

Modelos ocultos de Markov para el análisis de patrones espaciales

F. Rodríguez¹, S. Bautista²

(1) Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Alicante, Apdo. 99, E-03080 Alicante.

(2) Dpto. de Ecología, Universidad de Alicante, Apdo. 99, E-03080 Alicante

Modelos ocultos de Markov para el análisis de patrones espaciales. Los modelos ocultos de Markov (HMM) constituyen una herramienta de modelización altamente flexible, inicialmente utilizada en el campo del reconocimiento automático del habla, que ha encontrado en los últimos años numerosas aplicaciones en áreas científico-técnicas muy diversas, aunque su utilización en ecología es aún escasa. En esta revisión se describen los elementos esenciales de los HMM, se presentan los algoritmos básicos que facilitan su estimación y se indican algunas aplicaciones recientes, destacándose las posibilidades que pueden ofrecer para el análisis de patrones espaciales complejos, pues permiten incorporar en el proceso de modelización información *a priori* sobre el sistema analizado. Se muestra un ejemplo de aplicación de modelización mediante HMM de transectos de vegetación con datos de presencia-ausencia, con el objetivo de analizar las perturbaciones en la distribución espacial de la vegetación producidas por el fuego en una zona semiárida.

Palabras clave: HMM, estados ocultos, patrones complejos, transectos de vegetación.

Hidden Markov models for spatial pattern analysis. Hidden Markov models (HMM) constitute a flexible modelling tool, originally used in the field of automated speech recognition, that have found wide application in the last years in many scientific and technical problems, although their use in ecology is still scarce. In this review, the essential elements of HMM are described, the basic algorithms that facilitate their estimation are presented and some recent applications are pointed out, with emphasis on the possibilities that HMM offer in analysing complex spatial patterns, as they allow incorporating *a priori* information about the system into the modelling process. An example of application is presented where HMM are used to model vegetation transects with presence-absence data, aimed at analysing disturbances in the spatial distribution of the vegetation after a wildfire in a semiarid zone.

Keywords: HMM, hidden states, complex patterns, vegetation transects.

Introducción

Existen numerosos métodos disponibles para el análisis de patrones espaciales, como se pone de manifiesto en los diversos artículos de este monográfico y en la bibliografía específica (e.g., Dale, 1999; Fortin y Dale, 2005). Algunas de las técnicas en uso fueron desarrolladas en otros campos y adaptadas posteriormente para su aplicación en ecología espacial, como es el caso del análisis espectral (Ripley, 1978; Renshaw y Ford, 1984) o, más recientemente, el empleo de *wavelets* (Dale y Mah, 1998), provenientes ambas del campo de la teoría de la señal.

Los modelos ocultos de Markov (que escribiremos, en adelante, HMM, tanto en singular como en plural), son una técnica de modelización de datos secuenciales aplicada inicialmente en el campo del reconocimiento automático del habla (Rabiner, 1989), donde actualmente es una herramienta casi imprescindible, que ha encontrado aplicación en disciplinas diversas, como el análisis de imagen (Aas *et al.*, 1999) o la psicología (Visser *et al.*, 2002), destacando su uso creciente en bioinformática, donde los HMM están ya bien establecidos (e.g., Baldi *et al.*, 1994; Baldi y Brunak, 1998; Durbin *et al.*, 1998), y en el análisis de electroencefalogramas y otras bioseñales (e.g., Penny y Roberts, 1998; Novák *et al.*, 2004).

A pesar del enorme incremento en las publicaciones sobre HMM y aplicaciones en los últimos quince años (véase Cappé, 2001, para una recopilación bibliográfica de la pasada década), la utilización de HMM en áreas de interés en ecología ha sido muy escasa hasta ahora, aparte de su empleo para el análisis de precipitaciones (e.g., Sansom, 1998; Bellone *et al.*, 2000). En Viovy y Saint (1994) se aplican los HMM para el estudio de la dinámica temporal de la vegetación a partir de datos de

teledetección. En Tucker y Anand (2005) se discute la utilidad de los HMM, en comparación con la modelización mediante cadenas de Markov clásicas, para detectar dinámicas ecológicas complejas. En Ver Hoef y Cressie (1997) se utilizan HMM para modelizar transectos de vegetación en pastizales, con el objetivo de definir los bordes, o puntos de cambio, entre las zonas con y sin vegetación. Una aplicación similar, con el objetivo de analizar patrones complejos en transectos de vegetación, se lleva a cabo en Rodríguez y Bautista (2001), trabajo en el que hemos basado parcialmente la presente revisión.

A continuación se exponen los aspectos esenciales de los HMM, sin entrar en los detalles matemáticos y computacionales, y se ilustran con un ejemplo de aplicación. Para el lector interesado, se recomienda la clásica y magnífica exposición de Rabiner (1989), la revisión más reciente de Bengio (1999), en la que se incluyen distintas extensiones de los modelos básicos, o alguno de los libros específicos sobre el tema (Elliot *et al.*, 1995; MacDonald y Zucchini, 1997; Cappé *et al.*, 2005).

Elementos y algoritmos básicos de los HMM

La primera clase de modelos que consideramos son los denominados HMM discretos de primer orden; más adelante se indicarán distintas variaciones y extensiones de este modelo básico. Un HMM de este tipo queda definido por los siguientes cuatro elementos esenciales: un conjunto de K estados, un conjunto de D símbolos, una matriz $K \times K$ (K filas y K columnas) de probabilidades de transición $T=(T_{ij})$ y una matriz $K \times D$ de probabilidades de emisión $E=(E_{ip})$. Los datos observables consisten en una cadena de N símbolos, es decir, una sucesión $\{Y_t\}$ de longitud N , donde el valor de cada Y_t puede ser uno de los D símbolos, para $t = 1, \dots, N$. Existe una sucesión correspondiente oculta, no observable, de estados $\{S_t\}$, donde cada S_t puede tomar uno de los K valores que constituyen el conjunto de estados. Siempre que no se produzca ambigüedad, podremos identificar las etiquetas de los símbolos o estados y sus índices, de modo que diremos que S_t toma los valores $1 \dots K$. Cuando el sistema se encuentra en el estado i , tiene una probabilidad T_{ij} de pasar al estado j y una probabilidad E_{ip} de emitir el símbolo p , independientemente de cuál haya sido la historia del sistema hasta llegar a este estado. Por tanto, podemos decir que existen dos relaciones de independencia condicional para las sucesiones de estados y de observaciones. Dado S_t , se tiene que Y_t es independiente del resto de observaciones, mientras que dado S_{t-1} se tiene que S_t es independiente de todos los estados anteriores $S_1 \dots S_{t-2}$. Esta última relación nos dice que la sucesión de estados constituye una cadena de Markov de primer orden.

Una representación gráfica de relaciones de probabilidad condicionadas, como las anteriores, entre un conjunto de variables aleatorias se denomina red bayesiana (Pearl, 1988; Heckerman, 1996). La **Figura 1** muestra una red bayesiana correspondiente a un HMM de primer orden, representada mediante un grafo acíclico dirigido, donde los nodos representan las variables aleatorias (círculos para los estados ocultos y cuadrados para las observaciones) y donde la ausencia de una flecha entre dos variables nos indica su independencia condicional.

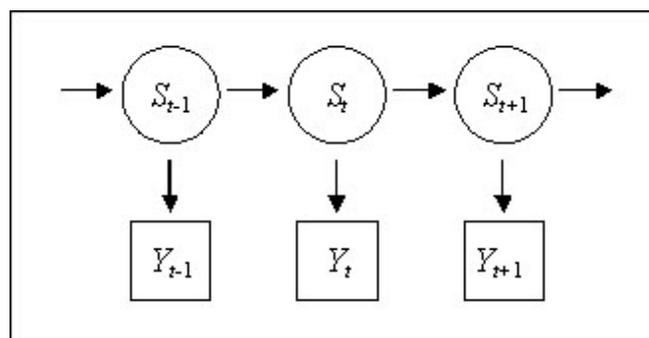


Figura 1. Representación de un HMM de primer orden en forma de red bayesiana.

La estructura básica o topología de un HMM queda definida por el número de estados ocultos, el número de símbolos y las transiciones de estados y emisiones de símbolos no permitidas (para las que las correspondientes probabilidades de transición o emisión se asume que son cero).

Si conocemos la topología de un HMM y los valores de sus parámetros (probabilidades de transición y emisión) se podría simular su comportamiento, esto es, podríamos obtener secuencias aleatorias de estados ocultos y observaciones generadas por el modelo. Para ello, sin embargo, necesitamos conocer un último elemento, las probabilidades de iniciar la cadena en cada uno de los K estados posibles, es decir, un vector con elementos π_i , para $i = 1 \dots K$, donde π_i es la probabilidad de que la

sucesión de estados comience en el estado i . No obstante, la mayor utilidad de los HMM como herramientas de análisis se basa en la posibilidad de estimar un modelo a partir de una serie de datos, que suponemos el resultado observable de una serie de estados no directamente accesibles y en los que estamos interesados, bien sea por tener un cierto significado para el problema abordado o porque de esta forma se obtiene un modelo con una mayor capacidad de predicción.

Una vez que hemos definido una cierta topología, existen dos problemas básicos en el análisis de HMM, el problema del aprendizaje y el problema de la inferencia. Dada una secuencia de observaciones, el problema del aprendizaje consiste en estimar los parámetros del modelo, es decir, las probabilidades de transición y emisión. En realidad podría plantearse un problema de aprendizaje más general, en el que se incluyese la selección de la topología. Aunque ya se han propuesto técnicas para abordar este problema general (Heckerman, 1996), se trata de un tema más complejo de investigación activa, sobre el que comentaremos algunos aspectos más adelante. Dada una secuencia de observaciones, una vez que los parámetros han sido estimados (o bien si son previamente conocidos), el problema de la inferencia consiste en obtener la correspondiente sucesión de estados ocultos.

El problema del aprendizaje puede ser resuelto mediante el algoritmo denominado EM (Dempster *et al.*, 1977), o de maximización de la esperanza (expectation maximisation), que proporciona los valores de los parámetros que maximizan (el logaritmo de) la verosimilitud de las observaciones en función de los parámetros; usualmente se utiliza el denominado algoritmo de Baum-Welch (Baum *et al.*, 1970), que es una versión particularmente eficiente desde el punto de vista computacional del algoritmo EM. El problema de la inferencia puede ser resuelto obteniendo la sucesión de estados ocultos más probable mediante un algoritmo de programación dinámica conocido como algoritmo de Viterbi (Viterbi, 1967) y que es un caso especial de algoritmos de inferencia aplicables a modelos gráficos más generales desarrollados por Pearl (1988) y otros autores (e.g., Smyth, 1997; Smyth *et al.*, 1997).

Modelización de transectos de vegetación mediante HMM

Veamos con un ejemplo cómo se aplican los conceptos anteriores; se tratará de modelizar transectos de vegetación con datos de presencia-ausencia. Los datos consisten en transectos realizados en una zona semiárida (Benidorm, Alicante, SE España), cada uno de 25 m de longitud con 250 puntos igualmente espaciados, en dos áreas contiguas (cuatro transectos en cada una), una quemada y otra no quemada (véase Bautista, 1999; Bellot *et al.*, 2000, para más detalles y discusión sobre los datos).

Resultaba evidente, a partir de la simple observación de campo, que, a la escala considerada, la vegetación definía manchas, o zonas más vegetadas, y claros, o zonas con escasa vegetación, con un cierto patrón de distribución, con diferencias entre las zonas quemada y no quemada (tres años después del incendio). De hecho, un análisis descriptivo clásico de patrones en transectos de vegetación, de la familia del análisis de la varianza en bloques (Greig-Smith, 1952; Greig-Smith, 1979; Hill, 1973), mostraba un patrón complejo, con similitudes globales y diferencias en tamaño de grano e intensidad entre las dos zonas (Bautista y Vallejo, 2002).

Un primer tipo de HMM que podemos considerar constaría de dos estados ocultos, correspondientes a las manchas y claros, que son los elementos del sistema en los que estamos interesados y que deseamos describir de la forma más precisa posible. Estos elementos no son directamente observables, pues, aunque la probabilidad de encontrar vegetación en un punto del transecto correspondiente a una mancha es mayor que si estamos en un claro, es posible registrar ausencia de vegetación en el primer caso y presencia en el segundo. Los símbolos del modelo serían dos, correspondientes a presencia y ausencia de vegetación. El modelo tendría, por tanto, cuatro parámetros básicos independientes, dos probabilidades de transición y dos de emisión (el resto queda determinado por la condición de que la suma de las probabilidades de transición, y también de emisión, desde un cierto estado debe ser la unidad). Si para los estados escribimos 1 para mancha y 2 para claro, y para los símbolos 1 para presencia y 2 para ausencia de vegetación, podemos considerar como parámetros independientes las dos probabilidades de transición entre diferentes estados (T_{12} y T_{21}) y las dos probabilidades de observar presencia de vegetación en manchas (E_{11}) y en claros (E_{21}), teniéndose que $T_{11}=1-T_{12}$, $T_{22}=1-T_{21}$, $E_{12}=1-E_{11}$ y $E_{22}=1-E_{21}$. La **Figura 2A** muestra los estados y las transiciones permitidas en el modelo.

Este modelo puede ayudar a entender el sentido de considerar estados ocultos, que es la idea fundamental de los HMM. Sin embargo, conociendo el sistema que se trata de modelizar, no es esperable que este modelo sea muy apropiado, pues sería más adecuado en situaciones con patrones simples, con manchas y claros relativamente homogéneos, como podría esperarse, por ejemplo, en algunas comunidades herbáceas de pastizales, en donde HMM de este tipo han sido utilizados para detectar bordes de manchas (Ver Hoef & Cressie, 1997).

En el caso que estamos considerando, se tendrían plantas arbustivas agrupadas en ciertas zonas con áreas de escasa vegetación entre ellas, existiendo, por tanto, dos niveles de manchas, el de la agrupación y el de los propios arbustos, resultando en el patrón complejo exhibido por los análisis descriptivos clásicos. Una de las ventajas de los HMM es que esta

información *a priori* sobre el sistema se puede introducir en el proceso de modelización, mediante la elección de la topología del modelo. Así, podemos considerar tres estados ocultos; un primer estado, correspondiente a los arbustos, que denominamos manchas (1), pequeños claros entre manchas (2) y claros (3), de modo que una sucesión de los dos primeros estados constituirían agrupaciones de manchas, separadas entre sí por los claros. En este modelo, las transiciones entre los estados 2 y 3 no tendrían sentido; por tanto, el modelo queda determinado por siete parámetros básicos independientes, cuatro probabilidades de transición (T_{12} , T_{13} , T_{21} y T_{31}) y las tres probabilidades de observar presencia de vegetación en cada uno de los tres estados (E_{11} , E_{21} y E_{31}). En la **Figura 2B** se muestra un esquema de la topología del modelo.

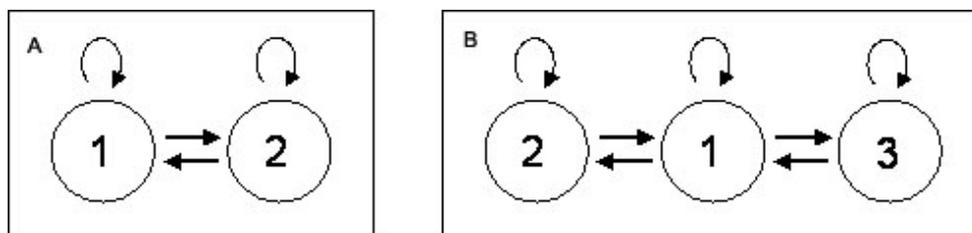


Figura 2. Esquema de los estados ocultos y transiciones permitidas para los dos modelos considerados. **A)** modelo con dos estados (1: manchas, 2: claros). **B)** modelo con tres estados (1: manchas, 2: pequeños claros entre manchas, 3: claros).

La **Tabla 1** muestra los valores de los parámetros, estimados mediante el algoritmo de Baum-Welch, aplicando los dos modelos descritos a los transectos en las zonas quemada y no quemada. Sin entrar en un análisis detallado, los parámetros muestran una estructura similar en las dos zonas, con valores algo mayores de las probabilidades de transición entre estados en la zona quemada, lo que implica un menor tamaño de las manchas y claros.

Tabla 1. Parámetros de los modelos con dos y tres estados estimados para las zonas quemada y no quemada.

	Modelo con 2 estados		Modelo con 3 estados	
	no quemado	quemado	no quemado	quemado
T_{12}	0.113	0.167	0.080	0.210
T_{13}			0.038	0.070
T_{21}	0.106	0.270	0.297	0.317
T_{31}			0.055	0.067
E_{11}	0.842	0.890	0.921	0.929
E_{21}	0.096	0.102	0.044	0.007
E_{31}			0.190	0.164

Una vez estimados los parámetros, la aplicación del algoritmo de Viterbi proporciona la sucesión de estados ocultos y, con ello, una descripción detallada de los tamaños de manchas y claros. En los transectos originales es difícil encontrar una sucesión de puntos con presencia o ausencia continua de vegetación; en la sucesión de estados ocultos estimada, sin embargo, se detectan series continuas de manchas y claros de mayor longitud, especialmente en el caso del modelo con tres estados.

Modelos más generales

Una característica esencial de los HMM es que el conjunto de estados ocultos es discreto. Sin embargo, los datos observables pueden corresponder a una variable aleatoria continua, como ocurriría, por ejemplo, al considerar transectos de cuadrados de vegetación en los que la variable de interés fuese la biomasa. En estos casos, en lugar de los símbolos y probabilidades de emisión que encontramos en los HMM discretos, lo que se tiene es, para cada estado oculto, una función de densidad que determina la distribución de probabilidad de las observaciones.

La condición de que la sucesión de estados ocultos sea una cadena de Markov de primer orden no es, realmente, ninguna restricción, pues siempre es posible convertir una cadena de orden superior (en la que S_t no depende sólo de S_{t-1}) en una de primer orden aumentando el número de estados del modelo.

Existen diversas extensiones al modelo básico, discreto o continuo, considerado anteriormente, que añaden aún una mayor flexibilidad a la capacidad de modelización de los HMM. Entre ellas, podemos destacar los modelos ocultos semimarkovianos, en los que un estado puede emitir una cadena de símbolos cuya longitud viene determinada por una cierta distribución de probabilidad, que han sido utilizados para analizar la variación espacial en datos de precipitación (Sansom, 1999; Sansom y Thompson, 2003). También podrían ser de interés para el análisis de patrones espaciales los HMM jerárquicos (Fine *et al.*, 1998) y los HMM factoriales (Ghahramani y Jordan, 1997), en los que se asume una cierta estructura en el conjunto o en la sucesión de estados ocultos, lo que los hace adecuados para la modelización de sistemas con patrones a distintas escalas.

Los HMM son herramientas de modelización de datos secuenciales, debido a que se basan en que los estados ocultos constituyen una cadena de Markov. En dos o más dimensiones, el instrumento análogo a las cadenas de Markov es lo que se denomina campos aleatorios de Markov (MRF) y existen los correspondientes modelos con estados ocultos, denominados HMRF (Kunsch *et al.*, 1995), que permiten la modelización de sucesiones bidimensionales de datos, aunque con una mayor complejidad que en el caso unidimensional.

Comentarios finales

El aspecto que consideramos fundamental en la aplicación de HMM al análisis de patrones espaciales es la utilización de un modelo explícito de la estructura del patrón, a través de la selección de la topología del HMM. De esta forma, el conocimiento que se tenga *a priori* sobre el sistema, o que se derive de otro tipo de análisis descriptivos previos, puede incorporarse en el proceso de modelización, permitiendo un estudio más profundo y detallado.

En las áreas en las que los HMM están más extendidos, se utilizan, en general, con un enfoque de aprendizaje automático, en problemas en los que se dispone de una abundante base de datos (denominados de entrenamiento) con los que es posible seleccionar y estimar el HMM más apropiado (a veces, con un gran número de estados ocultos), obteniéndose modelos con una alta capacidad de predicción, pues el problema típico es clasificar o identificar nuevos datos. Aunque una situación similar puede darse en algunos problemas de interés en ecología (e.g., modelización de series de precipitaciones o de datos de teledetección), es más habitual que se disponga de un conjunto reducido de datos y que el enfoque sea más de tipo estadístico, en el sentido de que se desee poder obtener intervalos de confianza para las estimaciones de los parámetros y poder contrastar tanto los valores de ajuste de un cierto modelo como distintos modelos alternativos. Aunque estas cuestiones no suelen recibir un tratamiento detallado en las publicaciones tradicionales sobre HMM, es un tema que está recibiendo mayor atención en los últimos tiempos, lo que sin duda contribuirá a la extensión del uso de HMM en problemas de ecología y de otras disciplinas con necesidades similares. En realidad, dada una cierta topología, las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros (obtenidas con el algoritmo EM) son asintóticamente normales (Bickel *et al.*, 1998) y es posible obtener intervalos de confianza (Visser *et al.*, 2000) y realizar tests de razón de verosimilitudes para contrastar sus valores (Giudici *et al.*, 2000). Sin embargo, estos tests no sirven para decidir entre modelos con diferente número de estados; aunque se ha sugerido el uso de criterios de selección de modelos para elegir el modelo más apropiado entre un conjunto de modelos candidatos (Visser *et al.*, 2002), la justificación teórica de este enfoque es discutible. No obstante, existen diversas aproximaciones al problema (e.g., Stinchcombe y White, 1998) e investigaciones en marcha, que deben proporcionar métodos fiables y contrastados en un futuro próximo.

Por último, aunque los algoritmos necesarios para los HMM discretos son fácilmente implementables, la complejidad aumenta en el caso continuo y en las extensiones a los modelos básicos. Afortunadamente, existen distintas herramientas para el trabajo con HMM disponibles, muchas de ellas de uso libre, para diferentes entornos de computación. Entre otras opciones, el programa comercial MATLAB (<http://www.mathworks.com/products/matlab/>), en su paquete (toolbox) de estadística, ofrece las funciones básicas para construir, simular y analizar HMM discretos. Implementaciones más completas, que permiten el trabajo con HMM continuos e incluyen diversos métodos de estimación, se tienen en el toolbox HMM para MATLAB (Murphy, 1998), en el conjunto de programas H2M (Cappé, 2001), disponible tanto para MATLAB como para el programa similar de uso libre OCTAVE (<http://www.gnu.org/software/octave/octave.html>) y en el paquete HiddenMarkov (Harte, 2005), que es un conjunto de funciones para el entorno de estadística de uso libre R (URL: www.r-project.org/).

Agradecimientos

Este trabajo ha recibido financiación de los proyectos CGL2004-06455-C02-01/BOS del Ministerio de Ciencia y Tecnología y CGL2005-07946-C02-01/BOS del Ministerio de Educación y Ciencia.

Referencias

- Aas, K., Eikvil, L. & Huseby, R.B. 1999. Applications of hidden Markov chains in image analysis. *Pattern Recognition*, 32, pp. 703-713.
- Baldi, P., Chauvin, Y., Hunkapiller, T. y McClure, M.A. 1994. Hidden Markov models of biological primary sequence information. *Proceedings of the National Academy of Science USA* 91: 1059-1063.
- Baldi, P. y Brunak, S. 1998. *Bioinformatics, the Machine Learning Approach*, MIT Press.
- Baum, L.E., Petrie, T., Soules, G. y Weiss, N. 1970. A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains. *The Annals of Mathematical Statistics* 41: 164-171.
- Bautista, S. 1999. *Regeneración post-incendio de un pinar (Pinus halepensis, Miller) en ambiente semiárido. Erosión del suelo y medidas de conservación a corto plazo*, Tesis doctoral, Universidad de Alicante.
- Bautista, S. y Vallejo, V.R. 2002. Spatial variation of post-fire plant recovery in Aleppo pine forests. En: L. Trabaud y R. Prodon, eds., *Fire and Biological Processes*, pp. 13-24. Backhuys Publishers, Leiden.
- Bellone, E. Hughes, J.P. y Guttorp, P. 2000. A hidden Markov model for downscaling synoptic atmospheric patterns to precipitation amounts. *Climate Research* 15: 1-12.
- Bellot, J., Bautista, S. y Meliá, N. 2000. Post-fire regeneration in a semiarid pine forest as affected by the previous vegetation spatial pattern. *Mediterranean Desertification. Research results and policy implications*, EUR 19303, eds. P. Balabanis, D. Peter, A. Ghazi & M. Tsogas, European Commission: Luxembourg, pp. 343-350.
- Bengio, Y. 1999. Markovian models for sequential data. *Neural Computing Surveys* 2: 129-162.
- Bickel, P. J., Ritov, Y., y Ryden, T. 1998. Asymptotic normality of the maximum-likelihood estimator for general hidden Markov models. *Annals of Statistics* 26: 1614-1635.
- Cappé, O. 2001. Ten years of HMMs. URL: www.tsi.enst.fr/~cappe/docs/hmmbib.html
- Cappé, O. 2001. H2M : A set of MATLAB/OCTAVE functions for the EM estimation of mixtures and hidden Markov models. URL: <http://www.tsi.enst.fr/~cappe/h2m/>
- Cappé, O., Moulines, E. y Rydén, T. 2005. *Inference in Hidden Markov Models*. Springer.
- Dale, M.R.T. 1999. *Spatial Pattern Analysis in Plant Ecology*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Dale, M.R.T. y Mah, M. 1998. The use of wavelets for spatial pattern analysis in ecology. *Journal of Vegetation Science* 9: 805-814.
- Dempster, A.P., Laird, N.M. y Rubin, D.B. 1977. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society Series B* 39: 1-38.
- Durbin, R., Eddy, S., Krogh, A. y Mitchison, G. 1998. *Biological sequence analysis. Probabilistic models of proteins and nucleic acids*, Cambridge University Press: Cambridge.
- Fine, S., Singer, Y. y Tishby, N. 1998. The Hierarchical Hidden Markov Model: Analysis and Applications. *Machine Learning*, 32(1): 41-62.
- Fortin, M.J. y Dale, M.R.T. 2005. *Spatial Analysis. A Guide for Ecologists*. Cambridge University Press, Cambridge.

- Ghahramani, Z. y Jordan, M.I. 1997. Factorial hidden Markov models. *Machine Learning*, 29, pp. 245-273.
- Giudici, P., Ryden, T. y Vandekerckhove, P. 2000. Likelihood-Ratio Tests for Hidden Markov Models. *Biometrics*, 56(3): 742-747.
- Greig-Smith, P. 1952. The use of random and contiguous quadrats in the study of the structure of plant communities. *Annals of Botany* 16: 293-316.
- Greig-Smith, P. 1979. Pattern in vegetation. *Journal of Ecology* 67: 755-779.
- Elliot, R.J., Aggoun, L. y Moore, J.B. 1995. *Hidden Markov Models – Estimation and Control*. Springer -Verlag, New York.
- Harte, D.S. 2005. Package "HiddenMarkov": Discrete Time Hidden Markov Models. Statistics Research Associates, Wellington. URL: www.statsresearch.co.nz/software.html
- Heckerman, D. 1996. *A tutorial on learning with Bayesian networks*, Technical Report MSR-TR-95-06, Microsoft Research: Redmon.
- Hill, M.O. 1973. The intensity of spatial pattern in plant communities. *Journal of Ecology* 61: 225-235.
- Kunsch, H., Geman, S. y Kehagias, A. 1995. Hidden Markov random fields. *The annals of applied probability*, 5(3): 577-602.
- MacDonald, I. L. y Zucchini, W. 1997. *Hidden Markov and Other Models for Discrete- Valued Time Series*. Chapman and Hall, London.
- Murphy, K. 1998. *Hidden Markov Model (HMM) Toolbox for Matlab*. URL: www.cs.ubc.ca/~murphyk/Software/HMM/hmm.html
- Novák, D., Cuesta-Frau, D., ani, T.AI, Aboy, M., Mico, P. y Lhotská, L. 2004. Speech Recognition Methods Applied to Biomedical Signals Processing. *Proceedings of the 26th Annual International Conference of the IEEE EMBS, San Francisco, CA*, pp. 118-121.
- Pearl, J. 1988. *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*, Morgan Kaufmann: San Mateo.
- Penny W.D., Roberts S.J. 1998. *Gaussian Observation Hidden Markov Models for EEG analysis*, Technical Report, Imperial College, London, TR-98-12.
- Rabiner, L.R. 1989. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. *Proceedings of the IEEE*, 77(2): 257-286.
- Renshaw, E. y Ford, E.D. 1984. The description of spatial pattern using two-dimensional spectral analysis. *Vegetatio* 56: 75-85.
- Ripley, B.D. 1978. Spectral analysis and the analysis of pattern in plant communities. *Journal of Ecology*, 66, pp. 965-981.
- Rodríguez, F. y Bautista, S. 2001. Patch-gap analysis of presence-absence data in vegetation transect using hidden Markov models, with application to the characterisation of post-fire plant pattern disturbance in a semiarid pine forest. En: C.A. Brebbia, Y. Villacampa y J.L. Usó, eds., *Ecosystems and Sustainable Development III, Advances in Ecological Sciences 10*, pp. 801-809. WIT Press, Southampton.
- Sansom, J. 1998. A hidden Markov model for rainfall using breakpoint data. *Journal of Climate* 11: 42-53.
- Sansom, J. 1999. Large scale variability of rainfall through hidden semi-Markov models of breakpoint data. *Journal of Geophysical Research* 104 (D24): 31631-31643.
- Sansom, J. y Thompson, C.S. 2003. Mesoscale spatial variation of rainfall through a hidden semi-Markov model of breakpoint data. *Journal of Geophysical Research* 108 (D8): 8379.
- Smyth, P. 1997. Belief networks, hidden Markov models, and Markov random fields: A unifying view. *Pattern Recognition*

Letters 18: 1261-1268.

Smyth, P., Heckerman, D. y Jordan, M.I. 1997. Probabilistic independence networks for hidden Markov probability models. *Neural Computation* 9(2): 227-269.

Stinchcombe, M. and White, H. 1998. Consistent specification testing with nuisance parameters present only under the alternative. *Econometric Theory* 14: 295-324.

Tucker, B.C. y Anand, M. 2005. On the use of stationary versus hidden Markov models to detect simple versus complex ecological dynamics. *Ecological Modelling* 185: 177-193.

Ver Hoef, J.M. y Cressie, N. 1997. Using hidden Markov chains and empirical Bayes change-point estimation for transect data. *Environmental and Ecological Statistics* 4: 247-264.

Viovy, N. y Saint, G. 1994. Hidden Markov Models Applied to Vegetation Dynamics Analysis Using Satellite Remote Sensing. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 32(4): 906-917.

Visser, I., Raijmakers M.E.J. y Molenaar P.C.M. 2000. Confidence intervals for hidden Markov model parameters, *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology* 53: 317-327.

Visser, I., Raijmakers, M.E.J. y Molenaar, P.C.M. 2002. Fitting hidden Markov models to psychological data. *Scientific Programming* 10: 185-199.

Viterbi, A.J. 1967. Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimal decoding algorithm. *IEEE Transactions on Information Theory* 13: 260-269.