

Competencia matemática y PISA (OCDE,2003)

Programme for International Student Assessment

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC)- Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) (2005) PISA 2003. Pruebas de matemáticas y de Solución de Problemas. Monografía SUMA 03

Noción de *alfabetización matemática*:

Capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones



Capacidad de enfrentarse con los problemas cotidianos más variados por medio de las matemáticas

(el modo en el que los estudiantes de 15 años actúan como ciudadanos informados, reflexivos y consumidores inteligentes)

Competencia Matemática y PISA (OCDE,2003)

1

La *alfabetización matemática* es la capacidad del individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2003)

El término alfabetización se ha elegido para subrayar que el conocimiento matemático y las destrezas, tal como están definidas en el currículo tradicional de matemáticas, no constituye el foco principal de atención. Por el contrario, el énfasis está en el conocimiento matemático puesto en funcionamiento en una multitud de contextos diferentes, por medios reflexivos, variados y basados en la intuición personal, es decir, en las competencias y capacidades personales.

Competencia Matemática y PISA (OCDE,2003)

2

Matematizar se identifica con la resolución de problemas

Fases en el proceso de resolución de problemas (Dewey, 1933)

1. Se siente una dificultad: localización de un problema
2. Se formula y define la dificultad: delimitar el problema en la mente del sujeto
3. Se sugieren posibles soluciones: tentativas de solución
4. Se obtiene consecuencias: desarrollo o ensayo de soluciones tentativas
5. Se acepta o rechaza la hipótesis puesta a prueba

Fases de *Polya* (1945) del proceso de resolución de un problema

1. Comprender el problema
2. Concebir un plan
3. Ejecutar el plan
4. Examinar la solución obtenida

Competencia Matemática y PISA (OCDE,2003)

3

PISA (OCDE, 2003) caracteriza en cinco *fases la actividad de hacer matemáticas*

1. Comenzar con un problema situado en la realidad
2. Organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos
3. Despegarse progresivamente de la realidad mediante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar
4. Resolver el problema
5. Proporcionar sentido a la solución, en términos de la situación inicial

Competencia Matemática y PISA (OCDE,2003)

4

En el proceso de hacer matemáticas conocido como *matematización* se identifican dos procesos:

➤ **Matematización horizontal**: traducir los problemas desde el mundo real al matemático

➤ **Matematización vertical**: una vez traducido a una expresión matemática se pueden plantear cuestiones en las que utiliza conceptos y destrezas matemáticas

Competencia Matemática y PISA (OCDE,2003)

5

La *matematización horizontal* se sustenta sobre actividades como:

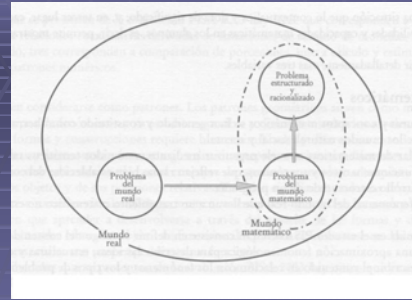
- Identificar las matemáticas que puedan ser relevantes respecto al problema
- Representar el problema de modo diferente
- Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones
- Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos
- Traducir el problema a un modelo matemático
- Utilizar herramientas y recursos adecuados

Competencia Matemática y PISA (OCDE,2003)

6

La **matematización vertical** incluye:

- Utilizar diferentes representaciones
- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos, combinar e integrar modelos
- Argumentar
- Generalizar



Conexiones entre la matematización horizontal y vertical (PISA; OCDE, 2003)

LA OFERTA DE EMPLEO

En un periódico local han aparecido unas ofertas de empleo para aseo y limpieza. La pizzería A paga a cada repartidor 80€ por pizza entregada y cobra un sueldo fijo de 60€ al mes. La pizzería B paga 60€ por pizza entregada y 24.000€ al mes.

¿Cuál oferta le parece mejor?

Resuelve y explica por qué la elección es la mejor.

Resuelve y Explica por qué la elección es la mejor

Pizzería A	Pizzería B
80€ pizza 60€ sueldo fijo	60€ pizza 24.000€ sueldo fijo

Suponemos que la pizzería A y B han repartido la misma cantidad de pizzas al mes.

Pizzería A: 60€ sueldo fijo + 80€ por pizza
 Pizzería B: 24.000€ sueldo fijo + 60€ por pizza

¿Cuál oferta le parece mejor?

Resuelve y explica por qué la elección es la mejor.

Matematización horizontal

Identificar las matemáticas que puedan ser relevantes respecto al problema
 Representar el problema de modo diferente
 Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal

Resuelve y Explica por qué la elección es la mejor

En la pizzería A le pagan: 80€ por pizza + 60€ sueldo fijo

En la pizzería B le pagan: 60€ por pizza + 24.000€ sueldo fijo

¿Cuál oferta le parece mejor?

Resuelve y explica por qué la elección es la mejor.

Resuelve y Explica por qué la elección es la mejor

En la pizzería A le pagan: 80€ por pizza + 60€ sueldo fijo

En la pizzería B le pagan: 60€ por pizza + 24.000€ sueldo fijo

¿Cuál oferta le parece mejor?

Resuelve y explica por qué la elección es la mejor.

Matematización vertical

Utilizar diferentes representaciones

- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos, combinar e integrar modelos
- Argumentar
- Generalizar

El paso posterior en la resolución de un problema implica **reflexionar sobre el proceso completo de matematización y sus resultados**.

Los estudiantes deberán interpretar los resultados con actitud crítica y validar el proceso completo.

Algunos aspectos del **proceso de validación y reflexión** son:

- Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos
- Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados
- Criticar el modelo y sus límites

Bea: Aquí me pide (leyendo) la expresión que permite hallar el área de la sección y el volumen total del canal. El área es Para encontrar el área ... (escribiendo)

$$a = a_0 + 2ax$$

$$a = (4x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot x$$

2:04
E: ¿qué estás haciendo?
Bea: el área ... (y sigue calculando) ...

$$a = 16x^2 + 12x$$

$$a = 16x^2 + 12x$$

2:30
Bea: Ya está!

reflexionar sobre el proceso completo de matematización y sus resultados

Los estudiantes deberán interpretar los resultados con actitud crítica y validar el proceso completo

Variables consideradas en PISA para construir un banco de ítems que cubra las fases en el proceso de matematización:

-El **contenido matemático** al que se refiere los problemas o tareas propuestas (cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, incertidumbre)

-Las **competencias** que deben activarse para conectar el mundo real, donde surge el problema, con las matemáticas que se deben utilizar para su resolución (pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones)

-Las **situaciones y los contextos** utilizados como fuente de materiales y de estímulos y en los que se localiza el problema (situaciones personales, públicas, científicas)

TIPOS DE COMPETENCIAS

1. Pensar y razonar
2. Argumentar
3. Comunicar
4. Modelar
5. Plantear y resolver problemas
6. Representar
7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones

Pensar y razonar incluye las capacidades de

- Plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿Cuántos hay?, ¿cómo encontrarlo, Si es así ... entonces ...;
- Conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones
- Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas)
- Entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites

Argumentar incluye

- Conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático
- Seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos
- Disponer de sentido para la heurística (¿Qué puede (o no) ocurrir y por qué?)
- Crear y expresar argumentos matemáticos

Comunicar incluye

- Expresarse en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita
- Entender enunciados de otras personas sobre estas materias en forma oral y escrita

Modelar incluye

- Estructurar el campo o situación que va a modelarse
- Traducir la realidad a una estructura matemática
- Interpretar los modelos matemáticos en términos reales
- Trabajar con un modelo matemático
- Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados
- Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones)
- Dirigir y controlar el proceso de modelización

Plantear y resolver problemas incluye

- Plantear, formular y definir tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados)
- Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías

Representar incluye

- Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre distintas representaciones
- Escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito

Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones incluye

- Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural
- Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal
- Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas
- Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos

NIVELES DE COMPLEJIDAD DE LOS ITEMS

(diferentes tipos de y niveles de demanda cognitiva. Nivel de complejidad cognitiva que se requiere de los alumnos)

Primer nivel: Reproducción y procedimientos rutinarios

Segundo nivel: Conexiones e integración para resolver problemas estándar

Tercer nivel: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales

Primer nivel: Reproducción y procedimientos rutinarios

Ejercicios relativamente familiares que requieren la reiteración de los conocimientos practicados (recuerdos de propiedades, uso de procedimientos rutinarios, aplicación de algoritmos, realización de operaciones sencillas,

Esquema de escalera

Problema 29 ESQUEMA DE ESCALERA

Roberto construye un esquema de una escalera usando cuadrados. He aquí los pasos que sigue:

Como se puede ver, utiliza un cuadrado para el Nivel 1, tres cuadrados para el Nivel 2, y seis para el Nivel 3. ¿Cuántos cuadrados en total deberá usar para construir hasta el cuarto nivel?

Respuesta:

Pruebas de Matemáticas

Esquema de escalera: problema 29

País	Asíctico	%	Puntuaciones:
Subtotal	Cantidad	OCDE	44,2
Situación	Educativa	Español	49,4
Componente	Reproducción	Cantidad y Lenguaje	22,9
Dificultad	484 (nivel 3)	Cantidad	44,5
	País Valor		71,5

Máxima puntuación Código I: 32.

Ninguna puntuación Código de: Otras respuestas. Código 9: Sin respuesta.

66 PISA 2003

Segundo nivel: Conexiones e integración para resolver problemas estándar

Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación

Carpintero

Problema 8 CARPINTERO

Un carpintero tiene 12 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un patio en el patio. Está considerando las siguientes formas para el patio.

¿Cuál es el área de la valla? No para indicar a, para valla dentro, se puede o no se puede construir el patio con los 12 metros de madera.

Diagrama del patio	Área construida (metros cuadrados)
Diagrama A	32 / No
Diagrama B	32 / No
Diagrama C	32 / No
Diagrama D	32 / No

PRUEBAS DE MATEMÁTICA

Carpintero pregunta 8

Subcategoría	Asientos	%
Subcategoría: Espacio y forma	OCDE	25,2
Situación: Educativa	España	12,9
Competencia: Conexiones	Cataluña y León	13,4
Dificultad: 687 (nivel 6)	Cataluña	7,2
	País Vasco	16,2

Puntuaciones:
Máxima puntuación
Código 1: Exactamente cuatro correctas.
Diseño A: SI
Diseño B: No
Diseño C: SI
Diseño D: SI

Ninguna puntuación
Código 5: Tres o menos correctas.
Código 9: Sin respuesta.

36 PISA 2003

Competencia Matemática y PISA (OCDE 2003) 25

Tercer nivel: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales (Reflexión)

Los ítems requieren cierta comprensión y reflexión, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos. Exige generalización y explicación o justificación de los resultados

Terremoto

Programa 21: TERREMOTO

Se estudió un documental sobre terremotos y la frecuencia con que hacen sucesos. El documental incluía un debate sobre la posibilidad de producir los terremotos.

Un geólogo dijo: En los próximos veinte años, la probabilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zel es dos de tres.

¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

A. $\frac{2}{3}$ es $22=13,3$, por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la Ciudad de Zel.

B. $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zel en algún momento en los próximos 20 años.

C. La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zel en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

D. No se puede decir lo qué sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

Competencia Matemática y PISA (OCDE 2003) 26

PRUEBAS DE MATEMÁTICA

Terremoto pregunta 21

Subcategoría	Asientos	%
Subcategoría: Incertidumbre	OCDE	46,3
Situación: Científica	España	38,8
Competencia: Reflexión	Cataluña y León	43,1
Dificultad: 537 (nivel 6)	Cataluña	46,2
	País Vasco	43,3

Puntuaciones:
Máxima puntuación
Código 1: C. La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zel en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

Ninguna puntuación
Código 2: Otras respuestas.
Código 9: Sin respuesta.

48 PISA 2003

Competencia Matemática y PISA (OCDE 2003) 27

Referencias

INECSE (2004 a). *Aprender para el mundo de mañana. Resumen de resultados PISA 2003*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia

INECSE (2004 b). *Evaluación PISA 2003. Resumen de los primeros resultados en España*. Madrid: Ministerio de Educación y ciencia.

Competencia Matemática y PISA (OCDE 2003) 28