentado y analizado en la siguiente sección.

Además de la realización del cuestionario de la prueba piloto, se realizaron seis entrevistas clínicas para obtener información detallada (Goldin, 2000; Clement, 2000). Con estas entrevistas se pretendía obtener más información que la proporcionada a través de los cuestionarios que ofrecieron los estudiantes, a la vez que elaborar un guión que sirviera de modelo previo para el que posteriormente se utilizó en la prueba definitiva.

El guión de la entrevista se elaboró siguiendo las tareas del cuestionario piloto, para buscar justificaciones de las respuestas dadas y que los alumnos pudieran aclarar y ampliar las respuestas que habían dado en el cuestionario. Se llevaron a cabo seis semanas después de haber realizado el cuestionario piloto, siendo su duración de cuarenta minutos aproximadamente.

3.2. Prueba definitiva.

En esta sección vamos a describir, en primer lugar, las características de los participantes en la investigación definitiva. En segundo lugar analizaremos el cómo y el por qué de los instrumentos de recogida de datos definitivos. Por último, presentaremos los procedimientos de análisis utilizados.

3.2.1. Sujetos.

Los participantes en la investigación fueron 371 alumnos distribuidos en los tres ciclos de la enseñanza secundaria, 1º de ESO (120), 4º de ESO (137) y 1º de Bachillerato (114) de centros públicos de la provincia de Alicante y Valencia. Los estudiantes pertenecían a tres Institutos de Enseñanza Secundaria y a un Colegio Público. Dos de los Institutos de Educación Secundaria están ubicados en la provincia de Alicante. En ellos se imparten los ciclos completos de ESO y Bachillerato. El tercer Instituto se ubica en la provincia de Valencia y sólo imparte el Segundo Ciclo de Enseñanza Secundaria y Bachillerato. Por su parte, el Colegio Público pertenece a la provincia de Alicante e imparte Educación Primaria y Primer Ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Los 120 alumnos de 1º de ESO pertenecían a dos Institutos de Secundaria, 39 y 38, respectivamente, y a un Colegio Público al que pertenecían los 43 alumnos restantes. El total de alumnos se distribuían en un total de seis grupos. Estos alumnos habían recibido enseñanza sobre la divisibilidad en el conjunto de los números naturales en el mismo curso académico que se ha realizado la investigación.

Por su parte, los 137 alumnos de 4º de ESO correspondían a tres Institutos de Secundaria. Estos alumnos distribuidos en un total de nueve grupos cursaban las opciones A y B. La divisibilidad en N no formaba parte de los currículos de estas opciones. La distribución por optativas fue de 59 alumnos en la opción A y 78 en la opción B. Estos alumnos participaron en la prueba con los conocimientos sobre divisibilidad adquiridos en 1º y 2º de ESO.

Los 114 estudiantes de 1º de Bachillerato pertenecían a tres Institutos, 39 en dos de ellos y 38 en el tercero. De los 114 alumnos, 51 cursaban la asignatura de Matemáticas 1, y 62 la asignatura de Matemáticas 1 aplicada a las Ciencias Sociales. La divisibilidad en el conjunto de los números naturales tampoco formaba parte explícitamente de los currículos de las asignaturas de matemáticas cursadas por estos alumnos. Los conocimientos sobre divisibilidad que tenían estos estudiantes fueron adquiridos en 1º y 2º de ESO.

La muestra elegida para realizar este cuestionario cumple las mismas condiciones que la del cuestionario piloto, es decir, es sesgada, disponible e intencional al tratarse de grupos ya formados.

3.2.2. Instrumentos de recogida de datos

El primer instrumento de recogida de datos fue el cuestionario. El cuestionario definitivo fue planteado a partir del diseño del cuestionario piloto que hemos descrito y analizado cuantitativamente en el apartado anterior. El segundo instrumento fueron las entrevistas. Las entrevistas fueron diseñadas para hacer emerger aquello conocimientos que pudieran quedar ocultos en las respuestas dadas en los cuestionarios.

3.2.2.1. El Cuestionario

El análisis psicométrico global realizado al cuestionario piloto nos permitió:

(a) Seleccionar los problemas que debían formar parte del cuestionario definitivo.

(b) Identificar los elementos matemáticos que configuran la divisibilidad en N y las relaciones que se establecen entre ellos.

A. Los problemas del cuestionario

Los valores obtenidos en las distintas características correlaciónales básicas estudiadas (índice de dificultad, de consistencia interna, coeficiente de correlación biseral y de generalizabilidad) determinó cuáles y cuántos ítems debían formar parte del cuestionario definitivo.

Se acordó que este cuestionario estuviese compuesto por los 10 primeros problemas del cuestionario piloto, eliminando de la misma seis ítems de los siete propuestos por los índices de homogeneidad y discriminación (1b2, 1c1, 3a3, 3b, 7c y 7d). El ítem 4c no se suprimió dado el interés que se consideró podría presentar para los objetivos de la investigación y para el análisis cualitativo de las respuestas de los alumnos. Los problemas definitivos del cuestionario, su procedencia y objetivos del cuestionario definitivo los mostramos a continuación.

Cuestión 1	*Ítem*	*Procedencia*	*Objetivos*	
a) Completa con las palabras: *divisor ó múltiplo.* <u>Razona tu respuesta</u> 8 es ___ de 2; 4 es ___ de 16 ; 21 es___ de 7 ; 25 es___ de 625 b) Dados los números: 0, 2, 4, 6, 8, 10 y 16. Determina si 64 es múltiplo de alguno de ellos ________ c) Considere la siguiente colección de números: 1, 3, 6, 8, 15, 24, 39, 42, 48, 69, 2400, 2412. I. Los números del listado que son múltiplos de 24 son: ________ II. Los números del listado que son divisibles por 24 son:________ III. Los números del listado por los que 24 es divisible son:________Justifica tu respuesta.	**1a1, 1a2 1a3 1a4** **1b** **1c1** **1c2** **1c3**	a)Tarea que proviene de modificar un ejercicio del libro de texto de 1º de ESO de la editorial Mc Graw Hill (2002) b)Tarea extraída del libro de texto 1º ESO de la editorial Oxford (2002) c)Similar a una de las tareas *propuestas por Brown, Thomas* y Tolias (2002)	• Movilizar los significados de divisor, múltiplo, ser divisible entre números con representación decimal. • Establecer relaciones entre los conceptos de divisor, múltiplo y ser divisible.	• Identificar las formas de conocer los elementos divisor, múltiplo, ser divisible. • Determinar cómo el estudiante establece relaciones entre los elementos divisor, múltiplo, ser divisible.
Cuestión 2	*Ítem*	*Procedencia*	*Objetivos*	
Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son: 464, 493, 522 y 551. ¿De qué número se trata? <u>Explica tu respuesta</u>	**2**	Tarea extraída del libro de texto de 1º de ESO de la editorial Mc Graw Hill (2002)	• Movilizar los significados de múltiplo, múltiplos comunes entre números con representación decimal. • Determinar relaciones entre los conceptos de divisor, múltiplo y divisor comunes. • Realizar conversiones entre la representación decimal y factorial.	• Identificar las formas de conocer los elementos divisor, múltiplo y múltiplo y divisor comunes. • Determinar cómo el estudiante establece relaciones entre los elementos divisor, múltiplo, múltiplo y divisores comunes.
Cuestión 3	*Ítem*	*Procedencia*	*Objetivos*	
Indica, <u>justificando tu respuesta</u>, el valor de **b**, para que el número **2b45**: I. Sea divisible por 2 II. Sea divisible por 3 III. Sea divisible por 6	**3a** **3b** **3c**	Tarea extraída del libro de texto de 1º de ESO de la editorial Oxford (2002) y del libro de texto de 1º de ESO de la editorial Ecir. Tarea proveniente de modificar un ejercicio del nº 2 de la Colección de Problemas olímpicos (2000)	• Movilizar los significados de ser divisible desde los criterios de divisibilidad. • Conjugar y coordinar distintos criterios de divisibilidad para construir otros.	• Identificar las formas de conocer del elemento ser divisible. • Determinar qué mecanismos de construcción utilizan los estudiantes.

Cuestionario 3.5. (a) Cuestionario Definitivo: Problemas, ítems, procedencia y objetivos

Cuestión 4	*Ítem*	*Procedencia*	*Objetivos*	
Consideremos el número $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ a) ¿M es divisible por 7? Explica tu respuesta. b) ¿M es divisible por 5? ¿Por 2? ¿Por 9? ¿Por 11? ¿Por 15? Explica tu respuesta. c) ¿$3^4 \times 5 \times 7^3$ es un múltiplo de M? Explica tu respuesta. d) ¿$3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ es un múltiplo de M? Explica tu respuesta	**4a** **4b** **4c** **4d**	Tarea extraída de los trabajos de Zazkis y Campbell (1996a) y de Brown, Thomas y Tolias (2002)	• Movilizar los significados de múltiplo y ser divisible entre números con representación factorial • Determinar relaciones entre los conceptos de múltiplo, divisor y ser divisible	• Identificar las formas de conocer de los elementos múltiplo y ser divisible. • Determinar el grado de influencia de los modos de representación en las formas de conocer los elementos matemáticos.
Cuestión 5	*Ítem*	*Procedencia*	*Objetivos*	
Descompón el número 100: (Justifica tu respuesta) a) En dos factores b) En tres factores c) En el máximo número de factores d) En factores primos	**5a** **5b** **5c** **5d**	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del libro de texto de 1º de ESO de la editorial Almadraba (2002)	• Movilizar los significados de factor entre números con representación factorial y decimal.. • Realizar conversiones entre la representación decimal y factorial. • Aplicar las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación.	• Identificar las formas de conocer el elemento factor. • Investigar la habilidad para renunciar al cálculo directo
Cuestión 6	*Ítem*	*Procedencia*	*Objetivos*	
Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho.	**6**	Tarea extraída del libro de texto de 1º de ESO de la editorial Ecir (2002) Tarea que proviene de modificar un ejercicio similar del trabajo de Brown, Thomas y Tolias (2002)	• Movilizar los significados de múltiplo, múltiplos comunes entre números con representación decimal. • Realizar conversiones entre la representación decimal y factorial.	• Identificar las formas de conocer los elementos múltiplo y mínimo común múltiplo. • Determinar cómo el estudiante establece relaciones entre los elementos múltiplo y mínimo común múltiplo. • Investigar la habilidad para renunciar al cálculo directo, al procedimiento habitual y obtener los múltiplos comunes y el mínimo de ellos por métodos y procedimientos alternativos.

Cuestionario 3.5. (b) Cuestionario Definitivo: Problemas, ítems, procedencia y objetivos

Cuestión 7	*Ítem*	*Procedencia*	*Objetivos*	
a) ¿Qué es el mínimo común múltiplo de dos números? b) ¿Qué es el máximo común divisor de dos números? c) Obtén el m.c.d (30,50) d) Obtén el m.c.m (30,50)	7a 7b 7c 7d	a) y b) Tarea que proviene de modificar una cuestión similar del trabajo de Brown, Thomas y Tolias (2002) c) d) Tareas que provienen de modificar un ejercicio de los libro de texto de 1° de ESO de las editorial Anaya (2002), Santillana (2002) y Bruño (2002). Almadraba (2002)	• Movilizar los significados de múltiplo y divisor, múltiplos y divisores comunes y mínimo común múltiplo y máximo común divisor entre números con representación decimal. • Determinar relaciones entre los conceptos de mínimo común múltiplo y máximo común divisor, y los procedimientos de obtención, diferenciando ambos. • Realizar conversiones entre la representación decimal y factorial.	• Identificar las formas de conocer los elementos mínimo común múltiplo y máximo común divisor. • Determinar cómo el estudiante establece relaciones entre el significado y los procedimientos de obtención de los elementos mínimo común múltiplo y máximo común divisor. • Investigar la habilidad para obtener los múltiplos comunes o divisores comunes por diferentes métodos.
Cuestión 8	*Ítem*	*Procedencia*	*Objetivos*	
a) Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado. b) Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm, 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud. ¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda? ¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado.	8a 8b1 8b2	a) Tarea extraída del libro de texto 1° ESO de la editorial Ecir (2002) b) Tarea extraída del libro de texto 1° ESO de la editorial Mc Graw Hill (2002)	• Movilizar los significados de divisor y divisores comunes entre números con representación decimal. • Realizar conversiones entre la representación decimal y factorial.	• Identificar las formas de conocer los elementos divisor y máximo común divisor. • Determinar cómo el estudiante establece relaciones entre los elementos divisor y máximo común divisor. • Investigar la habilidad para renunciar al cálculo directo, al procedimiento habitual y obtener los divisores comunes y el máximo de ellos por métodos y procedimientos alternativos.

Cuestionario 3.5. (c) Cuestionario Definitivo: Problemas, ítems, procedencia y objetivos

Cuestión 9	*Ítem*	*Procedencia*	*Objetivos*	
Sabiendo que : 1001 = 7 x 11 x 13 y 91 = 7 x 13, ¿son correctas las siguientes afirmaciones?: (Justifica tu respuesta) a) 91 no es divisor de 1001 b) 77 es divisor de 1001 c) 2002 no es divisor de 13	**9a** **9b** **9c**	Tarea extraída del libro de texto de 1° de ESO de la editorial Oxford (2002)	• Movilizar los significados de múltiplo y divisor entre números con representación factorial. • Determinar relaciones entre los conceptos de divisor y múltiplo. • Realizar conversiones entre la representación decimal y factorial. • Aplicar las propiedades conmutativa y asociativa para la multiplicación. • Aplicar la transitividad en el concepto de divisor.	• Identificar las formas de conocer los elementos divisor y múltiplo. • Determinar cómo el estudiante establece relaciones entre los elementos divisor y múltiplo.

Cuestión 10	*Ítem*	*Procedencia*	*Objetivos*	
Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta: El número $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ es: a) Divisible por 5 b) Divisible por 2 y por 4 c) Divisible por 3 d) Divisible por 6 e) Divisible por 15	**10a** **10b** **10c** **10d** **10e**	Tarea extraída del libro de texto de 1° de ESO de la editorial Mc Graw Hill (2002)	• Movilizar el significados de ser divisible entre números con representación factorial. • Aplicar propiedades de la divisibilidad. • Conjugar y coordinar distintos criterios de divisibilidad para construir otros. • Determinar relaciones entre los conceptos de múltiplo, divisor y ser divisible	• Identificar las formas de conocer del elemento ser divisible. • Determinar qué mecanismos de construcción utilizan los estudiantes. • Determinar el grado de influencia de los modos de representación en las formas de conocer los elementos matemáticos.

Cuestionario 3.5. (d) Cuestionario Definitivo: Problemas, ítems, procedencia y objetivos

B. Elementos y representaciones de las nociones de divisibilidad.

La caracterización de los ítems del cuestionario piloto, según los niveles de dificultad, realizado por Bodí et al. (2005) permitió conocer distintas particularidades de algunos elementos como que "*los ítems donde hay que utilizar los conceptos de divisor o múltiplo resultan "fáciles" al establecer asociaciones firmes entre divisor y la operación de dividir* y *múltiplo con la operación aritmética de multiplicar. Sin embargo, en los ítems en los que se debe usar la equivalencia y relaciones entre "múltiplo", "divisor", "ser divisible por" aumentan la dificultad*". Así como la influencia de las representaciones ya que "*los alumnos sienten necesidad de operar para obtener la representación en el sistema de numeración decimal de los números descompuestos en factores primos*". Por su parte el análisis factorial realizado a la prueba piloto corroboró la influencia de las representaciones de los números en el uso de la divisibilidad. Estas observaciones han permitido vincular la comprensión de la divisibilidad a tres dimensiones:

- los elementos matemáticos del esquema de Divisibilidad,
- los modos de representación, y
- las relaciones entre los elementos matemáticos.

- **Los elementos matemáticos**

Los elementos matemáticos los entendemos como "*el producto de una disociación o de una segregación del concepto de divisibilidad, vinculada al concepto y a sus propiedades*". Esta definición es una adaptación de la definición de "elemento" de Piaget hecha por Sánchez-Matamoros et al. (2006). La Tabla 3.6 nos muestra los elementos matemáticos del concepto de divisibilidad vinculados a las representaciones decimales y factoriales de los números. El elemento matemático "ser divisible" lo hemos entendido desde dos acepciones: operativa y criterios de divisibilidad. Distintos autores (Brown, 2002; Zazkis y Gadowsky, 2001; Zazkis y Liljedahl, 2004) señalan la importancia de la manera en la que los estudiantes usan las representaciones de los números para utilizar los elementos matemáticos y determinar sus relaciones en el esquema de Divisibilidad.

MODOS DE REPRESENTACIÓN	ELEMENTOS MATEMÁTICOS: DIVISOR	ELEMENTOS MATEMÁTICOS: MÚLTIPLO	ELEMENTOS MATEMÁTICOS: SER DIVISIBLE		ELEMENTOS MATEMÁTICOS: M. C. D. (a, b)	ELEMENTOS MATEMÁTICOS: M.C.M. (a, b)
DECIMAL	*a* ***es divisor*** *de b si, y solo si, existe un número natural c tal que b = a. c.*	*b* ***es múltiplo*** *de a si, y solo si, existe un número natural c tal que b = a. c.*	b ***es divisible por*** *a, si la división de b entre a da de resto cero (b = a. c)*	• b ***es divisible por 2****, si b termina en cero o par.* • b ***es divisible por 3****, si la suma de las cifras de b es múltiplo de 3*	*Es el mayor de los divisores comunes*	*Es el menor de los múltiplos comunes*
FACTORIAL	*a es* ***divisor*** *de b si, y solo si, b contiene todos los factores de a con exponentes mayores o iguales*	*b es* ***múltiplo*** *de a si, y solo si, b contiene todos los factores de a con exponentes mayores o iguales.*	*b* ***es divisible por*** *a si, y solo si, b contiene todos los factores de a con exponentes mayores o iguales*		*Es el que contiene los factores comunes de a y b afectados con los menores exponentes*	*Es el que contiene los factores comunes y no comunes de a y b afectados con los mayores exponentes*

Tabla 3.6. Elementos Matemáticos Divisibilidad

Los tipos de relaciones lógicas consideradas entre los elementos matemáticos podrían ser:

- bicondicional,
- conjunción,
- condicional,
- contrarrecíproca.

- **Bicondicionales** $[A \Leftrightarrow B]$

Estas relaciones se manifiestan cuando

(a) el estudiante usa indistintamente las diferentes acepciones léxicas del concepto de divisibilidad.

$a \text{ es divisor de } b \Leftrightarrow b \text{ es múltiplo de } a \Leftrightarrow b \text{ es divisible por } a \Leftrightarrow a \text{ es un factor de } b$

(b) asocia el elemento divisor a la operación de dividir.

$$a \text{ es divisor de } b \Leftrightarrow \quad b : a = c$$

- **Conjunción lógica** $[A \wedge B]$

Esta relación lógica vamos a entenderla en los mismos términos que Sánchez-Matamoros et al. (2006). Un estudiante establece la conjunción lógica cuando relaciona dos o más elementos para hacer inferencias. Por ejemplo, al hacer uso del elemento "ser divisible" desde los criterios de divisibilidad usa dos o más criterios para inferir la divisibilidad.

- **Condicionales** $[A \Rightarrow B]$

Las relaciones condicionales se establecen cuando los estudiantes relacionan los elementos con las operaciones aritméticas o bien utilizan ciertas propiedades de éstas para resolver las tareas. Por ejemplo, establecen este tipo de relaciones si son capaces de utilizar la propiedad

"*Si d es divisor de a y b, entonces d es divisor de* $a \pm b$"

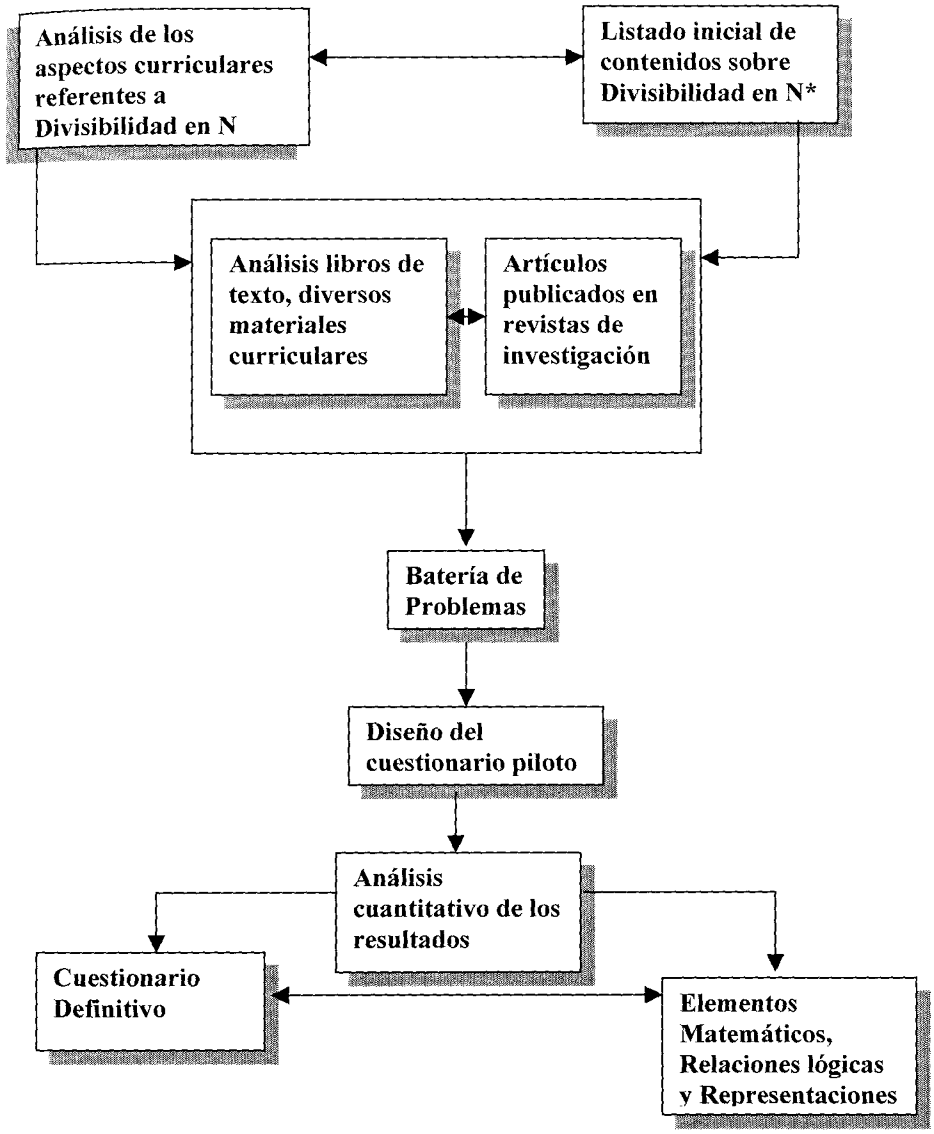
O bien, cuando utilizan las propiedades conmutativa y asociativa para determinar los divisores de un número natural con representación factorial:

"*Si a es producto de dos ó más factores primos de b (con exponentes menores o iguales), entonces el orden de los factores de b no influye en la determinación de b como divisor de a*".

- **Contrarrecíproca** $[(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)]$

Esta relación lógica se establece cuando los estudiantes desde la propiedad "*a divide a b, entonces a es un factor de b*" son capaces de determinar la indivisibilidad, es decir, "*a no es factor de b, entonces a no divide a b*".

El esquema 3.1. muestra el proceso seguido para la elaboración del cuestionario y para la determinación de los elementos matemáticos y sus relaciones.



Esquema 3.1. Proceso de elaboración definitiva de los instrumentos de recogida de datos del Cuestionario

3.2.2.2. Las entrevistas.

Las entrevistas clínicas de carácter individual son un elemento necesario para la interpretación e investigación de los procesos de construcción mental de los estudiantes (Zazkis y Campbell, 1996a; Cobb y Whitenack, 1996; Hunting, 1997; Goldin, 2000; Clement, 2000; Brown et al., 2002; Cobb et al., 2003). Las entrevistas permiten determinar modelos de construcción del conocimiento generados a partir de las interpretaciones de las manifestaciones que hacen los estudiantes de sus estructuras cognitivas. Permiten "*indagar y determinar diferentes características cualitativas de la estructura cognitiva mostrada frecuentemente*" (Zazkis y Campbell, 1996a, p.542).

En nuestra investigación hemos realizado entrevistas clínicas con el objetivo de obtener información adicional sobre la forma en que los estudiantes comprenden los distintos elementos matemáticos de divisibilidad y las relaciones lógicas que establecen entre ellos. Las entrevistas se llevaron a cabo en los meses de febrero, marzo y abril de 2004, después de haber realizado los cuestionarios y haber codificado las respuestas.

A. Selección de los estudiantes para las entrevistas clínicas.

Para seleccionar a los alumnos objeto de las entrevistas individuales, una vez codificadas sus respuestas, realizamos un muestreo en cada uno de los cursos estudiados (1° de ESO, 4° de ESO y 1° de Bachillerato). Este muestreo tuvo las siguientes características (Cardona, 2002):

- **Intencional**. En opinión de McMillan (1996) es muy importante incluir en la muestra individuos que sean "informativos" respecto al propósito de la investigación.
- **Estratificada** por cursos y deciles, a fin de que el espectro de resultados estuviese presente por igual en la selección realizada.
- **Proporcional** a cada decil y curso para intentar obtener muestras de tamaño similar que permitieran comparar en los diferentes cursos estudiados el conocimiento sobre la divisibilidad que tienen los estudiantes.
- **Disponible** por la posibilidad y conveniencia del investigador y de los grupos ya formados en los centros de las distintas poblaciones.

Siguiendo estos criterios se eligieron 21 alumnos por curso. En opinión de McMillan (1996) cuando se trata de estudios experimentales es necesario un mínimo de 15 sujetos en cada grupo de estudio. La Tabla 3.7 nos muestra la distribución de los 21 alumnos seleccionados para las entrevistas en cada nivel -decil-. Cuando el total de alumnos asignados proporcionalmente superaba el número de entrevistas establecidas, eran descartados los estudiantes pertenecientes a la categoría de menor respuesta al ser éstos los que aportaban menor información al cuestionario.

1° ESO			**4° ESO**			**1° BACHILLERATO**		
Deciles	N° Alumnos	Entrevist.	Deciles	N° Alumnos	Entrevist.	Deciles	N° Alumnos	Entrevist.
[0, 0.10[	2	(0, 35) 0	[0, 0.10[	0	0	[0, 0.10[	0	0
[0.10, 0.20[	9	(1,58) 1	[0.10, 0.20[	5	(0, 77) 1	[0.10, 0.20[	2	(0, 37) 0
[0.20, 0.30[	15	(2,63) 3	[0.20, 0.30[	8	(1,23) 1	[0.20, 0.30[	9	(1,66) 1
[0.30, 0.40[	24	(4,20) 4	[0.30, 0.40[	20	(3,07) 3	[0.30, 0.40[	13	(2,39) 2
[0.40, 0.50[	22	(3,85) 4	[0.40, 0.50[	22	(3,37) 3	[0.40, 0.50[	11	(2,02) 2
[0.50, 0.60[	17	(2,98) 3	[0.50, 0.60[	30	(4,60) 5	[0.50, 0.60[	23	(4,24) 4
[0.60, 0.70[	18	(3,15) 3	[0.60, 0.70[	26	(3,99) 4	[0.60, 0.70[	19	(3,50) 4
[0.70, 0.80[	9	(1,58) 2	[0.70, 0.80[	22	(3,37) 3	[0.70, 0.80[	20	(3,68) 4
[0.80, 0.90[	4	(0, 70) 1	[0.80, 0.90[	4	(0, 61) 1	[0.80, 0.90[	13	(2,39) 2
[0.90, 1]	0	0	[0.90, 1]	0	0	[0.90, 1]	4	(0, 74) 2
TOTAL	120	**21**	TOTAL	137	**21**	TOTAL	114	**21**

Tabla 3.7. Distribución del número de alumnos, por niveles y deciles, que se han seleccionado para la entrevista clínica

B. Sobre el diseño de la entrevista.

Las entrevistas realizadas a 63 alumnos de un total de 371 estudiantes que participaron en la investigación cumplieron los principios metodológicos establecidos por Goldin (2000):

(c) las preguntas fueron diseñadas previamente,

(d) las actividades elegidas fueron accesibles a los estudiantes y permitieron buenas y diversas representaciones de sus estructuras matemáticas,

(e) durante la entrevista se estimuló la resolución de problemas,

(f) se hizo una previsión de las nuevas posibilidades que pudiesen aparecer,

(g) el entrevistador fue flexible cuando la situación lo requirió.

A las condiciones anteriores hemos de añadir que el investigador estableció en cada una de las entrevistas un clima de confianza y observó las contestaciones de los alumnos de manera flexible, ayudándoles tanto a dar sus propias respuestas de forma natural como a superar las dificultades que se les presentaban con el objetivo de que los estudiantes no se sintieran cuestionados en relación a sus conocimientos y mostrarán desinterés por la pregunta planteada (Goldin, 2000; Moreno y Azcárate, 2003).

Las preguntas de las entrevistas versaron sobre el cuestionario que los alumnos habían contestado previamente y se realizaron en el mismo orden de éste. Estas preguntas tuvieron como referentes los trabajos de Zazkis y Campbell (1996a), de Brown et al. (2002) así como las preguntas formuladas en las entrevistas realizadas en la prueba piloto. El número y el tipo de preguntas realizadas se determinaron en función de los alumnos y de sus respuestas. En cualquier caso, los alumnos fueron estimulados en la reflexión y superación de las dificultades que se les presentaban. El entrevistador cuando lo consideró necesario reformuló o añadió información adicional, especialmente a través de nuevas preguntas y de diferentes orientaciones.

Las entrevistas se iniciaron una vez revisados por los estudiantes los cuestionarios, después de facilitarles calculadora, lápiz y papel para que pudieran razonar sus respuestas y adquiriesen confianza en la realización de los cálculos. Las entrevistas fueron grabadas en audio y tuvieron una duración aproximada de 45 minutos. La transcripción de las entrevistas se realizó utilizando un nombre figurado para cada alumno con objeto de preservar su identidad. Este nombre figurado es con el que se identifican los ejemplos que se muestran a lo largo de la investigación. A continuación, mostramos el guión que se elaboró para realizar las entrevistas. Como ya hemos indicado este guión se caracterizó por su flexibilidad:

Cuestión 1	
a) Completa con las palabras: *divisor ó múltiplo*. Razona tu respuesta 8 es _______ de 2 ; 4 es _________ de 16 ; 21 es _________ de 7 ; 25 es ________ de 625 b) Dados los números: 0, 2, 4, 6, 8, 10 y 16, determina si 64 es múltiplo de alguno de ellos Justifica tu respuesta c) Considere la siguiente colección de números: 1, 3, 6, 8, 15, 24, 39, 42, 48, 69, 2400, 2412. I. Los números del listado que son múltiplos de 24 son: ________________________ II. Los números del listado que son divisibles por 24 son:________________________ III. Los números del listado por los que 24 es divisible son:_______________________ Justifica tu respuesta	
Preguntas	***Objetivos***
• *¿Qué es un múltiplo de un número?, ¿ y un divisor de un número?* • *Observe el apartado c) y dé un divisor de 24.* • *Dé un número divisible por 24.* • *Ahora dé números por los que 24 es divisible.* • *¿Ha confundido los dos anteriores apartados?* • *Por favor, dé la equivalencia entre ser divisible por un número y ser divisor o múltiplo de ese número.*	• Explicitar la comprensión de los elementos matemáticos "divisor" y "múltiplo". • Determinar el tipo de relación lógica que establecen entre los elementos matemáticos "divisor" y "múltiplo".
Cuestión 2	
Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son: 464, 493, 522 y 551. ¿De qué número se trata?. Explica tu respuesta	
Preguntas	*Objetivos*
• *¿Puede explicar su respuesta (o por qué no la respondió)?* • *¿De qué manera intenta buscar el divisor de un número?* • *¿Por qué no prueba a buscar la diferencia entre los términos sucesivos de la sucesión?* • *Ha obtenido que la diferencia es 29, pero ¿puede afirmar que los números de la serie son múltiplos de 29?* • *¿Podría utilizar otro método?* • *Si realiza la descomposición factorial de los términos de la sucesión, ¿podría obtener la respuesta? ¿Por qué?* • *¿Existe algún número más que cumpla las condiciones del enunciado?*	• Explicitar la comprensión de los elementos matemáticos "divisor", "múltiplo" y "múltiplo y divisor común". • Establecer los modos de representación que consideran más transparentes para resolver la tarea y por qué.

Cuestión 3

Indica, justificando tu respuesta, el valor de **b** para que el número **2b45** sea:

I. divisible por 2; II. divisible por 3; III. divisible por 6

Preguntas	*Objetivos*
• *Diga cómo justifica las respuestas.* • *¿Habría más números que lo cumplan?* • *¿Recuerda los criterios de divisibilidad?* • *¿Cuál es el valor de **b** para que sea divisible por 6?* • *¿Observa alguna relación del tercer apartado con los apartados anteriores?*	• Explicitar la comprensión de los elementos matemáticos " ser divisible" desde los criterios de divisibilidad. • Identificar el tipo de relación o mecanismo que utilizan para discutir la divisibilidad por 6 o para construir su criterio.

Cuestión 4

Consideremos el número: $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$

a) ¿M es divisible por 7? Explica tu respuesta

b) ¿M es divisible por 5? ¿Por 2? ¿Por 9? ¿Por 11? ¿Por 15?. Explica tu respuesta.

c) ¿$3^4 \times 5 \times 7^3$ es un múltiplo de M? Explica tu respuesta

d) ¿$3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ es un múltiplo de M? Explica tu respuesta

Preguntas	*Objetivos*
• *En el primer apartado obtuvo el valor de M y dividió. ¿Podría responder la pregunta sin necesidad de obtener el valor de M?* • *¿M es divisible por 5? ¿Y por 2?* • *¿Y por 9? ¿Y por 11?* • *¿M es divisible por 15?* • *Si el número aparece como factor del número M, ¿puede afirmar que ese número es divisor de M? ¿Por qué?* • *Si el número no aparece en la descomposición factorial, ¿puede indicar alguna respuesta sobre si será o no divisor del número M?* • *Mire el número del apartado c), ¿es múltiplo de M?* • *¿Podría justificar su respuesta sin utilizar la calculadora y sin averiguar el producto de los números?* • *¿Es múltiplo de M el número del último apartado?* • *¿Piensa que la forma de expresión de los números influye de alguna manera?*	• Explicitar la comprensión de los elementos matemáticos "ser divisible" y "múltiplo" • Determinar los modos de representación que consideran más transparentes para resolver la tarea y por qué. • Analizar en qué medida el tipo de representación de los números influye en la resolución de la tarea.

Cuestión 5	
Descompón el número 100: (Justifica tu respuesta) a) En dos factores. b) En tres factores. c) En el máximo número de factores. d) En factores primos.	
Preguntas	*Objetivos*
• *¿Qué es un factor de un número natural?* • *¿Un factor de un número se refiere a la operación de sumar o de multiplicar?* • *¿Un factor de un número es un divisor de ese número? ¿Por qué?* • *¿Qué es un número primo?* • *¿Los números primos tienen divisores?* • *¿La descomposición en factores primos garantiza la descomposición del número en el mayor número de factores?* • *¿Entonces los dos últimos apartados son iguales?* • *¿Existe alguna relación entre los dos últimos apartados?*	• Explicitar la comprensión del elemento matemático divisor (acepción factor). • Determinar el tipo de relación que establecen entre "factor" y "divisor" • Identificar el nivel de síntesis entre la representación decimal y la representación factorial: descomposición en factores primos.
Cuestión 6	
Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho	
Preguntas	*Objetivos*
• *Para dar la respuesta ha hallado el mínimo común múltiplo mediante la descomposición factorial, ¿podría hacerlo de otra forma?* • *El número que ha obtenido, ¿es el mínimo tiempo que ha de transcurrir para que coincidan?* • *¿Podría ser otro número de días en el que coincidieran?* • *El número que obtiene ¿es un múltiplo o un divisor de los otros?* • *Si dispone de al menos dos métodos para la resolución, ¿cómo relaciona la forma de obtención en ambos casos?*	• Investigar el nivel de comprensión de los elementos múltiplo, múltiplo común y mínimo común múltiplo • Determinar la habilidad para utilizar distintos procedimientos de obtención del mínimo común múltiplo. • Evidenciar en qué medida los estudiantes son capaces de razonar sobre la resolución de la tarea en función de los valores obtenidos.

Cuestión 7	
a) ¿Qué es el mínimo común múltiplo de dos números? b) ¿Qué es el máximo común divisor de dos números? c) Obtén el m.c.d (30,50) d) Obtén el m.c.m (30,50)	
Preguntas	*Objetivos*
• *¿Qué es el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos números?* • *Si ha dado el procedimiento, ¿podría dar la definición?* • *En los dos últimos ha realizado la descomposición factorial, ¿podría resolverlo de otro modo?* • *En los dos últimos apartados ha buscado los divisores o los múltiplos comunes, ¿podría resolverlo de otro modo?* • *La búsqueda del máximo común divisor mediante el procedimiento de la descomposición factorial, ¿garantiza que el número obtenido sea el mayor divisor común?* • *La obtención del mínimo común múltiplo mediante la descomposición factorial de los números, ¿asegura que el valor obtenido es el múltiplo común más pequeño?* • *¿Qué le han resultado más fáciles, los dos primeros apartados o los dos últimos?*	• Averiguar el nivel de comprensión de los elementos múltiplo, múltiplo común y mínimo común múltiplo; divisor, divisor común y máximo común divisor. • Determinar la habilidad para utilizar distintos procedimientos de obtención del mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos números. • Identificar si los estudiantes relacionan el contenido conceptual de mínimo común múltiplo y máximo común divisor con el procedimental de estos elementos.

Cuestión 8	
a) Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado. b) Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm , 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud.¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda?¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado.	
Preguntas	*Objetivos*
• *Justifique su respuesta, por favor.* • *Ha obtenido el resultado utilizando en ambos casos el máximo común divisor, ¿por qué?* • *Para la obtención de la respuesta ha calculado el máximo común divisor mediante la descomposición factorial, ¿podría contestarlo de otra forma?* • *El número que ha obtenido, ¿es la máxima longitud que pueden tener las cuerdas?*	• Investigar el nivel de comprensión de los elementos divisor, divisor común y máximo común divisor. • Determinar la habilidad para utilizar distintos procedimientos de obtención del máximo común divisor de dos números.

Cuestión 8 (continuación)	
Preguntas	***Objetivos***
• *El número que ha obtenido, ¿es la máxima longitud que pueden tener las cuerdas?* • *¿Podría ser otra la longitud?* • *El número que obtiene, ¿es un múltiplo o un divisor de los otros?* • *Si dispone de al menos dos métodos para la resolución, ¿cómo relaciona la forma de obtención en ambos casos?* • *¿Le ayuda el primero apartado en la resolución del segundo?*	• Evidenciar en qué medida los estudiantes son capaces de razonar sobre la resolución de la tarea en función de los valores obtenidos.

Cuestión 9	
Sabiendo que: 1001 = 7 x 11 x 13 y 91 = 7 x 13, ¿son correctas las siguientes afirmaciones?: a) 91 no es divisor de 1001. b) 77 es divisor de 1001. c) 2002 no es múltiplo de 13. Justifica la respuesta	
Preguntas	*Objetivos*
• *Observe el enunciado, ¿es 77 divisor de 1001?* • *¿Y 91 es divisor de 1001?* • *Escriba 1001 = 7x13x11, ¿es el mismo producto de antes? ¿Es 91 divisor de 1001?* • *¿Podría contestar a las cuestiones anteriores, sin hacer operaciones?* • *Veamos, ¿2002 es múltiplo de 1001?* • *¿2002 es múltiplo de 13?* • *¿Qué significa entonces?* • *Veamos, ¿2002 es múltiplo de 1001?, ¿1001 es múltiplo de 13?* • *¿Qué significa entonces?* • *Sin la calculadora, ¿podría contestarlo?*	• Evidenciar si establecen relaciones entre las propiedades de la estructura multiplicativa y los elementos múltiplo y divisor. • Determinar los modos de representación que consideran más transparentes para resolver la tarea y por qué. • Analizar en qué medida el tipo de representación de los números influye en la resolución de la tarea.

Cuestión 10	
Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta: El número $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ es: a) Divisible por 5. b) Divisible por 2 y por 4. c) Divisible por 3. d) Divisible por 6. e) Divisible por 15	
Preguntas	*Objetivos*
• *Dígame si K es divisible por 5.* • *¿Qué significa eso?* • *¿Tiene claro que hay dos sumandos?* • *¿K sería múltiplo de 2?* • *¿Por qué dice que la primera parte es par?* • *Y si le suma 3, ¿será par?* • *¿K es divisible por 3? ¿Por qué?* • *Dígame si K es divisible por 6.* • *¿Si fuera divisible por 6 sería divisible por 2?* • *¿Y por 15?* • *¿Sabría contestar sin buscar el valor de K?*	• Investigar la correspondencia entre la forma de presentación del número y la habilidad de renunciar a realizar cálculos. • Inferir si los estudiantes aplican las propiedades de la divisibilidad. • Determinar los modos de representación que consideran más transparentes para resolver la tarea y por qué.

3.3 Procedimientos de análisis.

Las entrevistas han sido analizadas cualitativamente. El análisis interpretativo se ha realizado desde la teoría APOS y siguiendo el orden de las preguntas formuladas sobre las tareas del cuestionario (Brown et al., 2002). El análisis llevado a cabo ha permitido:

(a) identificar modelos y regularidades,

(b) observar los significados matemáticos sobre la divisibilidad en N que los alumnos proporcionan y las reorganizaciones conceptuales que éstos podrían haber plasmado,

(c) identificar evidencias de las construcciones mentales de los estudiantes sobre las nociones de divisibilidad en N y los mecanismos que utilizan para su construcción,

(d) averiguar cuál es la incidencia de los tipos de representación usada en las formas de conocer los distintos elementos,

(e) realizar inferencias sobre la construcción del conocimiento de los alumnos, es decir, de las formas de conocer en general y de los niveles del esquema en particular.

La manera en que usan los elementos matemáticos en las distintas situaciones, el modo que manejan los sistemas de representación así como las relaciones que establecen los estudiantes entre los elementos matemáticos que conforman la divisibilidad tanto en los cuestionarios como en las entrevistas han sido nuestros focos de atención para identificar desde el marco teórico APOS las formas de conocer y las características de los niveles de desarrollo.

En esta sección identificamos las formas de conocer y las características de los niveles de desarrollo y las fases de análisis llevadas a cabo para analizar de forma conjunta las respuestas dadas por los estudiantes a los cuestionarios y a las entrevistas.

3.3.1. Caracterización de las formas de conocer la divisibilidad

Para la caracterización de las formas de conocer la divisibilidad nos apoyamos en un primer momento, en las investigaciones previas, en el análisis teórico y en la prueba piloto. En las primeras inferencias sobre la forma de conocer de los distintos elementos matemáticos del esquema de Divisibilidad nos basamos en las siguientes características:

	Caracterización
Acción	• Recordar de manera inconexa los elementos matemáticos. • Necesitar la representación decimal y el apoyo de números concretos, vinculados a las operaciones de la estructura multiplicativa y/o desde algunas de sus acepciones. • Utilizar alguno de los procedimientos de obtención de determinados elementos y aplicarlos sólo a contextos formales.
Proceso	• Recordar y utilizar en general los elementos matemáticos entre números con representación decimal y/o parcialmente desde todas sus acepciones. • Reconocer y utilizar parcialmente los elementos matemáticos desde la representación factorial. • Utilizar, al menos, uno de los procedimientos de obtención de determinados elementos y aplicarlos con dificultades a contextos formales y/o reales.
Objeto	• Recordar y utilizar en general los elementos matemáticos entre números con representación decimal y factorial y desde todas sus acepciones. • Utilizar varios procedimientos de obtención de determinados elementos y aplicarlos a contextos formales y reales estableciendo inferencias correctas sobre los valores obtenidos.

Tabla 3.8. Caracterización de las Formas de Conocer la Divisibilidad en N

A continuación pasamos a describir las distintas formas de conocer:

— **La Forma de conocer ACCIÓN está caracterizada por:**

1. Recordar de manera inconexa los elementos matemáticos.

Esto sucede cuando el estudiante en algunas ocasiones confunde las distintas acepciones léxicas de la divisibilidad, utiliza incorrectamente números concretos para referirse a los elementos "múltiplo y divisor" o recuerda el elemento "ser divisible" desde falsos criterios de divisibilidad. También desconoce o recuerda de manera inconexa el significado de "mínimo común múltiplo de dos números naturales" y "máximo común divisor de dos números".

2. **Necesitar la representación decimal y el apoyo de números concretos, vinculados a las operaciones de la estructura multiplicativa y/o desde algunas de sus acepciones.**

Esta característica se manifiesta cuando los estudiantes sólo son capaces de recordar los elementos matemáticos "múltiplo y divisor de un número" desde números concretos y vinculándolos a la operación de dividir y multiplicar, respectivamente. El elemento "ser divisible" también puede ser recordado desde la modalidad operativa "*a es divisible por b* $\Leftrightarrow$ *la división a : b es exacta*", o bien desde algún criterio de divisibilidad

3. **Utilizar alguno de los procedimientos de obtención de determinados elementos y aplicarlos a contextos formales.**

Los estudiantes sólo son capaces de obtener el mínimo común múltiplo (máximo común divisor) de dos números a través de un solo procedimiento y únicamente aplican con dificultad la idea de mínimo común múltiplo (máximo común divisor) de dos números en contextos formales.

— **La Forma de conocer PROCESO se caracteriza por:**

1. **Recordar y utilizar en general los elementos matemáticos entre números con representación decimal y/o parcialmente desde todas sus acepciones.**

Una manifestación de la forma de conocer PROCESO la encontramos cuando los alumnos recuerdan y utilizan en general los elementos "múltiplo, divisor, ser divisible y máximo común divisor y mínimo común múltiplo" de números con representación decimal. El elemento "ser divisible" desde la acepción "operativa" y desde algunos criterios de divisibilidad, coordinando parcialmente algunos de estos criterios. Por ejemplo, coordinando el criterio del 2 y del 3 para obtener el criterio del 6.

2. **Reconocer y utilizar parcialmente los elementos matemáticos desde la representación factorial.**

Cuando los números están expresados con representación factorial los estudiantes sólo pueden determinar los múltiplos y divisores de números primos y parcialmente su divisibilidad. Pueden por ejemplo, discutir la divisibilidad entre números con exponentes pequeños.

3. **Utilizar, al menos, uno de los procedimientos de obtención de determinados elementos y aplicarlos con dificultades a contextos reales.**

Esta característica hace referencia al uso de uno de los procedimientos de obtención del máximo común divisor (mínimo común múltiplo) y a las dificultades que tienen los estudiantes a aplicarlo en contextos reales.

— **La forma de conocer OBJETO se caracteriza por:**

1. **Recordar y utilizar en general los elementos matemáticos entre números con representación decimal y factorial y desde todas sus acepciones.**

Cuando un estudiante conoce como objeto los distintos elementos matemáticos que conforman la divisibilidad es capaz de recordarlos y utilizarlos en general, independientemente del sistema de representación utilizado.

Por ejemplo, es capaz de (a) reconocer los múltiplos (divisores) primos y compuestos de un número natural independientemente de la representación adoptada (decimal o factorial); (b) establecer que un número primo o compuesto es múltiplo (divisor) o no de un número primo ó compuesto; (c) determinar que los divisores compuestos de un números se generan combinando los factores primos que forman parte de la representación factorial del número; (d) explicar la divisibilidad o indivisibilidad de un número desde la representación decimal y factorial; (e) discernir que la indivisibilidad por un número implica la indivisibilidad por un múltiplo del mismo; (f) coordinar dos criterios de divisibilidad para indicar la divisibilidad de un número compuesto.

2. **Utilizar varios procedimientos de obtención de determinados elementos y aplicarlos a contextos formales y reales estableciendo inferencias correctas sobre los valores obtenidos.**

Desde esta forma de conocer OBJETO los estudiantes usan varios procedimientos de obtención del mínimo común múltiplo (máximo común divisor) de dos números y establecen vínculos entre estos. Generalizan estos conceptos a tres o más números. Aplican la idea de mínimo común múltiplo (máximo común divisor) de dos números y lo hallan en contextos formales y reales realizando inferencias correctas sobre los valores obtenidos.

3.3.2. Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de Divisibilidad.

El análisis teórico desde la perspectiva teórica APOS y la revisión de investigaciones previas ha posibilitado la caracterización de los diferentes niveles- Intra, Ínter y Trans- de desarrollo del esquema de Divisibilidad en N. La particularización de las características generales de los niveles de desarrollo del esquema de Divisibilidad en N serán identificadas mediante el estudio y análisis conjunto de las respuestas que ofrecen los estudiantes en los cuestionarios y en las entrevistas. Asumimos que existe una construcción progresiva de este esquema hasta alcanzar la **tematización** de éste. Inicialmente el análisis de los cuestionarios y de las entrevistas consideró la siguiente caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de Divisibilidad:

Nivel	Caracterización
Intra	• Desconocer o utilizar con dificultades los elementos matemáticos entre números con representación decimal (incluso con errores). • Recordar de forma aislada algunos de los elementos matemáticos y/o utilizarlos mecánicamente sin manifestación de relaciones lógicas entre ellos. • Establecer parcialmente algunas relaciones lógicas bicondicionales entre los elementos matemáticos (incluso erróneas) siempre que los números estén expresados mediante representación decimal.
Ínter	• Recordar y utilizar los elementos matemáticos entre números con representación decimal en un contexto formal o real. • Manifestar limitaciones para utilizar los elementos matemáticos entre números con representación factorial. • Establecer con restricciones (modos de representación) algunas relaciones lógicas bicondicionales y conjunción lógica entre los elementos matemáticos.
Trans	• Recordar y utilizar con coherencia los elementos matemáticos en cualquier contexto (formal o real) con independencia de los modos de representación (decimal y factorial). • Establecer relaciones lógicas bicondicionales, conjunción lógica, condicional y contrarrecíproca entre los elementos matemáticos con independencia del modo de representación adoptado.

Tabla 3.9. Caracterización de los niveles del desarrollo del esquema de Divisibilidad

Los distintos niveles del esquema han sido caracterizados como sigue:

— El **NIVEL INTRA**:

1. **Desconocer o utilizar con dificultades los elementos matemáticos entre números con representación decimal (incluso con errores)**

Esto sucede cuando el alumno desconoce o recuerda con dificultades algunos elementos matemáticos como "divisor" o "múltiplo" usando números concretos e incluso usándolos con errores. Para referirse a estos elementos en general hacen uso de las operaciones de la estructura multiplicativa en los siguientes términos: "*Un múltiplo de un número es el que tiene que multiplicar al número, y un divisor dividirlo*".

2. **Recordar de forma aislada algunos de los elementos matemáticos y/o utilizarlos mecánicamente sin manifestación de relaciones lógicas entre ellos.**

Algunos elementos matemáticos son recordados por los estudiantes como pseudoobjetos matemáticos. Los elementos son recuperados de la memoria productos de una instrucción previa. En consecuencia, no son capaces de determinar cuándo los han de usar o en su caso los obtienen de manera errónea. Por ejemplo, los estudiantes obtienen las series de divisores (múltiplos) comunes de dos números relativamente pequeños para obtener el máximo (mínimo) común divisor (múltiplo) de éstos pero tienen dificultades para razonar por qué se ha de elegir el mayor (menor) de ellos. O bien, si usan los procedimientos de obtención del máximo común divisor o del mínimo común múltiplo mediante la descomposición factorial, lo hacen mecánicamente y asocian la definición al procedimiento

3. **Utilizar algunos de los elementos matemáticos y establecer parcialmente algunas relaciones bicondicionales entre ellos siempre que los números están expresados en su representación decimal.**

Los estudiantes suelen usar correctamente las ideas de múltiplo, divisor y ser divisible. Establecen relaciones entre estos elementos si los números están expresados mediante su representación decimal. Sin embargo, no son capaces de usar los mismos elementos ni establecer relaciones entre ellos cuando los números presentan representación factorial. Necesitan recurrir a la representación decimal de los números.

— El **NIVEL ÍNTER**:

1. **Recordar y utilizar los elementos matemáticos entre números con representación decimal en un contexto formal o real.**

En este nivel, los alumnos utilizan las definiciones de "múltiplo de un número natural" entre números con representación decimal- "*a es múltiplo de b sí, y sólo sí, existe un número natural k, tal que* $a = k \times b$" - y "divisor de un número natural"- "*b (no nulo) es divisor de a sí, y sólo sí, existe un número natural k, tal que* $a : b = k$ *o* $a : k = b$"-. También usan correctamente la acepción "operativa" del elemento ser divisible- "*a es divisible por b sí, y sólo sí, b divide a a*". Estos estudiantes conocen y aplica correctamente, en un contexto real, al menos uno de los procedimientos de obtención del máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números, pero no establecen relaciones entre ellos.

2. **Manifestar limitaciones para utilizar los elementos matemáticos entre números con representación factorial.**

Los estudiantes de este nivel determinan que los factores primos "pequeños" de la descomposición factorial de un número son divisores de ese número. Pueden utilizar las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación para obtener algunos divisores o múltiplos de números expresados mediante su representación factorial- "S*ean a y b (no nulo) dos números naturales. Si b es producto de dos ó más factores primos de a, con exponentes menores o iguales (mayores o iguales), entonces el orden de los factores de a no influye en la determinación de b como divisor de a (como múltiplo de a)*".

3. **Establecer con restricciones (modos de representación) algunas relaciones lógicas bicondicionales y conjunción lógica entre los elementos matemáticos.**

Estos alumnos establecen relaciones lógicas bicondicionales entre múltiplo y divisor, -"*a es múltiplo de b* $\Leftrightarrow$ *b es divisor de a*"- y alguna de las relaciones condicionales que conforman la relación general de divisibilidad. Sólo en algunos casos son capaces de usar la conjunción lógica para establecer la divisibilidad: "*c y d dividen a b* $\Rightarrow$ *c x d divide a b*". Por ejemplo, a partir de la divisibilidad del 2 y del 3, pueden establecer la divisibilidad por 6.

— El **NIVEL TRANS**:

1. **Recordar y utilizar con coherencia los elementos matemáticos en cualquier contexto (formal o real) con independencia de los modos de representación (decimal y factorial).**

Los alumnos utilizan correctamente la mayor parte de los elementos matemáticos, múltiplo, divisor, ser divisible- en sus dos acepciones-, máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números, con independencia:

(a) del modo de representación adoptado- decimal , factorial o ambos- y realizando las conversiones necesarias entre estas representaciones;
(b) del tamaño de los números; y
(c) del tipo de números que intervengan: primos o compuestos.

Los alumnos de este nivel usan el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números en contextos reales, identifican cuál de ellos deben usar en cada una de las tareas propuestas y puede utilizar indistintamente cualquiera de los dos procedimientos de obtención del máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números.

2. **Establecer relaciones lógicas bicondicionales, conjunción lógica, condicional y contrarrecíproca entre los elementos matemáticos con independencia del modo de representación adoptado.**

En este nivel los estudiantes establecen relaciones bicondicionales, condicionales y contrarrecíprocas entre los elementos tales como la relación general de divisibilidad para determinar divisores y múltiplos de números expresados mediante la representación decimal o factorial, la relación conjunción lógica para coordinar criterios de divisibilidad, la relación condicional para determinar que si : "*d es divisor de a y b, entonces d es divisor de* $a \pm b$", o la relación lógica contrarrecíproca para determinar que un número que no es factor de otro, no puede dividirlo.

Al igual que Zazkis y Campbell (1996a), asumimos en nuestra investigación que la tematización de la divisibilidad como un esquema demanda tareas que involucren a la multiplicación, la división, la factorización o la representación factorial de los números naturales. Un instrumento que ayuda al estudiante en la comprensión del esquema de

Divisibilidad es la obtención de múltiplos de un número expresado mediante su representación factorial y la obtención de múltiplos comunes, mínimo común múltiplo de dos números mediante el procedimiento del exponente más alto, como indican Brown et al. (2002). En nuestra opinión, otro componente para establecer la *tematización* de la divisibilidad es interrelacionar los distintos procedimientos de cálculo del máximo común divisor de dos números, así como las relaciones que establecen los estudiantes entre los elementos matemáticos.

3.3.3. Fases de Análisis.

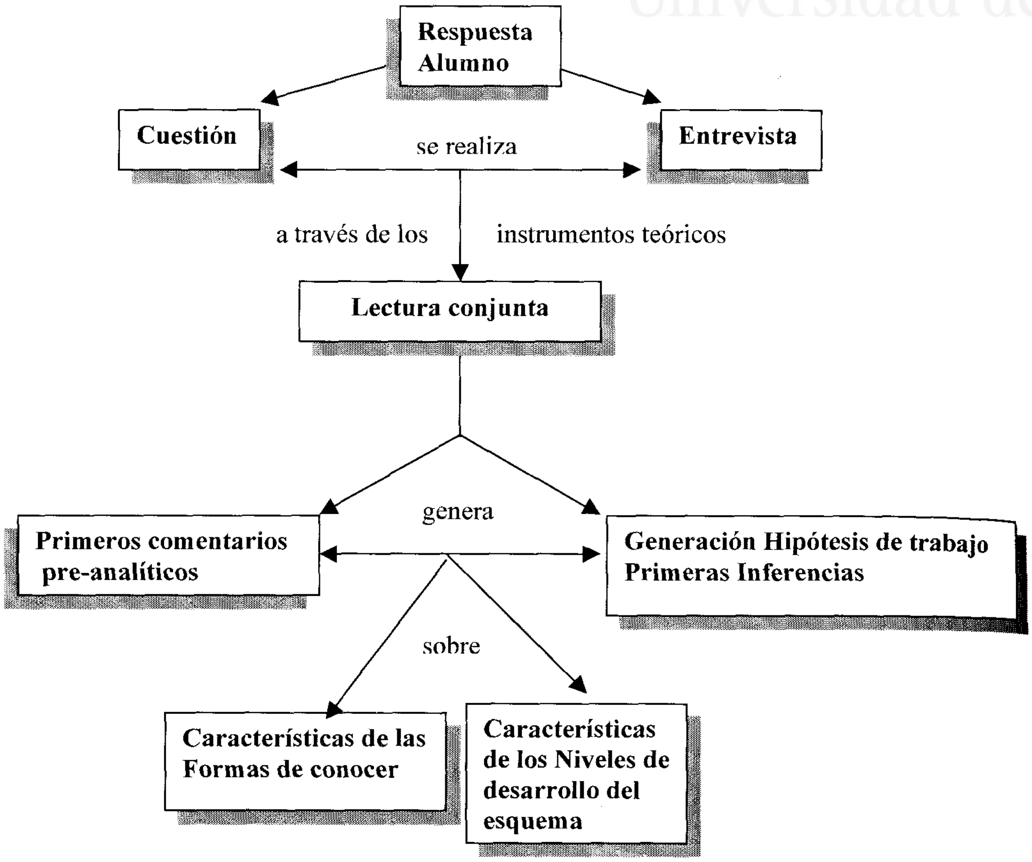
La lectura y estudio de diferentes trabajos junto con un análisis previo realizado a la prueba piloto (cuestionario y entrevistas) permitieron determinar un procedimiento de análisis de los cuestionarios-entrevistas de los alumnos entrevistados. El estudio de las diferentes tareas permitió inferir la posibilidad de que el alumno, dependiendo de la cuestión analizada, mostrara distintas formas de conocer por lo que se necesitaba una segunda fase de análisis en la que se consideraran conjuntamente todas las cuestiones e ítems. Los análisis conjuntos posibilitaron observar que el estudio global de todas las cuestiones de cada individuo ofrecía información más completa sobre la comprensión de los alumnos, de sus formas de conocer y del nivel de desarrollo del esquema. El procedimiento de análisis llevado a cabo para establecer las formas de conocer y los niveles de desarrollo del esquema se realizó en tres fases que describimos a continuación.

- **FASE 1.**

La primera fase del análisis llevado a cabo para la caracterización de las formas de conocer y los niveles de desarrollo se lleva a cabo a través de la:

- Lectura detenida de las transcripciones de las entrevistas-cuestionarios e identificación de las **unidades de análisis** o expresiones, es decir, el conjunto de frases que a lo largo de la entrevista y cuestionario ha usado el estudiante y vinculado a los distintos conceptos matemáticos en distintas situaciones.
- Caracterización de las **unidades de análisis.**
- Generación de las primeras inferencias sobre las formas de conocer de los estudiantes y características de los niveles de desarrollo. Estas primeras inferencias desempeñan el papel de **hipótesis de trabajo**.

Esta primera fase de análisis la sintetizamos en el esquema 3.2.



Esquema 3.2. Fase 1 del procedimiento de análisis

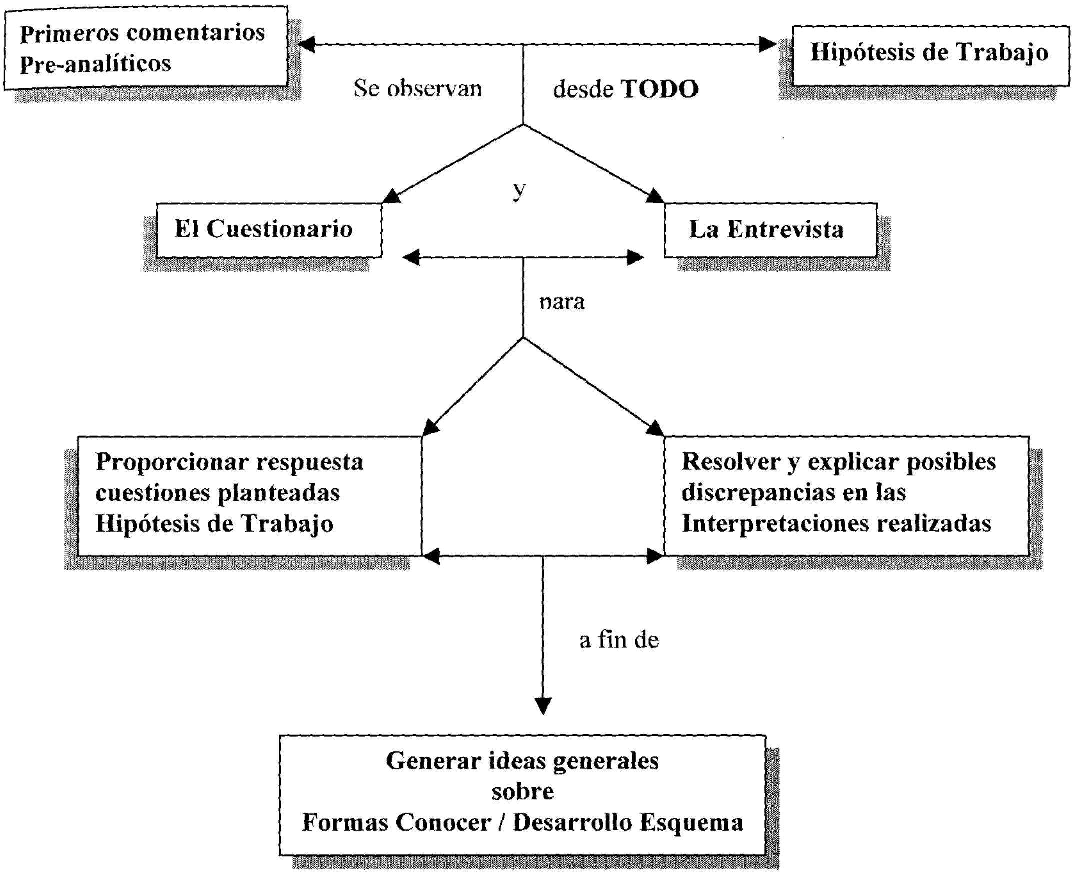
- **FASE 2.**

En esta fase se caracterizan las formas de conocer y el desarrollo del esquema a partir de la información obtenida del análisis conjunto de los cuestionarios y de las entrevistas a fin de:

(a) dar respuesta a las hipótesis de trabajo planteadas y

(b) explicar y resolver las discrepancias que hayan podido surgir a través de las interpretaciones realizadas.

Se trata de armonizar la información desde el punto de vista de las formas de conocer y del desarrollo del esquema. Los primeros comentarios pre-analíticos se miran conjuntamente, buscando proporcionar respuesta a algunas cuestiones planteadas en las hipótesis de trabajo a la luz de todo el cuestionario y de la entrevista y, en particular, mirando el comportamiento del alumno en aquellas tareas que exigen el uso de los mismos elementos. En el caso de que las notas en la Fase 1 no sean suficientes se vuelve a mirar los datos (respuestas al cuestionario y trascripción de la entrevista). Igualmente, se intentan resolver posibles discrepancias en las interpretaciones realizadas en diferentes momentos de la ejecución del cuestionario y del transcurso de la entrevista (por ejemplo cuando el comportamiento del alumno al resolver distintas cuestiones nos lleve a inferencias diferentes sobre su comprensión de la misma idea matemática). En esta fase del análisis se intenta buscar una explicación a dicha discrepancia. El esquema 3.3 sintetiza el proceso descrito en esta Fase 2.



Esquema 3.3. Fase 2 del procedimiento de análisis

- **FASE 3.**

Tras realizar la segunda fase del análisis podemos observar más características de las formas de conocer y del nivel de desarrollo del esquema de Divisibilidad (Intra, Ínter, Trans). En la Fase 3 se consideran conjuntamente las hipótesis de trabajo aceptadas y las ideas generales obtenidas en la fase anterior, con lo que se establece el nivel de desarrollo del esquema que presenta cada alumno, observando el comportamiento global en todas las tareas del cuestionario y de la entrevista.

Las fases de análisis concluyen con la observación e identificación de grandes ideas sobre las formas de conocer y el desarrollo del esquema de Divisibilidad que manifiestan los alumnos y que ayudarán a configurar el capítulo de conclusiones.

A continuación, ejemplificamos las fases de análisis descritas. Veamos como se llevó a cabo este proceso analítico en el análisis del cuestionario y de la entrevista realizada a Valeriano (C7-E4) y Elsa (C1-E1), alumnos de 4º y 1º de ESO, respectivamente.

En la **Fase 1**, al estudiar independientemente cómo Valeriano había utilizado el elemento matemático máximo común divisor de dos números en diferentes cuestiones, se establecieron las siguientes hipótesis de trabajo:

(a) Hipótesis de trabajo 1:

"*podría manifestar una forma de conocer* ***acción*** *del elemento máximo común divisor de dos números al no definir conceptualmente este elemento y sólo ser capaz de utilizar un único procedimiento de obtención del mismo*".

Esta hipótesis se generó tras el análisis de las respuestas dadas por Valeriano en el cuestionario a los ítems 7b y 7c

- "*b) ¿Qué es el máximo común divisor de dos números?* "-
- "*c) Obtén el m.c.d (30,50)*"-:

Cuestión nº 7 Calculadora SÍ NO

a) ¿Qué es el mínimo común múltiplo de dos números?

Todos los numeros iguales i diferentes elevados al mayor exponente

b) ¿Qué es el máximo común divisor de dos números?

Todos los numeros iguales al menor exponente

(C7-E4, tarea 7, ítems 7a y 7b)

En el cuestionario, Valeriano no diferencia entre el contenido conceptual y procedimental de máximo común divisor. Identifica ambos contenidos y los define como "*todos los números (factores) iguales al menor exponente*". En la entrevista, al preguntarle por un método alternativo indica que los desconoce:

E: *En los dos últimos ha realizado la descomposición factorial, ¿podría resolverlo de otro modo?*
Valeriano: *Sí, dividiendo entre 5 el 50, y entre 3 el 30.*
E: *¿Pero si fueran otros números?*
Valeriano: *Pues igualmente, ..., no sabría.*

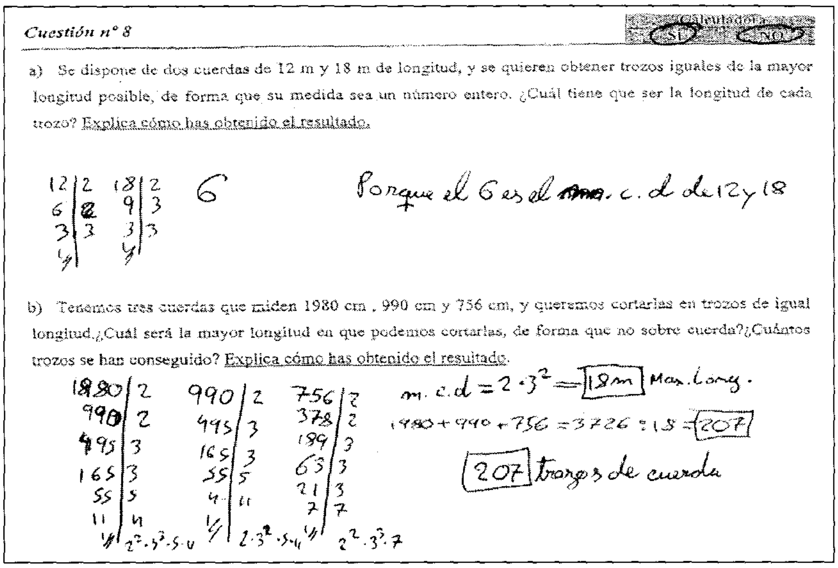
(b) Hipótesis de trabajo 2:

"*podría mostrar una forma de conocer* ***proceso*** *del elemento matemático máximo común divisor de dos o más números. Es capaz de identificar qué elemento matemático debe aplicar para resolver la situación problemática planteada, utilizar un procedimiento de cálculo y tomar decisiones sobre el resultado obtenido desde la definición implícita de máximo común divisor*".

Esta hipótesis es fruto del análisis llevado a cabo a las respuestas dadas por Valeriano en el cuestionario a la tarea 8

-" *a) Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos* *iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado. b) Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm , 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud.¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda?¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado*". -

Valeriano identifica situaciones contextuales de aplicación del máximo común divisor:


Cuestión nº 8 Calculadora SI NO

a) Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado.

6 Porque el 6 es el m. c. d de 12 y 18

b) Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm , 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud.¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda?¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado.

$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

m. c. d $= 2 \cdot 3^2 = \boxed{18m}$ Max. Long.

$1980 + 990 + 756 = 3726 : 18 = \boxed{207}$

$\boxed{207}$ trozos de cuerda

(C7-E4, tarea 8, ítems 8a y 8b)

Valeriano determina que para resolver la situación planteada debe hallar el m.c.d (12,18). Emplea el algoritmo "*c es el máximo común divisor de dos números, a y b, sí, y sólo sí, c es el producto de los factores primos comunes a ambos, tomados cada uno con su menor exponente*" e interpreta el valor obtenido como la longitud de cada uno de los trozos. De idéntica manera responde al ítem 8b. De la entrevista realizada podría inferirse que usa la definición de máximo común divisor de manera implícita al indicar que ha de obtener un divisor de ambos y además el mayor.

E:	*Contestó en el cuestionario que serían trozos de 6 m en el primer apartado. Justifique su respuesta, por favor.*
Valeriano:	*Porque, el mayor que puede dividir a 12 y 18 es 6, tiene que ser divisores y cuerdas de igual longitud.*

Valeriano también es consciente de que existen otras posibilidades para cortar las cuerdas en trozos de igual longitud (divisores). Indica que otras longitudes de las cuerdas podrían dos divisores comunes de longitud 2 ó 3.

E: *¿Podría ser otra la longitud, si no fuera máxima.?*
Valeriano: *Sí, de 3 m.*
E: *¿Otra?*
Valeriano: *Sí, de 2.*

Sin embargo, Valeriano muestra dudas sobre la conveniencia de elegir el máximo común divisor para resolver la situación planteada en el ítem 8b:

E: *El segundo apartado es similar, pero no podrá utilizar el mismo método de antes. ¿Por qué utilizó el máximo común divisor?*
Valeriano: *Mmm, tendría que hacer el mínimo común múltiplo.*
E: *¿Busca un múltiplo o un divisor?*
Valeriano: *Un divisor.*

En la **Fase 2**, el análisis conjunto de los ítems 7b, 7c, 8a y 8b nos ayuda a inferir que Valeriano podría estar manifestando una forma de conocer **proceso** del elemento matemático máximo común divisor ya que:

- Utiliza el elemento matemático máximo común divisor de dos números para interpretar el valor de este elemento en una situación real.
- Usa un procedimiento de cálculo del máximo común divisor de dos o más números naturales y establece relaciones inconexas entre el contenido conceptual y procedimental.
- Aplica el elemento máximo común divisor en una situación real.

En la **Fase 3** se determina el nivel de desarrollo del esquema de Divisibilidad que presenta un alumno. Se considera conjuntamente en el cuestionario y en la entrevista las formas de conocer de los distintos elementos matemáticos (múltiplo, divisor, ser divisible, mínimo común múltiplo y máximo común divisor), los modos de representación (decimal o factorial) utilizados en la resolución de las diferentes tareas y las relaciones lógicas que los estudiantes establecen entre los diferentes elementos matemáticos de divisibilidad.

Consideradas conjuntamente las respuestas a los ítems de las tareas 1, 2, 4, 9 y 10 observamos que Valeriano usa, en determinadas ocasiones, de manera inconexa la idea de múltiplo y divisor como podemos ver en el siguiente protocolo de la tarea 1:

E:	*¿Qué es un múltiplo de un número?, ¿y un divisor de un número?*
Valeriano:	*Un múltiplo es..., ahora en estos momentos no recuerdo. Y divisor tampoco.*
E:	*¿Por qué dijo en el cuestionario que 8 es divisor de 2?*
Valeriano:	*Porque lo divide.*

Por otra parte, Valeriano no establece las relaciones entre factor y las ideas de múltiplo y divisor, vinculando la divisibilidad a la representación decimal de los números. Por ejemplo en los ítems de la tarea 9

- "*Sabiendo que: 1001 = 7 x 11 x 13 y 91 = 7 x 13, ¿son correctas las siguientes afirmaciones? a) 91 no es divisor de 1001. b) 77 es divisor de 100. c) 2002 no es múltiplo de 13. Justifica la respuesta*"-

Valeriano indica en el cuestionario Valeriano que 91y 77 son divisores de 1001, sin justificar la respuesta.

Posteriormente en la entrevista, al ser preguntado utiliza la operación de dividir para determinar si 1001 es divisible por 91 o por 77:

E:	*Observe el enunciado, ¿es 77 divisor de 1001?*
Valeriano:	*(Divide) Sí.*
E:	*¿Y 91 es divisor de 1001?*
Valeriano:	*(Divide) Sí.*
E:	*¿Podría contestar a las cuestiones anteriores, sin hacer operaciones?*
Valeriano:	*Tendría que operar.*

Valeriano observa que la división de 1001 entre 77 da exacta, al igual que la división de 1001 entre 77, sin vincular la divisibilidad con la descomposición en factores primos.

De igual modo, responde en el cuestionario a la cuestión de "2002 no es múltiplo de 13", sin justificar su respuesta, que justifica posteriormente en la entrevista

E: *¿2002 es múltiplo de 13?*
Valeriano: *(Divide) Sí.*
E: *¿Y sin operar?*
Valeriano: *No le podría decir.*
E: *¿2002 es múltiplo de 1001?*
Valeriano: *Sí.*
E: *¿1001 es múltiplo de 13?*
Valeriano: *Sí, porque al multiplicar 7 por 11 es 77 y 1001 tiene el por 13.*
E: *¿2002 es múltiplo de 13?*
Valeriano: *Yo creo que sí. Sí que es, sí.*

Valeriano responde utilizando la operación de dividir, y a pesar de las indicaciones del entrevistador, no vincula la idea de múltiplo a la representación factorial.

Por otra parte, Valeriano usa el criterio de divisibilidad por 2, pero no recuerda el criterio de divisibilidad por 3. Por ejemplo en los ítems de la tarea 3
-"*Indica, justificando tu respuesta, el valor de b para que el número 2b45, I. Sea divisible por 2. II. Sea divisible por 3. III. Sea divisible por 6.*"-
Valeriano no contesta a estas preguntas en el cuestionario. En la entrevista, conoce y aplica el criterio de divisibilidad por 2 un número es divisible por 2 si acaba en cifra par:

E: *¿Qué valdrá b para que 2b45 sea divisible por 2?*
Valeriano: *A ver, ¿con cualquiera número? A ver, divisible entre 2 no sería porque 5 no lo es.*

La divisibilidad del número 2b45 entre 3 la discute Valeriano aplicando un falso criterio de divisibilidad que se refiere a las dos últimas cifras del número (45), buscando un criterio similar al de 2, en el que utiliza que el número será divisible por 3 si las dos últimas cifras constituyen un número divisible por 3:

E: *¿Y para que 2b45 sea divisible entre 3?*
Valeriano: *Cualquiera.*
E: *¿2245?*
Valeriano: *Creo que sí (divide). No, no es.*
E: *¿Por qué dijo cualquiera?*
Valeriano: *Porque había calculado sobre 45, y 45 entre 3 es 15.*

Cuando el entrevistador le pide si conoce el criterio de divisibilidad por 3, Valeriano manifiesta que no lo conoce:

E: *¿Recuerda el criterio de divisibilidad por 3?*
Valeriano: *No.*

Valeriano contesta que el número 2b45 tampoco puede ser divisible por 6, mediante la realización de pruebas de ensayo y error, usando la operación de dividir:

E: *Diga qué ha de valer b para que 2b45 sea divisible por 6.*
Valeriano: *(Prueba con 2145, 2245,...) No sale.*
E: *¿Era divisible por 2?*
Valeriano: *No.*
E: *¿Si no es divisible por 2, es divisible por 6?*
Valeriano: *Tampoco, porque 2 es ..., 6 es 2 por 3.*
E: *¿Para que sea divisible por 6 qué ha de ocurrir?, ¿qué sea divisible por 2?*
Valeriano: *Sí, divisible por 2, y también por 3.*

Ante las indicaciones del entrevistador, Valeriano parece que empieza a coordinar la divisibilidad, en este caso por 2 y por 3 para discutir la divisibilidad por 6. Pero

posteriormente en los ítems de la cuestión 4b
-"*Consideremos el número: $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. b) ¿M es divisible por 5? ¿Por 2? ¿Por 9? ¿Por 11? ¿Por 15? Explica tu respuesta*"-,
Valeriano recurre a la representación decimal de M (4725) y a la operación de dividir para discernir si M es divisible por alguno de los números, en particular para determinar si 4725 es divisible por 15, sin coordinar la divisibilidad por 3 y por 5:

E:	*¿M es divisible por 3?*
Valeriano:	*(Divide) Sí.*
E:	*¿M es divisible por 5?*
Valeriano:	*(Divide) Sí.*
E:	*¿M es divisible por 15?*
Valeriano:	*(Divide) Sí.*
E:	*¿Podría justificar su respuesta sin utilizar la calculadora y sin averiguar el producto de los números?*
Valeriano:	*No.*

Pensamos que la coordinación de la divisibilidad que Valeriano ha realizado en la tarea 3c se debía a las indicaciones del entrevistador, porque posteriormente no ha usado estas indicaciones para determinar la divisibilidad por 15, ha recurrido a la operación de dividir.

Finalmente, hemos visto anteriormente que Valeriano aplica el máximo común divisor en situaciones reales, pero cuando es inferido sobre el mínimo común múltiplo, por ejemplo en el ítem 6
- "*Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho*"-
Valeriano no lo sabe aplicar y responde en el cuestionario que el tiempo que tardarán en encontrarse será un año, sin ofrecer más justificaciones. En la entrevista responde del siguiente modo:

E: *Su respuesta fue que se encuentran en un año, pero eso no es cierto. Piénselo por favor.*

Valeriano: *Mmm, (piensa y opera). Cada 60 días, he buscado la diferencia de 3 días, y de 3 a 12 hay que multiplicar por 4, y por tanto cada periodo de 4 se encuentran, es decir 15 por 4 son 60.*

E: *El número que obtiene, ¿es un múltiplo o un divisor de los otros?*

Valeriano: *Mmm, 60 se puede dividir, por tanto es un múltiplo.*

E: *¿Podría ser otro número de días en el que coincidieran con anterioridad?*

Valeriano: *Mmm, no.*

Valeriano identifica la situación para obtener un múltiplo de ambos números, y obtiene que es 60 aunque sigue un razonamiento basado en obtener la diferencia de días, realizando pruebas de ensayo y no deduce que tiene que obtener el mínimo común múltiplo de ambos, y cuando el entrevistador le pide que realice la descomposición factorial de 12 y 15, actúa mecánicamente aplicando el algoritmo y obtiene que es 60, pero no sabe determinar que el valor que ha obtenido es el mínimo común múltiplo de los dos números:

E: *Realice la descomposición factorial de 12 y de 15. Obtenga su mínimo común múltiplo.*

Valeriano: *(Descompone en factores) Es 2^2x3x5, que es,.., 60.*

E: *¿Es el mínimo?*

Valeriano: *Mmm, no., porque..., no sé.*

Desconoce el significado del elemento mínimo común múltiplo, y es capaz de usar el algoritmo de buscar en la descomposición factorial los factores comunes y no comunes de mayor exponente, pero sin la capacidad de discutir que el valor obtenido por este método es el mínimo de los múltiplos comunes, por lo que pensamos que lo usa de modo mecánico.

Este hecho es ratificado en las respuestas que ofrece en los ítems 7a –definición de m.c.m- y 7d -obtención de m.c.m (30, 50)- ya que en el cuestionario Valeriano define el mínimo común múltiplo mediante el procedimiento de "*números (factores) iguales y diferentes al mayor exponente*", al igual que en la entrevista:

E: *¿Qué es el mínimo común múltiplo de dos números?*
Valeriano: *Los números que coinciden elevados a mayor exponente*
E: *Pero, ¿puede definirlo?*
Valeriano: *No, sé como se obtiene pero no sabría definirlo.*

Para calcular el m.c.m (30,50), Valeriano lo obtiene en el cuestionario mediante el procedimiento de la descomposición factorial ($30 = 2 \times 3 \times 5$, $50 = 2 \times 5^2$) diciendo que m.c.m $(30, 50) = 2 \times 3 \times 5^2 = 60$. Cuando en la entrevista se le pregunta si conoce un método alternativo de obtención del mínimo común múltiplo, contesta que no:

E: *¿Y para obtener el mínimo común múltiplo de otro modo que no utilizase la descomposición factorial?*
Valeriano: *No sabría decirle.*

Observadas las respuestas de Valeriano a lo largo de todas las tareas podemos ver que vincula las relaciones de divisibilidad a la representación factorial de los números, que usa parcialmente los criterios elementales de divisibilidad sin coordinarlos, y aunque aplica el máximo común divisor en una situación real, no lo hace para el mínimo común múltiplo, empleando en ambos casos un único procedimiento de obtención mediante el algoritmo de la descomposición factorial, y asociando la definición al procedimiento de cálculo.

El comportamiento global de Valeriano en el cuestionario y en la entrevista nos permite decir que Valeriano se encuentra en el nivel Intra del desarrollo del esquema de Divisibilidad.

En los protocolos de respuesta de la alumna de 1° de ESO Elsa (C1-E1) podemos nuevamente poner de manifiesto la importancia de la Fase 2. En esta fase del procedimiento de análisis se pueden observar, entre otras, las dificultades que parecen mostrar los estudiantes cuando las tareas exigen tomar decisiones sobre números expresados en modo de representación factorial.

En la **Fase 1,** el análisis correspondiente al uso que hace Elsa del elemento "ser divisible" en distintas tareas dio lugar a las siguientes hipótesis de trabajo:

(a) Hipótesis de trabajo 1:

"*es capaz de tomar decisiones sobre la divisibilidad de un número representado factorialmente y tiene dificultades para establecer su indivisibilidad*".

Esta hipótesis se genera al analizar las respuestas dadas por Elsa en el cuestionario y en la entrevista a los ítems 4a y 4b de la cuestión 4

- "*Consideremos el número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. *a) ¿M es divisible por 7? Explica tu respuesta. b) ¿M es divisible por 5? ¿Por 2? ¿Por 9? ¿Por 11? ¿Por 15? Explica tu respuesta*".-

En el cuestionario Elsa determina la divisibilidad por 7, por 5, por 2, por 9 y por 11 usando M en su representación decimal, y a partir de esta representación tomar decisiones sobre su divisibilidad realizando la operación de dividir o aplicando los criterios de divisibilidad.

Elsa, a partir de la representación decimal de M, argumenta su divisibilidad por 7 dividiendo M (1575, valor erróneo) entre este valor. La divisibilidad de M por 5 y por 2 la discute a través de los criterios de divisibilidad del 5 y del 2. Se observa que Elsa contesta correctamente sobre la divisibilidad del número M por 9, por 11 ó por 15, pero no ofrece ninguna justificación a su respuesta. Las respuestas de Elsa en el cuestionario pueden observarse a continuación. Por ejemplo la divisibilidad por 7 la justifica diciendo que M es divisible por 7 "*porque da de resto 0. Da 1575 : 7 = 225*".

Cuestión nº 4

Calculadora: ~~SI~~ NO

Consideremos el número: $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ 1575

a) ¿M es divisible por 7? Explica tu respuesta Sí porque de resto sale 0. Da 1575 : 7 = 225.

b) ¿M es divisible por 5? ¿Por 2? ¿Por 9? ¿Por 11? ¿Por 15? Explica tu respuesta.

5 Sí porque termina en 5.
2 No porque no termina en cifra par
9 Sí ~~porque la suma de sus número es~~
11 No
15 Sí

(C1-E1, tarea 4, ítems 4a y 4b)

En la primera parte de la entrevista procede de modo idéntico. Las respuestas dadas parecen evidenciar que la forma de conocer el elemento matemático ser divisible por 7, por 9 y por 11 podría ser **acción**. Obtiene la representación decimal de M, divide y comprueba que el resultado es exacto. Por el contrario, la forma de conocer el elemento matemático ser divisible por 5 podría ser **proceso**. Desde la representación decimal de M la alumna dilucida su divisibilidad por 5 aplicando su criterio de divisibilidad y la indivisibilidad de M por 2 haciendo uso del criterio de divisibilidad por 2.

E: *¿$M = 3^3 \times 5^2 \times 7$, M es divisible por 7?*
Elsa: *Tengo que obtener M. (Opera) Es 4725, que dividido por 7 es exacto, sí es divisible por 7.*
E: *¿M es divisible por 5?*
Elsa: *Sí, porque acaba en 5.*
E: *¿M es divisible por 2?*
Elsa: *No, porque es impar.*
E: *¿M es divisible por 3?*
Elsa: *(Suma mentalmente las cifras de 7425) No, porque es 19, mmm, no, no, es 18, sí es divisible por 3.*
E: *¿M es divisible por 9?*
Elsa: *(Divide) Sí.*
E: *¿M es divisible por 11?*
Elsa: *(Divide) No.*

Cuando el entrevistador le solicita un método alternativo de justificación de sus respuestas, Elsa vincula la idea de "se divisible" a la representación factorial de M:

E: *¿Podría justificar su respuesta sin utilizar la calculadora y sin averiguar el producto de los números?*
Elsa: *Por 9 sí, porque está 27 (señala el producto).*
E: *¿M es divisible por 5?*
Elsa: *Sí, porque está ahí, tiene 25.*
E: *¿M es divisible por 7?*
Elsa: *Sí, porque está en el producto de M.*
E: *¿M es divisible por 15?*
Elsa: *No, bueno, multiplicando 5 por 3 sí.*

Esta nueva forma de argumentar sobre la divisibilidad de M, parece indicar que Elsa

(a) **encapsula** como **objeto** el elemento matemático ser divisible por 9, por 5 y por 7. Es capaz de tomar decisiones desde la representación factorial de M. Establece la relación lógica **bicondicional** "*P es un factor de M* $\Leftrightarrow$ *M es divisible entre P*",
(b) conoce como **proceso** el elemento matemático ser divisible por 15, ya que coordina la divisibilidad por 3 y por 5 para establecer la divisibilidad por 15.

Mención aparte merece el estudio de las respuestas de Elsa cuando se le pregunta por la divisibilidad por 2 y por 11 (números que no aparecen en la descomposición factorial de M):

E: *¿M es divisible por 2?*
Elsa: *Sí, está en la potencia (señala el exponente de 5^2)*
E: *¿M es divisible por 11?*
Elsa: *Sí, si se hace 3 por 3 más 2.*

En estas respuestas, utiliza argumentos erróneos y los adapta a sus necesidades. Parece no existir, en el caso del 2 y de 11, conexión entre la idea "ser divisible" y el hecho de que estos números formen parte o no de la descomposición en factores primos de M. La alumna no establece la relación lógica **contrarrecíproca** "*P no es factor de M, entonces P no divide a M*".

Por tanto, Elsa para resolver la tarea planteada en los ítems 4a y 4b necesita, en un primer momento, expresar M en su representación decimal para poder discutir la divisibilidad, o bien aplicando los criterios de divisibilidad (por 2, por 9 y por 5) o realizando la división (por 7, por 11, por 15). Posteriormente, lo que hace es utilizar la representación factorial de M y actuar del siguiente modo:

- si p es un factor primo ó compuesto de la descomposición (caso de 7, 5, 9 y 15) reconoce rápidamente que M es divisible por p;
- si p es un número primo que no aparece en la descomposición factorial de M, no es capaz de decidir sobre la indivisibilidad de M. Contesta erróneamente si utiliza la representación factorial de M y correctamente a través de la representación decimal de M.

(b) Hipótesis de trabajo 2:

"no es capaz de tomar decisiones sobre si un número expresado como suma de dos sumando es divisible por números primos o compuestos".

Evidencias de esta hipótesis de trabajo las encontramos en las respuestas dadas por Elsa a la cuestión 10

-"*Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta: El número* $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ *es: a) Divisible por 5. b) Divisible por 2 y por 4. c) Divisible por 3. d) Divisible por 6. e) Divisible por 15*"-. Para resolver la tarea, Elsa en el cuestionario obtiene la representación decimal de K (663).

Desde la representación decimal, Elsa estudia la divisibilidad de K por 5, por 2 y por 3 aplicando los respectivos criterios de divisibilidad e indica que no es divisible ni por 6, ni por 15 sin ningún tipo de justificación.

Cuestión nº 10

Calculadora: SI / NO

Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta:

El número $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ es: 663

a) Divisible por 5 No porque no termina en 5 ni en 0.

b) Divisible por 2 y por 4 No porque no termina en cifra par.

c) Divisible por 3 Si porque su suma da 15 y 15 es múltiplo de 3.

d) Divisible por 6 No

e) Divisible por 15 No

(C3-E1, tarea 10, ítems 10a, 10b, 10d y 10e)

En la primera parte de la entrevista discute la divisibilidad por 5, por 2, por 4 por 3 de la misma forma que en el cuestionario. Ante las preguntas del investigador sobre si podría resolver la tarea sin establecer la representación decimal responde que no, confirmando de este modo la hipótesis de trabajo:

E: *El número $K = 2^2 x\ 3\ x\ 5\ x\ 11 + 3$, ¿es divisible por 5?*
Elsa: *(Opera) 663 no es divisible por 5, porque no acaba ni en 0 ni en 5.*
E: *¿K es divisible por 2?*
Elsa: *Tampoco, porque 663 es impar.*
E: *¿K es divisible por 4?*
Elsa: *No, porque la última cifra no es par.*
E: *¿K es divisible por 3?*
Elsa: *Sí, porque la suma de sus cifras es múltiplo de 3.*
E: *¿Podría responder sin hallar el valor de K?*
Elsa: *No.*

Posteriormente, en el transcurso de la entrevista, a diferencia de lo manifestado en el cuestionario, justifica erróneamente la indivisibilidad por 6. Divide 66 y 3, en referencia a la representación decimal de K (663), entre 6. La divisibilidad por 15 la realiza desde la representación decimal de K sin usar que "ser divisible por 3 y por 5 implica ser divisible por 15".

E: *¿K es divisible entre 6?*
Elsa: *No, porque 66 entre 6 es 11, y 3 no.*

E: *¿K es divisible por 15?*
Elsa: *Mmm,.,, (divide) no.*

En la **Fase 2**, el análisis conjunto de los ítems 4a y 4b y los correspondientes a la cuestión 10 permite (a) identificar las dificultades que parecen mostrar los estudiantes cuando las tareas exigen tomar decisiones sobre números representados factorialmente, y hacer uso de relaciones condicionales como "*Si a/ b y a /c* $\Rightarrow$ *a / (b+c)*" y contrarrecíprocas como "*a no es factor de b* $\Rightarrow$ *a no divide a b*", (b) resolver las discrepancias y replantarse el cómo conoce los elementos los alumnos estudiados, en este caso particular, cómo conoce Elsa el elemento "ser divisible".

Consideramos que Elsa manifiesta una concepción **proceso** de la idea de "ser divisible" ya que:

- conoce y aplica los criterios de divisibilidad del 2, del 3 y del 5,
- no estable relaciones de conjunción para establecer la divisibilidad "ser divisible 2 y por 3 implica ser divisible por 6" y "ser divisible por 3 y por 5 implicar ser divisible por 15",
- discute la divisibilidad de un número representado factorialmente, independientemente que los divisores sean primos o compuestos, no siendo capaz de discernir la indivisibilidad en todos los casos,
- establece la relación contrarrecíproca "K no es divisible por 2 $\Rightarrow$ K no es divisible por 4",
- no hay manifestaciones de uso de la propiedad (o alguna de sus modificaciones): "Si a/ b y a /c $\Rightarrow$ a / (b+c)".

Observamos que el desarrollo del esquema y las manifestaciones de las formas de conocer de los diferentes elementos matemáticos requieren una construcción progresiva, en las que además juega un papel fundamental la representación del número natural.

En la **Fase 3** determinamos el nivel de desarrollo del esquema de Divisibilidad que muestra Elsa.

En esta fase observamos que las ideas de múltiplo, divisor y ser divisible son vinculadas por Elsa, en gran parte de las ocasiones, a la representación factorial del número. Ya se ha podido ver en las respuestas que ofrece a los ítems de las tareas 4a y 4b.

Por otra parte, Elsa establece relaciones entre los elementos de divisibilidad, como hace por ejemplo en el ítem 2

- "*Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son: 464, 493, 522 y 551. ¿De qué número se trata? Explica tu respuesta.*"-

ya que observa que la diferencia entre términos sucesivos de la serie de números es 29. Cuando el entrevistador propone que realice la descomposición factorial de los números de la serie Elsa indica que 29 es el número buscado, ya que se trata de un divisor común de todos los números (464, 493, 522 y 551):

E: *¿Podría utilizar otro método?*
Elsa: *No sé.*
E: *Si realiza la descomposición factorial de los términos de la sucesión, ¿podría obtener la respuesta? ¿Por qué?*
Elsa: *Voy a realizar la descomposición factorial (la realiza). En todos aparece 29, 29 es divisor de todos ellos.*

Elsa ve que 29 aparece en la descomposición en factores primos de todos los números de la serie, por los que 29 es divisor de todos ellos, además contestando que no habrá otro común a todos ellos:

E: *¿Existe algún número más que cumpla las condiciones del enunciado?*
Elsa: *No, porque no hay ningún número más que se repita en la descomposición factorial de todos.*

Elsa está relacionando las ideas de factor y divisor, y de divisor y múltiplo, cuando aparece el número expresado por su representación factorial. Sin embargo al insistirle si podría haber otro número, lo que hace es indicar que debería aparecer en las descomposiciones factoriales, por lo que parece que está descartando los posibles divisores compuestos de los números de la serie.

Lo que puede estar indicando este comportamiento es que la concepción de múltiplo vinculada a la representación factorial: descomposición en factores primos esta en su "inicio". Elsa utiliza la descomposición en factores primos para buscar un divisor común. Una vez encontrado "un factor primo" común en las diferentes descomposiciones, este factor es visto como un divisor común. No sabemos en estos momentos si también hubiera identificado como divisor común a un producto de factores primos. Suponemos que está entendiendo que si un número no aparece en la descomposición factorial, no es divisor (aunque sabemos que las negaciones no son conceptualmente idénticas a las afirmaciones).

Mostramos dudas por la forma de encontrar soluciones alternativas a la mera división, lo que nos hace pensar que no considera de igual modo las representaciones decimal y factorial de los números para utilizarlas en las relaciones de divisibilidad.

Por otra parte, cuando los dos números aparecen expresados mediante la descomposición en factores primos, Elsa no vincula la idea de múltiplo a la representación factorial. Por ejemplo en los ítems 4c y 4d
- "*Consideremos el número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$: *c) ¿*$3^4 \times 5 \times 7^3$ *es un múltiplo de M? Explica tu respuesta. d) ¿*$3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ *es un múltiplo de M? Explica tu respuesta*".
En el cuestionario contesta correctamente obteniendo las representaciones decimales de K y M, efectuando las divisiones y comprobando si el resultado es exacto.

Posteriormente en la entrevista actúa de idéntico modo, obtiene la representación decimal de M y de K, divide y comprueba si el resultado es exacto:

E: *¿*$3^4 \times 5 \times 7^3$ *es un múltiplo de M?*
Elsa: *Sí será, porque..., (divide), ah no es.*
E: *¿*$3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ *es un múltiplo de M?*

Elsa: (Opera y divide) Pero aparece un exponente, no es.

Elsa obtiene las expresiones en el sistema decimal de los dos números y efectúa la operación de dividir, comprobando el resultado, aunque en el segundo caso el resultado aparece en notación científica y no es capaz de determinar si es múltiplo o no.

Los criterios elementales de divisibilidad puede usarlo, por ejemplo en la tarea 3 - "*Indica, justificando tu respuesta, el valor de **b** para que el número **2b45** sea: I. divisible por 2; II. divisible por 3; III. Divisible por 6*"- .
Elsa aplica en el cuestionario los criterios de divisibilidad por 2 (un número es divisible por 2 si la cifra de las unidades es par) y por 3 (la suma de las cifras debe ser 3 o múltiplo de 3), e indica que no es posible que 2b45 sea divisible por 2 y que 2145 sí es divisible por 3, al sumar su cifras 12. En la respuesta al valor de b para que sea divisible por 6, indica que no es posible, pero sin justificar su respuesta.

En la entrevista procede de idéntico modo, pero tenemos que observar la justificación que realiza de que 2b45 no es divisible por 6:

E: Diga cómo justifica las respuestas.
Elsa: Divisible por 2 no puede ser porque acaba en cifra impar.
E: ¿Y para que sea divisible por 3?
Elsa: A ver,.., voy a sumar los números y saber si la suma es múltiplo de 3. Por ejemplo el 1, 2145 es divisible por 3.
E: ¿Otro?
Elsa: Mmm,..., 4, 2445.
E: ¿Y para que sea divisible por 6?
Elsa: Lo mismo, que sea divisible por 3, a ver 2145 entre 6 no es exacto., mmm,..

Está utiliza erróneamente el hecho de que 2b45 es divisible por 3 entonces 2b45 es divisible por 6. Cuando el entrevistador le propone distintas posibilidades para la determinación de la coordinación de la divisibilidad:

E: *¿Observa alguna relación del tercer apartado con los apartados anteriores?*

Elsa: *Sí, porque se multiplican.*

E: *¿Para que sea divisible por 6, tendrá que ser divisible por 2?*

Elsa: *Sí, porque todos los divisibles por 6 serán divisibles por 2.*

E: *¿O es al contrario?*

Elsa: *Al revés, mmm,.. para que sean divisibles por 6 tendrán que ser divisibles por....*

E: *¿Si no es divisible por 2, puede ser divisible por 6?*

Elsa: *No*

Aunque Elsa parece observar las implicaciones: Q es divisible por 3 $\Rightarrow$ Q es divisible por 6, y Q no es divisible por 2 $\Rightarrow$ Q no es divisible por 6, no consideramos que en este caso es capaz de coordinar la divisibilidad, ya que al ser preguntada posteriormente por la divisibilidad de 2b45 por 6, vuelve a utilizar erróneamente la relación:

E: *¿Qué valor puede tomar b para que ese número sea divisible por 6?*

Elsa: *2145 para que sea entre 3 (divide), pero no es divisible por 6.*

Elsa no asevera sus respuestas y necesita realizar la operación de dividir para comprobar si el número es divisible por 6. No realiza la coordinación de ser divisible por 2 y ser divisible por 3, para ser divisible por 6.

En cambio, en los ítems de la tarea 4b, hemos observado que sí coordina la divisibilidad por 3 y por 5 para determinar la divisibilidad por 15:

E: *¿($M = 3^3 \times 5^2 \times 7$) M es divisible por 15?*

Elsa: *No, bueno, multiplicando 5 por 3 sí.*

En esta caso, Elsa observa que 15 se obtiene de multiplicar 3 por 5, y por tanto como aparece en la descomposición en factores primos de M, el número M es divisible por 15.

Por tanto, Elsa es capaz de usar los criterios elementales de divisibilidad (por 2, por 3 y por 5), y en algunos casos pueden coordinar dos criterios.

Finalmente, Elsa puede usar alguno de los algoritmos de obtención de los elementos matemáticos mínimo común múltiplo y máximo común divisor y aplicarlos en contextos de situaciones reales. Por ejemplo, en el ítem 6

-"*Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho*"-.

En el cuestionario Elsa parece identificar la situación como la obtención de múltiplos comunes en un problema concreto en un contexto real. Confecciona una lista de múltiplos de 15 (15, 30, 45, 60, 75, ...) y otra lista de múltiplos de 12 (12, 24, 36, 48, 60, 72, ...) para buscar el primer múltiplo común que aparece en ambas sucesiones (60).

Cuando en la entrevista se le pide un método alternativo, cita el de obtención del mínimo común múltiplo mediante la representación factorial de ambos pero no sabe obtenerlo:

E: *Obtuvo los múltiplos de 12 y de 15, y su respuesta fue 60 días. ¿Podría buscarlo de otra forma?*
Elsa: *Haciendo la descomposición factorial. (Descompone en factores 12 y 15) Si multiplico todo sale.*
E: *El número que obtiene ¿es un múltiplo o un divisor de los otros?*
Elsa: *Un múltiplo.*
E: *Al multiplicar todo sale 180. ¿Por qué no prueba con el mínimo común múltiplo?*
Elsa: *Mmm,.., tomaré los .., no recuerdo.*

Elsa aplica la idea de mínimo común múltiplo, vinculándola a las series de múltiplos comunes de ambos números, pero no a la descomposición factorial de ambos.

Para calcular el m.c.d (30, 50) -ítem 7c- usa en el cuestionario la descomposición factorial de ambos números, indicando que m.c.d (30, 50) = 2 x 5. Además Elsa no sabe dar la definición de máximo común divisor. Así, cuando se le pregunta en la entrevista responde del siguiente modo:

> *E:* *¿Qué es el máximo común divisor de dos números?*
> *Elsa:* *Dije el mayor número de los divisores,..., cuando ..., no recuerdo bien.*

Por último, cuando Elsa tiene que aplicar el máximo común divisor en una situación de contexto real muestra dificultades en su aplicación. Por ejemplo, en los ítems de la tarea 8

-" *a) Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado.*
b) Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm , 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud.¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda?¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado".

En el primer apartado, Elsa contesta en el cuestionario que "*de 6 m. Buscando los divisores*", sin realizar otra justificación. Y el segundo apartado no lo responde.

Posteriormente en la entrevista justifica su respuesta diciendo que 6 es el mayor número por el que se pueden dividir :

> *E:* *Justifique su respuesta, por favor. Dio 6 m como resultado.*
> *Elsa:* *El mayor número por el que se pueden partir es el 6, por ejemplo al dividirlo salen de 6.*
> *E:* *¿Y 10 podría ser?*
> *Elsa:* *No, no se pueden dividir por 10.*
> *E:* *¿Y en trozos más pequeño podría partirlos?*
> *Elsa:* *Sí, de 3 m, ó de 2 m.*

Parece que Elsa sólo puede calcular el máximo común divisor cuando se trata de números pequeños, ya que en el segundo apartado sólo realiza pruebas de ensayo y error:

E: Para el apartado b), no lo hizo, ¿por qué?

Elsa: Mmm,.., puede salir dividiendo por 3.

E: ¿Podría ser de mayor longitud que 3?

Elsa: Lo estoy pensando, podría ser 6.

E: ¿Y más grande que 6?

Elsa: ¿Entre 12?

E: Compruébelo.

Elsa: Mm, no sé qué podría hacer.

Después de haber analizado las respuestas de Elsa en todo el cuestionario y en la entrevista, podemos ver que puede vincular las relaciones de divisibilidad a la representación decimal de los números naturales, usa los criterios elementales de divisibilidad y, en determinadas ocasiones, puede coordinarlos. También puede calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos números, aunque en algunas ocasiones de aplicación real manifiesta dificultades en su obtención. Por todo ello, determinamos que el nivel de desarrollo del esquema de Divisibilidad que tiene Elsa es Ínter.

CAPÍTULO 4

Capítulo 4. Resultados

Comenzamos este capítulo realizando un análisis psicométrico, por niveles y globalmente, de los datos obtenidos en los cuestionarios. Este análisis cuantitativo nos ha permitido determinar y comparar la dificultad, fiabilidad, validez del constructo y generalizabilidad del cuestionario desde las características correlaciónales y teóricas de la investigación. Posteriormente, se ha hecho un análisis cualitativo de las respuestas de los cuestionarios y de las entrevistas realizadas. Con este análisis hemos tratado de establecer las formas de conocer la divisibilidad en N y caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de Divisibilidad en N en las distintas poblaciones estudiadas.

4.1. Análisis cuantitativo.

Los alumnos que han participado en esta investigación fueron 371, 120 alumnos de 1º de ESO, 137 de 4º de ESO y 114 de 1º de Bachillerato. Los contenidos matemáticos que han formado parte del cuestionario han sido los seleccionados tras el análisis psicométrico realizado en el cuestionario piloto. Las respuestas han sido codificadas de forma dicotómica (0 ó 1). El análisis cuantitativo de la prueba nos ha permitido determinar (a) el grado de correlación que presentaba el cuestionario en cada uno de los niveles y (b) analizar desde el punto de vista teórico el por qué de los resultados.

Las referencias tomadas para realizar el análisis estadístico corresponden a García y Pérez (1989), Álvaro (1993), Castejón (1997), Muñiz (2001), García et al. (2002), Cobo (2003) y Batanero (2003). El proceso estadístico se ha efectuado con el programa informático SPSS 12.0, complementado con la hoja de cálculo Microsoft Excel. Un informe detallado de los resultados del mismo se puede observar en el Anexo III.2.

1. Índice de Dificultad.

En función de los resultados estadísticos del índice de dificultad (I.D.) obtenidos en la prueba definitiva, el cuestionario puede ser considerado **aceptable** ya que el índice de dificultad de la muestra total es de 0,5150. Estudiando la calificación global de los 40 ítems del cuestionario a partir de las medias en cada uno de los cursos investigados, se han obtenido los siguientes resultados en los diferentes cursos, donde la variabilidad de esta puntuación varía entre el valor mínimo de 0 y el valor máximo de 1:

Curso	ESO 1	ESO 4	BACH 1
Índice de Dificultad	0,4483	0,5257	0,5721

Tabla 4.1. Índices de Dificultad por cursos

Según las categorías establecidas por García y Pérez (1989) para el índice de dificultad- medias globales por grupo- podemos observar en la Tabla 4.2 el grado de dificultad del cuestionario para los distintos cursos. Esta dificultad ha sido calculada en función de ese índice y para los 40 ítems considerados en el total del cuestionario:

Tipo de prueba	**Valores que los limitan**	**Grupo según resultado**
Muy Difícil	< 0,25	---------------
Difícil	0,25 a 0,44	--------------
Dificultad Media	0,45 a 0,54	ESO 1 (0,4483) ESO 4 (0,5257)
Fácil	0,55 a 0,74	BACHILLERATO 1 (0,5721)
Muy Fácil	>0,74	---------------

Tabla 4.2. Categorización de los Índices de Dificultad por cursos

La categorización realizada por García y Pérez (1989) en intervalos de dificultad en función del I.D, permite clasificar los ítems de menor a mayor dificultad en cada uno de los cursos estudiados (Tabla 4.3.). En la Tabla 4.4 se indican los elementos matemáticos y el tipo de representación en cada ítem asignado a un determinado nivel de dificultad.

Tipo de ítem	Valores que los limitan	Número de ítems en la prueba			Porcentajes			Número de ítems (por orden de dificultad)		
		1º ESO	4º ESO	1º Bach.	1º ESO	4º ESO	1º Bach.	1º ESO	4º ESO	1º Bach.
Muy Difíciles	< 0,25	10	6	2	25%	15%	5%	8b2, 8b1, 7a, 7b, 3c, 4d, 2, 1c2, 5c, 3a	7a, 8b2, 7b, 3c, 8b1, 4d	8b2, 4d
Difíciles	0,25 a 0,44	8	9	11	20%	22,5%	27,5%	1c3, 5b, 6, 8a, 3b, 1c1, 5d, 5a	2, 3a, 3b,1c2, 5d, 6, 1c1, 1c3, 8a	7a, 8b1, 7b, 2, 3c, 6, 3a, 3b, 5d, 7c, 1c1
Dificultad Media	0,45 a 0,54	4	1	4	10%	2,5%	10%	9c, 7c, 10d, 4c	7c	1c3, 5c, 1c2, 8a
Fáciles	0,55 a 0,74	17	17	12	42,5%	42,5%	30%	9a, 10b, 10a, 4b2, 7d, 10e, 4b3, 9b, 4b4, 1a2, 4b5, 1a1, 1a3, 1a4, 10c, 4b1, 4a	5b, 5c, 9c, 10b, 4c, 10a, 1a2, 1a3, 10d, 10e, 1a4, 1a1, 7d, 9a, 9b, 5a, 10c	5b, 9c, 10a, 10b, 10d, 10e, 7d, 10c, 9a, 4c, 5a, 9b
Muy Fáciles	>0,74	1	7	11	2,5%	17,5%	27,5%	1b	4b5, 4b3, 4b4, 4b2, 1b, 4b1, 4a	1a2, 1a3, 1a4, 4b4, 1a1, 4b3, 1b, 4b5, 4b2, 4b1, 4a

Tabla 4.3. Categorización de los niveles de Dificultad por ítems

Tipo de ítem	1º de ESO Número de ítems (por orden de dificultad)	E.M	T.P	4º de ESO Número de ítems (por orden de dificultad)	E.M	T.R	1º de Bachillerato Número de ítems (por orden de dificultad)	E.M	T.P	Muestra Total Número de ítems (por orden de dificultad)	E.M	T.P
Muy Difíciles < 0.25	8b2, 8b1, 7a, 7b, 3c, 4d, 2, 1c2, 5c, 3a	I, II, III, IV, V	D-F	7a, 8b2, 7b, 3c, 8b1, 4d	III, IV, V	D-F	8b2, 4d	I,IV	F	8b2, 7a, 8b1, 7b, 4d, 3c	III, IV, V	F
Difíciles 0.25 a 0.44	1c3, 5b, 6, 8a, 3b, 1c1, 5d, 5a	I, II, III, IV, V	D-F	2, 3a, 3b,1c2, 5d, 6, 1c1, 1c3, 8a	I, III, IV, V	D-F	7a, 8b1, 7b, 2, 3c, 6, 3a, 3b, 5d, 7c, 1c1	I, III, IV, V	D-F	2, 3a, 6, 1c2, 3b, 5d, 1c3, 1c1, 5c, 8a	I, II, III, IV, V	D-F
Dificultad Media 0.45 a 0.54	9c, 7c, 10d, 4c	I, III, V	D-F	7c	IV	F	1c3, 5c, 1c2, 8a	II,III, IV	F	5b, 7c, 9c	I, II, IV	F
Fáciles 0.55 a 0.74	9a, 10b, 10a, 4b2, 7d, 10e, 4b3, 9b, 4b4, 1a2, 4b5, 1a1, 1a3, 1a4, 10c, 4b1, 4a	I, II, III	D-F	5b, 5c, 9c, 10b, 4c, 10a, 1a2, 1a3, 10d, 10e, 1a4, 1a1, 7d, 9a, 9b, 5a, 10c	I, II, III, V	D-F	5b, 9c, 10a, 10b, 10d, 10e, 7d, 10c, 9a, 4c, 5a, 9b	I, II, III, V	D-F	10b, 10d, 10a, 4c, 10e, 9a, 5a, 7d, 9b, 10c, 1a2, 1a3, 1a4, 1a1, 4b3, 4b4, 4b5, 4b2	I, II, III, V	D-F
Muy Fáciles >0.74	1b	I	D	4b5, 4b3, 4b4, 4b2, 1b, 4b1, 4a	II, III	D-F	1a2, 1a3, 1a4, 4b4, 1a1, 4b3, 1b, 4b5, 4b2, 4b1, 4a	I, II, III	D-F	1b, 4b1, 4a	II, III	D-F

Tabla 4.4. Categorías de dificultad de los ítems en los distintos cursos

(**Elementos Matemáticos (E.M):** I. Múltiplo de un número natural. II. Divisor de un número natural. III. Ser divisible (desde la definición operativa, los criterios de divisibilidad y la representación factorial). IV. Máximo Común Divisor de números naturales. V. Mínimo Común Múltiplo de números naturales. **Tipo de Representación (T.P.)**: Decimal (**D**). Factorial (**F**))

En función de los resultados por cursos, que muestran las Tablas 4.2, 4.3 y 4.4, se tiene que:

(a) más del 52 % de respuestas son correctas en los cursos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato, mientras que en 1º de ESO se encuentra en torno al 45 %;

(b) los ítems clasificados como "Fáciles" o "Muy Fáciles" superan el 57 % en 4º de ESO y 1º de Bachillerato, mientras que sólo alcanzan el 45 % en 1º de ESO;

(c) los ítems clasificados como "Difíciles" o "Muy Difíciles" representan el 32'5% en 1º de Bachillerato, el 37,5 % en 4º de ESO y el 45 % en 1º de ESO.

Por otra parte, cada uno de los niveles de dificultad establecidos permite hacer inferencias sobre los elementos matemáticos y el tipo de representación de los números implicados en los ítems en cada uno de los distintos cursos.

Estas inferencias se detallan en los siguientes párrafos, organizadas atendiendo a las relaciones entre los elementos matemáticos y los modos de representación que empiezan a mostrar las características de la comprensión del esquema de Divisibilidad que manifiestan los estudiantes.

El ítem 4d

-"*¿*$3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ *es un múltiplo de M? Explica tu respuesta.* $(M = 3^3 \times 5^2 \times 7)$"-,

ha sido catalogado como "Muy Difícil" en todos los cursos. Creemos que la dificultad radica en que el tamaño de los exponentes no ha permitido, a la mayoría de los alumnos, la "operatividad con la calculadora", lo que les obliga a tener que hacer uso de su comprensión de la idea de múltiplo vinculada a la descomposición factorial, y que se ha manifestado como una idea difícil para los alumnos.

El 32 % de los alumnos de la muestra total sólo son capaces de discernir si un número es múltiplo de otro si ambos números están simbolizados mediante la *representación decimal* como lo confirma el hecho de que la tercera parte de las respuestas correctas del ítem 4c

- "*¿*$3^4 \times 5 \times 7^3$ *es un múltiplo de* $3^3 \times 5^2 \times 7$*?*"-

correspondan a aquellos alumnos que han utilizado la calculadora para expresar ambos números en su representación decimal y, a continuación, han dividido para comprobar si la división generaba un número entero. Sólo el 7% de los alumnos han utilizado la representación factorial de ambos números para contestar correctamente. Este ítem ha sido catalogado como "Fácil" en 4° de ESO y 1° de Bachillerato y de "Dificultad Media" en 1° de ESO.

Los ítems de las tareas 1a y 1b

- "*Completa con las palabras: divisor ó múltiplo. Razona tu respuesta. 8 es _______ de 2; 4 es _______ de 16; 21 es _______ de 7; 25 es_______ de 625*"-.

- "*Dados los números: 0, 2, 4, 6, 8, 10 y 16, determina si 64 es múltiplo de alguno de ellos. Justifica tu respuesta*"-

donde se usa las ideas de "*múltiplo y divisor entre números con representación decimal*", han sido catalogados con un nivel de dificultad "Muy Fácil" y "Fácil" dado que el tamaño de los números y la representación decimal de los mismos ha permitido discernir, en torno al 40 % de los estudiantes, si un número es múltiplo o divisor de otro mediante la operación de multiplicar o dividir, respectivamente, y en torno al 15 % a través de las operaciones de dividir o multiplicar, respectivamente.

Sin embargo, el ítem 1c1

- "*Considere la siguiente colección de números: 1, 3, 6, 8, 15, 24, 39, 42, 48, 69, 2400, 2412. Los números del listado que son múltiplos de 24 son:________*"-

que moviliza la idea de "*múltiplo*" ha sido catalogado de "Difícil" en los tres cursos. Creemos que el mayor grado de dificultad está motivado por el tamaño de los números implicados. Esta idea parece venir apoyada por las respuestas a la tarea 2

- "*Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son: 464, 493, 52 y 551. ¿De qué número se trata? Explica tu respuesta*"- .

Esta tarea ha resultado psicométricamente clasificada como "Muy Difícil" en 1° de ESO y como "Difícil" en 4° de ESO y 1° de Bachillerato, dado que exige la "inversión de la idea de múltiplo". En este ítem, 207 alumnos (55'8 %) distribuidos uniformemente en los tres cursos no ofrecen ninguna respuesta.

Entre los 99 estudiantes que ofrecen una respuesta correcta a esta tarea, 69 de ellos (18,6 %) observan las diferencias entre los términos consecutivos de la serie, pero la mayoría no realizan la operación de dividir para observar que el número obtenido (29) es divisor de todos ellos. Sólo 14 estudiantes de 4° de ESO y 1° de Bachillerato (3,8 %), utilizan la representación factorial de los elementos de la serie para buscar un múltiplo común. Pensamos que el grado de dificultad de este ítem es debido en parte al enunciado del mismo. Además, los alumnos que responden utilizan la estrategia de ensayo y error, para buscar un número por el que todos los elementos de la serie son divisibles, sin constatar la necesidad de representar factorialmente los números para determinar un divisor común a todos ellos.

Estos resultados indican que la comprensión de la idea de múltiplo está vinculada al modo de representación utilizado y que incluso el aspecto procedimental del uso de la descomposición en factores primos para identificar múltiplos (mirando la existencia de factores elevados a un mayor exponente) deja de ser efectiva cuando se invierte el orden de la pregunta (de construir múltiplos a identificar múltiplos).

Una característica similar puede observarse en relación a la comprensión y uso de la acepción "*ser divisible entre números con representación factorial*". Esta acepción ha sido categorizada como "Fácil" en 1° de ESO, "Muy Fácil" en 4° de ESO y en 1° de Bachillerato. Cuando los números estaban representados en su forma decimal o descompuestos en factores primos con exponentes pequeños, ítems 4a, 4b1, 4b2, 4b3, 4b4

-"*Consideremos el número:* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. *a) ¿M es divisible por 7?; b) ¿M es divisible por 5? ¿M es divisible por 5? ¿Por 2? ¿Por 9? ¿Por 11? ¿Por 15?*"-,

los estudiantes (el 38 % y el 49 %) han podido discutir la divisibilidad entre los números desde su representación decimal. Un porcentaje inferior al 15 %, principalmente alumnos de 4° de ESO y de 1° de Bachillerato, han discutido la divisibilidad entre los números usando la representación factorial.

El estudio de la divisibilidad e indivisibilidad entre números planteada por los ítems 9a y 9b

- "*Sabiendo que:* $1001 = 7 \times 11 \times 13$ *y* $91 = 7 \times 13$, *¿son correctas las siguientes afirmaciones? a) 91 no es divisor de 1001 b) 77 es divisor de 1001*"-,

se lleva a cabo mayoritariamente, en torno al 33 %, desde la representación decimal de los números. Sólo entre 5 % y 11 % aproximadamente de los alumnos estudian la divisibilidad a través de la representación en factores dada en las dos cuestiones.

Por otra parte, el uso de la idea "*ser divisible desde los criterios de divisibilidad*", ha sido categorizado como "Difícil" y "Muy Difícil" en todos los cursos. Por ejemplo, el origen de la dificultad de la cuestión 3

- "*Indica, justificando tu respuesta, el valor de **b**, para que el número **2b45**: I Sea divisible por 2; II. Sea divisible por 3; III. Sea divisible por 6*"-

creemos que se podría encontrar en:

(a) la representación del número, ya que los alumnos no interpretan 2b45 como un número,

(b) en el desconocimiento de los criterios de divisibilidad de 2 y de 3 o en su aplicación por la existencia de una cifra desconocida, y

(c) en la dificultad en el uso de la conjunción lógica para coordinar criterios de divisibilidad para obtener otro criterio.

Por ejemplo, el ítem 3c ha sido calificado de "Muy Difícil" en 1° y 4° de de la ESO y de "Difícil" en 1° de Bachillerato. No ha sido contestado por 168 alumnos (45,3 %), 23 estudiantes (6,2 %) aplican mal los criterios de divisibilidad, 27 alumnos (7,3 %) confunden el enunciado como un producto de cifras y, por último, 5 estudiantes (1,3 %) realizan operaciones erróneas. De los que contestan correctamente, cabe destacar que 38 estudiantes aplican la coordinación de los criterios de divisibilidad (10,2 %), mientras que otros 10 realizan pruebas de ensayo y error, dividiendo para comprobar el resultado (2,7 %).

La utilización de la idea "*ser divisible en su forma operativa*" ha recibido una categorización muy heterogénea. El grado de dificultad de los ítems 1c2 y 1c3

- "*Considere la siguiente colección de números: 1, 3, 6, 8, 15, 24, 39, 42, 48, 69, 2400, 2412. II. Los números del listado que son divisibles por 24 son:___________ III. Los números del listado por los que 24 es divisible son:__________. Justifica tu respuesta*"-

pasa de "Dificultad Media" en 1° de Bachillerato a "Muy Difícil" en 1° de ESO. El origen de la dificultad podría estar motivado por el tamaño de los números implicados y en la confusión respecto a su significado puesto que un total de 156 alumnos en 1° de Bachillerato (42 %) y 128 alumnos en 1° de ESO (34,5 %) han respondido intercambiando los resultados en ambos ítems. Los estudiantes justifican sus respuestas (correctas o no) principalmente mediante la operación de dividir, y también mediante la de multiplicar. Estos resultados indican que el uso de la relación "*Q es divisible por P*" y de sus diferentes acepciones lingüísticas plantea dificultades a los estudiantes.

La "*traslación entre las representaciones decimal y factorial*" que exige la cuestión 5 (ítems 5a, 5b, 5c y 5d)

- "*Descompón el número 100 (Justifica tu respuesta): a) En dos factores. b) En tres factores. c) En el máximo número de factores. d) En factores primos.*"-

Hace que aparezcan clasificadas en 4 niveles de dificultad, dependiendo del ítem y del curso. Por ejemplo, el ítem 5c aparece como "Muy Difícil" en 1° de ESO, de "Dificultad Media" en 1° de Bachillerato y de "Fácil" en 4° de ESO. Un 12,7 % de los alumnos utilizan la suma para obtener una descomposición errónea y 95 alumnos no contestan. Por el contrario, el ítem 5d resulta "Difícil" en los tres cursos, y no lo contestan 144 estudiantes (38,8%). Por su parte, los ítems 5a y 5b aparecen como "Difíciles" en 1° de ESO y como "Fáciles" en los otros dos cursos, y en ambos casos la mitad de todos los alumnos utilizan el producto o la representación factorial de 100 para ofrecer una respuesta correcta, especialmente en 4° de ESO y 1° de Bachillerato. Estos resultados parecen poner de manifiesto una progresión en el significado dado a la idea de factor a lo largo de los cursos de escolaridad.

Los significados *de "Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor de dos números naturales*" implicados en la resolución de la cuestión 7

- "*a) ¿Qué es el mínimo común múltiplo de dos números?; b) ¿Qué es el máximo común divisor de dos números?; c) Obtén el m.c.d (30,50); d) Obtén el m.c.m (30,50).*"- presentan distintos niveles de dificultad. Los ítems 7a y 7b que demandan una caracterización de las ideas de mínimo común múltiplo y máximo común divisor, aparecen clasificados como "Muy Difíciles" en 1° de ESO y 4° de ESO, y como "Difíciles" en 1° de Bachillerato. Esta dificultad podría estar motivada por el carácter procedimental que se le da en las aulas a estos conceptos. Los ítems 7a y 7b, no son contestados por 48 estudiantes (13 %), de los que 32 estudiantes son de 1° de ESO; 137 alumnos (37 %) responden mal porque utilizan el procedimiento de la descomposición factorial, 63 de los cuáles son de 4° de ESO. La respuesta correcta la ofrecen únicamente 68 estudiantes (18,3 %), 29 de ellos de 1° de Bachillerato.

Los ítems 7c y 7d, por el contrario, han sido catalogados con niveles de menor dificultad. Así, el ítem 7c aparece como "Difícil" en 1º de Bachillerato y de "Dificultad Media" en los dos cursos de ESO, y el ítem 7d queda categorizado como "Fácil" en todos los cursos. El 50 % aproximadamente de los alumnos de 1º de ESO responden correctamente el ítem 7c y un 56,3 % el ítem 7d. Mayoritariamente los alumnos utilizan el procedimiento de descomposición en factores primos poniéndose de manifiesto nuevamente el carácter procedimental que se da en las aulas a la representación factorial de los números. Por último, 28 alumnos utilizan las series de múltiplos comunes para obtener el m.c.m. (30, 50).

La aplicación de la idea de "*múltiplos comunes*" en situaciones de contexto real, vinculada a la capacidad de modelizar situaciones reales a través de la idea de mínimo común múltiplo parece ser difícil. Por ejemplo, en el ítem 6

- "*Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho*"-,

más de un tercio de los alumnos (137) no contestan; 15 estudiantes (4 %) contestan erróneamente mediante la obtención del máximo común divisor. De los alumnos que contestan correctamente, 64 (17,3 %) obtienen el mínimo común múltiplo mediante el procedimiento de descomposición en factores primos y 56 alumnos (15,1 %) utilizan la serie de múltiplos comunes.

La aplicación de la idea de "*divisores comunes*" en situaciones reales, vinculada a la capacidad de modelizar situaciones reales por parte de los estudiantes, a través de la idea de máximo común divisor, correspondiente a los ítems de la cuestión 8

- "*a) Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado.*
b) Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm, 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud. ¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda?¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado." –

ha sido clasificada en distintas categorías en función de los cursos. El ítem 8a aparece en la categoría de "Difícil" en 1º y 4º de ESO, y de "Dificultad Media" en 1º de Bachillerato. El grado de dificultad de este ítem es menor que el de los ítems 8b1 y 8b2 que han sido clasificados como "Muy Difícil" en 1º y 4º de ESO y "Difícil" y "Muy Difícil", en 1º de Bachillerato, respectivamente. Esta diferencia posiblemente se encuentre en el tamaño de los números del ítem 8b2 lo que dificulta la operatividad con los mismos, y en la necesidad de generalización de la idea de máximo común divisor a tres números del ítem 8b2. Un total de 134 alumnos (36,1%) utilizan el procedimiento de obtención del máximo común divisor mediante la descomposición en factores primos, 17 alumnos (4, 6%) los resuelven por las series de divisores comunes y, por último, un total de 82 no contestan a la cuestión.

Globalmente considerados, los resultados del análisis psicométrico indican que los ítems que aparecen psicométricamente como "Fáciles" o "Muy Fáciles" son los que permiten la operatividad, bien para que los alumnos obtengan la representación decimal de los números, o bien para que efectúen las operaciones de dividir o de multiplicar para establecer si un número es múltiplo o divisor de otro.

Por otra parte los ítems clasificados como "Difíciles" o "Muy Difíciles" requieren la aplicación de las nociones de divisibilidad en situaciones contextuales, la determinación de la equivalencia entre factor y divisor, o bien la coordinación de criterios de divisibilidad, interviniendo el modo de representación decimal o la descomposición en factores primos como indicador de la comprensión de los distintos elementos matemáticos que configuran el esquema de Divisibilidad en N.

2. Índice de Fiabilidad.

La consistencia interna del cuestionario presentado en la investigación es alta. Los resultados en 1° de ESO ofrecen un coeficiente Alpha de 0,8788, lo que indica que el cuestionario es bueno en este nivel. Si eliminamos cualquier ítem del cuestionario, el índice Alpha sería superior a 0,87, en todos los casos. Por el contrario, en 4º de ESO el coeficiente Alpha es 0,8386, algo inferior al de 1º de ESO. En función de los resultados estadísticos obtenidos, si se eliminase cualquiera de los ítems se tendría un coeficiente que superaría en casi todos los casos a 0,83. En el caso de 1º de Bachillerato, se obtiene un índice Alpha de 0,8875, superior a de 1º y 4º de ESO. En este nivel, si eliminamos cualquier ítem se superaría el valor 0,88 pero sin llegar a 0,90.

3. Generalizabilidad.

Según los coeficientes de generalizabilidad[1] obtenidos en cada curso y en la muestra global (Tabla 4.5) podemos concluir que:

- Los resultados se podrían generalizar si se aplicara una prueba a los mismos alumnos con igual número de ítems en el que se modificara el enunciado, ya que el coeficiente de generalizabilidad respecto a otros ítems, en cada uno de los cursos y en la muestra global, es superior a 0,8385.
- Existe una probabilidad alta de generalizar los resultados obtenidos si se pasa la misma prueba a otros alumnos, ya que el coeficiente de generalizabilidad respecto a otros alumnos, en cada uno de los cursos y en la muestra global, es superior a 0,9635.

CURSO	**1º ESO** N = 120 alumnos 40 ítems	**4º ESO** N = 137 alumnos 40 ítems	**1º Bachillerato** N = 114 alumnos 40 ítems	**Muestra Global** N = 371 alumnos 40 ítems
Generalizabilidad respecto a otros ítems	0,8788	0,8386	0,8875	0,8767
Generalizabilidad respecto a otros alumnos	0,9658	0,9679	0,9636	0,9879

Tabla 4.5. Coeficientes de Generalizabilidad

4. Validez del Constructo.

El análisis factorial tiene como objetivo encontrar el número mínimo de factores que pueda explicar el máximo de información contenida en los datos (Álvaro, 1993; Muñiz, 2001). Este análisis nos ha permitido analizar la validez del constructo, es decir, analizar la coincidencia entre las hipótesis teóricas- *la comprensión de la divisibilidad en N por parte de la población objeto de estudio está vinculada a unos determinados elementos matemáticos, a la relación existente entre los mismos y los modos de representación*- y

[1] El coeficiente de generalizabilidad queda definido como cociente entre la varianza de las verdaderas puntuaciones de la prueba y de la varianza observada (varianza verdadera más varianza debida al error): $G = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \sigma_e^2}$

los resultados obtenidos en la prueba. Los resultados de la prueba de esfericidad de Bartlett[2] nos indican que la medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin[3] es igual a 0,738 en 1º de ESO, 0,732 en 4º de ESO y 0,727 en 1º de Bachillerato. Presenta una Chi-cuadrado aproximado de 3833,948, de 3061,927 y de 8525,742 en cada uno de los cursos, con 780 grados de libertad y una significación, $p < 0,001$, resultados que superan los criterios de significación estadística y, en consecuencia, es oportuno utilizar esta técnica.

El método de análisis factorial empleado es el de las componentes principales, que se ha aplicado a cada curso y a la muestra global, cuyos resultados aparecen explicitados en el Anexo III. Los factores resultantes son 12 en 1º y 4º de ESO y 11 en 1º de Bachillerato. Estos factores explican el 73,4 % de la varianza en 1º de ESO y 1º de Bachillerato. Mientras en 4º de ESO los 12 factores explican el 75,8 % de la varianza.

Para facilitar la interpretación de los factores retenidos se han rotado los ejes por el método Varimax, obteniéndose en cada curso la matriz de componentes rotados formada por 11 factores. En la Tabla 4.6 presentamos los resultados de los ítems que saturan los distintos factores, los intervalos a los que pertenecen sus pesos específicos y el nombre, que a nuestro juicio los caracteriza.

Los resultados del análisis factorial en cada uno de los cursos y en la muestra global ponen de manifiesto que existe un alto grado de coincidencia de los ítems que componen los cinco primeros factores, que son prácticamente idénticos. En 1º de ESO,

---

[2] La prueba de esfericidad de Bartlett se usa para contrastar la hipótesis nula que dice que las variables no están correlacionadas en la población a la que pertenece la muestra. Comprueba si la matriz de correlaciones es una matriz identidad y que los coeficientes observados no son 0 por azar. Se rechaza la hipótesis nula si la fiabilidad es menor que 0,05, y se puede hacer el análisis factorial porque las variables de la población están correlacionadas y no son independientes.

[3] La adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin indica lo apropiado de aplicar el análisis factorial, pues contrasta si las correlaciones parciales entre las variables son suficientemente pequeñas. El estadístico KMO varía entre 0 y 1y los valores mayores que 0,5 indican que es apropiado utilizar el análisis factorial.

en 4º de ESO y en la muestra global coinciden en el orden los cinco primeros, mientras que en 1º de Bachillerato permutan el primer y el segundo factor respecto a los anteriores, coincidiendo el tercero, el cuarto y el quinto factor. El resto de factores muestran un elevado grado de coincidencia en los ítems que los componen y en el orden que ocupan.

Podemos observar en la Tabla 4.6 que el análisis factorial realizado en la prueba, considerando la muestra global, presenta un alto grado de coincidencia en la agrupación de ítems con el análisis factorial realizado a la prueba piloto. Cabe reseñar que respecto al cuestionario piloto también existe elevado grado de coincidencia en los cinco primeros factores, permutando en el orden los factores primero y segundo, y los factores cuarto y quinto, coincidiendo el tercer factor. La composición de los factores en la prueba piloto y en la prueba tiene una composición idéntica en los componentes principales.

Los resultados obtenidos en el análisis factorial ponen de manifiesto que el elemento matemático que muestra una mayor influencia en la determinación de los principales factores en todos los cursos estudiados es la acepción "Q es divisible por P". Además, el modo de representación factorial es un indicador fundamental para la determinación de los principales factores explicativos del esquema de Divisibilidad. De esta forma los dos principales factores se refieren a la comprensión de la relación de ser divisible cuando uno de los números aparece expresado mediante su representación factorial.

El análisis psicométrico del cuestionario de la prueba nos ha permitido observar un nivel decreciente del coeficiente de dificultad en las respuestas ofrecidas por los alumnos en los diferentes cursos, siendo 1º de Bachillerato el curso donde se obtiene mejores resultados. Considerando la muestra global, la prueba obtiene la catalogación de aceptable. El cuestionario tiene una consistencia interna alta en todos los cursos y en la muestra global. Los coeficientes de generalizabilidad también han alcanzado valores muy altos.

Ítem Componentes	Cuestión	Intervalos de Saturación	Factor	Nombre Factor
4A, 4B1, 4b2, 4B3, 4B4, 4B5, 4C*	*Consideremos el número: $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. a) ¿M es divisible por 7? Explica tu respuesta. b) ¿M es divisible por 5? ¿Por 2? ¿Por 9? ¿Por 11? ¿Por 15? Explica tu respuesta. c) ¿$3^4 \times 5 \times 7^3$ es un múltiplo de M? Explica tu respuesta*	0,734-0,876	1º	*Comprensión de los conceptos "ser divisible" y "múltiplo" entre números simbolizados mediante representación factorial.*
10A, 10B, 10C, 10D, 10E	*Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta. El número $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ es: a) Divisible por 5 b) Divisible por 2 y 4 c) Divisible por 3 d) Divisible por 6 e) Divisible por 15*	0,825-0,926	2º	*Comprensión del concepto "ser divisible" entre números simbolizados mediante la representación factorial, la decimal o ambas.*
1A1, 1A2, 1A3, 1A4, 1C1*	*Completa con las palabras: divisor ó múltiplo. Razona tu respuesta. 8 es __ de 2 ; 4 es __ de 16; 21 es __ de 7; 25 es__ de 625 Considere la siguiente colección de números: 1, 3, 6, 8, 15, 24, 39, 42, 48, 69, 2400, 2412.Los números del listado que son múltiplos de 24 son:*	0,924-0,948	3º	*Comprensión de los conceptos "divisor y múltiplo" y la relación existente entre ellos.*
5A, 5B, 5C, 5D*	*Descompón el número 100 (Justifica tu respuesta): a) En dos factores. b) En tres factores. c) En el máximo número de factores. d) En factores primos.*	0,706-0,860	4º	*Conversión de un número expresado en notación decimal en sus posibles representaciones factoriales.*
3 A, 3B, 3C	*Indica, justificando tu respuesta, el valor de b, para que el número **2b45**: I. Sea divisible por 2 II. Sea divisible por 3 III. Sea divisible por 6*	0,835-0,855	5º	*Comprensión del concepto "ser divisible" desde los criterios de divisibilidad.*
9A, 9B, 9C	*Sabiendo que: 1001 = 7 x 11 x 13 y 91 = 7 x 13, ¿son correctas las siguientes afirmaciones? a) 91 no es divisor de 1001 b) 77 es divisor de 1001 c) 2002 no es múltiplo de 13.*	0,656-0,854	6º	*Comprensión de los conceptos "divisor y múltiplo" entre números simbolizados mediante la representación factorial y decimal.*
8A*, 8B1, 8B2	*Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado. Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm, 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud. ¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda? ¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado.*	0,851 y 0,867	7º	*Comprensión de "divisores comunes" y su aplicación a situaciones cotidianas.*
7A, 7B	*a) ¿Qué es el mínimo común múltiplo de dos números? b) ¿Qué es el máximo común divisor de dos números?*	0,844 y 0,823	8º	*Comprensión del "mínimo común múltiplo y máximo común divisor" de dos números.*
7C, 7D	*c) Obtén el m.c.d (30,50)). d) Obtén el m.c.m (30,50).*	0,829 y 0,846	9º	*Comprensión del mecanismo procedimental "máximo común divisor y mínimo común múltiplo".*
1C2, 1C3	*Considere la siguiente colección de números: 1, 3, 6, 8, 15, 24, 39, 42, 48, 69, 2400, 2412. II. Los números del listado que son divisibles por 24 son:__ III. Los números del listado por los que 24 es divisible son: . Justifica tu respuesta*	0,807 y 0,852	10º	*Comprensión del concepto "ser divisible" en su forma operativa.*
1B*, 2, 4D, 6	*Dados los números: 0, 2, 4, 6, 8, 10 y 16, determina si 64 es múltiplo de alguno de ellos. Justifica tu respuesta Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son 464, 493, 522 y 551. ¿De qué número se trata? Explica tu respuesta. ¿$3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ es un múltiplo de M? Explica tu respuesta. ($M = 3^3 \times 5^2 \times 7$) Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho.*	0, 438- 0,593	11º	*Comprensión de "múltiplos comunes" y su aplicación a situaciones cotidianas.*

Tabla 4.6. Factores obtenidos de la matriz de componentes rotados

* Con pesos específicos pertenecientes al intervalo 0,314-0,479, excepto el 1B con un valor de −0,503

El cuestionario, según los valores de la consistencia interna y los coeficientes de generalizabilidad, es bueno y se puede generalizar a otros alumnos. Por otra parte, el análisis factorial muestra que son cinco los factores que explican la mayor parte de la varianza de los resultados del cuestionario, resultando prácticamente coincidentes en todos los cursos y en la muestra global.

Los resultados obtenidos en el estudio psicométrico de la prueba indican que la comprensión que manifiestan los estudiantes de los conceptos de divisibilidad en N requiere el uso operativo de las relaciones entre los números, recurriendo a la representación decimal de los mismos. Los estudiantes que hacen uso del modo de representación factorial de los números revelan una mejor comprensión de los elementos de divisibilidad y pueden establecer un mayor número de relaciones entre los elementos matemáticos que constituyen el esquema de Divisibilidad. El elemento matemático *"Q es divisible por P"* constituye uno de los principales indicadores para determinar el índice de dificultad de los diferentes ítems y para construir los principales pilares sobre el esquema de Divisibilidad.

4.2. Análisis cualitativo

En esta sección en primer lugar caracterizaremos las formas de conocer los elementos matemáticos. En segundo lugar estableceremos las características de los niveles de desarrollo del esquema. Terminamos la sección determinando la tematización del esquema de Divisibilidad.

4.2.1. Características de las formas de conocer de los elementos matemáticos.

Los alumnos de 1º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) han trabajado en el curso anterior y en las semanas previas a la realización del cuestionario los elementos matemáticos múltiplo, divisor, ser divisible, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, con números presentados mediante representación decimal y con representación factorial con exponentes pequeños. Por ello manifiestan limitaciones en el uso de los elementos matemáticos en los ítems 4c y 4d que exigen usar números expresados mediante representaciones factoriales donde los exponentes de los factores son números cualesquiera.

Los alumnos que cursan 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria han tenido contacto con los contenidos de divisibilidad en los dos cursos del primer ciclo. En 3º y 4º de ESO ya no se especifican los contenidos de divisibilidad, aunque suponen una herramienta complementaria en el tratamiento de diferentes temas.

Los alumnos de 1º de Bachillerato que han participado en la investigación proceden de las opciones de Matemáticas de Bachillerato Científico (Matemáticas 1) y del Bachillerato Humanístico y de Ciencias Sociales (Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1). Tienen 17 años y cursaron específicamente los tópicos de divisibilidad en el conjunto de los números naturales en los dos primeros cursos de ESO (12-13 años).

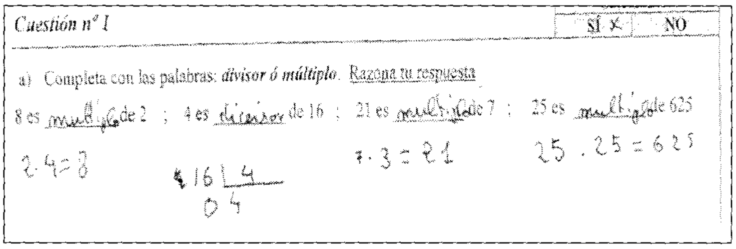
4.2.1.1. Forma de conocer Acción.

Conocer como acción los elementos "múltiplo", "divisor" y "ser divisible" se caracteriza por que los estudiantes manifiestan una tendencia operativa de las definiciones de múltiplo y divisor (Q es múltiplo de P $\Leftrightarrow \exists\ k \in N\ /\ Q = k \times P$ o P es divisor de Q $\Leftrightarrow \exists\ k \in N\ /\ Q : P = k$ o $Q : k = P$) necesitando tener los números representados en su forma decimal para realizar la operación de multiplicar o dividir. Los estudiantes piensan principalmente en el procedimiento y, en ocasiones, confunden la idea de múltiplo con la idea de divisor. Observamos que cuando se conoce como acción los alumnos pueden mostrar dificultades en la definición de las ideas de múltiplo o de divisor, aunque sí obtienen múltiplos o divisores de números concretos.

Una evidencia de este hecho la encontramos en la entrevista realizada a Fina (C19-E4). La alumna muestra dificultades en dar la definición del elemento múltiplo (en general), si bien es capaz de utilizarla a partir de números concretos:

E: *¿Qué es un múltiplo de un número?, ¿y un divisor de un número?*
Fina: *Mmm, ahora me cuesta explicarlo. Sé lo que es pero ...*
E: *Dé un múltiplo de 20.*
Fina: *40, porque 20 por 2 son 40.*

Conocer como acción las ideas de múltiplo y divisor está asociado a realizar las operaciones de multiplicar o dividir respectivamente. Por ejemplo, Alicia (C14-E1), responde en el cuestionario del siguiente modo:


Cuestión nº 1 SÍ X NO

a) Completa con las palabras: *divisor ó múltiplo*. Razona tu respuesta

8 es múltiplo de 2 ; 4 es divisor de 16 ; 21 es múltiplo de 7 ; 25 es múltiplo de 625

2·4=8 16 |4 04 7·3=21 25 . 25 = 625

(C14-E1, cuestión 1, ítem 1a)

Alicia menciona en la entrevista las operaciones de multiplicar y dividir, y además comprueba que un número es divisor de otro utilizando la operación de multiplicar, como se muestra en el siguiente protocolo:

E:	*¿Qué es un múltiplo de un número?*
Alicia:	*Es un número que se obtiene multiplicando otro. Por ejemplo un múltiplo de 10 es 20, porque 10 por 2 es 20.*
E:	*¿Qué es un divisor de un número?*
Alicia:	*Es un número por el que se divide otro. Por ejemplo un divisor de 30 es 15, porque 15 por 2 es 30.*

Cuando la idea de múltiplo o de divisor se vincula a la operación de dividir obliga a los alumnos a realizar traslaciones entre las representaciones decimales y factoriales de los números. Este comportamiento pone de manifiesto que la representación del número como producto de factores primos no tiene un carácter operativo para los alumnos que conocen las ideas de múltiplo o divisor como acción. Por ejemplo, Marta (C7-E1) para contestar a los ítems de la tarea 9

-*"Sabiendo que: 1001 = 7 x 11 x 13 y 91 = 7 x 13, ¿son correctas las siguientes afirmaciones? a) 91 no es divisor de 1001, b) 77 es divisor de 1001, c) 2002 no es múltiplo de 13. Justifica la respuesta*"-

trabaja con la representación decimal de los números tanto en el cuestionario como en la entrevista.

Marta: *(Divide) Sí es divisible, el resultado da 13.*

E: *¿Y 91 es divisor de 1001?*

Marta: *Mmm, (divide) sí es. Da 11, el resultado de la división es un número entero.*

Marta realiza la división de 1001 entre 91 ó entre 77 para establecer la divisibilidad entre los números. No vincula la idea de divisor a la representación como producto de factores primos del número, y así lo manifiesta en la entrevista:

E: *¿Podía contestarlo sin dividir?*

Marta: *Mmm, pues no lo sé, es que ..., tengo que dividirlo, es que de cálculo mental ....*

De idéntico modo procede Marta para contestar a la pregunta de si 2002 es múltiplo de 13, realizando la operación de dividir de 2002 entre 13, tanto en el cuestionario como en la entrevista:

E: *¿2002 es múltiplo de 13?*

Marta: *(Divide) Sí.*

E: *¿Y sin dividir, podía contestar?*

Marta: *Tengo que calcularlo, aunque sea mentalmente, pues simplemente observando no veo cómo resolverlo.*

Para resolver estos ítems, los alumnos que conocen como acción las ideas de múltiplo y de divisor tienen que recurrir a la representación decimal de los números para dividir y comprobar si el resultado es exacto, sin utilizar la descomposición en factores primos.

La expresión "Q es divisible por P" es una acepción lingüística que está vinculada a "Q es múltiplo de P" y a "P divide a Q". De esta manera, conocer como acción esta acepción está ligada a las relaciones que se pueden establecer entre "ser múltiplo de" y "dividir a", que según hemos visto en las ideas de múltiplo y divisor están asociadas a la necesidad de tener los números representados en su forma decimal para poder dividir o multiplicar y establecer esta relación entre los números.

Podemos encontrar evidencias de este hecho en la resolución de los ítems 4a y 4b -"*Consideremos el número: $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. a) ¿M es divisible por 7? Explica tu respuesta. b) ¿M es divisible por 5? ¿Por 2? ¿Por 9? ¿Por 11? ¿Por 15? Explica tu respuesta*"-.

Por ejemplo, Gisela (C16-E1) no ha desarrollado la idea de "ser divisible" vinculada a la representación factorial ya que recurre a la representación decimal del número M (4725) para dividir y comprobar posteriormente si la división es exacta con el objetivo de establecer si M es divisible o no por cada uno de los números:

E: *¿El número $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ es divisible por 7?*
Gisela: *Tengo que obtener el número M.*
E: *Sin obtener el valor de M, ¿podría contestar?*
Gisela: *No. (Opera y divide) Si que es divisible por 7.*
E: *¿M es divisible por 5?*
Gisela: *Creo que no.*
E: *¿Recuerda la regla de divisibilidad por 5?*
Gisela: *No. (Opera y divide) Sí es divisible por 5.*

Por otra parte, el significado de la idea "Q es divisible por P" también está vinculado a la comprensión que los estudiantes tienen de los criterios de divisibilidad (Q es divisible por 2 cuando su última cifra es un número par, Q es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3 ó Q es divisible por 5 cuando su última cifra es 0 ó 5). Por esta razón la manera en que los alumnos manejan los criterios de divisibilidad nos proporciona información sobre su conceptualización de las acepciones de "múltiplo de" y "divide a" (divisor). Por ejemplo, Teresa (C10-E1) responde a los ítems 3a y 3b - "*Indica, justificando tu respuesta, el valor de b para que el número 2b45 sea divisible: a) por 2, b) por 3*"-

realizando pruebas de ensayo y observando si la división es exacta:

E: *Dé un valor de b para que 2b45 sea divisible por 2.*
Teresa: *Mmm, ir dividiendo 2145, 2245, 2345, y a ver cuál puede ser. Pero*

¿tiene que ser divisible por 2?

E: *Sí.*

Teresa: *¿Todo el número?*

E: *Sí.*

Teresa: *(Divide 2145, 2245,..) No sale con estos.*

La manera de actuar de Teresa muestra la necesidad que tiene de realizar la operación de dividir para determinar si un número es divisible por otro. El hecho de ir probando sucesivos valores de b para poder "construir" el número y realizar la división, pone de manifiesto que la idea de "Q es divisible por P" está vinculada a la operación de dividir mediante la relación "P divide a Q":

E: *¿Recuerda el criterio de divisibilidad por 3?*

Teresa: *Ir sumando 3 y 3, y así, multiplicar por 3.*

E: *¿Puede ser 2b45 divisible por 3?*

Teresa: *(Divide 2345 entre 3) No es. Tiene que ser impar. (Divide entre 3 otros números que va probando: 2545, 2645) No es ninguno de ellos. A ver, ahora, 2145 es divisible por 3.*

Teresa necesita realizar la división por 3 y comprobar si el resultado es exacto para determinar si el número es divisible por 3.

Los alumnos que conocen como acción la idea "Q es divisible por P" pueden inventarse criterios de divisibilidad o realizar adaptaciones no correctas de los criterios. Este hecho se evidencia en el protocolo anterior de Teresa cuando contesta si el número 2b45 puede ser divisible por 3 indicando que "*tiene que ser impar*" en referencia a que 3 también es un número impar, adaptando incorrectamente del criterio de divisibilidad por 2 (paridad). Otra muestra la podemos apreciar en el protocolo de Carola (C13-E4) que aplica un falso criterio de divisibilidad para 2, similar al criterio de divisibilidad por 3:

E: *Dé un valor de b para que 2b45 sea divisible por 2*

Carola: *Mmm, ¿2 puede ser? A ver, 2245 entre 2 no da exacto.*

E: *¿Qué está pensando?*

Carola: *Siempre hago lo mismo, sumo los números y tiene que dar un* *número divisible por 2, así suman 11, ah, no tiene que ser 2145, a ver (divide), no da tampoco. Mmm ...*

E: *Dé un valor de b para que 2b45 sea divisible por 3.*

Carola: *4, 2445, sumando las cifras es múltiplo de 3.*

Sin embargo, aunque puede haber ocasiones en que los estudiantes recuerden algunos criterios de divisibilidad (posiblemente porque los hayan memorizado) tienen dificultades para coordinar estas relaciones, y suelen recurrir a la realización de la operación de dividir para tomar una decisión. Por ejemplo, Sonia (C11-E4) cuando responde a los ítems de la cuestión 4b

-"*Consideremos el número:* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. *b) ¿M es divisible por 5? ¿Por 2? ¿Por 9? ¿Por 11? ¿Por 15? Explica tu respuesta*"-,

aplica correctamente los criterios de divisibilidad después de obtener la representación decimal del número, como se pone de manifiesto en el siguiente protocolo de la entrevista:

E: *¿M es divisible por 5?*

Sonia: *Sí, porque acaba en 5 y hay una regla que dice que todo número que acaba en 0 ó en 5 es divisible por 5.*

E: *¿M es divisible por 2?*

Sonia: *No, porque no acaba ni en 0 ni en cifra par.*

E: *¿M es divisible por 9?*

Sonia: *Sí, porque creo que al sumarlas..., no eso es la regla para el 3.*

E: *¿Qué sumas sus cifras?*

Sonia: *18.*

E: *¿Entonces?*

Sonia: *De 3 sí que sería, y de 9 no lo sé. (Divide) Ah, sí que es.*

Sonia ha obtenido la representación decimal de M y ha aplicado correctamente los criterios de divisibilidad por 2, por 3 y por 5. Sin embargo, recurre a la operación de dividir para comprobar si M es divisible por 9 por desconocer este criterio de divisibilidad.

Otra de las características de la forma de conocer acción el elemento "Q es divisible por P" es la dificultad que tienen los estudiantes para coordinar algunas propiedades como "*Si d es divisor de a y b* $\Rightarrow$ *d es divisor de* $a \pm b$" para establecer la divisibilidad entre números con representación factorial. Por ejemplo, Josep (C6-B1) para resolver el ítem 10d

- "*Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta. d) El número* $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ *es divisible por 6*"-,

en el cuestionario obtiene la representación decimal de K (663) y contesta que "K *no es divisible porque la operación (división de 663 entre 6) no da exacto*". En la entrevista contesta del siguiente modo:

E: *¿Es K múltiplo de 3?*
Josep: *Creo que sí, mm,..., el más 3, 3 más 3 son 6 y 6 es múltiplo de 3.*
E: *¿Si quitamos + 3, es múltiplo de 3?*
Josep: *Sí, sin el + 3 sí.*
E: *¿K es múltiplo de 6?*
Josep: *No, porque no acaba en número par.*

Josep ha utilizado la representación decimal del número K (663) y aplica un falso criterio similar al criterio de divisibilidad por 3. En este tipo de comportamientos los alumnos recurren a la representación decimal del número para discutir la divisibilidad o indivisibilidad del número.

Algunos alumnos que conocen como acción el elemento "ser divisible" también pueden hacer uso de la representación factorial de manera operativa. Por ejemplo, Lucas (C14-E4) al estudiar la divisibilidad de $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ por 7 en los ítems de la cuestión 4, justifica que es divisible por 7 puesto que "*si M lo ha multiplicado por 7, es divisible por 7*". Ve la descomposición en factores primos de manera "operativa". Transmite la idea de que si M sale de multiplicar por 7 entonces el 7 debe dividir a M, aunque previamente ha necesitado la representación decimal de M (4725) como se pone de manifiesto en el siguiente protocolo:

E: *¿El número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ *es divisible por 7?*
Lucas: *A ver 27 por 25, ..., (opera) 4725 entre 7 no .*

E: *Compruébelo entonces.*

Lucas: *(Divide) Sí es. Claro, si lo ha multiplicado por 7, es divisible por 7.*

No obstante, para discutir la divisibilidad por 2, y por 11, factores que no aparecen en la representación factorial, vuelve a utilizar la representación decimal de M y a realizar la división comprobando posteriormente el resultado:

E: *¿M es divisible por 2?*

Lucas: *No, porque ... (divide mentalmente) no da exacto.*

E: *¿M es divisible por 11?*

Lucas: *Mmm, pues ... no, porque ..., no sé qué regla correspondía para la tabla del 11.*

E: *Compruébelo.*

Lucas: *(Divide) No es divisible por 11.*

Lucas para responder si M es divisible por 2, o por 11, recurre a la representación decimal de M, efectúa la división y comprueba si el resultado es exacto. Al no usar la idea de que el 2 (el 11) no está en la descomposición en factores primos del número M para determinar la divisibilidad Lucas necesita realizar la operación de dividir para comprobarlo.

Los elementos matemáticos "múltiplo", "divisor" y "ser divisible" de un número natural son conocidos en 1° de ESO y 4° de ESO principalmente como acción. La mayoría de los alumnos que conoce como acción el elemento múltiplo conoce como acción el elemento divisor.

Conocer el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor como acción implica que los alumnos vinculan estos elementos con algún procedimiento/algoritmo de obtención y manifiestan dificultades en interpretarlo o usarlo en contextos reales. Un ejemplo característico de la forma de conocer acción del mínimo común múltiplo la constituye Raúl (C20-E1). En el cuestionario, a la pregunta: *¿Qué es el m.c.m (a,b)?* responde que el mínimo común múltiplo de dos números es "*cuando dos números coincidan*" sin especificar con mayor detalle su respuesta. No obstante, parece asociar la definición de mínimo común múltiplo con el procedimiento de buscar series de múltiplos de ambos números y tomar el primero que es común a ambos (coinciden ambas series) como pone de manifiesto en el cuestionario al calcular el mínimo común múltiplo de 30 y 50 por este procedimiento.

En la entrevista Raúl vuelve a hacer uso de este procedimiento de obtención del mínimo común múltiplo de dos números a partir de las series de múltiplos de ambos números:

> *E:* *¿Qué es el mínimo común múltiplo de dos números?*
> *Raúl:* *¿Qué?,.., pone los dos números y al lado pone m.c.m y...*
> *E:* *Ponga el ejemplo con 12 y 15.*
> *Raúl:* *Pone 15 y suma 15 más, son 30, y luego 45, y seguiría 60 y 75, y luego el del 12, a ver si alguno coincide, 12, 24, 36, 48, 60. Ya está, es 60.*

Raúl está vinculando la definición de mínimo común múltiplo con un procedimiento de obtención aprendido en la instrucción escolar, pero no sabe definir el mínimo común múltiplo.

De igual modo, un ejemplo de forma de conocer acción del elemento máximo común divisor lo constituye Sonia (C11-E4), quien en el cuestionario dice que "*m.c.d de dos números es: comunes elevados al menor exponente*". Vincula la definición de máximo común divisor al algoritmo de la descomposición factorial. De idéntico modo actúa en la entrevista:

> *E:* *¿Qué es el máximo común divisor de dos números?*
> *Sonia:* *Comunes elevados al menor exponente.*
> *E:* *Pero le pedía la definición.*
> *Sonia:* *Bueno, pues eso es lo que pienso yo.*

Los estudiantes que conocen como acción el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor sólo son capaces de utilizar correctamente, a lo sumo, uno de los diferentes procedimientos (descomposición factorial, series de múltiplos,...) de obtención del elemento mínimo común múltiplo o del máximo común divisor. Carola

(C13-E4) obtiene en el cuestionario escrito el mínimo común múltiplo de 30 y 50 -ítem7d- mediante la descomposición factorial de los números. Cuando en la entrevista se le solicita la obtención del m.c.m (30,50) por un método alternativo contesta que no sabe obtenerlo:

E: *¿Qué es el mínimo común múltiplo de dos números?*

Carola: *Comunes y no comunes al mayor, .., no, al menor exponente.*

E: *Le pedía la definición, no el procedimiento.*

Carola: *Mmm, no sabría decirle.*

E: *Obtenga el mínimo común múltiplo de 30 y 50.*

Carola: *(Observa la descomposición factorial de 30 y 50) Es 150.*

E: *¿Podría obtenerlo de otro modo?*

Carola: *No.*

Otra de las características de conocer como acción los elementos mínimo común múltiplo o máximo común divisor de dos números es la dificultad que tienen los alumnos en aplicar estos elementos en situaciones de contexto real. Por ejemplo, Carola (C13-E4) no resuelve en el cuestionario el ítem 6

- "*Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho*"- .

Sin embargo, aunque en la entrevista responde correctamente que la madre y la hija se encontrarán a los 60 días, parece actuar de forma mecánica al usar el procedimiento de descomposición factorial y no es capaz de justificarlo:

E: *¿Tiene que obtener un múltiplo o un divisor?*

Carola: *Un múltiplo, porque hay que multiplicar 12 y 15. A ver, (realiza la descomposición factorial de 12 y de 15 y obtiene el m.c.m.) Es 60 días.*

E: *¿Podrán encontrarse con anterioridad a los 60 días?*

Carola: *Mmm, no lo sé, dividiré 60 entre 15 y 60 entre 12. Son 4 y 5. No pueden encontrarse con anterioridad porque, porque ...*

Otra evidencia de las dificultades que supone aplicar el elemento máximo común divisor en situaciones contextuales la encontramos en las respuestas de Gisela (C16-E1) a los ítems 8a, 8b1 y 8b2. Gisela suma las longitudes dadas y mediante pruebas de ensayo y error busca un divisor de manera incoherente, dado que lo que hace es dividir por 10 o por 100 sin justificar el por qué de esas divisiones:

Cuestión nº 8 — Calculadora: SÍ / ~~NO~~

a) Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado.

12 + 18 = 30 30 | 10 → 0 / 3

He obtenido este resultado sumando 12 mas 18 y el resultado es 30. 30 lo divido entre 10 y el resultado final es 3, resto 0.

b) Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm, 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud. ¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda? ¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado.

1980 + 990 + 756 = 3726 3726 | 100 → 0 / 37'26

He obtenido este resultado sumando 1980 + 990 + 756 y el resultado es 3726. 3726 lo he dividido entre 100 y el resultado es 37'26, resto 0.

(C16-E1, cuestión 8, ítems 8a, 8b1 y 8b2)

Gisela pone de manifiesto que no puede identificar la idea de máximo común divisor en una situación real. En la entrevista Gisela busca divisores de 12 y 18, pero no es capaz de dilucidar que ha de aplicar el máximo común divisor en esta situación:

E: *¿Cuál será la longitud para el primer apartado?*
Gisela: *Mmm, hay que cortarlas por la mitad.*
E: *Han de ser los trozos iguales, y así no puede ser.*
Gisela: *Pues una entre 3 y la otra entre 2, y sale 6.*
E: *¿6 es el máximo?*
Gisela: *Creo que sí. 12 entre 2 son 6 y 18 entre 3 son 6.*

Gisela va probando diferentes posibilidades para obtener divisores de una y otra longitud aunque no sean iguales y concluye que las cuerdas tendrán que ser cortadas en trozos de 6 m. Gisela no hace mención al elemento máximo común divisor. Del ítem 8b no ofrece respuesta dado que las longitudes implicadas en este caso son mayores y resulta más difícil encontrar un divisor común realizando pruebas de ensayo y error.

El mínimo común múltiplo y el máximo común divisor son conocidos como forma de conocer acción por más de la mitad de los alumnos entrevistados en 1° y 4° de ESO.

Podemos observar que, de manera general, los alumnos que muestran forma de conocer acción de los elementos matemáticos de divisibilidad:

(a) asocian las nociones de múltiplo y divisor a las operaciones de multiplicar y dividir,
(b) utilizan parcialmente los criterios de divisibilidad sin hacer uso de la relación conjunción lógica para coordinarlos,
(c) la divisibilidad aparece vinculada a la representación decimal de los números naturales sin establecer las relaciones bicondicionales entre factor y divisor (P es divisor de Q $\Leftrightarrow$ P es un factor de Q) o entre factor y múltiplo (Q es múltiplo de P $\Leftrightarrow$ P es un factor de Q), y
(d) asocian el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor con los procedimientos de obtención, usando a lo sumo un único procedimiento de cálculo y teniendo dificultades en identificar la idea en contextos reales.

4.2.1.2. Forma de conocer Proceso.

Conocer como proceso los elementos "múltiplo", "divisor" y "ser divisible" viene caracterizado porque los alumnos son capaces de establecer de manera explícita las relaciones entre "Q es múltiplo de P", "P es divisor de Q" y "Q es divisible por P". La diferencia con la forma de conocer acción se establece en que se conoce como proceso cuando estas relaciones se empiezan a utilizar entre números con representación factorial y, en consecuencia, no se tiene que recurrir a la realización de las operaciones de multiplicar o dividir.

En este caso una característica de conocer como proceso estas acepciones y sus relaciones se pone de manifiesto cuando se identifica un factor de la descomposición en factores primos de un número como un divisor del número, y al mismo tiempo se ve ese número como un múltiplo del factor. Este hecho queda reflejado en la manera en que Elsa (C3-E1) responde al ítem 2

- "*Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son: 464, 493, 522 y 551. ¿De qué número se trata? Explica tu respuesta*"-.

Elsa aunque no responde en el cuestionario, en la entrevista empieza a establecer que el número buscado ha de ser divisor común de los números de la serie:

E: *¿Puede explicar por qué no la respondió?*
Elsa: *Tiene que ser divisor de todos,...mmm,...*

Posteriormente, y tras las sugerencias del entrevistador, Elsa observa que los números que aparecen en la descomposición factorial son divisores de un número y, por tanto, son múltiplos del número buscado:

E: *Si realiza la descomposición factorial de los términos de la sucesión, ¿podría obtener la respuesta? ¿Por qué?*
Elsa: *Voy a realizar la descomposición factorial (la realiza). En todos aparece 29, 29 es divisor de todos ellos.*

La alumna después de hacer la descomposición factorial de cada número (464, 493, 522 y 551) contesta que el número buscado es 29. Vincula la idea de múltiplo con los factores de la representación factorial al señalar como múltiplo común al único factor común, 29, que aparece en las descomposiciones factoriales de los números dados. Elsa empieza a establecer la relación "Q es múltiplo de P $\Leftrightarrow$ P es un factor de Q, cuando P es un número primo". Durante la entrevista pone de manifiesto que los factores primos no se pueden descomponer más, por lo que el 29 es el menor que cumple la condición de ser "divisor". Elsa usa la descomposición en factores primos para buscar un divisor común. Una vez encontrado "un factor primo" común en las diferentes descomposiciones, este factor es visto como un divisor común.

E: *¿Existe algún número más que cumpla las condiciones del enunciado?*
Elsa: *No, porque no hay ningún número más que se repita en la descomposición factorial de todos.*

En estos momentos, no sabemos si también hubiera identificado como múltiplos comunes de la serie de números un producto de factores primos. Al indagar en la entrevista sobre esa posibilidad Elsa señala que debería aparecer ese otro número en la descomposición factorial de la serie. Pensamos que considera que si ese otro número no aparece, entonces los números de la serie (464, 493, 522 y 551) no son múltiplos de ese número. Para los números compuestos no está claro si Elsa establece la equivalencia entre factor y múltiplo.

Cuando se conocen como proceso las ideas de "múltiplo", "divisor" y "ser divisible" las relaciones entre ellos (Q es divisible por P, P divide a Q, P es divisor de Q) se establecen entre factores del número y el propio número. Los alumnos que conocen como proceso estas ideas tienen dificultades en generalizarlas entre números cualesquiera que están expresados como descomposición en factores primos.

Sin embargo, en algunos casos cuando las relaciones de divisibilidad se conocen como proceso los estudiantes empiezan a identificar múltiplo y divisor cuando el divisor está formado como producto de varios factores primos. Por ejemplo, Vicente (C12-E1) conoce la idea de divisor como proceso, y en su respuesta a los ítems 9a y 9b

- "*Sabiendo que: 1001 = 7 x 11 x 13 y 91 = 7 x 13, ¿son correctas las siguientes afirmaciones? a) 91 no es divisor de 1001. b) 77 es divisor de 1001*"-,

establece que 91 = 7 x 13 es un divisor de 1001 = 7 x 11 x 13 haciendo inicialmente la división, si bien posteriormente reconoce que al estar 7 y 13 en la descomposición de 1001 es suficiente justificación, como se puede ver en el siguiente protocolo:

E:	*Observe el enunciado, ¿es 91 divisor de 1001?*
Vicente:	*(Divide) Sí, porque es exacta.*
E:	*¿Sin dividir puede contestar?*
Vicente:	*Sí, porque 7 por 13 es 91.*
E:	*¿Y 77 es divisor de 1001?*
Vicente:	*Sí, por lo mismo.*

Aunque en un principio Vicente recurre a la operación de dividir, el hecho de reconocer que 91 es divisor de 1001 porque 7 x 13 = 91, y los factores 7 y 13 están en la descomposición de 1001, hace que consideremos que Vicente conoce la idea de "ser divisor" como proceso cuando los números están expresados mediante su representación factorial. Sin embargo, Vicente para responder al ítem 2

- *"Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son: 464, 493, 522 y 551. ¿De qué número se trata? Explica tu respuesta."*-

realiza la descomposición factorial de cada uno de los números y no identifica a 29, factor común de todos ellos, como divisor:

E:	*¿Podría utilizar otro método?*
Vicente:	*No.*
E:	*Si realiza la descomposición factorial de los términos de la sucesión, ¿podría obtener la respuesta?*
Vicente:	*Es descomponer en factores (realiza la descomposición factorial).*
E:	*¿Qué observa?*
Vicente:	*Mmm, están descompuestos esos números,...., no sabría decirle.*

El comportamiento de Vicente en la respuesta a este ítem nos hace pensar que no da la respuesta correcta porque se está hablando de múltiplos de un número y tiene dificultades para ver que si un número es factor de otro número, este número es múltiplo suyo.

La dificultad que se tiene en considerar un número como múltiplo de otro número cuando ambos están representados mediante el producto de sus factores primos, es una característica de la forma de conocer como proceso la idea de múltiplo.

Esta dificultad se pone de manifiesto cuando, por ejemplo, Elsa (C3-E1) para responder al ítem 4c

- *"Consideremos el número: $M = 3^3 x 5^2 x 7$, ¿$3^4 x 5 x 7^3$ es un múltiplo de M? Explica tu respuesta"*-.

obtiene la representación decimal de los dos números y posteriormente comprueba si la división es exacta.

c) ¿3^4 x 5 x 7^3 es un múltiplo de M? Explica tu respuesta

No porque de resto no sale exacto

138915 : 1575 = 88.2

(C3-E1, cuestión 4, ítem 4c)

En la entrevista procede de idéntico modo. En un principio parece observar los factores primos de ambos números puesto que indica "*sí será porque...*". Sin embargo, Elsa necesita comprobar su indicación, y para ello divide ambos números expresados mediante su representación decimal y comprueba si el resultado es exacto:

E:	*¿3^4 x 5 x 7^3 es un múltiplo de M?*
Elsa:	*Sí será, porque..., (divide), ah no es.*
E:	*¿3^4 x 5^3 x 7^3 x 13^{18} es un múltiplo de M?*
Elsa:	*(Opera y divide) Pero aparece un exponente, no es.*

La forma de proceder de Elsa pone de manifiesto que tiene dificultades en determinar si un número es múltiplo de otro si ambos se están expresados en su representación factorial. Tiene que recurrir a la representación decimal de ambos y a la operación de dividir para determinar si los dos números son o no múltiplos.

Este es un comportamiento típico de los estudiantes que conocen como proceso las ideas de "ser múltiplo de", "ser divisor de", "divide a", "ser divisible por". Esta dificultad en manejar las ideas de divisibilidad cuando los alumnos las conocen como proceso también se manifiesta en el proceso inverso. Es decir, cuando tienen una serie de múltiplos de un número y hay que determinar dicho número. El comportamiento de Elena (C1-B1) en la resolución de la tarea 2

- "*Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son: 464, 493, 522 y 551. ¿De qué número se trata? Explica tu respuesta.*"-

es una clara evidencia de esta característica. Elena puede determinar múltiplos de sus factores primos, pero manifiesta dificultades si los factores son compuestos. Identifica los cuatro números proporcionados con la idea de múltiplos comunes de un determinado número. A continuación, obtiene la representación factorial de cada número y luego compara dichas descomposiciones para encontrar factores comunes.

Esta forma de actuar parece indicar que Elena es capaz de aplicar la noción de múltiplo entre números con la representación factorial. Sin embargo, al descomponer el 493, dice que es primo, lo que parece indicar que ha probado a hacer la descomposición sólo con algunos primos "pequeños" y no ha llegado al 17 (493 = 17 x 29). Igual para el 551 ya que no llega a 551 = 19 x 29. Parece no conocer la idea de que, en la descomposición en factores primos, hay que probar hasta que $P^2 > Q$.

Posteriormente, en la entrevista corrige las descomposiciones en factores primos e identifica el 29 como "*el único factor común a las cuatro descomposiciones*", poniendo de manifiesto que los factores primos no se pueden descomponer más, por lo que el 29 es el menor que cumple la condición de ser "divisor". Sin embargo, al insistirle si podría haber un número mayor del 29 prueba con el 29 x 2 haciendo la división y comprobando que no es exacta.

E: *¿Quiere comprobar si solamente tienen en común el 1?*
Elena: *(Realiza la descomposición factorial) No, es el 29, porque aparece en todos.*
E: *¿Existe algún número más que cumpla las condiciones del enunciado?*
Elena: *Mmm,.., mayor sí, pero menor no.*
E: *Yo le preguntaba por otro distinto de 29.*
Elena: *No, creo que no, pero no hay mas, menor no, porque no se puede factorizar más.*
E: *¿Y mayor?*
Elena: *Puede que sí. Probaré (prueba con 29 por 2), mmm, no, la división no sale exacta.*

Lo que puede estar indicando este comportamiento es que la concepción de múltiplo vinculada a la representación factorial está en su "inicio". Elena recurre a la descomposición en factores primos, y una vez encontrado "un factor primo" común en las diferentes descomposiciones, los números son vistos como múltiplos de este factor primo. No sabemos en estos momentos si también hubiera identificado la situación de múltiplos de un producto de factores primos.

E: *¿Existirá algún otro número que lo cumpla?*
Elena: *Creo que no, eh,...*
E: *¿Si multiplica 29 por otro número para probar si es divisor de los de la serie, debería aparecer ese otro número en la descomposición factorial de los de la serie?*
Elena: *Ah, claro, claro, si fuera divisor debería aparecer.*

Por otra parte, los estudiantes que conocen como proceso las relaciones de divisibilidad tienen dificultad para usar la propiedad "*si* a / b *y* $a / c \Rightarrow a / (b + c)$". Sólo algunos alumnos que conocen como proceso el elemento "ser divisible" muestran evidencias de utilizar esta propiedad. Un caso característico lo encontramos en Lara (C4-B1) que utiliza esta propiedad para responder a alguno de los ítems de la cuestión 10

-"*Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta: El número* $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ *es: a) Divisible por 5. b) Divisible por 2 y por 4. c) Divisible por 3. d) Divisible por 6. e) Divisible por 15*"-. Lara en el cuestionario determina que K no es divisible por 5, puesto que "*contiene al 5, pero al sumar 3 no se cumple*". Razona desde la descomposición factorial del primer sumando, por eso indica que 5 "está contenido", pero al sumar 3 ya no podrá ser divisible por 5. En la entrevista, procede de igual modo:

Lara: *Mmm, sí, no, no, porque se le suman 3, entonces al sumar 3, posiblemente no de exacta, si fuera multiplicación sí seria, pero al ser suma, puede no ser.*

Lara no es capaz de aplicar la propiedad para determinar la divisibilidad o indivisibilidad de K por 2 y por 4. En estos casos recurre a la representación decimal del primer sumando (660) de K, indicando que al sumar 3 es 663 y no puede ser múltiplo de 2 ni de 4 como podemos observar en la entrevista:

E: *Diga si K es divisible por 2.*
Lara: *La primera parte sí, pero al sumarle 3, ¿lo opero?*
E: *Como quiera.*
Lara: *(Opera) No es, porque es 663 que no es par.*
E: *¿K es divisible por 4?*
Lara: *No, porque si no es divisible por 2, no puede ser de 4.*

De manera general, los alumnos que conocen como proceso el elemento "*ser divisible*" sólo pueden aplicar en algunas ocasiones las propiedades de la divisibilidad.

Finalmente, cuando los estudiantes conocen como proceso la relación de divisibilidad les permite aplicar los criterios de divisibilidad por 2, por 3 ó por 5 cuando los recuerdan o bien recurren a la operación de dividir cuando no los recuerdan con seguridad. Por ejemplo, Enrique (C17-E4) para establecer la divisibilidad e indivisibilidad por 2 del número 2b45 aplica el criterio de divisibilidad por 2, al indicar que 2b45 no puede ser divisible por 2 puesto que acaba en 5 (número impar):

E: *Dé un valor de b para que 2b45 sea divisible por 2.*
Enrique: *Espere a ver, mmm, ..., no existe porque el número acaba en 5.*

En cambio para contestar si el número 2b45 puede ser divisible por 3, sustituye b por 1 y responde que es divisible porque la división es exacta. Enrique manifiesta desconocer el criterio de divisibilidad por 3:

E: *¿Y para que sea divisible por 3?*
Enrique: *(Divide) 2145, porque dividido entre 3 es exacta la división.*
E: *Otro.*
Enrique: *Mmmm, (Prueba con varios) 2245 no es.*
E: *¿Cuál es la regla de divisibilidad por 3?*
Enrique: *Uf, no la recuerdo.*

Sin embargo, algunos estudiantes que conocen como proceso las ideas de divisibilidad pueden empezar a coordinar algunos criterios. Por ejemplo, Ramiro (C13-B1), en el cuestionario utiliza los criterios de divisibilidad por 2 y por 3 para estudiar qué valores debe tomar b para que el número 2b45 sea divisible por 2 y 3, pero no coordina estos criterios para estudiar la divisibilidad por 6. Sin embargo, en la entrevista parece observar que "un número es divisible por otro número sí y sólo sí lo es por cada uno de los factores de éste último" aunque no es capaz de asegurarlo cuando se lo pregunta el entrevistador:

E: *Dé un valor de b para que 2b45 sea divisible por 6.*
Ramiro: *Mm, igual que antes, no puede ser porque 6 es múltiplo de 2, tendría que ser divisible par.*

E:	*¿Si un número es divisible por 6, es divisible por 2?*
Ramiro:	*Sí, como no es divisible por 2, no puede ser divisible por 2.*
E:	*¿Y por alguno más?*
Ramiro:	*Por 3, supongo.*
E:	*¿Lo puede asegurar?*
Ramiro:	*Uf, mmm..*

En cambio, en otras ocasiones Ramiro sí coordina la divisibilidad por 3 y por 5 cuando el número está expresado en su representación factorial como ocurre en el ítem 4b5

-"*Consideremos el número:* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. *M es divisible por 15? Explica tu respuesta.*"-,

y se muestra en el siguiente protocolo de la entrevista:

E:	*¿M es divisible por 15?*
Ramiro:	*Sí, está 5 y 3 multiplicando.*

Los protocolos anteriores evidencian que existen estudiantes que pueden utilizar en determinadas ocasiones la coordinación de criterios de divisibilidad. No obstante, cabe señalar que a los estudiantes les es más fácil coordinar criterios para establecer la divisibilidad de un número- *"M es divisible por 15 porque es divisible por 3 y por 5"*- que coordinarlos para estudiar la indivisibilidad- *"2b45 no es divisible por 6 porque no es divisible por 2"*-. Este comportamiento es una característica de conocer como proceso la idea de "ser divisible".

La forma de conocer proceso del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor de dos números se caracteriza porque los alumnos empiezan a dar significado al mínimo común múltiplo o al máximo común divisor sin asociarlo a ningún procedimiento de cálculo de los mismos. La diferencia con la forma de conocer acción de estos elementos radica en que los estudiantes empiezan a dotar de significado al mínimo común múltiplo o al máximo común divisor. Utilizan correctamente por lo menos uno de los métodos de obtención y comienzan a interpretarlos en contextos reales, aunque en ocasiones pueden mostrar algunas dificultades en su aplicación. Por ejemplo, Marisa (C1-E1), en el cuestionario define el máximo común divisor como "*el divisor más grande que tienen los dos números en común*" y el mínimo común múltiplo como "*el número más pequeño que dos números tienen en común*" sin mencionar explícitamente que ha de ser múltiplo. Sin embargo, en la entrevista da la definición correcta:

E: *¿Qué es el mínimo común múltiplo de dos números?*
Marisa: *El múltiplo más pequeño que tienen en común.*

Para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 30 y 50 Marisa utiliza en el cuestionario la descomposición factorial de 30 (2 x 3 x 5) y de 50 (2 x 5^2), contestando que m.c.d (30,50) = 2 x 5 = 10 y m.c.m (30, 50) = 2 x 5^2 x 3 = 150. En la entrevista, Marisa manifiesta desconocer otro procedimiento de obtención de estos elementos:

E: *En los dos últimos has realizado la descomposición factorial, ¿podría resolverlo de otro modo?*
Marisa: *No sé, posiblemente pensándola,..., no sé.*

Marisa vincula la determinación del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo a la representación factorial de los números. No obstante, Marisa empieza a observar por qué el procedimiento de la descomposición factorial (factores comunes con menor exponente) genera el máximo común divisor como demuestra el hecho de que la alumna subraye, a instancias del entrevistador, "*porque es el divisor común que tienen los dos*":

E: *¿Por qué 10 es el máximo común divisor de 30 y 50?*
Marisa: *Porque es el divisor común que tiene los dos.*
E: *¿Por qué no podría ser 15?*
Marisa: *Porque no puede ser, porque 3 no lo tiene en común en su descomposición factorial.*

Sin embargo, en la forma de conocer proceso sólo algunos alumnos son capaces de usar dos procedimientos de obtención del mínimo común múltiplo o del máximo común divisor. Por ejemplo, Ángel (C6-E1) si bien en el cuestionario calcula el m.c.d (30,50) a través de la descomposición factorial de 30 y 50, en la entrevista cuando se le pide un método alternativo, obtiene el máximo común divisor a partir de los divisores comunes de ambos números:

> *E:* *El máximo común divisor de 30 y 50 respondió mediante descomposición factorial que es 2 por 5, es decir, 10. ¿Puede obtenerlo de otra forma?*
>
> *Ángel:* *Sí, poniendo los divisores de todos ellos. Por ejemplo, los divisores de 30 son, 1, 2, 3,5 ,6 10, 15 y 30, y de 50 son 1, 2, 5, 10, 25 y 50. Así, el máximo común divisor de los dos es 10, que es el mayor.*

Ángel constituye un ejemplo puntual de que determinados estudiantes que conocen como proceso el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor pueden obtenerlos mediante dos procedimientos diferentes.

Otra de las características de la forma de conocer proceso los elementos mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos números es su aplicación e interpretación en contextos reales desde un solo procedimiento de cálculo. Por ejemplo, Lara (C4-B1) para responder a la pregunta planteada en el ítem 6

-"*Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho*"-,

calcula el mínimo común múltiplo de 15 y 12 a partir del procedimiento de la descomposición factorial. Obtenido este valor contesta que "*han de transcurrir 60 días para que se vuelvan a encontrar. Lo he hecho hallando el mínimo común múltiplo*". Además, aunque no es capaz de obtener el mínimo común múltiplo por otro procedimiento, observa que ha de obtener un múltiplo común de ambos, señalando que cualquier número de días en que pudieran coincidir madre e hija "*debería contener al 12 y al 15*":

E: *Para dar la respuesta ha hallado el mínimo común múltiplo mediante la descomposición factorial, ¿podría hacerlo de otra forma?*

Lara: *No, mmm,..., multiplicando 15 por 12, pero no es, mmm, no sé de otra forma.*

E: *¿Por qué no podían coincidir a los 30 ó 40 días?*

Lara: *Porque el mínimo múltiplo entre 12 y 15 es 60, coincide para los dos, 30 entre 12 no podría ser, por ejemplo, se multiplican los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.*

E: *¿Y su fuera otro?*

Lara: *Debería contener al 12 y al 15.*

Lara reconoce que los múltiplos comunes son los momentos en los que coinciden madre e hija y que el más pequeño de esos múltiplos es de hecho el mínimo. También es capaz de ver los múltiplos de 60 como los otros momentos en los que madre e hija coincidirán.

Las dificultades que aparecen en la interpretación en contexto del mínimo común múltiplo en la forma de conocer proceso podemos observarlos en el ejemplo de Elsa (C3-E1) que cita en la entrevista el procedimiento de la descomposición factorial, aunque sin obtener correctamente el mínimo común múltiplo de 12 y 15:

Elsa: *Haciendo la descomposición factorial (descompone en factores 12 y 15) Si multiplico todo sale.*

E: *El número que obtiene ¿es un múltiplo o un divisor de los otros?*

Elsa: *Un múltiplo.*

E: *Al multiplicar todo sale 180. ¿Por qué no prueba con el mínimo común múltiplo?*

Elsa: *Mmm,.., tomaré los ..., no recuerdo.*

En cambio en su respuesta en el cuestionario Elsa confecciona una lista de múltiplos de 15 y otra lista de múltiplos de 12, para buscar el primer múltiplo común (60):

Cuestión nº 6 — Calculadora: SI / NO

Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa.

¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho.

Múltiplos de 15: 15-30-45-60-75-90-105

Múltiplos de 12: 12-24-36-48-60-72-84

Cada 60 días

He sacado los múltiplos de 15 y 12. Después de los dos he visto cuáles coinciden y coincide el número 60 el primer múltiplo

(C3-E1, cuestión-ítem 6)

Elsa aplica el mínimo común múltiplo en una situación real, pero en ocasiones muestra dificultades en la obtención del mínimo común múltiplo. En este caso cuando aplica el algoritmo de la descomposición factorial ya que lo que hace es buscar un múltiplo común de ambos números (180) sin recabar en que se le solicita el menor de los múltiplos comunes.

En cuanto a la contextualización del elemento del máximo común divisor en situaciones reales, debemos resaltar que existen alumnos, como Ángel (C6-E1), que aunque parecen observar que es necesario encontrar un divisor común para resolver la situación planteada en el ítem 8a

- "*Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado.*"-

y en el ítem 8b

-"*Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm, 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud. ¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda? ¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado*"-.

no son capaces de calcular el máximo común divisor de tres números. Ángel obtiene mentalmente el máximo común divisor de 12 y 18 cuando es preguntado por el entrevistador y no es capaz de obtener el máximo común de tres números:

E: *Dio como respuesta en el cuestionario que es 3. Justifique su respuesta.*

Ángel: *Obteniendo el mínimo común múltiplo.*

E: *¿Un múltiplo es mayor ó menor?*

Ángel: *Mmm, no sé como lo hice.*

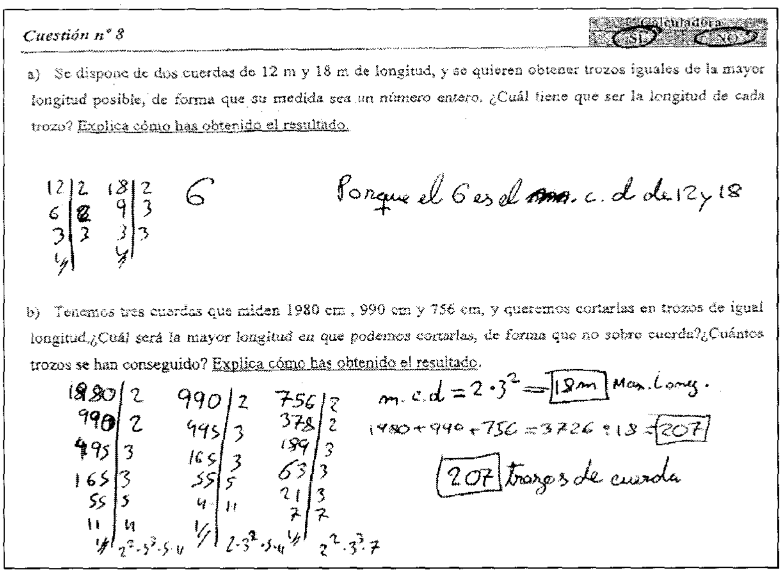
E: *¿Cuál es el máximo común divisor?*

Ángel: *Mmm,..., 6.*

E: *¿Y para el segundo apartado, qué habría que hacer?*

Ángel: *Mm, pues lo mismo que antes, el máximo común divisor.*

En algunos casos la integración del significado de máximo común divisor y su uso operativo en contextos reales resulta más clara. Por ejemplo, Valeriano (C7-E4) en el cuestionario resuelve la cuestión 8 obteniendo el máximo común divisor de 12 y 18 y el máximo común divisor de 1980, 990 y 756 mediante el procedimiento de descomposición factorial.


Cuestión nº 8

Calculadora SI NO

a) Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado.

6

Porque el 6 es el m. c. d de 12 y 18

b) Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm , 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud.¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda?¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado.

m. c. d = $2 \cdot 3^2$ = 18 m Max. Long.

1980 + 990 + 756 = 3726 : 18 = 207

207 trozos de cuerda

(C7-E4, cuestión 8, ítems 8b1 y 8b2)

En la entrevista justifica por qué el elemento máximo común divisor resuelve la situación planteada en el ítem 8a:

Valeriano: *Porque el mayor que puede dividir a 12 y 18 es 6, tiene que ser divisor y cuerdas de igual longitud.*

La justificación del uso del máximo común divisor contestar las preguntas planteadas en el ítem 8b la realiza Valeriano en el cuestionario. El alumno considera el máximo común divisor (2×3^2) como un divisor y el "resto" de la descomposición como otro divisor (número de trozos).

El uso de los procedimientos de cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo en situaciones reales se interpreta como la interiorización de una acción vista como el vínculo entre los significados de las situaciones y los efectos del procedimiento de cálculo.

Observamos que en la forma de conocer como proceso los alumnos

(a) empiezan a vincular, aunque con dificultades, las ideas de múltiplo, de divisor y de ser divisible a la representación factorial de los números involucrados,
(b) utilizan alguno de los criterios de divisibilidad y muestran dificultades en la coordinación de dos criterios de divisibilidad, y
(c) usan al menos un procedimiento de obtención del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo, mostrando dificultades en la aplicación de estos elementos en contextos de situación real.

4.2.1. 3. Forma de conocer Objeto.

La encapsulación en objeto de los diferentes elementos del esquema de Divisibilidad se caracteriza, principalmente, porque los alumnos vinculan la divisibilidad a los diferentes modos de representación, pueden coordinar distintos criterios de divisibilidad y usar diversos procedimientos de obtención del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor, aplicando estos dos elementos en situaciones de contexto real.

Conocer como objeto las ideas de "múltiplo", "divisor" y sus diferentes acepciones permite usar estos significados desde la representación factorial. Por ejemplo, Tono (C3-E4) en el cuestionario responde correctamente a los ítems de la tarea 9 -"*Sabiendo que 1001 = 7 x 11 x 13 y 91 = 7 x 13, ¿son correctas las siguientes afirmaciones? a) 91 no es divisor de 1001. Justifica tu respuesta. b) 77 es divisor de 1001. c) 2002 no es múltiplo de 13. Justifica la respuesta*"-,
realizando la simplificación de factores de 1001 (7 x 11 x 13) entre los factores de 91 (7 x 13) y los de 77 (7 x 11) para responder que 91 y 77 son divisores de 1001. Por otra

parte, también simplifica los factores de 2002 (2 x 7 x 11 x 13) entre 13 para indicar que 2002 es múltiplo de 13.

Cuestión n° 9 Calculadora: ~~Sí~~

Sabiendo que : 1001 = 7 x 11 x 13 y 91 = 7 x 13, ¿son correctas las siguientes afirmaciones?: (Justifica tu respuesta)

a) 91 no es divisor de 1001 F

$$\frac{\cancel{7}\cdot 11\cdot \cancel{13}}{\cancel{7}\cdot \cancel{13}} = 11$$

b) 77 es divisor de 1001 V

$$\frac{\cancel{7}\cdot \cancel{11}\cdot 13}{\cancel{7}\cdot \cancel{11}} = 13$$

c) 2002 no es múltiplo de 13 F

$$\frac{2\cdot 7\cdot 11\cdot \cancel{13}}{\cancel{13}} = 2\cdot 7\cdot 11$$

(C3-E4, cuestión 9, ítems 9a, 9b y 9c)

En la entrevista, Tono establece la divisibilidad de 1001 de idéntico modo. Sin embargo para justificar que 13 es múltiplo de 2002 lo hace observando que 2002 es igual a 1001 x 2:

E: *Observe el enunciado, ¿es 77 divisor de 1001?*

Tono: *Sí, porque 7 por 11 son 77 (sin realizar cálculos con lápiz y papel), y por tanto sí es divisor de 1001.*

E: *¿Y 91 es divisor de 1001?*

Tono: *Mmm, no. Espere, sí, sí, porque está el 7 y el 13 y su producto son 91. Por tanto sí es múltiplo de 1001.*

E: *¿2002 es múltiplo de 13?*

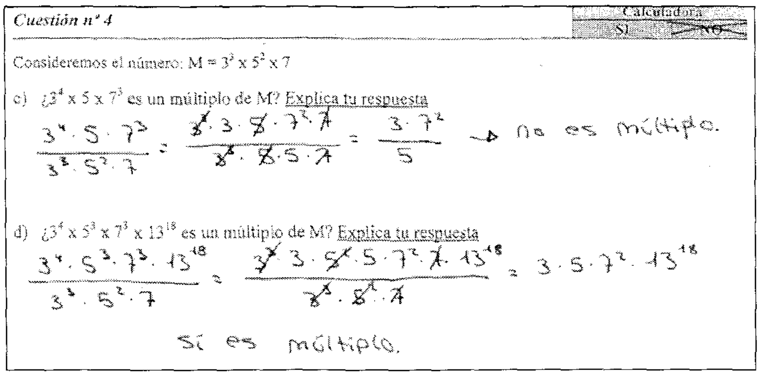
Tono: *Sí, porque 1001 por 2 son 2002 (calcula mentalmente), y 1001 contiene el 13, por tanto 2002 es múltiplo de 13.*

E: *Por tanto, ¿no necesita operar con la calculadora?*

Tono: *No, así está claro.*

El uso de la descomposición en factores primos para tomar decisiones sobre múltiplos y divisores es una característica de conocer como objeto la relación de divisibilidad. Así, por ejemplo Tono encapsula en un objeto la idea de múltiplo y es capaz de determinar la divisibilidad entre números descompuestos en factores primos elevados a distintos exponentes, como hace en el cuestionario al resolver los ítems 4c y 4d

- "*Consideremos el número: M = 3^3 x 5^2 x 7. c) ¿3^4 x 5 x 7^3 es un múltiplo de M? Explica tu respuesta. d) ¿3^4 x 5^3 x 7^3 x 13^{18} es un múltiplo de M? Explica tu respuesta.*"- desde la descomposición factorial de ambos números. La forma de proceder indica que Tono está asumiendo que el múltiplo de un número tiene que tener los mismos factores elevados a mayores exponentes. En el ítem 4c contesta que no es múltiplo dado que el resultado de la "simplificación" realizada es una fracción. En contraposición a la respuesta dada al ítem 4d donde el resultado es un producto de factores.


Cuestión nº 4 Calculadora SI NO

Consideremos el número: M = 3^3 x 5^2 x 7

c) ¿3^4 x 5 x 7^3 es un múltiplo de M? Explica tu respuesta

$\frac{3^4\cdot 5\cdot 7^3}{3^3\cdot 5^2\cdot 7} = \frac{\cancel{3^3}\cdot 3\cdot \cancel{5}\cdot 7^2\cdot \cancel{7}}{\cancel{3^3}\cdot \cancel{5}\cdot 5\cdot \cancel{7}} = \frac{3\cdot 7^2}{5}$ → no es múltiplo.

d) ¿3^4 x 5^3 x 7^3 x 13^{18} es un múltiplo de M? Explica tu respuesta

$\frac{3^4\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 13^{18}}{3^3\cdot 5^2\cdot 7} = \frac{\cancel{3^3}\cdot 3\cdot \cancel{5^2}\cdot 5\cdot 7^2\cdot \cancel{7}\cdot 13^{18}}{\cancel{3^3}\cdot \cancel{5^2}\cdot \cancel{7}} = 3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 13^{18}$

Sí es múltiplo.

(C3-E4, cuestión 4, ítems 4c y 4d)

En la entrevista ratifica y justifica las respuestas dadas a los ítems 4c y 4d en el cuestionario:

E: *¿3^4 x 5 x 7^3 es un múltiplo de M?*

Tono: *No, porque es un número similar a M, pero al simplificar (indica la simplificación de factores y potencias) queda un factor en el denominador, y el 5 del numerador tiene menor exponente que el 5 del denominador.*

E: *¿3^4 x 5^3 x 7^3 x 13^{18} es un múltiplo de M?*

Tono: *Sí, porque si se simplifica la división por los factores de M, los exponentes de los factores del numerador son mayores que los correspondientes del denominador.*

E: *¿Y el factor con base 13?*

Tono: *No importa, porque no se divide, simplemente se añade un número más en el producto.*

Otra característica de conocer como objeto la divisibilidad es que los alumnos son capaces de establecer conversiones entre las representaciones decimales y factoriales de los números para estudiar la divisibilidad entre los números. Por ejemplo, Luís (C21-B1) para resolver la tarea 2

- "*Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son: 464, 493, 522 y 551. ¿De qué número se trata? Explica tu respuesta*"-,

asume que "si P es un factor primo de Q, entonces Q es un múltiplo de P", en consecuencia, "si P es factor común de Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4, entonces Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 son múltiplos comunes de P", como se observa en la entrevista:

> *E:* *¿Puede responder utilizando otro método?*
>
> *Luís:* *Mmm, sí, si hacemos la descomposición de 464, 493, 522 y 551. Los factores que den serán los divisores de 464, y así con cada uno. En todos debe aparecer 29.*

En estos momentos, no disponemos de información sobre cómo actuaría Luís si el factor fuera un número compuesto. Sin embargo, Luís a petición del entrevistador señala que cualquier otro factor debería aparecer en las distintas descomposiciones:

> *E:* *Dé otro, además de 29.*
>
> *Luís:* *Mmm, el 2 .., no, no, sólo el 29 porque no se repite ninguno más en todas las descomposiciones factoriales.*

Otra rasgo que identifica la forma de conocer la divisibilidad como objeto es que la acepción "ser divisible" puede ser estudiada desde los criterios de divisibilidad elementales (por 2, por 3 y por 5), y los estudiantes pueden coordinar varios de estos criterios de divisibilidad.

Por ejemplo, Beltrán (C18-E4) en el cuestionario utiliza los criterios de divisibilidad del 2 y del tres para responder a los ítems 3a y 3b

-"*Indica los valores de b para que 2b45 sea divisible I. Por 2, II. Por 3*"-.

Cuestión nº 3 Calculadora: SÍ / NO

a) Indica, justificando tu respuesta, el valor de b para que el número **2b45** sea:
I. divisible por 2; II. divisible por 3; III. divisible por 6

I - No puede ser, porque acaba en 5 (no es par)
II - 1 2+1+4+5 = 12 múltiplo de 3

(C18-E4, cuestión 3, ítems 3a y 3b)

Posteriormente en la entrevista Beltrán responde del siguiente modo:

E: *Dé un valor de b para que 2b45 sea divisible por 2.*
Beltrán: *No puede ser, porque acaba en 5, y tenía que ser impar.*
E: *¿Y para que sea divisible por 3?*
Beltrán: *Mmm, 2, porque tiene que ser la suma de las cifras múltiplo de 3 y 2, 4 y 5 son 11, espere, espere, no puede ser 2, ha de ser 1 porque así suman 12.*
E: *¿Otro?*
Beltrán: *Sí, el valor de b igual a 4, porque la suma de las cifras es múltiplo de 3.*

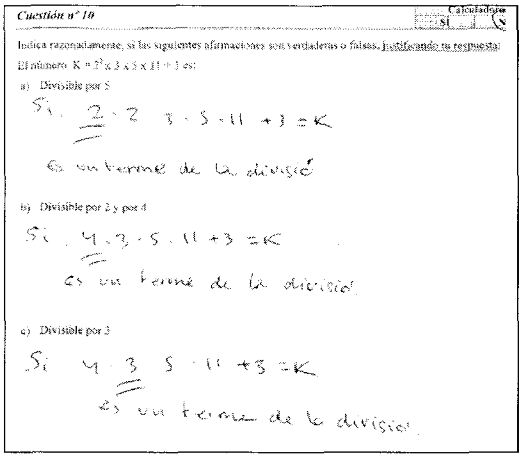
Las respuestas de Beltrán muestran que conoce y aplica los criterios de divisibilidad elementales (por 2 y por 3) y no necesita realizar ninguna comprobación de la divisibilidad de 2b45 para establecer que es divisible por uno de esos números en función del valor de b.

Evidencias de la coordinación de los criterios de divisibilidad por 2 y por 3 las encontramos en la respuesta que Beltrán ofrece en la entrevista sobre el ítem 3c. En el cuestionario estudia la divisibilidad por 6 de 2145 mediante criterios erróneos "*es divisible por 6 porque 2 + 1 + 4 + 5 = 12 es múltiplo de 6*".

En la entrevista Beltrán primero intenta buscar los mismos valores de b que hacen que sea divisible por 3 pero observa que si no es divisible por 2 no puede ser divisible por 6 al no serlo por uno de sus factores:

E:	*Dé un valor de b para que 2b45 sea divisible por 6.*
Beltrán:	*Mm, el 4, porque. .., 2445 es múltiplo de 3 y.., no, no es múltiplo de 6.*
E:	*Compruébelo, por favor.*
Beltrán:	*(Divide 2445 entre 6) No es, no.*
E:	*¿Observa alguna relación del tercer apartado con los apartados anteriores?*
Beltrán:	*Sí.*
E:	*¿Por qué no puede ser divisible por 6?*
Beltrán:	*Ah sí, no puede ser múltiplo de 6 porque no es par.*
E:	*En su respuesta al cuestionario utilizó que la suma de cifras fuese múltiplo de 6 para que fuese divisible por 6.*
Beltrán:	*Sí, pero así no es, no puede ser, no sería múltiplo de 2.*

Finalmente, otra característica de la forma de conocer objeto la divisibilidad es que los alumnos pueden usar la idea de "ser divisible" entre números con representación factorial conjuntamente con la propiedad *"si a / b y $a / c \Rightarrow a / (b + c)$"*. Por ejemplo, Beltrán discute la divisibilidad o la indivisibilidad planteada en la cuestión 10 -*"Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta. El número $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ es: a) Divisible por 5. b) Divisible por 2 y por 4. c) Divisible por 3. d) Divisible por 6. e) Divisible por 15*"-, desde la representación factorial de los números. En el cuestionario sólo se fija en los factores del primer sumando de la representación de K y, en consecuencia, no resuelve correctamente la tarea planteada.


Cuestión nº 10 Calculadora SI NO

Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificando tu respuesta:

El número $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ es:

a) Divisible por 5

Sí, $2 \cdot 2 \; 3 \cdot 5 \cdot 11 + 3 = K$

Es un terme de la divisió

b) Divisible por 2 y por 4

Sí, $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 + 3 = K$

es un terme de la divisió

c) Divisible por 3

Sí $4 \cdot 3 \; 5 \cdot 11 + 3 = K$

es un terme de la divisió

(C18-E4, cuestión 10, ítems 10a, 10b y 10c)

Posteriormente, en la entrevista Beltrán razona desde la representación factorial en conjunción con la propiedad *"si a / b y $a / c \Rightarrow a / (b + c)$"* como podemos apreciar en los siguientes protocolos:

E: *¿K es divisible por 2?*
Beltrán: *Sí, está el 2. Espere, espere, no es no. No, porque la primera parte sí es, pero luego al sumar 3 ya será impar.*

También puede discutir la divisibilidad K por otros números primos 3 y 5 o por compuestos 4, 6 o 15:

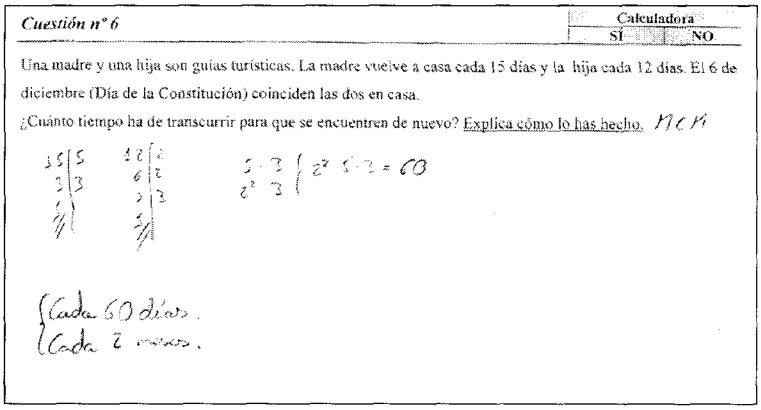
E: *¿K es divisible por 5?*
Beltrán: *No, porque la primera parte sí es, pero al sumar 3 no acabará en 5 ó en 0.*
E: *¿K es divisible por 4?*
Beltrán: *No, porque la primera parte sería par, pero al sumarle 3 aparecería un número impar, por tanto, no puede ser múltiplo de 4.*
E: *¿Tiene claro que hay dos sumandos?*
Beltrán: *Sí, sí, tiene dos partes.*
E: *¿K es divisible por 3?*
Beltrán: *Mm, sí, porque.., bueno, no lo sé, ..., sí es, porque es múltiplo de 5 y de 2 la primera parte acaba en 0, y también es múltiplo de 3, y la segunda parte también es múltiplo de 3 porque se suman 3, por tanto el total es múltiplo de 3.*
E: *¿K es divisible por 6?*
Beltrán: *Mmm, no, porque la primera parte sí es, pero la segunda al sumar 3 no lo es, por tanto no es.*
E: *¿K es divisible por 15?*
Beltrán: *Mmm,.., no, porque si es múltiplo de 5 y de 2 ha de acabar en 0, y más 3 no será.*

La representación factorial del número no impide a Beltrán discernir si K es o no divisible por otros números (primos o compuestos). Beltrán vincula correctamente la divisibilidad a la representación del número K, con dos sumandos. Es capaz de reflexionar sobre el elemento "ser divisible" desde el modo de representación factorial y establecer relaciones entre los distintos elementos, en términos de divisores y no divisores, de múltiplos y no múltiplos.

Otra de las características de la forma de conocer como objeto la divisibilidad es la aplicación e interpretación del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor de dos o más números en contextos reales y desde dos procedimientos de cálculo distintos. Por ejemplo, Juan (C5-E4) en el cuestionario resuelve a la tarea 6

-"*Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho*"-,

obteniendo el mínimo común múltiplo mediante la representación factorial de 15 (3 x 5) y 12 (2^2 x 3). El alumno interpreta que los múltiplos comunes son los momentos en los que madre e hija coinciden.


Cuestión nº 6 Calculadora SÍ NO

Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa.

¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho. MCM

$$\begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 \cdot 3 \\ 2^2 \cdot 3 \end{array} \Big\{ 2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$$

Cada 60 días.
Cada 2 meses.

(C5-E4, cuestión -ítem 6)

En la entrevista, Juan manifiesta que puede obtener el mínimo común múltiplo de otro modo, a través de la determinación de los elementos comunes de las series de múltiplos de 12 y de 15:

E: *La respuesta que ha dado es correcta. Buscó el mínimo común múltiplo mediante la descomposición factorial de 12 y 15, y dio como respuesta que se encontrarán en 60 días. ¿Podría hacerlo de otra forma que no fuera mediante la descomposición factorial?*

Juan: *No se me ocurre. Mmm,..ir contando, obteniendo los múltiplos de 12 y de*

15, así tendríamos 15, 30, 45, 60, etc. y de 12 sería 12, 24, 36, 48 y 60. El primer día en que coinciden es al cabo de 60 días.

Sólo algunos estudiantes que conocen como objeto los elementos máximo común divisor y mínimo común múltiplo son capaces de establecer que el procedimiento de cálculo de los elementos mediante la descomposición factorial genera el menor de los múltiplos comunes o el mayor de los divisores comunes.

Un testimonio de esta característica la encontramos en las respuestas dadas por Luís (C21-B1) a las preguntas realizadas sobre la tarea 6:

E: *¿Por qué el número obtenido, 60, mediante la descomposición factorial garantiza que se ha obtenido el mínimo de los múltiplos comunes? Diga por qué no pueden ser 30 ó 120.*

Luís: *Porque , mmm,..., porque se toman los factores comunes y no comunes, por tanto no puede dar mayor que el obtenido.*

E: *¿Seguro? Por ejemplo, 3x 5 x 2 x2 x3 es mayor.*

Luís: *Ah sí, mmm, estamos buscando el mínimo, no el mayor. A ver, sólo se toman los elementos que están en los dos, pero no los tomamos dos veces, únicamente tomamos los comunes y no comunes, solamente la mayor potencia.*

E: *Diga entonces, porqué la respuesta no puede ser 30.*

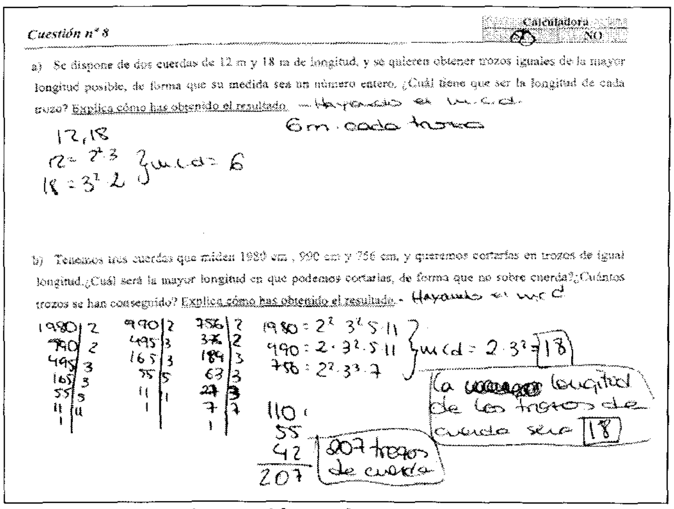
Luís: *Porque 30 no es múltiplo de 12, por ejemplo, no podemos alcanzar 30 con el 12.*

Luís evidencia que cualquier múltiplo común debe contener todos los factores de cada uno de los números.

Por último, los alumnos que conocen como objeto el elemento máximo común divisor de dos números son capaces de generalizar esta idea, aplicarla e interpretarla en contexto reales. Por ejemplo, Raquel (C21-E4) resuelve el ítem 8a
- "*Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero.*

¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado."-,
obteniendo el máximo común divisor de dos números.

Posteriormente, Raquel resuelve el ítem 8b
-"*Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm, 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud. ¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda? ¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado.*"-,
generalizando la idea de máximo común divisor a tres números, independientemente del tamaño de éstos.


Cuestión nº 8 Calculadora SÍ NO

a) Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado. — Hayando el m.c.d.

6m cada trozo

12, 18
$12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 3^2 \cdot 2$ } m.c.d. = 6

b) Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm, 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud. ¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda? ¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado. - Hayando el m.c.d.

$1980 = 2^2\, 3^2\, 5 \cdot 11$, $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$ } m.c.d. = $2 \cdot 3^2 = \boxed{18}$

La longitud de los trozos de cuerda será $\boxed{18}$

110 + 55 + 42 = 207 — 207 trozos de cuerda

(C21-E4, cuestión 8, ítems 8a, 8b1 y 8b2)

Raquel obtiene el número de trozos en que se pueden dividir las cuerdas dividiendo cada número por el máximo común divisor, 18. Considera el máximo común divisor como un divisor, los demás factores de la descomposición factorial de los números como otros divisores e interpreta estos divisores-restos como el número de trozos. La suma de estos tres divisores es considerada como la solución buscada.

La forma de conocer objeto se caracteriza porque los estudiantes vinculan la divisibilidad a:

(a) los diferentes modos de representación,

(b) pueden coordinar diferentes criterios de divisibilidad, y

(c) son capaces de aplicar y generalizar el significado de mínimo común múltiplo y de máximo común divisor en situaciones de contexto real, usando métodos alternativos de obtención para ambos elementos.

En las siguientes tablas mostramos la distribución de las formas de conocer los estudiantes los distintos elementos matemáticos que organizan la Divisibilidad en N en los tres grupos que hemos considerado (1° de ESO, 4° de ESO y 1° de Bachillerato). Los alumnos que no muestran ninguna evidencia de las características de la forma de conocer acción del elemento considerado han sido han sido incluidos en la categoría "*No muestra forma de conocer*".

		Elemento Matemático				
		Múltiplo	**Divisor**	**Ser divisible**	**Mínimo común múltiplo**	**Máximo común divisor**
No muestra forma de conocer		----------	----------	----------	C8, C21	C7, C20, C21
Forma de Conocer	**Acción**	C4, C6, C7, C8, C9, C10, C12, C13, C14, C15, C16, C17, C19, C20	C3, C4, C5, C6, C7, C8, C10, C13, C14, C15, C16, C17, C19, C20	C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10, C11, C12, C13, C14, C15, C16, C17, C18 C19, C20, C21	C2, C4, C6, C10, C11, C12, C15, C16, C17, C20	C3, C8, C9, C10, C12, C13, C15, C16, C17, C18, C19
	Proceso	C1, C2, C3, C5, C11, C18, C21	C1, C9, C11 C12, C18 C21	C1, C2, C3	C1, C3, C7, C9, C13, C14, C19	C1, C2, C4, C6, C11, C14
	Objeto	----------	C2	----------	C5, C18	C5

Tabla 4.7. Formas de conocer los elementos matemáticos de Divisibilidad de los estudiantes de 1° de ESO

		Elemento Matemático				
		Múltiplo	**Divisor**	**Ser divisible**	**Mínimo común múltiplo**	**Máximo común divisor**
No muestra forma de conocer		-----------	-----------	-----------	C17, C19	C10, C16, C17, C19
Forma de Conocer	**Acción**	C1, C4, C7, C8, C9, C10, C11, C13, C14, C16, C17, C19, C20	C1, C4, C8, C9, C10, C11, C13, C16, C17, C19, C20	C1, C4, C7, C8, C9, C11, C12, C13, C14, C16, C19, C20	C2, C4, C7, C9, C10, C11, C12, C13, C14, C15, C16, C20	C3, C4, C8, C11, C13, C14, C15
	Proceso	C2, C12, C15, C21	C7, C12, C14	C2, C3, C5, C6, C10, C15, C17	C1, C3, C6, C18	C1, C2, C6, C7, C9, C12, C18, C20
	Objeto	C3, C5, C6, C18	C2, C3, C5, C6, C15, C18, C21	C18, , C21	C5, C8, C21	C5, C21

Tabla 4.8. Formas de conocer los elementos matemáticos de Divisibilidad de los estudiantes de 4° de ESO

		Elemento Matemático				
		Múltiplo	**Divisor**	**Ser divisible**	**Mínimo común múltiplo**	**Máximo común divisor**
No muestra forma de conocer		-----------	-----------	-----------	C14, C16, C18, C20	C9, C12, C16, C18
Forma de Conocer	**Acción**	C9, C10, C12, C14, C16, C17, C18, C20	C9, C11, C14, C15, C16, C17, C18, C20	C5, C6, C9, C11, C14, C16, C18, C19, C20	C5, C6, C9, C12, C15, C17, C19	C6, C14, C17, C19, C20
	Proceso	C1, C4, C5, C6, C11, C15, C19	C1, C4, C5, C6, C12, C19	C1, C2, C3, C4, C7, C8, C10, C12, C13,C15, C17	C1, C4, C7, C10, C11	C1, C4, C5, C7, C10, C11, C15
	Objeto	C2, C3, C7, C8, C13, C21	C2, C3, C7, C8, C10, C13, C21	C21	C2, C3, C8, C13, C21	C2, C3, C8, C13, C21

Tabla 4.9. Formas de conocer los elementos matemáticos de Divisibilidad de los estudiantes de 1° de Bachillerato

		Elemento Matemático														
		Múltiplo			Divisor			Ser divisible			Mínimo común múltiplo			Máximo común divisor		
		1º ESO	4º ESO	1º BACH	1º ESO	4º ESO	1º BACH	1º ESO	4º ESO	1º BACH	1º ESO	4º ESO	1º BACH	1º ESO	4º ESO	1º BACH
No muestra forma de conocer		0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	4	3	4	4
Forma de Conocer	Acción	14	13	8	14	11	8	18	12	9	10	12	7	11	7	5
	Proceso	7	4	7	6	3	6	3	7	11	7	4	5	6	8	7
	Objeto	0	4	6	1	7	7	0	2	1	2	3	5	1	2	5

Tabla 4.10. Distribución de los estudiantes en los diferentes cursos según las formas de conocer los elementos matemáticos de Divisibilidad

Observamos que la forma predominante de conocer los diferentes elementos matemáticos de divisibilidad que manifiestan los estudiantes entrevistados es acción. El número de alumnos que muestran forma de conocer proceso y objeto de los diferentes elementos matemáticos va creciendo progresivamente según aumenta el curso en que se encuentran. También se observa que en 1° de ESO y 4° de ESO los alumnos que no muestran forma de conocer junto a los que conocen como acción los diferentes elementos matemáticos superan a los que conocen como proceso u objeto conjuntamente.

4.2.2. Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de Divisibilidad.

En este apartado se describen los niveles del desarrollo del esquema de Divisibilidad (Intra, Ínter y Trans) de los 63 alumnos entrevistados, según el uso de los elementos matemáticos en las diferentes tareas, las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos y la influencia de los modos de representación a la hora de usar los elementos o establecer relaciones.

La Divisibilidad en N sólo forma parte del currículo de 1° y 2° de ESO, por lo que la caracterización de los diferentes niveles del esquema de Divisibilidad se puede realizar con las mismas garantías en las poblaciones estudiadas (1° de ESO, 4° de ESO y 1° de Bachillerato). Así, la muestra considerada está formada por 21 alumnos de 1° de

Educación Secundaria Obligatoria, 21 de 4º de Educación Secundaria Obligatoria y 21 estudiantes de 1º de Bachillerato.

En la caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de Divisibilidad resultan fundamentales las relaciones de divisibilidad que indica la equivalencia de las acepciones:

- *a es divisor de b* $\Leftrightarrow$ *b es múltiplo de a* $\Leftrightarrow$ *b es divisible por a* $\Leftrightarrow$ *a es un factor de b.*
- *b x c divide a a* $\Leftrightarrow$ *b y c dividen a a.*

y la manera en que los estudiantes manejan la propiedad:

- *Si d es divisor de a y b, entonces d es divisor de a* $\pm$ *b.*

El uso que hacen los estudiantes de los modos de representación (decimal o factorial) de los números naturales para determinar múltiplos o divisores, la coordinación de los criterios de divisibilidad para discernir si un número es divisible por otro, o el cálculo del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor en distintas situaciones contextuales, permiten caracterizar el grado de desarrollo del esquema de Divisibilidad.

4.2.2.1. Nivel Intra.

En este nivel de desarrollo del esquema los alumnos suelen:

(a) desconocer o usar los elementos matemáticos múltiplo y divisor de manera inconexa o errónea sin establecer relaciones entre las diferentes acepciones,
(b) establecer relaciones condicionales entre las operaciones de multiplicar y dividir,
(c) usar parcialmente las relaciones: a es divisor de b $\Leftrightarrow$ b es múltiplo de a $\Leftrightarrow$ b es divisible entre a $\Leftrightarrow$ a es un factor de b, sólo cuando los números están expresados en la representación decimal,
(d) usar parcialmente, o desconocer, los criterios elementales de divisibilidad, sin relacionarlos, y
(e) desconocer los elementos mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos números o usar de forma mecánica los algoritmos de cálculo de estos elementos.

En este nivel los estudiantes vinculan los elementos múltiplo, divisor y ser divisible a las operaciones de multiplicar o dividir, necesitando que los números estén expresados en su forma decimal, reflejando formas de conocer acción. Si pueden calcular el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor de dos números lo hacen mecánicamente. Los alumnos de este nivel además tienen dificultades en establecer relaciones entre los diferentes elementos y en coordinarlos, y en aplicar propiedades.

Los estudiantes del nivel Intra recurren a la operación de dividir/multiplicar para determinar múltiplos o divisores, como hace Magda (C4-E4) en la entrevista diciendo que "*un múltiplo de 8 es,.., mm, 16, y un múltiplo de 25 es 125. Por ejemplo 16 dividido entre 2 es 8*".

Cuando el entrevistador solicita a Magda que ejemplifique múltiplos y divisores de un número, la alumna lo hace correctamente utilizando números concretos:

E: Ponga un ejemplo para aclarar esa definición.
Magda: Un múltiplo de 8 es 16, y un divisor de 8 es el 2.

Este nivel se caracteriza por la tendencia operativa de la idea de divisor (Q *es* divisor de P $\Leftrightarrow$ Q : P = k ó Q : k = P). Como podemos apreciar por ejemplo, en las respuestas de Raúl (C20-E1):

E: ¿Qué es un divisor de un número?
Raúl: Divisor es... la división ... el número que divide.
E: Dé un divisor de 10.
Raúl: 5, porque al dividir 10 entre 2 sale 5.

Los estudiantes del nivel Intra actúan sin establecer la relación inversa entre las operaciones de multiplicar y dividir. Por ejemplo, Raúl no establece la relación inversa entre las operaciones de multiplicar y dividir, como podemos ver en el siguiente protocolo de la entrevista:

E: *¿Existe relación entre la multiplicación y la división?*

Raúl: *Sí, multiplicando sale un número mayor, y al dividir sale la mitad de ese número.*

E: *¿La mitad?*

Raúl: *Mmm, no tiene por qué.*

Los alumnos de este nivel tienen dificultades para usar los elementos múltiplo y divisor cuando los números están representados mediante la descomposición factorial, y necesitan obtener la representación decimal de los números. Por ejemplo Magda (C4-E4) en la respuesta al ítem 4c

- "¿3^4 x 5 x 7^3 es múltiplo de M (M=3^3 x 5^2 x 7)?" -,

necesita obtener la representación decimal de los dos números para poder realizar la división y dar múltiplos del número 3^4 x 5 x 7^3, que es una característica de la forma de conocer acción :

E: *¿3^4 x 5 x 7^3 es un múltiplo de M?*

Magda: *(Calcula el valor de M) El resultado de ese número es 138915, que dividido por el valor de M que es 4725, el resultado es decimal y por tanto no es múltiplo de M*

Observamos como comportamiento típico de los alumnos encuadrados en este nivel la necesidad de usar la representación decimal de los números naturales para obtener múltiplos y divisores, realizando la división y comprobando que es exacta. Este comportamiento hace que cuando los números expresados en su descomposición factorial son muy grandes los estudiantes de este nivel, al no poder utilizar la calculadora o no saber interpretar la notación científica ofrecida por la misma, no pueden determinar sin un número es múltiplo de otro. De esta manera conocer como acción los elementos matemáticos del esquema de Divisibilidad conlleva que los estudiantes tengan dificultades en establecer relaciones entre ellos.

Las dificultades indicadas pueden observarse en el siguiente protocolo de Ana (C19-B1) correspondiente a su respuesta al ítem 4d

- "*¿3^4 x 5^3 x 7^3 x 13^{18} es un múltiplo de M (M = 3^3 x 5^2 x 7)? Explica tu respuesta*" -.

Ana no contesta a la pregunta en el cuestionario, y en la entrevista obtiene las expresiones decimales de M y 3^4 x 5^3 x 7^3 x 13^{18} y efectúa la división. Como el resultado aparece en notación científica (al tratarse de un número grande) Ana no proporciona la respuesta correcta:

E: *¿3^4 x 5^3 x 7^3 x 13^{18} es un múltiplo de M?*
Ana: *Mmm, (opera) Sale un número grande. Para ser múltiplo... pero creo que sí que es múltiplo, porque si M se va multiplicando por sí mismo, podríamos llegar al otro.*
E: *¿Porque no lo comprueba?*
Ana: *Sí, ya, pero es que ...., uf, es muy grande.*

La incapacidad de establecer relaciones entre los elementos matemáticos del esquema de Divisibilidad parece estar vinculada a que se conocen como acción estos elementos y a la influencia que ejercen los modos de representación.

Por otra parte, en el nivel de desarrollo Intra los estudiantes tienen dificultades en aplicar las propiedades de la divisibilidad. Por ejemplo, Ana necesita obtener la expresión decimal del número K para resolver la cuestión 10
-"*Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta. El número K = 2^2 x 3 x 5 x 11 + 3, es: a) Divisible por 5. b) Divisible por 2 y por 4. c) Divisible por 3. d) Divisible por 6. e) Divisible por 15*"-,
En el cuestionario, Ana después de obtener la representación decimal de K (663) divide y comprueba si el resultado es exacto. En la entrevista, al intentar justificar su respuesta, Ana no usa la propiedad: "*Si a / b y a /c, entonces b + c es divisible por a*", y pone de manifiesto las dificultades que tiene en manejar las propiedades de la divisibilidad:

E: *¿El número K = 2^2 x 3 x 5 x 11 + 3 es divisible por 5?*
Ana: *Sí, porque 5 está multiplicando.*
E: *¿K es divisible por 2?*
Ana: *Sí, porque 2^2 está dentro.*
E: *¿Tiene claro que hay dos sumandos?*
Ana: *Sí, la de la multiplicación y la suma de más 3.*
E: *Compruebe si K es divisible por 2.*
Ana: *(Opera y divide) No es, no da exacto, mmm, ...*

Esta dificultad en aplicar las propiedades de la divisibilidad puede ser interpretada en que la propiedad *"Si a / b y a / c entonces a / (b+c)"* se apoyan en reconocer relaciones que no pueden establecerse en el nivel Intra.

En el nivel Intra los estudiantes usan de forma asilada algunos criterios de divisibilidad (por 2, por 3 y por 5) que no siempre recuerdan (en el sentido de tener memorizados) de manera correcta. Una evidencia de este hecho la encontramos en la respuesta dada por Carola (C13-E4) a la tarea 3
- *"Indica, justificando tu respuesta, el valor de b para que el número 2b45 sea: I. divisible por 2; II. divisible por 3; III. divisible por 6"*-,
donde la divisibilidad por 3 la discute aplicando el criterio de divisibilidad (la suma de las cifras es múltiplo de 3) y generaliza el criterio de divisibilidad por 3 al caso del 2:

E: *Dé un valor de b para que 2b45 sea divisible por 2*
Carola: *Mmm, ¿2 puede ser?. A ver, 2245 entre 2 no da exacto.*
E: *¿Qué está pensando?*
Carola: *Siempre hago lo mismo, sumo los números y tiene que dar un número divisible por 2, así suman 11, ah, no tiene que ser 2145, a ver (divide) no da tampoco. Mmm ...*
E: *Dé un valor de b para que 2b45 sea divisible por 3.*
Carola: *4, 2445, sumando las cifras es múltiplo de 3.*

Este hecho evidencia que Carola recuerda el criterio de divisibilidad por 3 y lo intenta generalizar como criterio de divisibilidad por 2 (la suma de cifras tendría que ser divisible por 2), pero tiene que recurrir a la división del número entre 2 para dar la respuesta correcta.

Con este contexto previo, los estudiantes en el nivel Intra tienen dificultades en coordinar los criterios de divisibilidad ya que implica establecer relaciones. Por ejemplo Fabián (C4-E1), ayudado por el entrevistador, discute la divisibilidad por 6 en su respuesta al ítem 3c
- *"Indica, justificando tu respuesta, el valor de b para que el número 2b45 sea divisible por 6"* -:

E:	*¿Cuál es el valor de b para que sea divisible por 6?*
Fabián:	*Con la regla del 3, el 2145.*
E:	*Compruebe si 2145 es divisible por 6, por favor.*
Fabián:	*(Divide) Mmm, no es divisible por 6.*
E:	*¿Para que sea divisible por 6, tendrá que ser divisible por3?, ¿y por algún otro?*
Fabián:	*De 3, dos veces.*
E:	*¿Existía el valor para que fuese divisible por 2?*
Fabián:	*No.*
E:	*¿Existirán valores de b para que 2b45 sea divisible por 6?*
Fabián:	*No debe haber.*

Fabián no coordina ser divisible por 3 y por 2 para ser divisible por 6, aunque tras las indicaciones del entrevistador parece mostrar que el número 2b45 no es divisible por 6.

Los alumnos del nivel Intra tienen dificultades en establecer relaciones entre los elementos matemáticos de divisibilidad de ahí que no sean capaces de determinar el mayor de los divisores comunes, o el menor de los múltiplos comunes de dos números y, en consecuencia, los elementos máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números no siempre son recordados, o son usados de forma aislada y calculados mecánicamente mediante el uso de un procedimiento que genera dificultades en su manejo dado que las ideas de mínimo común múltiplo y de máximo común divisor se apoyan en reconocer relaciones comunes (de múltiplo o divisor) entre parejas de números.

En este nivel encontramos dos alumnos en 1º de ESO, dos en 4º de ESO y cuatro en 1º de Bachillerato que desconocen la definición de mínimo común múltiplo o lo confunden con el máximo común divisor. De igual modo tres alumnos de 1º de ESO, cuatro de 4º de ESO y cuatro de 1º de Bachillerato no conoce la definición del máximo común divisor o lo confunden con el mínimo común múltiplo. Además todos estos alumnos no son capaces de usar el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor con carácter instrumental a lo largo de todo el cuestionario.

Una característica del nivel de desarrollo Intra es que los estudiantes usan mecánicamente los algoritmos de obtención del mínimo común múltiplo o máximo común divisor. Por ejemplo, Enrique (C17-E4) cuando es preguntado por el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 30 y 50 -ítems 7c y 7d- utiliza el procedimiento de la descomposición factorial, pero muestra dificultades para determinar correctamente ambos elementos:

> *E:* *¿Cuál es el máximo común divisor de 30 y 50?, ¿y el mínimo común múltiplo de 30 y 50?*
>
> *Enrique:* *Voy a poner la descomposición factorial. (Descompone factorialmente) El mínimo común múltiplo es 2 x 5, es 10. El máximo común divisor .., no sé como se hace.*
>
> *E:* *En el cuestionario respondió 150.*
>
> *Enrique:* *Ahora no recuerdo.*
>
> *E:* *¿Podría buscar el mínimo común múltiplo de una forma distinta a la de realizar la de la descomposición factorial?*
>
> *Enrique:* *No, no sé.*

Observamos como Enrique, a pesar de realizar la descomposición factorial de 30 y 50, obtiene números que no sabe asignar al máximo común divisor o al mínimo común múltiplo.

Otros estudiantes encuadrados en el nivel Intra recuerdan la definición operativa del elemento mínimo común múltiplo- "*m es el mínimo común múltiplo de dos números naturales, a y b, sí, y sólo sí, m es el producto de los factores primos comunes y no comunes a ambos, tomados cada uno con sus mayores exponentes*"-, o del máximo común divisor - "*d es el máximo común divisor de dos números naturales, a y b, sí, y sólo sí, d es el producto de los factores primos comunes a ambos, tomados cada uno con sus menores exponentes*"-, o utilizan las series de múltiplos o divisores comunes a ambos números.

Por ejemplo, Sonia (C11-E4) responde a las definiciones de mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos números- ítems 7a y 7b- asociándolos al procedimiento de obtención mediante la descomposición factorial, tanto en la entrevista como en el cuestionario y desconoce cualquier otro procedimiento alternativo:

E:	*¿Qué es el mínimo común múltiplo de dos números?*
Sonia:	*Los comunes y no comunes elevados al mayor exponente.*
E:	*Eso es el procedimiento, pero pedía la definición.*
Sonia:	*Mmm, el número, uf, no lo sé.*
E:	*¿Qué es el máximo común divisor de dos números?*
Sonia:	*Comunes elevados al menor exponente.*
E:	*Pero le pedía la definición.*
Sonia:	*Bueno, pues eso es lo que pienso yo.*
E:	*En los dos últimos has realizado la descomposición factorial, ¿podría resolverlo de otro modo?*
Sonia:	*Mmm, lo contesté porque siempre lo hago así, no sabría ahora. De otro modo.*

En el nivel Intra los modos de representación influyen en el uso por parte de los estudiantes de los elementos matemáticos que conforman la Divisibilidad en N. Los alumnos no son capaces de establecer relaciones entre los elementos del esquema de Divisibilidad. En consecuencia, aquellos elementos que se apoyan en el establecimiento de relaciones, como el elemento "ser divisible" (desde los criterios de divisibilidad), los elementos mínimo común múltiplo o máximo común divisor de dos ó tres números, generan dificultades en su manejo, reduciéndose básicamente a aproximaciones procedimentales que no explicitan claramente el significado dado a las relaciones entre los números.

Por poblaciones, la distribución de estudiantes en el Nivel Intra se recoge en la siguiente tabla:

NIVEL INTRA		Estudiantes	Total
Curso	1º ESO	C4, C6, C7, C8, C9, C10, C12, C13, C14, C15, C16, C17, C19, C20, C21	15
	4º ESO	C4, C7, C8, C9, C10, C11, C13, C14, C15, C16, C17, C19, C20	13
	1º Bachillerato	C5, C6, C9, C12, C14, C16, C17, C18, C19, C20	10

Tabla 4.11. Estudiantes entrevistados asignados al Nivel Intra del desarrollo del esquema de Divisibilidad

4.2.2.2. Nivel Ínter.

En el nivel Ínter del desarrollo del esquema de Divisibilidad, los estudiantes pueden:

(a) usar correctamente los elementos múltiplo y divisor de un número natural y establecer relaciones entre las diferentes acepciones,

(b) vincular los elementos ser divisible, múltiplo y divisor a la representación factorial del número, siendo capaces de establecer que un número es múltiplo de sus factores primos pero no de todos sus factores compuestos. Esta característica está vinculada a la dificultad en reconocer la unicidad de la descomposición en factores primos de un número natural,

(c) utilizar los criterios elementales de divisibilidad (por 2, por 3 y por 5) y, en algunos casos, poder coordinar dos criterios, y

(d) usar adecuadamente alguno de los algoritmos de obtención de los elementos matemáticos mínimo común múltiplo y máximo común divisor y aplicarlos en contextos de situaciones reales.

Los alumnos de este nivel emplean correctamente las ideas de múltiplo y divisor, estableciendo relaciones entre ambos elementos así como la relación inversa entre las operaciones de multiplicar y dividir. Un comportamiento característico del nivel de desarrollo Ínter podemos observarlo, por ejemplo, en Elena (C1-B1) que conecta la idea "P es divisor de Q" con la operación de multiplicar (existe un número k tal que P x k = Q) al responder que "*625 es divisor de 25 porque 25 x 25 =625*".

Otra característica importante del nivel Ínter del desarrollo del esquema de Divisibilidad es que los estudiantes vinculan los elementos ser divisible, divisor y múltiplo a la representación factorial del número, determinando que los factores primos son divisores del número y mostrando dificultades cuando se trata de factores compuestos. Por ejemplo, Elena identifica los cuatro números proporcionados (464, 493, 522, 551) en el ítem 2

- "*Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son: 464, 493, 522 y 551. ¿De qué número se trata? Explica tu respuesta*",

con la idea de múltiplos comunes de un determinado número. Para observar si aparece un factor común en todos ellos pasa de la representación decimal de los números a su representación factorial:

E:	*Usted en el cuestionario contestó mediante la descomposición factorial de los números de la serie dada y dijo que es el 1, ¿puede explicar su respuesta?*
Elena:	*A ver,..., espere, porque los números en que coincidían en la descomposición factorial.*
E:	*¿Quiere comprobar si solamente tienen en común el 1?*
Elena:	*(Realiza la descomposición factorial) No, es el 29, porque aparece en todos...*
E:	*¿Existe algún número más que cumpla las condiciones del enunciado?*
Elena:	*Mmm,.., mayor sí, pero menor no*
E:	*Yo le preguntaba por otro distinto de 29.*
Elena:	*No, creo que no, pero no hay mas, menor no, porque no se puede factorizar más.*

Elena identifica el 29 como factor común a las cuatro descomposiciones factoriales - $464 = 2^4 \times 29$, $493 = 17 \times 29$, $522 = 2 \times 3^2 \times 29$, $551 = 19 \times 29$ -. Al indagar en la entrevista sobre la posibilidad de otros divisores, Elena responde que "*si fuera divisor debería aparecer*":

E:	*¿Existirá algún otro número que lo cumpla?*
Elena:	*Creo que no, eh,...*
E:	*¿Si multiplica 29 por otro número para probar si es divisor de los*

de la serie, debería aparecer ese otro número en la descomposición factorial de los de la serie?

Elena: Ah, claro, claro, si fuera divisor debería aparecer.

E: ¿Y mayor?

Elena: Puede que sí. Probaré (prueba con 29 por 2), mmm, no, la división no sale exacta.

E: ¿Existirá algún otro número que lo cumpla?

Elena: Creo que no, eh,...

Durante la entrevista, Elena también pone de manifiesto que los factores primos no se pueden descomponer más, por lo que el 29 es el menor número que cumple la condición de ser "divisor". Sin embargo, al insistirle si podría haber un número mayor que 29, prueba con el 29 x 2 y hace la división, comprobando que no es exacta. Lo que puede estar indicando este comportamiento es que la concepción de múltiplo vinculada a la representación factorial (descomposición en factores primos) está relacionada con los factores primos pero no con los factores compuestos. Elena recurre a la descomposición en factores primos para buscar un divisor común. Una vez encontrado "un factor primo común" en las diferentes descomposiciones lo ve como un divisor común. No es capaz de realizar el mismo razonamiento para los divisores compuestos.

El comportamiento de Elena en la resolución de los ítems 4a y 4b
-"*Consideremos el número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. *a) ¿M es divisible por 7? Explica tu respuesta. b) ¿M es divisible por 5?), ¿Por 2?, ¿Por 9?, ¿Por 11?, ¿Por 15? Explica tu respuesta*"- ,
evidencia cómo los alumnos de este nivel sólo son capaces de discutir la idea de "Q es divisible por P" desde la representación factorial de estos números siempre que sean factores primos. Elena asume que si el 5 y el 7 están en la descomposición en factores primos de M, entonces M es divisible por 5 y por 7. Pero tiene dudas con el 9 (que puede ser visto como $3 \times 3 = 3^2$) y discute la divisibilidad del 15 desde la representación decimal de M:

E: ¿$M = 3^3 \times 5^2 \times 7$*, M es divisible por 7?*

Elena: Sí, porque se multiplica por 7 en la expresión, y por tanto se puede dividir por 7.

E: *¿M es divisible por 5?*

Elena: *También, porque, bueno es elevado al cuadrado, pero se multiplica por 5, por 5, sí.*

E: *¿M es divisible por 9?*

Elena: *Sí, bueno, puede ser que no, porque en todos los casos, espere, está dentro el 9, pero en todos los casos no tiene por qué. En la contestación multipliqué los valores y dividí por 9, y salía exacta la división.*

E: *¿M es divisible por 15?*

Elena: *Por 5,.., sería comprobarlo, (divide) sí es porque la división es exacta entre 15*

Para Elena la vinculación del elemento "Q es divisible por P" a la representación factorial de los números parece depender de que el número P sea un factor primo o un factor compuesto.

Los alumnos del nivel Ínter también tienen dificultades para determinar si un número "es divisible" por otro que no aparece en la descomposición factorial. Por ejemplo, Elena divide para comprobar si el número M es divisible por 11, mientras que para verificar que M no es divisible por 2 utiliza el hecho de que "*todos los números del producto son impares*", refiriéndose a que ninguno de los factores de M es un número par:

E: *¿M es divisible por 2?*

Elena: *Por 2 no, porque todos los números del producto son impares.*

E: *¿M es divisible por 11?*

Elena: *No lo sé, tengo que operar (opera), no, no da exacto la división. Pero por 11 se puede decir que no es, porque no está metido en la multiplicación, y ninguno de los valores (señala 3, 5 y 7) es múltiplo de 11.*

El hecho de tener problemas para establecer la relación "ser divisible" por un número compuesto, o bien por números que no aparecen en la descomposición factorial del número, parece indicar que la idea de la unicidad de la descomposición factorial en factores primos de un número natural se manifiesta con dificultad en este nivel de desarrollo del esquema. Elena no reconoce la unicidad de la descomposición factorial puesto que necesita comprobar que 11 no es divisor realizando la división, y sólo después de esto contesta que no lo es porque ninguno de los factores primos de la descomposición factorial es múltiplo de 11.

Si el número es compuesto (caso del 9 y del 15) Elena duda, tiene que recurrir a la expresión decimal de M y realizar la división. Si el número es primo y no está en la descomposición factorial puede actuar (a) aplicando el criterio de divisibilidad (como en el caso del 2 al considerar la idea de paridad de los factores) si lo tiene conceptualizado, (b) usando la representación decimal de M si no tiene conceptualizado el criterio de divisibilidad (como en el caso del 11).

En algunas ocasiones los estudiantes también pueden vincular el elemento "Q es divisible por P" a la representación factorial si el número P es una potencia de un factor primo. Por ejemplo, Marisa (C1-E1) en el cuestionario contesta a los ítems 4a y 4b usando la representación decimal de M (4725). Sin embargo, en la entrevista discute la divisibilidad por 9 (3^2) desde la representación factorial de M:

E: *¿M es divisible por 3?*
Marisa: *Por 3 también, porque está 3^3.*
E: *¿Y por 9?*
Marisa: *Por 9 también, por que 3^3 son 27, y por tanto está 3 por 3 que son 9.*

Estos comportamientos son representativos del nivel Ínter ya que se apoyan en la representación factorial para discernir la divisibilidad de un número por sus factores primos y en algunos casos por potencias de los mismos. Sin embargo, cuando tienen que responder a la pregunta "*¿M es divisible por 15?*" necesitan recurrir a la representación decimal para discutir la divisibilidad. Por ejemplo, las respuestas de Elena y Marisa indican que la idea de unicidad de la descomposición en factores primos no es concebida en este nivel. Los alumnos no reconocen que la descomposición en factores primos de un número natural es única ya que admiten que M puede ser divisible por un número que no aparece expresado explícitamente en su descomposición, bien por que el número considerado sea primo (11) y no esté en el producto o porque sea un número compuesto (15).

Los alumnos del nivel Ínter presentan dificultades en identificar los divisores compuestos y los múltiplos de un número expresado mediante su descomposición factorial. Todo ello pone de manifiesto la dificultad que tienen estos estudiantes en reconocer la unicidad de la descomposición factorial de un número para determinar múltiplos y divisores.

Otra característica del nivel Ínter es la dificultad que tienen los estudiantes en coordinar dos informaciones para realizar inferencias y generar nueva información. Este hecho se pone de manifiesto en las limitaciones que muestran los alumnos en el manejo de la propiedad: "a / b y $a / c \Rightarrow a / (bx \pm cy), \forall a, b, c, x, y \in N$", al tener que recurrir a la representación decimal del número.

Esta característica puede apreciarse en las respuestas dadas a los ítems de la cuestión 10
-"*Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta. El número* $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ *es: a) Divisible por 5. b) Divisible por 2 y por 4. c) Divisible por 3. d) Divisible por 6. e) Divisible por 15*"-.
Por ejemplo, Marisa (C1-E1) en el cuestionario expresa K es su representación decimal y, a continuación, realiza la división por cada uno de los números. En la entrevista, sin embargo, indica K es divisible por 5 ya que es un factor del primer sumando. Posteriormente, a sugerencia del entrevistador y para justificar su afirmación, transforma K en su expresión decimal, divide por 5 y aplica el criterio de divisibilidad de este número. Marisa no usa la propiedad anteriormente citada:

E:	*¿El número* $K = 2^2 x 3 x 5 x 11 + 3$ *es divisible por 5?*
Marisa:	*Entre 5, mm,.., sí,.., creo que sí.*
E:	*Usted contestó en el cuestionario que no.*
Marisa:	*Mmm,..., pues, yo creo que sí, porque aparece un 5.*
E:	*Compruébelo, por favor.*
Marisa:	*(Realiza el cálculo de K y divide por 5) No, porque K no acaba en 0 ó en 5.*

En el nivel Ínter los alumnos recurren a una concepción acción de la idea de "ser divisible" cuando tienen que aplicar la propiedad *"si a / b y $a / c \Rightarrow a / (b + c)$"* puesto que ésta implica tener que vincular mediante una "y" lógica estas relaciones para inferir la divisibilidad del número $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ por diferentes números.

Esta dificultad en establecer relaciones en el sentido de coordinar información para realizar inferencias y generar nueva información también se presenta en la coordinación de los criterios de divisibilidad. Así, una de las manifestaciones características del nivel Ínter es que los estudiantes recuerdan y aplican los criterios elementales de divisibilidad (por 2, por 3 y por 5), y sólo en algunos casos son capaces de coordinar dos criterios de divisibilidad. Por ejemplo, coordinar la divisibilidad de un número por 2 y por 3 para discernir la divisibilidad por 6. Una evidencia de esta característica la encontramos en las respuestas que ofrece Lidia (C5-B1) a los ítems de la cuestión 3
- "*Indica, justificando tu respuesta, el valor de b para que el número 2b45 sea: I. Divisible por 2; II. Divisible por 3; III. Divisible por 6*"- .
Lidia estudia la divisibilidad del número 2b45 por 2 y por 3 a partir de sus criterios:

E:	*Dé un valor de b para que 2b45 sea divisible por 2.*
Lidia:	*Eh, tendría que ser par, y ese número es impar, porque acaba en 5. No habrá para 2.*
E:	*¿Y para ser divisible por 3?*
Lidia:	*Hay que sumar las cifras y ver que es múltiplo de 3. Por ejemplo, b podría ser un... 3*
Lidia:	*(Prueba con diversos valores de b) Con 1 sí da.*
E:	*¿Otro?*
Lidia:	*Tengo que probarlos todos.*

Sin embargo, una vez establecido que 2b45 no es divisible por 2, sea cual sea el valor de b, tiene dificultades en determinar la divisibilidad por 6 al contestar, aplicando un falso criterio de divisibilidad, que "*no es divisible por 6 porque dividiendo 45 entre 6 no sale exacto*". Así, la dificultad en establecer las relaciones adecuadas se ponen de manifiesto al no establecer la relación "Q no es un divisible por 2 $\Rightarrow$ Q no es divisible por 6" como observamos en el siguiente protocolo:

E: *¿Observa alguna relación del tercer apartado con los apartados anteriores?*
Lidia: *Sí, posiblemente.*
E: *¿Si es divisible por 6 es divisible por 2?*
Lidia: *Sí, porque los dos son pares.*
E: *¿Existían valores de b para que fuera divisible por 2?*
Lidia: *No.*
E: *¿Entonces podrá ser divisible por 6?*
Lidia: *A lo mejor sí.*

Lidia contesta, de forma errónea, que aunque el número no sea divisible por 2 puede ser divisible por 6. Esta respuesta indica que no coordina la divisibilidad por 2 y por 3. En la entrevista, la indagación realizada sobre la coordinación de la divisibilidad por 2 y por 3 permite asumir que Lidia no reconoce la implicación de que si 2b45 no es divisible por 2 entonces 2b45 no es divisible por 6.

En algunos casos y en el contexto de la entrevista, los estudiantes del nivel Ínter pueden empezar a coordinar la información. Por ejemplo, Mila (C11-B1) proporciona diferentes valores de b (1 ó 4) que hacen que el número 2b45 sea múltiplo de 3. Para discutir la divisibilidad de 2b45 por 6, empieza "probando" diferentes valores para b:

E: *¿Y para que sea divisible por 6?*
Mila: *Por 6,...., (va probando) mmm...*
E: *¿Para que sea divisible por 6, tendrá que ser divisible por 2?*
Mila: *Claro, tendrá que ser múltiplo del número que había salido por 2.*
E: *¿También múltiplo de 3?*
Mila: *También puede ser, tendrá que ser múltiplo de 2 y de 3.*

Tras las preguntas del entrevistador, Mila entiende que 2b45 no puede ser divisible por 6 dado que no es divisible por 2. Aunque parece coordinar la divisibilidad por 2 y por 3, necesita realizar la comprobación de su afirmación:

E: *Por ejemplo, 2145 era múltiplo de 3. ¿Será múltiplo de 6?*
Mila: *(Divide) No.*

Posteriormente, Mila es capaz de reconocer la implicación "*Si Q no es divisible por P* $\Rightarrow$ *Q no es divisible por P x R*" como demuestran sus respuestas al ítem 10e -"*Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta. El número K =* $2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ *es divisible por 15*"- Mila, tras obtener la representación decimal de K, indica que no es divisible por 15 ya que no es divisible por 5. Previamente, la divisibilidad por 5 la ha discutido a partir de su criterio:

E: *¿K es divisible por 15?*
Mila: *No, porque no acaba ni en 0 ni en 5.*

En definitiva, los estudiantes del nivel Ínter conocen y aplican los criterios elementales de divisibilidad (por 2, por 3 y por 5), y algunos de ellos empiezan a coordinar dos criterios, aunque con ayuda.

Otra característica del nivel Ínter es que los alumnos pueden usar, al menos, una de las siguientes relaciones: (a) relación entre el mínimo común múltiplo (máximo común divisor) de dos números naturales y los múltiplos (divisores) comunes a ambos, o (b) relación entre el mínimo común múltiplo (máximo común divisor) de números naturales y la descomposición factorial de los números naturales: "*m es el mínimo común múltiplo de dos números, a y b, sí, y sólo sí, m es el producto de los factores primos comunes y no comunes a ambos, tomados cada uno con su mayor exponente*" *("d es el máximo común divisor de dos números, a y b, sí, y sólo sí, d es el producto de los factores primos comunes a ambos, tomados cada uno con su menor exponente")* siendo capaces de aplicarlos en situaciones de contexto real.

Sin embargo, los estudiantes de este nivel que utilizan dos procedimientos de obtención del mínimo común múltiplo o del máximo común divisor (determinación de series de múltiplos o divisores comunes y descomposición factorial) no son capaces de establecer relaciones entre ellos. Por ejemplo, Javier (C2-E4) usa ambos procedimientos para resolver la situación planteada en el ítem 6
-"*Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa.*

¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho"- ,

pero no puede establecer ninguna relación entre ambos. Desconoce por qué el método de la descomposición factorial genera el mínimo común múltiplo de los dos números:

E: *¿Podría responder de otra forma?*

Javier: *Mmm, obteniendo el mínimo común múltiplo (realiza la descomposición factorial de 15 y de 12). Tomaré los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente. Da 60.*

E: *Si dispone de al menos dos métodos para la resolución, ¿cómo relaciona la forma de obtención en ambos casos?*

Javier: *No sabría decirle, este segundo método lo utilizamos muy a menudo.*

Los estudiantes del nivel Ínter pueden utilizar adecuadamente las relaciones entre el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor de dos números naturales y los múltiplos o divisores comunes a ambos, pero no pueden establecer que el procedimiento de la descomposición factorial genera el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor.

Las características mencionadas anteriormente han permitido determinar la distribución de estudiantes en el Nivel Ínter del desarrollo del esquema de Divisibilidad que se recoge en la siguiente tabla:

NIVEL ÍNTER		Estudiantes	Total
Curso	1º ESO	C1, C2, C3, C5, C11, C18	6
	4º ESO	C1, C2, C3, C6, C12	5
	1º Bachillerato	C1, C4, C7, C10, C11,C15	6

Tabla 4.12. Estudiantes entrevistados asignados al Nivel Ínter del desarrollo del esquema de Divisibilidad

4.2.2.3. Nivel Trans.

En este nivel de desarrollo del esquema los estudiantes son capaces de:

(a) emplear con coherencia los elementos matemáticos de divisibilidad, estableciendo relaciones entre ellos, independientemente del modo de representación, asumiendo la unicidad de la descomposición en factores primos de los números,

(b) aplicar distintos criterios de divisibilidad y coordinarlos para obtener nuevas informaciones, y

(c) usar los diferentes algoritmos de obtención de los elementos matemáticos máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números, aplicándolos en contextos reales y empezando a establecer alguna relación entre ellos.

Cabe mencionar que ninguno de los alumnos entrevistados de 1º de ESO se encuentra en el nivel Trans del desarrollo del esquema de Divisibilidad. En 4º de ESO encontramos 3 alumnos en este nivel y 5 en 1º de Bachillerato. Los estudiantes del nivel Trans muestran principalmente forma de conocer objeto o proceso de los diferentes elementos de divisibilidad.

Una de las características de los alumnos que se encuentran en este nivel es que establecen las relaciones bicondicionales de divisibilidad: "Q es múltiplo de P $\Leftrightarrow$ P es divisor de Q $\Leftrightarrow$ P es un factor de Q $\Leftrightarrow$ Q es divisible entre P". Por ejemplo, Joaquín (C2-B1) es capaz de relacionar las nociones de factor y divisor, y de divisor y múltiplo, independientemente del modo de representación como evidencian las respuestas dadas al ítem 2

- "*Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son: 464, 493, 522 y 551. ¿De qué número se trata? Explica tu respuesta*" - .

En el cuestionario, Joaquín para encontrar el número cuyos múltiplos son 464, 493, 522 y 551 calcula la diferencia entre los términos sucesivos de esta serie (493-464, 522-493, 551-522) observando que es 29. A continuación realiza la división de cada uno de estos números entre 29 y comprueba si el resultado es exacto. Joaquín considera entonces que el número buscado es 29.

> *Cuestión n° 2* — Calculadora: SI / NO
>
> Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son: 464, 493, 522 y 551.
>
> ¿De qué número se trata?. Explica tu respuesta
>
> El número es el 29
>
> Cuando divides todos estos números por 29, el resto da 0. Y he llegado a ese número comprobando que la resta de uno menos su anterior da 29.

(C2-B1, cuestión - ítem 2)

Posteriormente en la entrevista, cuando el entrevistador solicita a Joaquín una forma alternativa de justificación, procede a realizar la descomposición factorial de todos los números de la serie. El alumno observa que 29 aparece en la representación factorial de todos ellos y lo identifica como el único factor común de 464, 493, 522 y 551:

Joaquín:	*(Realiza la descomposición factorial de los números 464, 493, 522 y 551) Todas tienen como factor 29.*
E:	*¿Existe algún número más que cumpla las condiciones del enunciado?*
Joaquín:	*Mmm,.., no, porque,.., no hay ningún divisor más en común en la descomposición factorial.*

Joaquín indica que 29 es factor común (en relación a divisor) de todos ellos y señala que no habrá otro común a todos porque "*no hay ningún divisor en común en la descomposición factorial*". Estos razonamientos parecen indicar que es capaz de relacionar las nociones de factor y divisor, de divisor y múltiplo, y de establecer la equivalencia entre "no ser un elemento de la descomposición en factores primos y no ser divisor". No obstante, cabría pensar si se refiere únicamente a un factor primo o compuesto.

Joaquín puede reflexionar sobre el elemento "ser divisible" desde la representación factorial, estableciendo relaciones entre factor, múltiplo y divisor, y coordinando dos criterios de divisibilidad como evidencian sus respuestas a los ítems 4a y 4b

- "*Consideremos el número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. *a) ¿M es divisible por 7? Explica tu respuesta. b) ¿M es divisible por 5?, ¿Por 2?, ¿Por 9?, ¿Por 11?, ¿Por 15? Explica tu respuesta*"-

Joaquín asocia factor con la idea de ser divisible desde la forma "operativa" de la descomposición en factores primos como observamos en el siguiente protocolo:

> *Joaquín:* *Sí, porque 7 es un factor de M, y por tanto, mm,..., el número puede,.., o no,.., sí claro, si 7 es un factor es divisible por 7, porque para obtener el número tiene que multiplicar por 7, y por tanto luego puede dividir por 7.*

También establece que si un número no aparece en la descomposición de M, entonces M no es divisible por ese número. En la entrevista indica que M no es divisible por 2 ya que el 2 no aparece en la descomposición factorial de M, y además ninguno de los factores es múltiplo de 2:

> *Joaquín:* *Si no aparece, ¿significa que no será divisible por 2?*
> *E:* *No sé, si no está, tendrá que ser alguno de los factores múltiplo de 2, que no es el caso, por tanto no es múltiplo de 2.*

Con posterioridad, manifiesta que M es divisible por un producto de factores primos (15):

> *Joaquín:* *¿Y por 15?*
> *E:* *Por 15 sí es divisible, ya que aparece 5 x 3, puede agrupar esos dos factores.*

Observamos que Joaquín es capaz de reflexionar sobre el elemento ser divisible desde la representación factorial como un todo, estableciendo adecuadamente relaciones entre los distintos elementos; construyendo significados en términos de divisores y no divisores, de múltiplos y no múltiplos; y coordinando información para determinar la divisibilidad.

Otra de las características del nivel Trans es que los alumnos vinculan la idea de múltiplo a la representación factorial (descomposición en factores primos) estableciendo la relación bicondicional entre múltiplo y factor. Por ejemplo, Joaquín determina si un número es múltiplo de otro sin necesidad de utilizar la representación decimal de éstos, como evidencian las contestaciones dadas a los ítems 4c y 4d:

- "*Consideremos el número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$*, ¿*$3^4 \times 5 \times 7^3$ *es un múltiplo de M? Explica tu respuesta*"-

- "*¿*$3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ *es un múltiplo de M? Explica tu respuesta*"-.

Joaquín contesta en el cuestionario que $3^4 \times 5 \times 7^3$ no es un múltiplo de M ya que "*para serlo tendría que tener los mismos factores, todos ellos con mayor exponente que los de M. El 5 no tiene mayor exponente*". En la entrevista confirma que un número que sea múltiplo de M tiene que tener todos los factores primos de M con mayor exponente, aunque necesita confirmarlo con la calculadora:

Joaquín: *Eh,..., mmm,.., sí, a ver, no, no porque si 5 tiene menor exponente. Espere que lo compruebe con la calculadora (opera y divide), no es.*

E: *¿Qué conjetura tenía?*

Joaquín: *Para que fuera múltiplo pensaba que todos los exponentes tenían que ser mayores que los de M, pero lo comprobé con la calculadora.*

No obstante, cuando Joaquín responde al segundo ítem indica que el número $3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 11^{18}$ es múltiplo de M "*porque tiene todos los factores de M y además con mayor exponente*" sin necesidad de realizar ninguna comprobación, como se muestra en el siguiente protocolo:

E: *¿*$3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ *es un múltiplo de M?*

Joaquín: *Este sí que es múltiplo, porque tiene todos los factores de M, y además con mayor exponente.*

E: *¿La multiplicación por 13 no influye en nada?*

Joaquín: *No, porque lo que se hace es multiplicar*

Podemos resumir que los estudiantes del nivel Trans pueden establecer, sin necesidad de realizar operaciones, relaciones bicondicionales entre múltiplo, divisor, factor y ser divisible, entre números representados mediante su descomposición en factores primos. Este hecho subraya la importancia de la descomposición en factores primos de los números en el desarrollo del esquema de Divisibilidad.

Por otra parte, los estudiantes del nivel Trans usan la propiedad "a / b y $a / c \Rightarrow a / (bx + cy), \forall a, b, c, x, y \in N$", cuando (a) el entrevistador los cuestiona sobre ella, o (b) el divisor es un factor primo de cada uno de los sumandos.

Por ejemplo, Beltrán (C18-E4) inicialmente resuelve la cuestión 10 -"*Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta: El número* $K = 2^2 x\ 3\ x\ 5\ x\ 11 + 3$ *es: a) Divisible por 5. b) Divisible por 2 y por 4. c) Divisible por 3. d) Divisible por 6. e) Divisible por 15*"-, sin aplicar esta propiedad. Posteriormente, cuando el entrevistador pregunta a Beltrán si es consciente de que el número K está formado por dos sumandos, el alumno determina la divisibilidad de K haciendo uso de la propiedad:

E: *¿K es divisible por 5?*

Beltrán: *No, porque la primera parte sí es, pero al sumar 3 no acabará en 5 ó en 0.*

E: *¿K es divisible por 4?*

Beltrán: *No, porque la primera parte sería par, pero al sumarle 3 aparecería un número impar, por tanto, no puede ser múltiplo de 4.*

E: *¿Tiene claro que hay dos sumandos?*

Beltrán: *Sí, sí, tiene dos partes.*

E: *¿K es divisible por 3?*

Beltrán: *Mm, sí, porque.., bueno, no lo sé, ..., sí es, porque es múltiplo de 5 y de 2 la primera parte acaba en 0, y también es múltiplo de 3, y la segunda parte también es múltiplo de 3 porque se suman 3, por tanto el total es múltiplo de 3.*

Beltrán al ser conciente de la influencia que tienen los dos sumandos de K para discutir su divisibilidad, la argumenta a partir de la propiedad: "a / b y $a / c \Rightarrow a / (bx + cy), \forall a, b, c, x, y \in N$".

Otros alumnos del nivel Trans, como por ejemplo Joaquín (C2-B1), sólo son capaces de aplicar la propiedad anterior cuando "el divisor es un factor primo de cada uno de los sumandos". Joaquín necesita recurrir a la representación decimal de $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ para discutir la divisibilidad por 5, y sin embargo, determina que K es divisible por 3 diciendo *"tenemos la suma de dos múltiplos de 3, entonces sí será divisible por 3"*, como se pone de manifiesto en el siguiente protocolo:

> *E:* *El número $K = 2^2 x\ 3\ x\ 5\ x\ 11 + 3$, ¿es divisible por 5?*
>
> *Joaquín:* *Si no estuviera sumado 3 sí que sería, pero al sumarle 3 no lo tengo claro. Tengo que calcularlo. (Opera y divide) No es divisible por 5 porque no acaba ni en 0, ni en 5.*
>
> *E:* *Y si le suma 3, ¿será múltiplo de 3?*
>
> *Joaquín:* *Mmm,.., tenemos la suma de dos múltiplos de 3, entonces sí será divisible por 3.*

El uso de la "conjunción lógica" en esta propiedad para poder inferir que el número K es divisible por un determinado número posibilita que los alumnos establezcan la divisibilidad de K entre 3, pero a su vez les crea dificultades para determinar la divisibilidad por otros números, recurriendo en estos casos a la representación decimal de K.

En el nivel Trans los alumnos también son capaces de coordinar dos criterios de divisibilidad. Esta característica la podemos observar en las respuestas de Joaquín a los ítems de la tarea 3

- *"Indica, justificando tu respuesta, el valor de b para que el número 2b45 sea: I. divisible por 2; II. Divisible por 3; III. Divisible por 6"*-.

Joaquín utiliza los criterios de divisibilidad por 2 y por 3 en el cuestionario, señalando por ejemplo que el número 2b45 no es divisible por 2 para ningún valor de b por ser la última cifra impar. En la entrevista, señala que para que el número 2b45 sea divisible por 6, además de ser múltiplo de 2 ha de ser múltiplo de 3, evidenciando que ha coordinado estos criterios para establecer la divisibilidad o indivisibilidad por 6.

> *E:* *En el cuestionario respondió que por 2 no es divisible porque la última cifra es impar, en la segunda sumó las cifras y dijo que el valor posible de b es 1, 4 ó 5. ¿Cuál es el valor de b para que el número 2b45 sea divisible por 6?*

Joaquín: *Nunca será divisible por 6, porque si no es divisible por 2 por ser impar, tampoco es divisible por 6, porque para que sea divisible por 6 tendrá que ser par. Si no es divisible por 2, ni por 3, no es divisible por 6.*

E: *¿Y si el número es divisible por 6 que debe ocurrir?*

Joaquín: *Que también sea divisible por 2 y por 3, a ver, por 2 y por 3, sí, eso es.*

Los alumnos del nivel Trans pueden usar diferentes algoritmos de obtención del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor, y aplicarlos en situaciones de contexto real. Algunos estudiantes encuadrados en este nivel son capaces de establecer relaciones entre el máximo común divisor de dos números naturales (mínimo común múltiplo de dos números naturales), los divisores comunes a ambos (los múltiplos comunes a ambos) y la condición de divisibilidad. El comportamiento de Luís (C21-B1) en la resolución de la tarea 6

- "*Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho*"-,

es una clara evidencia de cómo alguno de los alumnos del nivel Trans son capaces establecer este tipo de relaciones. Luís determina que el número obtenido mediante el procedimiento de la descomposición factorial garantiza la obtención del menor de los múltiplos comunes, como podemos observar en el siguiente protocolo:

E: *¿Por qué el número obtenido, 60, mediante la descomposición factorial y el procedimiento correspondiente garantiza que se ha obtenido el mínimo de los múltiplos comunes? Diga por qué no pueden ser 30 ó 120.*

Luís: *Porque, mmm,..., porque se toman los factores comunes y no comunes, por tanto no puede dar mayor que el obtenido.*

E: *¿Seguro? Por ejemplo, 3 x 5 x 2 x 2 x 3 es mayor.*

Luís: *Ah sí, mmm, estamos buscando el mínimo, no el mayor. A ver, sólo se toman los elementos que están en los dos, pero no lo tomamos dos veces, únicamente tomamos los comunes y no comunes, solamente la mayor potencia.*

E: *Diga entonces, porqué la respuesta no puede ser 30.*

Luís: *Porque 30 no es múltiplo de 12, por ejemplo, no podemos alcanzar 30 con el 12.*

Luís justifica que cualquier múltiplo de dos números contiene todos los factores de cada uno de los números. Indica que si se toman los factores comunes y no comunes con los mayores exponentes se obtiene el mínimo de los múltiplos comunes de estos números, y si se tomase otro factor más el nuevo número sería un múltiplo del anterior y por tanto mayor.

Los alumnos del nivel Trans establecen relaciones entre los diferentes elementos matemáticos de divisibilidad, independientemente del modo de representación. Estos alumnos dotan de significado a los elementos matemáticos mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos números, los calculan por diferentes procedimientos y empiezan a establecer relaciones entre estos procedimientos.

La distribución de estudiantes entrevistados en el Nivel Trans del Esquema de Divisibilidad es la siguiente:

NIVEL TRANS		Estudiantes	Total
Curso	1° ESO	--	0
	4° ESO	C5, C18, C21	3
	1° Bachillerato	C2, C3, C8, C13, C21	5

Tabla 4.13. Estudiantes entrevistados asignados al Nivel Trans del desarrollo del esquema de Divisibilidad

4.2.2.4. Características del desarrollo del esquema de Divisibilidad en N.

El análisis llevado a cabo en los diferentes cursos nos permite observar que entre los alumnos entrevistados predomina el Nivel Intra del desarrollo del esquema de Divisibilidad. Entre los estudiantes encuadrados el nivel Intra existen alumnos que establecen muy pocas relaciones entre los elementos, desconocen la definición de los elementos matemáticos mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos o tres números y no son capaces de obtenerlos. Recordamos que la selección de los alumnos entrevistados en los distintos cursos se realizó mediante la proporcionalidad de las puntuaciones de los participantes en la investigación.

El proceso de análisis realizado a los alumnos de los diferentes cursos, evidencia:

(a) La construcción progresiva del esquema de Divisibilidad. Ésta se manifiesta por el gradual aumento en los distintos cursos estudiados del uso y del establecimiento de relaciones entre los elementos matemáticos.

(b) La importancia de la representación de los números naturales. El grado de vinculación de los elementos matemáticos a la representación factorial ha servido para discriminar las formas de conocer los elementos proceso u objeto así como los niveles de desarrollo del esquema Ínter o Trans.

A continuación concretamos la caracterización de los diferentes niveles (Intra, Ínter y Trans) del desarrollo del esquema de Divisibilidad.

A. Nivel Intra.

El nivel Intra del esquema de Divisibilidad se caracteriza porque los alumnos suelen:

(a) desconocer o usar los elementos matemáticos múltiplo y divisor de manera inconexa o errónea sin establecer relaciones entre las diferentes acepciones,
(b) establecer relaciones condicionales entre las operaciones de multiplicar y dividir,
(c) usar las relaciones entre los elementos matemáticos sólo cuando los números están expresados en la representación decimal,
(d) usar parcialmente, o desconocer, los criterios elementales de divisibilidad, y
(e) desconocer los elementos mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos números o usar de forma mecánica los algoritmos de cálculo de estos elementos.

La forma de conocer de los distintos elementos matemáticos que muestran los alumnos del nivel Intra suele ser acción, aunque aparecen algunas manifestaciones de conocer como proceso.

B. Nivel Ínter.

El nivel de desarrollo Ínter del esquema de Divisibilidad queda caracterizado por:

(a) usar correctamente los elementos múltiplo y divisor de un número natural y establecer relaciones entre las diferentes acepciones,

(b) vincular los elementos ser divisible, múltiplo y divisor a la representación factorial del número, siendo capaces de establecer que un número es múltiplo de sus factores primos pero no de todos sus factores compuestos. Esta característica está vinculada a la dificultad en reconocer la unicidad de la descomposición en factores primos de un número natural,

(c) utilizar los criterios elementales de divisibilidad (por 2, por 3 y por 5), y en algunos casos, poder coordinar dos criterios, y

(d) usar adecuadamente alguno de los algoritmos de obtención de los elementos matemáticos mínimo común múltiplo y máximo común divisor y aplicarlos en contextos de situaciones reales.

Los alumnos de este nivel establecen más relaciones entre los elementos matemáticos que los del nivel Intra. Empiezan a coordinar dos criterios de divisibilidad y a vincular las relaciones de divisibilidad a la representación factorial de los números, determinando que un factor primo es un divisor de un número y que un número es múltiplo de sus factores primos. En este nivel los estudiantes pueden mostrar dificultades en el análisis de la divisibilidad de un número por sus factores compuestos o por números que no forman parte de su descomposición factorial. Esta dificultad es consecuencia de que estos alumnos no asumen la unicidad de la descomposición factorial de un número como producto único de sus factores primos. Usan el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor en situaciones contextuales.

C. Nivel Trans.

Los estudiantes del nivel Trans del desarrollo del esquema de Divisibilidad pueden:

(a) emplear con coherencia los elementos matemáticos de divisibilidad, estableciendo relaciones entre ellos, independientemente del modo de representación, asumiendo la unicidad de la descomposición en factores primos de los números,

(b) aplicar distintos criterios de divisibilidad y coordinarlos para obtener nuevas informaciones, y

(c) usar los diferentes algoritmos de obtención de los elementos matemáticos máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números, aplicándolos en contextos reales y empezando a establecer alguna relación entre ellos.

Los alumnos del nivel Trans establecen relaciones bicondicionales entre los elementos múltiplo, divisor y ser divisible sin necesidad de recurrir a la representación decimal de los números. Aplican diferentes algoritmos de obtención del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor en situaciones reales y empiezan a vincular estos procedimientos.

Sólo se han encontrado alumnos del nivel Trans en los cursos 4º de ESO (3) y 1º de Bachillerato (5). La forma de conocer los elementos matemáticos de divisibilidad en este nivel es principalmente objeto, y en algunos casos se conocen como proceso. Estos estudiantes establecen relaciones entre los diferentes elementos matemáticos de divisibilidad.

A continuación se referencia el número de alumnos de cada curso que se engloba en cada nivel de desarrollo del esquema:

Nivel	1º ESO	4º ESO	1º Bachillerato	Total
Intra	15	13	10	38
Ínter	6	5	6	17
Trans	0	3	5	8

Tabla 4. 14. Número de estudiantes englobados en los diferentes niveles de desarrollo del esquema de Divisibilidad

4.2.3. Tematización del esquema de Divisibilidad.

En la teoría de APOS (DeVries, 2001) un esquema "*es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados, consciente o inconscientemente, en una estructura coherente en la mente del individuo y que puede ser evocado para tratar una situación problemática de ese área de la matemática. Una importante función y definitiva característica de la coherencia es su uso en determinar qué está en el ámbito del esquema y qué no*" (p.8). La construcción de conexiones que relacionan diversas acciones, procesos u objetos en un objeto particular se expresa como la tematización del esquema asociada con ese objeto. DeVries (2001, p.8), dentro del grupo de trabajo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Educaction Community), señala que se logra la tematización de un esquema o el esquema se tematiza en un objeto "*cuando se reflexiona sobre la comprensión misma de un esquema, viéndolo como "un todo", y se es capaz de realizar acciones sobre el esquema, entonces decimos que el esquema ha sido tematizado en un objeto*".

En opinión de Zazkis y Campbell (1996a), la tematización de la divisibilidad como un esquema requiere la construcción de conexiones entre (a) acciones, procesos y objetos que involucren a la multiplicación, a la división y a la descomposición en factores primos y (b) la divisibilidad y la descomposición en factores primos. Por ejemplo, determinando la equivalencia entre factores y divisores de un número mediante el uso de la representación factorial de los números. Para Zazkis y Campbell (1996a) la relación de la divisibilidad con estructuras cognitivas tales como la descomposición en producto de factores primos ayuda a la tematización de la divisibilidad en un esquema. Para estos autores, la tematización de la divisibilidad involucra construir relaciones específicas entre la divisibilidad y los factores primos o compuestos.

La conexión de la divisibilidad y el Teorema Fundamental de la Aritmética según estos autores parece contribuir enormemente a la comprensión de la divisibilidad como un esquema dado que esta conexión supone, por ejemplo, obtener todos los múltiplos y divisores de un número aplicando las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación o incluso usar relaciones modulares de congruencia. Los autores también destacan la importancia de que los alumnos establezcan la relación inversa entre las operaciones de multiplicar y dividir en términos de "*a / b (a divide b) sí, y sólo sí, b: a = d, dónde d es un número natural; y, a / b sí, y sólo sí, existe un número natural d tal que a x d = b*" ya que existen fuertes evidencias de que los alumnos conciben la divisibilidad en términos de multiplicar y dividir, y el establecimiento de la relación inversa entre estas dos operaciones puede ayudar a la comprensión de los estudiantes entre factor y divisor, y su vinculación a la descomposición en factores primos de los números.

Por otra parte, Brown et al. (2002) en su investigación sobre la comprensión de la divisibilidad, tomando como referente el trabajo de Zazkis y Campbell (1996a), destacan que si bien las conexiones entre los conceptos de multiplicación, factores y factores primos son importantes para construir lo que ellos llaman "*un esquema ampliamente útil para la divisibilidad*" (p.45) no menos importante es la comprensión de cómo se construyen los conceptos fundamentales y cómo se relacionan para formar la estructura coherente subyacente de un esquema. Según los autores, el esquema de divisibilidad "*podría incluir los esquemas para las operaciones aritméticas, los esquemas para sus propiedades y un esquema para la factorización de números naturales como producto único de factores primos.*" (p.76), siendo la génesis del esquema de divisibilidad el esquema de la estructura multiplicativa.

Brown et al. (2002) manifiestan que la obtención del mínimo común múltiplo puede ayudar a encapsular y desencapsular el Teorema Fundamental de la Aritmética, elemento primordial de la tematización del esquema de Divisibilidad. La obtención del mínimo común múltiplo de dos números con representación factorial exige a los estudiantes manifestar por qué el procedimiento del exponente más alto genera el mínimo común múltiplo de esos dos números, permitiendo también la obtención de nuevos múltiplos.

En nuestra investigación consideramos que la tematización de la divisibilidad como un esquema se produce cuando los estudiantes pueden:

(a) Discernir la divisibilidad en términos de divisores y no divisores, de múltiplos y no múltiplos a partir de la representación decimal y factorial de los números, asumiendo la unicidad de la descomposición en factores primos de los números.

(b) Establecer relaciones bicondicionales entre las acepciones léxicas de divisibilidad "*a es divisor de b* $\Leftrightarrow$ *b es múltiplo de a* $\Leftrightarrow$ *b es divisible por a* $\Leftrightarrow$ *a es un factor de b*" y usar la relación contrarrecíproca "*a no es factor de b, entonces a no divide a b*" para hablar de la indivisibilidad de un número representado factorialmente.

(c) Utilizar la conjunción lógica para realizar, como indican Zazkis y Campbell (1996a), inferencias sobre la divisibilidad tales como la coordinación de criterios o uso de la propiedad "*si* a / b *y* $a / c \Rightarrow a / (b + c)$".

(d) Usar los significados de máximo común divisor y de mínimo común múltiplo desde diferentes procedimientos y relacionarlos.

Cuando un estudiante es capaz de establecer las relaciones de divisibilidad "*a es divisor de b* $\Leftrightarrow$ *b es múltiplo de a* $\Leftrightarrow$ *b es divisible por a* $\Leftrightarrow$ *a es un factor de b*" y usar la relación contrarrecíproca "*a no es factor de b, entonces a no divide a b*" vincula las relaciones de divisibilidad a la descomposición en factores primos de los números, sin necesidad de utilizar las propiedades de multiplicar o dividir. Además, el uso de la relación lógica contrarrecíproca "*a no es factor de b, entonces a no divide a b*" favorece la comprensión conceptual de la divisibilidad como una propiedad entre números.

El uso de la conjunción lógica para coordinar criterios de divisibilidad permite complementar la divisibilidad en términos de divisores y no divisores, puesto que los alumnos utilizan las propiedades conmutativa y asociativa para determinar divisores de un número natural. Como indican Zazkis y Campbell (1996a), la comprensión y aplicación de los criterios de divisibilidad permite realizar inferencias sobre la divisibilidad y ayudan a la encapsulación de la divisibilidad como un objeto. La coordinación de la divisibilidad posibilita la obtención de divisores (factores) compuestos de un número dado mediante su representación factorial.

El cálculo del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor mediante diferentes procedimientos facilita la comprensión de la idea de múltiplos y divisores comunes vinculada a la representación factorial de los números. Además, los alumnos tematizan la divisibilidad cuando son capaces de observar que los procedimientos generan el mayor de los divisores o el menor de los múltiplos comunes, pudiendo obtener múltiplos y divisores de un número dado a partir de la representación factorial.

Después del análisis conjunto realizado a todos los cuestionarios y todas las entrevistas, encontramos en el nivel Trans un alumno de 1º de Bachillerato y una alumna de 4º de ESO que han tematizado el esquema de Divisibilidad en N. Presentamos el caso de Luís (C21-B1) para mostrar cómo su comportamiento global a lo largo de cuestionario y de la entrevista manifiesta que ha tematizado el esquema de Divisibilidad.

Luís (C21-B1) ha tematizado el esquema de divisibilidad porque puede vincular los elementos "ser divisible", "divisor" y "múltiplo" a la descomposición en factores primos de los números, determinando múltiplos y divisores de un número expresado mediante su representación factorial tal como podemos observar en sus respuestas a los ítems de la tarea 4

- "*Consideremos el número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$.

a) ¿M es divisible por 7? Explica tu respuesta.

b) ¿M es divisible por 5?, ¿Por 2?, ¿Por 9?, ¿Por 11?, ¿Por 15? Explica tu respuesta.

c) ¿$3^4 \times 5 \times 7^3$ *es un múltiplo de M? Explica tu respuesta.*

d) ¿$3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ *es un múltiplo de M? Explica tu respuesta*"-.

Luís usa la descomposición en factores primos de M para determinar si es divisible por 5 o por 7, sin necesidad de recurrir a la representación decimal del número:

E: ¿El número $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ *es divisible por 7?*
Luís: Sí, porque en la descomposición de M aparece el 7, y por tanto se puede dividir por 7.
E: ¿M es divisible por 5?
Luís: Sí, porque en la descomposición está 5^2.

El alumno observa que 7 forma parte de la descomposición factorial de M y, por tanto, se puede dividir por 7. Con este razonamiento parece relacionar las ideas de divisor y ser divisible. De igual forma deduce la divisibilidad por 5, viendo que 5 es un factor de M ya que 5^2 forma parte de su descomposición. Estas respuestas indican que la idea de "ser divisible" se está vinculando a la representación factorial de M.

Valiéndose de la conjunción lógica Luís coordina la divisibilidad por 3 y por 5 para precisar la divisibilidad de M por 15. El alumno, nuevamente, relaciona las ideas de divisor y ser divisible, vinculándolas a la representación factorial de M y estableciendo la relación bicondicional "*b es divisible por a* $\Leftrightarrow$ *a es un factor de b*":

E: ¿M es divisible por 15?
Luís: Sí, porque está 5 y 3, y 5 por 3 son 15.
E: Si el número aparece como factor del número M, ¿puede afirmar que ese número es divisor de M?
Luís: Sí.
E: ¿Y si no aparece?
Luís: No es divisible.

El razonamiento de Luís para indicar que M es divisible por 15 está argumentado desde la descomposición en factores primos del número M, como confirma al responder que "*está 5 y 3, y 5 por 3 son 15*".

Luís es capaz de realizar inferencias correctas en términos de divisores y no divisores, utilizando las relaciones lógicas bicondicionales, la conjunción lógica y la relación contrarrecíproca. Por ejemplo, la relación lógica contrarrecíproca (*a no es factor de b, entonces a no divide a b*) es usada por Luís en la tarea 4 para precisar que M no es divisible ni por 2, ni por 11 ya que ninguno de los factores de la descomposición factorial de M contienen a 2 ó a 11:

E: *¿M es divisible por 2?*

Luís: *No, porque todos los números que aparecen en la descomposición de M son impares, y no puede ser.*

E: *¿M es divisible por 11?*

Luís: *Mmm,.., por 11 no es divisible porque ninguno de los números, 3, 5 ó 7, están relacionados con 11.*

Además, Luís determina múltiplos y no múltiplos de un número, vinculando la idea de múltiplo a la representación factorial de ambos, como hace en las tareas 4c y 4d:

E: *¿3^4 x 5 x 7^3 es un múltiplo de M?*

Luís: *Mmm, creo que sí, ..., mmm, tiene los mismos factores aunque no estén elevados al mismo exponente,.., espere, espere, mmm, los exponentes tienen que ver, .., no es múltiplo porque para ser múltiplo tendría que tener todos los exponentes mayores que los de M, y 5 lo tiene menor.*

En el ítem 4d contesta que 3^4 x 5^3 x 7^3 x 13^{18} es múltiplo de M considerando los factores primos de la representación factorial y sus exponentes:

E: *¿3^4 x 5^3 x 7^3 x 13^{18} es un múltiplo de M?. Ésta no la contestó en el cuestionario.*

Luís: *Mmm, a ver, ..., sí que es múltiplo de M porque 3, 5, y 7 tienen los exponentes mayores que los correspondientes de M, y además está* *multiplicado por 13 elevado a 18, por tanto sí que es múltiplo de M.*

Estos razonamientos parecen indicar que Luís admite la idea de unicidad de la descomposición en factores primos reconociendo que cualquier divisor o múltiplo del número debe poder construirse a partir de sus factores primos. Luís no tiene problemas para estudiar la relación "ser divisible" entre números compuestos o números que no figuran en la descomposición factorial. También puede obtener múltiplos de un número expresado mediante su representación factorial.

La identificación que hace Luís entre el máximo número de factores en que se puede descomponer un número y su descomposición en factores primos al resolver los ítems 5c y 5 d

-"*Descompón el número 100 (Justifica tu respuesta): c) En el máximo número de factores. d) En factores primos*" -,

constata que comprende la idea de unicidad de la descomposición en factores primos de un número.

Luís piensa que si los factores son primos entonces no se pueden descomponer más y, en consecuencia, no se podrán determinar más factores que los de la descomposición factorial:

E: ¿Entonces la descomposición en el máximo número de factores y la descomposición en factores primos de 100 es lo mismo? ¿Por qué?

Luís: Sí, puse 2 x 2 x 5 x 5, no hay más factores primos, hay que buscar que haya más, pero no puede haber más porque 2 y 5 son primos, por tanto los dos apartados son iguales.

La manera en que Luís maneja las diferentes propiedades de la divisibilidad indica que concibe los diferentes elementos y sus relaciones como un todo, permitiendo además "generalizar" diferentes relaciones. Por ejemplo, en las tareas de la cuestión 10 -"*Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta. El número* $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ *es: a) Divisible por 5. b) Divisible por 2 y por 4. c) Divisible por 3. d) Divisible por 6. e) Divisible por 15*"-

utiliza la propiedad "*Si a/b y a/c, entonces b+c es divisible por a*" para discutir la divisibilidad de K por distintos números primos y compuestos:

E: *¿El número $K = 2^2 x\ 3\ x\ 5\ x\ 11 + 3$ es divisible por 5?*

Luís: *Mmm, sí porque ..., pero espere, 5 está en el producto y luego se suman 3, no es, no. Al sumar 3 no es múltiplo, porque sin el 3 sí que es.*

E: *¿Y si en lugar de +3 fuera +10?*

Luís: *Entonces sí, porque la primera parte sería múltiplo de 5 y 10 también es múltiplo de 5.*

Luís conoce las limitaciones de la propiedad, es capaz de darse cuenta de cuándo se puede aplicar y cuándo no. Luís hace mención a que 5 está en el primer sumando pero no aparece como factor en el segundo sumando y, por lo tanto, K no puede ser divisible por 5. Manifiesta que si en lugar de tener un 3 en el segundo sumando se tuviera un 10, entonces sí que sería divisible al sumar dos múltiplos de 5 y, por tanto, la suma sería múltiplo de 5. Esta inferencia es utilizada cuando se le pregunta si K es múltiplo de 3:

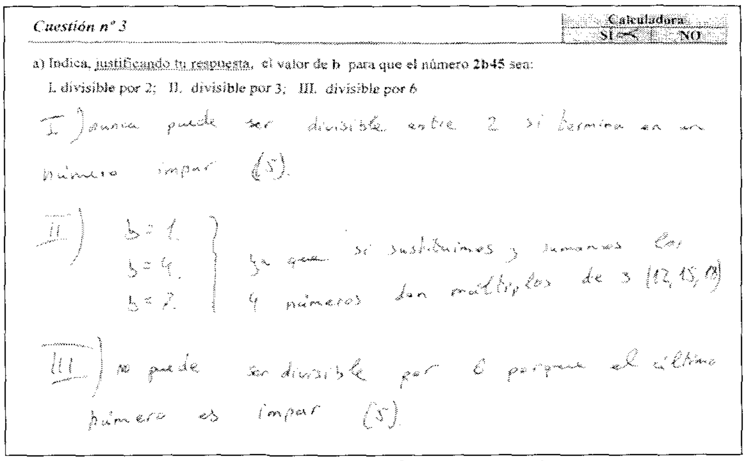
E: *¿K es divisible por 3?*

Luís: *Sí, porque al sumar 3, 3 es múltiplo de 3 y es 1 el cociente, y en la parte de delante está 3 multiplicando.*

Luís estudia la divisibilidad de K por un número compuesto al ser consciente de que es necesario que K sea divisible por cada uno de los factores. Por ejemplo, "ser divisible por 15" es consecuencia de "ser divisible por 3 y por 5":

Luís: *Bueno, a ver, espere, la primera parte es divisible por 15, pero la segundo también, espere, espere, no es, 3 no es divisible por 15. Por tanto no es. Lo tenía al revés, yo dividía 3 entre 15. Es al revés. La respuesta es que K no es divisible por 15. Tampoco lo es por 6.*

La coordinación de la divisibilidad es usada por Luís en diferentes tareas. Coordina la divisibilidad por 3 y por 5 para establecer la divisibilidad de $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ por el número compuesto 15 (ítem 4e), o la indivisibilidad de $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ por 15 (ítem 10e), o la del número 2b45 por 6 (ítem 3c) al observar que si el número no es divisible por 2- "*el último número es impar*"-, entonces no es divisible por 6:



Cuestión nº 3 — Calculadora: SI / NO

a) Indica, justificando tu respuesta, el valor de b para que el número **2b45** sea:

I. divisible por 2; II. divisible por 3; III. divisible por 6

I) nunca puede ser divisible entre 2 si termina en un número impar (5).

II) b = 1, b = 4, b = 7 } ya que si sustituimos y sumamos los 4 números son múltiplos de 3 (12, 15, 18)

III) no puede ser divisible por 6 porque el último número es impar (5).

(C21-B1, cuestión 3, ítem 3a, 3b y 3c)

Luís utiliza la idea de "si 2b45 no es múltiplo de 2, no puede ser múltiplo de 6", determinando que la indivisibilidad por 2 implica la indivisibilidad por 6. A través de estos ejemplos observamos que utiliza la coordinación de la divisibilidad independientemente del modo de representación empleado, decimal (ítem 3c) o factorial (ítem 4b5 e ítem 10e).

Esta forma de comportarse Luís la interpretamos como una manifestación de haber tematizado el esquema. En este sentido, entendemos que un indicador de que el esquema se ha tematizado es el hecho de que los alumnos son capaces de aplicar las propiedades de la divisibilidad independientemente del tipo de números (primos o compuestos) y del modo de representación utilizado.

Por último, Luís calcula el *mínimo común múltiplo* y el *máximo común divisor* por dos métodos distintos, vinculando ambas formas de obtención al ser capaz de observar que el procedimiento de la descomposición factorial produce el menor de los múltiplos o el mayor de los divisores comunes. Por ejemplo, Luís observa que el procedimiento de la descomposición factorial que ha utilizado en el ítem 6 para obtener el mínimo común múltiplo de 12 y 15, garantiza que 60 es el menor de los múltiplos comunes a 12 y 15:

> *E:* *¿Por qué el número obtenido, 60, mediante la descomposición factorial y el procedimiento correspondiente garantiza que se ha obtenido el mínimo de los múltiplos comunes? Diga por qué no pueden ser 30 ó 120.*
>
> *Luís:* *Porque, mmm,..., porque se toman los factores comunes y no comunes, por tanto no puede dar mayor que el obtenido.*
>
> *E:* *¿Seguro? Por ejemplo, 3 x 5 x 2 x 2 x 3 es mayor.*
>
> *Luís:* *Ah sí, mmm, estamos buscando el mínimo, no el mayor. A ver, sólo se toman los elementos que están en los dos, pero no lo tomamos dos veces, únicamente tomamos los comunes y no comunes, solamente la mayor potencia.*
>
> *E:* *Diga entonces, ¿por qué la respuesta no puede ser 30?*
>
> *Luís:* *Porque 30 no es múltiplo de 12, por ejemplo, no podemos alcanzar 30 con el 12.*

Luís señala que si se añaden más factores al producto de 2 x 2 x 3 x 5, el múltiplo obtenido es mayor y por tanto no es el mínimo. Además ve que cualquier múltiplo de 12 y de 15 ha de contener los factores de ambos números porque en caso contrario el número que se obtiene no es múltiplo de alguno de ellos.

Además, Luís manifiesta que cualquier múltiplo común de dos números es múltiplo del mínimo común múltiplo ya que contesta que "*será tantas veces m*", o equivalentemente el mínimo común múltiplo es divisor de cualquier múltiplo común como se manifiesta en el siguiente protocolo de la entrevista:

> *E:* *Veamos, si el mínimo común múltiplo de a y b es m, y tenemos otro múltiplo de a y b, m´, ¿existe relación entre m y m´?*
>
> *Luís:* *Sí, en este caso tenemos múltiplos, mmm ..., la relación es que m´ será tantas veces m, es decir, m´ es mayor que m. Lo que quiero decir que m´ es múltiplo de m, o m es divisor de m´.*

De igual modo, Luís pone de manifiesto que el procedimiento de obtención del máximo común divisor usado para resolver los ítems de las tareas 7 y 8, genera el mayor de los divisores comunes:

E: *¿Por qué este procedimiento genera el divisor común más grande? ¿Por qué no podría ser el resultado 20 ó 5?*

Luís: *Porque al tomar 50, no se puede dividir por 20, pero hay uno mayor que 5 que es 10, es divisor de los dos.*

E: *¿Pero por qué el procedimiento garantiza que se obtenga el mayor divisor común?*

Luís: *Porque encontrando los elementos comunes en los dos, el número obtenido es un divisor, es común en los dos.*

E: *¿Es el mayor?*

Luís: *Sí, porque se toman los elementos comunes que hay, pero los más pequeños. Si en uno está el número al cuadrado y en el otro no está al cuadrado, tomamos el que no está al cuadrado, porque si no podía dar un divisor que no sería del que no está elevado al cuadrado.*

Luís determina que el calculo del máximo común divisor mediante la descomposición factorial proporciona un divisor de los dos números porque contiene factores de los números y, es el mayor, porque los factores que contiene son comunes a ambos números. Además si se tomara otro factor el número obtenido no sería divisor común.

También es capaz de realizar inferencias correctas precisando que el máximo común divisor de dos números es divisible por cualquier otro divisor de esos dos números:

E: *Si tiene el máximo común divisor de a y b, que es d, y otro divisor de a y b, que le podemos llamar d', ¿qué relación existe entre d y d'?*

Luís: *Mmm, ..., d' también es divisor, y por tanto sí existe relación. d dividido entre otro número dará d'. Por tanto d' dividirá a d, es decir, d' es un factor de d.*

La especificación de que el procedimiento de obtención del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor mediante el procedimiento de la descomposición factorial

Volver al índice/Tornar a l´index

genera el menor de los múltiplos o el mayor de los divisores comunes, puede permitir que Luís construya otros múltiplos y otros divisores a partir de la descomposición factorial de los números.

A lo largo del análisis conjunto realizado al cuestionario y a la entrevista hemos observado que Luís (a) establece relaciones entre los distintos elementos matemáticos, (b) determina múltiplos y no múltiplos, divisores y no divisores de un número a partir de la representación factorial de estos, (c) reconoce la unicidad de la descomposición en factores primos, vinculando las ideas de múltiplo, divisor y ser divisible a la representación factorial de los números, (d) coordina dos criterios de divisibilidad y diferentes propiedades para producir nueva información independientemente del modo de representación, y (e) vincula los diferentes procedimientos que ha usado para calcular el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor, pudiendo determinar por qué el procedimiento de la descomposición factorial genera el menor de los múltiplos o el mayor de los divisores comunes. Además Luís, a través del uso que hace de la relación contrarrecíproca, pone de manifiesto que conoce las limitaciones de las propiedades, cuando se pueden aplicar y cuando no. Todo ello nos lleva a concluir que Luís ha tematizado el esquema de Divisibilidad.

CAPÍTULO 5

Capítulo 5. Discusión y Conclusiones

En este capítulo realizaremos la discusión de los resultados obtenidos. Formularemos algunas consideraciones generales relativas a las formas de conocer los elementos matemáticos de divisibilidad, al desarrollo del esquema de Divisibilidad, a la importancia de los modos de representación en el desarrollo de este esquema y a la construcción y comprensión del conocimiento matemático, centrándonos en diferentes aspectos que han aparecido en nuestra investigación. También relacionaremos las ideas generadas sobre la divisibilidad en N con otras investigaciones y trataremos aspectos teóricos sobre la construcción del conocimiento de conceptos matemáticos. Concluimos el capítulo con las implicaciones para futuros trabajos de investigación.

5.1. Sobre las formas de conocer los elementos matemáticos del esquema de Divisibilidad.

En el capítulo anterior se han caracterizado los niveles de desarrollo del esquema de Divisibilidad. El desarrollo de este esquema requiere establecer relaciones entre los elementos matemáticos conocidos de forma determinada, resultando fundamental el papel desempeñado por los modos de representación de los números naturales ya que la construcción progresiva del esquema de Divisibilidad está vinculada al uso de la representación factorial de los números y a la obtención de múltiplos y divisores de un número, cuando uno o ambos, aparecen expresados como producto de factores primos.

El análisis estadístico llevado a cabo en el cuestionario y el análisis cualitativo de las respuestas y de las entrevistas han mostrado que el desarrollo del esquema es gradual. Los mejores resultados se han obteniendo en los cursos superiores, tanto en el índice de dificultad como en el nivel de desarrollo del esquema. Los alumnos de 1° de Bachillerato son los que más han manifestado, por lo general, formas de conocer proceso y objeto de los elementos de divisibilidad, han utilizado mayor número de elementos matemáticos y han establecido más relaciones entre ellos. En este sentido, una alumna de 4° de ESO y un alumno de 1° de Bachillerato muestran indicaciones de que han tematizado el esquema de Divisibilidad.

En los cursos de 1° y 4° de Enseñanza Secundaria Obligatoria la forma predominante de conocer los elementos matemáticos es acción. El número de alumnos entrevistados que manifiestan forma de conocer acción es superior a los que conocen los elementos matemáticos como proceso y como objeto. En 1° de Bachillerato también es mayoritaria la forma de conocer acción aunque no supera a las formas de conocer proceso u objeto conjuntamente.

La hegemonía de la forma de conocer acción de los elementos matemáticos de divisibilidad se debe, por una parte, a que la mayoría de los alumnos entrevistados manifiestan una disposición de carácter operativo de las ideas de "múltiplo" y "divisor", asociándolos a las operaciones de multiplicar y dividir, respectivamente. Por otra parte, la mayoría de estudiantes vinculan la idea de "ser divisible" a la representación decimal del número, realizan la operación de dividir y comprueban si el resultado es exacto, no estableciendo la relación "*b es divisible por a* $\Leftrightarrow$ *b es un factor de a*". El predominio de la forma de conocer acción también está condicionada, por una parte, a que muchos de los estudiantes desconocen alguno de los criterios elementales de divisibilidad (por 2, por 3 o por 5), y por otra, a que sólo pueden calcular, a lo sumo, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo mediante un único procedimiento. Cabe destacar que el elemento "ser divisible" es el que más conocen los alumnos como acción y que los elementos "máximo común divisor" y "mínimo común múltiplo" son los que más confunden y desconocen su significado.

Cuando los alumnos conocen como proceso los elementos "múltiplo", "divisor" y "ser divisible" pueden establecer las relaciones entre "b es múltiplo de a", "a es divisor de b" y "b es divisible por a" y las empiezan a utilizar con la representación factorial de los números. En esta situación, los alumnos identifican un factor de la descomposición en factores primos de un número como un divisor de éste, y al mismo tiempo ven ese número como un múltiplo del factor. Sin embargo, estos estudiantes no son capaces, por lo general, de determinar que un producto de factores primos del número es también un divisor de éste.

Cuando los alumnos conocen como proceso las relaciones de divisibilidad manifiestan dificultades para usar la propiedad "*Si* c / a *y* $c / b \Rightarrow c /(a \pm b)$". Por otra parte, pueden aplicar los criterios de divisibilidad por 2, por 3 ó por 5 ya que los recuerdan, pero tienen dificultades para coordinar dos de ellos.

La forma de conocer proceso de los elementos "máximo común divisor" y "mínimo común múltiplo" queda caracterizada porque los estudiantes empiezan a dotar de significado al mínimo común múltiplo o al máximo común divisor, utilizando correctamente por lo menos uno de los métodos de obtención, empezando a aplicarlos en contextos de situación real.

La forma de conocer objeto de los elementos matemáticos de divisibilidad es la que menos se pone de manifiesto entre los alumnos entrevistados. Por ejemplo, en 1° de ESO los estudiantes no muestran esta forma de conocer del elemento "ser divisible" y sólo 3 alumnos de 4° de ESO y 1° de Bachillerato lo conocen como objeto.

Los estudiantes que conocen como objeto los elementos matemáticos del esquema de Divisibilidad son capaces de usar diferentes acepciones léxicas en números representados mediante la descomposición factorial. Estos estudiantes que conocen como objeto los elementos matemáticos de divisibilidad pueden determinar la equivalencia entre factor, divisor y múltiplo a través de las relaciones: "*a es divisor de b* $\Leftrightarrow$ *b es múltiplo de a* $\Leftrightarrow$ *b es divisible entre a* $\Leftrightarrow$ *a es un factor de b*", al observar que los factores de la descomposición factorial son divisores del número. Discuten la divisibilidad en términos de divisores y no divisores y obtienen múltiplos de un número a partir de la representación factorial del número. Por otra parte, estos alumnos son capaces de coordinar diferentes criterios de divisibilidad y utilizar la relación lógica condicional para establecer la propiedad "*Si* c / a *y* $c / b \Rightarrow c / (a \pm b)$". Finalmente, estos estudiantes usan diferentes procedimientos de obtención del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor, aplicándolos en situaciones de contexto real.

5.2. Desarrollo del esquema de Divisibilidad.

El individuo construye el objeto por interacción entre la asimilación y la acomodación (Piaget y Garcia, 1982). La adecuación y reorganización de las estructuras de conocimiento previas requieren la equilibración de los nuevos conocimientos para asimilarlos. Uno de los mecanismos que genera la asimilación es la *abstracción reflexiva.* La abstracción reflexiva se refiere a las acciones y operaciones del individuo y a los esquemas que le lleva a construir. Es de carácter interno al sujeto y es reflexiva en el sentido de que hace pasar los esquemas de un plano inferior a uno superior (de la acción a la representación). Permite la reorganización en el nuevo plano de lo que se ha extraído del precedente. La abstracción reflexiva constituye la coordinación de acciones (internas) del individuo sobre objetos mentales que posibilitan la construcción de nuevos objetos.

En nuestra investigación observamos que la "asimilación" de nuevos conceptos y relaciones lógicas permite establecer niveles superiores de desarrollo del esquema, determinando las características diferenciales de un nivel al siguiente a través de los elementos, de los modos de representación y de las relaciones que los estudiantes establecen entre los diferentes elementos matemáticos.

En relación al desarrollo del esquema, señalan Piaget y García (1982, p.251) que "*si el nivel intra y el ínter alcanzan ciertas formas de equilibrio, son, por otra parte, fuente de múltiples desequilibrios... Resulta así que las formas de equilibrio dinámico más completas no se logran sino a través de las estructuras que se han tornado estables en función de conexiones entre transformaciones y de los intercambios con el exterior*". En el nivel Intra destacan que el tipo de explicaciones usadas para determinar el conjunto de propiedades de los objetos son particulares y locales.

Para caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de Divisibilidad ha sido fundamental (a) el uso que hacen los estudiantes de los **modos de representación** (decimal o factorial) de los números naturales y la asunción de la unicidad de la descomposición de un número natural en producto de factores primos, (b) la coordinación de criterios de divisibilidad, y (c) el uso que hacen los alumnos de los elementos máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

En el análisis que hemos realizado, el nivel de desarrollo que predomina es el nivel Intra. Este resultado está relacionado con las formas de conocer que manifiestan los estudiantes y las relaciones que establecen entre los elementos matemáticos para resolver las tareas. Los alumnos del nivel Intra vinculan los elementos "múltiplo", "divisor" y "ser divisible" al **modo de representación decimal** de los números naturales y a las operaciones de multiplicar o dividir, requiriendo la representación decimal de los números y reflejando formas de conocer acción. En el nivel Intra las justificaciones de las propiedades son de carácter local (Piaget y Garcia, 1982) y los alumnos suelen asociar el concepto de múltiplo a la operación de multiplicar y el concepto de divisor a la operación de dividir.

Los estudiantes del nivel Intra tienen dificultades en determinar relaciones entre los diferentes elementos, en coordinarlos y en aplicar propiedades. La limitación en establecer relaciones entre los elementos de divisibilidad que tienen estos alumnos se debe en parte a la influencia que ejercen los modos de representación. Así, manifiestan dificultades en coordinar los criterios de divisibilidad ya que implica establecer relaciones entre elementos matemáticos de divisibilidad para generar nueva información, muestran problemas en las ideas de mínimo común múltiplo y de máximo común divisor que se apoyan en reconocer múltiplos o divisores comunes, y a lo sumo sólo pueden calcular mecánicamente el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor de dos números. En el nivel Intra del desarrollo del esquema de Divisibilidad los alumnos establecen relaciones condicionales entre las operaciones de multiplicar y dividir y únicamente pueden determinar relaciones entre los elementos matemáticos cuando los números están expresados en la representación decimal.

En el nivel Ínter los estudiantes son capaces de usar la relación entre "múltiplo", "divisor" y "ser divisible" y empiezan a utilizar alguna de las equivalencias que conforman la relación general de divisibilidad (a es divisor de b $\Leftrightarrow$ b es múltiplo de a $\Leftrightarrow$ b es divisible por a $\Leftrightarrow$ a es un factor de b). Por ejemplo, comienzan a emplear la relación "*b es divisible por a* $\Leftrightarrow$ *a es un factor de b*" y a vincular la divisibilidad a la representación factorial de los números naturales, pudiendo determinar que un número es divisible por sus factores primos, que es múltiplo de sus factores primos y que un factor primo es un divisor. Los alumnos del nivel Ínter no siempre son competentes para indicar que un número es divisible por sus factores compuestos, ni para vincular los múltiplos de un número natural a la representación factorial si ambos números están expresados como el producto de sus factores primos. Estos hechos están vinculados a la dificultad que tienen los alumnos del nivel Ínter en reconocer la unicidad de la descomposición en factores primos de un número natural. En este nivel, los estudiantes tampoco utilizan la relación "*si a no es factor de b, entonces a no divide a b*" ya que pueden admitir que un número puede ser divisor de otro aunque no aparezca expresado explícitamente en su descomposición factorial.

Los alumnos del nivel Ínter emplean adecuadamente al menos uno de los algoritmos de obtención del "máximo común divisor" y del "mínimo común múltiplo" de dos números naturales y empiezan a aplicarlos en situaciones de contexto real. Algunos sujetos de este nivel pueden usar dos procedimientos de obtención del mínimo común múltiplo o del máximo común divisor, como la determinación de series de múltiplos o divisores comunes o el procedimiento de la descomposición factorial, aunque no los vinculan.

Brown et al. (2002) señalan que el nivel Ínter constituye una fase en la que los estudiantes comienzan a realizar inferencias y a tomar conciencia sobre la estructura multiplicativa y sobre la divisibilidad, necesitando en ocasiones recurrir a comprobar sus afirmaciones mediante acciones a través de las operaciones de multiplicar y dividir. Estas manifestaciones aparecen principalmente cuando los individuos han de determinar la unicidad de la descomposición en factores primos de los números naturales y tienen que discutir la divisibilidad o indivisibilidad por distintos números primos o compuestos. Baker et al. (2000) subrayan que la coordinación de información genera dificultades a los alumnos, observando en nuestro trabajo que los estudiantes que empiezan a coordinar la divisibilidad se sitúan en el nivel Ínter. De igual modo, Sánchez-Matamoros et al. (2006) indican que en este nivel los alumnos empiezan a establecer relaciones entre los diferentes elementos matemáticos del esquema y sólo pueden inferir nueva información en determinados casos.

En el nivel Trans los estudiantes son capaces de **establecer la mayoría de las relaciones bicondicionales de divisibilidad**: "*a es divisor de b* $\Leftrightarrow$ *b es múltiplo de a* $\Leftrightarrow$ *b es divisible por a* $\Leftrightarrow$ *a es un factor de b*", independientemente del modo de representación. El establecimiento de relaciones entre los elementos del esquema y la determinación de la síntesis, aplicada a situaciones en las que hay que establecer relaciones lógicas entre diferentes elementos matemáticos para inferir nueva información, es la propiedad con la que Sánchez-Matamoros et al. (2006) caracterizan en este caso el nivel Trans del desarrollo del esquema de derivada. En este nivel los alumnos pueden reflexionar sobre el elemento "ser divisible" determinando significados en términos de divisores y no divisores, de múltiplos y no múltiplos, sin necesidad de realizar operaciones, asumiendo la unicidad de la descomposición en factores primos de los números naturales. El constatar qué "pasos" forman o no parte de la regla de la cadena sirve también a Clark et al. (1997) para caracterizar el nivel Trans de desarrollo de este esquema.

En el esquema de Divisibilidad otra de las características que determina el nivel Trans es la coordinación de diferentes informaciones (dos criterios de divisibilidad o la propiedad "*si* c/a *y* $c/b \Rightarrow c/(a \pm b)$") para obtener nueva información. Baker et al. (2000) caracterizan el nivel Trans-propiedad y Trans-intervalo del esquema de cálculo gráfico cuando los estudiantes pueden coordinar las diferentes condiciones y propiedades en su totalidad. Por su parte, Brown et al. (2002) señalan que un estudiante se encuentra en el nivel Trans de desarrollo de la divisibilidad si es capaz de realizar inferencias sobre la divisibilidad sin necesidad de realizar acciones (multiplicar o dividir).

Los estudiantes del nivel Trans pueden establecer relaciones entre el máximo común divisor de dos o tres números naturales (mínimo común múltiplo de dos números naturales), los divisores comunes a ambos (los múltiplos comunes a ambos) y la condición de divisibilidad. Para calcular el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo pueden usar los diferentes algoritmos de obtención, aplicándolos en situaciones de contexto real. Como indican Piaget y Garcia (1982) en este nivel de desarrollo del esquema se necesitan equilibrar diversos sistemas para configurar un todo, en el que las relaciones se comprenden, se armonizan e interaccionan entre sí, dando coherencia al esquema.

Para Piaget y García (1982) una vez que las transformaciones características del nivel Ínter han sido descubiertas por los individuos, éstas "*demandan el establecimiento de vínculos entre ellas, lo que nos lleva a la construcción de las estructuras características del trans*" (p.251), resultando que las formas de equilibrio dinámico más completas se consiguen mediante estructuras estables "*en función de conexiones entre transformaciones y de los intercambios con el exterior*". En la investigación que hemos realizado se evidencia que cuando los alumnos establecen relaciones entre los diferentes elementos matemáticos de divisibilidad se sitúan en el nivel Trans. Hemos podido constatar que muchos de estos estudiantes han puesto de manifiesto el establecimiento de las relaciones sólo en el transcurso de la entrevista, cuando resolvían las tareas planteadas utilizando métodos alternativos a los que habían empleado en el cuestionario y vinculando sus respuestas a la representación factorial de los números naturales, sin necesidad de recurrir a las operaciones de multiplicar y dividir.

Finalmente, la tematización del esquema de Divisibilidad la hemos considerado cuando los estudiantes pueden:

(a) Discernir la divisibilidad en términos de divisores y no divisores, de múltiplos y no múltiplos a partir de la representación decimal y factorial de los números, asumiendo la unicidad de la descomposición en factores primos de los números.

(b) Establecer relaciones bicondicionales entre las acepciones léxicas de divisibilidad "*a es divisor de b* $\Leftrightarrow$ *b es múltiplo de a* $\Leftrightarrow$ *b es divisible por a* $\Leftrightarrow$ *a es un factor de b*" y usar la relación contrarrecíproca "*a no es factor de b, entonces a no divide a b*" para hablar de la indivisibilidad de un número representado factorialmente.

(c) Utilizar la conjunción lógica para realizar, como indican Zazkis y Campbell (1996a), inferencias sobre la divisibilidad tales como la coordinación de criterios o uso de la propiedad "*si* a / b *y* $a / c \Rightarrow a / (b + c)$".

(d) Usar los significados de máximo común divisor y de mínimo común múltiplo desde diferentes procedimientos y relacionarlos.

Una vez realizado el análisis conjunto de todos los cuestionarios y entrevistas, hemos encontrado en el nivel Trans del desarrollo del esquema de Divisibilidad un alumno de 1º de Bachillerato y una alumna de 4º de ESO que han tematizado el esquema. Las formas de conocer los elementos matemáticos de divisibilidad que muestran estos dos alumnos son predominantemente objeto y ambos determinan la mayor parte de las relaciones entre los elementos y vinculan los elementos de divisibilidad a la representación factorial de los números.

Cuando los alumnos establecen las relaciones de divisibilidad "*a es divisor de b* $\Leftrightarrow$ *b es múltiplo de a* $\Leftrightarrow$ *b es divisible por a* $\Leftrightarrow$ *a es un factor de b*" y usan la relación contrarrecíproca "*a no es factor de b* $\Rightarrow$ *a no divide a b*" están vinculando la divisibilidad a la representación factorial de los números ya que pueden determinar múltiplos y divisores a partir de la descomposición en factores primos, estableciendo también qué números no son múltiplos o no son divisores desde los productos de factores primos y sus potencias. En este sentido, parece que el uso de la relación lógica contrarrecíproca "*a no es factor de b* $\Rightarrow$ *a no divide a b*", para discernir la indivisibilidad de un número representado factorialmente, favorece la comprensión conceptual de la divisibilidad como una propiedad entre números.

El uso de las relaciones de equivalencia, de la coordinación y de la relación contrarrecíproca permite a los estudiantes realizar inferencias correctas en términos de divisores y no divisores, de múltiplos y no múltiplos, admitiendo la idea de la unicidad de la descomposición en factores primos reconociendo que es única y que cualquier divisor o múltiplo de número debe poder formarse a partir de la representación factorial del número.

El manejo de las diferentes propiedades de la divisibilidad que realizan los estudiantes es un indicador de la tematización del esquema de Divisibilidad si se conciben los elementos y sus relaciones como un todo, permitiendo "generalizar" relaciones diferentes. Uno de los indicadores de la tematización del esquema es que el estudiante emplea las propiedades de divisibilidad con diferentes representaciones de los números, con números primos o compuestos y con números de distinto tamaño, pudiendo aplicar las propiedades de la divisibilidad independientemente del tipo de números.

El cálculo del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor mediante diferentes procedimientos facilita la comprensión de las ideas de múltiplos y divisores comunes vinculadas a la representación factorial de los números. Además, los alumnos que tematizan la divisibilidad son capaces de observar que los procedimientos generan el mayor de los divisores o el menor de los múltiplos comunes, pudiendo obtener múltiplos y divisores de un número dado a partir de la representación factorial, y estableciendo relaciones entre los diferentes procedimientos de cálculo del máximo común divisor (del mínimo común múltiplo). En ese caso, los estudiantes pueden realizar inferencias correctas sobre el mínimo común múltiplo y cualquier múltiplo de los números, o sobre el máximo común divisor y cualquier divisor de los números.

5.3. Los modos de representación, la unicidad de la descomposición factorial y el desarrollo del esquema de Divisibilidad.

En nuestra investigación el uso de la teoría de APOS (Dubinsky, 1991; Asiala et al. 1996) y los tres niveles de desarrollo del esquema Intra, Ínter y Trans (Piaget y García, 1982; Clark et al. 1997) nos ha permitido caracterizar la comprensión de la divisibilidad de los alumnos de Educación Secundaria (obligatoria y post-obligatoria). Los resultados obtenidos muestran que es posible estudiar la comprensión de los conceptos matemáticos y el nivel de desarrollo del esquema del concepto utilizando estas herramientas teóricas ya que a través de los mecanismos de construcción (interiorización, coordinación, encapsulación, tematización) y de las formas de conocer los elementos matemáticos de divisibilidad (acción, proceso, objeto, esquema) se ha puesto de manifiesto la progresiva construcción del conocimiento de divisibilidad que muestran los estudiantes de secundaria. Las relaciones que establecen los sujetos entre los diferentes elementos y los modos de representación (decimal o factorial) a los que han vinculado los elementos han permitido caracterizar los niveles de desarrollo progresivo de comprensión del esquema de Divisibilidad (Intra, Ínter y Trans).

Respecto a los modos de representación y el desarrollo de la comprensión, la importancia de los sistemas de representación de los conceptos matemáticos se destaca en investigaciones como las de Gray y Tall (1994); Vergnaud (1994, 1996, 2001); Romero y Rico (1999); Gray et al. (2000); Rico et al. (2000); Romero (2001) y Tall et al. (2001).

En la teoría de los campos conceptuales se "*consideran importantes el lenguaje y los símbolos. Por ejemplo, son importantes para expresar y, eventualmente, simbolizar la estructura de los datos y las preguntas, y para utilizar las palabras y los símbolos* *que puedan ser usados por los estudiantes*" (Vergnaud, 1996; p.56). La estructura de los datos y las preguntas pueden transmitirse adecuadamente a través de la simbolización y pueden ser usados por los estudiantes en sus respuestas.

En nuestra investigación el uso simbólico es fundamental en el desarrollo del esquema de Divisibilidad, encontrando evidencias en la utilización de los modos de representación de los números naturales y en la comprensión de conceptos como los de factor, máximo común divisor o mínimo común múltiplo. El concepto de factor es asociado por muchos alumnos a factor primo y al procedimiento de descomposición factorial. Esto sucede principalmente en el nivel Intra. El uso correcto del lenguaje es básico para la adecuada comprensión de los conceptos. Los alumnos confunden los significados de máximo común divisor y mínimo común múltiplo cuando se usan las expresiones m.c.d o m.c.m, y algunos estudiantes se refieren a ellos como "mínimo común divisor" o "máximo común múltiplo".

La importancia de los símbolos es subrayada por Gray y Tall (1994). Para estos autores el mismo símbolo puede concebirse como objeto o como proceso. Por ejemplo, 2 x 3 puede verse como proceso o como el resultado de efectuar la multiplicación, es decir, como 6. El número 6 puede también considerarse como el resultado de otros procesos (2 + 4, 3 + 3, 8 – 2) o como recuento. Todos representan al mismo objeto obtenido mediante procesos diferentes. La amalgama del proceso, el concepto y los símbolos constituyen lo que Gray y Tall (1994) definen como *procepto*. En palabras de Gray et al. (2000, p.3) un símbolo "*tiene la capacidad de evocar los procesos apropiados para realizar las manipulaciones necesarias en la mente del individuo y poder transmitirlo a los demás*". Para Tall et al. (2001) los estudiantes pueden pensar en los símbolos como una unidad manipulable, lo que puede producir que dispongan de distintas capacidades para resolver los problemas con éxito. Los estudiantes que son capaces de usar el símbolo como un proceso o como un concepto, muestran mejor comprensión de los procesos que aquellos que usan los símbolos de manera procedimental o algorítmica.

En nuestra investigación los elementos de la divisibilidad múltiplo, divisor, ser divisible, máximo común divisor o mínimo común múltiplo podrían ser considerados como proceptos elementales. El cálculo procedimental mediante algoritmos aprendidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje determina que alumnos que obtienen el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo desconocen su significado y asocian su definición al procedimiento de obtención. Estos alumnos han sido encuadrados en el nivel Intra. Los estudiantes del nivel Ínter pueden utilizar, en algunas ocasiones, la representación factorial de los números para determinar la divisibilidad sin necesidad de realizar acciones para obtener la representación decimal del número. En el nivel Trans los alumnos emplean la representación factorial para debatir sobre la divisibilidad. Son capaces de usar dos procedimientos de obtención del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo, constituyendo proceptos.

La coordinación entre distintos modos de representación es una de las actividades cognitivas asociadas a los sistemas de representación junto con "*la traducción entre sistemas de representación. Bajo esta acción, es posible conservar la totalidad o sólo parte del contenido, o ampliar el contenido de la representación inicial. De cualquier forma, la traducción supone la coordinación entre distintos sistema de representación*" (Romero y Rico, 1999; p.121). El paso del modo de representación decimal a la factorial de manera coordinada enriquece el nivel de desarrollo del esquema. En nuestra investigación la "traducción" posibilita que a través del uso de sistemas de representación se interioricen en procesos o se encapsulen en objetos los conceptos de la divisibilidad. Los alumnos que son capaces de vincular la divisibilidad a la representación factorial de los números naturales manifiestan forma de conocer proceso u objeto.

La importancia de los modos de representación y la idea de unicidad de la descomposición en factores primos de los números naturales en desarrollo del esquema de Divisibilidad se han venido enfatizando a lo largo de esta sección. El papel principal que juega la descomposición en factores primos de los números naturales en el estudio de la divisibilidad se ha destacado en otras investigaciones como las de Zazkis y Campbell (1996a, 1996b); Zazkis (2000); Zazkis y Gadowski (2001), Brown et al. (2002), Sinclair et al. (2003) y Zazkis y Liljedahl (2004).

Para Zazkis (2000, p.235) "*la existencia de significados matemáticos diferentes para factores y divisores contribuye a la confusión de los estudiantes. Desde el punto de vista de la teoría de números, los factores y los divisores son sinónimos y describen una* *relación entre los números naturales. Desde el punto de vista de las operaciones aritméticas, los factores y divisores describen el papel que juegan los mismos en el producto*". Estas ideas constituyen en nuestro estudio una de las características del paso del nivel Intra al nivel Ínter ya que los alumnos empiezan a vincular los divisores de un número natural con sus factores primos.

La manipulación de las representaciones es útil para la comprensión conceptual. La descomposición factorial ayuda a la comprensión del concepto de número primo y suele asociarse con números primos pequeños (Zazkis y Liljedahl, 2004). Constatamos en los resultados de nuestra investigación que la operatividad de las representaciones factoriales de los números puede permitir que algunos alumnos de los niveles Ínter y Trans sean capaces de obtener factores compuestos de un número expresado mediante su representación factorial, o construir múltiplos de un número grande a partir de su representación factorial permitiendo su encapsulación. De nuestro estudio se desprende que la vinculación de las ideas de "múltiplo", "divisor" y "ser divisible" a la representación factorial es un paso esencial para la encapsulación como objeto de estos elementos matemáticos.

Zazkis y Campbell (1996a) en su investigación sobre la comprensión de la divisibilidad subrayan el carácter de "*la estructura multiplicativa en términos de atributos conceptuales y las relaciones pertenecientes e involucradas por la descomposición factorial de los números naturales como producto único de factores primos*" (p.541). Para los autores la comprensión de la unicidad de la descomposición en factores primos de un número natural es un esquema unificador de la idea de factor compuesto y factor primo. El concepto de divisibilidad se encapsula como un objeto antes que el concepto de indivisibilidad para el que se requiere la comprensión conceptual de la unicidad de la descomposición en factores primos.

Este resultado también se percibe en nuestro estudio. Sólo los estudiantes del nivel Ínter y del nivel Trans utilizan la descomposición factorial del número para discutir la divisibilidad. Los alumnos del nivel Ínter pueden determinar divisores primos vinculados a la representación factorial y manifestar dificultades para discutir la divisibilidad por divisores compuestos o por números que no aparecen en la descomposición factorial del número. Además, si los dos números están expresados mediante su representación factorial y tienen un tamaño relativamente grande, sólo los alumnos del nivel Trans vinculan los conceptos de múltiplo y divisor a la descomposición factorial de ambos números. Estos alumnos encapsulan en objeto los conceptos de múltiplo y divisor y muestran forma de conocer proceso u objeto del elemento "ser divisible".

Brown et al. (2002) destacan la importancia que tiene la comprensión de la unicidad de la descomposición en factores primos para que los estudiantes comprendan los conceptos de la estructura multiplicativa ya que éstos suelen asociar la idea de divisor con la operación de dividir y la idea de múltiplo con la operación de multiplicar. La representación factorial de los números naturales les permite obtener múltiplos y divisores de un número sin necesidad de actuar procedimentalmente. Además, Brown et al. (2002) consideran que la encapsulación en objeto del concepto de mínimo común múltiplo requiere que la comprensión de la idea de múltiplo común de dos números manifieste la importancia de la descomposición factorial de ambos números. El uso de diferentes procedimientos de obtención del mínimo común múltiplo facilita la comprensión de la idea de múltiplos comunes, en particular la comprensión del mínimo común múltiplo de dos números.

La significación de estos hechos se constata en nuestra investigación. Por una parte, la obtención de divisores y múltiplos de un número mediante el uso de la descomposición en factores primos ha sido una de las características que ha posibilitado determinar el nivel de desarrollo del esquema de Divisibilidad, situando a los alumnos en el nivel Ínter o Trans, según fueran capaces de establecer la unicidad de la descomposición factorial y obtener divisores compuestos y múltiplos de un número a partir de los factores de su representación factorial. Por otra parte, ha quedado patente que sólo algunos alumnos del nivel Trans pueden precisar que el procedimiento de descomposición factorial genera el menor de los múltiplos comunes, siendo una de las características que determina la tematización de la divisibilidad en un esquema.

Además de los elementos de divisibilidad que consideran Zazkis y Campbell (1996a) y Brown et al. (2002) en sus investigaciones, en nuestro estudio hemos incluido el concepto de máximo común divisor de dos o más números. Los alumnos que se encuentran en el nivel Trans conocen como proceso u objeto los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo. En nuestra investigación la encapsulación de los conceptos de mínimo común múltiplo y máximo común divisor es un indicador del nivel del desarrollo del esquema de Divisibilidad ya que si un alumno puede empezar a relacionar los procedimientos de obtención de ambos elementos, entonces puede establecer relaciones entre los elementos de divisibilidad. En este caso, es capaz de observar que los procedimientos de cálculo mediante el procedimiento de la descomposición factorial genera el menor de los múltiplos comunes o el mayor de los divisores comunes de dos números, pudiendo formular inferencias correctas sobre su aplicación y determinar múltiplos y divisores de un número a partir de la representación factorial.

5.4. La construcción del conocimiento matemático.

La investigación que hemos llevado a cabo se ha centrado en la comprensión del concepto de divisibilidad. En esta sección aportamos reflexiones con relación a la siguiente pregunta: ¿cómo se construye la comprensión de los conceptos matemáticos?

Piaget y García (1982) indican que las etapas de construcción de los conceptos son secuenciales. Cada nueva etapa se empieza con una reorganización a otro nivel de las adquisiciones logradas en las etapas precedentes. La construcción del conocimiento es una cuestión de carácter epistemológico y la adquisición de nuevos conocimientos se sustenta en la asimilación de los objetos a los esquemas o estructuras anteriores. Los mecanismos que fundamentan la asimilación son las abstracciones y la generalización. Piaget y García consideran que la abstracción ha de ser reflexiva, porque lo abstraído pasa de un nivel a otro superior y por otro lado reproduce una reflexión mental para la reorganización del nuevo estado de conocimiento. La abstracción reflexiva permite la formación de generalizaciones constructivas que constituyen nuevas síntesis en las que se adquieren nuevas significaciones. En el dominio matemático la integración de nuevas estructuras se acompaña de diferencias retroactivas en el seno de los sistemas existentes. Se produce el paso de una fase donde las operaciones tienen carácter instrumental a otra posterior donde "*las operaciones son tematizadas y dan lugar a nuevas teorías*" (Piaget y García, 1982, p.250). Estas tematizaciones producen la extensión de las abstracciones reflexivas a, lo que los autores denominan, "*abstracciones reflexionadas*" que son producto de las tematizaciones.

Diferentes teorías denominadas teorías de encapsulación/reificación (Pegg y Tall, 2000; Tall et al., 2001) se fundamentan en las ideas de Piaget, como la teoría APOS de Dubinsky (1991), la teoría de reificación de Sfard (1991) o la teoría de Gray y Tall (1994) de los proceptos. Estas teorías se basan en la consideración de los conceptos matemáticos como objetos y en el desarrollo de la construcción progresiva de los conceptos matemáticos.

La construcción del conocimiento desde la teoría de APOS propuesta por Dubinsky (1991) se lleva a cabo mediante las formas de conocer (Acción-Proceso-Objeto-eSquema) y la utilización de los mecanismos de construcción del conocimiento (interiorización, coordinación, encapsulación o generalización), manifestaciones denominadas por Piaget "abstracciones reflexivas". Dubinsky (1991) considera que los esquemas pueden formarse por la encapsulación de objetos o por la encapsulación de esquemas. Baker et al. (2000) señalan que los individuos pueden reflexionar sobre un esquema para transformarlo en un objeto y realizar acciones en él para construir un nuevo esquema. Las acciones, los procesos y el desarrollo de objetos pueden reconstruirse en esquemas ya existentes. En el marco teórico de APOS el esquema de un concepto matemático se caracteriza por la construcción de una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que se relacionan entre sí en una estructura coherente (DeVries, 2001) y donde "*cualquier tipo de conexión que un individuo puede realizar con otros esquemas concernientes a diversos conceptos matemáticos depende de los tipos de construcciones metales que posea (acciones, procesos, objetos)*" (Barbosa, 2003, p. 204). Algunos investigadores que utilizan el marco teórico de APOS proponen la caracterización del desarrollo del esquema de un concepto matemático a través de los niveles Intra, Ínter y Trans basados en la teoría piagetiana (Clark et al. 1997; Baker et al., 2000; Brown et al., 2002, Cooley et al., 2003; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2006).

En nuestra investigación hemos usado la teoría APOS para describir las formas de conocer, los mecanismos que utilizan los estudiantes para la comprensión del concepto matemático y el nivel de desarrollo del esquema a través de la terna propuesta por Piaget y García (1982). Estas herramientas teóricas nos han permitido caracterizar el desarrollo del esquema del concepto de divisibilidad a través de los elementos matemáticos que lo componen, las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos y los modos de representación de los números, sobre los que los estudiantes pueden reflexionar y actuar en las situaciones en que se requiera.

Una teoría de similares características es la teoría de la *reificación* (Sfard, 1991), según la cual los conceptos matemáticos se construyen mediante el ciclo interiorización-condensación-reificación que configuran tres etapas de desarrollo progresivo a través de las cuales los procesos que se realizan sobre los objetos matemáticos abstractos pueden convertirse en objetos reificados. El paso de una etapa a la siguiente es gradual, entendiendo la reificación como un salto cualitativo que requiere procedimientos particulares para la comprensión del concepto. La reificación de un concepto matemático en objeto se produce cuando el individuo posee la capacidad de pensar en el concepto como una comprensión estructural que puede manipularse sin necesidad de especificar los detalles. Podemos pensar que un estudiante que es capaz de reflexionar sobre el concepto matemático como una estructura estática, sin necesidad de realizar operaciones, ha reificado el concepto matemático.

Es posible establecer una conexión entre la teoría de reificación con la investigación que hemos desarrollado a través del paralelismo entre la reificación y la comprensión de los conceptos matemáticos cuando el individuo establece relaciones lógicas entre los objetos matemáticos, independientemente del modo de representación adoptado, constatando además que el paso de un nivel a otro del desarrollo del esquema es gradual.

Para Sfard la capacidad de pensar en un objeto de manera estructural se produce en la fase de reificación ya que sin la reificación el individuo se encontraría en una concepción operacional. Esta separación entre concepción estructural y operacional es importante en el tratamiento de los símbolos (Sfard, 2000) y es de naturaleza semejante a la característica dual (procedimiento-concepto) que proponen Gray y Tall (1994). Los autores usan los denominados *proceptos* matemáticos para definir el compendio de proceso y objeto por el mismo símbolo. Para Gray y Tall (1994) y Tall et al. (2001) un proceso se refiere a cualquier procedimiento que tenga un mismo resultado. Cabe evaluar la secuenciación que conduce a los proceptos matemáticos. Los "proceptos" desempeñan un papel fundamental en la encapsulación de los objetos matemáticos.

El "símbolo" de la descomposición en factores primos se ha mostrado fundamental en el desarrollo del esquema de Divisibilidad, haciendo posible la construcción de "proceptos", facilitando el desarrollo gradual del esquema y permitiendo la encapsulación en un objeto de la divisibilidad, y su comprensión sin el requerimiento de procedimientos operacionales o algorítmicos. Cuando los alumnos vinculan la divisibilidad a la descomposición en factores primos y establecen relaciones entre los elementos matemáticos están considerando la representación factorial como un procepto ya que la consideran como un concepto y no como un procedimiento (Gray y Tall, 1994).

Para Barnard y Tall (1997) la construcción de los conceptos matemáticos está basada en la habilidad del individuo para agrupar la información en estructuras cognitivas y en su capacidad para realizar conexiones entre estas unidades de conocimiento. Esta construcción del conocimiento es producto de la actividad mental del individuo (Gray y Tall, 2002). Se trata de una teoría predominantemente cognitiva que otorga un papel limitado al contexto (Dreyfus y Tall, 2002), frente a otras teorías de carácter predominantemente contextual. Gray y Tall (2002) manifiestan su discordancia con las teorías de Dubinsky y de Sfard sobre la invariabilidad de una secuencia que describa la comprensión de un concepto matemático ya que algunos estudiantes pueden estructurar intuitivamente ideas generales con anterioridad a los procedimientos específicos que intervienen en los modos simbólicos, o formales, de las operaciones.

En la investigación que hemos realizado se ha puesto de manifiesto la importancia de la actividad mental (Gray y Tall, 2002) para la construcción del conocimiento matemático. Hemos podido constatar que para determinar el desarrollo del esquema de divisibilidad han sido importantes las entrevistas, al haber posibilitado que muchos estudiantes hayan sido capaces de vincular la divisibilidad a la representación factorial sin necesidad de realizar operaciones. La actividad mental que han efectuado los alumnos en las entrevistas ha permitido mostrar un mayor nivel del desarrollo del esquema de Divisibilidad como se ha indicado en el capítulo de resultados.

Por otra parte, en nuestra investigación hemos considerado los mecanismos de construcción y los niveles de desarrollo del esquema del concepto matemático teniendo en cuenta la comprensión que muestran los estudiantes y cómo la formalizan. Sobre la influencia limitada que ejerce el contexto en la comprensión de los conceptos matemáticos (Gray y Tall, 2002) cabe reseñar que aunque hemos contextualizado la investigación en un currículum determinado (Primer Ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria), en diferentes cursos y centros de enseñanza media, los valores estadísticos obtenidos han mostrado que los resultados podrían generalizarse a otros individuos y a otros ítems. Por tanto, la forma de comprender los conceptos matemáticos que poseen los estudiantes tiene carácter interno y el contexto no ha resultado ser un factor fundamental en la comprensión de los conceptos.

A partir del modelo piagetiano que relaciona el concepto de esquema con la asimilación de objetos a las estructuras mentales (esquemas) anteriores, construyendo una estructura mental organizada, intentamos concretar el desarrollo de la comprensión de un concepto matemático. Piaget y García (1982) describen el modelo de la terna (Intra-Ínter-Trans) de fases de desarrollo de un esquema, mostrando el carácter progresivo de la construcción del conocimiento al considerar que "*el desarrollo cognoscitivo resulta así de la iteración de un mismo mecanismo constantemente renovado y ampliado por la alternancia de la agregación de nuevos contenidos y de elaboraciones de nuevas formas y estructuras. Esto explica por qué las construcciones más elevadas permanecen en parte solidarias de las más primitivas, en razón de este doble hecho: integraciones sucesivas e identidad funcional de un mecanismo, susceptible de repeticiones, pero que se renueva sin cesar en virtud de su repetición misma en niveles diferentes*" (p.10). Las operaciones que componen un esquema (estructura mental) intervienen, antes de la tematización de dicha estructura, en la fase previa apoyando la integración en una estructura superior. La importancia de la caracterización del paso de un nivel de desarrollo del esquema a otro es destacada por Sánchez-Matamoros et al. (2006), a partir de investigaciones que desde el marco teórico de APOS subrayan el destacado papel que juegan en este paso el "tipo de relaciones" que pueden establecer los estudiantes entre los "elementos matemáticos" del concepto.

La organización de un conjunto de objetos y procesos matemáticos puede estructurarse en un esquema. Si un esquema puede tratarse como un objeto y organizarse en un esquema de nivel superior se dice que ha sido tematizado (Asiala et al, 1996). En consonancia con Piaget y Garcia (1982) y la teoría APOS, Cooley et al. (2003) determinan que un individuo tematiza el esquema de un determinado tópico matemático en el nivel Trans y se produce cuando el esquema es una realidad consciente para el individuo, pudiendo tratarlo entonces como un objeto. En este momento el sujeto puede desglosar las partes constituyentes del esquema y puede usarlas convenientemente en la aplicación del esquema en un problema matemático.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, en nuestra investigación el esquema de un concepto matemático es una estructura formada por los elementos matemáticos, los modos de representación y las relaciones lógicas que se pueden establecer entre los elementos matemáticos que constituyen el concepto cuando son usados en la resolución de problemas matemáticos. El estudio que hemos llevado a cabo nos ha permitido determinar que la construcción de los conceptos matemáticos es progresiva y se realiza a través de diferentes niveles de desarrollo. De un nivel a otro superior los estudiantes conocen más elementos matemáticos, establecen un mayor número de relaciones lógicas y usan gradualmente diferentes modos de representación de los conceptos matemáticos. En este sentido, estos resultados son coherentes con los obtenidos por Sánchez-Matamoros (2004) en relación al desarrollo del esquema de derivada.

El uso de diferentes modos de representación por parte de los alumnos es un indicador del nivel de desarrollo del esquema puesto que les permite establecer un mayor número de relaciones entre los elementos matemáticos que constituyen el concepto (Zazkis y Campbell, 1996a; Baker et al., 2000; Brown et al., 2002; Cooley et al., 2003; Barbosa, 2003; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2006). En este sentido, la utilización de los elementos matemáticos en distintas situaciones problemáticas y empleando diversos modos de representación ayuda a la construcción del esquema.

Cuando el estudiante es capaz de utilizar los elementos matemáticos estableciendo todas las relaciones lógicas entre los mismos, independientemente del modo de representación empleado, habrá tematizado el esquema. En este momento el alumno puede desencapsular los diferentes elementos matemáticos del esquema estableciendo las relaciones lógicas entre ellos y determinando el dominio de lo que pertenece y no pertenece al esquema del concepto matemático.

Volver al índice/Tornar a l´index

5.5. Limitaciones. Implicaciones para futuras investigaciones.

El estudio que hemos realizado muestra algunas cuestiones que pueden servir para futuras investigaciones:

- Hemos desarrollado nuestra investigación centrándonos en la comprensión del esquema de Divisibilidad que realizan los estudiantes, a través de las formas de conocer y los niveles de desarrollo del esquema, ¿pueden determinarse subniveles del desarrollo del esquema de Divisibilidad?

- A través de los elementos matemáticos, las relaciones lógicas establecidas entre los elementos y los modos de representación, se describen los niveles de desarrollo del esquema de Divisibilidad, ¿cómo se modificaría la caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de otros conceptos matemáticos?

- ¿Cómo variaría la comprensión del esquema de Divisibilidad entre alumnos de enseñanzas medias y los estudiantes universitarios? ¿Cambiarían significativamente las formas de conocer de los elementos matemáticos que muestran los estudiantes universitarios? ¿Cambiaría la caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de Divisibilidad que tiene los estudiantes universitarios?

- Los resultados de la investigación sobre el desarrollo del esquema de Divisibilidad, ¿cómo pueden emplearse en los procesos de enseñanza y en el desarrollo curricular en las aulas de enseñanza media?

- ¿Cómo influiría en la comprensión del esquema de Divisibilidad en alumnos de enseñanza media si se aumentara el tamaño de los números en las tareas empleadas en la investigación?

REFERENCIAS

Referencias Bibliográficas

Álvaro, M. (1993). *Elementos de psicometría.* Madrid: Eudema.

Asiala, M.; Brown, A.; DeVries, D.J.; Dubinsky, E.; Mathews, D.; Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2,* 1-32.

Asiala, M.; Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Schwingendorf, K. (1997). The development of student's graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavio*r, *16* (4), 399-431.

Asiala, M.; Dubinsky, E.; Mathews, D.; Morics, S.; Oktac, A. (1997). Student understanding of cosets, normality and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavio*r, *16* (3), 241-309.

Baker, B.; Cooley, L.; Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education, 31* (5), 557-578.

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6* (3), 199-219.

Barnard, T.; Tall, D. (1997). Cognitive Units, Connections, and Mathematical Proof. En E. Pehkonen, (Ed.), *Proceedings of the XXI Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp-41-48), 2. Lahti, Finland.

Batanero, C. (2003). El proceso inferencia causal. Valoración de los resultados de la investigación. Documentos de doctorado. Universidad de Granada-Universidad de Alicante.

Bochner, S. (1991). *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia.* Madrid: Alianza Editorial.

Bodí, S.D.; Valls, J.; Llinares, S. (2005). El análisis del desarrollo del esquema de divisibilidad en N. La construcción de un instrumento. *Números, 60*, 3-24.

Boletín Oficial del Estado. Ley Orgánica 1/1990 de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. B.O.E nº 238 de 4 de octubre de 1990.

Boletín Oficial del Estado. Ministerio de Educación y Cultura. Real Decreto 1006/1991, de 14 de junio, en el que se establecen las Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria. B.O.E nº 152 de 26 de junio de 1991.

Boletín Oficial del Estado. Ministerio de Educación y Cultura. Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, en el que se establecen las Enseñanzas Mínimas para la Educación Secundaria Obligatoria. B.O.E nº 152 de 26 de junio de 1991.

Boletín Oficial del Estado. Ministerio de Educación y Cultura. Real Decreto 1178/1992, de 2 de octubre, que establece las enseñanzas mínimas del Bachillerato. B.O.E nº 253 de 21 de octubre de 1992.

Boletín Oficial del Estado. Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación. B.O.E nº 307 de 24 de diciembre de 2002.

Boletín Oficial del Estado. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Real Decreto 831/2003, de 27 de junio, por el que se establece la ordenación general y las enseñanzas comunes de la Educación Secundaria Obligatoria. B.O.E nº 158 de 3 de julio de 2003.

Boletín Oficial del Estado. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Real Decreto 832/2003, de 27 de junio, por el que se establece la ordenación general y las enseñanzas comunes del Bachillerato. B.O.E nº 159 de 4 de julio de 2003.

Bolte, L.A. (1999). Enhancing and assessing preservice teachers' integration and expression of mathematical knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2* (2), 167-185.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid: Alianza Editorial.

Boyer, C.B. (1999). *Historia de la matemática.* Madrid: Manuales de Alianza Editorial.

Brown, A.; DeVries, D.; Dubinsky, E.; Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *Journal of Mathematical Behavior, 16* (3), 187-239.

Brown, A. (2002). Patterns of thought and prime factorization. En S. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp. 131-137). Westport: Ablex Publishing.

Brown, A.; Thomas, K.; Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: success and understanding. En S. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp. 41-82). Westport: Ablex Publishing.

Bruno, A.; Martinón, A. (2000). Contenidos matemáticos en la segunda enseñanza española del siglo XX. *Suma, 34*, 27 -43.

Campbell, S. (2000). Bringing insights from research into the classroom: The case of introductory number theory. *Proceedings of the 3rd Annual conference of the Association of Mathematics Teacher Educator. Chicago.* ERIC document ED445909.

Cardona, M.C. (2002). *Introducción a los métodos de investigación en educación.* Madrid: EOS Universitaria.

Castejón, J.L. (1997). *Introducción a los métodos y técnicas de investigación y obtención de datos en psicología.* Alicante: Club Universitario.

Clark, J.; Cordero, F.; Cottrill, J.; Czarnocha, B.; DeVries, D.; St. John; D., Tolias; G.; Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior, 16* (4), 345- 364.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. En Lesh, R. y Kelly, A., *Handbook of research methodologies for science and mathematics education* (pp. 547-589). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P.; Confrey, J.; DiSessa, A.; Lehrer, R.; Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher, 32* (1), 9-13.

Cobb, P.; Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analysis of classroom videorecordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics Education, 30,* 213-228.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Cobo, B.; Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 22* (1), 5-18.

Contreras, A; Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? *XVIII Jornadas del SI-IDM.* Castellón: Sociedad Española de Investigadores en Educación Matemática (SEIEM).

Cooley, L.; Trigueros M.; Baker, B. (2003). Thematization of the calculus graphing schema. En Pateman, N.A.; Dougherty, B.J.; Zilliox, J.T. (Eds.). *Proceedings of the 2003 joint meeting of the XXVII International Group for the Psychology of Mathematics Education and the Psychology of Mathematics Education-North American Chapter*, 2 (pp. 57-64.). Honolulu: University of Hawaii.

Cottrill, J. (1999). *Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions.* Tesis doctoral. Universidad de Purdue.

Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Nichlos, D.; Schwingendorf, K. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15* (2), 167-192.

Cronbach, L. J., Gleser, G. C., Nanda, H. y Rajaratman. (1972). The dependability of behavioral measurements. New York: John Wiley.

Czarnocha, B.; Loch, S.; Prabhu, V.; Vidakovic, D. (2001). The Concept of definite integral: coordination of two schemas. En Maria van den Heuvel-Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the XXV Conference of the International Group of Mathematics Education* (pp. 12-17). Utrecht: Freudenthal Institute.

Del Valle, A. (1994). La educación durante la Restauración. En B. Delgado (Coord.), *Historia de la educación en España y América. La educación en la España Contemporánea (1789-1975), 3* (pp. 270-277). Madrid: S.M.

DeVries, D.J. (2001). RUMEC / APOS Theory Glossary. *Georgia College & State University.Milledgeville.*http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html. [Disponible el 9 de agosto de 2004]

Díaz de la Guardia, E. (1988). *Evolución y desarrollo de la enseñanza media en España de 1875 a 1930. Un conflicto político-pedagógico*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia- C.I.D.E.

Diari Oficial de la Generalitat Valenciana. Decreto 20/1992, de 17 de febrero, del Govern Valencià, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Valenciana. D.O.G.V nº 1728 de 20 de febrero de 1992.

Diari Oficial de la Generalitat Valenciana. Decreto 47/1992, de 30 de Marzo, del Govern Valencià, por el que se establece el currículo de la educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana. D.O.G.V nº 1759 de 20 de 6 de abril de 1992.

Diari Oficial de la Generalitat Valenciana. Decreto 174/1994, de 19 de agosto, del Govern Valencià por el que se establece el currículo de Bachillerato en la Comunidad Valenciana. D.O.G.V nº 2356 de 29 de septiembre de 1994.

Diari Oficial de la Generalitat Valenciana. Decreto 39/2002, de 5 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que se modifica el Decreto 47/1992, de 30 de marzo, del Gobierno Valenciano por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana. D.O.G.V nº 4206 de 8 de marzo de 2002.

Diari Oficial de la Generalitat Valenciana. Decreto 50/2002, de 26 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que se modifica el Decreto 174/1994, de 19 de agosto, del Gobierno Valenciano por el que se establece el currículo del Bachillerato en la Comunidad Valenciana. Valencia: D.O.G.V nº 4222 de 5 de abril de 2002.

Dörfler, W. (2002). Formation of mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning, 4* (4), 337-350.

Dörfler, W. (2003). Mathematics and mathematics education: Content and people, relation and difference. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 147-170.

Dreyfus, T.; Gray, E. (2002). Research Forum 1. Abstraction: Theories about the emergence of knowledge structures. En Cockburn, A. y Nardi, E. (Eds.). *Proceedings of the 26th Annual Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1 (pp.113-138). Norwich: University of East Anglia.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En Tall, D (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (2000a). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3* (1), 47-70.

Dubinsky, E. (2000b). Using a theory of learning in college mathematics courses. *Teaching and Learning Undergraduate Mathematics,* Newsletter *12.*http://www. bham.ac.uk /ctimath/talum/ newsletter/talum12.htm#dubinsky. [Disponible el 16 de Junio de 2004].

Dubinsky, E.; McDonald, M.A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research. En D. Holton (Ed*.), The teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study.* 7 (pp. 273-280). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ebel, R.L. y Frisbie, D.A. (1986). *Essentials of Education Measurement*. New Jersey: Prentice Hall.

Ferrari, P.L. (2002). Understanding elementary number theory at the undergrate level: a semiotic approach. En S. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp.97-115). Westport: Ablex Publishing.

García, C.; Olea, J.; Ponsoda, V.; Revuelta, J.; Ximénez, C.; Abad, F.J. (2002). *Introducción a la psicometría. Materiales de la asignatura.* Departamento de Psicología Social y Metodología. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid. http://www.uam.es/personal_pdi/psicología/fjabad/psicometría.htm. [Disponible el 10 de octubre de 2003].

García, V.; Pérez, R. (1989). *La investigación del profesor en el aula.* Madrid: Escuela Española.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning and understanding. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the XX Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 417-424). Valencia: Universitat de València.

Godino, J. D. (2001). Comparación de herramientas teóricas en didáctica de las matemáticas. *Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Departamento de Didáctica de la Matemática.* Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/07_ComparacionHT.pdf [Disponible el 6 de Mayo de 2003]

Goldin, G. (2000). A scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp.517-545). Mahweh, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gray, E.; Pinto, M.; Pitta, D.; Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 111-133.

Gray, E.; Pitta, D.; Tall, D. (2000). Objects, actions and images: A perspective on early number development. *Journal of Mathematical Behavior, 18* (4), 401– 413.

Gray, E.; Tall, D. (1994), Duality, ambiguity, and flexibility: A perceptual view of simple arithmetic's, *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 115-141.

Gray, E.; Tall, D. (2002). Abstraction as a natural process of mental compression. En Cockburn, A. y Nardi, E. (Eds.). *Proceedings of the 26th Annual Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1 (pp.115-120). Norwich: University of East Anglia.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior, 16* (2), 145-165.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I.* Madrid: Alianza Editorial.

McMillan, J.H. (1996). *Educational research: Fundamentals for the consumer.* (2a ed.). Nueva York: Harper Collins.

Meel, D.E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6* (3), 221-271.

Ministerio de Educación Nacional (1952). *Ley de Educación Primaria, de 17 de Julio de 1945. (B.O.E de 18 de julio)*. Madrid: Dirección General de Enseñanza Primaria.

Ministerio de Educación Nacional (1953). *Cuestionarios nacionales para la enseñanza primaria.* Madrid: Dirección General de Enseñanza Primaria.

Ministerio de Educación Nacional (1965). *Cuestionarios nacionales para la enseñanza primaria.* Madrid: Dirección General de Enseñanza Primaria.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1971). Ley General de Educación y disposiciones complementarias, 1970. Madrid: Imprenta Nacional del B.O.E.

Molina, J. (1999). *Un análisis evolutivo de la competencia curricular en el área de las Ciencias de la Naturaleza de la Educación Secundaria Obligatoria.* Murcia: Diego Marín.

Moreno, M.; Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias, 21* (2), 265-280.

Muñiz, J. (2001). *Teoría clásica de los test.* Madrid: Pirámide.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: Author.

Navarro, R. (1990). *La enseñanza primaria durante el franquismo (1936-1975).* Barcelona: PPU.

Pegg, J.; Tall, D. (2002). Fundamental Cycles of Cognitive Growth. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the XXVI Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 41–48). Norwich.

Piaget, J.; García, R. (1982). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. México: Siglo XXI Editores.

Prellezco, J.M. (1994). Escuelas de enseñanza primaria. En B. Delgado (Coord.), *Historia de la educación en España y América. La educación en la España Contemporánea (1789-1975), 3* (pp.407-418). Madrid: S.M.

Rey, J. (1941). *Elementos de Análisis Algebraico*. Madrid: 1941.

Rico, L.; Castro, L; Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. En J. Beltrán y otros (Eds.), *Intervención psicopedagógica y curricular escolar*. (pp. 153-182). Madrid: Pirámide.

Rodríguez, M. (1977). *Ley General de Educación y financiamiento de la Reforma Educativa de 4 de agosto de 1970 (B.O.E de 6 de agosto de 1970)*. Madrid: Escuela Española.

Romero, I. (2001). Representación y comprensión en pensamiento numérico. En L.C. Contreras; J. Carrillo; N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.35-46). Huelva: Universidad de Huelva.

Romero, I.; Rico, L. (1999). Representación y concepción del número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *EMA, 4* (2), 117-151.

Samaniego, M. (1994a). Política educativa en la crisis de la Restauración. En B. Delgado (Coord.), *Historia de la educación en España y América. La educación en la España Contemporánea (1789-1975), 3* (pp.525-532). Madrid: S.M.

Samaniego, M. (1994b). La educación durante la República y la guerra civil. La política educativa. Panorama general. En B. Delgado (Coord.), *Historia de la educación en España y América. La educación en la España Contemporánea (1789-1975), 3* (pp. 807- 820). Madrid: S.M.

Sánchez-Matamoros, G.M. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción de derivada (desarrollo del concepto).* Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Sevilla.

Sánchez-Matamoros, G.M.; García, M; Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 24* (1), 85-98.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp.59-84). Washington DC: Mathematical Association of America.

Sfard A. (2000) Steering discourse between metaphors and rigor: using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects, *Journal for Research in Mathematics Education, 31* (3), 296-327.

Sfard, A.; Thompson, P.W. (1994). Problems of reification. Representations and mathematical objects. En D. Kirshner, (Ed.), *Proceedings of the XVI Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education–North America* (pp. 1-32). Baton Rouge LA.: Lousiana State University.

Sierra, M.; González, M.; Sánchez, A. y González, M.T. (1989). *Divisibilidad.* Madrid: Síntesis.

Sierra, M.; González, M.T.; López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, *17* (3), 463-476.

Silver E.A.; Smith, M y Nelson, B. (1997). El proyecto quasar; los problemas de la equidad en la reforma de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria. En W.G. Secada, E. Fennema y L.B. Adajian (Comp.), *Equidad y enseñanza de las matemáticas: nuevas tendencias*. (P. Manzano, Trad.) (pp. 23-70). Madrid: Morata.

Sinclair, N.; Zazkis, R.; Liljedahl, P. (2003). Number worlds: visual and experimental access to elementary, number theory concepts, *International Journal of Computers for Mathematics Learning, 8* (3), 235-263.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Tall, D. (1995a). The psychology of symbols and symbol manipulators. *Proceedings of the Seventh Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching* (pp.453-457). Reading: Addison-Wesley.

Tall, D. (1995b). Mathematical growth in elementary and advanced mathematical thinking. En D. Carraher y L. Miera (Eds.), *Proceedings of XXI International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp.61– 75). Recife.

Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the XXIII Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 1 (pp.111-118). Haifa.

Tall, D.; Gray, E.; Bin Ali, M.; Crowley, L.; DeMarois, P.; McGowen, M.; Pitta, D.; Pinto, M.; Thomas, M.; Yusof, Y. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*, 81–104.

Tall, D., Thomas, M.; Davis, G.; Gray, E.; Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process?, *Journal of Mathematical Behavior*, *18* (2), 223-241.

Tzur R.; Simon, M. (2004) Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*, 287-304.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why?. En Guerson, H. y Confrey J. (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany: SUNY

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. En L. Steffe, P., Nesher, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp.219-239). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Vergnaud, G. (2001). Problemas aditivos y multiplicativos. En Instituto Superior de Formación del Profesorado (Ed.), *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas* (pp.189-228). Madrid: MECD.

Zazkis, R. (2000). Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections. *Research in Collegiate Mathematics Education, 4,* 210-238.

Zazkis, R. (2002). Language of number theory: metaphor and rigor. En S. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp.83-95). Westport: Ablex Publishing.

Zazkis, R.; Campbell, S. (1996a). Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher's understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (5), 540-563.

Zazkis, R.; Campbell, S. (1996b). Prime decomposition: understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior, 15* (2), 207-218.

Zazkis, R.; Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. En A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics* (pp. 41-52). Reston: NCTM.

Zazkis, R.; Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 35* (3), 164-186.

UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Comisión de Doctorado

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha acordó otorgar, por unanimidad a la Tesis Doctoral de Don/Dña. Samuel David Bodí Pascual la calificación de Sobresaliente "CUM LAUDE" (10)

Alicante 3 de julio de 2006

El Secretario,

El Presidente,

M. CARMEN PEÑALVA

Salvador Llinares

UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Comisión de Doctorado

La presente Tesis de D. Samuel David Bodí Pascual ha sido registrada al Folio .... con el n.º 1186-1548 del registro de entrada correspondiente.

Alicante 09 de julio de 2006.

El Encargado del Registro,