Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Características de la competencia docente mirar profesionalmente de los estudiantes para maestro en relación al razonamiento proporcional

Àngela Buforn Lloret

Tesis Doctorales

UNIVERSIDAD de ALICANTE

www.eltallerdigital.com

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Departamento de Innovación y Formación Didáctica

Facultad de Educación

CARACTERÍSTICAS DE LA COMPETENCIA DOCENTE MIRAR PROFESIONALMENTE DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO EN RELACIÓN AL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

ÀNGELA BUFORN LLORET

Tesis presentada para aspirar al grado de

DOCTORA POR LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

MENCIÓN DE DOCTORA INTERNACIONAL

DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA: Didáctica de la Matemática. Didáctica de la Lengua y la Literatura, Didáctica de la Expresión Musical

Dirigida por:

CENEIDA FERNÁNDEZ VERDÚ Y SALVADOR LLINARES CÍSCAR

Financiación:

Referencia de la ayuda: BES-2015-074424

Proyecto EDU2014-54526-R. Aprendizaje de los estudiantes para maestro y futuros profesores de matemáticas: caracterización del desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente"

AGRAÏMENTS

En primer lloc, m'agradaria mostrar el meu agraïment als directors d'aquesta tesi, la Dra. Ceneida Fernández i el Dr. Salvador Llinares, per l'interès, la dedicació, la confiança i el temps que m'han dedicat i que han fet possible la finalització d'aquest treball. Gràcies per haver-me guiat des dels inicis i per haver-me acompanyat durant aquest llarg camí.

També m'agradaria donar les gràcies a tots els membres de l'àrea de Didàctica de les Matemàtiques del Departament d'Innovació i Formació Didàctica de la Universitat d'Alacant. Gràcies pels comentaris i aportacions en els seminaris d'investigació durant aquests anys, i gràcies pels bons moments passats fora de l'àmbit professional. M'agradaria fer una menció especial a Pere, per acompanyar-me com a doctorant al llarg d'aquest recorregut i per compartir tots els moments que hem passat junts.

Gràcies a Laurinda Brown i Alf Coles per acollir-me durant l'estada d'investigació al Graduate School of Education de la Universitat de Bristol. Us done les gràcies per totes les reunions setmanals que em vau dedicar durant els tres mesos i per les contribucions científiques que en van sorgir per a aquest treball. Gràcies també als membres del Departament de Didàctica de les Matemàtiques de la Universitat de Sevilla per haver-me fet sentir una més durant el mes que vaig estar en el seu centre, i en especial a Gloria Sánchez Matamoros pel temps dedicat i pels suggeriments durant l'anàlisi de les dades i els primers resultats. I gràcies als membres del grup d'investigació GIPEAM de la Universitat Autònoma de Barcelona per acollir-me durant tres mesos i animar-me durant el final d'aquest camí, i en especial a Edelmira Badillo, d'aquesta universitat i Miguel Àngel Montes de la Universitat de Huelva, per donar-me suport i aconsellar-me en l'organització dels resultats d'aquest treball.

No puc concloure aquest apartat sense mostrar els agraïments més sincers a ma mare i a mon pare per haver-me donat l'oportunitat d'estudiar i d'animar-me a continuar en tot el que m'he anat plantejant al llarg de la carrera acadèmica. En part, gràcies a vosaltres he arribat a aquest punt. I com no, no puc deixar de costat a qui ha sigut la meua companya d'aventures des del moment que vam nàixer. Pepa, gràcies per tot el teu suport al llarg de tots aquest anys, sense la teua escolta i consells tot hagués sigut més difícil.

També vull donar les gràcies a alguns bons amics que m'han acompanyat durant tot aquest camí. Vicent i Ana, gràcies per compartir moments que sols els que estem en aquesta situació podem entendre; M. Àngels, gràcies pel teu interès i ànims sobretot durant els últims mesos; Almu i Adri, gràcies per tots els bon moments i les converses durant l'estada a Bristol i actualment; i Jorge, gràcies per tota l'ajuda que m'has oferit des dels inicis fins a la finalització d'aquest treball.

Per últim, i no per això menys important, vull donar les gràcies a Fakun. Gràcies per la teua ajuda, el teu suport i la teua paciència. Però sobretot pels teus consells per a fer que tot aquest procés fóra més fàcil i que em permetera gaudir-ho com ho he fet.

ÍNDICE

INTRODUCTION

INTRODUCTION

In recent years, research on the professional development of mathematics teachers has highlighted how important it is for teachers to identify relevant aspects of teaching and learning situations. It is essential math teachers possess this skill. This research indicates that the skill of *professional noticing* of the teaching-learning of mathematics rests on the ability to identify the relevance of teaching-learning situations in mathematics and interpret them in order to make instructional decisions (Mason, 2002). A particular aspect of this teaching skill is to recognise evidence of students' understanding of specific mathematical topics to make relevant teaching decisions that highlight the relationship between the mathematical knowledge and the knowledge of students' mathematical thinking. The hypothesis that underlies this type of research is that limited knowledge of mathematical content makes it difficult for teachers to interpret their students' responses and thus make the right decisions on what actions to adopt.

These research findings show that the ability of the pre-service teacher to identify the mathematical elements of the problems that their students are solving, also increases their capacity to recognise students' understanding and propose new activities.

An important mathematical topic in the curriculum of Primary and Secondary Education is the development of proportional reasoning. In this field, notions of reason and proportion are required, so there is a close relationship between its conceptual understanding and the procedures used in solving problems. Sometimes a procedural approach conceals a lack of understanding of the elements and relationships involved. For example, students use expressions such as "when *more* is *more* or *less* is *less*" or "when using the rule of three" to describe covariate relationships between sequences of quantities, thus demonstrating that they have simply memorised one "recipe" or an algorithm to solve a certain problem (Reyes-Gasperini, Cantoral and Montiel, 2015). However, to develop proportional reasoning, it is necessary to develop a variety of concepts and processes (Lamon, 2005, 2007, Pitta-Pantazi and Christou, 2011). In this research, these concepts and processes are classified into three sub-domains that involve 12 sub-constructs linked to the development of proportional reasoning (Buforn and Fernández, 2014a; Pitta-Pantazi and Christou, 2011): fractional scheme, distinguishing between proportional and non-proportional situations, and interpretation of ratios in comparison situations. Taking these sub-constructs into account for teaching and for recognizing evidence of student's understanding is a relevant part of the teacher's professional task.

Based on these previous references, our study falls in the line of research focused on examining and characterizing the skill of noticing students' mathematical thinking (*professional noticing of children's mathematical thinking*, Jacobs, Lamb and Philipp, 2010), applied in particular to the specific mathematical domain of proportional reasoning (Lamon, 2005, 2007, Pitta-Pantazi and Christou, 2011, Vergnaud, 1983, 1988). The aim of this research is to characterise how pre-service teachers can solve mathematical problems relating to sub-constructs linked to the development of proportional reasoning, and then relate this capability to the way in which they interpret students' responses to these problems (recognizing evidence of students' understanding of linked elements in the problems) as well as how they make decisions in order to support their students' conceptual development.

Below we describe the content of each chapter.

In the first chapter we present the research problem. Firstly, we review literature on the teachers' mathematical knowledge, and in particular on the knowledge of pre-service teachers in the domains related to proportional reasoning: fractional scheme, distinguishing between proportional and non-proportional situations, and interpretation of ratios in comparison situations. Secondly, we review the skill of noticing, and more specifically the skill of noticing students' mathematical thinking. In this section, different studies are described, focusing on the contexts and tools used to develop the skill of noticing, and levels of development of the skill of noticing. Finally, we review the relationship between the mathematical knowledge and the skill of noticing, and present research results on how teachers interpret students' mathematical thinking in the domain of proportionality. This review of literature brings to light the need for further research on how teachers use the mathematical knowledge when interpreting primary school students' responses to fractional scheme problems, distinguishing between proportional and non-proportional situations, and the interpretation of ratios in comparison situations, which are all involved in the development of proportional reasoning.

The second chapter presents the theoretical framework of this research based on the use of the mathematical knowledge by teachers to understand students' mathematical thinking. It integrates three perspectives: the teacher knowledge (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT, Ball, Thames and Phelps, 2008), the skill of noticing (Jacobs et al., 2010) and the conceptualization of what can be considered a conceptual breakthrough in learning a mathematical topic (*Key Developmental Understanding*, KDU, Simon, 2006). Thus, we describe the domains of teacher knowledge based on the construct of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) and the skill of noticing students' mathematical thinking (Jacobs et al., 2010). Using these theoretical references in the context of the specific mathematical topic of this research implies that we must consider information enabling to characterise the development of proportional reasoning: fractional scheme and situations of proportionality (distinguishing proportional and non-proportional situations, concepts of reason and proportion). For this reason, 12 sub-constructs related to the development of proportional reasoning organised in three domains are described: fractional scheme, distinguishing between proportional and non-proportional situations and interpretation of ratios in comparison situations. Finally, since the research problem implies characterizing how pre-service teachers recognise evidence of understanding mathematical elements within the three domains under consideration, in relation to proportional reasoning, giving an account of the role of mathematical knowledge and how action decisions derive from this, we describe the *Key Developmental Understanding* (KDU) construct introduced by Simon (2006) as an analytical element.

In the third chapter we describe how the study was designed. First, we present participants and their context. Second, we describe instruments used for data collection and the characteristics of the two questionnaires. Questionnaire 1 focused on solving problems related to sub-constructs linked to proportional reasoning by pre-service teachers, and Questionnaire 2 focused on the interpretation of student's responses to these problems and on decision making based on the understanding identified in the responses. Finally, the four phases (and sub-phases) of data analysis are presented: (i) the first one describes the way in which we analysed the specialised knowledge of different sub-constructs linked to proportional reasoning; (ii) in the second, we describe how pre-service teachers recognise characteristics of student's understanding and how we generate pre-service teachers' profiles with similar behaviours when it comes to recognizing student's understanding of the different sub-constructs involved in the development of proportional reasoning; (iii) the third describes how we analyse decisions of action proposed by pre-service teachers; (iv) we finally describe how we perform the last phase of the analysis centred on characterizing the relationship between pre-service teachers' mathematical knowledge when solving mathematical problems and how they recognise evidence of student's understanding across the different sub-constructs.

The fourth chapter presents the results obtained organised into three main sections. The first section is dedicated to results concerning the resolution of the problems in Questionnaire 1 by pre-service teachers, considering success levels, the strategies used and pre-service teachers' behavioural profiles when solving problems related to the 12 sub-constructs. These profiles allow us to identify characteristics of specialised knowledge of mathematical of pre-service teachers relating to the three domains under study (fractional scheme, distinguishing between proportional and non-proportional situations and interpretation of ratios in comparison situations). Second, we described the characteristics of how pre-service teachers notice students' mathematical thinking. In addition, we present characteristics of the relationship between the different skills consisting in identifying, interpreting and deciding. This allows us to generate pre-service teachers' profiles in relation to how they identify and use mathematical elements to recognise students' understanding. Third, we present results on the relationship between mathematical knowledge (Questionnaire 1) and how they interpret students' mathematical thinking (Questionnaire 2).

In the fifth chapter we draw conclusions and discuss results. Firstly, we discuss results on pre-service teachers' mathematical knowledge when solving mathematical problems related to sub-constructs linked to the development of proportional reasoning. Second, we discuss our findings and relate them to results of other research in relation to the characteristics of the skill of noticing students' mathematical thinking: the relationship between identifying and recognizing, and the relationship between identifying, recognizing, and deciding. Having established these relationships, and based on this fresh knowledge, we characterise different stages in pre-service teachers' learning processes as they learn to identify key mathematical elements in problems in order to recognise evidence of students' understanding. Third, we relate our results concerning this relationship (between pre-service teachers' mathematical knowledge when solving mathematical problems and their interpretation of students' mathematical thinking) with findings from other studies. This enables us to identify what our research contributes to what we already know in the field. These results provide information on the relationship between the specialised content knowledge and the professional task of interpreting student responses (skill of noticing). We conclude with implications of this study on teacher training and provide perspectives for future research.

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

Diferentes líneas de investigación han surgido durante los últimos años para estudiar el conocimiento que necesita un maestro para enseñar y las competencias docentes que debe desarrollar para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje. En nuestro caso, nos centraremos en la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (*professional noticing of children's mathematical thinking*; Jacobs et al., 2010) como un contexto de uso del conocimiento matemático para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT; Ball et al., 2008).

En este capítulo, organizado en tres secciones, se muestran algunos trabajos que consideramos relevantes para los objetivos de nuestra investigación. La primera se centra en el conocimiento matemático del profesor, y en concreto, el conocimiento matemático del profesor sobre el razonamiento proporcional. La segunda sección se centra en la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. En esta sección se revisan diferentes investigaciones centradas en la identificación de las características de esta competencia y en contextos para su desarrollo. Finalmente, la tercera sección se centra en la relación entre el conocimiento de matemáticas y las destrezas de identificar, reconocer/interpretar y decidir que configuran la competencia docente mirar profesionalmente y en investigaciones que muestran aspectos particulares de esta competencia en el dominio de la proporcionalidad.

1.1. CONOCIMIENTO DE MATEMÁTICAS PARA ENSEÑAR

Caracterizar el conocimiento de matemáticas que deben tener los maestros es una tarea relevante para la mejora de los procesos de formación de maestros y para una mejor comprensión de sus procesos de aprendizaje. En los últimos años se han desarrollado diferentes iniciativas para caracterizar este conocimiento bajo la hipótesis de la existencia de una relación entre la calidad del conocimiento de matemáticas del maestro y el aprendizaje de sus estudiantes (Ball et al., 2008; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005). Se asume que el conocimiento de matemáticas del maestro es clave en el desarrollo de competencias docentes relativas a la organización del contenido matemático para enseñar y a la interpretación de la manera en la que los estudiantes de primaria aprenden las matemáticas y por tanto, un conocimiento limitado del contenido matemático dificultará a los maestros realizar la tarea de enseñar matemáticas (Fernández, Llinares y Valls, 2013; Rivas, Godino y Castro, 2012). El foco de estas iniciativas es caracterizar lo que los estudiantes para maestro necesitan conocer del contenido matemático y cómo lo conocen para realizar de manera efectiva el trabajo de enseñar matemáticas. Preguntarse sobre cómo los estudiantes para maestro deben conocer el contenido matemático traslada la atención hacia las relaciones entre diferentes dominios del conocimiento de matemáticas (Ekawati, Lin y Yang, 2015; Hill, Ball y Schilling, 2008; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007).

Así, Ribeiro, Badillo, Sánchez-Matamoros, Montes y de Gamboa (2017) entienden que el conocimiento matemático para enseñar ayuda a los maestros a desarrollar su práctica, conceptualizando e implementando tareas, escuchando los comentarios de los estudiantes, e interpretando para tomar decisiones para continuar en cada momento. Estas decisiones también están relacionadas con el conocimiento que los maestros tienen sobre las dificultades de los estudiantes o sobre lo que les parece más fácil. Del mismo modo, Rivas et al. (2012) entienden que el conocimiento de matemáticas para enseñar interviene en la realización de la tarea profesional del maestro de analizar las producciones de sus alumnos. En este sentido, el papel que desempeña el conocimiento matemático para la enseñanza del profesor en la resolución de tareas profesionales define su competencia docente. En particular, la competencia docente *mirar profesionalmente* las situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Como en nuestra investigación nos centramos en examinar y caracterizar el conocimiento del maestro para enseñar y cómo es usado para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes en los tres dominios considerados que forman parte del desarrollo del razonamiento proporcional (esquema fraccionario, distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, y comparación de razones), en la siguiente subsección se realiza una revisión de los estudios centrados en el conocimiento del profesor sobre estos dominios.

1.1.1. Conocimiento del profesor sobre el esquema fraccionario y el razonamiento proporcional

Lamon (2005) afirma que el razonamiento proporcional es multifacético y se desarrolla mediante la integración de diferentes sub-constructos que incluye las interpretaciones de los números racionales (parte-todo, medida, cociente, operador, razón) y diferentes formas de razonar como el razonamiento up and down (entendido como el uso de la fracción unitaria como unidad iterativa para reconstruir la unidad o representar otras fracciones), el proceso unitizing (construcción de una unidad de referencia que permite la comparación), el pensamiento relacional y la covarianza entre cantidades. Sin embargo, los estudios previos nos muestran que los estudiantes para maestro y profesores tienen dificultades con estos significados y formas de razonar (los significados y las formas de razonar son los sub-constructos considerados en los tres dominios de nuestra investigación).

Así, la construcción del significado de unidad (en la interpretación de la fracción como parte-todo) no es fácil para los estudiantes para maestro. Investigaciones previas han mostrado las dificultades que tienen los estudiantes para maestro identificando e iterando la fracción unitaria u otra fracción para reconstruir el todo (unidad) dada una parte (Buforn y Fernández, 2014a, 2014b; Lee, Brown y Orrill, 2011; Pitta-Pantazi y Christou, 2011; Tzur, 1999). Buforn y Fernández (2014a, 2014b) mostraron las dificultades que tienen los estudiantes para maestro para manejar el significado multiplicativo de la idea de operador inverso ($a/b \times b/a=1$) ya que generaban una aproximación aditiva en un contexto de ampliaciones y reducciones en lugar de aplicar el operador inverso para reconstruir la unidad y poder volver al tamaño original. Pitta-Pantazi y Christou (2011) indicaron que los estudiantes para maestro tenían dificultades en tareas que implicaban la interpretación como medida (uso de la recta numérica como modo de representación) y el razonamiento up and down. Estas tareas requieren manejar las fracciones unitarias y la reconstrucción de la unidad.

Por otra parte, los estudios han generado características relativas a la comprensión de los estudiantes para maestro en situaciones de comparación de razones (Gómez y García, 2014; Livy y Vale, 2011; Monje, Pérez-Tyteca y Gómez, 2013), en dotar de sentido a las estrategias usadas para resolver problemas de proporcionalidad directa (Valverde y Castro, 2009) y en distinguir problemas proporcionales y no proporcionales (Balderas, Block y Guerra, 2014; Buforn y Fernández, 2014a). Por ejemplo, Gómez y García (2014) estudiaron las dificultades manifestadas por estudiantes para maestro al resolver problemas de comparación de razones y observaron que los estudiantes para maestro tuvieron dificultades para interpretar las razones (magnitudes que se están comparando). Por otro lado, Livy y Vale (2011) realizaron un estudio para examinar el conocimiento del contenido matemático que tenían los estudiantes para maestro en diferentes tópicos matemáticos (fracciones, decimales, porcentajes, razones, espacio, área, volumen, medida, azar y estadística). Las tareas relacionadas con el concepto de razón demandaban una comparación todo-todo en un contexto de escalas y los estudiantes para maestro tuvieron que discutir estrategias de pensamiento de los estudiantes, errores comunes y conceptos erróneos de sus respuestas. Los resultados mostraron que estas tareas fueron difíciles para los estudiantes para maestro (solo un 5% de los estudiantes para maestro de su estudio resolvieron correctamente las tareas relacionadas con el concepto de razón).

Valverde y Castro (2009) estudiaron el razonamiento proporcional que tienen los maestros en formación al resolver problemas de proporcionalidad directa con diferentes niveles de dificultad. Los resultados muestran un predominio de un razonamiento pre-proporcional dado que a pesar de usar estrategias y procedimientos correctos para la resolución de los problemas, se percibía una falta de reconocimiento de las propiedades estructurales de una proporción (dificultades para reconocer el operador escalar, las relaciones funcionales o la relación de orden entre dos razones sin la necesidad de hallar el valor de la razón). Por otra parte, Buforn y Fernández (2014a) realizaron un estudio para identificar las características del conocimiento de matemáticas de un grupo de estudiantes para maestro de primaria indicando que tienen un conocimiento limitado puesto de manifiesto por la dificultad en identificar situaciones no proporcionales, en desarrollar algunas formas de razonar en relación a la construcción de una unidad (proceso unitizing) y en manejar el significado multiplicativo de la idea de razón. El análisis de las respuestas permitió agrupar a los estudiantes para maestros en cuatro perfiles: 1) dar respuestas basadas en un razonamiento cualitativo, 2) realizar cálculos: regla de tres, 3) manejar los significados de las fracciones, excepto el de operador y 4) inicio de desarrollo del razonamiento proporcional.

Balderas et al. (2014) estudiaron cómo un grupo de maestros de secundaria argumentaba la presencia o ausencia de la proporcionalidad en problemas con diferentes situaciones ya que esto influye a la hora de enseñar el tema de proporcionalidad. El cuestionario presentaba tareas proporcionales de valor perdido, de comparación, de reducciones (idea de operador) y escalas, además de tareas aditivas y tareas con relaciones afines. El estudio se centró en tres aspectos: técnicas o estrategias usadas para resolver los problemas, justificaciones de las técnicas usadas, y los conocimientos relativos a la enseñanza. Respecto a la resolución del cuestionario y las estrategias usadas, los resultados están en línea con la investigación de Fernández, Llinares y Valls (2012) y Buforn y Fernández (2014a) en estudiantes para maestro de educación primaria, es decir, tuvieron mayor éxito en los problemas de valor perdido proporcionales, y mostraron dificultades con los aditivos, pero en general fue favorable. Sin embargo, en la parte de las argumentaciones los maestros mostraron serias deficiencias en el momento de identificar la proporcionalidad y argumentar su presencia o ausencia.

Estas investigaciones han examinado la habilidad de los maestros para resolver problemas que implican la idea de unidad y la constitución de unidades múltiples (Buforn y Fernández, 2014b; Lee et al., 2011), la interpretación de la comparación de razones (Gómez y García, 2014; Livy y Vale, 2011; Monje et al., 2013), la habilidad de resolver problemas proporcionales (Post, Harel, Behr y Lesh, 1991; Rivas et al., 2012) y su habilidad para diferenciar entre situaciones proporcionales y no proporcionales (Buforn y Fernández, 2014a; Simon y Blume, 1994). Estas investigaciones se centran en aspectos concretos del razonamiento proporcional, sin embargo, no hay muchos estudios sobre el conocimiento de los maestros que tengan en cuenta todos los sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional y si realmente contribuyen a su desarrollo (Buforn y Fernández, 2014a; Pitta-Pantazi y Christou, 2011). Teniendo en cuenta los pocos estudios centrados en examinar todos los sub-constructos vinculados al desarrollo del razonamiento proporcional, nosotros consideramos que es necesario examinar características globales considerando varios de estos aspectos simultáneamente como una manera de describir dominios más amplios de conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro.

1.2. COMPETENCIA DOCENTE MIRAR PROFESIONALMENTE

Aprender a mirar de una manera profesional lo que está pasando en las clases de matemáticas y dotarlas de significado es necesario para permitir a los futuros maestros conceptualizar la enseñanza de las matemáticas (Fernández et al., 2012). La idea que subyace a este planteamiento es que mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas implica discernir los detalles relevantes de una situación para dotarlos de sentido considerando el objetivo de aprendizaje matemático pretendido (Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002). Esta competencia está vinculada a la capacidad de identificar e interpretar aspectos de la enseñanza de las matemáticas para fundamentar las decisiones de acción como maestro. Por tanto, la mirada profesional diferencia a un profesor de matemáticas de alguien que no lo es, y viene caracterizada por el modo y el contexto de uso del conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas en determinadas situaciones (Eraut, 1996).

Esta competencia ha sido conceptualizada desde diferentes perspectivas (Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002), sin embargo, la idea común en todas ellas es que mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas implica trasladarse desde la descripción de acciones del profesor a las conceptualizaciones de los estudiantes y desde comentarios evaluativos a comentarios interpretativos basados en evidencias (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; van Es, 2011).

Un aspecto particular de esta competencia, es la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, que ha sido conceptualizada a través de la interrelación de tres destrezas: identificar los elementos matemáticos importantes en las estrategias de los estudiantes; interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes y decidir qué tareas proponer a continuación que permitan el progreso conceptual del estudiante (Jacobs et al., 2010). Ser capaz de entender y analizar la resolución de los alumnos a los problemas matemáticos es necesario para que los maestros o profesores puedan adaptar la enseñanza a las necesidades de sus alumnos. Es decir, reconocer y responder de forma apropiada al pensamiento matemático de los estudiantes es una de las principales tareas del maestro para enseñar matemáticas (NTCM, 2000). En este sentido, Ball (1990) enfatiza que los maestros deberían de ir más allá del "bien o mal" cuando analizan respuestas de estudiantes, para ayudarles a comprender.

En los últimos años, varios son los autores que investigan la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes tanto en estudiantes para maestro como en maestros, ya que esto puede repercutir en la enseñanza-aprendizaje de los alumnos. La caracterización y análisis de esta competencia docente, así como de su desarrollo, es foco de atención en el ámbito de la Educación Matemática. Así, a lo largo de la última década, las investigaciones en este ámbito han estudiado la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en diferentes dominios matemáticos y contextos. Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) organizan estas investigaciones según las destrezas analizadas (identificar, interpretar y decidir), los materiales usados (vídeos, episodios de clase, respuestas escritas de estudiantes, etc.), el instrumento usado (cuestionarios, entrevistas, test, observación de clases), los participantes del estudio (pre-servicio o en servicio), el nivel educativo (infantil, primaria, secundaria o universitario), y los resultados obtenidos. Stahnke et al. (2016) concluyen que los resultados de estos estudios subrayan la capacidad de los profesores para identificar errores e interpretar las respuestas de los estudiantes y proporcionan información para mejorar la habilidad de los estudiantes para maestro en analizar el pensamiento de los estudiantes.

En esta investigación no pretendemos hacer un estudio exhaustivo de toda la investigación llevada a cabo hasta ahora sobre la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, sino que se expondrán aquellos trabajos que consideramos relevantes en relación con las características y objetivos de nuestra investigación. Apoyándonos en la organización propuesta por Sthanke et al (2016) consideramos las investigaciones previas relacionadas con la conceptualización y desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en relación a:

- Contextos y herramientas para desarrollar esta competencia.
- Características y niveles de desarrollo de la competencia en distintos dominios matemáticos.

1.2.1. Contextos y herramientas para desarrollar la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

Investigaciones previas indican que el uso de diferentes contextos y herramientas pueden ayudar a los estudiantes para maestro a desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Por ejemplo, el uso de vídeos (de estudiantes resolviendo problemas o de situaciones de enseñanza), respuestas escritas de estudiantes, entrevistas, debates (en clase o en línea) o reuniones presenciales entre maestros, o las narrativas escritas durante los períodos de prácticas en los centros ayudan a los estudiantes para maestro a aprender a mirar de una manera profesional. A continuación revisaremos algunas investigaciones que presentan diferentes características en cuanto a los contextos y herramientas usadas. Por otra parte, y más recientemente, las investigaciones están mostrando que el uso de diferentes materiales que les sirvan a los estudiantes para maestro como guía (documentos teóricos o trayectorias hipotéticas de aprendizaje) puede ayudar a los estudiantes para maestro a estructurar su forma de mirar.

El uso de videos propios y ajenos para aprender a analizar la enseñanza

Algunos estudios describen cómo el uso de vídeos puede influir de manera efectiva para ayudar a profesores a centrarse en las formas en que los estudiantes razonan sobre las ideas matemáticas (Sherin y van Es, 2005; Wilson, Mojica y Confrey, 2013). Jacobs et al. (2010) usaron un vídeo donde los estudiantes resolvían un problema aditivo de manera correcta usando diferentes estrategias y tres respuestas escritas de estudiantes de un problema multiplicativo que manifestaban diferentes grados de comprensión y mostraron cómo a través del vídeo los estudiantes para maestro comenzaron a identificar detalles matemáticos importantes e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes. Walkoe (2015) examinó el desarrollo de la mirada del profesor como una manera en la que ayudar a los maestros a aprender a ampliar sus visiones del álgebra. Los estudiantes para maestro discutieron fragmentos de vídeos sobre clases de álgebra. En concreto, tenían que seleccionar momentos que mostraran pensamientos algebraicos de los estudiantes interesantes y describir lo que ellos observaban o miraban de manera profesional. Santagata y Yeh (2016) usaron vídeos cortos sobre cómo los estudiantes resolvían problemas sobre el tema de operaciones con números enteros con el objetivo de que los estudiantes para maestro discutieran sobre la actuación de los estudiantes en ese contenido matemático. Bartell et al. (2013) examinaron la habilidad de los estudiantes para maestro para reconocer evidencias de la comprensión conceptual de matemáticas de los estudiantes a través de videoclips de niños resolviendo problemas sobre números racionales. En la misma dirección, Coles (2013) propuso trabajar con videoclips. Los resultados de sus investigaciones muestran que cuando los profesores habían tenido la posibilidad de compartir la reconstrucción de las palabras exactas o acciones y su cronología (*accounts of*) tal y como aparecía en el videoclip que habían observado, esto les permitía realizar interpretaciones de lo que había ocurrido aportando evidencias (*accounts for*) y evitando comentarios basados en juicios.

Otras investigaciones, proporcionan a los estudiantes para maestro algunos referentes para ayudarles a mirar de una manera estructurada (Mitchell y Marin, 2015; Roth Macduffie et al., 2014; Schack, Fisher, Thomas, Eisenhardt, Tassel y Yoder, 2013; Wilson et al., 2013). Por ejemplo, Schack et al. (2013) tenían como objetivo desarrollar la competencia mirar profesionalmente a través de videoclips en los que se mostraban a niños resolviendo problemas aditivos. Los vídeos mostraban los diferentes estadios de una trayectoria de aprendizaje sobre el conteo y la secuencia numérica (Stages of Early Arithmetic Learning, SEAL) que fue proporcionada a los estudiantes para maestro para ayudarles a qué y cómo mirar. Wilson et al. (2013) estudiaron cómo los maestros analizaban respuestas de alumnos grabadas en vídeo resolviendo problemas de reparto y si las respuestas que daban respondían a distintos estadios de la trayectoria de aprendizaje EPLT (EquiPartitioning Learning Trajectory) sobre la equivalencia de fracciones que se les proporcionó como guía (lo que debía ser aprendido por los estudiantes para maestro para ser usado en el análisis de las respuestas de los estudiantes). Los resultados mostraron que a partir de los procesos de describir, comparar e inferir, los maestros o estudiantes para maestro pueden construir modelos de pensamiento de los estudiantes que les permite reconstruir su conocimiento de matemáticas.

Un contexto diferente lo determina cuando los estudiantes para maestro utilizan sus propios vídeos para analizar su enseñanza (Roller, 2016; Rosaen, Lundeberg, Cooper, Fritzen, y Terpstra, 2008) o estudiantes para maestro que, además, analizan situaciones de clase de otros profesores (Seidel, Stürmer, Blomberg, Kobarg y Schwindt, 2011). Así, van Es y Sherin (2002) y Sherin y van Es (2005) mostraron cómo profesores en servicio y docentes en su período de prácticas desarrollaban nuevas formas de identificar e interpretar interacciones de aula a través del visionado de grabaciones de interacciones que ocurrían en sus propias aulas. En este contexto, los maestros mejoraban su mirada profesional desplazando su foco de atención desde las descripciones generales de las estrategias a la comprensión de los estudiantes, y desde los comentarios evaluativos a las interpretaciones basadas en evidencias. El estudio de Roller (2016) se centró en examinar si los estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria fueron capaces de identificar, documentar y analizar sus observaciones al ver el vídeo de su enseñanza. Los resultados indican que los estudiantes para profesor tendían a observar las actuaciones de los estudiantes, el contenido matemático y el aprendizaje de los estudiantes. Las observaciones de los estudiantes para profesor se centraron en sugerencias de mejora en la planificación o en cambios para ellos mismos. Por otra parte, Rosaen et al. (2008) señalan que la reflexión fundamentada en vídeos sobre su propia enseñanza ayudó a los estudiantes para maestro a proporcionar comentarios más específicos sobre la enseñanza y a centrarse más en los estudiantes en lugar de en ellos mismos. Seidel et al. (2011) realizaron un enfoque experimental para investigar los efectos que podría tener el análisis de los vídeos de la propia enseñanza contra la enseñanza de otros y la experiencia que el uso de vídeos tiene sobre el aprendizaje del maestro. Los maestros que analizaron su propia enseñanza experimentaron una activación superior, indicada por una mayor inmersión, resonancia y motivación.

Estos resultados respaldan el uso del vídeo por parte de los estudiantes para maestro o profesor para desarrollar esta competencia en los programas de formación de maestros.

El uso de producciones escritas de estudiantes

Otros estudios han mostrado que el uso de respuestas escritas de estudiantes a problemas tiene también potencial para desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente. Las producciones escritas de los estudiantes son un registro más estático que las grabaciones en vídeo, sin embargo, pueden mostrar en un intervalo de tiempo menor, diferentes tipologías de respuestas (respuestas erróneas, diferentes estrategias, diferentes niveles de comprensión o respuestas pertenecientes a diferentes niveles de una trayectoria de aprendizaje). Por ejemplo, Son (2013) examinó las interpretaciones de futuros maestros de las respuestas erróneas de estudiantes de primaria a un problema que implica la búsqueda de la longitud desconocida en rectángulos semejantes. Callejo y Zapatera (2016) presentaron tres problemas sobre la generalización de patrones con tres respuestas de estudiantes que mostraban distintos estadios de comprensión de la generalización de patrones, lo que facilitaba el reconocimiento de semejanzas y diferencias en las respuestas de los estudiantes a los diferentes problemas. Hines y McMahon (2005) proporcionaron ejemplos de respuestas de estudiantes de secundaria con diferentes estrategias que mostraban diferentes niveles del desarrollo del razonamiento proporcional. Y, Rivas et al. (2012) proporcionaron un problema de proporcionalidad con tres tipos de respuestas de estudiantes de 6º de primaria a este problema, correspondientes a los tres primeros niveles del razonamiento proporcional (lógico, aditivo, transicional).

También en este caso, algunos estudios utilizan una guía (documento teórico) que proporciona información a los estudiantes para maestro para focalizar su atención y apoyarles en aprender a reconocer la comprensión de los estudiantes. Fernández et al. (2012) seleccionaron respuestas de seis estudiantes a dos problemas proporcionales y dos problemas no proporcionales. Las respuestas se seleccionaron teniendo en cuenta los diferentes perfiles de comportamiento de los estudiantes de primaria y secundaria al resolver problemas proporcionales y aditivos. Los estudiantes para maestro tenían que identificar elementos matemáticos importantes de las respuestas de los estudiantes, interpretar la comprensión puesta de manifiesto y proponer decisiones de acción teniendo en cuenta la comprensión identificada del estudiante usando el documento teórico como guía. En este documento teórico se les proporcionaba información procedente sobre la literatura en Didáctica de la Matemática sobre cómo los estudiantes desarrollan el razonamiento proporcional. De la misma manera, Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2015) proporcionaron a los estudiantes para profesor respuestas con diferentes características de la comprensión del concepto de derivada para ayudar a los estudiantes para profesor a reconocer evidencias de diferente grado de comprensión. Las tres respuestas de estudiantes de secundaria de problemas sobre la derivada estaban relacionadas con distintos niveles de comprensión. Los estudiantes para maestro también tenían que hacer uso de un documento teórico como guía para interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes y proponer decisiones de acción teniendo en cuenta la comprensión identificada del estudiante. Este documento teórico constaba de información que proviene de la literatura sobre Didáctica de la Matemática en relación a cómo los estudiantes comprenden el concepto de derivada. Estas investigaciones han mostrado que el uso de una tarea profesional donde se le pide a los futuros maestros identificar los elementos matemáticos implicados en las respuestas de los estudiantes, interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes y proponer nuevos problemas que ayuden al estudiante a progresar o consolidar su comprensión apoyándose en el documento teórico como guía, son una buena herramienta para desarrollar la competencia. Por otro lado, se les ofrece oportunidades de enfrentarse a una práctica real.

Otras investigaciones han usado como guía trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Ivars, Buforn y Llinares (2016) han mostrado cómo el uso de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones como instrumento puede apoyar el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Los resultados muestran algunas características de la manera en la que la trayectoria de aprendizaje de las fracciones ayudó a los estudiantes para maestro a articular una mirada más estructurada para inferir información sobre la comprensión de los estudiantes y así proponer nuevas actividades.

Creando contextos para la interacción entre los estudiantes para profesor

A parte del uso de vídeos y respuestas escritas de estudiantes, en los que los estudiantes para maestro debían analizar lo observado, otros estudios crean contextos para la interacción entre los estudiantes para maestro o profesor como una forma de apoyar el desarrollo de esta competencia docente. Por ejemplo, el uso de debates en línea (Fernández et al., 2012), reuniones presenciales (Coles, Fernández y Brown, 2013) o entrevistas (Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2013) han sido contextos usados para apoyar el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Fernández et al. (2012) sugieren que las discusiones en debates en línea ayudan a desarrollar habilidades para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes dado que el contexto del debate en línea permite a los participantes complementar diferentes opiniones, refutar o refinar interpretaciones alternativas entre participantes con diferente nivel de conocimiento y de desarrollo de esta competencia. Por otra parte, Coles et al. (2013) mostraron que las reuniones presenciales entre maestros en ejercicio, donde se discutía sobre los trabajos escritos y orales del alumnado y sobre las interacciones que se producían en el aula, también les ayudaron a interpretar las ideas matemáticas de sus estudiantes y a usar recursos para decidir hacia dónde dirigir el siguiente paso en la enseñanza para que los alumnos siguieran progresando en su aprendizaje. Finalmente, Magiera et al. (2013) estudiaron la habilidad de los estudiantes para profesor de secundaria para reconocer e interpretar las características del pensamiento algebraico de estudiantes de secundaria a partir de entrevistas uno a uno con el objetivo de obtener más información sobre el pensamiento matemático de los estudiantes.

El acto de escribir narrativas durante los períodos de prácticas

Ivars y Fernández (2015) e Ivars, Fernández y Llinares (2015) han mostrado que las narrativas escritas por los estudiantes para maestro, entendidas como historias en las que el autor relata, de manera secuencial, una serie de acontecimientos que cobran sentido para él, a través de una lógica interna, durante su período de prácticas no solo les ayudó a teorizar la práctica sino que les ayudó a estructurar su mirada sobre los sucesos específicos de aula y por tanto a desarrollar la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

Por tanto, considerar a los estudiantes para maestro como narradores de sus propias historias en el contexto de los programas de formación de maestros (Chapman, 2008) puede ayudarles a mirar de manera cada vez más estructurada las situaciones de enseñanza, dando sentido a su experiencia durante su período de prácticas. Las narrativas de los estudiantes para maestro en las que describen lo que ellos consideran relevante sobre el aprendizaje se convierten así en una herramienta para su aprendizaje. Desde esta perspectiva, las narrativas se conciben como medios que permiten a los estudiantes para maestro crear esquemas explicativos mediante el análisis de las situaciones de enseñanza y su reflexión sobre dichas situaciones (Schultz y Ravitch, 2013).

1.2.2. Características y niveles de desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

Las investigaciones que han estudiado la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en diferentes dominios matemáticos han proporcionado información que permite caracterizar niveles de desarrollo de esta competencia. Los dominios matemáticos en los que se ha generado información sobre los niveles de desarrollo de la competencia mirar profesionalmente son: problemas de estructura aditiva y multiplicativa (Jacobs et al., 2010), operaciones con número racionales (Bartell et al., 2013), numeración temprana (Schack et al., 2013), pensamiento algebraico (Goldsmith y Saego, 2011; Magiera et al., 2013; Walkoe, 2014), generalización lineal (Callejo y Zapatera, 2016), concepto de derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2015), fracciones (Ivars et al., 2016; Wilson et al., 2013) y razonamiento proporcional (Fernández et al., 2012; Hines y McMahon, 2005; Rivas et al., 2012; y Son, 2013). El rasgo común de los resultados de estas investigaciones es que proporcionan información para entender cómo y de qué manera los estudiantes para maestro y profesores van articulando paulatinamente su capacidad de analizar el pensamiento matemático de los estudiantes.

Jacobs et al. (2010) mostraron que existe una relación anidada entre las tres destrezas de identificar, interpretar y tomar decisiones, en el sentido de que la destreza identificar se da antes que interpretar, e interpretar antes que decidir cómo responder, en el análisis de las respuestas de estudiantes a problemas de estructura aditiva y multiplicativa. Schack et al. (2013) proporcionaron a los estudiantes para maestro información sobre una trayectoria de aprendizaje sobre el conteo y la secuencia numérica (Stages of Early Arithmetic Learning, SEAL) lo que les permitió identificar una evolución en las tres destrezas después de una intervención sugiriendo que la competencia mirar profesionalmente se puede desarrollar en los estudiantes para maestro.

En relación al pensamiento algebraico, Goldsmith y Seago (2011) examinaron dos programas de desarrollo profesional que tenían como objetivo ampliar la capacidad de analizar el pensamiento algebraico de los estudiantes. A medida que los programas se iban desarrollando, los maestros aumentaron sus discusiones basadas en evidencias, miraban de manera más estructurada el pensamiento matemático de los estudiantes y se centraban más profundamente en los detalles matemáticos de las respuestas de los estudiantes. Esta información muestra la manera en la que es posible empezar a conceptualizar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente.

Por otro lado, Callejo y Zapatera (2016) mostraron que aunque los estudiantes para maestro identificaban algunos elementos matemáticos para describir las respuestas de los estudiantes, no siempre los usaban para explicar la comprensión de la generalización de patrones de cada estudiante. Además, obtuvieron que hay una gradación en la manera en la que los estudiantes para maestro interpretan las características de la comprensión de los estudiantes de la generalización de patrones. Esta gradación se presenta en forma de características de cinco niveles de desarrollo:

- Perfil 1: Identifican uno o más elementos matemáticos pero no reconocen estadios de comprensión de la generalización de patrones.
- Perfil 2: Identifican al menos un elemento matemático y reconocen evidencias de la generalización cercana (estadio 1).
- Perfil 3: Identifican al menos dos elementos matemáticos y reconocen evidencias de la generalización cercana y generalización lejana (estadios 1 y 2).
- Perfil 4: Identifican al menos dos elementos matemáticos y reconocen evidencias de la generalización cercana y generalización lejana con proceso (estadios 1 y 3).
- Perfil 5: Identifican los tres elementos matemáticos y reconocen evidencias de los tres estadios de la comprensión de la generalización de patrones.

Callejo y Zapatera (2016) generaron diferentes transiciones entre los perfiles como una forma de dar cuenta del desarrollo de la competencia mirar profesionalmente las respuestas de los estudiantes de educación primaria en la resolución de problemas de generalización lineal (Figura 1.1).

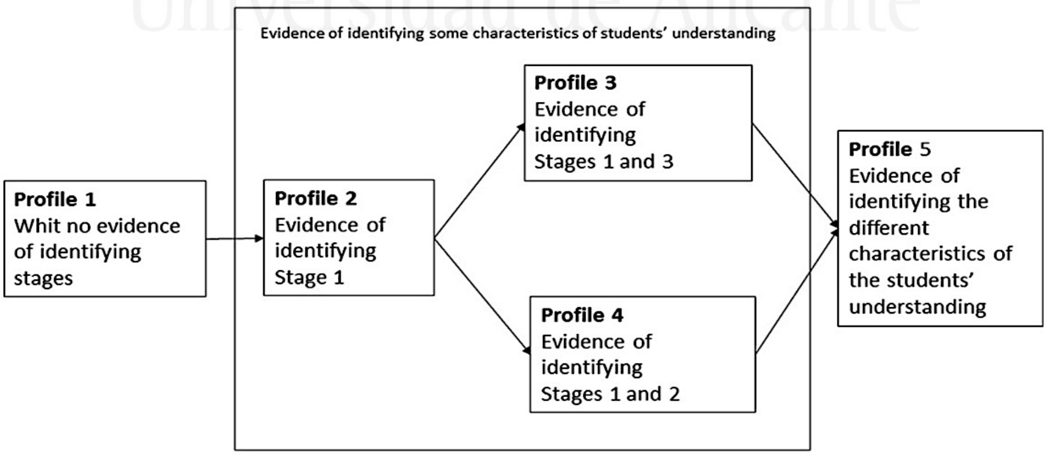


Figura 1.1. Transiciones entre los perfiles de EPM que caracterizan el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio de las progresiones lineales (Callejo y Zapatera, 2016, p. 22)

Sánchez-Matamoros et al. (2015) examinaron el desarrollo en la habilidad de los estudiantes para profesor de mirar profesionalmente la comprensión de los estudiantes en el concepto de derivada. Los resultados muestran cambios en la forma en que los estudiantes para profesor reconocen indicios de la comprensión de los estudiantes ligada a la identificación de los elementos matemáticos usados por los estudiantes de secundaria al resolver los problemas que determinan características de diferentes niveles de desarrollo (Figura 1.2).

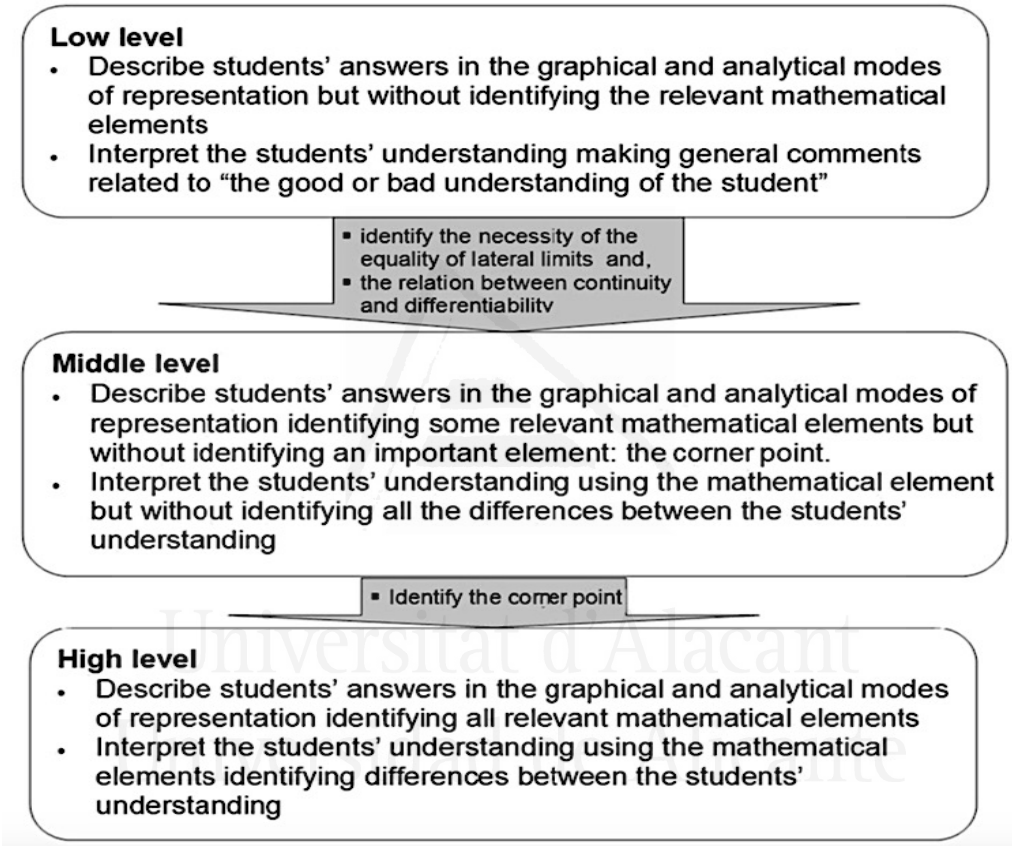


Figura 1.2. Niveles de desarrollo de la competencia en reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de la derivada de la función en un punto (Sánchez-Matamoros et al., 2015; p. 1325)

Fernández et al. (2012) mostraron diferentes niveles de desarrollo de la competencia mirar profesionalmente considerando la manera en que los estudiantes para maestro identificaban e interpretaban aspectos del razonamiento proporcional en las respuestas de estudiantes a problemas proporcionales y no proporcionales. Los resultados de esta investigación permitieron generar diferentes niveles de desarrollo en el ámbito del análisis del pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio de la proporcionalidad.

- Nivel 1: Los futuros maestros no distinguen las situaciones proporcionales de las aditivas. Estos futuros maestros solo describen las respuestas de los estudiantes sin relacionar las características del problema con las respuestas de los estudiantes.
- Nivel 2: Los futuros maestros distinguen los problemas proporcionales de los aditivos relacionando las respuestas de los alumnos de las características de los problemas, pero no justifican sus respuestas identificando los elementos matemáticos de cada situación.
- Nivel 3: los futuros maestros distinguen los problemas proporcionales de los aditivos relacionando las respuestas de los estudiantes con las características de los problemas y justifican sus respuestas identificando los elementos matemáticos de cada situación. Sin embargo, ellos no identifican los perfiles de los alumnos.
- Nivel 4: los futuros maestros distinguen los problemas proporcionales de los aditivos justificando los elementos matemáticos e identificando los perfiles de los estudiantes.

La transición entre estos niveles como evidencias del desarrollo de la competencia docente se definen a través de tres aspectos de lo que los estudiantes para maestro deben ser capaces de hacer ante las estrategias de los estudiantes al resolver los problemas de proporcionalidad: identificar los elementos matemáticos característicos de las situaciones proporcionales y no proporcionales, identificar dichos elementos matemáticos en las estrategias de estudiantes individuales y ser capaces de analizar las estrategias de diferentes estudiantes reconociendo diferencias y semejanzas (Figura 1.3).

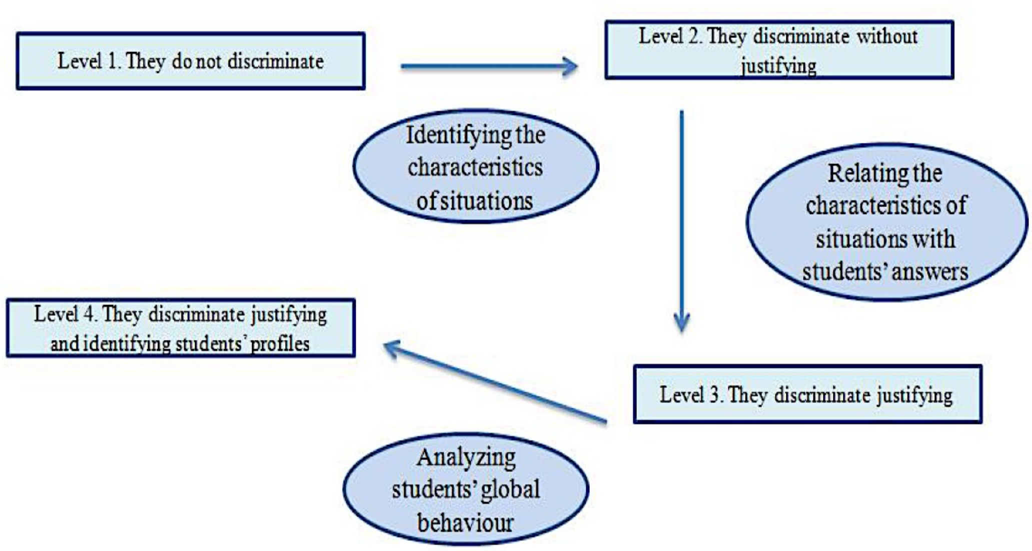


Figura 1.3. Niveles de desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el contexto de la proporcionalidad (Fernández et al., 2013; p. 459)

Llinares, Fernández y Sánchez-Matamoros (2016), se centraron en cómo los estudiantes para profesor aprenden sobre el pensamiento matemático de los estudiantes cuando anticipan respuestas de estudiantes, indicando tres cambios en generar evidencias hipotéticas de la comprensión de los estudiantes de las relaciones inclusivas entre los paralelogramos. Las referencias que establecen los momentos claves en el desarrollo de la competencia en este contexto y las transiciones que se deben generar entre ellos se caracterizaron apoyándose en el reconocimiento por parte de los estudiantes para profesor de que la comprensión de las relaciones inclusivas debía ser considerada como una evidencia de la progresión conceptual de los estudiantes (KDU, Simon, 2006) de la clasificación de los cuadriláteros:

- Estudiantes para profesor que consideran que los estudiantes de secundaria logran la comprensión cuando representan particiones en conjuntos individuales.
- Estudiantes para profesor que consideran que los estudiantes de secundaria logran la comprensión cuando representan particiones en conjuntos no individuales y dominan el uso retórico de la teoría relacionada con las clasificaciones inclusivas.
- Estudiantes para profesor que consideran que los estudiantes de secundaria logran la comprensión cuando representan clasificaciones inclusivas y logran

comprender satisfactoriamente la teoría relacionada con las clasificaciones inclusivas.

Los diferentes cambios identificados entre las referencias que definían el desarrollo de la competencia docente en este ámbito se describen en la Figura 1.4.

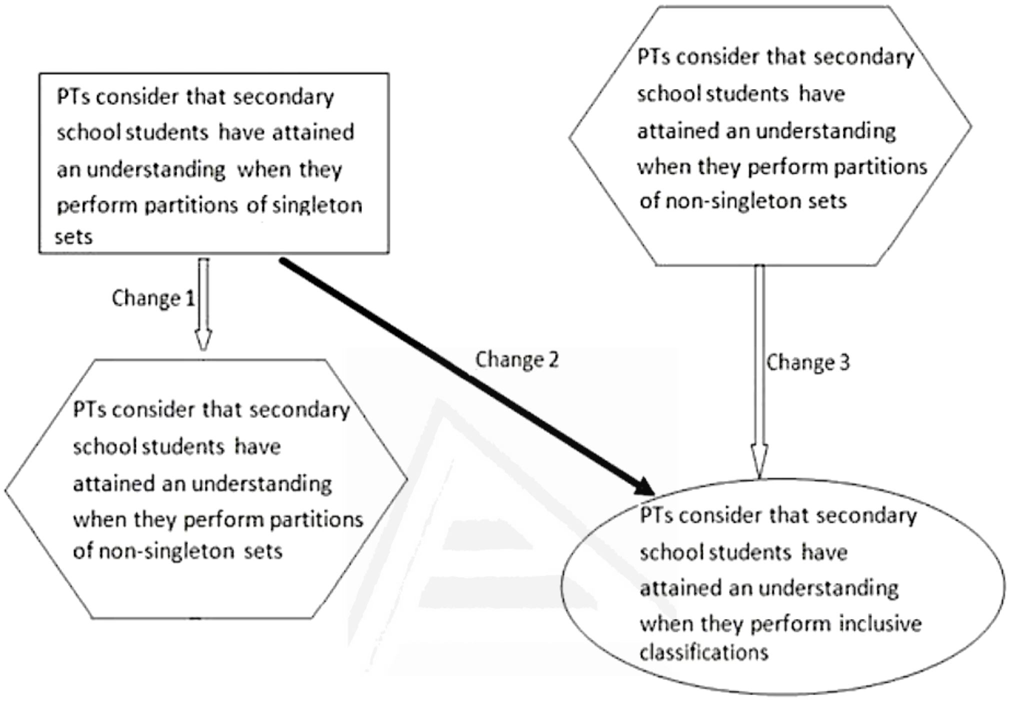


Figura 1.4. Cambios identificados en el aprendizaje de los estudiantes para profesor cuando anticipan respuestas de los estudiantes reflejando diferentes características de la comprensión de las relaciones inclusivas entre los paralelogramos (Llinares et al., 2016, p. 2163)

Una característica común obtenida en estos estudios es que el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente se apoya en la necesaria identificación de los elementos matemáticos importantes en la resolución de los problemas (conocimiento de matemáticas) para poder interpretar la comprensión de los estudiantes e identificar distintas características de la comprensión (conocimiento del aprendizaje de los estudiantes). Esta manera de entender el desarrollo de la competencia docente mirar de una manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes considera que la identificación del profesor de los elementos matemáticos que son relevantes en el problema que deben resolver sus alumnos, le permite estar en mejores condiciones para interpretar su aprendizaje y para tomar las decisiones instruccionales pertinentes.

Además, las investigaciones que están generando niveles de desarrollo de la competencia se centran, en mayor medida, en cómo los estudiantes para maestro reconocen evidencias de la comprensión de los elementos matemáticos relevantes en la manera en la que los estudiantes resuelven los problemas. Sin embargo, un aspecto de la competencia docente se centra en la capacidad de tomar decisiones para la enseñanza apoyadas en las interpretaciones del pensamiento de los estudiantes. En relación a este tercer aspecto (después de identificar lo relevante e interpretarlo) algunas investigaciones lo sitúan en los niveles altos de desarrollo de la competencia, pero en estos momentos tenemos menos evidencias que nos ayuden a comprender la relación hipotética entre las destrezas de identificar e interpretar con la destreza de tomar decisiones cuando intentamos caracterizar los procesos de desarrollo de la competencia mirar profesionalmente. Algunos resultados que se están generando en relación a este aspecto indican que la toma de decisiones no es fácil para los estudiantes para maestro, que parecen centrarse en la "re-enseñanza" (Cooper, 2009) o enseñar a los estudiantes cómo hacerlo correctamente (Son, 2013), y que es más fácil proponer actividades que ayuden a los estudiantes que no han comprendido, que proponer actividades que consoliden y amplíen el conocimiento en caso de haber comprendido (Zapatera, 2015).

Por otra parte, los resultados de estas investigaciones sobre el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas está permitiendo centrar la atención sobre las transiciones de lo que es observado por los estudiantes para profesor. La identificación de estas transiciones permite identificar puntos de atención de los formadores de profesores en el diseño de los entornos de aprendizaje al convertirse dichas transiciones en objetivo de aprendizaje del programa. En relación a esta cuestión, Simpson, Vondrova y Zalska (2017) intentan proporcionar información en relación a si estas transiciones, centradas en las dos primeras destrezas de la competencia – identificar lo relevante e interpretarlo – en el contexto de usar vídeos de situaciones de enseñanza son resultado del propio diseño de entorno, de la experiencia de enseñanza de los estudiantes para profesor o por la aproximación metodológica particular desarrollada en relación al tipo de vídeos usados. Los resultados obtenidos indican que la elección del vídeo y la focalización clara de lo que debe ser observado, es decir, del registro de la práctica proporcionado con la guía de lo que debe ser observado, influye en las transiciones realizadas. Aunque estos resultados son preliminares, explicitan ya aspectos de la transferencia del conocimiento generado por las investigaciones sobre la caracterización y desarrollo de la competencia docente al debate del diseño de los entornos de aprendizaje en los programas de formación (contenido, estructura metodológica, y evidencias de lo que puede ser el aprendizaje producido).

Estos resultados ponen de manifiesto el desafío al que se enfrentan los formadores de profesores de matemáticas al tener que crear entornos de aprendizaje en los programas de formación para desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. El diseño de estos entornos de aprendizaje está generando maneras de incorporar el conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de primaria (identificando diferentes características de la comprensión) como contenido a ser aprendido por los estudiantes para maestro y profesores para mejorar sus interpretaciones del pensamiento matemático de los estudiantes.

Así, hemos visto como el uso de guías como pueden ser las trayectorias de aprendizaje o documentos teóricos con información sobre los elementos matemáticos y características de la comprensión de los estudiantes (Goldsmith y Seago, 2011; Hines y McMahon, 2005; Ivars et al., 2016; Schack et al., 2013; Wilson et al., 2013), el uso de vídeos (Walkoe, 2014) o el uso de respuestas de estudiantes con diferentes características o niveles de desarrollo (Callejo y Zapatera, 2016; Fernández et al., 2012) pueden ayudar a los estudiantes para maestro a identificar los elementos matemáticos, reconocer características de la comprensión y tomar decisiones en base a la comprensión.

La Tabla 1.1 muestra las características de las investigaciones revisadas en esta sección.

Tabla 1.1. Características de las investigaciones revisadas

Referencia	Respuestas	Soporte	Dominio matemático	Destrezas
Jacobs, Lamb y Philip (2010)	Estrategias con distintos niveles de elaboración	Videos y producciones escritas	Problemas de estructura aditiva y multiplicativa	Identificar, interpretar y decidir
Santagata y Yeh (2016)	Diferentes episodios de clase	Vídeos	Operaciones con números enteros	Identificar, interpretar y decidir
Bartell, Webel, Dowen y Dyson (2013)	Respuestas correctas e incorrectas	Vídeos y producciones escritas	Operaciones con números racionales	Identificar e interpretar
Schack, Fisher, Thomas, Eisenhardt, Tassel y Yoder (2013)	Trayectoria de aprendizaje– SEAL (Steffe, 1992)	Vídeos y transcripciones	Introducción a la aritmética	Identificar, interpretar y decidir
Magiera, van den Kieboom y Moyer (2013)	Estrategias de resolución de las tareas	Entrevistas uno a uno grabadas y transcritas	Pensamiento algebraico	Identificar e interpretar
Goldsmith y Saego (2011)	Respuestas con diferentes características	Vídeos, trascripciones, producciones escritas	Pensamiento algebraico	Identificar e interpretar
Walkoe (2015)	Diferentes formas de pensar algebraicamente y diferentes contextos	Vídeos	Álgebra	Identificar e interpretar
Callejo y Zapatera (2016)	Respuestas con distintos estadios de comprensión	Producciones escritas	Generalización de patrones	Identificar, interpretar y decidir
Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2015)	Niveles basados en la teoría APOS (García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011)	Producciones escritas	Derivada	Interpretar
Ivars, Buforn y Llinares (2016)	Niveles de sofisticación	Producciones escritas	Fracciones	Identificar, interpretar y decidir
Wilson, Mojica y Confrey (2013)	Trayectoria EPLT (Confrey, Maloney, Wilson y Nguyen, 2010)	Vídeos, entrevistas y producciones escritas	Problemas de reparto equitativo	Describir, comparar e inferir
Fernández, Llinares y Valls (2012)	Diferentes perfiles de comportamiento (Fernández y Llinares, 2010; van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010)	Producciones escritas	Distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales	Identificar, interpretar y decidir
Son (2013)	Respuesta incorrecta	Producción escrita	Razón y proporción	Identificar, interpretar y decidir
Hines y McMahon (2005)	Estrategias con diferentes niveles de desarrollo	Producciones escritas	Razonamiento proporcional	Interpretar
Rivas, Godino y Castro (2012)	Niveles del razonamiento proporcional (Khoury, 2002)	Producciones escritas	Razonamiento proporcional	Identificar e interpretar

Estas investigaciones, y de acuerdo con Stahnke et al. (2016), muestran que hay evidencias de que los estudiantes para maestro tienen dificultades en identificar e interpretar las respuestas de los estudiantes. Aunque estas investigaciones muestran que las tres destrezas (identificar estrategias y elementos matemáticos significativos, interpretar la comprensión de los estudiantes a través de las estrategias y elementos identificados, y tomar decisiones de acción en base a la interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes) están interrelacionadas, a los estudiantes para maestro les resulta más fácil identificar los elementos matemáticos de las estrategias que interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, y ésta, a su vez es más fácil que la destreza tomar decisiones de acción. Finalmente, algunos de estos estudios subrayan que el conocimiento de los estudiantes para maestro de cómo los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos no es suficiente para responder en base a sus interpretaciones del pensamiento matemático de los estudiantes. Esta situación genera cuestiones en relación a la manera en la que se integra el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos específicos cuando los estudiantes para maestro interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes.

1.3. RELACIÓN ENTRE CONOCIMIENTO DE MATEMÁTICAS Y LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE

El conocimiento del maestro y el uso que hace de este conocimiento para analizar las situaciones de enseñanza (incluidas las estrategias que los estudiantes usan para resolver los problemas) son aspectos relevantes en la práctica docente (Llinares, 2013). La hipótesis que apoya este tipo de investigación es que un conocimiento limitado del contenido matemático dificultará a los estudiantes para maestro interpretar las respuestas de los estudiantes y tomar decisiones de acción (Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipp, 2011). Algunas investigaciones están aportando información sobre la relación entre el conocimiento de matemáticas y la competencia mirar profesionalmente (Bartell et al., 2013; Fernández et al., 2012; Rivas et al., 2012; Son, 2013).

Por ejemplo, Bartell et al. (2013) examinaron el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro y su habilidad para reconocer evidencias de la comprensión conceptual de los estudiantes en tres áreas de contenido (resta de decimales con llevadas, comparación de fracciones y multiplicación de fracciones). Los resultados del estudio sugieren que solo el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro no es suficiente para apoyar su habilidad para reconocer evidencias de la comprensión conceptual de los estudiantes. Por otra parte, Rivas et al. (2012) mostraron que los estudiantes para maestro fueron capaces de resolver correctamente el problema, pero tenían limitaciones para reconocer los significados de los objetos matemáticos que intervenían en la resolución de un problema de proporcionalidad y como consecuencia, no interpretaban de manera apropiada las respuestas de alumnos de Educación Primaria. Finalmente, Fernández et al. (2012) indicaron, según sus resultados, que aunque algunos estudiantes para maestro tenían un conocimiento matemático adecuado de los problemas, tenían dificultades para describir las respuestas de los alumnos utilizando los elementos matemáticos de cada problema y tenían problemas para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes.

De manera particular y fijando la atención en la manera en la que los estudiantes para maestro reconocían evidencias de comprensión conceptual en los estudiantes y de qué manera influía la consideración de las aproximaciones procedimentales generadas por los estudiantes, Son (2013) examinó el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro y su habilidad para interpretar las respuestas erróneas de los estudiantes a un problema de razones. Los resultados mostraron que los estudiantes para maestro tenían un fuerte conocimiento de la razón y proporción, sin embargo, la mayoría a pesar de mostrar cierta habilidad para identificar errores de los estudiantes, se centraban en aspectos procedimentales. De acuerdo con los resultados de otras investigaciones (Sánchez-Matamoros, Férnández, Valls, García y Llinares, 2012), los estudiantes para maestro pueden tener una formación adecuada en cuanto al contenido matemático, sin embargo, puede resultarles difícil describir las resoluciones de los alumnos usando los conceptos matemáticos relacionados y reconocer las características de su comprensión.

Estos estudios muestran que el conocimiento de matemáticas que tienen los maestros no es suficiente para reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes, ya que aunque los estudiantes para maestro o maestros en ejercicio tengan un conocimiento matemático, no implica que sean capaces de interpretar la comprensión de los estudiantes al tener dificultades en reconocer evidencias de la comprensión conceptual a partir de aproximaciones procedimentales. Estos resultados subrayan la compleja relación entre el conocimiento de matemáticas del maestro y la habilidad para reconocer evidencias de la comprensión matemáticas de sus estudiantes.

1.3.1 Cómo los profesores interpretan (usan el conocimiento para interpretar y decidir) en el dominio de la proporcionalidad

De acuerdo con Wilson et al. (2013), el conocimiento que tiene el profesor sobre el pensamiento matemático de los estudiantes es un componente clave que le permitirá ayudar a los estudiantes a progresar en la comprensión de las matemáticas. A pesar de la importancia de comprender el conocimiento de los maestros sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, relativamente pocos estudios se han centrado en examinar el conocimiento de los maestros sobre el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio del razonamiento proporcional (Lobato, Orrill, Druken y Jacobson, 2011; Rivas et al., 2012; Son, 2013), a diferencia de la gran cantidad de literatura que hay sobre la comprensión de los estudiantes de primaria y secundaria en este mismo ámbito.

Estos estudios han mostrado que los estudiantes para maestro tienen limitaciones para reconocer los significados de los objetos matemáticos que intervienen en la resolución de un problema de proporcionalidad y como consecuencia, no interpretan de manera apropiada las respuestas de alumnos. Así, Rivas et al. (2012) mostraron que los estudiantes para maestro tienen dificultades tanto para trabajar el concepto de razón y las comparaciones multiplicativas, como para comprender, reconocer y explicar respuestas de estudiantes de primaria cuando estas respuestas son diferentes a las que ellos proponen previamente. Son (2013) examinó las interpretaciones de los futuros maestros de las respuestas erróneas de estudiantes de primaria a un problema que implica la búsqueda de la longitud desconocida en rectángulos semejantes. Los resultados del análisis revelaron que aunque el error del alumno provenía de los aspectos conceptuales de la similitud, la mayoría de los futuros maestros identificaron los errores basándose en los procedimientos. Además, previamente habían resuelto el mismo problema y un alto porcentaje de futuros maestros mostraron un fuerte conocimiento de razón y proporción, sin embargo la mayoría de los futuros maestros se centraron en aspectos procedimentales de semejanza cuando identificaban errores de estudiantes. Lobato et al. (2011) examinaron la comprensión del conocimiento matemático necesario para apoyar el aprendizaje de los estudiantes y las capacidades para comprender y construir el pensamiento de los estudiantes. Sus resultados indican que muchos profesores emplean dos tipos de razonamiento cuando resuelven problemas relacionados con el razonamiento proporcional: el *razonamiento matemático estructural* en el que se emplean algoritmos, reglas y propiedades; y el *razonamiento cuantitativo* en el que se emplean cantidades y relaciones entre las cantidades.

Estas investigaciones muestran que el conocimiento común basado en reglas para resolver problemas de proporcionalidad contribuye poco al conocimiento matemático necesario para la enseñanza, es decir, no ayuda a comprender o explicar respuestas dadas por alumnos (Rivas et al., 2012). En otras palabras, estos estudios indican que tener un buen conocimiento matemático no garantiza enseñar bien las matemáticas. Para que los futuros maestros desarrollen la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el contexto de la proporcionalidad, es necesario que ellos identifiquen los aspectos relevantes de las situaciones proporcionales y no proporcionales y razonen sobre esto en relación a las estrategias usadas por los estudiantes (Fernández et al., 2012). Los maestros deben de tomarse tiempo y esfuerzo para evaluar y ayudar a la comprensión de sus estudiantes.

Teniendo en cuenta los sub-constructos vinculados al desarrollo del razonamiento proporcional y su importancia en el currículum, la importancia del conocimiento que debe tener el maestro de matemáticas para poder enseñar y las escasas investigaciones sobre cómo los estudiantes para maestro interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio específico del razonamiento proporcional, hemos definido nuestro objetivo:

- caracterizar cómo estudiantes para maestro resuelven problemas relacionados con los distintos sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional e interpretan respuestas de estudiantes en estos sub-constructos.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

CÁPITULO 2. MARCO TEÓRICO

Esta investigación se enmarca en los estudios centrados en examinar y caracterizar el conocimiento del maestro para enseñar y cómo es usado para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (*profesional noticing*, Mason, 2002; Sherin et al., 2011) en el dominio matemático del razonamiento proporcional (Lamon, 2005, 2007, Pitta-Pantazi y Christou, 2011; Vergnaud, 1983). El capítulo está dividido en tres secciones. La primera sección sobre la conceptualización del razonamiento proporcional con el objetivo de identificar el conocimiento relevante a ser considerado para caracterizar el conocimiento del maestro y la competencia docente mirar profesionalmente. La segunda sección describe las referencias para conceptualizar el conocimiento matemático para enseñar y su relación con la competencia profesional mirar profesionalmente. Y en la tercera, caracterizamos la manera en la que vamos a considerar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio del razonamiento proporcional.

2.1. CARACTERÍSTICAS DEL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

2.1.1. Razonamiento proporcional: Características

Lamon (2005, 2007) y Pitta-Pantazzi y Christou (2009, 2011) indican que "*el razonamiento proporcional implica identificar las razones que ayuden a afirmar las relaciones estructurales entre cuatro cantidades (por ejemplo a, b, c, d) en un contexto que involucra, simultáneamente, la covarianza de las cantidades y la invarianza de las razones o productos; esto consistiría en la habilidad de establecer una relación multiplicativa entre dos cantidades, así como la habilidad de extender dicha relación a otro par de cantidades*" (Lamon, 2007, p. 637-638). Basándose en esta definición, Lamon (2005) afirma que el razonamiento proporcional es multifacético y se logra mediante la integración de diferentes tipos de conocimiento, procesos y contextos, es decir, sólo se puede llegar a dominarlo cuando se consideran diversos sub-constructos. En otras palabras, para desarrollar el razonamiento proporcional es necesario tener en cuenta varios sub-constructos relacionados con (Lamon, 2005, 2007):

- las interpretaciones de los números racionales (parte-todo, medida-recta numérica, medida-densidad, operador, razón, cociente-reparto equitativo),
- identificación de las fracciones como unidades iterativas y la idea de fracciones como unidades múltiples (reasoning up and down),
- el proceso de generar unidades contables (unitizing process),
- pensamiento relacional (relative thinking), y
- la covarianza entre cantidades (quantities and covariance).

Pitta-Pantazi y Chirstou (2011) amplían los sub-constructos propuestos por Lamon con un sub-constructo más, la resolución de problemas proporcionales de valor perdido. Finalmente, Buforn y Fernández (2014a) añaden la distinción entre problemas proporcionales y no proporcionales como un sub-constructo relevante para el desarrollo del razonamiento proporcional.

Otras investigaciones previas también justifican la importancia de incluir la comprensión de los números racionales y la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales como sub-constructos relevantes para apoyar el desarrollo del razonamiento proporcional. Varios investigadores (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983;

Kieren, 1976, 1993; Lamon, 2007) sugieren diferentes sub-constructos del número racional: *razón*, *operador*, *parte-todo, medida* y *cociente*. La comprensión de los números racionales requiere una comprensión de estos sub-constructos y sus relaciones (Behr, Khoury, Harel, Post y Lesh, 1997; Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007; Freundenthal, 1983; Fandiño Pinilla, 2005, 2007; Lamon 2007) y es uno de los prerrequisitos para tener éxito en el razonamiento proporcional (Lamon, 1999, 2007; Naik y Subramaniam, 2008). Además, entender la razón y proporción está relacionado con la habilidad de comprender las relaciones multiplicativas, distinguiéndolas de las relaciones aditivas (Behr, Harel, Post y Lesh, 1994; Vergnaud, 1994). Así, el razonamiento proporcional implica resolver con éxito situaciones proporcionales y la habilidad de distinguir las situaciones proporcionales de las no proporcionales, (Fernández y Llinares, 2010; Modestou y Gagatsis, 2010; Son, 2013; van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel, 2005).

2.1.2. Sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional

Los sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional que vamos a considerar en esta investigación son las interpretaciones del número racional: razón, operador, parte-todo, medida y cociente-reparto equitativo (Behr et al., 1983; Kieren, 1976; Fandiño Pinilla, 2005, 2007; Lamon, 2007) y los relacionados con la razón y proporción: problemas de valor perdido, problemas de comparación numérica, y problemas de comparación y predicción cualitativa (Cramer y Post, 1993; Cramer, Post y Currier, 1993). En nuestro estudio clasificamos los 12 sub-constructos en tres dominios:

- o *Esquema fraccionario*: parte-todo, medida (recta numérica y densidad), cociente (reparto equitativo), operador y razonamiento up and down.
- o *Distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales*: problema de valor perdido proporcional y problema de valor perdido no proporcional.
- o *Comparación de razones*: pensamiento relacional, proceso unitizing, razón y covarianza-cualitativo.

A continuación, caracterizaremos cada uno de estos sub-constructos (Figura 2.1):

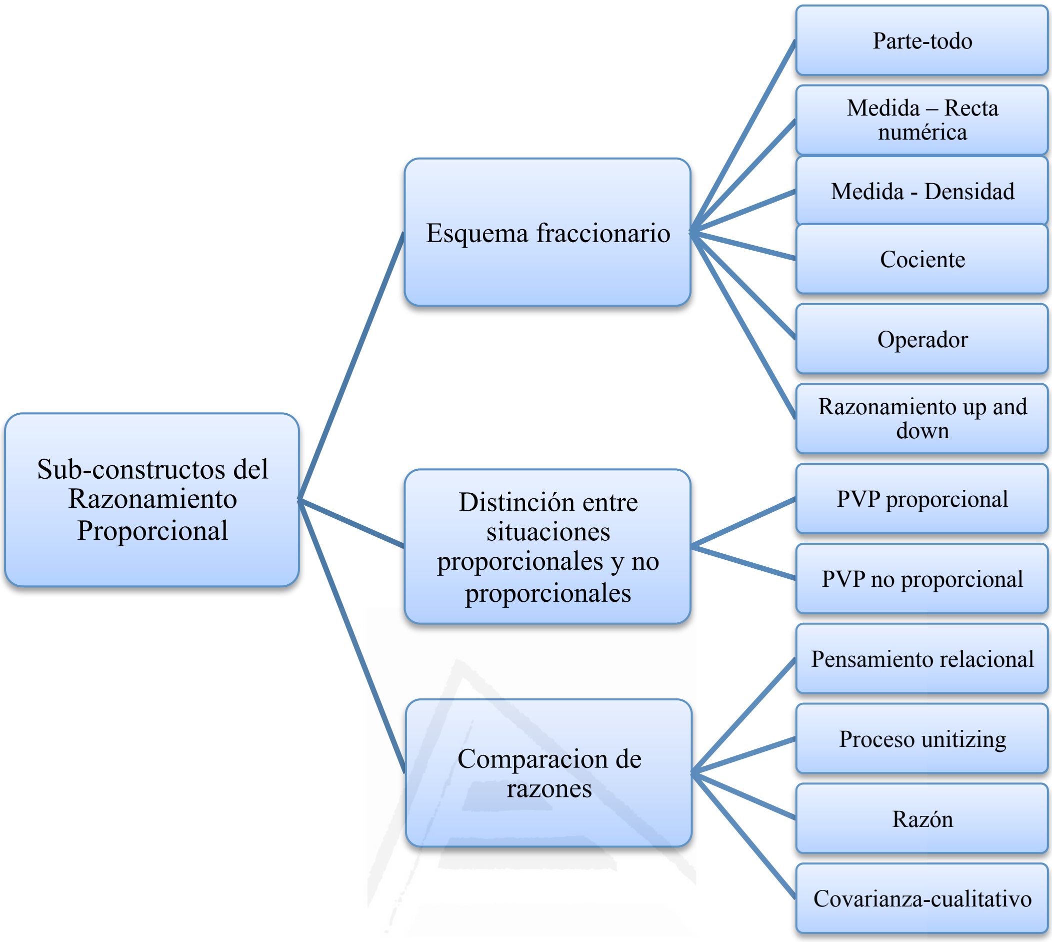


Figura 2.1. Sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional considerados en esta investigación

2.1.2.1. Esquema fraccionario

El dominio del esquema fraccionario engloba los sub-constructos relacionados con las diferentes interpretaciones de la fracción (parte-todo, medida, cociente, razón y operador) y el razonamiento up and down considerado como un proceso de razonamiento vinculado a la interpretación parte-todo de la fracción. A continuación, definiremos y ejemplificaremos los diferentes sub-constructos.

Parte-todo: Es la relación entre el número de partes congruentes en las que se divide una cantidad continua o un conjunto de objetos discretos y el todo. Es decir, es la operación mental de dividir una cantidad en partes iguales, ya sea dividiendo una región en partes iguales o separando un conjunto discreto de objetos en subconjuntos equivalentes (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992; Behr y Post, 1992; Freudenthal, 1983).

Por ejemplo: *He preparado galletas de chocolate y vainilla. ¿Qué parte de la siguiente tanda de galletas es de chocolate?* (Figura 2.2) (Lamon, 1999, p.70). En esta situación, la relación parte-todo permite establecer la relación entre el total de galletas (36 galletas) y el número de galletas de chocolate (24 galletas) (24/36, o 2/3 son formas de representar esta relación).

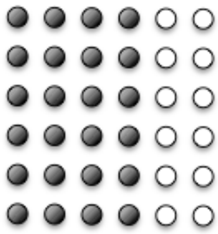


Figura 2.2. Dibujo problema del sub-constructo parte-todo

Las estrategias usadas en la resolución de esta situación consisten en identificar el número de partes iguales en que se divide el todo y el número de partes que se toman (Clarke y Roche, 1997; Nunes y Bryant, 1997), y en el uso de la fracción como operador, entendiéndolo como una función aplicada a un número (Behr, Harel, Post y Lesh, 1993). Las dificultades más comunes son no considerar que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes y no identificar la fracción unitaria para poder iterar y representar el número de partes que se pide (Norton y Wilkins, 2009; Steffe y Olive, 2010).

Medida - recta numérica: A este sub-constructo se le asocian dos nociones: el significado cuantitativo de número racional (su tamaño) o la medida asignada a un intervalo (Pitta-Pantazi y Christou, 2011). Este sub-constructo (medida) implica comparar una cantidad dada con una unidad específica usando iteraciones o particiones de la unidad (Olive y Lobato, 2008). Así, un ejemplo: *Localiza ¾ en la recta numérica*. (modificado de Lamon, 1999, p.118). En este caso estaría señalado en la recta numérica el ¼ (Figura 2.3), por lo que dos segmentos equivalen a ¼, por lo tanto, hay que iterar 3 veces ¼ para conseguir localizar ¾.

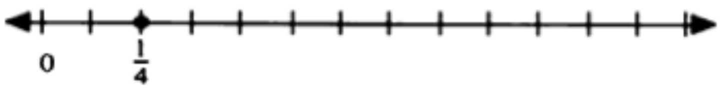


Figura 2.3. Dibujo problema del sub-constructo recta numérica

Este sub-constructo puede ayudar a entender otros conceptos como las unidades, los intervalos, la equivalencia, el orden, la densidad de los números racionales,… Y, por este motivo, al estar relacionado con la unidad (las partes y el todo), Kieren (1988) y Lamon (2005) consideran que el sub-constructo parte-todo puede considerarse parte de este sub-constructo.

En la resolución de este tipo de problemas las estrategias se apoyan en la identificación y uso de la fracción unitaria y otras fracciones (no unitarias) como unidades iterativas para representar la fracción pedida (Buforn y Fernández, 2014b; Hackenberg, 2007; McCloskey y Norton, 2009; Steffe, 2002). Algunas de las dificultades son no considerar que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes y no identificar la fracción unitaria para poder iterar e identificar la fracción pedida en la recta numérica (Norton y Wilkins, 2009; Steffe y Olive, 2010) o el uso de un todo arbitrario (Buforn y Fernández, 2014b).

Medida - densidad: Entendemos por densidad cuando dadas dos fracciones siempre se pueden obtener más fracciones comprendidas entre las dadas. Esta forma de razonar se puede observar en el siguiente ejemplo: *Escribe dos fracciones que estén entre 1/8 y 1/9. Explica cómo lo has hecho* (Lamon, 1999, p.111), en el que la resolución de la tarea implica buscar fracciones entre las dadas mediante, por ejemplo, fracciones equivalentes. En este caso, no es suficiente con obtener las fracciones equivalentes mediante el m.c.m ya que siguen sin aparecer fracciones comprendidas entre las dadas (8/72 y 9/72), y se requiere buscar fracciones equivalentes con denominador mayor para conseguir resolver el problema. Por ejemplo, haciendo una vez fracciones equivalentes tendríamos 16/144 y 18/144, por tanto todavía no tendríamos dos fracciones comprendidas entre las dadas y habría que buscar fracciones con denominador mayor (24/216 y 27/216).

La estrategia más común es el uso de un denominador común a partir del mínimo común múltiplo y de las fracciones equivalentes (Boyer y Levine, 2012; DeWolf y Vosniadou, 2014; Meert, Grégorire y Noël, 2009). Una de las dificultades es no identificar un denominador común válido y decir que no existen más fracciones comprendidas entre las dadas, es decir, no entender el significado de densidad de los números racionales.

Cociente – reparto equitativo: El cociente puede ser visto como el resultado de un reparto equitativo (Kieren, 1992, 1993; Pitta-Pantazi y Christou, 2011). Por ejemplo: *Si 5 personas comparten 4 crepes, ¿Qué cantidad de crepes comerá cada persona?* (Lamon 1999, p.89). Para resolver esta tarea un procedimiento es dibujar los crepes y dividir cada crepe en partes iguales (en este caso dividir en 5 partes es lo más sencillo al ser 5 personas para repartir) y darle la misma cantidad a cada uno, por lo que le tocaría 4/5 de un crepe o 4/20 = 1/5 del total de crepes. Lamon (1995) indica que la idea de reparto es un proceso importante que hay que adquirir desde el principio de la escolaridad para la futura actividad matemática.

Algunas estrategias usadas para resolver este problema son buscar la fracción unitaria y repartir a cada grupo una parte (*buit up from unit fractions*) o repartir diferentes partes (fracción no unitaria) en cada grupo hasta repartir todo lo que se tiene que repartir (*share of each children*) (Naik y Subramaniam, 2008). Las dificultades más comunes son no entender la idea de reparto equitativo y por lo tanto no considerar que las partes deben ser congruentes o no identificar el número de partes en que poder hacer la partición.

Operador: Este concepto es visto como una función aplicada a un número, objeto o conjunto (Behr et al., 1993; Marshall, 1993). Lamon (1999) explica que aplicar el operador puede ser para extender o reducir dependiendo de la situación en que se dé el caso. Un ejemplo relacionado con el operador es el siguiente: *En una cierta escuela, 5/9 de los profesores son mujeres, 3/8 de los profesores hombres son solteros, y 1/3 de los hombres solteros están por encima de los 50 años. Que fracción de profesores son hombres solteros y con menos de 50 años?* (Lamon, 1999). En este caso sabemos que si 5/9 son mujeres, 4/9 son hombres, por lo tanto, hombres solteros son "3/8 de 4/9". Por otro lado, hombres solteros y mayores de 50, serían "1/3 de 3/8 de 4/9", pero hombres solteros y menores de 50 serían "2/3 de 3/8 de 4/9", por lo que la fracción total sería 24/216=1/9. Este ejemplo requiere el uso del operador en varias ocasiones.

Vinculado a la idea de operador como función está la idea de operador inverso. Esta idea está vinculada a las situaciones de ampliaciones o reducciones. Un ejemplo relacionado con el operador inverso sería el siguiente: *Marcos quería regalar a María una fotografía de los dos. Pensando en la casa tan pequeña de María, decidió reducir la fotografía a la mitad. Sin embargo, a María le gustó tanto que quiere tener la foto a tamaño original. ¿Cuánto debe aumentar el fotógrafo el tamaño de la foto para conseguir el tamaño original?* En este caso, se necesitaría multiplicar por 2 el tamaño de la foto para conseguir el tamaño original, es decir, se tiene que buscar una fracción que multiplicada por ½ de la unidad (original). En este caso sería 2/1 ($^1/_2 * ^2/_1 = 1$).

Pitta-Pantazi y Christou (2011) indican que estos problemas se pueden ver como una única función compuesta que resulta de la combinación de dos operaciones multiplicativas o como dos funciones discretas que se aplican consecutivamente.

La estrategia correcta para resolver el problema con éxito es multiplicar por la fracción inversa. Una estrategia incorrecta es aplicar una aproximación aditiva teniendo en cuenta que lo mismo que se ha reducido es lo que se tiene que aumentar (Buforn y Fernández, 2014a).

Razonamiento up and down: Lamon (2005, 2007) propone la noción de razonamiento up and down para determinar la parte fraccionaria de un conjunto cuando la unidad está dada de manera implícita. Se trata de actividades que requieren reconstruir la unidad a partir de la representación de una fracción y representar posteriormente otra parte (fracción) de esta unidad (Llinares, 2003; Steffe y Olive, 2010). Los problemas que implican un razonamiento up and down requieren coordinar las fracciones unitarias como unidades iterativas con la idea de la fracción como una unidad múltiple para poder reconstruir el todo y representar fracciones propias o impropias (Hackenberg, 2007). Un ejemplo de esta actividad podría ser: *La parte sombreada de esta figura representa* $\frac{7}{5}$ *de la unidad. Representa* $\frac{11}{10}$ (Buforn y Fernández, 2014b) (Figura 2.4).

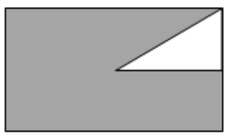
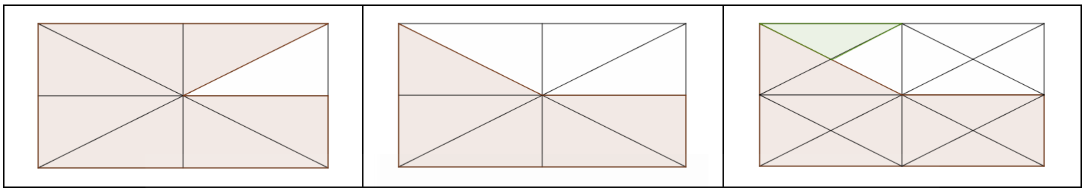


Figura 2.4. Dibujo problema del sub-constructo razonamiento up and down

En este caso, se trata de una fracción impropia (7/5) (Figura 2.5.a) que representa una parte más pequeña que una figura geométrica (un rectángulo). La tarea pide representar otra fracción impropia (11/10) cuya resolución implica tener que identificar previamente la unidad (que está implícita) a través de la identificación de la fracción unitaria (1/5) y, mediante su iteración, reconstruir la unidad (Figura 2.5.b) para poder luego representar la fracción pedida. Una vez representada la unidad, se podría identificar otra fracción unitaria (1/10) para reconstruir la fracción impropia pedida (11/10, Figura 2.5.c).



7/5	5/5 (unidad)	11/10

Figura 2.5. Proceso de resolución del problema razonamiento up and down

En este sub-constructo la estrategia para resolver con éxito el problema es la identificación de la unidad a partir de la fracción unitaria e iterarla para representar la fracción pedida (Hackenberg, 2007). Las dificultades más comunes son la no identificación de la unidad ni de la fracción unitaria, o identificación de la unidad pero no representar la nueva fracción o bien por no saber iterar o bien por no saber hacer una nueva partición que permita reconstruir la fracción pedida (Buforn y Fernández, 2014b).

2.1.2.2. Distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales

El razonamiento proporcional implica no solo comprender la relación multiplicativa entre las cantidades en una situación proporcional, sino tener la habilidad de distinguir entre situaciones proporcionales y no proporcionales (Fernández y Llinares, 2010; Modestou y Gagatsis, 2010; van Dooren et al., 2005).

Problemas de valor perdido proporcionales: La resolución de problemas de valor perdido implica que se tenga la habilidad de comprender las relaciones estructurales entre cuatro cantidades en un contexto que simultáneamente implica la covarianza de las cantidades y la invarianza de las razones. En los problemas de valor perdido tres de los cuatro valores son dados y el objetivo es encontrar el cuarto valor (Kaput y Maxwell, 1994; Tjoe, y de la Torre, 2014), es decir se presentan tres números *a*, *b* y *c*, y se trata de encontrar la incógnita *x* en la proporción *a/b=c/x* (Modestou y Gagatsis, 2010), tal y como se muestra en el siguiente ejemplo: *John necesita 15 botes de pintura para pintar 18 sillas. ¿Cuántas sillas pintará con 25 botes de pintura?* (Karplus, Pulos y Stage, 1983; Lamon 2005; Pitta-Pantazi y Christou, 2011, modificado de Hart 1984) en el que se tiene que plantear la proporción $\frac{15}{18} = \frac{25}{x}$ y obtener el valor de *x*, que en este caso es 30 sillas.

Por otro lado, los **problemas de valor perdido no proporcionales** pueden presentar diferentes estructuras (Fernández, Llinares y Valls, 2008): problemas aditivos, problemas afines y problemas constantes. Los problemas constantes no requieren hacer ningún cálculo para encontrar la solución correcta ($f(x) = a$). La respuesta es uno de los números indicados en el mismo problema. Un ejemplo de este tipo de problemas es: *Un grupo de 5 músicos interpretan una pieza musical en 10 minutos. Otro grupo de 35 músicos interpretarán la misma pieza musical mañana, ¿cuánto tiempo tardarán en interpretarla?* (Fernández, 2010) en el que la solución sería 10 minutos ya que la obra tiene la misma duración independientemente de la cantidad de músicos que la interpreten. En los problemas aditivos, la relación entre las cantidades es aditiva, modelizándose como $f(x) = x+b$ (Fernández et al., 2008). Un ejemplo de este tipo de problemas sería el siguiente: *Víctor y Ana están corriendo a la misma velocidad en una pista de atletismo. Ana empezó a correr más tarde que Víctor. Cuando Ana había recorrido 5 vueltas, Víctor ya había recorrido 15. Si Ana ha recorrido 30 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá recorrido Víctor?* (Van Dooren et al., 2005). Para resolver esta tarea hay que buscar la ventaja o diferencia que lleva Víctor sobre Ana (15-5=10 vueltas) y luego sumarla a las vueltas finales (30+10=40 vueltas). En los problemas afines, la relación entre las cantidades viene modelizada mediante la función $f(x)=ax+b$ ($a \neq 0,1$, $b \neq 0$). Un ejemplo de este tipo de problema es: *Una locomotora de tren mide 12 metros de longitud. Si hay 4 vagones conectados a la locomotora el tren mide 52 metros. Si hubieran 8 vagones conectados a la locomotora, ¿cuánto mediría el tren?* (Fernández, 2010). Una estrategia de resolución correcta sería: “52–12=40 metros miden 4 vagones, por tanto, 40:4=10 metros cada vagón. Luego si se tienen 8 vagones, éstos medirán 80 metros = 8×10 y el tren medirá 92 metros = 80 metros + 12 metros”.

En nuestro estudio, solo emplearemos los problemas de valor perdido no proporcional de tipo aditivo, ya que la literatura ha mostrado que hay una tendencia a usar estrategias aditivas (correctas en los problemas aditivos) en los problemas proporcionales y a usar estrategias proporcionales (correctas en los problemas proporcionales) en los problemas aditivos (esto está en Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2012; Jiang, Li, Fernández y Fu, 2016).

En estos sub-constructos, las estrategias más usadas son la razón externa o enfoque funcional, la razón interna o enfoque escalar, la reducción a la unidad, la regla de tres, la búsqueda de un denominador común que permita la comparación o el uso de estrategias constructivas (Ben-Chaim, Fay, Fitzgerald, Benedetto, y Miller, 1998; Fernández y Llinares, 2012; Karplus, Adi y Lawson, 1980) para los problemas proporcionales, y el uso de estrategias aditivas para problemas no proporcionales de estructura aditiva. La dificultad más común es no distinguir entre situaciones proporcionales y no proporcionales (Fernández y Llinares, 2012; Karplus et al., 1983; Van Dooren et al., 2009). Por otra parte, las variables de los problemas que afectan al éxito de los estudiantes son: la existencia de razones enteras o no enteras (Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2012; Van Dooren et al., 2009), la posición de la incógnita (Harel y Behr, 1989), el tamaño de los números (Kaput y West, 1994) y la familiaridad de los contextos (Ben-Chaim et al., 1998; Cramer y Post, 1993; Heller, Ahlgren, Post, Behr, y Lesh, 1989).

2.1.2.3. Comparación de razones

Este dominio está formado por los problemas de comparación numérica y de comparación y predicción cualitativa apoyados en la idea de razón. En los problemas de comparación numérica los cuatro valores son dados (a, b, c y d) y el objetivo es determinar qué razón de las dos dadas es mayor o menor. Muchos de estos problemas además requieren interpretar dicha razón (razón como medida). En los problemas de comparación cualitativa hay que evaluar el significado de la razón en un cambio cualitativo cuando cambia una o ambas cantidades (idea de covarianza).

Pensamiento relacional: el pensamiento relacional implica ser capaz de comprender los cambios absolutos y cambios relativos (Lamon, 1995). Esta comparación de cantidades o referentes involucra el concepto matemático de razón en el sentido externo, es decir, de comparación de magnitudes de diferente tipo (Gómez, 2016). Así, un ejemplo sería: *Las 5 personas de la mesa A beben dos botellines de cerveza y 3 refrescos. Las 7 personas de la mesa B beben 3 botellines de cerveza y 4 refrescos. ¿Qué mesa podría llamarse "los bebedores de refrescos"?* (Lamon, 2007, p. 656) (Figura 2.6). Para ver qué mesa es más "bebedora de refrescos" habría que mirarlo en proporción, es decir, en términos relativos. De ese modo, en la mesa A, 3/5 beben refrescos y en la mesa B, 4/7 beben refrescos, por lo que en la mesa A hay más bebedores de refrescos (21/35 y 20/35, respectivamente). Si se mirase de manera absoluta, es decir, sin tener en cuenta el total de personas que hay en la mesa, tendríamos que en la mesa A, 3 beben refrescos y en la mesa B, 4 beben refrescos, por lo que en cantidad de refrescos, la mesa B habría bebido más refrescos.

Figura 2.6. Dibujo problema del sub-constructo pensamiento relacional

Es uno de los sub-constructos más importante del pensamiento requerido para el razonamiento proporcional (Lamon 2005; Llinares, 2003), sin embargo la capacidad para analizar el cambio en términos relativos es difícil para los niños (Pitta-Pantazi y Christou, 2011). Las estrategias que podemos encontrar son tanto absolutas como relativas, aunque en nuestro caso, la finalidad es que los estudiantes adquieran un pensamiento relativo. La dificultad aparece al tener que trasladarse desde el pensamiento aditivo con el que están familiarizados (cambios absolutos) y empezar a pensar relativamente, por lo que es necesario presentar a los niños la elección relativo/absoluto en diferentes contextos (Lamon, 1995).

Proceso unitizing: este proceso implica la construcción de una unidad de referencia a partir de las relaciones entre las cantidades dadas para operar o comparar con esta cantidad (Fernández y Llinares, 2010; Singh, 2000). Para Lamon (2007, p. 630) el proceso unitizing es un "*proceso cognitivo de fragmentación mental o la reestructuración de una cantidad dada en trozos familiares, manejables y de tamaños convenientes con el fin de operar o comparar con la cantidad*". Teniendo en cuenta esta definición, el proceso unitizing se puede aplicar a diferentes tipos de problemas o situaciones: situaciones de agrupamiento con número naturales, situaciones de medida con fracciones, y situaciones de comparación de razones.

El primer caso se trata de ver las diferentes formas en las que agrupar determinados objetos. Por ejemplo, en la siguiente tarea *¿Cómo podemos representar una caja llena de refrescos?* (modificado de Lamon, 1996) se podría entender como 24 latas (cada lata es una unidad), 2 packs de 12 latas (la unidad serían 12 latas), 4 packs de 6 latas (la unidad son 6 latas), o 1 pack de 24 latas (la unidad es toda la caja de refrescos). Otro caso sería cuando nos encontramos con situaciones de medida como: *2/3 de pizza cuestan 5€, ¿cuánto cuestan 4 pizzas?* En este ejemplo, una forma de conocer el coste de las 4 pizzas es verlo como 6 veces 2/3. El último caso son las situaciones de comparación como el siguiente problema de comparación de razones: *4kg de manzanas en una frutería cuestan 5€ y 6kg de manzanas en el mercado cuestan 7€. ¿Qué manzanas son más baratas, las de la frutería o las del mercado?* En este caso, podemos elegir como unidad de referencia 1kg y obtener cuánto cuesta 1kg de manzanas en cada sitio. De este modo, compararíamos 5€/4kg y 7€/6kg, obteniendo 1,25 euros por 1 kilo en la frutería y 1,17 euros por 1 kilo en el mercado, siendo este último más barato. Otra posible opción sería, elegir como unidad para comparar 2kg obteniendo respectivamente 2,5€/2kg y 2,33€/2kg, o bien comparar con 12kg como unidad de comparación, obteniendo 15€/12kg y 14€/12kg, respectivamente.

En el razonamiento proporcional, el proceso cognitivo de formar y usar una unidad formada por varias unidades juega un papel relevante, en particular, en los problemas de comparación de razones. Para poder resolver este tipo de problemas, es necesario identificar una unidad de referencia a partir de la relación entre las cantidades (razones) y usar esta unidad para comparar (proceso unitizing). Una de las dificultades que nos encontramos en este tipo de problema es que los estudiantes son capaces de elegir una unidad que permita la comparación, pero no saben usar dicha cantidad para realizar la comparación. Así, por ejemplo, en el problema anterior, los estudiantes podrían elegir como unidad para comparar "el 1", pero no saber interpretar si lo que están obteniendo son kg/€ o €/kg. Un error común es obtener 4kg/5€=0,8 y 6kg/7€=0,85 y responder que es más barato en la frutería, sin darse cuenta de que están obteniendo la cantidad de kilos que pueden obtener en 1€, por lo tanto, se obtienen más kilos en el mercado.

Razón: Dentro de las diferentes interpretaciones de los números racionales que proponen Behr y sus colaboradores (1992) tenemos el sub-constructo razón. La razón es considerada como una relación entre dos cantidades (Livy y Vale, 2011; Pitta-Pantazi y Christou, 2011). Freudenthal define la razón como "una función de un par de números ordenados o valores de una magnitud". Esta relación puede ser parte-todo, parte-parte o todo-todo. La importancia de la idea de razón radica en la posibilidad de comparar dos razones y hablar de su igualdad o no independientemente de su tamaño. Es decir, el significado de razón viene de poder decir "A es a B" como " C es a D", sin anticipar que "A es a B" se puede reducir a un número (Fernández, 2009).

Así por ejemplo, en la siguiente tarea: *Hay 100 asientos en un teatro, 30 en el balcón y 70 en el patio principal. Se han vendido ochenta entradas para el primer pase incluyendo todos los asientos del patio principal. ¿Cuál es la razón entre los asientos del balcón y los del patio principal?* (Lamon, 2005, p.198) nos pregunta por la relación parte-parte que en este caso sería 30/70. Si preguntásemos ahora por la razón entre los asientos del balcón y el total de asientos que sería 30/100 entonces sería la relación parte-todo. En nuestro estudio, consideramos este sub-constructo en este dominio dado que la razón no es vista como un número sino como un índice comparativo (Carraher, 1996; Lamon, 1995). Por otra parte, también es posible cuantificar el valor de la razón. Por ejemplo: *Hemos comprado dos lienzos que miden 25cmx45cm y 40cmx65cm, respectivamente. ¿Qué lienzo es más cuadrado?* Este problema implica cuantificar la idea de "ser más cuadrado" como la razón de los lados del lienzo (cuadrado) que se aproxime más a 1. En este caso, las razones son 25/45=0,56 y 40/65=0,62, respectivamente, por lo que el segundo lienzo será más cuadrado.

Un error común en la resolución de este problema es el uso de una aproximación aditiva, es decir, buscar la diferencia que más se aproxima a 0 (45 – 25 y 65 – 40).

Covarianza - cualitativo: en este sub-constructo, los estudiantes tienen que entender que dos cantidades están relacionadas de tal manera que cuando cambia una cantidad, cambia la otra también de una manera particular con respecto a la primera cantidad (Pitta-Pantazi y Christou, 2011), es decir, comprender que las cantidades que componen una razón pueden covariar (cambiar conjuntamente) de manera que la relación entre ellas permanezca invariante (sin cambio) (Lamon, 1995). Un ejemplo para este sub-constructo sería: *Ayer compartiste algunas galletas con algunos amigos. Hoy, has compartido menos galletas con más amigos. ¿Todas las personas han conseguido más, menos o la misma cantidad que recibieron ayer?* (Lamon, 2007, p. 631). Como el problema dice "menos" galletas con "más" amigos, sabremos que sí que hay solución, por lo tanto al ser con "más" personas saldrán a "menos" galletas que ayer (porque además tienen "menos" galletas). Si el problema hubiese sido, por ejemplo, menos galletas y menos personas no podríamos saber si habrían conseguido más, menos o la misma cantidad porque no tendríamos suficiente información.

Los problemas relacionados con este sub-constructo se pueden presentar de manera visual o verbal (con cantidades o sin cantidades) con el objetivo de interpretar cómo cambian las cantidades, unas en relación a las otras. En el caso cualitativo deben de saber identificar que los problemas de "más-menos" o "menos-más" tienen solución, sin embargo, en los problemas de "más-más" o "menos-menos" no se puede saber lo que se pregunta (ver Tabla 2.1). En el caso de utilizar cantidades se les puede pedir determinar si un número racional aumenta o disminuye teniendo en cuenta los cambios específicos en el numerador y denominador (Pitta-Pantazi y Christou, 2011).

Tabla 2.1. Posibilidades para resolver las tareas

Cambio en la cantidad de galletas por persona			
	Cambio en el número de personas		
Cambio en el número de galletas	+	**-**	**0**
+	?	+	+
-	-	?	-
0	-	+	0

Conocer y comprender los sub-constructos del esquema fraccionario, la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, y los sub-constructos vinculados a los problemas de comparación de razones es un aspecto relevante del conocimiento matemático para enseñar de los estudiantes para maestro en el dominio del razonamiento proporcional.

2.2. CONOCIMIENTO DEL MAESTRO Y LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE

El conocimiento del profesor desempeña diferentes roles en la resolución de las tareas que articulan su práctica profesional y ha sido analizado desde diferentes perspectivas (Ball et al., 2008; Godino, 2009; Godino, Pino-Fan, 2013; Hill et al., 2007; 2008; Muñoz, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes y Climent, 2015; Rowland y Ruthven, 2011). El conocimiento de matemáticas para la enseñanza (MKT, Ball et al., 2008) le permite identificar lo que puede ser relevante de las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y le permite apoyar su interpretación de los hechos y evidencias identificados como relevantes. De esta manera, el uso del conocimiento de matemáticas para la enseñanza (Llinares, 2013) juega un papel fundamental en el desempeño de tareas profesionales como interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes) (Jacobs et al., 2010; Mason, 2002; Sherin et al., 2011).

2.2.1. Conocimiento matemático para la enseñanza

Shulman (1986) fue el primero que identificó los conocimientos necesarios para enseñar: conocimiento de la materia (*subject matter knowledge*), conocimiento del contenido pedagógico (*pedagogical content knowledge*) y conocimiento del currículum (*curricula knowledge*). Posteriormente, Ball et al. (2008), a partir del modelo de Shulman, se centran de forma específica en el conocimiento que requiere el profesor para enseñar matemáticas y establecen el modelo *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT) (Figura 2.7), definiéndolo como "el conocimiento matemático necesario para realizar tareas de la enseñanza de las matemáticas" (Ball et al., 2008, p. 399). En este modelo, señalan dos grandes dominios de conocimiento: (1) *Conocimiento del Contenido a Enseñar* (SMK) que se refiere al conocimiento de contenido matemático y (2) *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK) que se refiere a la integración simultánea de las matemáticas y la forma en la que los estudiantes la aprenden, que a su vez subdividen cada uno de ellos en tres subdominios (Figura 2.7). Dentro del dominio sobre el conocimiento del contenido a enseñar proponen tres subdominios: conocimiento común del contenido (*common content* *knowledge*, CCK), conocimiento especializado del contenido (*specialised content knowledge*, SCK) y conocimiento del horizonte del contenido (*horizon content knowledge*, HCK). Dentro del dominio sobre el conocimiento didáctico del contenido consideraron el conocimiento curricular del contenido (*knowledge of content and curriculum*; KCC), el conocimiento del contenido y de los estudiantes (*knowledge of content and students*, KCS), y el conocimiento del contenido y de la enseñanza (*knowledge of content and teaching*, KCT).

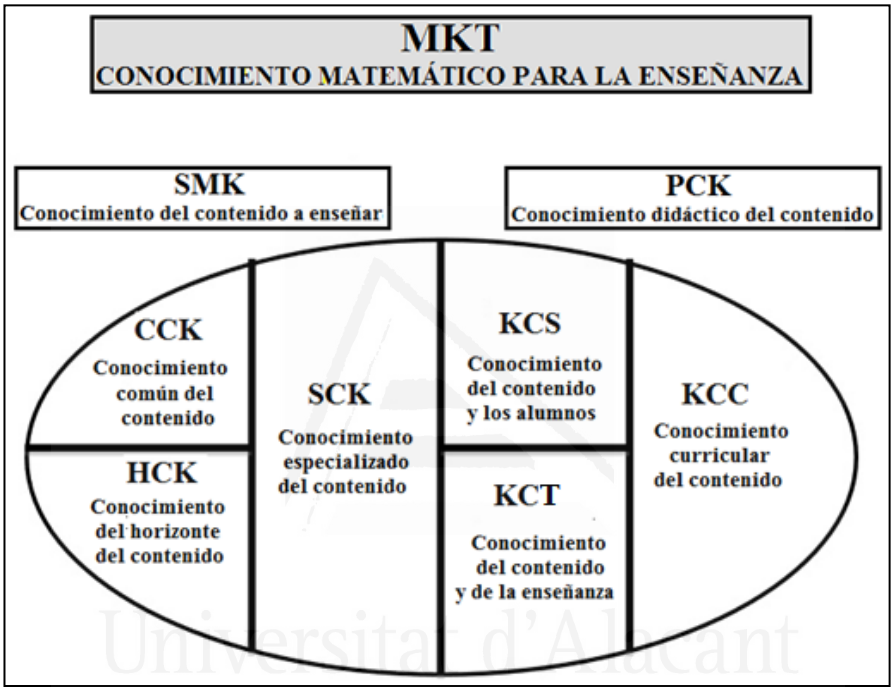


Figura 2.7. Dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball et al., 2008; p. 403)

Ball y sus colegas (2008) caracterizan los diferentes dominios de conocimiento como:

- *Conocimiento común del contenido* (CCK): es el conocimiento y las habilidades matemáticas necesarias para resolver tareas que no son exclusivas de la enseñanza e incluye las habilidades del maestro para resolver problemas matemáticos, operar correctamente, aplicar definiciones y propiedades, etc. En otras palabras, es el conocimiento que tiene cualquier persona educada para el correspondiente nivel de análisis (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013).

- *Conocimiento especializado del contenido* (SCK): es el conocimiento de matemáticas que permite a los profesores implicarse en tareas específicas de la enseñanza, que incluyen cómo representar las ideas matemáticas a los estudiantes, proporcionar explicaciones matemáticas para las reglas y procedimientos y examinar y comprender métodos de resolución no usuales a los problemas. Luego este conocimiento es aquel que es exclusivo del profesor de matemáticas para desarrollar su profesión, frente al conocimiento del contenido común, que es aquel que puede poseer cualquier usuario de la matemática en su labor profesional, como pudiera ser un ingeniero, físico, o biólogo (Montes, Contreras y Carrillo, 2013). Por tanto, este conocimiento incluye, por ejemplo, las habilidades del profesor para distinguir, averiguar, valorar e interpretar la validez de las respuestas de los estudiantes y explicar el origen de sus errores.
- *Conocimiento del horizonte del contenido* (HCK): es el conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas y sus relaciones con otros contenidos matemáticos, e incluye las habilidades del profesor para saber la importancia de un determinado contenido matemático y para enlazarlo con otros contenidos previos y futuros. Por tanto, el conocimiento del horizonte matemático se observa cuando los profesores saben cómo conectar diferentes ideas matemáticas a las matemáticas que se enseñan y el currículum que sus estudiantes tendrán en los siguientes años, es decir, este conocimiento se refiere al conocimiento de lo anterior y posterior al nivel que se enseña (Fernández y Figueiras, 2010).
- *Conocimiento del contenido y de los estudiantes* (KCS): es el conocimiento que combina los conocimientos sobre matemáticas y sobre los estudiantes e incluye habilidades de los profesores para predecir lo que a los alumnos les parecerá fácil, difícil, confuso o interesante y motivador, o los errores que cometerán con mayor frecuencia. Hill et al. (2008) definen el KCS como el conocimiento del contenido entrelazado con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden sobre un contenido particular y los errores comunes que surgen durante este proceso.

- *Conocimiento del contenido y de la enseñanza* (KCT): combina los conocimientos sobre las matemáticas y sobre su enseñanza. Los profesores deben de saber cómo llevar a cabo la instrucción, es decir, los procedimientos y estrategias más adecuadas para enseñar un contenido específico, con qué ejemplos empezar y con qué ejemplos profundizar, y conocer las ventajas y desventajas de la instrucción elegida para enseñar algún contenido matemático. En otras palabras, saber las decisiones de acción que hay que tomar en cada momento según si hay que reforzar o ampliar el conocimiento.
- *Conocimiento curricular del contenido* (KCC): comprende los contenidos que deben aprender los estudiantes (programas, objetivos, contenidos, orientaciones curriculares,…) e incluye los materiales y recursos que utiliza el profesor en su práctica docente.

Estos dominios del conocimiento del profesor permiten subrayar aspectos específicos del conocimiento del profesor que debemos considerar cuando analizamos la manera en la que interviene dicho conocimiento para resolver tareas vinculadas a la enseñanza de las matemáticas.

2.2.2. Conocimiento matemático para la enseñanza y la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

El conocimiento de las matemáticas para la enseñanza (MKT) y el uso de este conocimiento que hace el profesor en su práctica docente (por ejemplo en tareas profesionales como interpretar respuestas de estudiantes reconociendo características de la comprensión) son constructos dependientes. Llinares (2013) caracteriza la noción de *competencia docente* como ser capaz de utilizar el conocimiento de forma adecuada para llevar a cabo tareas de enseñar matemáticas. Un aspecto particular de esta competencia es la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, en la que se centra nuestro estudio.

La conceptualización de la competencia mirar profesionalmente ha sido abordada desde diversas perspectivas. Esta competencia permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas (Mason, 2002; Sánchez-Matamoros et al., 2012). Mason (1998, 2002) enfatizó la idea de que los maestros necesitan algo más que el conocimiento de matemáticas ya que necesitan ser conscientes de lo que explican o preguntan a los alumnos para inferir lo que los alumnos estén entendiendo.

Mason (2002) considera la competencia docente mirar profesionalmente como un elemento fundamental de la enseñanza, caracterizada por: (i) identificar aspectos relevantes a partir de un objetivo que guía la observación (*intentional noticing*), (ii) describir los aspectos observados (*making and recording*), (iii) reconocer alternativas de acción (*recognizing choices)*, y (iv) validar lo observado intentando que los otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido (*validating with others*). Por otra parte, Van Es y Sherin (2002) identifican tres aspectos clave en esta competencia: (i) identificar aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje; (ii) utilizar el conocimiento del contexto en el que se desarrollan para reflexionar sobre las interacciones que suceden en el aula y (iii) realizar conexiones entre lo acaecido en el aula y los principios generales sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Estas perspectivas sobre la competencia docente mirar profesionalmente subrayan la importancia de identificar los aspectos relevantes en las situaciones de enseñanza-aprendizaje e interpretarlos en función de las referencias teóricas previas. Desde esta perspectiva y de acuerdo con Llinares (2013, p. 84) entenderemos el término "mirada profesional" como "*un componente de la práctica profesional del maestro de matemáticas que puede caracterizarse por el conocimiento matemático del maestro que le facilita:*

- *la identificación de lo que es relevante desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas en un contexto de enseñanza, y*
- *el uso de esta identificación para interpretar evidencias de acuerdo con los objetivos deseados.*"

En nuestro estudio, nos centramos en un aspecto particular de esta competencia, en la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio del razonamiento proporcional.

2.3. MIRAR PROFESIONALMENTE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES EN EL DOMINIO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

El constructo mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes ha sido conceptualizado por Jacobs y colaboradores (2010) como el conjunto de tres destrezas interrelacionadas:

- *Prestar atención* a las estrategias usadas por los estudiantes. Esta destreza se refiere al grado en el que los profesores prestan atención a los detalles matemáticos en las estrategias usadas por los estudiantes.
- *Interpretar* la comprensión matemática de los estudiantes. Esta destreza hace referencia al grado en el que el razonamiento de los profesores es consistente tanto con los detalles matemáticos identificados en las estrategias como con la investigación existente en relación a la comprensión y desarrollo del concepto matemático en los estudiantes.
- *Decidir* cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes. Esta última destreza se centra en el grado en el que los profesores usan lo que han aprendido sobre la comprensión de los estudiantes en una situación específica para proponer otras actividades que ayuden a los estudiantes a progresar conceptualmente.

Desde esta conceptualización, la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes implica interpretar el pensamiento matemático de los mismos, por lo que los estudiantes para maestro deben trasladarse desde la descripción de acciones del profesor a las conceptualizaciones de los estudiantes y desde comentarios evaluativos a comentarios interpretativos basados en evidencias (Bartell et al., 2013; van Es, 2011). Por tanto, esta competencia demanda algo más que marcar como correctas o incorrectas las respuestas de los estudiantes. Esta competencia demanda examinar de qué manera las respuestas de los estudiantes son o no significativas desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas (Hines y McMahon, 2005; Wilson et al., 2013).

En nuestro estudio, añadimos a la conceptualización dada por Jacobs y colaboradores (2010) una destreza más, la de identificar los elementos matemáticos relevantes del problema matemático. De esta manera entenderemos la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes como:

- Identificar los elementos matemáticos relevantes del problema matemático.
- Reconocer características de la comprensión de los estudiantes (incluye *prestar atención* a las estrategias e *interpretar*) basándose en el uso de los elementos matemáticos previamente identificados en los problemas.
- Tomar decisiones para consolidar o desarrollar la comprensión según lo que se ha reconocido anteriormente.

Identificar los elementos matemáticos relevantes en los problemas que los estudiantes tienen que resolver, permite a los profesores estar en una posición mejor para interpretar la comprensión de los estudiantes y tomar decisiones de acción relevantes para ayudarles a desarrollar su conocimiento (Llinares, 2013). Estas destrezas intersecan el uso explícito por parte de los estudiantes para maestro de tres tipos de conocimiento del MKT (Ball et al, 2008): el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y de los estudiantes y el conocimiento del contenido y de la enseñanza.

Para identificar los elementos matemáticos relevantes del problema, los estudiantes para maestro tienen que tener el conocimiento para resolver cada uno de los problemas relacionados con cada sub-constructo implicado en el desarrollo del razonamiento proporcional. Sin embargo, este conocimiento tiene que ir más allá que conocer "algunos procedimientos" que permitan resolver los problemas (división entre cantidades, reglas de tres,…), para poder proporcionar una explicación de cómo intervienen los elementos matemáticos implicados en la resolución del problema. Por ejemplo, los estudiantes para maestro podrían resolver el problema que implica el proceso unitizing haciendo las divisiones entre los kilos y los euros, sin reconocer la importancia del elemento matemático "identificar una razón (una unidad) que permita comparar" (es decir, podrían aplicar un procedimiento como la división que es correcto pero sin evidencias de una comprensión conceptual). Sin embargo, para poder reconocer evidencias de la comprensión de los elementos matemáticos implicados en el problema en las respuestas de los estudiantes de primaria es necesario identificar el elemento matemático implicado, pues los estudiantes de primaria pueden utilizar estrategias muy diversas (dependiendo de la unidad (razón) que utilicen para comparar) que se basan en este elemento. La comprensión del proceso unitizing por parte de los estudiantes de primaria, las estrategias utilizadas por éstos y las dificultades están ligadas a este elemento. Por tanto, los estudiantes para maestro tienen que usar su conocimiento especializado sobre los sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional para poder realizar esta tarea profesional (identificar los elementos matemáticos relevantes del problema y así posteriormente, reconocer evidencias de la comprensión de dicho elemento en las estrategias usadas por los estudiantes de primaria).

Para reconocer características de la comprensión de los estudiantes, los estudiantes para maestro tienen que identificar los elementos matemáticos de los problemas y usarlos para prestar atención a los detalles de las respuestas de los estudiantes e interpretar la comprensión puesta de manifiesto por ellos. Los estudiantes para maestro tienen que proporcionar explicaciones matemáticas de los procedimientos usados por los estudiantes, examinar y comprender métodos de resolución (a veces no usuales) de los problemas e identificar los errores cometidos por los estudiantes, para poder inferir características de la comprensión de los estudiantes. Por tanto, los estudiantes para maestro tienen que usar su conocimiento especializado sobre los sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional y su conocimiento del razonamiento proporcional y de los estudiantes para poder realizar esta tarea profesional (reconocer características de la comprensión). Por ejemplo, en los problemas que implican la relación parte-todo como una interpretación de las fracciones, el estudiante para maestro debe identificar los elementos matemáticos del problema como la congruencia de las partes, la identificación de la unidad y de la fracción unitaria para poder reconocerlos en las respuestas de los estudiantes. O por ejemplo, el problema de proceso unitizing, los estudiantes para maestro deben identificar las diferentes estrategias usadas por los estudiantes centradas en el uso de diferentes unidades (razones) que le permiten comparar y conocer los principales errores que cometen los estudiantes, como el uso de estrategias aditivas o la interpretación incorrecta de la razón (kg/€ o €/kg).

Por último, para tomar decisiones para consolidar o desarrollar la comprensión de los estudiantes, los estudiantes para maestro tienen que conocer lo que a los alumnos les parecerá más fácil o difícil, los errores que cometen con más frecuencia, cómo los estudiantes desarrollan la comprensión de los conceptos matemáticos y qué ejemplos proponer. Los estudiantes para maestro tienen que usar su conocimiento del razonamiento proporcional y de los estudiantes y su conocimiento del razonamiento proporcional y de la enseñanza para poder realizar esta tarea profesional. Por ejemplo, para proponer un problema de valor perdido proporcional o un problema de comparación, el estudiante para maestro debe de saber que el uso de razones enteras facilita la resolución del problema y el uso de razones no enteras lo dificulta, por tanto, dependiendo de la comprensión identificada podrán modificar la actividad de manera pertinente.

Cabe mencionar que para tomar decisiones, también está de manera implícita, el uso de otros conocimientos, como el conocimiento curricular del contenido ya implica la elaboración de materiales y recursos en esta toma de decisiones y el conocimiento matemático del horizonte puesto que es necesario que tengan en cuenta la trayectoria del contenido matemático (en este caso el razonamiento proporcional) a lo largo de toda la etapa educativa para diseñar actividades que ayuden a progresar conceptualmente.

Cuando los estudiantes para maestro aprenden a reconocer características de la comprensión de los estudiantes deberían ser capaces de reconocer el papel que juega comprender los elementos matemáticos relevantes de cada problema para ayudar a los estudiantes a avanzar conceptualmente. En este contexto, el constructo *Key Developmental Understanding* (KDU) propuesto por Simon (2006) puede usarse para examinar cómo los estudiantes para maestro relacionan el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y de los estudiantes y el conocimiento del contenido y de la enseñanza, cuando tienen que interpretar respuestas de estudiantes y tomar decisiones de acción en base a la comprensión identificada en las respuestas de los estudiantes.

2.3.1. Mirar profesionalmente y el constructo Key Developmental Understanding (KDU) en el dominio del razonamiento proporcional

El Key Developmental Understanding implica la comprensión de un elemento matemático que conlleva “un avance conceptual por parte de los estudiantes”. Es decir, "un cambio en la habilidad de los estudiantes para pensar sobre y/o percibir determinadas relaciones matemáticas" (p. 362). De esta manera, "un KDU en matemáticas es la comprensión de un elemento matemático que implica un avance conceptual que es importante para desarrollar un concepto. Se identifica un cambio cualitativo en la capacidad de los estudiantes para pensar y percibir determinadas relaciones matemáticas, es decir, un cambio significativo en las estructuras asimilativas que los estudiantes tienen disponibles" (p. 336). Desde esta perspectiva, conocer el Key Developmental Understanding de los conceptos matemáticos podría ayudar a los estudiantes para maestro a comprender cómo los estudiantes dan sentido a ideas matemáticas particulares desde una perspectiva de progreso.

Conocer lo que podría considerarse un Key Developmental Understanding en un dominio matemático específico está en la intersección del conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS) y del conocimiento especializado del contenido (SCK). Desde nuestro punto de vista, identificar lo que constituye comprender un elemento matemático específico como un avance conceptual (KDU) en la comprensión de un concepto podría ayudar a los estudiantes para maestro a reconocer evidencias de la comprensión en respuestas de estudiantes y a proponer actividades que ayuden a los estudiantes a progresar conceptualmente.

En este estudio, los KDU serían la comprensión de los elementos matemáticos clave de cada uno de los sub-constructos del razonamiento proporcional. Por ejemplo, uno de los procesos clave en la construcción del esquema fraccionario es la coordinación de las fracciones unitarias como unidades iterativas con la idea de la fracción como una unidad múltiple (razonamiento up and down). Dicha coordinación constituye el razonamiento up and down que puede ser entendido como una manifestación de un avance conceptual en el aprendizaje del esquema fraccionario por parte de los estudiantes (KDU). Otro ejemplo en el dominio comparación de razones se da cuando los estudiantes para maestro son capaces de reconocer el uso de diferentes unidades que permiten comparar diferentes situaciones (proceso unitizing). Reconocer el desarrollo del proceso unitizing como un avance conceptual en la comprensión de la idea de razón como parte del desarrollo del razonamiento proporcional forma parte de la competencia que estamos denominando mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Por tanto, el maestro debe identificar los elementos matemáticos que intervienen en cada uno de los problemas vinculados a los sub-constructos del razonamiento proporcional para reconocerlos en la resolución del estudiante y darse cuenta de que constituye un avance en la comprensión conceptual del contenido matemático (Simon, 2006).

Nuestro estudio se apoya en la hipótesis de que la identificación como un avance conceptual (KDU) por parte de los estudiantes para maestro de estos elementos matemáticos, les ayudará a centrar su mirada sobre las características de la comprensión de los estudiantes y sobre las propuestas de actividades que puedan apoyar el progreso de sus estudiantes.

2.4 OBJETIVO Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Teniendo en cuenta que nuestro objetivo es caracterizar cómo estudiantes para maestro resuelven problemas matemáticos del razonamiento proporcional e interpretan respuestas de estudiantes en los sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional, nos hemos planteado las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo resuelven los estudiantes para maestro problemas relacionados con los diferentes sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional?
- ¿Cómo los estudiantes para maestro identifican los elementos matemáticos vinculados a los sub-constructos del razonamiento proporcional y cómo usan esos elementos para interpretar respuestas de estudiantes a estos problemas (KDU)?
- ¿Qué tipo de decisiones toman los estudiantes para maestro para ayudar a los estudiantes a progresar conceptualmente teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes?
- ¿Qué relación hay entre cómo los estudiantes para maestro resuelven los problemas y cómo interpretan las respuestas de los estudiantes?

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se describen los participantes y el contexto, los instrumentos de recogida de datos y su aplicación, y el análisis de datos llevado a cabo.

3.1. PARTICIPANTES Y CONTEXTO

Los participantes del estudio fueron 91 estudiantes para maestro (EPM) de educación primaria matriculados en el *Grado en Maestro en Educación Primaria* de la Universidad de Alicante. Este grado tiene una duración de cuatro cursos (8 semestres) y ofrece formación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las ciencias experimentales y sociales y la lengua (español, inglés y la lengua vernácula), formación básica en pedagogía y psicología, y la realización de prácticas de enseñanza en las escuelas. Previamente a la recogida de datos, los estudiantes para maestro habían cursado una asignatura centrada en Sentido Numérico (primer curso) y otra centrada en Sentido Geométrico (segundo curso).

Los datos fueron recogidos durante el tercer curso de este grado cuando los estudiantes para maestro cursaban la asignatura *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* centrada en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria en diferentes dominios matemáticos: números y operaciones, relación entre la aritmética y el álgebra, geometría, medida y tratamiento de la información. Esta asignatura consta de 60 horas presenciales (6 ECTs) distribuidas en 30 sesiones de 2 horas y está estructurada en 9 temas (Tabla 3.1).

Tabla 3.1. Temas y sesiones de la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria

Temas		**Total sesiones**
1.	Construcción del número natural y representación. Sentido numérico	4
2.	Algoritmos	2
3.	Problemas	4
4.	Fracciones y decimales	5
5.	Razonamiento proporcional	4
6.	Desarrollo del pensamiento relacional	3
7.	Magnitudes y medida	2
8.	Geometría: figuras planas y 3D	2
	Geometría: transformaciones	2
9.	Tratamiento de la información	2

En cada tema, primero se repasa el contenido matemático (estudiado en las asignaturas Sentido Numérico y Sentido Geométrico) y luego se realizan actividades centradas en desarrollar la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Para ello, se plantean actividades en las que los estudiantes para maestro deben identificar los elementos matemáticos del problema y analizar respuestas de estudiantes (o bien en papel o bien en vídeo) para reconocer características de la comprensión de diferentes estudiantes. Finalmente, los estudiantes para maestro proponen actividades con diferentes objetivos, atendiendo a la comprensión identificada de cada estudiante.

El tema “Fracciones y decimales” se centra en la enseñanza-aprendizaje de los significados del concepto de fracción como parte-todo, como medida-recta numérica, como medida-densidad, como cociente-repartos equitativos y como operador, y del razonamiento up and down. El tema “Razonamiento Proporcional” se centra en la enseñanza-aprendizaje de la interpretación y comparación de razones y la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales: razón, proceso unitizing, covarianza, pensamiento relacional, y problemas de situaciones proporcionales y no proporcionales. Durante estos dos temas, se les proporciona a los estudiantes para maestro información teórica, procedente de la literatura, sobre cómo los estudiantes de primaria comprenden los distintos conceptos: fracciones y razonamiento proporcional. Se incide en los elementos matemáticos clave para la comprensión de estos conceptos (KDU), en las distintas estrategias de resolución, niveles de comprensión y en los errores y dificultades más comunes. Los estudiantes para maestro, durante el desarrollo de estos temas ven vídeos de estudiantes resolviendo problemas de fracciones o que implican un razonamiento proporcional y analizan respuestas reales de estudiantes de primaria para intentar identificar evidencias de la comprensión de los estudiantes. En este contexto, la información teórica procedente de la literatura sobre cómo los estudiantes de primaria comprenden estos conceptos, actúa como guía para ayudar a los estudiantes para maestro a centrar su atención sobre los elementos matemáticos del problema y las características de la comprensión del estudiante.

3.2. INSTRUMENTOS Y PROCEDIMIENTO DE RECOGIDA DE DATOS

Se diseñaron dos cuestionarios, uno sobre el conocimiento de matemáticas y otro sobre cómo los estudiantes para maestro reconocían evidencias de la comprensión de los estudiantes del esquema fraccionario, de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, y de la comparación de razones. El cuestionario sobre el conocimiento de matemáticas fue contestado antes de estudiar los temas sobre “Fracciones y decimales” y “Razonamiento proporcional” los cuales tenían una duración de 5 y 4 sesiones de dos horas, respectivamente, con el objetivo de conocer el conocimiento matemático que tenían los estudiantes para maestro. El cuestionario centrado en cómo reconocían evidencias de la comprensión de los estudiantes del razonamiento proporcional fue contestado después de los temas “Fracciones y decimales” y “Razonamiento proporcional”, con el objetivo de examinar qué habían aprendido.

La Figura 3.1. muestra el proceso de recogida de datos. Primero fue contestado el Cuestionario 1, luego se explicaron los temas de fracciones y razonamiento proporcional y finalmente se contestó el Cuestionario 2.

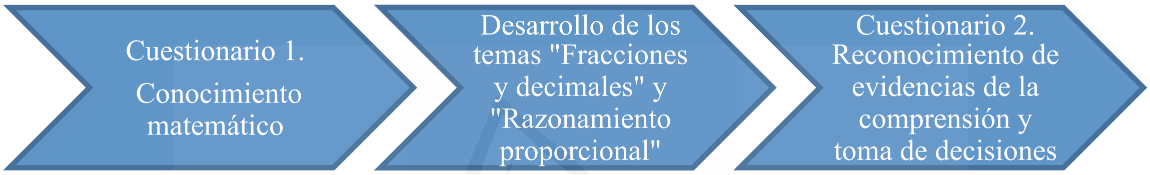


Figura 3.1. Recogida de datos

Para elaborar los dos cuestionarios se tuvo en cuenta investigaciones previas sobre el desarrollo del razonamiento proporcional en educación primaria (Behr et al., 1992; Cramer et al., 1993; Lamon, 2007; Niclolau y Pitta-Pantazi, 2016; Pitta-Pantazi y Christou, 2011) en relación a las dificultades que presentan en diferentes tipos de problemas, las características de los datos presentados (contextos discretos y continuos, contextos más o menos familiares, razones enteras o no enteras, fracciones unitarias o no unitarias, tamaño de los datos, unidades no implícitas, etc.), y las posibles estrategias (correctas e incorrectas; enfoque funcional, enfoque escalar, procedimientos constructivos, regla de tres, aditiva) para resolver los problemas. A continuación, describimos cada uno de los cuestionarios.

3.2.1. Cuestionario 1: Conocimiento matemático

El Cuestionario 1 consta de 12 problemas relacionados con los sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional explicados en el marco teórico (Tabla 3.2). Había 6 problemas relacionados con el esquema fraccionario, 2 problemas de distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y 4 problemas relacionados con la interpretación y comparación de razones (tanto comparaciones cuantitativas como cualitativas). Algunos de estos problemas se seleccionaron o fueron modificados de investigaciones previas (Buforn y Fernández, 2014a; Lamon, 2005, 2007; Pitta-Pantazi y Christou, 2011).

Tabla 3.2. Estructura del Cuestionario 1

Estructura del cuestionario	**Nº de problemas**
Bloque A: esquema fraccionario	6
Bloque B: distinción de situaciones proporcionales	2
Bloque C: interpretación y comparación de razones	4

Describimos a continuación las características de los diferentes problemas y los elementos matemáticos relevantes que deben ser considerados en su resolución.

BLOQUE A: Esquema fraccionario

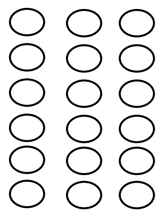
En los seis problemas sobre el esquema fraccionario consideramos los siguientes sub-constructos: parte-todo, medida como recta numérica, medida como densidad, cociente como reparto equitativo, operador, y razonamiento up and down.

Problema 1: Parte-todo:

Contesta la siguiente cuestión:

¿Cuántos puntos son 2/3 del conjunto dado?

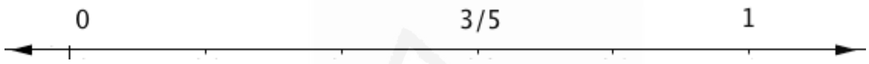
Justifica tu respuesta.



El problema *parte-todo* pide hallar 2/3 del conjunto formado por 18 puntos (contexto discreto) (Lamon, 1999, p. 73; Pitta-Pantazi y Christou, 2011). Los elementos matemáticos relevantes en este problema son la relación parte-todo en contexto discreto, la representación de fracciones propias, la unidad y la fracción unitaria. Una posible estrategia consiste en realizar tres grupos de puntos iguales (cada grupo representaría 1/3 - fracción unitaria) y seleccionar dos (1/3 y 1/3 - iterar 2 veces la fracción unitaria), siendo la solución 12 puntos. Otra estrategia es el uso de la fracción como operador, es decir, 2/3 de 18 puntos (2/3 × 18). El objetivo de este problema es determinar el uso de la idea de fracción parte-todo entendida como una situación en la que se divide un conjunto de objetos discretos en subgrupos del mismo tamaño (Naik y Subramaniam, 2008) y/o el uso de la fracción como operador.

Problema 2: Medida - recta numérica:

Localiza 2/10 en la recta numérica. Justifica tu respuesta.



El problema 2, *recta numérica,* pide localizar la fracción 2/10 en una recta numérica en la que está representado el segmento [0,1] dividido en cinco partes congruentes y en la que se ha representado la fracción 3/5. Los elementos matemáticos relevantes en este problema son el uso de la recta numérica como modo de representación de la relación parte-todo sin ningún distractor perceptual y el uso de la fracción unitaria como unidad iterativa. Una forma de resolver este problema es identificar la fracción unitaria (1/5) y reconocer la fracción 1/10 como la mitad de 1/5 o considerar la fracción equivalente a 3/5, es decir, 6/10, y buscar la fracción pedida 2/10 como la tercera parte de 6/10. El objetivo es conocer si el estudiante para maestro es capaz de localizar una fracción en la recta numérica cuando se da una fracción de referencia con denominadores múltiplos y teniendo en cuenta las referencias dadas en la recta numérica.

Problema 3: Medida - densidad:

Encuentra dos fracciones que estén entre 1/6 y 1/5. Explica cómo lo has hecho.

El problema *medida-densidad* demanda encontrar fracciones entre dos fracciones unitarias, 1/6 y 1/5, reflejando la densidad de los números racionales

(Lamon, 2005, p. 122; Pitta-Pantazi y Christou, 2011). Los elementos matemáticos relevantes en este problema son la densidad del conjunto de los números racionales y la aplicación de diferentes procedimientos para determinar fracciones equivalentes como proceso para identificar fracciones entre otras dos. La característica de este problema es que al obtener fracciones equivalentes hallando el mínimo común múltiplo para conseguir el denominador, los numeradores son números naturales consecutivos (5/30 y 6/30), por lo que hay que encontrar otras fracciones equivalentes con mayor denominador (Buforn y Fernández, 2014a). El objetivo de este problema es determinar la comprensión de los estudiantes para maestro de la idea de densidad, es decir, que siempre es posible encontrar nuevas fracciones entre dos dadas.

Problema 4: Cociente:

Cuatro personas van a compartir 3 pizzas idénticas de pepperoni. ¿Cuánto le tocará a cada persona si todos comerán la misma proporción de pizza? Haz un dibujo que muestre qué parte le toca a cada persona.

El problema *cociente* pide repartir 3 pizzas entre 4 personas con la ayuda de un dibujo para facilitar la resolución (modificado de Lamon, 2005, p. 139; Pitta-Pantazi y Christou, 2011). Los elementos matemáticos son la fracción como cociente y las fracciones unitarias. Una posible estrategia es dividir cada pizza en 4 partes, por lo que habría 12 trozos a repartir entre los 4. Si a cada comensal se le da ¼ de cada pizza, cada uno recibirá ¼ + ¼+ ¼ (que puede ser visto como ¾ de una pizza). Resolver el problema con un dibujo permite visualizar las fracciones como una relación parte-todo. En esta situación podemos considerar una respuesta como "3/4 de pizza" o por otra parte "3/12 de total de las 3 pizzas", permitiendo hacer explícito lo que se considera como unidad en cada caso, o una pizza o el total de 3 pizzas. El objetivo de este problema es considerar en qué medida los estudiantes para maestro hacen explícita la idea de unidad a la que hace referencia cada fracción en situaciones de reparto equitativo cuando es posible interpretar que se tienen varios todos (Kieren, 1993).

Problema 5. Operador:

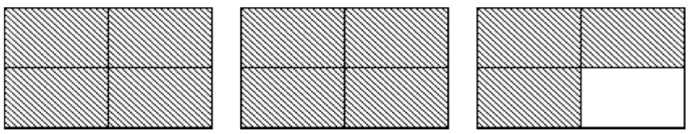
El profesor le dijo a Nicolás que hiciese unas fotocopias. Nicolás cometió un error y apretó el botón que reduce el tamaño de cada copia a ¾. ¿Cuánto debe aumentar Nicolás el tamaño de las copias reducidas para conseguir el tamaño original?

El problema *operador* pide usar la idea de operador inverso que permite aumentar la copia para volver al tamaño original después de haber sufrido una reducción de 3/4 (relación multiplicativa $a/b \cdot b/a = 1$) (modificado de Lamon, 2005, p. 150; Pitta-Pantazi y Christou, 2011). Este problema es diferente a los problemas usuales de operador, ya que no se pide que hallen la parte de un todo (o la parte de otra parte), sino la inversa, esto es, la fracción que se necesitaría para poder conseguir el todo (reconstrucción de la unidad). Por tanto, si se ha reducido ¾, hay que ampliar 4/3 para volver al tamaño original. En este tipo de problema el error más común es pensar de forma aditiva "cuánto falta para llegar al original" (Buforn y Fernández, 2014a).

La dificultad de este problema aparece al necesitar reconceptualizar la idea de unidad que emerge en relación con la idea de operador (Buforn y Fernández, 2014a). El objetivo de este problema es obtener información sobre la idea de operador inverso y sobre la reconstrucción de la unidad cuando aparece de forma implícita en un contexto de reducciones y ampliaciones (Behr et al., 1993). Así, los elementos matemáticos relevantes que deben ser considerados son la fracción como operador y las relaciones multiplicativas entre fracciones inversas.

Problema 6. Razonamiento up and down:

La parte sombreada de esta figura representa $3\frac{2}{3}$. ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños?



El problema *razonamiento up and down* pide que se halle la fracción que representa 4 rectángulos pequeños en un contexto continuo en el que dada la representación de una cantidad (el número mixto 3 + 2/3), hay que identificar la unidad (3 rectángulos pequeños) y la fracción unitaria (1 rectángulo pequeño) para responder qué fracción correspondería a 4 rectángulos pequeños (1+1/3) (Lamon, 2005, p.73; Pitta-Pantazi y Christou, 2011). Este problema plantea una situación en la que inicialmente se representa una fracción impropia en formato de número mixto y en la que la reconstrucción de la unidad lleva a una representación no prototípica (Buforn y Fernández, 2014b). El objetivo de este problema es obtener información sobre la comprensión que tienen los estudiantes para maestro en relación a los elementos matemáticos implicados en el razonamiento up and down, es decir, los elementos matemáticos relativos a reconstruir la unidad (identificación de la fracción unitaria e iteración para reconstruir la unidad) y representar fracciones.

BLOQUE B. Distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales

El bloque sobre la distinción entre situaciones proporcionales de las que no lo son está formado por 2 problemas: un problema de valor perdido proporcional y un problema de valor perdido no proporcional.

Problema 7. Problema de valor perdido proporcional:

Las máquinas R y J producen tornillos en una fábrica. Empezaron al mismo tiempo, pero la máquina J es más rápida. Cuando la máquina R ha producido 40 tornillos, la máquina J ha producido 120 tornillos. Si la máquina R ha fabricado 200 tornillos, ¿cuántos tornillos habrá fabricado la máquina J?

El *problema de valor perdido proporcional* pide hallar el dato desconocido en una situación proporcional. Se trata de una situación proporcional dado que las máquinas producen tornillos a velocidades proporcionales [$f(x) = 3x$]. En este caso, las razones escalar y funcional son enteras. Además, la incógnita aparece en el último lugar, lo cual facilita la resolución del mismo (Harel y Behr, 1989). La finalidad de este problema es conocer si los estudiantes para maestro identifican la situación proporcional y saben resolverla, teniendo en cuenta que en las situaciones proporcionales las relaciones entre las cantidades son lineales y se cumple la invarianza de razones internas y la constancia de razones externas (elementos matemáticos del problema).

Problema 8. Problema de valor perdido no proporcional:

Las empresas A y B fabrican tornillos a la misma velocidad pero la empresa B ha empezado antes. Cuando la empresa A ha fabricado 40 cajas, la empresa B ha fabricado 80 cajas. Si la empresa A ha fabricado 120 cajas, ¿cuántas cajas tendrá fabricadas la empresa B?

El *problema de valor perdido no proporcional* pide hallar el dato desconocido en una situación en la que las cantidades tienen una relación aditiva [$f(x)=x+40$]. En este problema, los estudiantes para maestro tienen que reconocer la relación aditiva dada por el hecho de que las dos empresas llevan la misma velocidad, pero al empezar una antes que la otra hay una diferencia de 40 cajas entre lo que produce una y la otra. Aunque existe una gran variedad de problemas no proporcionales, se ha optado por un problema donde las relaciones entre las cantidades son aditivas (problemas modelizados mediante la función $f(x) = x+b$, con $b\neq 0$) ya que algunas investigaciones indican la tendencia de los estudiantes a utilizar estrategias aditivas (incorrectas) en los problemas proporcionales y el uso de estrategias proporcionales (incorrectas) en los problemas aditivos (van Dooren et al., 2009). En este caso, las cantidades usadas, en la empresa A, 40 y 120 cajas, y en la empresa B, 80 cajas, muestran relaciones multiplicativas (triple y doble) que pueden llevar a los resolutores a no considerar la relación semántica en la situación. El objetivo de este problema es determinar si los estudiantes para maestro son capaces de identificar la situación aditiva y distinguirla de la situación proporcional. Así, los elementos matemáticos relevantes en este problema son la relación no lineal entre las cantidades ($f(x)=x+40$) y la distinción entre una situación proporcional y no proporcional.

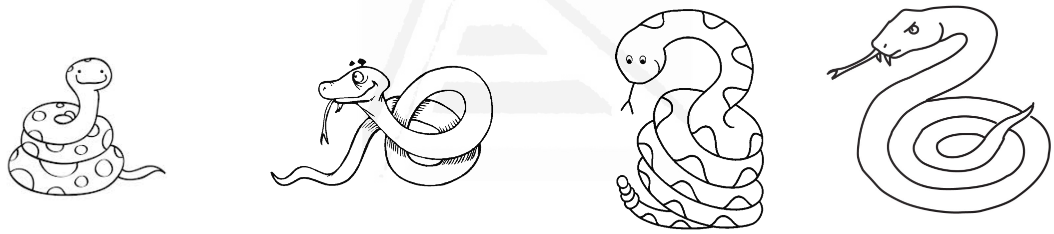
BLOQUE C: Interpretación y comparación de razones

El bloque sobre la comparación e interpretación de razones tiene 4 problemas: pensamiento relacional/absoluto, proceso unitizing, razón como índice comparativo y las relaciones de covarianza en un problema cualitativo.

Problema 9. Pensamiento relativo:

José tiene dos serpientes, Judía Verde y Esbelta. Ahora mismo, Judía Verde mide 40cm de longitud y Esbelta 50cm de longitud. Juan sabe que dentro de dos años, ambas serpientes habrán crecido completamente. La longitud de Judía Verde será de 70cm, mientras que la de Esbelta será de 80cm. Dentro de dos años, ¿habrán crecido ambas la misma cantidad?

Ahora… Dentro de 2 años…



Judía Verde (40cm) Esbelta (50cm) Judía Verde (70cm) Esbelta (80cm)

El problema *pensamiento relacional* pide distinguir entre comparaciones absolutas o relativas (Lamon, 1999). La comparación absoluta compara diferencias como cantidades absolutas. En este problema, la diferencia absoluta en ambos casos es de 30 cm por lo que las serpientes habrían crecido la misma cantidad. Sin embargo, desde la comparación relativa, el crecimiento se compara con el tamaño inicial. En este caso, Judía Verde ha crecido 50/40 mientras que Esbelta ha crecido 80/70. La comparación de estas dos razones, 50/40 y 80/70, permite determinar quién ha crecido más relativamente respecto a su tamaño original. Los estudiantes para maestro deben llegar a reconocer las comparaciones relativas y absolutas y el papel de la razón como índice comparativo en las comparaciones relativas. El objetivo de este problema es conocer cómo los estudiantes para maestro comprenden el elemento matemático relevante "distinción entre comparaciones relativas y absolutas".

Problema 10. Proceso unitizing:

La caja con 16kg de cereales A cuesta 3.36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2.64€. ¿Qué caja de cereales es más barata? ¿Por qué?

El problema *proceso unitizing* es un problema de comparación de razones en el que se pide a los estudiantes para maestro hallar qué caja de cereales es más barata (Lamon, 2005, p. 81; Pitta-Pantazi y Christou, 2011). Para ello, se necesita comparar las dos razones buscando una unidad común, es decir, buscando una unidad de referencia que permita comparar ambas cajas de cereales. Una posible opción es obtener la razón €/kg, es decir, usar como unidad de referencia 1kg y obtendríamos 0,21€/1kg y 0,22€/1kg, por lo que la caja A es más barata. Otra posible opción es buscar una unidad diferente de 1kg para comparar, por ejemplo 4kg (ya que este número es un divisor de 12 y 16 y permite ser considerado como una unidad común). En este caso, es posible establecer el valor de 4kg de cereales de cada tipo (0,84€/4kg para los cereales A y 0,88€/4kg para los cereales B). La resolución del problema se apoya en elegir una unidad de referencia. El objetivo de este problema es determinar cómo los estudiantes para maestro comprenden los elementos matemáticos relevantes en esta situación: "uso de diferentes unidades de referencia en una situación de comparación de razones" mostrando comprensión del proceso unitizing como un sub-constructo del desarrollo del razonamiento proporcional.

Problema 11. Razón:

En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes:

a) 7.5m por 11.4m

b) 4.55m por 5.08m

c) 18.5m por 24.5m

¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado? Justifica tu respuesta

El problema *razón* se centra en la comparación de razones teniendo en cuenta una unidad de referencia (en este caso n=1 que es la razón entre los lados de un cuadrado). El problema pide indicar el loft más cuadrado, por lo que hay que determinar la razón más próxima a 1. Una dificultad en este problema viene dada porque los datos presentados son decimales, las razones no enteras y los datos representan cantidades de longitud, por lo que la razón es un escalar sin unidad (Fernández y Llinares, 2012; van Dooren et al., 2009). El objetivo de este problema es determinar la comprensión de las razones como un índice comparativo en una situación de comparación. Los elementos matemáticos relevantes de este problema son la interpretación de la razón como índice comparativo, en este caso, que la razón entre los lados de un cuadrado es uno.

Problema 12. Covarianza - cualitativo:

Responde a los siguientes apartados:

a. Ana condujo hoy menos kilómetros en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad menor? ¿Por qué?
b. Pepe dio hoy más vueltas en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad mayor? ¿Por qué?

El problema *covarianza-cualitativo* pide a los estudiantes para maestro que analicen cómo cambia una cantidad con respecto al cambio de otra en un problema sin datos numéricos. El apartado a) sí que tiene solución porque hoy ha hecho *menos* km con *más* tiempo que ayer. Sin embargo, el apartado b) no tiene solución, ya que al ser *más* vueltas con *más* tiempo no tenemos información suficiente para responder a la pregunta. El objetivo de este problema es determinar la comprensión de la covarianza en situaciones de comparación cualitativa, pudiendo diferenciar las situaciones con o sin solución (Cramer y Post, 1993).

La Tabla 3.3 muestra la estructura del cuestionario: los bloques en los que se clasifican los sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional, el sub-constructo relacionado con cada problema del cuestionario y el objetivo de cada problema.

Tabla 3.3. Estructura del cuestionario

Bloque	Sub-constructo	Objetivo
A - Esquema fraccionario	1. Parte-todo	Determinar el uso de la idea de fracción parte-todo entendida como una situación en la que se divide una cantidad en partes del mismo tamaño
	2. Medida-recta numérica	Obtener información sobre cómo localizan una fracción en la recta numérica cuando se da una fracción de referencia con denominadores múltiplos
	3. Medida-densidad	Determinar algunos aspectos de la idea de densidad, es decir, que siempre es posible encontrar nuevas fracciones entre dos dadas
	4. Cociente	Considerar si la idea de unidad se hace explícita en situaciones de reparto equitativo cuando es posible interpretar que se tienen varios todos
	5. Operador	Obtener información sobre la idea de operador inverso y sobre la reconstrucción de la unidad cuando aparece de forma implícita en un contexto de reducciones y ampliaciones
	6. Razonamiento up and down	Obtener información relativa a reconstruir la unidad y representar fracciones
B - Distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales	7. Problema de valor perdido proporcional	Determinar si se identifica la situación proporcional
	8. Problema de valor perdido no proporcional	Determinar si se identifica la situación aditiva y se distingue de la situación proporcional
C - Interpretación y comparación de razones	9. Pensamiento relacional	Determinar cómo los estudiantes para maestro distinguen las comparaciones relativas y absolutas
	10. Proceso unitizing	Determinar la manera en la que los estudiantes para maestro usan las diferentes unidades de referencia
	11. Razón	Determinar la comprensión de las razones como un índice comparativo
	12. Covarianza cualitativa	Determinar la comprensión de la covarianza en situaciones de comparación cualitativa pudiendo diferenciar las situaciones con o sin solución

3.2.2. Cuestionario 2: Sobre el reconocimiento de evidencias de la comprensión y toma de decisiones

El cuestionario 2 constaba de 12 tareas. Cada tarea estaba formada por el enunciado de uno de los problemas del Cuestionario 1 (excepto el problema de medida-recta numérica, que se cambió con el objetivo de obtener más información sobre la comprensión de los estudiantes), las respuestas de tres estudiantes a dicho problema mostrando diferentes características de la comprensión del elemento matemático relevante en el problema según la revisión de la literatura, y cuatro cuestiones profesionales centradas en la enseñanza y aprendizaje. La figura 3.2 muestra el esquema de cada una de las 12 tareas.

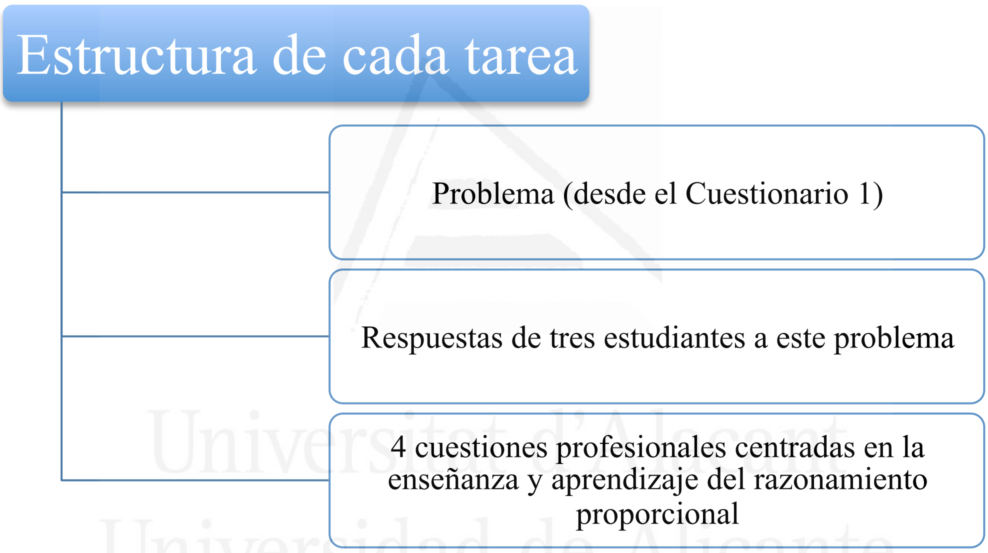


Figura 3.2. Estructura de las tareas del Cuestionario 2.

Las tres respuestas de estudiantes presentaban diferentes características de la comprensión de los estudiantes. En general, se seleccionaron teniendo en cuenta el siguiente criterio: una respuesta incorrecta y dos respuestas correctas que presentaban diferentes estrategias reflejando características diferentes de la manera de comprender los elementos matemáticos relevantes del problema. La mayoría de las respuestas se seleccionaron de investigaciones previas (Buforn y Fernández, 2014a, 2014b; Fernández y Llinares, 2012; Karplus, Adi y Lawson, 1980; Naik y Subramaniam, 2008;

van Dooren et al., 2009) y en algún caso se elaboraron teniendo en cuenta características de la comprensión revisadas en la literatura.

Las cuatro cuestiones profesionales estaban relacionadas con las destrezas sobre la competencia docente mirar de manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes: (1) identificar los elementos matemáticos implicados en las tareas, (2) interpretar la comprensión matemática de los estudiantes, y (3) tomar decisiones de acción teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes. Las preguntas fueron las siguientes:

a) *¿Qué conceptos matemáticos (elementos matemáticos) debe conocer un alumno de primaria para resolver esta tarea? Justifica tu respuesta.*
b) *¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas? Justifica tu respuesta.*
c) *Si un alumno no comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la tarea para ayudarle a que comprendiese estos conceptos? Justifica tu respuesta.*
d) *Si un alumno comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la tarea para que aumente su comprensión de los conceptos matemáticos implicados? Justifica tu respuesta*.

Las dos primeras cuestiones están relacionadas con cómo los estudiantes para maestro identifican los elementos matemáticos necesarios para resolver el problema y cómo reconocen evidencias de la comprensión de los estudiantes. Las otras dos cuestiones están relacionadas con la toma de decisiones. Se pide a los estudiantes para maestro que propongan actividades para que el estudiante pueda progresar en su aprendizaje, es decir, queremos ver qué tipo de decisiones de acción toman los estudiantes para maestro después de reconocer la comprensión de los estudiantes.

Dado que los problemas se han explicado en la sección anterior, aquí explicaremos lo que se espera de cada una de las tareas: los elementos matemáticos que se identifican en el problema, las características de cada respuesta y posibles actividades que se pueden proponer.

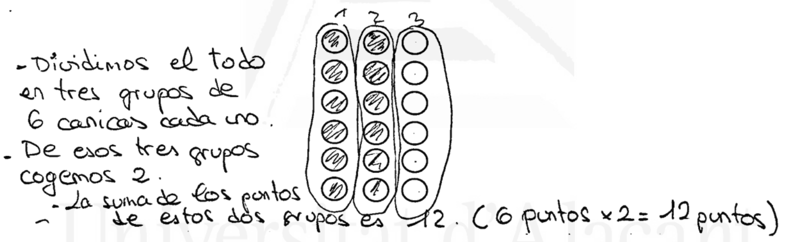
BLOQUE A: Esquema fraccionario

Recordamos que los sub-constructos de este dominio son: parte-todo, medida como recta numérica, medida como densidad, cociente, operador, y razonamiento up and down. Para la selección de las respuestas se tuvo en cuenta las dificultades relacionadas con la identificación de la unidad (Behr et al., 1994; Buforn y Fernández, 2014a; Nicolau y Pitta-Pantazi, 2016) y el uso de diferentes estrategias relacionadas con el esquema fraccionario (operador, fracción unitaria iterativa, partes congruentes) (Behr et al., 1992; Buforn y Fernández, 2014b; Kieren, 1988, 1992).

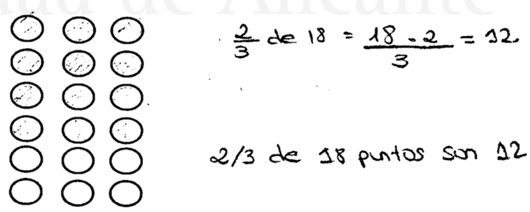
Actividad 1. Parte-todo:

Contesta la siguiente cuestión usando la figura. ¿Cuántos puntos son 2/3 del conjunto dado?

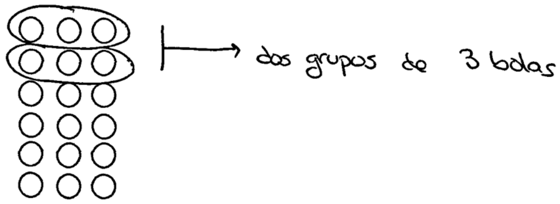
Respuesta 1



Respuesta 2



Respuesta 3



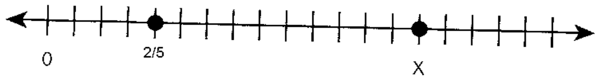
Este problema pide representar una fracción propia usando un contexto discreto. Los elementos matemáticos que debe conocer el resolutor son la fracción como parte-todo en el contexto discreto, la idea de unidad y la idea de fracción unitaria.

En la respuesta 1, el estudiante utiliza el significado de fracción como parte-todo y hace un uso adecuado de la idea de fracción unitaria (relación entre la parte y el todo). En este caso, identifica 3 grupos (cada grupo representa 1/3- fracción unitaria) y elige 2 (1/3 + 1/3; itera la fracción unitaria). En la respuesta 2, el estudiante utiliza el significado de fracción como operador, es decir, cuenta el número de bolas y calcula 2/3 de 18 para obtener el número de bolas que forman el conjunto. Finalmente, la respuesta 3 es incorrecta, puesto que no identifica la idea de unidad ni la fracción unitaria (Buforn y Fernández, 2014b). Es decir, no considera el todo y tampoco utiliza adecuadamente la idea de fracción unitaria. En este caso, el estudiante confunde "tercios" (denominador) con el número de bolas y por tanto, coge 2 grupos de 3 bolas (siendo 2 el numerador y 3 el denominador).

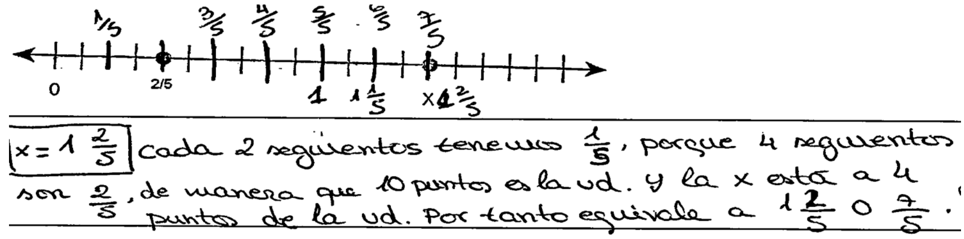
En relación con la enseñanza, algunas posibles actividades para ayudar al estudiante 3 serían modificar el problema usando un contexto continuo (Boyer y Levine, 2012), o bien, poner un conjunto sólo de 3 bolas y hacer 2/3 de 3 bolas y después ampliar con 2/3 de 6 bolas. En esta última actividad se colocaría el énfasis en reconocer fracciones unitarias formadas por más de una ficha y se apoyaría el uso de la fracción unitaria como una unidad iterativa para reconstruir otras fracciones (Norton y Wilkns, 2009; Steffe y Olive, 2010). Para los estudiantes 1 y 2 podríamos usar fracciones impropias como por ejemplo 5/3 de las 18 bolas, en el que tendría que identificar la fracción unitaria 1/3 (que ya lo hacen) y usar dicha fracción como una unidad iterativa (1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 +1/3), lo que significa añadir más bolas para poder hacer la representación gráfica (Hackenberg, 2007).

Actividad 2. Medida - Recta numérica:

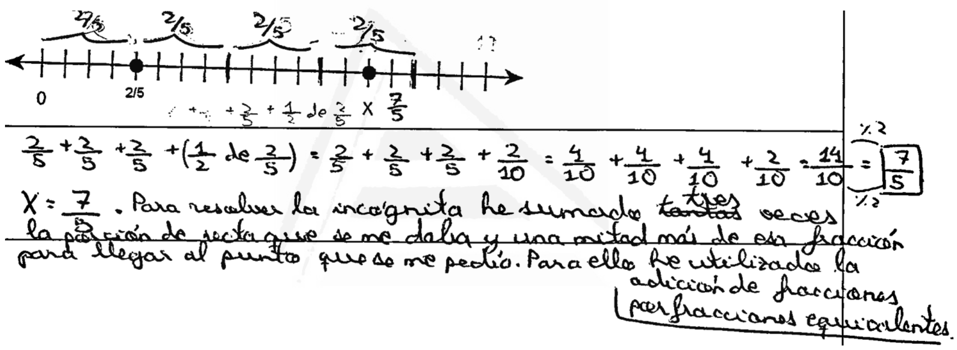
Indica que punto es el X en la siguiente recta numérica. Justifica tu respuesta.



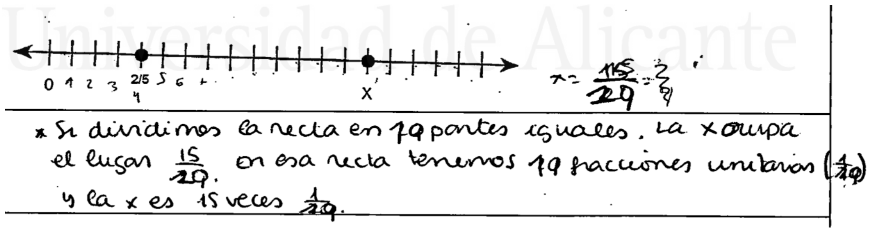
Respuesta 1



Respuesta 2



Respuesta 3



Teniendo en cuenta que el problema *medida-recta* numérica del cuestionario 1 pedía localizar una fracción en la recta numérica cuando se daba una fracción de referencia en la que solamente se necesitaba buscar la fracción unitaria equivalente a 2/10, para este cuestionario, se optó por un problema en el que además se diese la posibilidad de usar la fracción unitaria como unidad iterativa para hallar la fracción pedida. Así, en este problema interviene la fracción como medida (representación en la recta numérica), la fracción unitaria y su uso como unidad iterativa.

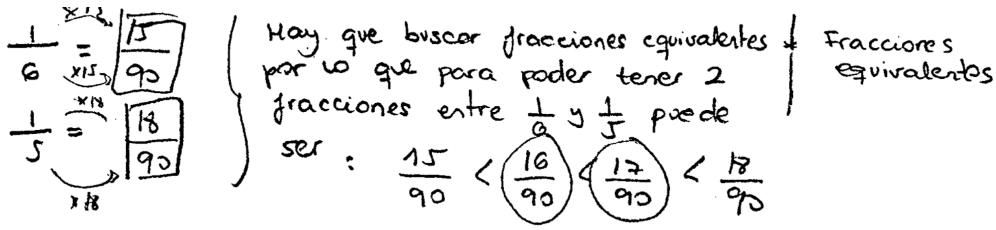
El estudiante 1 identifica la fracción unitaria (1/5) como dos trozos de esta representación y la utiliza como unidad iterativa para hallar X (*identificación y uso de la fracción unitaria como unidades iterativas*, Buforn y Fernández, 2014b). El estudiante 2 utiliza la fracción propia dada como referencia para contar (iterar) y luego la idea de operador al darse cuenta que le falta la mitad de los segmentos que usa, haciendo ½ de 2/5 para hallar el trozo que le falta y finalmente lo suma todo (*uso iterativo de la fracción propia dada más idea de operador*, Buforn y Fernández, 2014b). El estudiante 3 no comprende el problema, dado que considera otro "todo" sin tener en cuenta el dato proporcionado (2/5), por lo que parece desconocer las convenciones de uso de la recta numérica (*uso de un todo arbitrario*, Buforn y Fernández, 2014b).

Para ayudar en la comprensión de los estudiantes, una propuesta sería proporcionar el dato como fracción unitaria (Norton y Wilkins, 2009) o usar una representación de la recta numérica numerada y con divisiones de la unidad coherentes con el denominador de la fracción pedida (estudiante 3). Para los estudiantes 1 y 2, se podría cambiar la fracción 2/5 por 3/5 dejando igual las divisiones de la recta numérica (en este caso, es más difícil identificar la fracción unitaria).

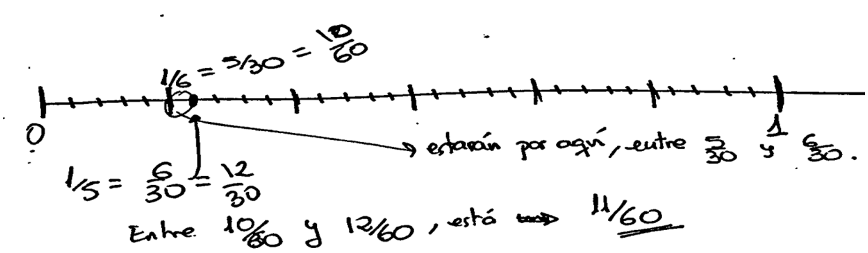
Actividad 3. Medida - densidad:

Encuentra dos fracciones que estén entre 1/6 y 1/5. Explica como lo has hecho.

Respuesta 1



Respuesta 2



Respuesta 3

$\frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ No existe ninguna fracción entre estas dos.

$\downarrow$

$\frac{5}{30}, \frac{6}{30}$

En este problema los elementos matemáticos implicados son el de densidad de los números racionales (es decir, dadas dos fracciones siempre se pueden encontrar nuevas fracciones comprendidas entre estas) y las fracciones equivalentes para poder obtener las fracciones comprendida entre las dos dadas.

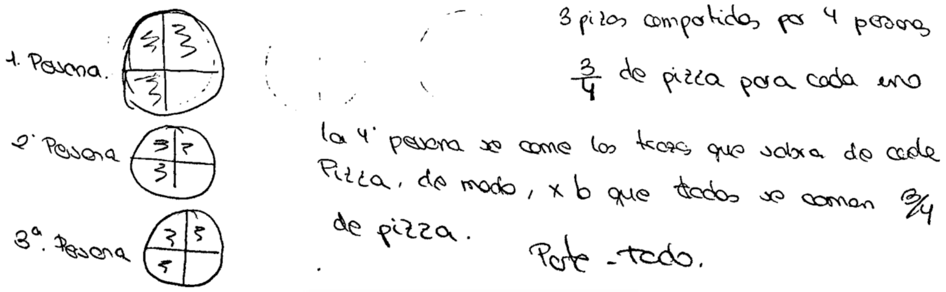
En la respuesta 1 el estudiante busca fracciones equivalentes con un denominador suficientemente grande para poder encontrar dos fracciones comprendidas entre las dadas. La respuesta 2 usa la recta numérica como representación y la idea de fracciones equivalentes, es decir, hace una partición en 5 trozos para la primera fracción (1/5) y como no puede hacer una nueva partición con 1/6, busca una fracción equivalente cuyo denominador sea múltiplo de 5 y de 6. Como observa que solo cabe una fracción y piden dos, vuelve a hacer fracciones equivalentes para poder obtener las dos fracciones pedidas. En este caso, hay un uso adecuado de la idea de equivalencia de fracciones, aunque con limitaciones, ya que no termina el problema al encontrar solamente una fracción entre dos dadas y no seguir buscando para encontrar otra fracción. En la respuesta 3 el estudiante no identifica un denominador que le permita obtener fracciones entre las dos dadas, es decir, hace fracciones equivalentes usando el m.c.m pero no es capaz de buscar fracciones con denominador mayor y responde diciendo que no hay fracciones entre las dos que propone el problema (*identificación de un común denominador no válido*, Buforn y Fernández, 2014a).

Algunas propuestas de actividades para el estudiante 3 serían usar fracciones con el mismo denominador (encuentra dos fracciones entre 1/5 y 6/5) que permitiera centrar la atención en la cantidad de fracciones unitarias, o fracciones que al hacer el m.c.m se pudiese encontrar directamente dos fracciones comprendidas entre las dadas. Para los estudiantes 1 y 2 se podrían plantear tareas con fracciones impropias como “encuentra dos fracciones entre 7/5 y 8/7” o aumentar las magnitudes entre el numerador y el denominador (Boyer y Levine, 2012) centrando la atención en la justificación de los procedimientos usados de manera que se hicieran explícitos los significados.

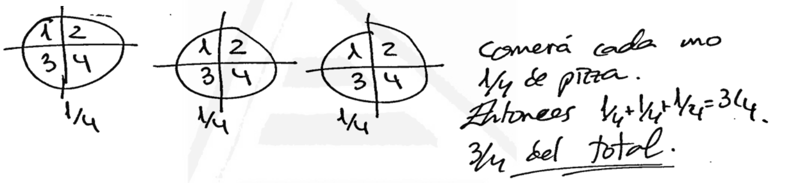
Actividad 4. Cociente:

Cuatro personas van a compartir 3 pizzas idénticas de pepperoni. ¿Cuánto le tocará a cada persona si todos comerán la misma proporción de pizza? Haz un dibujo que muestre qué proporción le toca a cada persona.

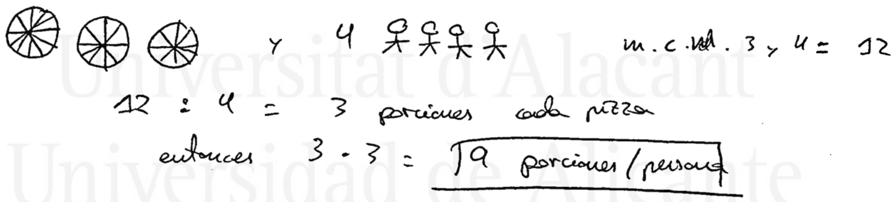
Respuesta 1



Respuesta 2



Respuesta 3



En este problema los elementos matemáticos implicados son la fracción como cociente (reparto equitativo), la fracción unitaria y la idea de congruencia de las partes en relación al todo (Kieren, 1993).

El estudiante 1 divide cada pizza en 4 partes congruentes identificando que a cada persona le corresponde ¾ de pizza (*built up from unit fractions*, Naik y Subramaniam, 2008). El estudiante 2 divide cada pizza en cuatro partes congruentes e identifica la fracción unitaria ¼, es decir, halla lo que le corresponde a cada persona por pizza y suma 3 veces la fracción unitaria (*share of each children*, Naik y Subramaniam, 2008). El estudiante 3 divide la pizza en un número diferente de porciones (12, posiblemente por hacer el m.c.m entre 3 y 4) y no realiza partes congruentes. La resolución del problema sería correcta si hubiese dibujado las pizzas con 12 porciones cada una o si hubiese dicho 9 porciones del total de porciones o de una pizza, pero no hace referencia al todo en su respuesta.

Para apoyar la comprensión (estudiante 3) se podría facilitar dar un dibujo de las 3 pizzas divididas en 4 partes congruentes, o bien secuenciar actividades como por ejemplo: repartir 1 pizza entre 2 niños, repartir 1 pizza entre 3 niños, repartir 1 pizza entre 4 niños, repartir 2 pizzas entre 2 niños, repartir 2 pizzas entre 4 niños,… Un problema que requiere un nivel de comprensión más elevado podría ser el tener que usar una fracción impropia (Hackenberg, 2007), por ejemplo, 5 pizzas a repartir entre 3 personas (estudiantes 1 y 2).

Actividad 5. Operador:

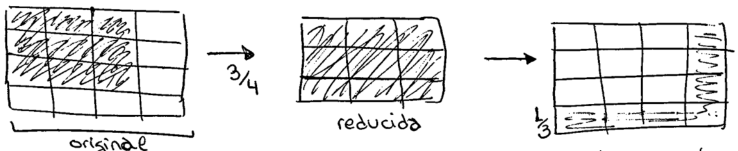
El profesor le dijo a Nicolás que hiciese unas fotocopias. Nicolás cometió un error y apretó el botón que reduce el tamaño de cada copia a 3/4. ¿Cuánto debe aumentar Nicolás el tamaño de las copias reducidas para conseguir el tamaño original?

Respuesta 1

Reduce a 3/4, para volver a la original:

$3/4 \cdot 4/3 = 1$ Tiene que aumentarlo 4/3 para volver al original.

Respuesta 2



necesito aumentar 1/3 a la unidad anterior $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Respuesta 3

Si Nicolás redujo el tamaño original $\left(\frac{4}{4}\right)$ a $\frac{3}{4}$ debería aumentar $\frac{1}{4}$ el tamaño de las copias para llegar a la original $\rightarrow \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Interpretación como operador

Este problema implica la interpretación de fracción como operador inverso y las relaciones multiplicativas entre fracciones inversas, es decir, el uso de la idea de "inverso" (a/b·b/a=1), ya que requiere encontrar la fracción que multiplicada por ¾ de la unidad, es decir, 1.

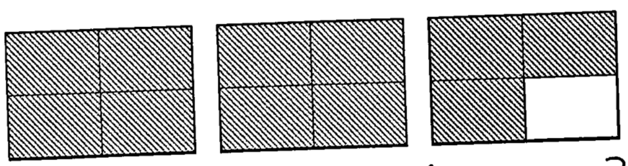
El estudiante de la respuesta 1 utiliza el significado de fracción como operador además de un uso adecuado de la relación inversa (relación multiplicativa) entre las fracciones. El estudiante busca la fracción que multiplicada por ¾ da la unidad, que sería volver al tamaño original de la copia. El estudiante de la respuesta 2 usa una representación gráfica, pero realiza erróneamente la representación de ¾ del todo y después no utiliza la idea de operador, sino que suma 1/3 que también lo representa mal. En la respuesta 3, el estudiante usa una estrategia aditiva ya que considera que al reducir ¾, tendrá que sumar ¼ para completar la unidad (*aproximación aditiva*, Buforn y Fernández, 2014a). Esta respuesta evidencia que no identifica la fracción como operador.

Para apoyar la comprensión de este concepto se podría realizar con fracciones unitarias (por ejemplo ½) (Norton y Wilkins, 2009) y usando representaciones gráficas para centrar la atención sobre los efectos producidos por la fracción como operador (estudiantes 2 y 3). Para el estudiante 1 se podrían plantear tareas con fracciones impropias (Hackenberg, 2007) centrando la atención en la relación entre diferentes representaciones (gráfica y simbólica) (Llinares, 2003).

Actividad 6. Razonamiento up and down:

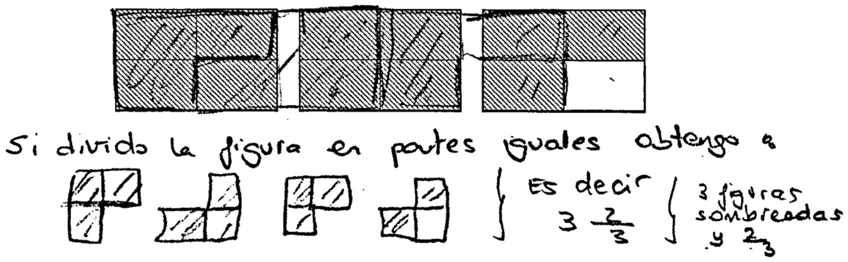
La parte sombreada de esta figura representa $3+\frac{2}{3}$. ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños?

Respuesta 1

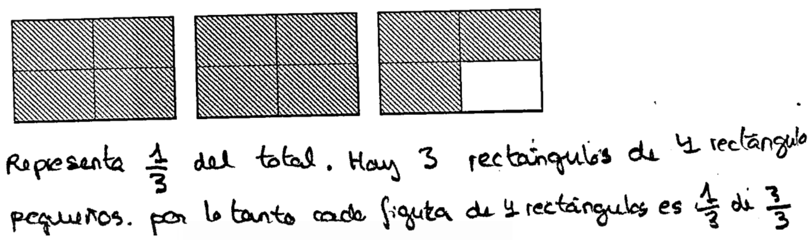


Según la porción pintada podemos deducir que 3 rectángulos pequeños forman una unidad, por ello hay 3 unidades y $\frac{2}{3}$ que son 2 rectángulos más. Entonces, 4 rectángulos pequeños serán $\boxed{1+\frac{1}{3}}$ . . .

Respuesta 2



Respuesta 3



En este problema los elementos implicados son el significado de unidad, la fracción unitaria y el proceso de construir fracciones a partir de la iteración de fracciones unitarias.

En la respuesta 1 el estudiante identifica la unidad, es decir, 3 rectángulos pequeños, y después representa la fracción pedida a partir de esa unidad (*Identifica la unidad y representa la fracción pedida*, Buforn y Fernández, 2014b). En la respuesta 2, el estudiante identifica la unidad y reconstruye el todo, justificando con los datos del enunciado, pero tiene dificultades en representar la parte pedida, no terminando la resolución del problema (*Identifica la unidad pero no representa la nueva fracción*, Buforn y Fernández, 2014b). En la respuesta 3 el estudiante no llega a identificar la unidad puesto que confunde la unidad con un rectángulo grande (*No identifica la unidad, ni la fracción unitaria*, Buforn y Fernández, 2014b).

Para facilitar la comprensión a los estudiantes 2 y 3 (que no comprenden la idea de fracción unitaria como unidad iterativa y la identificación del todo, respectivamente) se podría plantear un problema con una fracción propia donde la unidad fuera un único rectángulo (Hackenberg, 2007; Norton y Wilkins, 2009). Para el estudiante 1, que sí comprende la idea de fracción impropia y de fracción unitaria como unidad iterativa, se podría usar un contexto discreto con una fracción impropia (Hackenberg, 2007) o introducir distractores perceptuales en la presentación de la tarea, por ejemplo "*la siguiente figura* (Figura 3.3) *representa 2/3. Reconstruye la unidad*". La figura que representa 2/3 está dividida en tres partes congruentes como distractor perceptual, con lo que deben superar la información perceptual dada por la forma en la que se ha presentado la parte.

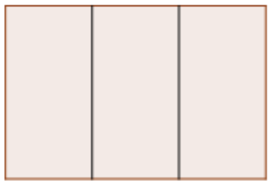


Figura 3.3. Tarea con distractor perceptual

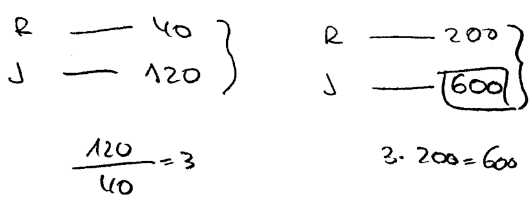
BLOQUE B. Distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales

Recordamos que los sub-constructos que hemos considerado en este dominio son los problemas de valor perdido tanto proporcional como no proporcional. Para la selección de las respuestas se tuvo en cuenta las dificultades de los estudiantes en identificar situaciones no proporcionales (Buforn y Fernández, 2014a; Fernández et al., 2008; Van Dooren et al., 2005) y el uso de diferentes estrategias en la resolución de problemas proporcionales de valor perdido (enfoque funcional, enfoque escalar, estrategia constructiva y regla de tres) (Ben-Chaim et al., 1998; Fernández y Llinares, 2012).

Actividad 7. Problema de valor perdido proporcional:

Las máquinas R y J producen tornillos en una fábrica. Empezaron al mismo tiempo pero la máquina J es más rápida. Cuando la máquina R ha producido 40 tornillos, la máquina J ha producido 120 tornillos. Si la máquina R ha fabricado 200 tornillos, ¿cuántos tornillos habrá fabricado la máquina J?

Respuesta 1



Respuesta 2

R : 40 → J: 120 (40·120)
R : 200 → J: x

▸600 tornillos ha fabricado J

40 → 120
80 → 240 +120
120 → 360 +120
160 → 480 +120
200 → 600 +120

Respuesta 3

Máquina R = 40
Máquina J = 120
120-40 = 80 tornillos la diferencia.
200+80 = 280 tornillos habrá fabricado J

Para resolver los problemas de valor perdido proporcionales los resolutores deben conocer que se cumple la constancia de razones funcionales y la invarianza de razones escalares, y que existen varias estrategias de resolución para este tipo de problemas. Sin embargo a veces el uso de un procedimiento algorítmico (como la regla de tres) que permite dar una respuesta correcta no conlleva necesariamente la comprensión de estos elementos matemáticos implicados.

Respecto a las respuestas, el estudiante de la respuesta 1 identifica la situación de proporcionalidad, halla la razón funcional entre las máquinas R y J y la utiliza para hallar cuántos tornillos ha producido la máquina J, usando la idea de que la razón funcional es constante ("*ratio, use a constant ratio to make multiplicative comparisons in proportional situations*", Karplus et al. 1980). El estudiante de la respuesta 2, identifica la situación de proporcionalidad y utiliza una estrategia constructiva basada en $f(a+b)=f(a)+f(b)$ y $f(ka)=kf(a)$, es decir, si R produce 40 tornillos, J produce 120, entonces si R produce 80 (que es el doble), J producirá 120 más, y así sucesivamente ("*transitional, "building-up" strategy*", Karplus et al. 1980). Sin embargo, el estudiante de la respuesta 3 no identifica la situación de proporcionalidad y aplica relaciones aditivas entre las cantidades en lugar de relaciones multiplicativas ("*additive"*, Karplus et al. 1980). Estas tres respuestas muestran diferentes niveles del desarrollo del razonamiento proporcional propuestos por Karplus et al. (1980).

Para el caso de los estudiantes que no distinguen las situaciones proporcionales de las no proporcionales, una variación de la tarea sería usar razones internas/externas enteras como el doble, el triple,… (Ball, 1993; Fernández y Llinares, 2012) o contextos más familiares como una receta, una compra o de velocidad (Ben-Chaim et al., 1998;

Cramer y Post, 1993; Heller et al., 1989). En el caso de los estudiantes que sí reconocen las situaciones proporcionales de las no proporcionales se podrían plantear tareas con razones internas/externas no enteras (Fernández y Llinares, 2012) o contextos menos familiares como mezclas o escalas (Cramer y Post, 1993).

Actividad 8. Problema de valor perdido no proporcional:

Las empresas A y B fabrican tornillos a la misma velocidad pero la empresa B ha empezado antes. Cuando la empresa A ha fabricado 40 cajas, la empresa B ha fabricado 80 cajas. Si la empresa A ha fabricado 120 cajas, ¿cuántas cajas tendrá fabricadas la empresa B?

Respuesta 1

40 cajas → A } La diferencia es de 40 cajas
80 cajas → B } (80 − 40 = 40)

Entonces, si la ~~e~~empresa A ha fabricado 120 cajas,
la empresa B ha fabricado 160 cajas (120 + 40)

Respuesta 2

A − 40 − 120 Como es a la misma velocidad es aditivo y no multiplicativo.
B − 80 − ?

La A ha subido 80, si subimos 80 a la B, salen 160 cajas

Respuesta 3

B = ha empezado antes.
Empresa A = 40 cajas ⇒ Empresa B = 80 cajas.
Si van a la misma velocidad y ha fabricado el doble, cuando A lleve 120 cajas B llevará el doble: 120 × 2 = 240 cajas.

De manera similar al problema anterior, los elementos matemáticos que debe conocer el resolutor para resolver problemas de estructura aditiva (*f(x)=x+b*), son la distinción entre las situaciones proporcionales y las no proporcionales y el reconocimiento de las relaciones aditivas.

El estudiante de la respuesta 1 identifica la situación no proporcional y utiliza correctamente las relaciones aditivas, es decir, usa la relación Cajas de A – Cajas de B. El estudiante de la respuesta 2 también identifica la situación no proporcional y utiliza correctamente las relaciones aditivas, pero en este caso la relación aditiva usada es Cajas de A de antes – Cajas de A de después. El estudiante de la respuesta 3 no identifica la situación de no proporcionalidad ya que usa la razón funcional (el doble) para la resolución del problema (*estrategia proporcional incorrecta*, Buforn y Fernández, 2014a).

Para los estudiantes que no comprenden los elementos matemáticos implicados en esta tarea, se debería usar contextos más familiares como la ventaja de una persona sobre otra plantando flores a la misma velocidad, pero una ha empezado antes o problemas cuyas relaciones entre las cantidades no fuesen enteras (las relaciones enteras inducen al uso de estrategias proporcionales; van Dooren et al., 2009). Por otro lado, para ayudar a progresar a los estudiantes que sí que comprenden los elementos implicados se podrían plantear problemas con números decimales (Fernández y Llinares, 2012).

BLOQUE C: interpretación y comparación de razones

En este dominio se incluyen los problemas relacionados con el pensamiento relacional/absoluto, el proceso unitizing, el significado de razón como un índice comparativo para medir y la covarianza.

Actividad 9. Pensamiento relacional:

José tiene dos serpientes, Judía Verde y Esbelta. Ahora mismo, Judía Verde mide 40cm de longitud y Esbelta 50cm de longitud. Juan sabe que dentro de dos años, ambas serpientes habrán crecido completamente. La longitud de Judía Verde será de 70cm, mientras que la de Esbelta será de 80cm. Dentro de dos años, ¿habrán crecido ambas la misma cantidad?

Ahora… Dentro de 2 años…

Judía Verde (40cm) Esbelta (50cm) Judía Verde (70cm) Esbelta (80cm)

Respuesta 1

Judía Verde : 7-4 = 3pies
Esbelta : 8-5 = 3 pies
Si, las dos serpientes han crecido lo mismo.

Respuesta 2

Judia Verde : $\frac{7}{4}$ = 1.75 Esbella : $\frac{8}{5}$ = 1.6
En relación a lo qe media, Judia Verde habrá crecido más.

Respuesta 3

Depende de como lo miremos, de manera absoluta los dos habrán crecido lo mismo, 3 pies. Pero si lo miramos de manera relativa Judía Verde habrá crecido más qe Esbelta teniendo en cuenta lo qe medían antes.

J.V. 7:4 = 1'75 Esb. 8:5 = 1'6

En este problema los estudiantes deben usar el significado de los cambios relativos y absolutos.

Respecto a las respuestas, el estudiante de la respuesta 1 razona en términos absolutos, es decir, calcula la diferencia de los cm que han crecido las serpientes en esos dos años. El estudiante de la respuesta 2 razona en términos relativos calculando la razón de crecimiento, es decir, cuánto mide con respecto a lo que medía hace 2 años. El estudiante de la respuesta 3 razona en términos absolutos y relativos, reconociendo que hay dos formas de plantear el problema.

Para facilitar la comprensión de las comparaciones relativas y absolutas se podrían poner razones enteras como el doble (Ball, 1993; Fernández y Llinares, 2012), ya que se intuiría el cambio relativo de manera más directa. Por otro lado, para ayudar a progresar a los estudiantes que sí han comprendido la diferencia entre ambas comparaciones, se podría usar otros contextos, por ejemplo, porcentajes: "*Ha habido un incremento en un impuesto del 20 al 22%. El gobierno dice que ha subido un 2% pero la oposición dice que ha habido un incremento del 10%, ¿quién tiene razón?*".

Actividad 10. Proceso unitizing:

La caja con 16kg de cereales A cuesta 3.36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2.64€. ¿Qué caja de cereales es más barata?

Respuesta 1

16kg A → 3'36   12 kg B → 2'64   La caja A es más barata pq el kilo vale 0'21 y el B 0'22.

A: $\frac{3'36}{16}$ kg → 0'21 el kg   B: $\frac{2'64}{12}$ → 0'22 el kg.

Respuesta 2

16kg → 3'36 / 12kg → 2'52 €
12kg → 2'64

16 kg → 3'36
12 kg → x
$\frac{12 \cdot 3'36}{16}$ = 2'52 € con 12 kg.

* Es más barata la caja A porque con 12kg cuesta 2'52€ sin embargo la B cuesta 2'64 €.

Respuesta 3

$\boxed{A \; 16 kg}$ = 3'36 €
$\boxed{B \; 12 kg}$ = 2'46 €

Es más barata la caja A ya que contiene 4 kg más y sólo hay de diferencia 0,9.
3'36 - 2'46 = 0'9 €

En este problema los elementos matemáticos que se deben de conocer son el significado de razón, la comparación de razones y el proceso unitizing como el uso de diferentes unidades de referencia que permiten la comparación entre situaciones.

En la respuesta 1 el estudiante identifica el coste de 1kg para cada caja de cereales y las compara. El uso de 1kg como unidad para comparar (0,21€ para 1kg de la caja A y 0,22€ para 1kg de la caja B) permite al estudiante comparar ambas cajas y concluir que la caja A es más barata que la caja B. En la respuesta 2 el estudiante usa 12kg como unidad para comparar ambas cajas (2,52€ para 12kg de la caja A y 2,64€

para 12kg de la caja B). En este caso usa la regla de tres para obtener el precio de 12 kg. En la respuesta 3 el estudiante calcula la diferencia entre los precios de las cajas A y B sin tener en cuenta la cantidad de kilos de cada caja. Este estudiante no identifica las razones sino que utiliza relaciones aditivas.

Para facilitar la comprensión de estos elementos se podría no utilizar números decimales o que las razones que se tienen que comparar fuesen enteras (Fernández y Llinares, 2012). Por otro lado, para ampliar la comprensión se podrían plantear problemas con contextos menos familiares como, por ejemplo, las mezclas (Cramer y Post, 1993).

Actividad 11. Razón:

En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes:

a) 7.5m por 11.4m

b) 4.55m por 5.08m

c) 18.5m por 24.5m

¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado?

Respuesta 1

$\frac{7'5}{11'4} = 0'65$

$\frac{4'55}{5'08} = 0'89$ → Es el más cuadrado ya que es el número más cercano a 1.

$\frac{18'5}{24'5} = 0'75$

Respuesta 2

$\frac{7'5}{11'4} = 0'658$ $\frac{18'5}{24'5} = 0'755$

$\frac{4'55}{508} = 0'896$ En proporción 4'55 por 508 existe menor diferencia por lo que será más cuadrada al tener lados más iguales.

Respuesta 3

* El cuadrado se caracteriza por tener los lados de igual medida, se parecerá más al cuadrado el que tengan menos distancia de metros, es decir:

- 11'4 − 7'5 = 03'9
- 5'08 − 4'55 = 0'53
- 24'5 − 18'5 = 06'0

* Es más cuadrado el segundo, porque sus lados son más similares en medida.

En este problema el elemento matemático implicado es la razón como un índice comparativo (cuando la razón sea más próxima a 1, más cuadrado será el loft).

El estudiante de la respuesta 1 identifica las razones e interpreta que el loft que tiene la razón entre los lados más próxima a 1 es más cuadrado, es decir, usa la idea de razón para cuantificar la idea de ser más cuadrado (cuando la razón entre los lados es más próxima a 1). El estudiante de la respuesta 2, identifica y calcula las razones, pero usa una aproximación aditiva al indicar que el segundo loft es más cuadrado porque "existe menor diferencia". Esta respuesta nos lleva a dudar sobre la comprensión del estudiante ya que calcula razones, pero justifica basándose en la diferencia entre los lados. Finalmente, el estudiante de la respuesta 3 usa relaciones aditivas para cuantificar la idea de cuadrado indicando "ser más cuadrado" como la diferencia menor entre los lados (cuando la diferencia entre los lados es más próxima a cero).

Una alternativa para este problema que facilite la comprensión de la idea de razón como medida sería utilizar contextos familiares donde se vea reflejado el significado de fracción como comparación de dos conjuntos, como la efectividad de dos jugadores de baloncesto: lanzamientos exitosos/total de lanzamientos. Para superar la aproximación aditiva (idea de que la diferencia se aproxima a cero) se pueden poner situaciones "extremas" para que se den cuenta que las relaciones aditivas no miden la idea de "ser más o menos cuadrado". Por ejemplo: un rectángulo 0,1x1,1 (la diferencia entre los lados es 1), y un rectángulo de medida 20x21 (la diferencia es 1) (Figura 3.4). La diferencia entre los lados en ambos casos es la misma, sin embargo, se observa de manera evidente que el segundo rectángulo es más cuadrado.

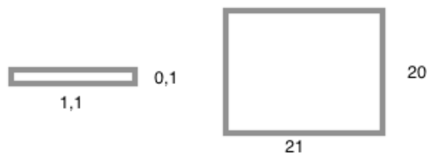


Figura 3.4. Rectángulos con diferencia entre los lados 1u.

Para ampliar la comprensión se podrían modificar el contexto, por ejemplo ver qué pista de esquí es más inclinada relacionando el ancho y el alto, o las razones, proponiendo que estas fuesen más similares.

Actividad 12. Covarianza cualitativa:

Responde a los siguientes apartados:

a) Ana condujo hoy menos kilómetros en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad menor?

b) Pepe dio hoy más vueltas en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad mayor?

Respuesta 1

Hoy, porque ha hecho menos Km. en más tiempo, por ello, "ayer" hizo más/o igual Km en menos tiempo. Por esto hoy ha llevado una velocidad menor que la de el otro día de referencia.

Puede ser que la misma, ya que no ha realizado el mismo trayecto. Como no es ni el mismo trayecto ni el mismo tiempo, y no tenemos ningún dato, no podría calcularse cuando ha sido su velocidad mayor.

Respuesta 2

Ayer su velocidad el fue mayor porque dio más vueltas en menos tiempo.

Su velocidad menor fue hoy porque tardó más que ayer y recorrió menos.

Respuesta 3

Ana hoy: – kilómetros + tiempo.
ayer: + – tiempo.
No se sabe deberíamos conocer más datos

+ vueltas en más tiempo.
Tal vez sea la misma velocidad, ya que si hoy ha dado más vueltas en más tiempo ayer dio menos vueltas en menos tiempo.

Este problema implica realizar comparaciones cualitativas considerando relaciones de covarianza.

En la respuesta 1, apartado a, el estudiante identifica bien la relación entre las cantidades en esta situación de proporcionalidad, es decir, a menos km y más tiempo, la velocidad será menor. En el apartado b, indica que la situación planteada no se puede resolver, por lo que se puede entender que comprende las relaciones cualitativas en situaciones de proporcionalidad. En la respuesta 2, el estudiante identifica bien la situación de proporcionalidad en el apartado a, es decir, a menos km y más tiempo la velocidad será menor, y en la situación b indica erróneamente que recorrió menos cuando el enunciado indica que recorrió más. La modificación del texto de problema por parte del estudiante parece indicar que no entiende las relaciones proporcionales que se establecen en el enunciado. La respuesta 3 muestra la falta de comprensión del estudiante ya que no interpreta bien la situación de proporcionalidad (a menos km y más tiempo la velocidad será menor) diciendo que faltan datos en el apartado *a*, y tampoco identifica las relaciones de covariación en la otra situación ya que dice que ambos irían a la misma velocidad.

Para facilitar la comprensión de las relaciones de covariación cualitativa se podría empezar cuantificando las relaciones, es decir, usando números pequeños con relaciones enteras para centrar la atención en la relación de covariación que se da entre las dos cantidades. Para los estudiantes que contestan bien, se pueden proponer situaciones en las que las relaciones sean no lineales incidiendo en el discurso vinculado a las expresiones "… en relación a …" y en la cuantificación de la relación.

La Tabla 3.4 muestra las características de las respuestas proporcionadas en cada una de las tareas. Como ya se ha comentado, las respuestas se seleccionaron teniendo en cuenta las estrategias, dificultades o niveles de comprensión revisados.

Tabla 3.4. Características de las respuestas para cada una de las actividades

		Características de las respuestas		
Bloque	**Actividad**	**Respuesta 1**	**Respuesta 2**	**Respuesta 3**
Bloque A	Parte-todo	Estrategia: parte-todo	Estrategia: operador	*No identifica la unidad, ni la fracción unitaria*, (Buforn y Fernández, 2014b)
	Medida – recta numérica	*Identificación y uso de la fracción unitaria como unidades iterativas*, (Buforn y Fernández, 2014b)	*Uso iterativo de la fracción propia dada más idea de operador*, (Buforn y Fernández, 2014b)	*Uso de un todo arbitrario*, (Buforn y Fernández, 2014b)
	Medida – densidad	Uso de un común denominador suficientemente grande	Uso de la recta numérica Incompleto	*Identificación de un común denominador no válido*, (Buforn y Fernández, 2014a)
	Cociente	*Built up from unit fractions*, (Naik y Subramaniam, 2008)	*Share of each children*, (Naik y Subramaniam, 2008)	Dificultad con las partes congruentes
	Operador	Uso adecuado del operador inverso	Dificultades con la representación gráfica	*Aproximación aditiva*, (Buforn y Fernández, 2014a)
	Razonamiento up and down	*Identifica la unidad y representa la fracción pedida*, (Buforn y Fernández, 2014b)	*Identifica la unidad pero no representa la nueva fracción*, (Buforn y Fernández, 2014b)	*No identifica la unidad, ni la fracción unitaria*, (Buforn y Fernández, 2014b)
Bloque B	Problema valor perdido proporcional	Nivel de desarrollo: razón (uso de la razón constante) (Karplus et al., 1980)	Nivel de desarrollo: transicional (estrategia constructiva) (Karplus et al., 1980)	Nivel de desarrollo: aditivo (Karplus et al., 1980)
	Problema valor perdido no proporcional	Estrategia aditiva	Estrategia aditiva	Estrategia multiplicativa incorrecta (Fernández y Llinares, 2012; van Dooren et al., 2009)
Bloque C	Pensamiento relacional	Estrategia multiplicativa: pensamiento relativo	Estrategia aditiva: pensamiento absoluto	Ambos
	Proceso unitizing	Uso del 1 como unidad de referencia (Lamon, 1996). Enfoque funcional	Uso del 12 como unidad de referencia (Lamon, 1996). Regla de tres	Estrategia aditiva incorrecta (Buforn y Fernández, 2014a)
	Razón	Cuantificación de la razón	Cálculo de razones pero justificación basada en la diferencia	Estrategia aditiva incorrecta
	Covarianza cualitativa	Comprende la situaciones con y sin solución (Fernández y Llinares, 2012)	Comprende las situaciones con solución pero no sin solución (Fernández y Llinares, 2012)	No comprende las situaciones con solución ni sin solución (Fernández y Llinares, 2012)

3.3. ANÁLISIS DE DATOS

Los datos de esta investigación son las respuestas dadas por los estudiantes para maestro al cuestionario 1 de los problemas matemáticos y al cuestionario 2 sobre el reconocimiento de evidencias de la comprensión de los sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional. El procedimiento de análisis se llevó a cabo en cuatro fases:

- Fase 1. Análisis del conocimiento especializado de matemáticas (cuestionario 1). Esta fase consta de 3 sub-fases:
  - Sub-fase 1a: Niveles de éxito en cada sub-constructo.
  - Sub-fase 1b: Estrategias utilizadas por los estudiantes para maestro en cada sub-constructo.
  - Sub-fase 1c: Relaciones entre los niveles de éxito en los diferentes sub-constructos.
- Fase 2. Análisis de cómo los estudiantes para maestro reconocen características de la comprensión de los estudiantes (cuestionario 2, partes a y b). Esta fase consta de 3 sub-fases:
  - Sub-fase 2a: Cómo los estudiantes para maestro identifican los elementos matemáticos en los problemas y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes.
  - Sub-fase 2b: Relación entre cómo identifican los elementos matemáticos en los problemas y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes.
  - Sub-fase 2c: Relaciones entre cómo reconocen características de la comprensión en los diferentes sub-constructos.
- Fase 3. Análisis de las decisiones de acción propuestas por los estudiantes para maestro (cuestionario 2, partes c y d). Esta fase consta de 2 sub-fases:
  - Sub-fase 3a: Decisiones de acción propuestas por los estudiantes para maestro para cada uno de los sub-constructos.
  - Sub-fase 3b: Relación entre cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes y las decisiones de acción propuestas.

- Fase 4. Análisis de la relación entre el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro (cuestionario 1) y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes en los diferentes sub-constructos (cuestionario 2).

La figura 3.5 muestra el esquema de análisis seguido con las distintas fases y sub-fases y sus relaciones.

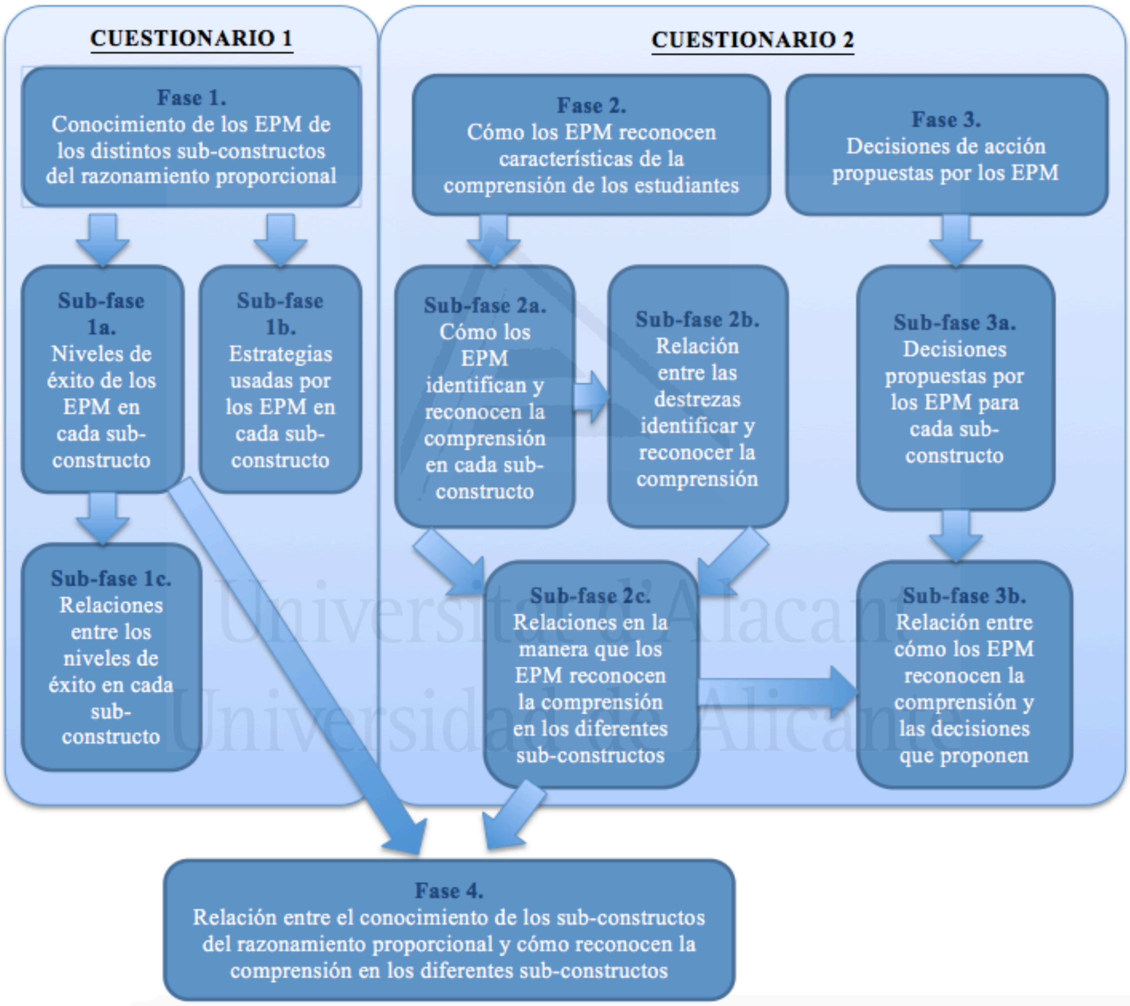


Figura 3.5. Esquema del análisis realizado

A continuación, explicaremos cómo se llevó a cabo el análisis de los datos en cada una de estas fases y sub-fases: el objetivo que se perseguía, los datos que se analizaron, los conocimientos teóricos en los que se apoyó el análisis y como se llevó a cabo.

3.3.1. Fase 1. Análisis del conocimiento especializado de matemáticas en relación a los distintos sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional

El objetivo de la primera fase de análisis fue identificar características del conocimiento de los estudiantes para maestro de los sub-constructos del razonamiento proporcional considerados en este estudio. Para ello en primer lugar determinamos el nivel de éxito en la resolución de los problemas de los estudiantes para maestro (sub-fase 1a), en segundo lugar, identificamos las estrategias usadas (sub-fase 1b), y en tercer lugar identificamos relaciones entre los diferentes niveles de éxito de los estudiantes para maestro en los diferentes sub-constructos mediante un análisis de conglomerados (sub-fase 1c).

3.3.1.1. Sub-fase 1a. Niveles de éxito en cada sub-constructo

Para analizar el nivel de éxito en cada uno de los sub-constructos, se codificaron las respuestas de los problemas del Cuestionario 1 como: 1 si se había resuelto con éxito el problema y 0 si no se había resuelto con éxito o se había dejado en blanco. Por ejemplo, en el problema 10 sobre el proceso unitizing:

- Si el estudiante para maestro había resuelto y justificado correctamente el problema, se codificaba con un 1. La Figura 3.6 muestra la resolución correcta del problema en la que se identifican las razones y se interpreta el coste de 1kg para cada caja de cereales.

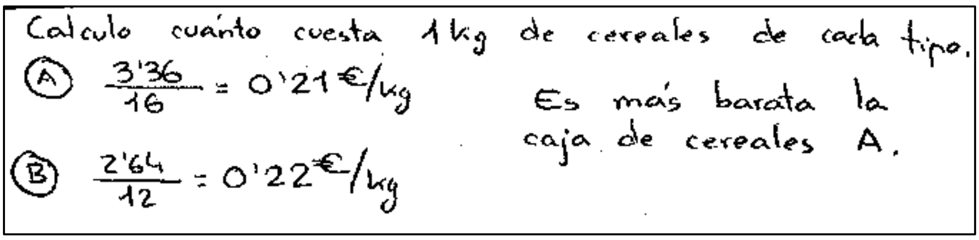
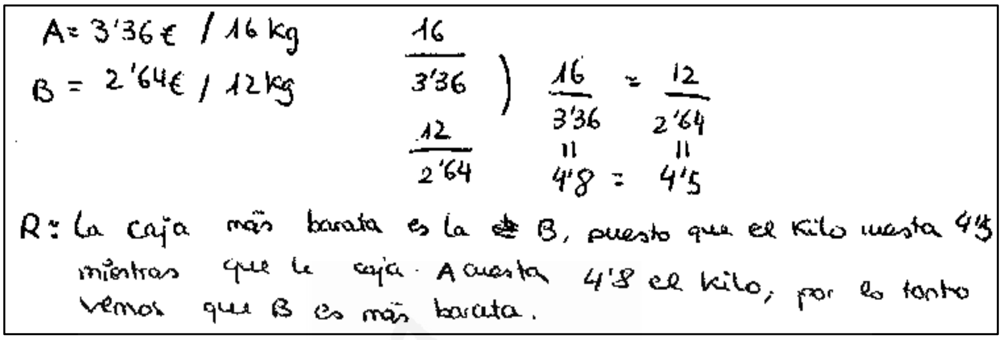

Calculo cuánto cuesta 1 kg de cereales de cada tipo.
A $\frac{3'36}{16} = 0'21$ €/kg
B $\frac{2'64}{12} = 0'22$ €/kg
Es más barata la caja de cereales A.

Figura 3.6. Ejemplo de respuesta correcta.

- Si el estudiante para maestro había resuelto de forma incorrecta el problema o lo había dejado en blanco, se codificaba con un 0. La Figura 3.7 muestra una resolución incorrecta. En esta resolución, el estudiante para maestro identifica las razones kg/€, pero no interpreta adecuadamente la razón que usa al realizar el cociente kg por euros. Es decir, al realizar el cálculo 16€ entre 3,36kg, está calculando cuántos kg puede obtener por 1€. Sin embargo lo interpreta al contrario al indicar que "*la caja más barata es B puesto que el kilo cuesta 4,5€, mientras que la caja A cuesta 4,8€ el kilo, por lo tanto vemos que B es más barata*".



A= 3'36€ / 16 kg

B = 2'64€ / 12kg

$\frac{16}{3'36}$ $\frac{12}{2'64}$) $\frac{16}{3'36} = \frac{12}{2'64}$

4'8 = 4'5

R: La caja más barata es la B, puesto que el Kilo cuesta 4'5 mientras que la caja A cuesta 4'8 el kilo, por lo tanto vemos que B es más barata.

Figura 3.7. Ejemplo de respuesta incorrecta.

3.3.1.2. Sub-fase 1b. Estrategias utilizadas por los estudiantes para maestro en cada sub-constructo

Se categorizaron las respuestas de los estudiantes para maestro teniendo en cuenta las estrategias (tanto correctas como incorrectas) usadas para resolver cada problema. Este análisis se realizó de manera inductiva, generándose las categorías a medida que se realizaba el análisis. Para realizar este análisis, para cada problema se eligió una muestra de respuestas y se identificaron y se discutieron las estrategias usadas para agruparlas en grupos reflejando características similares o diferentes teniendo en cuenta los elementos matemáticos que intervenían en cada problema y la manera en la que eran considerados por los estudiantes para maestro. Posteriormente se incorporaban nuevas respuestas lo que permitía asignar la estrategia a alguno de los grupos ya establecidos, o permitía refinar los agrupamientos inicialmente realizados o generar nuevos grupos. Procediendo de esta manera, sistemáticamente generamos un sistema de categorías de las estrategias usadas. La Tabla 3.5 muestra las categorías de estrategias identificadas en cada uno de los problemas.

Tabla 3.5. Categorías de estrategias identificadas en cada uno de los problemas

Bloque	Actividad	Estrategias correctas	Estrategias incorrectas
Bloque A	Parte-todo	Parte-todo (justificado o solo en el dibujo) Operador Fracciones equivalentes	Sin sentido o en blanco
	Medida – recta numérica	Fracción unitaria Fracciones equivalentes Subdivisiones en la recta Uso de decimales	Error de cálculo (entiende 2/10 como 0,5) En blanco
	Medida – densidad	Fracciones equivalentes Combinar números decimales y fracciones	Uso de decimales en el denominador Incompleto (no se hace explícita la idea de densidad, no encuentra ninguna fracción al hacer el mcm en los denominadores) Sin sentido o en blanco
	Cociente	*"built up from unit fractions"* *"share of each children"*	Sin sentido o en blanco
	Operador	Operador inverso	Estrategia aditiva Ampliar lo mismo que se ha reducido (3/4) Sin sentido o en blanco
	Razonamiento up and down	Reconstruye la unidad a través de la fracción unitaria Operaciones con fracciones	No identifica la unidad ni la fracción unitaria Identifica la unidad pero no representa la fracción impropia Sin sentido o en blanco
Bloque B	Problema valor perdido proporcional	Razón (triple, 5 veces) Regla de tres Estrategia constructiva	Estrategia aditiva Sin sentido o en blanco
	Problema valor perdido no proporcional	Aditiva	Razón (doble) Regla de tres
Bloque C	Pensamiento relacional	Pensamiento relativo	Pensamiento absoluto (aunque no es incorrecto se consideró que el EPM no tiene un pensamiento multiplicativo) Sin sentido o en blanco
	Proceso unitizing	Razón Regla de tres Fracciones equivalentes	Estrategia aditiva Interpretación incorrecta de la razón kg/€ Sin sentido o en blanco
	Razón	Razones y aproximación de la razón a 1	Estrategia aditiva o cualitativa Sin sentido o en blanco
	Covarianza cualitativa	Correctos los dos casos con justificación	Correcto si tiene solución e incorrecto cuando no tiene Correcto cuando no tiene solución e incorrecto cuando tiene Incorrecto en ambos casos Sin sentido o en blanco

Por ejemplo en el problema *proceso unitizing* (Problema 10), las respuestas correctas se clasificaron teniendo en cuenta la unidad usada para la comparación y el procedimiento usado en tres grupos: razón, uso de la regla de tres y uso de fracciones equivalentes (Tabla 3.6). Respecto a la unidad usada para comparar, categorizamos las respuestas teniendo en cuenta si se usó 1kg como unidad para comparar (0,21€ para 1kg y 0,22€ para 1kg, respectivamente) o si se usaron otras unidades para comparar. En este último caso, los estudiantes para maestro usaron 100kg o 48kg como unidades para comparar ambas situaciones: 21€ para 100kg en la caja A y 22€ para 100kg en la caja B; o 10,08€ para 48kg en la caja A y 10,56€ para 48kg en la caja B. En cuanto a los procedimientos usados para obtener las razones, en ambas situaciones fueron el algoritmo de la regla de tres o el uso de fracciones equivalentes (búsqueda de un denominador común para las dos razones).

Tabla 3.6. Tipos de unidades usadas por los estudiantes para maestro en el problema 10 (proceso unitizing)

Unidad de referencia	**Ejemplos de respuestas correctas de estudiantes para maestro**
1 kg (Razón €/kg)	Calculo cuánto cuesta 1 kg de cereales de cada tipo. (A) $\frac{3'36}{16} = 0'21$ €/kg (B) $\frac{2'64}{12} = 0'22$ €/kg Es más barata la caja de cereales A.
100 kg (Regla de tres)	Mediante dos sencillas reglas de tres, averiguamos cuanto costaran 100 kg de los cereales A y B. CEREAL A 16 Kg — 3'36 € 100 kg — x → $x = \frac{3'36 \cdot 100}{16} = \boxed{21 €}$ → La caja de cereales A es más barata que la de cereales B. CEREAL B 12 Kg — 2'64 € 100 kg — x → $x = \frac{2'64 \cdot 100}{12} = \boxed{22 €}$ → La caja de cereales B es más cara que la de cereales A
48 kg (Fracciones equivalentes)	16 | 2; 8 | 2; 4 | 2; 2 | 2; 1 → 2^4 12 | 2; 6 | 2; 3 | 3; 1 → $2^2 \cdot 3$ $mcm = 2^4 \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48$ · $\frac{3'36}{16}$ · $\frac{2'64}{12}$ Pasamos a denominador común: (1) $\frac{10'08}{48}$; (2) $\frac{10'56}{48}$ Solución: la caja B es más cara. (1): 48 : 16 = 3; 3 · 3'36 = (2): 48 : 12 = 4; 4 · 2'64 =

En cuanto a las respuestas incorrectas de los estudiantes para maestro en este problema, se clasificaron en tres grupos: interpretación incorrecta de la razón kg/€, estrategia aditiva incorrecta, y respuestas sin sentido o en blanco (Tabla 3.7). Algunos estudiantes para maestro calcularon la razón kg para 1€ pero no supieron interpretar el significado de esta razón ("*la caja más barata es la B, puesto que el kilo cuesta 4,5*"). Esta categoría de respuesta muestra un ejemplo de una interpretación incorrecta del proceso unitizing, ya que el estudiante para maestro usa 1€ como unidad para comparar, pero no es capaz de interpretar la situación con esta unidad.

Tabla 3.7. Categorías de las respuestas incorrectas de los estudiantes para maestro en el problema 10 (proceso unitizing)

Categoría	**Ejemplo de respuestas incorrectas de los estudiantes para maestro**
Interpretación incorrecta de la razón kg/€	A= 3'36€ / 16 kg B = 2'64€ / 12kg $\frac{16}{3'36}$ $\frac{12}{2'64}$) $\frac{16}{3'36} = \frac{12}{2'64}$ 4'8 = 4'5 R: La caja más barata es la B, puesto que el Kilo cuesta 4'5 mientras que la caja A cuesta 4'8 el kilo, por lo tanto vemos que B es más barata.
Estrategia aditiva incorrecta	3'36 - 2'64 0'72 La caja de cereales A es más barata, ya que, en relación a la cantidad de kg que contiene y la diferencia de precio con la otra, salimos ganando.
Sin sentido	336 × 16 = 2016, 336, 5,376 € 264 × 12 = 528, 264, 3,168 € La caja B es más barata porque al hacer la operación da 3'168 €.

3.3.1.3. Sub-fase 1c. Relaciones entre los niveles de éxito en los diferentes sub-constructos

Para identificar relaciones entre los niveles de éxito en los diferentes sub-constructos considerados y encontrar grupos de estudiantes para maestro con las mismas características se realizó un análisis de conglomerados de las respuestas al Cuestionario 1 del conocimiento matemático. Realizamos un análisis de conglomerados (análisis clúster) con el programa SPSS Statistics (versión 23). Este análisis estadístico trata de resolver el siguiente problema: Dado un conjunto de individuos (de N elementos) caracterizados por la información de n variables X_j , (j = 1,2,..., n), nos planteamos clasificarlos de manera que los individuos pertenecientes a un grupo (clúster) (y siempre con respecto a la información disponible) sean tan similares entre sí como sea posible, siendo los distintos grupos entre ellos tan disimilares como sea posible. El análisis clúster permite clasificar una población en un número determinado de grupos en base a semejanzas y diferencias de perfiles existentes entre las diferentes variables de dicha población. Con el análisis clúster se pretendía encontrar un conjunto de grupos a los que ir asignando los distintos estudiantes para maestro por algún criterio de homogeneidad.

En el programa estadístico SPSS se introdujo una matriz de 12 columnas que hacían referencia a los 12 problemas, por 91 filas para los estudiantes para maestro que participaron en el estudio. La matriz estaba formada por 0 y 1 según si habían resuelto con éxito o no cada uno de los 12 problemas (Figura 3.8). El análisis de conglomerado se realizó utilizando la medida distancia euclídea al cuadrado.

	Parte-Todo	Razón	Operador	Recta Num.	Cociente	Densidad	Unitizing	ımiento Relac	Covarianza	Up and Down	PVP - Prop.	ᐟVP - NO Prop.
	CM	CM	CM	CM	CM	CM	CM	CM	CM	CM	CM	CM
E001	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
E002	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
E003	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
E004	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
E005	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
E006	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
E007	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
E008	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
E009	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
E010	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
E011	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
E012	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
E013	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
E014	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
E015	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
E016	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
E017	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
E018	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
E019	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
E020	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
E021	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
E022	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0

Figura 3.8. Matriz introducida al programa SPSS

El análisis clúster agrupó a los estudiantes para maestro que presentaban similitudes en cuanto a éxito o no éxito en la resolución de los problemas, es decir, agrupó a los estudiantes para maestro que habían resuelto correctamente o habían tenido dificultades en los mismos problemas. Identificamos cuatro grupos de estudiantes para maestro con diferentes características o perfiles que se mostrarán en el capítulo de resultados (Figura 3.9).

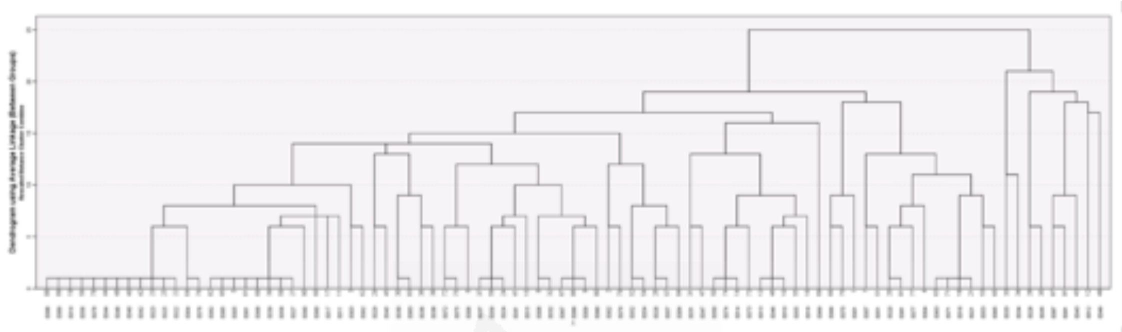


Figura 3.9. Dendograma obtenido tras el análisis clúster

3.3.2. Fase 2. Análisis de cómo los estudiantes para maestro reconocen características de la comprensión de los estudiantes

El objetivo de esta segunda fase de análisis era examinar cómo los estudiantes para maestro identifican los elementos matemáticos relevantes de cada problema y reconocen evidencias de la comprensión de los estudiantes, y las posibles relaciones entre cómo identificaban los elementos matemáticos y cómo reconocían evidencias de la comprensión de dichos elementos matemáticos en las resoluciones de los estudiantes. Para ello, en primer lugar para cada una de las 12 tareas propuestas en el cuestionario 2 determinamos si el estudiante para maestro identificaba o no los elementos matemáticos del problema (cuestión a) y reconocía características de la comprensión del estudiante (cuestión b) para cada uno de los sub-constructos (sub-fase 2a), en segundo lugar, examinamos la relación entre la identificación de los elementos matemáticos del problema y cómo reconocían características de su comprensión en las respuestas de los estudiantes (sub-fase 2b). Finalmente, en tercer lugar, identificamos relaciones entre cómo reconocían características de la comprensión entre los diferentes sub-constructos (sub-fase 2c), lo que nos permitió generar perfiles de estudiantes para maestro en relación a su capacidad de reconocer evidencias de la comprensión.

3.3.2.1. Sub-fase 2a. Cómo los estudiantes para maestro identifican los elementos matemáticos implicados en los problemas (sub-constructos) y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes

Este análisis se apoyó en el conocimiento teórico sobre los elementos matemáticos que hemos considerado significativos para cada sub-constructo del razonamiento proporcional y las evidencias sobre la comprensión de los estudiantes que se muestran en las respuestas de cada una de las tareas que se han explicado en la sección 3.2. El análisis de estos datos se llevó a cabo de manera inductiva, generando categorías que se fueron refinando a medida que el análisis iba progresando para cada una de las cuestiones planteadas en las tareas del cuestionario (identificación de los elementos matemáticos implicados en el problema y reconocimiento de las características de la comprensión de los estudiantes).

En primer lugar, identificamos los elementos matemáticos que los estudiantes para maestro identificaban en cada problema propuesto (cuestión a) generándose dos categorías: estudiantes para maestro que identificaban los elementos implicados en el problema (codificado como I), y los estudiantes para maestro que no identificaban estos elementos, indicando elementos matemáticos generales sobre el razonamiento proporcional como razón y proporción, sin explicar los procesos específicos necesarios para resolver el problema (codificado como NI). Para codificar la cuestión a, se tuvo en cuenta las respuestas dadas también a la cuestión b para comprobar si los estudiantes para maestro no habían escrito el elemento matemático implicado en el problema en la cuestión a, y lo utilizaban de manera explícita para describir las evidencias de la comprensión de los estudiantes al contestar la cuestión b.

En segundo lugar, identificamos qué evidencias de la comprensión del elemento matemático reconocían los estudiantes para maestro en las respuestas de estudiantes (cuestión b). Generamos 4 categorías:

- Estudiantes para maestro que interpretaban de manera incorrecta las respuestas de los estudiantes. Es decir, estudiantes para maestro que no reconocían la diferencia entre las respuestas correctas e incorrectas o confundían la correcta con incorrecta y al revés. Se codificó como SS (Sin Sentido).

- Estudiantes para maestro que proporcionaban comentarios generales centrados en la corrección de las respuestas de los estudiantes. Es decir, estudiantes para maestro que solamente comentaban si las respuestas de los estudiantes eran correctas o incorrectas, o si comprendían o no los conceptos implicados. Se codificó como CG (Comentarios Generales).
- Estudiantes para maestro que aportaban como evidencia una descripción, centrada en los procedimientos de las respuestas de los estudiantes. Es decir, estudiantes para maestro que reproducían las respuestas de los estudiantes como justificación de la cuestión planteada o proporcionaban una descripción centrada en los procedimientos, y por tanto no mostraban evidencias de la comprensión de los estudiantes. Se codificó como D (Descriptivo).
- Estudiantes para maestro que reconocían características de la comprensión de los estudiantes. Es decir, estudiantes para maestro que justificaron la comprensión de los estudiantes basándose en cómo los estudiantes estaban usando los elementos matemáticos implicados en el problema en la resolución dada. Se codificó como RC (Reconocen la Comprensión).

Mostramos el proceso de análisis seguido para el caso del problema *proceso unitizing*. En primer lugar, se tuvo en cuenta si el estudiante para maestro identificaba como elemento matemático clave implicado en el problema el uso de una unidad de referencia que permitiese la comparación de las cajas de cereales o si identificaban otros elementos matemáticos generales (Tabla 3.8).

Tabla 3.8. Ejemplos de las categorías identificadas en el análisis de la cuestión a) en el problema unitizing

Categoría	Ejemplo de respuestas de los estudiantes para maestro
Identifica (I)	a) Significado de razón Comparación de razones. Identificar una unidad que permite la comparación.
No identifica (NI)	a) Para resolver esta tarea correctamente es necesario que los alumnos comprendan el concepto de proporcionalidad directa.

En la Tabla 3.8 incluimos un ejemplo de respuesta de un estudiante para maestro que identifica el proceso unitizing como elemento matemático clave del problema al comentar "*identificar una unidad que permite la comparación*" y otro estudiante para maestro que no identifica el proceso unitizing como elemento matemático clave del problema, sino que identifica un elemento matemático general como "*el concepto de proporcionalidad directa*".

La Tabla 3.9 muestra ejemplos de tres de las cuatro categorías generadas para agrupar las respuestas de los estudiantes para maestro en relación a si reconocían evidencias de la comprensión de la razón como una unidad que permite la comparación (proceso unitizing) (Reconocen Comprensión, Describen respuesta, Comentarios Generales):

Tabla 3.9. Ejemplos de las categorías identificadas en el análisis de la cuestión b) en el sub-constructo proceso unitizing

Categorías	**Ejemplo de respuestas de los estudiantes para maestro**
Reconoce evidencias de la comprensión (RC)	b) Resp. 1 → Identifica los razones €/Kg y los compara. Resp. 2 → Utiliza los 12kg como unidad para comparar Uso de la regla de 3 para obtener el precio de 12Kg. Resp. 3 → No identifica las razones. Usa relaciones aditivas.
Descripción centrada en los procedimientos (D)	Tarea 4 R1: entiende la relación o razones entre las magnitudes externas (kg y €). R2: Hace una regla de tres, por tanto, es mecánico. R3: No entiende, aplica restas sin pensar. No entiende la razón entre las magnitudes.
Proporciona comentarios generales (CG)	- Respuesta 1: lo resuelve correctamente aplicando la idea de razón y realizando la comparación. - Respuesta 2: lo resuelve correctamente aplicando la idea de proporcionalidad para poder hacer la comparación. - Respuesta 3: no aplica los conceptos necesarios, sino que lo resuelve como si fuera un problema de estructura aditiva.

- El primer estudiante para maestro reconoce evidencias de la comprensión de los estudiantes al describir las respuestas centrándose en el uso de las diferentes unidades que permiten comparar ambas situaciones (*"resp.1 Identifica las razones €/kg y las compara. Resp. 2. Utiliza los 12 kg como unidad para comprar. Resp3. No identifica razones. Usa relaciones aditivas*).
- El segundo estudiante para maestro da una respuesta centrada en la corrección de los procedimientos sin proporcionar más explicación (*R1: entiende la relación o razones entre las magnitudes externas. R2: hace una regla de tres. R3: no entiende, aplica restas sin pensar*).
- El tercer estudiante para maestro da un comentario general centrado en la corrección de las respuestas (*"resuelve correctamente*" y "*no aplica los conceptos necesarios, resuelve como un problema de estructura aditiva*").

3.3.2.2. Sub-fase 2b. Relación entre cómo identifican los elementos matemáticos en los problemas y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes

En esta fase relacionamos las categorías obtenidas en la fase anterior. Es decir, el objetivo de esta sub-fase era identificar relaciones entre cómo los estudiantes para maestro identificaron los elemento matemáticos implicados en los problemas (significados de sub-constructos vinculados al razonamiento proporcional) y cómo reconocían evidencias de la comprensión de los estudiantes, en cada una de los sub-constructos. Para ello, se organizaron los datos obtenidos en la sub-fase 2a utilizando esquemas como el mostrado en la Figura 3.10. De esta manera pudimos generar 6 grupos. En la categoría de los que identificaban los elementos matemáticos generamos tres grupos, y en los que no identificaban generamos 2 grupos (debido a que no había ningún caso en el cual reconocían la comprensión), más un grupo en los que se sitúan los que interpretan incorrectamente (realizan comentarios sin sentido al interpretar de manera incorrecta la comprensión de los estudiantes).

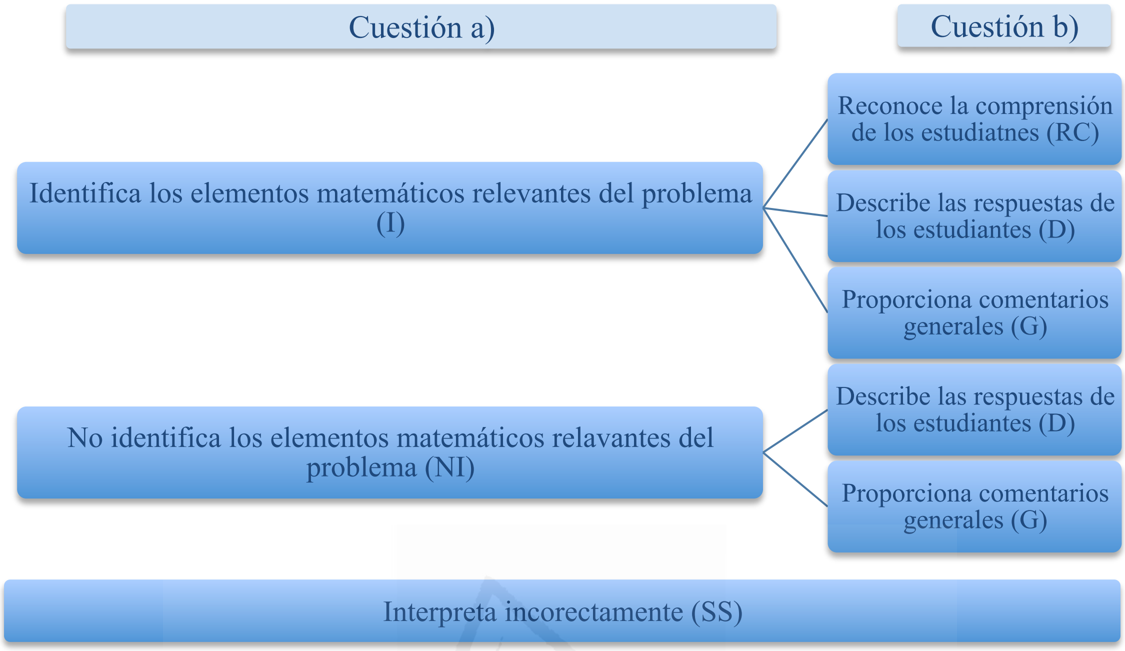
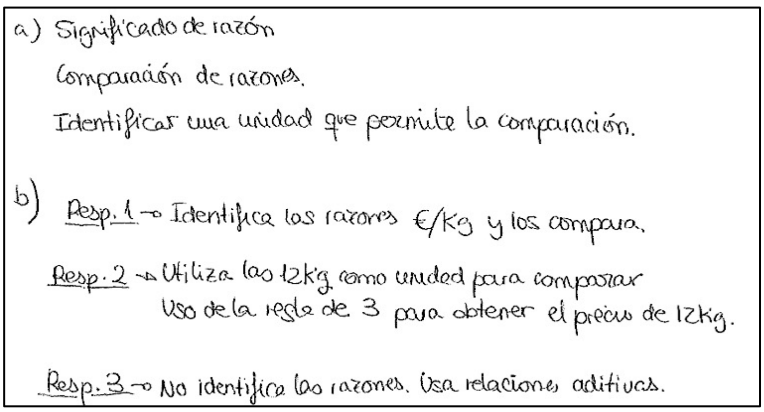


Figura 3.10. Esquema utilizado para mostrar las relaciones entre cómo identifican los elementos matemáticos y cómo reconocen la comprensión en cada uno de los sub-constructos

Los estudiantes para maestro que identificaron los elementos matemáticos relevantes de cada problema y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes a ese problema fueron codificados como I-RC. Por ejemplo, en el problema *proceso unitizing* (Problema 10), una respuesta en este grupo sería la siguiente:

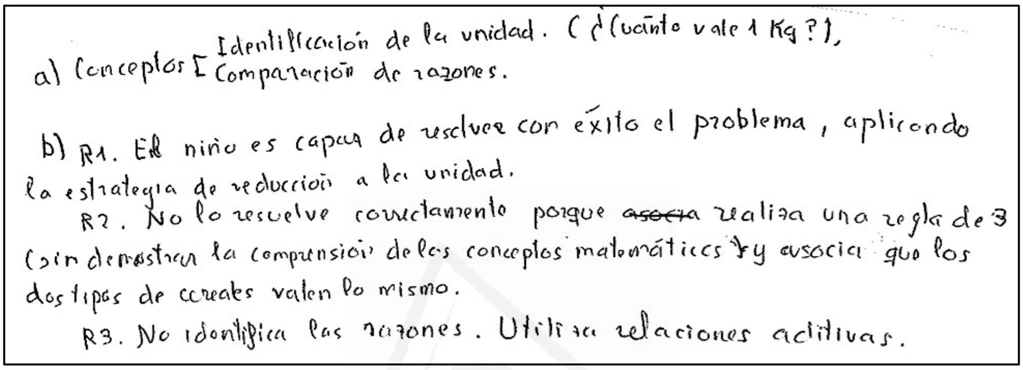

a) Significado de razón
Comparación de razones.
Identificar una unidad que permite la comparación.

b) Resp. 1 → Identifica las razones €/kg y las compara.
Resp. 2 → Utiliza los 12kg como unidad para comparar
Uso de la regla de 3 para obtener el precio de 12kg.
Resp. 3 → No identifica las razones. Usa relaciones aditivas.

Figura 3.11. Respuesta de un EPM de la categoría Identifica los elementos matemáticos y Reconoce la Comprensión (I-RC)

Estas respuestas de los estudiantes para maestro son las que proceden de los grupos Identifican (I) y Reconocen la comprensión (RC) generados en la fase anterior.

Los estudiantes para maestro que identificaron los elementos matemáticos relevantes de cada problema (I) y solo describieron las respuestas de los estudiantes basándose en los procedimientos usados (D) los agrupamos en un grupo que denominamos I-D. Por ejemplo un estudiante para maestro clasificado en esta categoría en el problema *proceso unitizing* sería el siguiente:


a) Conceptos [Identificación de la unidad. (¿Cuánto vale 1 Kg?),
Comparación de razones.

b) R1. El niño es capaz de resolver con éxito el problema, aplicando la estrategia de reducción a la unidad.
R2. No lo resuelve correctamente porque ~~asocia~~ realiza una regla de 3 (sin demostrar la comprensión de los conceptos matemáticos) y asocia que los dos tipos de cereales valen lo mismo.
R3. No identifica las razones. Utiliza relaciones aditivas.

Figura 3.12. Respuesta de un EPM de la categoría Identifica y Describe (I-D)

En esta respuesta el estudiante para maestro identifica como un elemento relevante en el problema la determinación de la unidad para comparar considerando la idea de razón como clave (kg: euros; euros: kg). Sin embargo, al tener que identificar evidencias de la comprensión de este elemento matemático en la respuesta de los estudiantes realiza una descripción del procedimiento usado para apoyar su valoración de que se ha resuelto con éxito o no el problema. De esta manera, solo indica que en la respuesta R1 el estudiante aplica la "*estrategia de reducción a la unidad*", en la R2 indica que "*realiza la regla de tres*", y en la R3 indica que "*no identifica las razones. Utiliza relaciones aditivas*". El énfasis en la descripción de los diferentes procedimientos en las tres respuestas fue el criterio usado para asignar este tipo de respuestas a la categoría "Describe" (los procedimientos) después de haber identificado el elemento matemático relevante en el problema.

Los estudiantes para maestro que identificaron los elementos matemáticos relevantes de cada problema (I) pero proporcionaron un comentario general centrado en la corrección de las respuestas al hablar de la comprensión de los estudiantes (G) fueron codificados como I-G. Por ejemplo, una respuesta del problema *proceso unitizing* (Problema 10) sería el siguiente:

a) Para resolver esta tarea un alumno de primaria debe conocer la idea de razón para realizar la comparación o la idea de proporcionalidad para calcular el precio por kg de cada tipo de cereales.

b)

- Respuesta 1: lo resuelve correctamente aplicando la idea de razón y realizando la comparación.
- Respuesta 2: lo resuelve correctamente aplicando la idea de proporcionalidad para poder hacer la comparación.
- Respuesta 3: no aplica los conceptos necesarios, sino que lo resuelve como si fuera un problema de estructura aditiva.

Figura 3.13. Respuesta de un EPM de la categoría Identifica los elementos relevantes en el problema y realiza comentarios Generales sobre las respuestas (I-G)

Los estudiantes para maestro que no identificaban los elementos relevantes del problema (NI), y solo describían las respuestas de los estudiantes al referirse a las evidencias de la comprensión fueron codificados como NI-D. Por ejemplo, una respuesta en el problema *proceso unitizing* en esta categoría sería:

Tarea 4: Razón

Tarea 4 R1: entiende la relación o razones entre las magnitudes externas (kg y €).

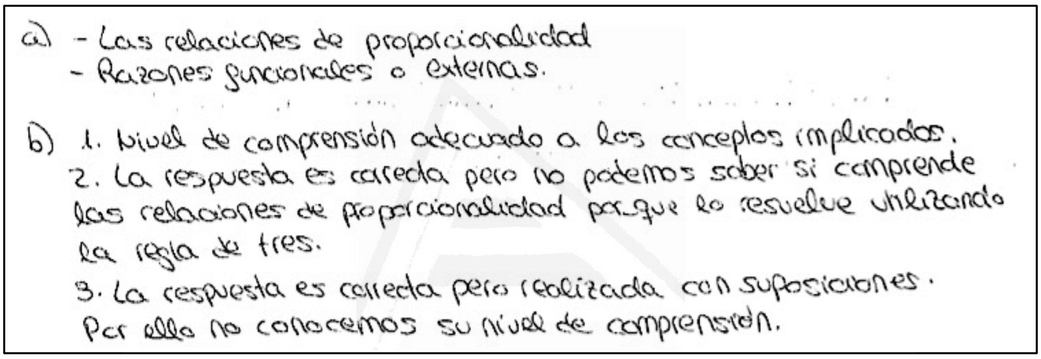
R2: Hace una regla de tres, por tanto, es mecánico.

R3: No entiende, aplica reglas sin pensar. No entiende la razón entre las magnitudes.

Figura 3.14. Respuesta de un EPM de la categoría No Identifica y Describe (NI-D)

En esta respuesta el estudiante para maestro solo menciona el término "razón" sin proporcionar ninguna otra información adicional sobre los elementos matemáticos que podían caracterizar este problema. Este tipo de respuestas indica cierta falta de discriminación de las matemáticas relevantes en el problema y de los procesos que la resolución del problema podría movilizar. Esta falta de reconocimiento de lo que podía ser matemáticamente relevante en la resolución del problema es lo que caracteriza las respuestas codificadas como "No Identifica". Además, al referirse a las respuestas de los estudiantes, se describen los procedimientos usados mostrando cierta identificación entre la ejecución del procedimiento y lo que puede ser considerado comprensión de los elementos matemáticos que caracterizan el problema. Así, indica "*relación de las razones externas*", "*uso de la regla de tres*", y "*aplicar relaciones aditivas*".

Los estudiantes para maestro codificados como NI-G fueron estudiantes para maestro que no identificaron los elementos matemáticos relevantes de cada problema (NI) y proporcionaron un comentario general centrado en la corrección de las respuestas (G). Así, un ejemplo de un estudiante para maestro clasificado en esta categoría para el problema *proceso unitizing* sería el siguiente:


a) - Las relaciones de proporcionalidad
- Razones funcionales o externas.

b) 1. Nivel de comprensión adecuado a los conceptos implicados.
2. La respuesta es correcta pero no podemos saber si comprende las relaciones de proporcionalidad porque lo resuelve utilizando la regla de tres.
3. La respuesta es correcta pero realizada con suposiciones. Por ello no conocemos su nivel de comprensión.

Figura 3.15. Respuesta de un EPM de la categoría No Identifica y realiza comentarios Generales sobre las respuestas (NI-G)

3.3.2.3. Sub-fase 2c. Relaciones entre cómo los estudiantes para maestro reconocen características de la comprensión en los diferentes sub-constructos

El objetivo de la sub-fase 2c es encontrar relaciones en la manera en la que los estudiantes para maestro reconocían las características de la comprensión en los diferentes sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional. Estas relaciones nos permitieron generar perfiles de estudiantes para maestro dados por su capacidad de reconocer evidencias de la comprensión de los diferentes sub-constructos en las respuestas de los estudiantes. Para ello, se realizó un análisis clúster con el objetivo de encontrar estudiantes para maestro que se agruparan siguiendo algún criterio de homogeneidad. El análisis clúster nos proporcionó (a un nivel de significatividad) cuatro grupos. Después se realizó un refinamiento del clúster de manera cualitativa con el objetivo de identificar características (semejanzas y diferencias) dentro de cada uno de los grupos.

Análisis clúster

Para llevar a cabo el análisis clúster, cuando una respuesta se le asignaba una categoría de las explicadas anteriormente, se codificó con un 1, y en caso contrario con un 0. De esta manera, a cada estudiante para maestro se le asignó un vector con 48 componentes (12 tareas x 4 categorías por tarea, I/NI, RC, D, G) de la siguiente manera (Tabla 3.10):

- La primera posición del vector para cada tarea hacía referencia a la cuestión a), es decir, si había identificado los elementos matemáticos del problema (I) se codificaba como 1, y sino no los había identificado (NI), se codificaba como 0.
- Las tres posiciones siguientes del vector, para cada tarea, hacían referencia a la cuestión b) codificando con 1 si había reconocido evidencias de la comprensión (RC), descrito (D) o si había proporcionado comentarios generales (G).
- Si el estudiante para maestro había interpretado de manera incorrecta o había dejado la tarea en blanco se codificaba con un vector de todo ceros (SS).

En la Tabla 3.10 se ejemplifica la codificación en 1 y 0 realizada. Así, un estudiante para maestro que había identificado el elemento matemático y reconocido la comprensión de los estudiantes en una tarea (I-RC) se codificaba como (1,1,0,0) en esta tarea. Si un estudiante para maestro no había identificado el elemento matemático implicado en el problema y al referirse a la comprensión de los estudiantes puesta de manifiesto en las respuestas a los problemas había proporcionado comentarios generales valorando la corrección o no (NI-G) se codificaba como (0,0,0,1) en esta tarea.

Tabla 3.10. Codificaciones de los grupos para el análisis Clúster

Codificación según las categorías	
I-RC = (1,1,0,0)	NI-D = (0,0,1,0)
I-D = (1,0,1,0)	NI-G = (0,0,0,1)
I-G = (1,0,0,1)	SS = (0,0,0,0)

De este modo, se obtuvo una matriz de 48 columnas (componentes del vector) x 91 filas (estudiantes para maestro). En la Figura 3.16 se muestra parte de esta matriz. Esta matriz se introdujo en el programa SPSS y se realizó el análisis clúster. El análisis de conglomerado se realizó utilizando la medida distancia euclídea al cuadrado.

	Parte-todo				Razón				Operador				Medida - Recta Numéric				Cociente			
	I	RC	D	CG	I	RC	D	CG	I	RC	D	CG	I	RC	D	CG	I	RC	D	G
E001	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
E002	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
E003	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E004	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
E005	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
E006	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
E007	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
E008	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
E009	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
E010	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
E011	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
E012	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
E013	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
E014	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
E015	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
E016	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
E017	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E018	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
E019	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
E020	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0

Figura 3.16. Parte de la matriz introducida en el SPSS

El programa estadístico agrupó a los estudiantes para maestro según habían reconocido evidencias de la comprensión de los estudiantes en determinadas tareas pero no en otras (Figura 3.17).

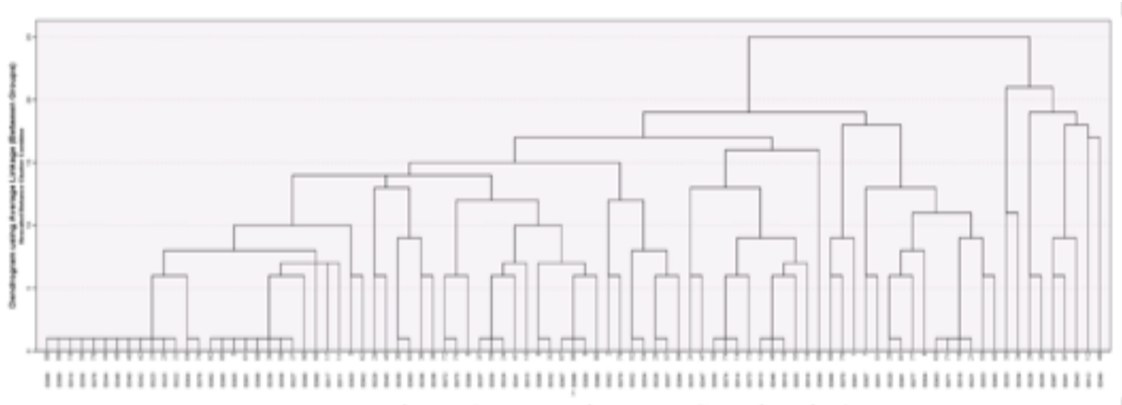


Figura 3.17. Dendograma obtenido tras el análisis clúster

Refinamiento de los perfiles de los estudiantes para maestro

A partir de los grupos obtenidos en el análisis clúster (4 grupos), se identificaron los sub-constructos que caracterizaban los grupos obtenidos y a partir de estas características se hizo un refinamiento teniendo en cuenta los elementos matemáticos identificados por los estudiantes para maestro, y si reconocían la comprensión de los estudiantes en cada uno de los diferentes sub-constructos del razonamiento proporcional considerando los tres dominios: esquema fraccionario, distinción entre situaciones proporcionales y comparación de razones. Este refinamiento nos proporcionó algunas características particulares dentro de algunos de los grupos obtenidos en el análisis clúster, lo que nos permitió definir 8 perfiles de comportamiento de los estudiantes para maestro considerando cómo identificaban los diferentes sub-constructos en los problemas y reconocían evidencias de la comprensión en las respuestas de los estudiantes:

- Estudiantes para maestro que no identificaron los elementos matemáticos en ningún problema y no reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en ningún problema (perfil 0).
- Estudiantes para maestro que identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto razonamiento up and down) y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes relacionadas en algunos de los problemas donde identificaban los elementos (perfil 1).
- Estudiantes para maestro que identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario incluido el razonamiento up and down y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identificaron los elementos (perfil 2a).
- Estudiantes para maestro que identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto el razonamiento up and down), la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y el pensamiento relacional y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identificaron los elementos (perfil 2b).
- Estudiantes para maestro que identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario (incluido el razonamiento up and down), la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y el pensamiento relacional

y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identificaron los elementos (perfil 2c).

- Estudiantes para maestro que identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario, la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, el pensamiento relacional y la covarianza-cualitativa y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identificaron los elementos (perfil 3a).
- Estudiantes para maestro que identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario, la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, el pensamiento relacional y la razón como índice comparativo y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identificaron los elementos (perfil 3b).
- Estudiantes para maestro que identificaron los elementos matemáticos del razonamiento proporcional (esquema fraccionario, la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y comparación de razones) y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas (perfil 3c).

En el capítulo de resultados se mostrarán las características que definen cada uno de los perfiles obtenidos.

3.3.3. Fase 3. Análisis de las decisiones de acción propuestas por los estudiantes para maestro

En esta fase se analizaron las decisiones de acción propuestas por los estudiantes para maestro. Primero se categorizaron de manera inductiva las propuestas de actividades para cada uno de los 12 sub-constructos considerados (sub-fase 3a) y a continuación se analizaron las relaciones entre las decisiones de acción propuestas y cómo los estudiantes para maestro reconocían características de la comprensión de los estudiantes (perfiles de comportamiento obtenidos) (sub-fase 3b).

3.3.3.1. Sub-fase 3a. Decisiones de acción propuestas por los estudiantes para maestro para cada uno de los sub-constructos

Se generaron de manera inductiva categorías de las respuestas a las cuestiones c y d para cada uno de los sub-constructos/problemas y se fueron refinando a medida que el análisis iba progresando (actividades para los estudiantes que se había considerado que comprendían y actividades para los estudiantes que se había considerado que no comprendían el sub-constructo considerado en el problema). Para cada uno de los dos casos, para realizar este análisis, centramos nuestra atención en si:

- las propuestas de actividades tenían en cuenta los elementos matemáticos implicados en el sub-constructo/problema,
- las propuestas tenían relación con los cambios de representación,
- implicaban volver a explicar el contenido,
- si proponían acciones generales,
- propuestas sin sentido o en blanco.

Utilizando estos criterios generamos cinco grupos con particularidades específicas para cada uno de los 12 sub-constructos/problemas. Las Tablas 3.11, 3.12 y 3.13 muestran las categorías de las actividades que los estudiantes para maestro propusieron para los estudiantes que no comprendían los sub-constructos considerados en cada problema .

Las Tablas 3.14, 3.15 y 3.16 muestran las categorías identificadas para las propuestas de actividades que los estudiantes para maestro propusieron para los estudiantes que comprendían los sub-constructos implicados en el problema. En este caso, desaparece la categoría de volver a explicar el contenido ya que no hubo ningún estudiante para maestro que lo indicara. En la categoría cambiar el modo de representación o ayudar con un soporte visual, consideramos los cambios de contexto en el esquema fraccionario. En esta categoría de actividades tampoco aparecieron ejemplos en los dominios de distinguir las situaciones proporcionales y no proporcionales y de comparación de razones.

Tabla 3.11. Categorías de las decisiones de acción del esquema fraccionario para ayudar a los estudiantes que no comprendían los conceptos matemáticos

	Esquema fraccionario					
Categoría	**Parte-todo**	**Medida-recta numérica**	**Medida-densidad**	**Cociente**	**Operador**	**Razonamiento up and down**
Cambio de representación	- Contexto continuo. - Material manipulativo.	- Contexto continuo.		- Contexto discreto. - Material manipulativo. - Representación gráfica.	- Soporte visual.	- Contexto discreto. - Material manipulativo.
Volver a explicar el contenido	- Explicar parte-todo.	- Explicar contenido.	- Trabajar las fracciones equivalentes.	- Explicar contenido.		- Explicar contenido.
Propuestas de actividades interviniendo los elementos matemáticos relevantes del problema	- Denominador igual al número al número de bolas. - Fracción unitaria.	- Dividir la recta igual que el denominador. - X menor que la unidad. - Dar/pedir la fracción unitaria. - Fracción en el primer segmento. - Coincidir al iterar.	- Solución con un solo paso. - Mismo denominador. - Denominador con más diferencia.	- Número de pizzas = número de personas - Números múltiplos	- Operador. - Reducción más simple.	- Particiones = al todo - Indicar/pedir fracción unitaria.
Comentario general	- Menos bolas.	- Dar más datos.		- 1 pizza		- No usar anotación mixta.

Tabla 3.12. Categorías de las decisiones de acción en relación a la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales para ayudar a los estudiantes que no comprendían los conceptos matemáticos

Categoría	Distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales	
	Problema de valor perdido proporcional	**Problema de valor perdido no proporcional**
Cambio de representación	- Soporte visual // Tabla.	- Representación gráfica.
Volver a explicar el contenido	- Explicar discriminación.	- Explicar discriminación.
Propuestas de actividades interviniendo los elementos matemáticos relevantes del problema	- "Veces mayor". - Estrategia constructiva. - Problema de ventaja.	- Números no múltiplos. - Problema proporcional. - Problemas de discriminar. - Dar la ventaja // Empezar de 0.
Comentario general	- Números pequeños. - Números más próximos. - Contexto más cercano. - Problema de comparar razones.	- Números pequeños.

Tabla 3.13. Categorías de las decisiones de acción para los sub-constructos implicados en la comparación de razones para ayudar a los estudiantes que no comprendían los conceptos matemáticos

Categoría	Comparación de razones			
	Pensamiento relativo	**Proceso unitizing**	**Covarianza-cualitativo**	**Razón**
Cambio de representación	- Visual.		- Dibujo.	- Soporte visual.
Volver a explicar el contenido	- Explicar contenido	- Explicar contenido	- Explicar contenido	- Explicar aproximación a 1.
Propuestas de actividades interviniendo los elementos matemáticos relevantes del problema	- Razones enteras.	- Razones enteras. - Uso del 1.		- Razones enteras. - Mayor diferencia entre lados - Un lado igual.
Comentario general	- Números pequeños. - Problema de razón - Cambiar contexto. - Especificar cambio - Resolver 2 casos. - Cambio absoluto. - Partir de 0 cm. - Medir igual al final	- Números enteros. - Números pequeños - Diferencia más significativa. - Comparar una magnitud. - Magnitudes iguales	- Tareas con =. - Tareas con y sin solución. - Tareas con solución. - Tareas sin solución. - Tareas con datos. - Cambiar contexto.	- Números enteros. - Números pequeños. - Cambiar contexto. - Más cuestiones.

Tabla 3.14. Categorías de las decisiones de acción del esquema fraccionario para ampliar la comprensión de los estudiantes

Categoría	**Esquema fraccionario**					
	Parte-todo	**Medida-recta numérica**	**Medida-densidad**	**Cociente**	**Operador**	**Razonamiento up and down**
Cambio de representación	- Contexto continuo. - Recta numérica.			- Contexto discreto. - Otra figura.		- Otra figura. - Conjunto discreto.
Propuestas de actividades interviniendo los elementos matemáticos relevantes del problema	- Up and down. - Fracción impropia.	- Fracción impropia. - Más subdivisiones. - No identificar la fracción unitaria. - Posición de x distinto a la mitad.	- Denominador mayor. - Varios pasos.	- Fracción impropia. - + pizza, - personas. - - pizza, + personas.	- Fracción impropia. - Ampliar en lugar de reducir. - Pedir otra fracción (no original). - Aplicar 2 veces el operador.	- Nueva división.
Comentario general	- Más elementos. - Otra estrategia.	- Diferentes estrategias.	- Más fracciones comprendidas. - Pedir fracciones con distinto denominador.	- Números grandes.		- Representar una fracción mayor.

Tabla 3.15. Categorías de las decisiones de acción de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales para ampliar la comprensión de los estudiantes

Categoría	Distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales	
	Problema de valor perdido proporcional	**Problema de valor perdido no proporcional**
Propuestas de actividades interviniendo los elementos matemáticos relevantes del problema	- Razones no enteras. - Problema aditivo. - Diferentes estrategias.	- Números no múltiplos. - Problema proporcional.
Comentario general	- Números decimales. - Números altos. - Cambiar contexto. - Cambiar incógnita.	- Números altos. - Números decimales. - Datos cercanos. - Más incógnitas/preguntas. - Más empresas. - Cambiar incógnita.

Tabla 3.16. Categorías de las decisiones de acción de la comparación de razones para ampliar la comprensión de los estudiantes

Categoría	Comparación de razones			
	Pensamiento relativo	**Proceso unitizing**	**Covarianza-cualitativo**	**Razón**
Propuestas de actividades interviniendo los elementos matemáticos relevantes del problema	- Razones similares. - Preguntar absoluto/relativo.	- Razones similares. - Usar más estrategias.		- Razones similares. - Misma razón. - Razón impropia. - Inventar nuevo loft.
Comentario general	- Números decimales. - Números altos. - Relación dentro de un tiempo. - Más serpientes. - Cambiar contexto /porcentajes.	- Números decimales. - Números altos. - Más elementos. - Cambiar contexto. - Problema de valor perdido.	- Tareas con y sin solución. - Tareas sin solución. - Tareas con datos. - Cambiar contexto. - Añadir más personas.	- Números decimales. - Números altos. - Variar magnitudes (cm, m)

A continuación ejemplificamos estas categorías para el problema de razonamiento up and down (Problema 6). En las cinco categorías consideradas (cambio de representación, volver a explicar el contenido, modificar los números o la actividad teniendo en cuenta los elementos matemáticos y procesos implicados en el razonamiento up and down, propuestas de actividades generales o propuestas en blanco o sin sentido) los estudiantes para maestro incluían propuestas de actividades con diferentes características en función de si consideraban los elementos matemáticos implicados en el razonamiento up and down (identificación de la fracción como una unidad múltiple a/b = a veces 1/b; el uso de la fracción unitaria 1/n como una unidad iterativa) (Tabla 3.17).

Así, en la categoría "cambios de representación" proponían cambios en cuanto al contexto, las figuras geométricas o el uso de materiales manipulativos sin mencionar los elementos matemáticos implicados en el sub-constructo razonamiento up and down. Por ejemplo, "*modificar la tarea a un contexto discreto*" o "*cambiar los rectángulos por otras formas geométricas*". En la categoría "volver a explicar el contenido" para ayudar a un estudiante que no ha comprendido el problema proponían volver a explicar los conceptos matemáticos implicados en el razonamiento up and down ("*le explicaría mejor el concepto de unidad y como buscarla*"). En la categoría "propuestas de actividades interviniendo los elementos matemáticos relevantes del problema", incluyen propuestas centradas en reforzar la idea de unidad, la fracción unitaria, y/o los procesos iterativos usando la fracción unitaria como una unidad iterativa que se apoyaban en cierto sentido en los elementos matemáticos implicados en el razonamiento up and down (fracción unitaria, unidad iterativa, fracción como unidad múltiple, coordinación). Por ejemplo, "*que la unidad fuera 4/4 en lugar de ¾ de un rectángulo grande para facilitar la búsqueda de la unidad*", e "*indicar la fracción unitaria para guiarles en la tarea*"). En la categoría "propuestas generales" se incluyeron las propuestas relacionadas con la notación de los números (notación mixta) o con el tamaño de los números ("*¿Cómo representarías la fracción 4+2/3 a partir de la figura sombreada?*").

Tabla 3.17. Categorías y códigos identificados en las propuestas de actividades de los estudiantes para maestro para el problema relacionado con el sub-constructo razonamiento up and down

Categoría		**Ejemplo de decisiones de acción para ayudar a los estudiantes que no han comprendido los conceptos**	**Ejemplo de decisiones de acción para ayudar a los estudiantes que han comprendido los conceptos**
Cambio de representa-ción	Contexto discreto	*Modificaría la tarea a un contexto discreto ya que en niño no sabe identificar la unidad.*	*Utilizar un conjunto discreto*
	Otra figura geométrica o más figuras		*Cambiaría la forma de la figura, utilizando por ejemplo triángulos en vez de cuadrados.*
	Material manipulativo	*Podríamos trabajar con folios reales donde se vieran estas divisiones.*	
Volver a explicar el contenido		*Le explicaría mejor el concepto de unidad y como buscarla*	
Modificar los nº/actividad teniendo en cuenta el significado de cada sub-constructo	Que las particiones coincidan con el todo // nueva división para poder representar	*Que el todo fuera 4/4 en vez de ¾ del rectángulo grande, ya que así podría averiguar fácilmente que la unidad sería el rectángulo grande y que está dividido en 4 partes.*	*Podemos decir que la figura representa 3+2/6, de esta forma los 3 rectángulos pequeños los tendrán que partir por la mitad.*
	Indicar o pedir la fracción unitaria	*Decir cuál es la fracción unitaria para guiarles así en el ejercicio.*	
Comentario general	No usar la notación mixta // fracción mayor al conjunto dado	*En lugar de indicar 3+2/3 en el enunciado, pondría 11/3 para que sea más fácil y visual identificar sus partes.*	*¿Cómo representarías la fracción 4+2/3 a partir de la figura sombreada?*

3.3.3.2. Sub-fase 3b. Relación entre cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes y las decisiones de acción propuestas

En esta sub-fase relacionamos cómo los estudiantes para maestro reconocen características de la comprensión de los estudiantes en los diferentes sub-constructos (perfiles obtenidos en la sub-fase 2c) con las categorías de decisiones identificadas para cada uno de los sub-constructos. Para ello se fueron agrupando las propuestas de actividades de cada estudiante para maestro en cada sub-constructo en los diferentes perfiles obtenidos en la sub-fase 2c.

Para hacer la asignación de los estudiantes para maestro, los perfiles se agruparon según los dominios vinculados al razonamiento proporcional, es decir, si: no identificaban ni reconocían ningún sub-constructo (perfil 0); identificaban y empezaban a reconocer características de la comprensión de los sub-constructos del esquema fraccionario (perfil 1); identificaban y reconocían características de la comprensión de los sub-constructos del esquema fraccionario y de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales (perfil 2); e identificaban y reconocían características de la comprensión de los sub-constructos del esquema fraccionario, de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y de la comparación de razones (perfil 3).

La Tabla 3.18 muestra la asignación de cada estudiante para maestro del perfil 2 considerando la propuesta de actividad en el caso del estudiante que no comprende el elemento matemático del problema y el sub-constructo/problema en el que hace la propuesta de actividad. Por ejemplo, el estudiante para maestro E015 que pertenecía al perfil 2, en el sub-constructo parte-todo propuso como actividad para ayudar al estudiante un cambio de representación, en el sub-constructo medida-recta numérica lo dejó en blanco, en medida-densidad propuso modificar la actividad teniendo en cuenta que se pudiesen encontrar dos fracciones con un solo paso, en el cociente un comentario general, en operador lo dejó en blanco, en el razonamiento up and down propuso modificar la actividad atendiendo al significado (o elemento implicado), en los problemas de distinción y de pensamiento relativo una actividad general centrada en los números, en el proceso unitizing propuso modificar la actividad atendiendo al significado del sub-constructo, en el problema de covarianza-cualitativo un comentario general y en el de razón una propuesta sin sentido. La tabla 3.18 ejemplifica este proceso.

Tabla 3.18. Clasificación de los estudiantes para maestro del perfil 2 según el sub-constructo del razonamiento proporcional considerado y la categoría de la actividad propuesta en el caso de que un estudiante no comprende el problema

Perfil	Categoría	Esquema fraccionario						Distinción		Comparación de razones			
		Parte-todo	Recta num.	Densidad	Cociente	Operador	Raz. up & down	PVP prop.	PVP no prop.	Pens. relativo	Proceso unitizing	Covarian. cualitativo	Razón
Perfil 2	Cambio de representación	E015, E029, E032, E038, E006, E020, E051,			E025, E032, E057, E030, E074	E032, E057, E030,	E032, E038, E042, E057,	E069, E074,	E025, E069,			E069,	E069, E030, E074, E008,
	Volver a explicar el contenido	E044, E063, E074	E063,	E042, E044, E063, E051, E074	E063,		E063,	E034,	E032, E044, E030,	E030,			E025, E008,
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	E036, E042, E040, E069, E020,	E029, E025, E032, E036, E044, E057, E006, E034, E040, E069, E020, E051, E074	E015, E029, E025, E032, E006, E069, E020,	E038, E006, E040,	E025, E034, E051,	E015, E029, E025, E036, E042, E006, E016, E069, E051,	E032, E036, E044, E034,	E036, E038, E057, E006, E051, E074,	E025, E036, E034,	E015, E029, E025, E032, E036, E038, E040, E030, E074,		E036, E042, E034, E074,
	Comentario general	E029, E025, E016, E034, E040, E020, E030,	E038,	E036, E038, E057, E016, E034, E040, E030,	E015, E029,			E015, E025, E038, E042, E057, E051, E074,	E015, E042, E040, E069,	E015, E029, E042, E057, E040, E069, E030, E051,	E029, E025, E032, E038, E044, E006, E034, E069, E030,	E015, E029, E025, E032, E036, E038, E042, E044, E006, E034, E030, E074,	E029, E038, E042, E006, E040, E069,
	Sin sentido / en blanco	E057,	E015, E042, E016, E030,		E036, E042, E044, E016, E034, E069, E020, E051,	E015, E029, E036, E038, E042, E044, E006, E016, E040, E063, E069, E020, E074	E044, E034, E040, E020, E030, E074	E029, E006, E016, E040, E063, E020, E030,	E029, E016, E034, E063, E020,	E032, E038, E044, E006, E016, E063, E020, E074,	E042, E057, E016, E063, E020, E051,	E057, E016, E040, E063, E020, E051,	E015, E032, E044, E057, E016, E063, E020, E051,

Este proceso nos permitió evidenciar la complejidad de la relación entre las destrezas de identificar los elementos matemáticos en el problema y reconocer evidencias de la comprensión en las respuestas de los estudiantes con la destreza proponer actividades para apoyar el aprendizaje de los estudiantes.

Se realizó el mismo procedimiento para cada uno de los estudiantes para maestro (por perfiles), tanto para las propuestas de actividades para ayudar a los estudiantes que no comprenden como para las propuestas de actividades para ampliar el conocimiento de los que han comprendido (en los anexos se encuentran todas las tablas con la clasificación de los estudiantes para maestro para cada uno de los perfiles).

Finalmente, se obtuvieron las frecuencias obtenidas, es decir, el número de estudiantes para maestro que pertenecían a cada perfil y habían propuesto cada actividad para todos los sub-constructos vinculados al desarrollo del razonamiento proporcional.

3.3.4. Fase 4. Análisis de la relación entre el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes en los diferentes sub-constructos

Esta fase de análisis tenía como objetivo identificar las relación entre el conocimiento de matemáticas puesto de manifiesto en la resolución de los problemas del Cuestionario 1 con la capacidad de reconocer evidencias de la comprensión en las respuestas de los estudiantes. Para ello, se agruparon los estudiantes para maestro considerando si reconocían o no características de la comprensión de los estudiantes (perfiles sub-fase 2c) y cómo resolvieron cada uno de los problemas (cuestionario 1). Este proceso se realizó considerando los perfiles obtenidos en la sub-fase 2c agrupados como en la fase anterior: perfil 0, 1, 2 y 3 según cómo identificaban y reconocían características de la comprensión en los tres dominios vinculados al razonamiento proporcional: esquema fraccionario, distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y comparación de razones. La Tabla 3.19 muestra la clasificación de los estudiantes para maestro del perfil 1 según el sub-constructo y el nivel de éxito.

Tabla 3.19. Clasificación de cada estudiante para maestro del perfil 1 según como ha resuelto cada problema del razonamiento proporcional

	Estudiantes para maestro del Perfil 1	
Sub-constructo	**Correcto**	**Incorrecto**
Parte-todo	E008, E033, E066, E001, E045, E046, E047, E053, E059, E061, E068, E071, E072, E076, E081, E082, E037,	
Medida-recta numérica	E008, E033, E066, E045, E046, E047, E053, E059, E061, E068, E071, E072, E081, E082, E037	E001, E076,
Medida-densidad	E008, E033, E059, E072, E037	E066, E001, E045, E046, E047, E053, E061, E068, E071, E076, E081, E082,
Cociente-reparto equitativo	E008, E033, E066, E001, E045, E046, E047, E053, E059, E061, E068, E071, E072, E076, E081, E082, E037	
Operador	E033,	E008, E066, E001, E045, E046, E047, E053, E059, E061, E068, E071, E072, E076, E081, E082, E037
Razonamiento up and down	E046, E047,	E008, E033, E066, E001, E045, E053, E059, E061, E068, E071, E072, E076, E081, E082, E037
PVP proporcional	E008, E033, E045, E046, E047, E059, E061, E068, E072, E076, E082, E037	E066, E001, E053, E071, E081,
PVP no proporcional	E066, E001, E053, E071, E072,	E008, E033, E045, E046, E047, E059, E061, E068, E076, E081, E082, E037
Pensamiento relacional	E033, E045,	E008, E066, E001, E046, E047, E053, E059, E061, E068, E071, E072, E076, E081, E082, E037
Proceso unitizing	E033, E046, E053, E059, E071, E072, E076, E081, E037	E008, E066, E001, E045, E047, E061, E068, E082,
Covarianza	E033, E066, E001, E053, E059, E037	E008, E045, E046, E047, E061, E068, E071, E072, E076, E081, E082,
Razón	E033,	E008, E066, E001, E045, E046, E047, E053, E059, E061, E068, E071, E072, E076, E081, E082, E037

Así, por ejemplo, el estudiante para maestro E008 que pertenecía al perfil 1, resolvió correctamente los problemas parte-todo, medida-recta numérica, medida-densidad, cociente-reparto equitativo y problema de valor perdido proporcional; pero de manera incorrecta los problemas, operador, razonamiento up and down, problema de valor perdido no proporcional, pensamiento relacional, proceso unitizing, covarianza-cualitativo y razón.

Se realizó el mismo procedimiento para cada uno de los estudiantes para maestro y perfiles obtenidos en la sub-fase 2c (en los anexos se encuentran todas las tablas con la clasificación de los estudiantes para maestro). Finalmente, se obtuvieron las frecuencias obtenidas, es decir, el número de estudiantes para maestro que pertenecían a cada perfil y que habían resuelto con éxito los problemas.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados teniendo en cuenta las diferentes fases en las que se ha llevado a cabo el análisis. En la primera sección se presentan los resultados correspondientes al Cuestionario 1 sobre el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro sobre los 12 sub-constructos vinculados al razonamiento proporcional. En la segunda sección, se describen los resultados correspondientes a cómo los estudiantes para maestro identifican los sub-constructos relevantes de cada problema (los elementos matemáticos considerados y las formas de razonar) y cómo usan dichos sub-constructos para reconocer evidencias de la comprensión en las respuestas de los estudiantes, y para proponer actividades considerando dicha comprensión. En la tercera sección se muestra la relación entre el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro y cómo reconocen evidencias de la comprensión de los sub-constructos considerados a partir de las respuestas de los estudiantes.

4.1. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Esta sección está dividida en tres apartados. En el primer apartado, se muestran los porcentajes de éxito para cada uno de los problemas del Cuestionario 1. En el segundo, se muestran las estrategias (correctas e incorrectas) usadas por los estudiantes para maestro. Finalmente, se muestran los resultados del análisis de conglomerados que permiten identificar características del conocimiento especializado de los estudiantes para maestro de los distintos sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional.

4.1.1. Nivel de éxito en la resolución de problemas

La Tabla 4.1 muestra el porcentaje de éxito en cada sub-constructo considerado. Más de la mitad de los estudiantes para maestro resolvieron correctamente los problemas relacionados con el proceso unitizing (71%), problema de valor perdido proporcional (84%), medida-recta numérica (91%), repartos equitativos-cociente (96) y parte-todo (98%). Por otra parte, menos de un tercio de los estudiantes para maestro resolvieron correctamente los problemas relacionados con el significado de operador inverso (5%), razón como índice comparativo (9%), pensamiento relacional (12%), razonamiento up and down (20%), medida-densidad (26%), problema de valor perdido no proporcional (30%) y covarianza-cualitativo (32%).

Tabla 4.1. Porcentaje de los estudiantes para maestro que resolvieron con éxito los problemas (N=91).

Problema	Sub-constructo	Número de EPM	Porcentaje de éxito (*)
5	Operador	5	5%
11	Razón	8	9%
9	Pensamiento relacional	11	12%
6	Razonamiento up and down	18	20%
3	Medida – Densidad	24	26%
8	Problema valor perdido no proporcional	27	30%
12	Covarianza – cualitativo	29	32%
10	Proceso unitizing	65	71%
7	Problema valor perdido proporcional	76	84%
2	Medida – recta numérica	83	91%
4	Cociente	87	96%
1	Parte – todo	89	98%

(*) Los porcentajes han sido redondeados a la unidad más próxima

Estos resultados señalan un comportamiento desigual de los estudiantes para maestro en relación a los sub-constructos considerados que apoyan el razonamiento proporcional. Los estudiantes para maestro parece que son bastante competentes en tres de los sub-constructos del dominio del esquema fraccionario (parte-todo como medida, repartos equitativos-cociente y medida-recta numérica), en el problema de valor perdido proporcional y en el problema que implica el proceso unitizing. Mientras que tienen dificultades en los otros tres sub-constructos del esquema fraccionario, en la distinción de las situaciones no proporcionales y en tres sub-constructos vinculados a la idea de razón y comparación de razones.

En relación al esquema fraccionario, las dificultades se centran en el significado de la fracción como operador (en este caso el operador inverso), en el razonamiento vinculado a la reconstrucción de la unidad y uso de la fracción unitaria como unidad iterativa (razonamiento up and down), y en la noción de densidad en los números racionales. La dificultad en distinguir la situación no proporcional está vinculada a reconocer la relación aditiva entre las cantidades de la situación. Y en relación a la razón y comparación de razones, las dificultades están vinculadas a reconocer las comparaciones relativas y absolutas en la covariación de cantidades, a la idea de covarianza cualitativa en la que no hay un procedimiento algorítmico para buscar una respuesta, y al uso de la razón como un índice comparativo.

Los estudiantes para maestro tuvieron éxito en los problemas vinculados al significado parte-todo y en los problemas que se pueden resolver mediante procedimientos como el algoritmo de la división o la regla de tres. Así, el problema *cociente* se podría resolver haciendo una división (la razón vista como cociente de una división), el problema de *valor perdido proporcional* usando una regla de tres y el de *proceso unitizing* usando también una regla de tres o realizando una división de las cantidades que forman las razones. Sin embargo, estos estudiantes para maestro tuvieron dificultades en los sub-constructos que requieren una comprensión de los conceptos, es decir, los sub-constructos que implicaban tener en cuenta las cantidades y las relaciones entre las cantidades: operador inverso, razonamiento up and down, razón como índice comparativo, idea de covarianza en cualitativos, y la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales. A continuación ejemplificaremos este resultado y las dificultades que han tenido los estudiantes para maestro en los sub-constructos a partir de las estrategias correctas e incorrectas usadas por estos.

4.1.2. Estrategias correctas e incorrectas usadas por los estudiantes para maestro

En las Tablas 4.2, 4.3. y 4.4 se muestra el número de estudiantes para maestro que utilizó cada una de las estrategias correctas e incorrectas identificadas en cada sub-constructo.

Tabla 4.2. Estrategias usadas por los estudiantes para maestro en los sub-constructos del esquema fraccionario

Sub-constructo	Estrategias correctas		Estrategias incorrectas	
	Estrategia	**nº EPM**	**Estrategia**	**nº EPM**
Parte-todo	Parte-todo (justificado o solo en el dibujo)	68	En blanco	2
	Operador	8		
	Fracciones equivalentes	13		
Medida – recta numérica	Fracción unitaria	32	Error de cálculo (entiende 2/10 como 0,5)	3
	Fracciones equivalentes	13		
	Subdivisiones en la recta	21	En blanco	5
	Uso de decimales	17		
Medida - densidad	Fracciones equivalentes	16	Uso de decimales en el denominador	9
	Combinar números decimales y fracciones	8	Incompleto (no se hace explícita la idea de densidad, no se encuentra ninguna fracción al hacer el mcm en los denominadores)	29
			Sin sentido o en blanco	29
Cociente – reparto equitativo	"*built up from unit fractions*"	58	Sin sentido o en blanco	4
	"*share of each children*"	4		
	Constructiva	25		
Operador	Operador inverso	5	Estrategia aditiva	53
			Ampliar los mismo que se ha reducido (3/4)	9
			Sin sentido o en blanco	24
Razonam. up and down	Reconstruye la unidad a partir de la fracción unitaria	13	No identifica la unidad ni la fracción unitaria	12
	Operaciones con fracciones	5	Identifica la unidad pero no representa la fracción impropia	3
			Sin sentido o en blanco	58

Tabla 4.3. Estrategias usadas por los estudiantes para maestro en los sub-constructos de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales

Sub-constructo	**Estrategias correctas**		**Estrategias incorrectas**	
	Estrategia	**nº EPM**	**Estrategia**	**nº EPM**
Problema valor perdido proporcional	Razón (triple, 5 veces)	45	Estrategia aditiva	12
	Regla de tres	29	Sin sentido o en blanco	3
	Estrategia constructiva	2		
Problema valor perdido no proporcional	Aditiva	27	Razón (doble)	43
			Regla de tres	21

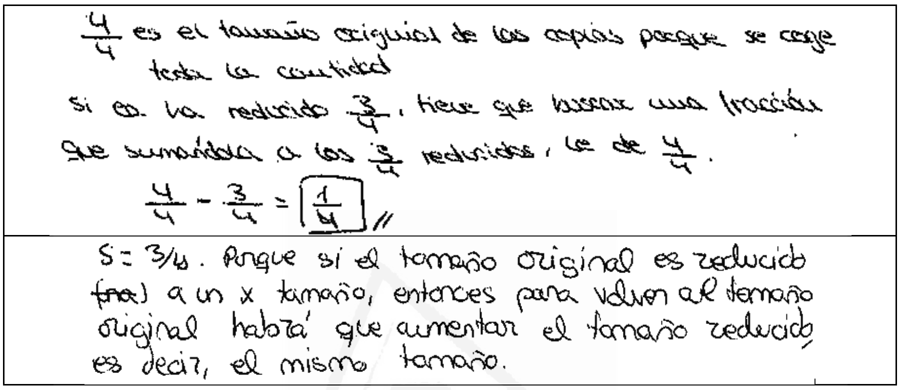
Tabla 4.4. Estrategias usadas por los estudiantes para maestro en los sub-constructos de la comparación de razones

Sub-constructo	**Estrategias correctas**		**Estrategias incorrectas**	
	Estrategia	**nº EPM**	**Estrategia**	**nº EPM**
Pensamiento relacional	Pensamiento relativo	5	Pensamiento absoluto (aunque no es incorrecto se consideró que el EPM no tiene un pensamiento multiplicativo)	69
	Relativo y absoluto	6		
			Sin sentido o en blanco	11
Proceso unitizing	Razón	40	Estrategia aditiva	2
	Regla de tres	21	Interpretación incorrecta de la razón kg/€	15
	Fracciones equivalentes	4	Sin sentido o en blanco	9
Razón	Razones y aproximación de la razón a 1	8	Estrategia aditiva o cualitativa	73
			Sin sentido o en blanco	10
Covarianza – cualitativo	Correctos los dos casos con justificación	29	Correcto si tiene solución e incorrecto si no tiene	38
			Correcto si no tiene solución e incorrecto si tiene	2
			Incorrecto en ambos casos	8
			Sin sentido o en blanco	14

El problema que resultó más difícil fue el que correspondía al sub-constructo operador (operador inverso) (5%).

> *El profesor le dijo a Nicolás que hiciese unas fotocopias. Nicolás cometió un error y apretó el botón que reduce el tamaño de cada copia a ¾. ¿Cuánto debe aumentar Nicolás el tamaño de las copias reducidas para conseguir el tamaño original?*

Algunos estudiantes para maestro justificaron su resolución diciendo que si se había reducido ¾, faltaba ¼ para tener de nuevo el tamaño original, poniendo de manifiesto una aproximación aditiva (3/4 + 1/4 = 1) frente a una aproximación multiplicativa (3/4 · 4/3 = 1) (Figura 4.1.a; estrategia aditiva). Otra manifestación de esta aproximación no multiplicativa se da cuando los estudiantes para maestro consideraban que después de disminuir ¾, para volver al tamaño original había que aumentar lo mismo, ¾ (Figura 4.1.b; ampliar lo mismo que se ha reducido).


$\frac{4}{4}$ es el tamaño original de las copias porque se coge toda la cantidad
si se ha reducido $\frac{3}{4}$, tiene que buscar una fracción que sumándola a los $\frac{3}{4}$ reducidos, le de $\frac{4}{4}$.
$\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$ //

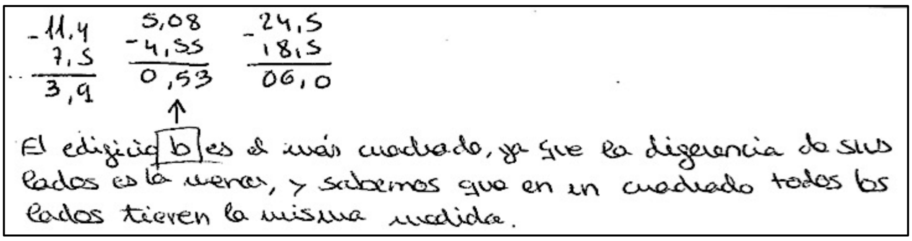
S: 3/4. Porque si el tamaño original es reducido ~~(fra)~~ a un x tamaño, entonces para volver al tamaño original habrá que aumentar el tamaño reducido es decir, el mismo tamaño.

Figura 4.1. Resoluciones de dos EPM del problema relacionado con el sub-constructo operador

El segundo problema en nivel de dificultad fue el relativo a la razón (9%).

En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes:
a) 7.5m por 11.4m   b) 4.55m por 5.08m   c) 18.5m por 24.5m
¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado? Justifica tu respuesta.

La mayoría de los estudiantes para maestro que realizaron incorrectamente este problema aplicaron una estrategia aditiva incorrecta, basándose en la diferencia entre los lados en lugar de la aproximación de la razón a 1 por ser la razón de los lados de un cuadrado 1 (Figura 4.2).


$11{,}4 - 7{,}5 = 3{,}9$ $5{,}08 - 4{,}55 = 0{,}53$ $24{,}5 - 18{,}5 = 06{,}0$

El edificio $\boxed{b}$ es el más cuadrado, ya que la digerencia de sus lados es la menor, y sabemos que en un cuadrado todos los lados tieren la misma medida.

Figura 4.2. Resolución de un EPM del problema relacionado con el sub-constructo razón como índice comparativo

En el problema sobre el pensamiento relacional, identificamos aquellas respuestas que evidenciaban este tipo de pensamiento (12%).

José tiene dos serpientes, Judía Verde y Esbelta. Ahora mismo, Judía Verde mide 40cm de longitud y Esbelta 50cm de longitud. Juan sabe que dentro de dos años, ambas serpientes habrán crecido completamente. La longitud de Judía Verde será de 70cm, mientras que la de Esbelta será de 80cm. Dentro de dos años, ¿habrán crecido ambas la misma cantidad?

En este problema, prácticamente casi todos los estudiantes para maestro evidenciaron un pensamiento absoluto, calculando la diferencia entre el crecimiento anterior y posterior de las serpientes (Figura 4.3).

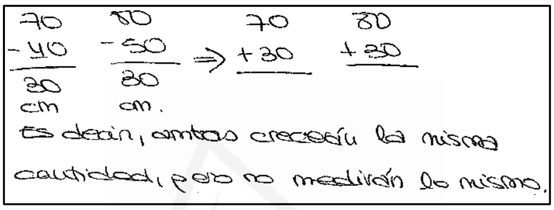
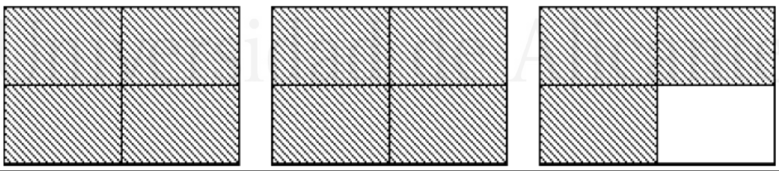


Figura 4.3. Resolución de un EPM del problema relacionado con el sub-constructo pensamiento relacional

El problema de razonamiento up and down tuvo un nivel de éxito del 20%.

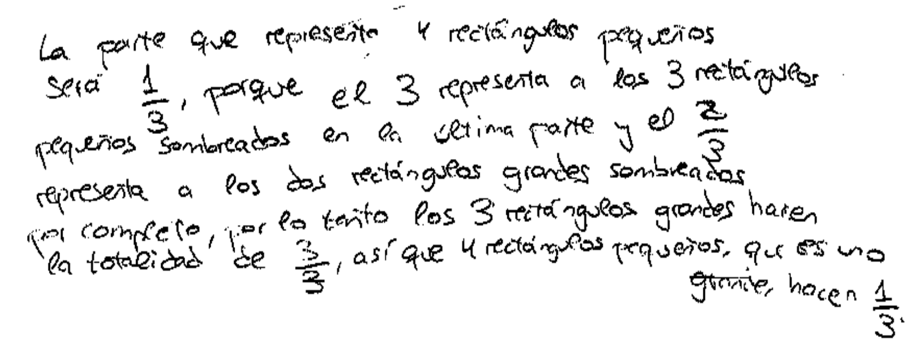
La parte sombreada de esta figura representa $3\,\frac{2}{3}$. ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños?



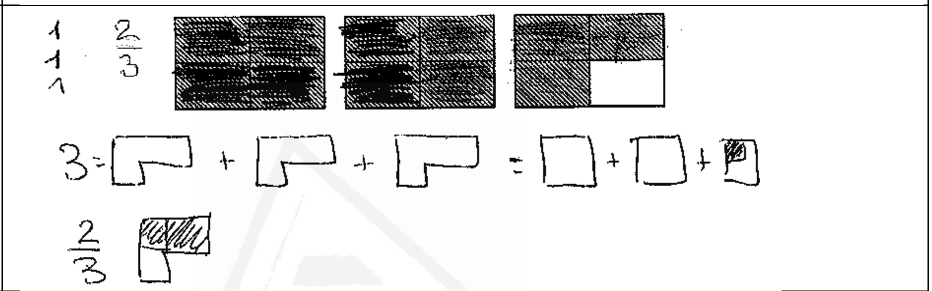
La mayoría de los estudiantes para maestro dejaron sin resolver esta tarea, y los que intentaron resolverla aplicaron argumentos sin sentido. La dificultad de este problema radica en identificar $3\,\frac{2}{3}$ como 11/3 y asociar los 11 rectángulos pequeños a la fracción 11/3, (11/3 como 11 veces 1/3), lo que les permite vincular la fracción 1/3 a la representación de un rectángulo pequeño, y a partir de aquí, la necesidad de reconocer la unidad formada por tres de los rectángulos pequeños. El proceso de razonamiento que se debe generar implica reconstruir la unidad a partir de la representación proporcionada (identificar que tres rectángulos pequeños es la unidad) e identificar qué fracción corresponde a los 4 rectángulos pequeños (una unidad y 1/3 de la otra) (Figura 4.4.c).

Sin embargo, las dificultades encontradas estuvieron relacionadas con la no identificación de la unidad (Figura 4.4.a) o en relación a la no representación de la fracción impropia una vez identificada la unidad (Figura 4.4.b)

No identifica la unidad



Identifica la unidad pero no representa la fracción impropia



Reconstruye la unidad y representa la fracción

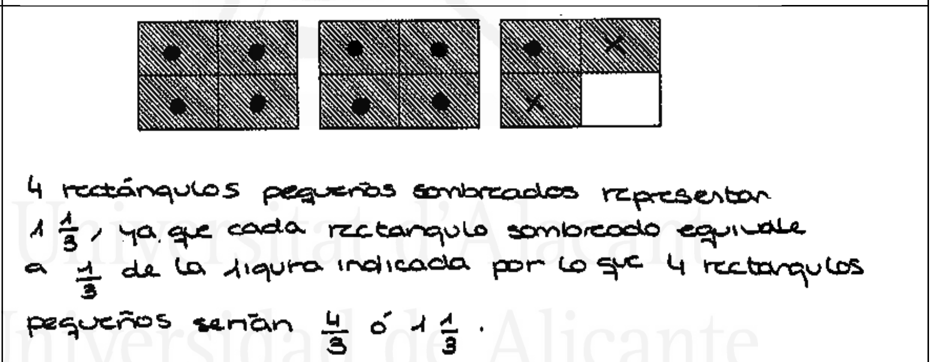


Figura 4.4. Resoluciones de tres EPM del problema relacionado con el razonamiento up and down

Otro problema con un nivel de éxito bajo fue el relacionado con el sub-constructo medida-densidad (26%).

Encuentra dos fracciones que estén entre 1/6 y 1/5. Explica cómo lo has hecho.

Muchos estudiantes para maestro lo dejaron en blanco, y de los que lo resolvieron de forma incorrecta, dos fueron las estrategias más comunes. Por una parte, algunos estudiantes para maestro buscaban fracciones con decimales en el numerador o denominador (Figura 4.5.a). Por otro lado, la otra estrategia incorrecta era cuando obtenían un denominador no válido para encontrar las fracciones que se les pedía e indicaban que no había más fracciones, en lugar de buscar fracciones equivalentes de denominador mayor (Figura 4.5.b).

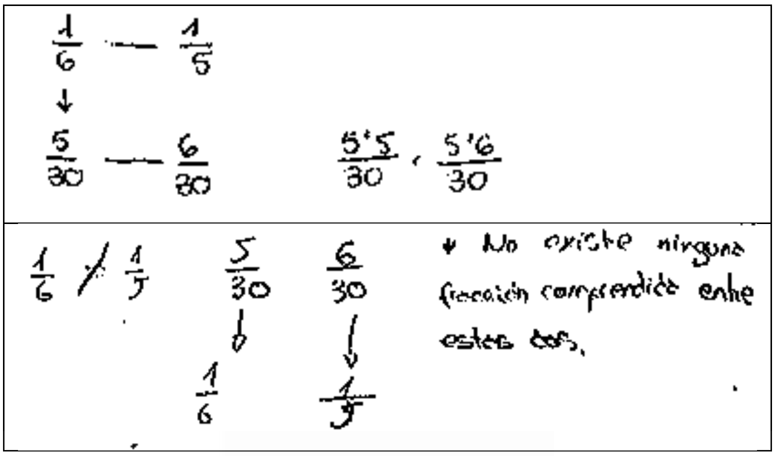


Figura 4.5. Resoluciones de dos EPM del problema relacionado con el sub-constructo medida

El problema de valor perdido no proporcional sólo fue resuelto correctamente por el 30% de los estudiantes para maestro.

Las empresas A y B fabrican tornillos a la misma velocidad pero la empresa B ha empezado antes. Cuando la empresa A ha fabricado 40 cajas, la empresa B ha fabricado 80 cajas. Si la empresa A ha fabricado 120 cajas, ¿cuántas cajas tendrá fabricadas la empresa B?

La mayoría de los estudiantes para maestro aplicó estrategias proporcionales como la regla de tres sin identificar que se trataba de un problema no proporcional donde las relaciones entre las cantidades eran aditivas (Figura 4.6).

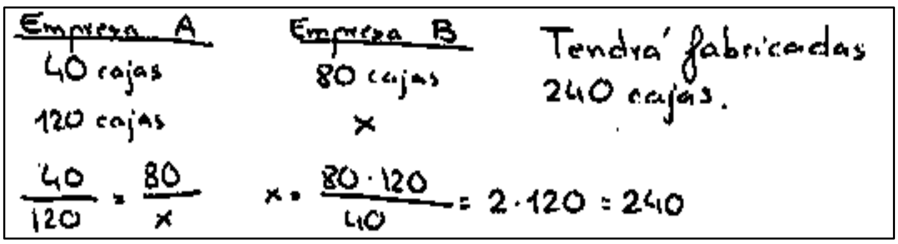


Figura 4.6. Resolución de un EPM del problema relacionado con el sub-constructo problema de valor perdido no proporcional

El problema covarianza-cualitativo también tuvo un nivel de éxito bajo (32%).

> *Responde a los siguientes apartados:*
>
> a. *Ana condujo hoy menos kilómetros en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad menor? ¿Por qué?*
>
> b. *Pepe dio hoy más vueltas en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad mayor? ¿Por qué?*

La dificultad de este tipo de problemas sin datos numéricos radica en saber diferenciar las situaciones que tienen solución ("a más, menos" y "a menos, más") y las que no la tienen ("a más, más" y "a menos, menos"). La Figura 4.7 muestra un estudiante para maestro que no reconoce estas características.

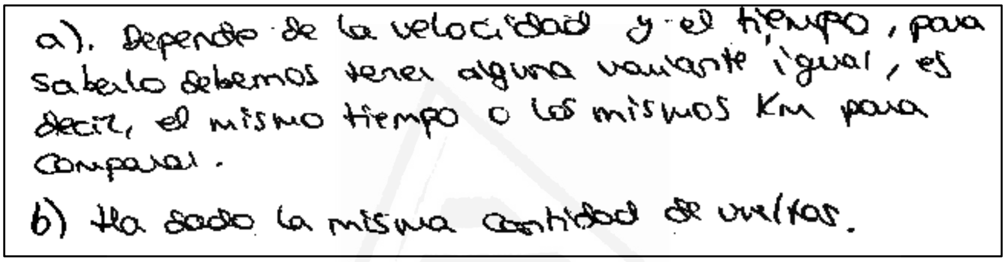

a). Depende de la velocidad y el tiempo, para saberlo debemos tener alguna variante igual, es decir, el mismo tiempo o los mismos Km para comparar.
b) Ha dado la misma cantidad de vueltas.

Figura 4.7. Resolución de un EPM del problema relacionado con el sub-constructo covarianza

Los estudiantes para maestro tuvieron dificultades en los sub-constructos que implicaban una comprensión de los conceptos (ante la imposibilidad de poder aplicar un procedimiento): operador inverso, razonamiento up and down, razón como índice comparativo, idea de covarianza en cualitativos, y la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales; utilizando estrategias incorrectas o dejándolos en blanco. Ejemplificaremos esta característica con las respuestas del estudiante para maestro E040, que resolvió correctamente los problemas en los que podía aplicar procedimientos de cálculo, pero incorrectamente los problemas que implicaban reconocer relaciones entre las cantidades (Figura 4.8).

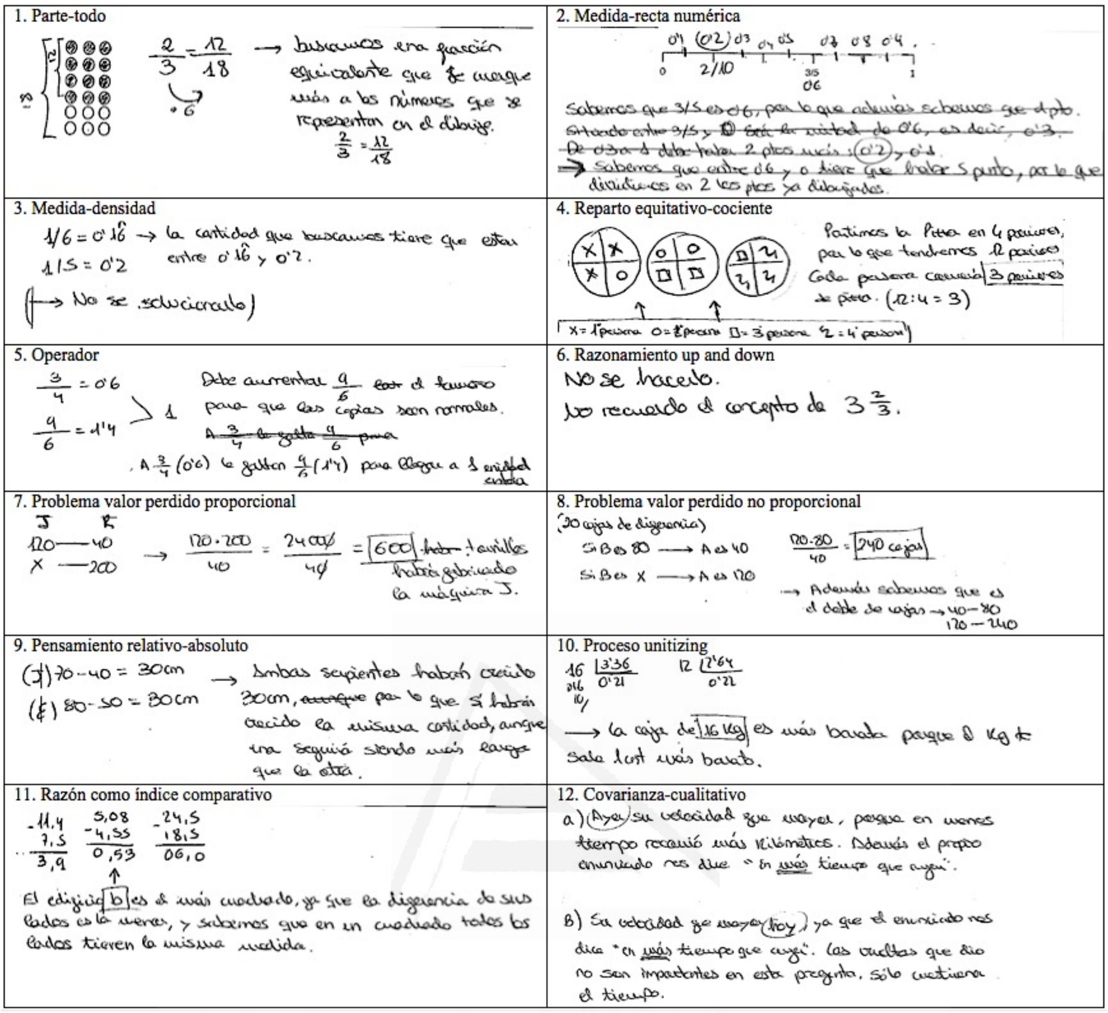


Figura 4.8. Respuestas del estudiante para maestro E040

Este estudiante para maestro realizó incorrectamente 7 problemas de los 12. Los 5 problemas que resolvió correctamente fueron los de *parte-todo*, *medida-recta numérica*, *cociente*, *problema de valor perdido proporcional* y *proceso unitizing*, que son los problemas que se puede resolver mediante procedimientos como una división o la regla de tres. El problema *parte-todo* lo resolvió mediante el procedimiento de cálculo de fracciones equivalentes. Los problemas *medida-recta numérica*, *cociente* y *proceso unitizing* los resolvió mediante una división. Así, en la *recta numérica* dividió el segmento en 0.2, 0.4, 0.6,…; en el problema *cociente-reparto equitativo* dividió los 12 trozos entre 4 personas (12:4=3) y en el problema *proceso unitizing* dividió los kilos entre los euros. Por otro lado, el problema de valor perdido proporcional lo resolvió mediante una regla de tres, y con este mismo procedimiento (regla de tres) resolvió de manera incorrecta el problema de valor perdido no proporcional, hecho que indica que no distingue las situaciones proporcionales de las no proporcionales. Este estudiante para maestro usó de manera sistemática el algoritmo de la división en el problema de *medida-densidad* y *operador* sin saber resolver los problemas y empleó una estrategia aditiva incorrecta en los problemas de comparar razones (problemas que implican el *pensamiento relacional* y el significado de *razón*). Es decir, cuando los problemas exigían la comprensión de relaciones entre cantidades donde no hay un procedimiento previamente establecido tuvo dificultades.

4.1.3. Características del conocimiento especializado del estudiante para maestro en relación a los sub-constructos considerados en el razonamiento proporcional

La Tabla 4.5 muestra las características de los cuatro grupos de estudiantes para maestro obtenidos a través del análisis de conglomerados. Existen cuatro sub-constructos que no discriminan entre los grupos: la relación parte-todo, medida-recta numérica, reparto equitativo-cociente y proceso unitizing, que son los sub-constructos que tuvieron un mayor porcentaje de éxito, y como se ha dicho anteriormente, están vinculados con el uso de procedimientos. A partir de estos grupos, se generan diferentes rasgos característicos del conocimiento de los estudiantes para maestro.

Tabla 4.5. Cuatro grupos de estudiantes para maestro según la resolución de los 12 problemas

Dominio	Pr	Sub-constructos	Grupo 1 N=55	Grupo 2 N=12	Grupo 3 N=15	Grupo 4 N=9
A	1	Parte-todo	96	100	100	100
A	2	Medida-Recta numérica	91	100	80	100%
A	4	Cociente	98	83	100	100%
A	3	Densidad	25	0	6	100%
A	5	Operador	0	0	0	56%
A	6	Razonamiento up & down	5	100	6	11%
B	7	Problema valor perdido proporcional	98	100	6	100%
B	8	Problema valor perdido no proporcional	10	42	73	55%
C	9	Pensamiento relativo-absoluto	10	8	6	33%
C	10	Proceso unitizing	69	75	80	67%
C	11	Razón- índice comparativo	2	8	6	56%
C	12	Covarianza	27	8	33	90%

(*) Los datos de la tabla están representados en porcentajes

Los grupos 1 y 3 se caracterizan por tener éxito en los sub-constructos que podían vincularse a algún procedimiento (4 sub-constructos que no discriminan: parte-todo, medida-recta numérica, cociente-reparto equitativo y proceso unitizing). Sin embargo, los estudiantes para maestro de estos dos grupos no fueron capaces de distinguir las situaciones proporcionales de las no proporcionales ni de darle significado a los conceptos de razón, proporción o covarianza. La diferencia entre estos dos grupos está en la manera de resolver los problemas proporcional y no proporcional. Los estudiantes para maestro del grupo 1 (N=55) evidencian un razonamiento multiplicativo (98% de éxito en el problema proporcional y 10% de éxito en el problema no proporcional de estructura aditiva), mientras que los estudiantes para maestro del grupo 3 (N=15) tienen un razonamiento aditivo (6% de éxito en el problema proporcional y 73% de éxito en el problema no proporcional de estructura aditiva).

La diferencia entre los grupos 1 y 3 y los grupos 2 y 4 es que estos dos últimos grupos comienzan a distinguir las situaciones proporcionales de las no proporcionales. Así, los grupos 2 y 4 presentan un 100% de éxito en el problema de valor perdido proporcional y aproximadamente un 42% y 55% de éxito, respectivamente, en el problema aditivo. La diferencia entre el grupo 2 y 4 está en que los estudiantes para maestro del grupo 4 comienzan a resolver de manera correcta problemas que implican los conceptos de razón como índice comparativo, covarianza-cualitativo, pensamiento relativo-absoluto, y operador (del esquema fraccionario). Los estudiantes para maestro del grupo 2, en cambio, parece que consolidan la coordinación del reconocimiento de la fracción como una unidad múltiple (a/b = a veces 1/b) con el uso de la fracción unitaria (1/n) como una unidad iterativa (razonamiento up and down) ya que tuvieron un 100% de éxito en el problema 6 sobre el razonamiento up and down, pero tienen dificultades en los problemas de comparación de razones y operador.

De los resultados del conglomerado se desprende una cierta desvinculación entre el conocimiento de los procedimientos implicados en el razonamiento proporcional (por ejemplo, la razón como la división de dos cantidades) y los significados de la idea de razón no directamente vinculadas a procedimientos (razón como índice comparativo, el pensamiento relacional/absoluto e idea de covarianza). Esto se observa en los grupos 1 y 3 que fueron capaces de resolver algunos problemas a través de procedimientos desvinculados a los significados de fracción, razón o proporción, pero no fueron capaces de resolver aquellos problemas que implican reconocer relaciones entre las cantidades (distinguir las situaciones de proporcionalidad y no proporcionalidad) ni de resolver los problemas que implicaban el significado de razón no vinculado a un procedimiento.

La forma en la que se han formado los conglomerados parece indicar que algunos estudiantes para maestro resuelven los problemas más procedimentales (y en particular los relacionados con el esquema fraccionario), otros añaden la capacidad de distinguir situaciones proporcionales y no proporcionales, y otros consideran además los significados relacionados con los conceptos de razón y proporción. Otra característica es que parece que el razonamiento up and down (relacionado con el esquema fraccionario) no está relacionado con los sub-constructos vinculados al significado de razón. Pues los grupos 2 y 4 se diferencian por el éxito en el sub-constructo razonamiento up and down o por el éxito en los sub-constructos relacionados con el significado de razón.

4.2. MIRADA PROFESIONAL DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO EN RELACIÓN AL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

En esta sección mostraremos los resultados correspondientes a cómo los estudiantes para maestro identifican los sub-constructos en cada problema y en las respuestas de los estudiantes (elementos matemáticos relevantes en los problemas), cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes de estos sub-constructos, y qué actividades proponen en base a dicha comprensión.

Esta sección está dividida en tres apartados. En el primer apartado, se muestran los resultados obtenidos en cada uno de los sub-constructos considerados. En el segundo, se muestran los perfiles de estudiantes para maestro obtenidos en el refinamiento del análisis clúster sobre cómo los estudiantes para maestro usan los elementos matemáticos vinculados a cada sub-constructo para reconocer la comprensión de los estudiantes. Finalmente, en el tercer apartado, se muestran los resultados relativos a cómo los estudiantes para maestro usan lo que conocen sobre la comprensión del estudiante para proponer actividades que le permita consolidar o mejorar su comprensión.

4.2.1. Cómo los estudiantes para maestro identifican y usan los elementos matemáticos para reconocer la comprensión de los estudiantes

Generamos siete categorías en relación a cómo los estudiantes para maestro identifican los elementos matemáticos implicados en cada problema y cómo los usan para reconocer características de la comprensión. En el grupo de los estudiantes para maestro que identificaron los elementos matemáticos en cada problema (I) consideramos tres grupos, los que reconocen la compresión (I-RC), los que describen la respuesta de los estudiantes (I-D) y los que proporcionan comentarios generales (I-G). En el grupo de los que no identifican los elementos matemáticos del problema (NI), consideramos dos grupos, los que describen las respuestas de los estudiantes (NI-D) y los que proporcionan comentarios generales (NI-G). Finalmente, consideramos las respuestas sin sentido o en blanco (SS).

La Tabla 4.6 muestra la relación entre los elementos matemáticos identificados por los estudiantes para maestro en cada problema y cómo usan esos elementos cuando reconocen características de la comprensión de los estudiantes en cada problema.

Tabla 4.6. Categorías en relación a cómo los EPM identificaron los elementos matemáticos en cada problema y cómo los usaron para reconocer características de la comprensión de los estudiantes

	Categorías						
Sub-constructos	**I-RC**	**I-D**	**I-G**	**NI-D**	**NI-G**	**SS**	**Blanco**
1. Parte-todo	38	12	24	5	9	2	1
2. Medida-recta numérica	16	18	22	4	5	9	17
3. Medida-Densidad	32	8	17	6	6	7	15
4. Cociente	19	7	18	14	12	6	15
5. Operador	9	4	4	2	8	38	26
6. Razonamiento up and down	32	2	8	4	16	9	20
7. Problema valor perdido proporcional	45	4	3	4	21	11	3
8. Problema valor perdido no proporcional	47	0	9	0	8	17	10
9. Pensamiento relacional	53	4	3	12	11	6	2
10. Proceso unitizing	18	19	5	23	18	8	0
11. Razón	22	4	9	20	31	4	1
12. Covarianza-cualitativo	16	1	11	1	22	31	9

(*) Los datos son el número de EPM pertenecientes a cada categoría (N=91)

La datos de la Tabla 4.6 indican que los estudiantes para maestro identificaron los elementos matemáticos en cada problema y los usaron para reconocer características de la comprensión de los estudiantes de manera diferente en cada sub-constructo. Los estudiantes para maestro tuvieron menos dificultades en identificar los elementos matemáticos del problema y reconocer características de la comprensión de los estudiantes (I-RC) en los sub-constructos pensamiento relacional (53 EPM), problema de valor perdido proporcional (45 EPM) y problema de valor perdido no proporcional (47 EPM). En estos problemas, los estudiantes para maestro debían reconocer en las respuestas de los estudiantes cuándo un pensamiento aditivo o multiplicativo era correcto. Sin embargo, los estudiantes para maestro tuvieron más dificultades en identificar y usar los elementos matemáticos de cada problema para reconocer características de la comprensión de los estudiantes (I-RC) en los sub-constructos operador (9 EPM) y covarianza-cualitativo (16 EPM) dado que la mayoría de los estudiantes para maestro no comprendieron las respuestas de los estudiantes en cada uno de estos problemas (en la categoría SS, n=38 y n=31, respectivamente). Estos sub-constructos implicaban reconocer el significado de operador inverso y la covariación cualitativa entre cantidades en situaciones de comparación de razones. Estos resultados parecen mostrar la diferencia entre los diferentes sub-constructos considerados. Así, las tareas en las que había respuestas de estudiantes en las que los estudiantes para maestro debían distinguir entre estrategias aditivas y multiplicativas facilitan el reconocimiento de las características de la comprensión de los estudiantes, sin embargo, cuando era necesario conocer los elementos implicados (idea de unidad, razón…) les resultaba más difícil.

Por otra parte, los resultados muestran que reconocer evidencias de la comprensión de los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes se apoya en haber identificado los elementos matemáticos en el problema (identificar los KDU), ya que únicamente aquellos estudiantes para maestro que identificaron dichos elementos fueron capaces de reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes (I-RC) (no se generó la categoría NI-RC). Sin embargo, también hubo estudiantes para maestro que aun habiendo identificado los elementos matemáticos relevantes implicados en los problemas, no fueron capaces de reconocer características de la comprensión de los estudiantes y proporcionaron una descripción centrada en el procedimiento usado (I-D) o un comentario general centrado en la corrección de las respuestas (I-G). Este hecho parece indicar que reconocer evidencias de la comprensión en las respuestas de los estudiantes no depende únicamente de identificar los elementos matemáticos implicados en el problema. Por tanto, identificar los elementos matemáticos del problema no es una condición suficiente pero sí necesaria para reconocer características de la comprensión de los estudiantes.

A continuación ejemplificaremos este último resultado con el sub-constructo razonamiento up and down perteneciente al dominio esquema fraccionario y con el sub-constructo proceso unitizing perteneciente al dominio comparación de razones.

En el sub-constructo razonamiento up and down, de los 91 estudiantes para maestro, 20 dejaron en blanco la cuestión relativa a reconocer evidencias de la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en las respuestas de los estudiantes (cuestión b). Cuarenta y dos estudiantes para maestro de los 71 restantes identificaron los procesos que caracterizan el razonamiento up and down como relevantes en la resolución del problema (la coordinación de una fracción como unidad múltiple para reconstruir el todo y el proceso de usar la fracción unitaria como unidad iterativa para representar otra fracción), sin embargo, sólo 32 de ellos usaron estos elementos matemáticos para justificar sus inferencias sobre la comprensión de los estudiantes (I-RC). Por ejemplo:

> "*a) Conocimiento del todo y que el todo no tiene por qué ser la figura dibujada, sino una parte de ella. Conocimiento de fracciones mixtas y de la fracción unitaria.*
>
> *b) Respuesta 1: Este alumno deduce bien cuál es su todo y para conocer el valor de los 4 cuadraditos, busca la fracción unitaria y completa la figura, que será un todo y 1/3 de otro todo.*
>
> *Respuesta 2: Esta alumna lo hace de forma correcta porque halla el todo a partir de la fracción 3+2/3. Pero no responde correctamente a la pregunta que se le ha planteado sobre qué son los cuatro cuadrados, se queda en conocer cuál es su todo.*

Respuesta 3: No reconoce bien el todo, no entiende la fracción 3+2/3 y lo que hace es simplemente decir que cada figura (cuatro cuadrados) es un todo."

Este estudiante para maestro identificó la reconstrucción del todo y la idea de fracción unitaria como elementos implicados en la resolución del problema. Por otro lado, reconoció diferencias en la comprensión de los estudiantes apoyándose en los elementos matemáticos que había identificado. Así, indicó que el estudiante 1 reconstruye el todo identificando la fracción unitaria e iterándola para representar la fracción pedida, el estudiante 2 reconstruye el todo pero no representa la fracción pedida, y el estudiante 3 indica que no entiende la fracción 3+2/3, es decir, no entiende la fracción como una unidad múltiple, lo que le impide reconstruir el todo.

Por otro lado, 10 estudiantes para maestro de los 42 que sí habían identificado los elementos matemáticos implicados en la resolución del problema, sólo proporcionaron comentarios generales al describir los procedimientos usados por los estudiantes o proporcionaron comentarios centrados en la corrección de las respuestas (I-D o I-G). Por ejemplo, el siguiente estudiante para maestro identificó como elementos matemáticos la identificación del todo y de la fracción unitaria (aunque también indicó el elemento parte-parte, que no tiene relación con el problema) sin embargo proporcionó, comentarios generales centrados en la comprensión o no del estudiante:

"a) Los alumnos deben ser capaces de comprender la relación parte-parte, identificar el todo y la fracción unitaria.

b) En la respuesta 1 podemos comprobar que el alumno ha comprendido los conceptos.

En la respuesta 2 el alumno comprende los conceptos.

En la respuesta 3 no interpreta bien el dibujo."

El hecho de que hay estudiantes para maestro que indican los elementos matemáticos relevantes del problema, pero añaden otros sin relación, puede ser considerado evidencia de una no comprensión clara de lo que son los elementos matemáticos del problema y estar en la base de la generación de comentarios sobre la comprensión de los estudiantes vagos y poco precisos (las categorías D y G). Estos datos parecen indicar que reconocer los elementos matemáticos relevantes en el problema (en nuestro caso, la coordinación de las ideas implicadas en el razonamiento up and down como elementos claves del problema) es necesario para reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes, ya que únicamente aquellos estudiantes para maestro que identificaron dichos elementos fueron capaces de reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes (I-RC).

Respecto al sub-constructo proceso unitizing, de los 91 estudiantes para maestro, ninguno dejó en blanco la cuestión relativa a reconocer evidencias de la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en las respuestas de los estudiantes (cuestión b). Cuarenta y dos estudiantes para maestro identificaron el proceso unitizing como relevante en la resolución del problema (I) (identificación de una unidad que permita comparar), sin embargo, sólo 18 de ellos usaron este elemento matemático para justificar sus inferencias sobre la comprensión de los estudiantes (I-RC). Por ejemplo:

> "*a) Significado de razón. Comparación de razones. Identificar una unidad que permite la comparación.*
>
> *b) Respuesta 1: Identifica las razones €/kg y las compara.*
>
> *Respuesta 2: Identifica los 12kg como unidad para comparar. Uso de la regla de 3 para obtener el precio de 12kg.*
>
> *Respuesta 3: No identifica las razones. Usa relaciones aditivas.*"

Este estudiante para maestro reconoció la identificación de una unidad para comparar como elemento relevante del problema y la usó para explicar las respuestas de los estudiantes. Así, en el estudiante 1, identificó que había usado la razón unitaria euros-por 1 kilo para comparar, en el estudiante 2, identificó que había usado la razón euros-por 12kg para poder comparar, e identificó que el estudiante 3 había usado una estrategia aditiva incorrecta para este tipo de problemas. Este estudiante para maestro reconocía la comprensión de los elementos matemáticos vinculados al problema como claves (KDU).

Por otro lado, 24 estudiantes para maestro de los 42 que sí habían identificado los elementos matemáticos implicados en la resolución del problema (I), sólo proporcionaron comentarios generales al describir los procedimientos usados por los estudiantes o proporcionaron comentarios centrados en la corrección de las respuestas (I-D o I-G). Por ejemplo, el siguiente estudiante para maestro identificó la idea de buscar una razón para poder comparar, sin embargo proporcionó comentarios generales justificando sus comentarios basados en la corrección de las respuestas, cuando interpreta la comprensión de los estudiantes:

> *"a) Para resolver la tarea un alumno de primaria debe conocer la idea de razón para realizar la comparación o la idea de proporcionalidad para calcular el precio por kg de cada tipo de cereales.*
>
> *b) Respuesta 1: lo resuelve correctamente aplicando la idea de razón y realizando la comparación.*
>
> *Respuesta 2: lo resuelve correctamente aplicando la idea de proporcionalidad para poder hacer la comparación.*
>
> *Respuesta 3: no aplica los conceptos necesarios, sino que lo resuelve como si fuera un problema de estructura aditiva."*

Estos resultados muestran que, independientemente del sub-constructo y del dominio al que pertenece, identificar los elementos matemáticos relevantes les ayudó a reconocer características de la comprensión de los estudiantes (como KDU). Sin embargo, otros estudiantes para maestro, aún habiendo identificado los elementos matemáticos relevantes, dieron comentarios generales basados en la descripción de los procedimientos y no concretando en las evidencias dadas por las respuestas de los estudiantes o haciendo referencia únicamente a la corrección de las respuestas. Una posible explicación a este resultado es que la generación de un discurso con evidencias especificas vinculadas al registro de la práctica analizada en el proceso de reconocer evidencias de la comprensión no depende únicamente de reconocer las matemáticas implicadas en el problema.

Para indagar un poco más en las relaciones entre cómo los estudiantes para maestro identificaban los elementos matemáticos y cómo los usaban para reconocer características de la comprensión de los estudiantes en los distintos sub-constructos vinculados al razonamiento proporcional, se realizó un análisis clúster que nos proporcionó perfiles de estudiantes para maestro sobre cómo identificaban los elementos matemáticos y reconocían características de la comprensión de los estudiantes.

4.2.2. Perfiles de estudiantes para maestro: Cómo identifican y usan los elementos matemáticos para reconocer la comprensión de los estudiantes

En este apartado describimos los perfiles de estudiantes para maestro obtenidos tras el análisis clúster y el refinamiento realizado. Solamente 72 de los 91 estudiantes para maestro fueron agrupados en los 8 perfiles obtenidos durante el análisis. Los 19 estudiantes para maestro restantes no se pudieron clasificar en ninguno de estos perfiles porque la mayoría de ellos dejaron varias tareas en blanco.

La Tabla 4.7 muestra las características de cada uno de los perfiles obtenidos. El sub-constructo operador inverso no ayudó a caracterizar ningún perfil, por lo que no se contempla cuando se habla del esquema fraccionario. Los estudiantes para maestro tuvieron muchas dificultades en identificar el operador inverso como el elemento matemático en este problema y usarlo para identificar la comprensión de los estudiantes. Cabe destacar que de los 72 estudiantes para maestro que se agruparon en los perfiles, 20 de ellos tuvieron dificultades en identificar los elementos matemáticos clave de los problemas (KDU), lo que les llevó a no reconocer características de la comprensión de los estudiantes, proporcionando comentarios generales basados en la corrección de las respuestas (Perfil 0). Por otra parte, 52 de los 72 estudiantes para maestro comenzaron a identificar los elementos matemáticos importantes de los problemas del esquema fraccionario (parte-todo, medida-recta numérica, medida-densidad, cociente-reparto equitativo) y empezaron a reconocer características de la comprensión de los estudiantes en algunos de estos problemas.

Además, 29 de esos 52 (perfiles 2b, 2c, 3a, 3b y 3c) identificaron elementos matemáticos y reconocieron características de la comprensión en el dominio de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, además de la mayoría de los sub-constructos del esquema fraccionario (excepto 4 EPM que en el perfil 2b no reconocían el razonamiento up and down). Y, 16 de esos 29 además también identificaron elementos matemáticos y reconocieron características de la comprensión en algunos sub-constructos de la comparación de razones. Estos resultados parecen mostrar que las características del entorno de aprendizaje y de las tareas ayudaron a los estudiantes para maestro a centrar su mirada en aspectos específicos de los problemas y de las respuestas de los estudiantes para reconocer características de la comprensión.

Tabla 4.7. Perfiles de estudiantes para maestro obtenidos tras el análisis (n=72)

Cómo los estudiantes para maestro identifican y usan los elementos matemáticos de cada problema para reconocer características de la comprensión de los estudiantes	Nº EPM
Perfil 0. **No identifica** los elementos matemáticos en **ningún problema** y **no reconoce** características de la comprensión de los estudiantes en **ningún problema**	20
Perfil 1. **Identifica** los elementos matemáticos del **esquema fraccionario** (excepto razonamiento up and down) y **reconoce** características de la comprensión de los estudiantes en **algunos** de los problemas donde identifica los elementos.	17
Perfil 2a. **Identifica** los elementos matemáticos del **esquema fraccionario** incluido el **razonamiento up and down**. **Reconoce** características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identifica los elementos.	6
Perfil 2b. **Identifica** los elementos matemáticos del **esquema fraccionario** (excepto razonamiento up and down), la **distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales** y el **pensamiento relacional**. **Reconoce** características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identifica los elementos.	4
Perfil 2c. **Identifica** los elementos matemáticos del **esquema fraccionario** (incluido el razonamiento up and down), la **distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales** y el **pensamiento relacional**. **Reconoce** características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identifica los elementos.	9
Perfil 3a. **Identifica** los elementos matemáticos del **esquema fraccionario**, la **distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales**, el **pensamiento relacional** y la **covarianza-cualitativa**. **Reconoce** características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identifica los elementos.	6
Perfil 3b. **Identifica** los elementos matemáticos del **esquema fraccionario**, la **distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales**, el **pensamiento relacional** y la **razón** como índice comparativo. **Reconoce** características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identifica los elementos.	4
Perfil 3c. **Identifica** los elementos matemáticos del **razonamiento proporcional** (esquema fraccionario, distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y comparación de razones). **Reconoce** características de la comprensión de los estudiantes en **todos** los problemas.	6

Los elementos matemáticos implicados en el razonamiento proporcional no fueron identificados por los estudiantes para maestro de la misma manera, y esto influyó en cómo reconocían características de la comprensión de los estudiantes. De hecho, los elementos matemáticos relacionados con el esquema fraccionario fueron identificados de manera más fácil que los relacionados con la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y el pensamiento relacional y estos fueron, a su vez, más fáciles de identificar que los elementos matemáticos relacionados con las situaciones de comparar razones, que fueron las tareas en las que los estudiantes para maestro tuvieron más dificultades en identificar los elementos matemáticos de los problemas y usarlos para reconocer características de la comprensión de los estudiantes.

En la caracterización de los perfiles, el pensamiento relacional, a pesar de pertenecer al dominio de la comparación de razones, aparece junto con la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales. Una posible justificación es que el problema del pensamiento relacional implicaba distinguir entre un pensamiento absoluto (aproximación aditiva) y un pensamiento relativo (aproximación multiplicativa), al igual que los problemas de distinguir entre situaciones proporcionales y no proporcionales, que implicaban distinguir entre estrategias proporcionales o aditivas.

Además, la característica del perfil 1 corrobora el resultado obtenido anteriormente: identificar los elementos matemáticos de los problemas no es suficiente para reconocer características de la comprensión de los estudiantes, pues aunque identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto razonamiento up and down) sólo reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en algunos de los problemas donde identificaban los elementos. Por otra parte, identificar los elementos matemáticos es necesario para poder reconocer características de la comprensión de los estudiantes, ya que una condición necesaria para poder identificar características de la comprensión en cada uno de los sub-constructos fue que hubieran identificado los elementos clave de estos sub-constructos (características que se observa a partir del perfil 1).

A continuación se ejemplifican, a través de protocolos, las características de cada uno de estos perfiles. Los protocolos completos de los estudiantes para maestro se pueden encontrar en los Anexos.

4.2.2.1. Perfil 0. No identifica los elementos matemáticos y no reconoce características de la comprensión de los estudiantes en ningún problema

Los estudiantes para maestro de este perfil no identificaron los elementos matemáticos clave del problema, sino que identificaron conceptos generales como fracciones, parte-todo, proporcionalidad o razón. Este hecho, les llevó a no reconocer características de la comprensión de los estudiantes al centrarse únicamente en la corrección del resultado y/o la descripción de los procedimientos. La Figura 4.9 muestra la respuesta del estudiante para maestro E056.

Parte-todo: *a) El alumno debe conocer el concepto de fracción. Fracción como un todo y la división de fracción.* *b) Respuesta 1: El alumno tiene muy bien adquiridos los conocimientos y realiza el ejercicio correctamente.* *Respuesta 2: El alumno tiene también realiza correctamente el ejercicio, pero utiliza otro método.* *Respuesta 3: No conoce el concepto de fracción y su representación.*	**Medida-recta numérica**: *a) Se debe saber el concepto de división de fracciones y multiplicación. Hallar fracciones equivalentes.* *b) No comprenden como se hallan fracciones equivalentes.* **Operador**: *No comprendo el problema yo, entonces no se identificar los problemas que están bien o mal.*
Cociente: *a) Debe conocer el concepto de fracción, las magnitudes continuas. La capacidad parte-todo y la medida con la capacidad de dividir un todo en partes congruentes y reconocer el todo.* *b) Respuesta 1: Es consciente del concepto de dividir el todo en partes congruentes. Realiza bien la operación.* *Respuesta 2: Realiza perfectamente el problema. La explicación no está clara.* *Respuesta 3: Realiza bien el problema pero no divide el todo en partes congruentes.*	**Medida-densidad**: *a) Se debe conocer que para hallar fracciones equivalentes se debe multiplicar el denominador y el denominador. Si lo divido y no existe ningún número debo dividir en trozos más pequeños para tener más soluciones.* *b) Respuesta 1: El alumno no conoce el procedimiento de hallar las fracciones equivalentes, ya que no multiplica por un mismo nº.* *Respuesta 2: Si sabe hallar fracciones equivalentes ya que al 1/5 halla una fracción equivalente a esta para saber que vale cada rayita.* *Respuesta 3: Este alumno tampoco sabe realizar fracciones equivalentes.*
Razonamiento up and down: *a) Debe conocer = magnitudes continuas. También debe conocer la relación parte-todo y la medida.* *b) Respuesta 1: El alumno responde perfectamente al ejercicio.* *Respuesta 2: No conoce la relación parte-todo y medida de las magnitudes continuas.* *Respuesta 3: Realiza correctamente el ejercicio, pero no concreta la unidad: 1+1/3 (redondea el 1).*	**Problema valor perdido proporcional**: *a) Deben conocer conceptos de proporcionalidad.* *b) Respuesta 1: Realiza correctamente el problema pero no sabe razonar la conclusión.* *Respuesta 2: Realiza correctamente el problema.* *Respuesta 3: No sabe analizar que el problema es de proporcionalidad y lo resuelve incorrecta-mente mediante adición.*

<table>
<tr>
<td rowspan="2"><u>Problema valor perdido no proporcional</u>:
a) Los conceptos matemáticos que deben conocer son de <u>proporcionalidad</u> y de razón entera.
b) Respuesta 1: Resuelve el problema de manera incorrecta, ya que calcula el antes y el después de las cantidades de la empresa A.
Respuesta 2: Este alumno realiza incorrectamente el problema, ya que le ha sumado a B la diferencia entre el antes y el después de la empresa A (80).
Respuesta 3: Este alumno ha resuelto bien el problema, razonando correctamente.</td>
<td><u>Pensamiento relacional</u>:
a) Deben conocer conceptos de proporcionalidad.
b) Respuesta 1: Realiza correctamente el ejercicio.
Respuesta 2: Realiza incorrectamente el problema ya que divide las razones.
Respuesta 3: Realiza bien el ejercicio, pero como en la R2 también da una segunda solución dividiendo las cantidades.</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Proceso unitizing</u>:
a) Deben conocer <u>conceptos de razón</u> y comparación.
b) Los tres alumnos realizan bien el problema.</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Covarianza-cualitativo</u>:
a) Los alumnos deben conocer los conceptos de comparación.
b) <u>Respuesta 1</u>: Resuelve bien el problema mediante un buen razonamiento.
<u>Respuesta 2</u>: El alumno resuelve bien el problema. Intenta entenderlo pero no se puede resolver ya que faltan datos.
<u>Respuesta 3</u>: Este alumno no llega a resolver el problema por completo, ya que piensa que le faltan datos. En el apartado b) resuelve el problema incorrectamente.</td>
<td><u>Razón</u>:
a) Debe conocer el concepto de proporcionalidad
b) Respuesta 1: El alumno realiza correctamente el problema y utiliza la estrategia de razones.
Respuesta 2: Lo resuelve correctamente, pero no sabe razonar la solución del problema.
Respuesta 3: Utiliza una estrategia aditiva, resolviendo el problema incorrectamente.</td>
</tr>
</table>

Figura 4.9. Respuesta de un EPM del Perfil 0

El estudiante para maestro identificó como elementos matemáticos el "*concepto de fracción*", la "*división de fracciones*" o las "*magnitudes continuas*" en los problemas relacionados con el esquema fraccionario y "*concepto de proporcionalidad*" o "*concepto de comparación*" en los problemas relacionados con la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y la situaciones de comparación de razones (tanto cualitativa como cuantitativa). Por tanto, este estudiante para maestro mencionaba de manera genérica los elementos matemáticos en cada problema.

Este estudiante para maestro interpretó la comprensión de los estudiantes centrándose en la corrección de las respuestas ("*realiza correctamente*", "*resuelve de manera correcta*", "*realiza incorrectamente*", "*resuelve el problema incorrectamente*") en todos los problemas. Además, no interpretó correctamente todas las respuestas, ya que en los problemas razonamiento up and down, medida-densidad, proceso unitizing, pensamiento relacional y problema de valor perdido no proporcional entendió las respuestas incorrectas como correctas, mostrando un pensamiento aditivo en lugar de multiplicativo. Por ejemplo en el proceso unitizing comentó que "*los tres alumnos realizan bien el problema*".

Este hecho parece indicar que el uso de términos poco específicos al referirse a los elementos matemáticos del problema y la falta de concreción puede estar relacionada a la no comprensión de las matemáticas implicadas en algunos casos.

4.2.2.2. Perfil 1. Identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto razonamiento up and down) y reconoce características de la comprensión de los estudiantes en algunos de los problemas donde identifica los elementos

Los estudiantes para maestro de este perfil identificaron los elementos matemáticos clave en los sub-constructos parte-todo, medida-recta numérica, cociente y densidad del esquema fraccionario; y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en algunos de los problemas donde habían identificado los elementos matemáticos clave del problema. En el sub-constructo razonamiento up and down del esquema fraccionario y en los sub-constructos relacionados con la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y con la comparación de razones, estos estudiantes para maestro no fueron capaces de identificar los elementos clave del problema, lo que les llevó a proporcionar comentarios generales basados en la corrección de las respuestas o de los procedimientos o a dejar algunas respuestas en blanco sin mostrar evidencias de las características de cada una de las respuestas.

Estos estudiantes para maestro muestran un avance en relación a los estudiantes para maestro del Perfil 0, ya que identifican los elementos matemáticos relacionados con el esquema fraccionario (a excepción del razonamiento up and down) y reconocen características de la comprensión de los estudiantes en algunos de estos problemas.

Se muestran las características de este perfil a través de la respuesta del estudiante para maestro E059 (Figura 4.10).

<table>
<tr>
<td rowspan="2"><u>Parte-todo</u>:
a) Es necesario saber interpretar fracción la <u>parte-todo</u> porque tienes un <u>todo</u> y de ese todo hay que coger 2/3.
b) Las respuestas 1 y 2 sí que tienen claros los conceptos porque tienen que saber que 2/3 significa que hay 3 <u>partes iguales</u> y que <u>de esas partes son 2 las que se cogen</u>. Pero la 3 no está claro, puesto que lo que hace es coger 2 grupos de 3 bolas y no 2 grupos de los 3 que hay.</td>
<td><u>Medida-recta numérica</u>:
a) Deben saber el concepto de fracción como <u>parte-todo</u> y la <u>recta numérica</u>.
b) La 1 y la 3 están bien planteadas, mientras que la 2 no.</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Medida-densidad</u>:
a) Tendrá que conocer el concepto de fracción y las fracciones equivalentes.
b) La 1ª respuesta sí lo tiene claro.
Sin embargo, la segunda y la tercer tan tenido problemas para hacer una fracción equivalente con el m.c.m.</td>
</tr>
</table>

Cociente: *a) Debe conocer el concepto de fracción como cociente. Ese todo tiene que estar dividido en partes iguales.* *b) En la 1ª, sabe que el todo son 3 pizzas y que hay que dividirlo en 4 partes iguales.* *En la 2ª, no tiene claro cómo hacer la proporción puesto que ha hecho el m.c.m y no ha sabido repartir las pizzas en partes iguales.* *La 3ª, también lo tiene claro, puesto que ha sabido repartirlo bien. El todo era tres pizzas a dividir entre 4 personas.*	**Operador**: *a) Concepto de fracción como parte-todo donde deben reconocer cual es el total, es decir, la unidad.* *b) En las respuestas 1 y 2 han dado la solución correcta. La 1ª entiende bien el ejercicio haciendo todos los pasos en la explicación, mientras que la 2ª respuesta para llegar a la unidad ha multiplicado por la inversa.* *La tercera respuesta no esta bien puesto que en vez de multiplicar está realizando una resta.*
Razonamiento up and down: *a) Deben conocer el concepto de fracción como parte-todo.* *b) En la 1ª respuesta no ha sabido reconocer el total.* *La 2ª y la 3ª si que ha sabido reconocer el total.*	**Problema valor perdido proporcional**: *a) Concepto de proporcionalidad y razón.* *b) Las respuestas 1 y 2 son correctas. Saben realizar la proporciona entre las 2 fábricas, mientras que la 3 no sabe hacerlo puesto que lo hace mediante estructuras aditivas.*
Proceso unitizing: *a) Concepto de razón y relaciones de proporcionalidad.* *La respuesta 1 y 2 lo tienen claro, aunque la 2ª respuestas no lo ha hecho mediante razones sino con regla de 3. Por otra parte, la 3ª respuesta no lo entiende, lo ha hecho sin hacer ningún razonamiento.*	**Problema valor perdido no proporcional**: *a) Concepto de proporcionalidad y estrategias aditivas.* *b) Las respuestas 1 y 2 sí lo tienen claro mientras que la 3 no porque ha hecho una relación multiplicativa.*
Razón: *a) Debe conocer el concepto de razón y tener claras las relaciones de proporcionalidad* *b) Respuesta 1: Lo tiene claro puesto que utiliza bien la razón y sabe solucionar el problema.* *Respuesta 2: Tiene claro el concepto de razón pero al explicar se lía un poco.* *Respuesta 3: No lo tiene claro puesto que lo realiza mediante restas y no con razones.*	**Pensamiento relacional**: *a) Concepto de razón y proporcionalidad.* *b) La respuesta 1 lo ha hecho de forma absoluta mientras que la 2 y la 3 si lo hace en forma de razón.* **Covarianza cualitativa**: *a) Concepto de proporcionalidad.* *b) Las respuestas1 y 2 sí tienen claro el apartado a, mientras que la respuesta 3 no. Por otro lado, el apartado b no lo tiene claro ninguno.*

Figura 4.10. Respuesta de un EPM del Perfil 1

El estudiante para maestro identificó los elementos matemáticos en los sub-constructos parte-todo, medida-recta numérica, medida-densidad y cociente del esquema fraccionario y reconoció características de la comprensión de los estudiantes en algunos de estos problemas. Por ejemplo, en el problema parte-todo reconoció el uso del todo y las partes congruentes en la primera respuesta cuando comenta en "*2/3 significa que hay 3 partes iguales y de esas partes son 2 las que se cogen*". Y en el problema del cociente reconoció la idea de reparto equitativo (en la respuesta 1 "*hay que dividirlo en 4 parte iguales"* y en la respuesta 2*"no ha sabido repartir las pizzas en partes iguales"*). Sin embargo no reconoció características de la comprensión en el resto de problemas del esquema fraccionario, proporcionando comentarios generales. Así, por ejemplo, en el problema medida-recta numérica comenta "*la 1 y la 3 están bien planteadas, mientras que la 2 no*".

Por otro lado, este estudiante para maestro no reconoció ni los elementos matemáticos ni las características de la comprensión de los estudiantes en el razonamiento up and down, en los problemas de distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, ni en los problemas de comparación de razones. De este modo, por ejemplo en el problema de valor perdido no proporcional del dominio distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales hace un comentario basado en si comprende o no comprende ("*las respuestas 1 y 2 si lo tienen claro mientras que la 3 no porque ha hecho una relación multiplicativa*) y en el problema de covarianza-cualitativa del dominio de comparación de razones también se centra en si tienen claros o no los conceptos ("*las respuestas 1 y 2 sí tienen claros el apartado a, mientras que la respuesta 2 no. Por otro lado, el apartado b no lo tienen claro ninguno*"). Además, comete un error ya que el estudiante 1 sí que justifica correctamente el apartado b.

Este perfil parece ejemplificar una comprensión por parte de los estudiantes para maestro de algunos elementos matemáticos elementales del esquema fraccionario (partes congruentes y repartos equitativos) pero sin embargo, evidencia dificultades cuando deben intervenir aspectos de la comprensión con mayor exigencia cognitiva como la comprensión de las fracciones como unidades múltiples y la idea de la fracción unitaria como una unidad iterativa.

4.2.2.3. Perfil 2a. Identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario incluido el razonamiento up and down y reconoce características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identifica los elementos

Los estudiantes para maestro de este perfil identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario (parte-todo, medida-recta numérica, cociente, densidad) incluido el razonamiento up and down, pero no identificaron los elementos en los sub-constructos de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, ni de la comparación de razones. Estos estudiantes para maestro reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en los problemas donde habían identificado los elementos clave.

Los estudiantes para maestro de este perfil muestran un avance sobre los estudiantes para maestro del Perfil 1, ya que identifican los elementos matemáticos relacionados con el esquema fraccionario incluido el razonamiento up and down e interpretan la comprensión de los estudiantes de estos problemas, pero sin embargo tienen dificultades con los elementos matemáticos que implican distinguir entre situaciones proporcionales y no proporcionales y comparar razones.

Se muestran las características de este perfil con la respuesta del estudiante para maestro E069 (Figura 4.11).

Parte-todo: *a) Conceptos: representaciones discretas. Fracción como parte-todo, y encontrar su fracción unitaria.* *b) Respuesta 1: Desde la unidad, identifica la fracción unitaria y representa la fracción dada.* *Respuesta 2: El niño identifica a partir de una estructura multiplicativa. Utiliza la interpretación de fracción como operador.* *Respuesta 3: El niño no tiene claro ni la unidad, ni encuentra por tanto, su fracción unitaria.* **Operador**: *(en blanco)*	**Medida-recta numérica**: *a) Conceptos matemáticos: hallar la fracción unitaria, reconocer y hallar la unidad, suma de fracciones, división de fracciones para hallar fracciones equivalentes (14/10=7/5)* *b) Respuesta 1: Halla la unidad para saber en cuantas partes se divide. Asimismo justifica con la adición de fracciones.* *Respuesta 2: Utiliza la adicción de fracciones para hallar una fracción cercana a 7/5. Sabe que entre 6/5 y 8/5 hay una fracción que equivale a la mitad que es lo que él busca. Del mismo modo lo justifica desde fracciones equivalentes, teniendo en cuenta en las partes que está dividida la unidad.* *Respuesta 3: El niño no entiende el problema.*
Cociente: *a) Fracción como parte-todo. Fracción como cociente (reparto).* *b) Respuesta 1: utiliza el concepto de fracción como parte-todo para hallar la fracción unitaria y de ahí poder hallar la proporción de pizza para cada persona.* *Respuesta 2: utiliza la fracción como parte-todo para reconocer la fracción unitaria y utilizar la adición de fracciones.* *Respuesta 3: lo halla con cantidades muy pequeñas porque busca el m.c.m y no entiende el objetivo del problema al no hacer partes congruentes.*	**Medida-densidad**: *a) Fracciones equivalentes.* *b) Respuesta 1: El alumno halla fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador, lo que proporciona varias fracciones con distinto numerador con varias fracciones entre si.* *Respuesta 2: Mediante la recta numérica quiere representar la fracción, halla alguna fracción equivalente pero no encuentra un buen resultado.* *Respuesta 3: El niño ha hallado fracciones equivalentes con el mismo denominador pero no lo suficientemente elevadas como para proporcionar fracciones entre éstas.*

Razonamiento up and down: *a) Reconocer la unidad. Reconocer la fracción unitaria. Trabajar con material continuo.* *b) R.1 = el niño conoce la unidad y la fracción unitaria. Luego puede representar y reconocer que fracción son 4 rectángulos pequeños.* *R.2 = el niño, del mismo modo que el anterior, pero visualmente ha interpretado la unidad y la fracción unitaria, pero no ha representado los 4 rectángulos pequeños que son 1 y 1/3.* *R.3 = el niño no lo entiende, no sabe sacar la unidad.*	**Problema valor perdido proporcional**: *a) Comparación proporción.* *b) En la tarea 2 la respuesta 1 y 2 serían correctas, porque se basa en la comparación de una fábrica con otra dependiendo de la proporción.* **Problema valor perdido no proporcional**: *a) Comparación proporción.* *b) En la tarea 6 la respuesta 1 y 2 son correctas y se compara la proporción de una manera aditiva.*
Pensamiento relacional: *a) Proporción* *b) En la tarea 3, la respuesta 2 es la adecuada ya que se debe medir su comparación a relación de lo que miden desde el principio.*	**Proceso unitizing**: *a) Proporción (y fracciones).* *b) En la tarea 4, la respuesta 1 y 2 es correcta pero no su explicación. Se basa en la comprensión de proporcionalidad de fracciones.*
Covarianza cualitativa: *a) Comparación proporción.* *b) En la tarea 5ª) la respuesta 1 es correcta y la b) también. Del mismo modo la respuesta 3b es correcta pero no haría falta tener más datos en la a).*	**Razón**: *a) Proporción* *b) En la tarea 1 se trata de proporcionalidad, porque si nos basamos en la congruencia no es lo mismo que un cuadrado mida 3 cm por cada lado y se compare un lado de 1 cm más que 1 lado de 3 cm más en uno de 3 (proporcional), es decir no se puede resolver restando el resultado basándose en la congruencia.*

Figura 4.11. Respuesta de un EPM del Perfil 2a

El estudiante para maestro identificó los elementos matemáticos del esquema fraccionario (parte-todo, fracciones equivalentes, cociente) como el estudiante para maestro del Perfil 1, pero además en este caso también identificó los elementos matemáticos clave del razonamiento up and down (“*unidad”* y “*fracción unitaria”*). Asimismo, este estudiante para maestro reconoció características de la comprensión de los estudiantes a estos problemas, es decir, reconoció características de la comprensión de los estudiantes a los mismos problemas que el Perfil 1 pero además reconoció características de la comprensión de los estudiantes al problema del razonamiento up and down. En la respuesta 1 reconoce el papel que juega la unidad y la fracción unitaria al comentar “*el niño conoce la unidad y la fracción unitaria y luego puede representar y reconocer qué fracción son 4 rectángulos*”, en la respuesta 2, de manera similar a la respuesta 1, reconoce el papel de la unidad y la fracción unitaria, pero además reconoce que no ha terminado el problema al no representar la fracción pedida (“*no ha representado los 4 rectángulos*”) y en la respuesta 3 reconoce que la respuesta es incorrecta al no reconstruir la unidad diciendo “*no sabe sacar la unidad*”.

En los problemas de distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y de comparación de razones, el estudiante para maestro no es capaz de identificar los elementos matemáticos clave identificando elementos matemáticos generales como "*proporción*" en los problemas razón, pensamiento relacional y proceso unitizing y "*comparación proporción*" en los problemas de valor perdido y de covarianza-cualitativa. Además, tampoco interpreta la comprensión de los estudiantes proporcionando comentarios generales centrados en la corrección de las respuestas como en el problema de valor perdido proporcional que comenta: "*en esta tarea la respuesta 1 y 2 serían correctas, porque se basa en la comparación de una fábrica con otra dependiendo de la proporción*", sin distinguir el tipo de problema ni aportar información sobre la respuesta aditiva incorrecta o en el problema proceso unitizing que comenta: "*la respuesta 1 y 2 es correcta pero no su explicación*", sin aportar evidencias de la comprensión de los estudiantes ni justificar por qué piensa que la explicación no es correcta.

4.2.2.4. Perfil 2b. Identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto razonamiento up and down), la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y el pensamiento relacional y reconoce características de la comprensión en todos los problemas donde identifica los elementos

Los estudiantes para maestro de este perfil identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario (parte-todo, medida-recta numérica, cociente, y densidad), de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y del pensamiento relacional, pero no identificaron los elementos en la tarea del razonamiento up and down ni el resto de sub-constructos de la comparación de razones. Los estudiantes para maestro reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en los problemas donde habían identificado los elementos clave, pero no reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en los problemas del razonamiento up and down y del resto de sub-constructos de la comparación de razones, dando comentarios generales basados en la corrección de las respuestas.

Los estudiantes para maestro de este perfil muestran un avance sobre los estudiantes para maestro del Perfil 1, ya que identifican los elementos matemáticos relacionados con el esquema fraccionario (excepto el razonamiento up and down), la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y el pensamiento relacional, y reconocen características de la comprensión de los estudiantes de estos problemas.

Se muestran las características de este perfil con la respuesta del estudiante para maestro E051 (Figura 4.12).

a) En primer lugar el niño debe identificar que se trata de un contexto discreto y con ello, debe conocer que las partes de todo han de ser iguales e identificar el todo. *b) Respuesta 1: Los conceptos los utiliza correctamente, ya que identifica el todo y sus partes. A continuación, reconoce las partes que se le pide. Conoce el conjunto y los elementos que lo forman.* *Respuesta 2:Lo realiza correctamente pero lo resuelve de forma diferente, ya que utiliza la fracción como operador.* *Respuesta 3: No lo resuelve correctamente. No sabe trabajar con contextos discretos.*	*a) Se necesita conocer el sentido de la recta numérica, ya que se trabaja mediante ella. Además, conocer los números racionales y fracciones equivalentes (comprender parte-todo y medida).* *b) Respuesta 1: lo realiza correctamente, parte del valor que le dan dentro de la recta y ese trozo es capaz de identificar la mitad para darle valor a la x (fracción unitaria).* *Respuesta 2: lo resuelve correctamente de manera que mediante el trozo dado da saltos a la misma distancia y después utiliza la fracción como operador.* *Respuesta 3: no tiene en cuenta el valor 2/5 y el él divide la recta según sus criterios.*
Cociente: *a) Para resolver la tarea se necesita conocer la fracción como parte-todo y cociente.* *b) Respuesta 1: identifica correctamente la parte-todo y congruencia de las partes.* *Respuesta 2: identifica la parte de una pizza que corresponde a cada persona y después suma esa parte 3 veces para saber la parte total de cada uno.* *Respuesta 3: no lo realiza mediante fracción sino que calcula el m.c.m. de las personas y pizzas y lo divide entre las personas. Posteriormente lo multiplica por las pizzas que había. No entiende la parte todo y congruencia.*	**Medida-densidad**: *a) La tarea requiere que el niño/a identifique las fracciones equivalentes.* *b) Respuesta 1: Es correcta, ya que calcula dos fracciones equivalentes y expone las fracciones comprendidas entre las dos.* *Respuesta 2: no entiendo como lo resuelve.* *Respuesta 3: tiene la idea de que es una fracción equivalente pero no termina a entender que hay más denominadores además del m.c.m de ambos.* **Operador**: *(en blanco)* **Razonamiento up and down**: *(en blanco)*
Problema valor perdido proporcional: *a) El concepto matemático implicado es la proporcionalidad, ya que no se trata de una situación ventajosa sino de una relación entre cantidades. Además, se ha de conocer el enfoque escalar y enfoque funcional.* *b) El primer alumno resuelve la tarea mediante la razón externa (funcional), ya que relaciona los tornillos de la máquina R y J.* *El segundo estudiante la realiza mediante una estrategia constructiva, ya que si por cada 40 R tornillos fabrica 120 J pues va sumando 120 por cada 40 tornillos de R más hasta llegar a saber cuántos tornillos tendría que fabricar la J si la R ha fabricado 200.* *El tercer alumno no interpreta el problema como proporcional sino como una situación de ventaja, es decir, lo resuelve de manera aditiva.*	**Problema valor perdido no proporcional**: *a) El concepto implicado es la no proporcionalidad, ya que se trata de una situación ventajosa por tanto, también se deberá emplear la adicción.* *b) El primer alumno comprende el problema correctamente y lo resuelve calculando la diferencia entre ambas empresas y añadiendo esa diferencia para saber la cantidad total de la empresa cuestionada.* *El segundo estudiante lo realiza mediante una estrategia constructiva, ya que calcula la diferencia entre la empresa A y posteriormente esa diferencia se la añade a la primera cantidad de la B para saber la final.* *Sin embargo el estudiante 3 lo resuelve mediante una estrategia multiplicativa (el doble) y por tanto, la interpretación y la solución son erróneas.*

<u>Pensamiento relacional</u>: *a) Los conceptos matemáticos implicados son <u>cambio relativo y cambio absoluto</u>.* *b) El primero interpreta y resuelve el problema usando el <u>cambio absoluto, es decir, se centra en los totales</u>.* *El segundo, usa para la resolución del problema el cambio relativo. Esta forma de interpretación es más correcta y exacta.* *El tercero resuelve el problema de las dos maneras.*	**<u>Proceso unitizing</u>**: *a) Los conceptos implicados en dicha tarea son la proporcionalidad, razones internas/externas y comparación de las mismas.* *b) El primer alumno realiza la tarea de manera proporcional aplicando el concepto de razón. El segundo alumno realiza la actividad mediante una regla de tres pero el tercer alumno resuelve el problema de manera adictiva, por tanto no lo percibe como un problema proporcional.*
<u>Covarianza cualitativa</u>: *a) Para la resolución de este tipo de problemas se ha de comparar diferentes sin cantidades concretas.* *b) El primer estudiante resuelve las dos cuestiones correctamente, ya que compara y entiende la relación entre las dos magnitudes. El segundo estudiante realiza correctamente la primer cuestión, ya que entiende correctamente la relación menos velocidad menos vueltas/más velocidad más vueltas. Pero la segunda pregunta no la realiza correctamente probablemente no la haya entendido.* *El último alumno, no entiende la relación de la primera cuestión, ya que justifica su respuesta diciendo que debe conocer más datos. Sin embargo, la segunda pregunta si que la responde y entiende correctamente.*	**<u>Razón</u>**: *a) El concepto implicado es la razón.* *b) El primer y segundo alumno realizan el problema correctamente, usando la razón de cada una de las parcelas y, viendo que la razón que e se aproxime más a uno será la que tenga sus lados más cuadrados (menos diferencia).* *Sin embargo el estudiante 3 el resultado que da es correcto pero no utiliza la razón sino que calcula la diferencia entre cada uno de los lados del cuadrado.*

Figura 4.12. Respuesta de un EPM del Perfil 2b

El estudiante para maestro E051 identificó los elementos matemáticos del esquema fraccionario (parte-todo, recta-numérica, fracciones equivalentes, cociente) como el estudiante para maestro del Perfil 1, pero además, en este caso también identificó los elementos matemáticos clave relacionados con la distinción de situaciones proporcionales y no proporcionales ("*proporcionalidad […] relación entre cantidades*" en el problema de valor perdido proporcional, y "*no proporcionalidad*", "*situación ventajosa*", "*adición*" en el problema de valor perdido no proporcional) y del pensamiento relacional ("*cambio relativo y cambio absoluto*"). Asimismo, el estudiante para maestro reconoció características de la comprensión de los estudiantes en estos problemas, es decir, interpretó la comprensión de los estudiantes a los mismos problemas que el Perfil 1, pero además interpretó correctamente la comprensión de los estudiantes a los problemas de valor perdido tanto proporcional como no proporcional y del pensamiento relacional. En los problemas de valor perdido proporcional, podemos observar cómo diferenció las diferentes estrategias distinguiendo las multiplicativas de las aditivas (PVP proporcional: "*enfoque funcional*", "*estrategia constructiva*", "*no interpreta el problema como proporcional […] lo resuelve de manera aditiva*"; PVP no proporcional: "*diferencia entre las empresas*", "*estrategia multiplicativa (el doble)*") y en el del pensamiento relacional cómo distingue entre un "*cambio relacional*" y un "*cambio absoluto*".

Sin embargo, en el problema de razonamiento up and down no fue capaz de identificar los elementos matemáticos ni de reconocer características de la comprensión de los estudiantes, dejando la tarea en blanco. En el resto de tareas tampoco interpretó la comprensión de los estudiantes a través de los elementos matemáticos, sino proporcionó un comentario general centrado en la corrección de las respuestas como en el problema razón que comenta "*realiza el problema correctamente*".

4.2.2.5. Perfil 2c. Identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario (incluido el razonamiento up and down), la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y el pensamiento relacional, y reconoce características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identifica los elementos

Los estudiantes para maestro de este perfil identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario (parte-todo, medida-recta numérica, cociente, densidad, operador y el razonamiento up and down), de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y del pensamiento relacional, pero no identificaron los elementos clave en el resto de problemas de comparación de razones. Los estudiantes para maestro reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en los problemas donde habían identificado los elementos clave.

Los estudiantes para maestro de este perfil muestran un avance sobre los estudiantes para maestro los Perfiles 2a y 2b, ya que identifican los elementos matemáticos relacionados con el esquema fraccionario incluido el razonamiento up and down, con la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y con el pensamiento relacional, y reconocen características de la comprensión de los estudiantes de estos problemas.

Se muestran las características de este perfil con la respuesta del estudiante para maestro E025 (Figura 4.13).

<u>Parte-todo</u>: *a) Idea parte-todo: deben saber reconocer de un todo las partes iguales en las que se tiene que dividir. Fracción como operador: deben saber reconocer cuantas bolas son 2/3 de 18 bolas.* *b) En la primera respuesta se observa claramente la idea de parte-todo. Suma ambos grupos o multiplica un grupo por dos. En la segunda actividad utiliza únicamente la idea de fracción como operador sin dividir el todo en sus partes. Y en la tercera respuesta se puede observar que no tiene adquiridos ningunos de los conceptos correctamente.*	**<u>Medida-recta numérica</u>**: *a) Las partes y el todo. Fracciones unitarias. Suma de fracciones.* *b) En la respuesta 1 se puede observar como identifica la fracción unitaria, y a partir de ella suma fracciones hasta llegar a la x. En la segunda respuesta se observa como conoce todos los conceptos matemáticos implicados en la actividad y además usa la fracción como operador. En la respuesta 3 tiene adquirido el concepto de buscar fracciones unitarias de un todo, pero no tiene en cuenta el todo expresado en la actividad.*
<u>Cociente</u>: *a) Relación parte-todo: deben saber como dividir el todo en partes iguales para repartir. Idea de reparto: deben saber como repartir las partes del todo para que cada uno tenga la misma porción de pizza. Fracción como cociente: identificar que la fracción correspondiente a este problema serían 3pizzas/4personas.* *b) En las tres respuestas se puede observar claramente los tres conceptos anteriormente citados: Relación parte-todo: al dividir cada uno de las pizzas en partes iguales para repartir. Idea de reparto: conocer que deben repartir cada una de las partes del todo de tal forma que cada uno tenga la misma cantidad. Fracción como cociente: en la primera respuesta es en la que usa correctamente la idea de fracción como cociente. En la segunda usa la suma de fracciones pero también se puede ver la idea de fracción como cociente y en la tercera usa el algoritmo de la división.*	**<u>Operador</u>**: *a) Las partes y el todo. Obtención de la unidad. Suma y resta de fracciones.* *b) En la respuesta 1 y 3 si que identifican correctamente el todo y la parte que falta. En la respuesta 2 utiliza un contexto continuo para representar el problema pero no identifica correctamente en el todo las partes.* **<u>Medida-densidad</u>**: *a) Equivalencia entre fracciones. Buscar denominador común de dos fracciones.* *b) En la respuesta 1 se muestra que domina la equivalencia entre fracciones al no quedarse únicamente en el mínimo común múltiplo y buscar otras equivalencias mayores. En la respuesta 2 sabe hacer equivalencias además del m.c.m pero en su respuesta final no considera que se piden dos fracciones y por tanto deben seguir haciendo fracciones equivalentes mayores. En la respuesta 3 sabe buscar fracciones equivalentes pero solo sabe sacar equivalentes con el m.c.m.*
<u>Razonamiento up and down</u>: *a) Relación parte-todo. Debe saber identificar el todo según las partes dadas. Fracción unitaria. Debe conocer cual es la fracción unitaria para contestar cuanto son 3 cuadraditos pequeños.* *b) En la respuestas 1 y 2 sabe identificar correctamente la unidad y la fracción unitaria. La primera respuestas es correcta, pero en la segunda no indica que parte de la figura representa los 4 rectángulos pequeños. En la respuesta 3 identifica la unidad y la fracción unitaria mal ya que no tiene en cuenta los datos indicados en el enunciado.*	**<u>Pensamiento relacional</u>**: *a) Cambios absolutos entre las cantidades. Cambios relativos entre las magnitudes. Uso de razones escalares entre las cantidades. Comparación entre las razones entre las cantidades.* *b) Respuesta 1: Únicamente tiene en cuenta el cambio de manera absoluta, es decir, teniendo en cuenta el principio y el final. Respuesta 2: Únicamente tiene en cuenta el cambio en términos relativos, es decir, la comparación entre ambas razones. Respuesta 3: Tiene en cuenta el resultado tanto en términos absolutos, como relativos, por tanto es la respuesta más correcta.*
<u>Problema valor perdido proporcional</u>: *a) Uso de razones escalaras entre las cantidades. Uso de razones funcionales entre las cantidades. Idea de proporción como igualdad entre dos razones.* *b) Respuesta 1: Uso adecuado de las razones funcionales entre las cantidades para resolver el problema. Respuesta 2: Comprende que se trata de un problema proporcional, y utiliza una estrategia constructiva como método para resolver el problema. Respuesta 3: No comprende que se trata de un problema de proporcionalidad. Usa una estrategia aditiva para resolver un problema de proporcionalidad, y por tanto no es correcto.*	**<u>Problema valor perdido no proporcional</u>**: *a) Comparación aditiva entre cantidades. Idea de diferencia entre dos cantidades.* *b) Respuesta 1: Comprende que es un problema no proporcional, y obtiene la diferencia entre ambas cantidades para resolverlo correctamente. Respuesta 2: Entiende que no es un problema proporcional debido a que no empiezan al mismo tiempo y por tanto existe una diferencia aditiva entre las cantidades. Respuesta 3: No identifica que es un problema no proporcional, y por tanto no lo resuelve correctamente al establecer una relación multiplicativa en vez de aditiva.*

<table>
<tr><td colspan="2"><u>Proceso unitizing</u>:
a) Idea de proporcionalidad como comparación de razones.
b) Respuesta 1: Compara las razones funcionales de las cantidades y posteriormente las compara, por tanto compara los euros que cuesta cada kilo de cada uno de los dos productos.
Respuesta 2: Utiliza la estrategia de la regla de tres, para obtener y poder comparar las cantidades con el mismo peso.
Respuesta 3: Resuelve el problema mediante una estrategia de cálculo mental en la que aplica un razonamiento proporcional.</td></tr>
<tr><td><u>Covarianza cualitativa</u>:
a) Idea de proporción como igualdad entre dos razones. Uso de la proporcionalidad para comparar relaciones entre cantidades. Realizar comparaciones cualitativas.
b) Respuesta 1: La respuesta a ambos apartados es correcta, reflexiona de manera proporcional en los dos casos.
Respuesta 2: En los dos apartados realiza una comparación cualitativa entre las cantidades. En el segundo apartado utiliza una estrategia proporcional para resolver el problema pero no se da cuenta de que no se puede afirmar esa respuesta debido a que no tenemos ningún dato que apoye esto.
Respuesta 3: En el primer apartado no entiendo la relación de proporcionalidad existente entre ambas cantidades. En el segundo entiende esta relación, y además duda de que su respuesta sea así al no tener más datos sobre la actividad.</td>
<td><u>Razón</u>:
a) Eso de razones escalares entre las cantidades. Comparación de las razones de las distintas cantidades.
b) Respuesta 1: Interpreta correctamente las relaciones escalares entre las cantidades. Al comparar las razones de las distintas cantidades de forma adecuada, consigue dar la respuesta correcta.
Respuesta 2: Interpreta correctamente las relaciones escalares entre las cantidades. A pesar de ello no tiene en cuenta las razones entre las cantidades para dar el resultado del problema.
Respuesta 3: Utiliza una estrategia aditiva para dar el resultado del problema. Por ello a pesar de que la respuesta es correcta, en el procedimiento para resolverla no tiene en cuenta ni las relaciones escalares entre las cantidades ni la comparación entre las distintas razones.</td></tr>
</table>

Figura 4.13. Respuesta de un EPM del Perfil 2c

Este perfil es una combinación de los perfiles 2a y 2b. El estudiante para maestro identificó los elementos matemáticos del razonamiento up and down ("*identificar el todo*" y "*fracción unitaria*"), de los problemas de distinción entre problema proporcional y no proporcional ("*problema de proporcionalidad*" y "*no es un problema de proporcionalidad*") y del pensamiento relacional ("*cambios absolutos*" y "*cambios relativos*"). Además, el estudiante para maestro reconoció características de la comprensión de los estudiantes a estos problemas. En el problema del razonamiento up and down el estudiante para maestro reconoció la importancia de identificar la unidad y la fracción unitaria para resolver el problema, ya que comentó en las dos primeras respuestas que "*sabe identificar correctamente la unidad y la fracción unitaria [...] pero en la segunda no indica qué parte de la figura representa los 4 rectángulos pequeños*" y que la tercera es incorrecta porque "*no tiene en cuenta los datos indicados*". En los problemas de valor perdido proporcional podemos observar que diferencia las estrategias distinguiendo las multiplicativas de las aditivas (Problema de valor perdido proporcional: "*razones funcionales*", "*estrategia constructiva*", "*estrategia aditiva*"; Problema de valor perdido no proporcional: "*problema no proporcional*" "*diferencia entre ambas*", "*relación multiplicativa en vez de aditiva*"). Y en el del pensamiento relacional distingue entre una respuesta relativa ("*tiene en cuenta el cambio en términos relativos*") y una respuesta absoluta ("*tiene en cuenta el cambio de manera absoluta*").

Sin embargo, en los problemas de comparación de razones no es capaz de identificar los elementos matemáticos (problema razón: "*eso de razones escalares entre las cantidades*") ni de reconocer características de la comprensión de los estudiantes, sino que proporciona un comentario general centrado en la corrección de los procedimientos como en el problema de razón que el estudiante para maestro comenta que el estudiante 1 "*interpreta correctamente las relaciones escalares entre las cantidades […] y consigue dar con la respuesta correcta*".

4.2.2.6. Perfil 3a. Identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario, la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, el pensamiento relacional y la covarianza-cualitativa, y reconoce características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identifica los elementos

Los estudiantes para maestro de este perfil identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario, de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, del pensamiento relacional y de la covarianza cualitativa, pero no identificaron la situación de comparación cuantitativa (razón como índice comparativo). Estos estudiantes para maestro reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en los problemas donde habían identificado los elementos clave. Por tanto, estos estudiantes para maestro de este perfil muestran un avance sobre los estudiantes para maestro del Perfil 2c.

Se muestran las características de este perfil con la respuesta del estudiante para maestro E012 (Figura 4.14).

Parte-todo: *a) Debe conocer que es una fracción, parte-todo, que para resolver el ejercicio tiene un conjunto discreto porque las partes son grupos. Fracción como operador.* *b) En la primera respuesta el alumno manifiesta que conoce como hacerlo porque subdivide el todo en tres grupos de 6 bolas y coge dos grupos. Además lo explica todo muy bien de forma escrita.* *En el caso del segundo niño, este también resuelve la tarea de forma correcta, pero en este caso utiliza la fracción como operador buscando que son los 2/3 de 18 bolas que es el total.* *En la respuesta 3 el alumno no sabe trabajar con conjuntos discretos porque piensa que tiene que coger 2 grupos de 3 bolas cada uno. No reconoce el todo.*	**Operador**: *a) Conocer las fracciones, identificar el todo cuando nos da una parte. Conocer el uso de fracciones propias en contextos continuos. Uso fracción unitaria.* *b) Respuesta 1: el alumno no identifica que es la unidad y lo que busca es una fracción que al multiplicarla por la suya de 1, pero sin darse cuenta de que su unidad debe tener 4 partes y no 12. No entiende la relación parte-todo.* *Respuesta 2: el niño se equivoca porque al coger la parte entera correspondiente a ¾, solo coge una parte, coge ¾ de 3/4 que son los 9/16 en vez de 12/16. Por lo tanto al ver que debe ampliar la solución errónea.* *Respuesta 3:lo resuelve bien porque entiende que la unidad son 4/4 y al tener ¾ de tamaño, tendría que aumentar ¼ para conseguir la unidad. El dibujo creo que está mal.*
Cociente: *a) Los conceptos implicados son parte-todo de una fracción. Conocer como trabajar en contextos concretos.* *b) Respuesta 1: este alumno resuelve bien el ejercicio porque al interpretar el dibujo dice ¾ de pizza no del total.* *Respuesta 2: El alumno reparte bien las pizzas entre las personas pero luego no sabe que comen ¾ del todo no del total, si fuera del total sería 3/12. No entiende la concepción de todo y la de total.* *Respuesta 3: Al principio el alumno hace bien la repartición, buscando el mcm porque busca un todo múltiplo de ambos números (las pizzas y las personas) y saca de porciones de cada pizza pero después en vez de decir las porciones cada uno lo multiplica por las 3 pizzas. Cree que el número obtenido es el número de porciones de cada pizza mientras que es el número total de porciones. Además, no hace partes congruentes en el dibujo.*	**Medida-recta numérica**: *a) Los conceptos utilizados son, uso de la recta numérica, las fracciones como operador, estructuras aditivas de fracciones, simplificación fracciones hallando equivalentes.* *b) Respuesta 1: Realiza bien las equivalencias en la recta de la fracción, reconoce el 1/5 y hace bien la suma de esos segmentos 7/5.* *Respuesta 2: lo que el alumno hace es sumar 3 veces la parte 2/5 que ya conoce cuantas rayas son y después utiliza una fracción como operador para calcular cuánto es la mitad de esa parte con la que estaba trabajando (1/2 de 2/5). Lo hace bien y sabe conocer sus unidades, que es la parte y el todo. Los conceptos matemáticos implicados en la actividad y además usa la fracción como operador.* *Respuesta 3: No realiza bien las equivalencias, realiza particiones que quiere sin tener en cuenta la fracción dada.*
Razonamiento up and down: *a) Conocimiento del todo y que el todo no tiene porque ser la figura dibujada, sino una parte de ella. Conocimiento de fracciones mixtas y de la unitaria.* *b) Respuesta 1:Este alumno deduce bien cual es su todo y para conocer el valor de los 4 cuadraditos, busca la unitaria y completa la figura, que será un todo y 1/3 de otro todo.* *Respuesta 2: Esta alumna lo hace de forma correcta porque halla el todo a partir de la fracción 3+2/3. Pero no responde correctamente a la pregunta que se le ha planteado sobre que son los cuatro cuadrados, se queda en conocer cual es su todo.* *Respuesta 3: No reconoce bien el todo, no entiende la fracción 3+2/3 y lo que hace es simplemente decir que cada figura (cuatro cuadrados) es un todo.*	**Medida-densidad**: *a) Conocer como se hacen fracciones equivalentes. Relación parte-todo. Uso de rectas numéricas para representar. Hacer equivalencias de equivalencias.* *b) Respuesta 1: lo han hecho bien, he hecho fracciones equivalentes pero buscando un número para cada fracción para que salga igual denominador, ha cogido números altos, por lo tanto hay dos números.* *Respuesta 2: el alumno hace bien el sacar una fracción, haciendo equivalentes a las equivalentes con igual denominador de los primeros números. Pero no continua, solo saca una.* *Respuesta 3: no sabe hacerlo porque no entiende que podemos hacer fracciones equivalentes con fracciones con denominador igual.*
Problema valor perdido no proporcional: *a) Saber diferenciar problemas de proporcionalidad de los de ventaja.* *b) Respuesta 1: Reconoce bien el problema como aditivo, calcula la ventaja y se la suma a la cantidad final de la máquina que empezó después.* *Respuesta 2: Resuelve bien al igual que en el ejercicio anterior.* *Respuesta 3: No resuelve bien, porque no entiende que es un problema aditivo y lo resuelve como uno de razón proporcional al pensar que la razón de 40 y 80 es 2 y que al final también debería multiplicarle 2.*	**Pensamiento relacional**: *a) Conocer y saber diferenciar problemas proporcionales. Diferencia entre la forma absoluta y la relativa de calcular la relación.* *b) Respuesta 1: este estudiante hace la relación absoluta y por ello dice que han crecido lo mismo.* *Respuesta 2: este estudiante lo resuelve por la razón de manera relativa y sabe que en relación a lo que media la que más ha crecido ha sido Judía Verde.* *Respuesta 3: Este alumno tiene claro que hay dos formas de verlo de forma absoluta y relativa.*

Problema valor perdido proporcional: *a) Conocer y saber diferenciar contextos proporcionales de los aditivos. Realizar proporciones internas o externas, o estrategias constructivas.* *b) Respuesta 1: Para resolver el ejercicio utiliza una estrategia de razón externa donde relación tornillos de una máquina con los de la otra. Por el dibujo que ha realizado de la relación (1), también podría entenderse como razón interna.* *Respuesta 2: Resuelve el ejercicio de forma adecuada gracias a una estrategia constructiva.* *Respuesta 3: no sabe hacer el ejercicio, puesto que utiliza estrategias aditivas en problemas de proporcionalidad.*	**Proceso unitizing**: *a) Conocer y saber diferenciar contextos de razón y proporción.* *b) Respuesta 1: realiza bien el ejercicio porque para comparar busca el valor de la unidad en cada opción, y después las compara.* *Respuesta 2: Intenta resolverlo con una regla de tres. Sabe cuanto vale cada una, entonces lo que hace es calcular con la misma razón que A, cuanto debería costar la caja B y después comprar los valores que tenia y el obtenido.* *Respuesta 3: Da con la caja correcta, pero no queda muy claro porque no hace relaciones, sino que ve que la diferencia son 4 kilos y 0,9€ por lo que ve que hay muchos kilos para poco dinero, pero no queda claro.*
Covarianza cualitativa: *a) Interpretar problemas de a "+,+", "+,-", "-,+", y "-,-", sin datos numéricos con conceptos más y menos.* *b) Respuesta 1: sabe interpretar los problemas de comparaciones entre más-menos y más-más de manera correcta dando buenas justificaciones a cada problema.* *Respuesta 2: sabe interpretar los problemas de comparaciones entre más-menos, pero no sabe interpretar los problemas con comparaciones entre más-más.* *Respuesta 3: no sabe interpretar los problemas que requieren cualquier tipo de comparaciones sin cantidad específicas.*	**Razón**: *a) Conocer contextos de razón y proporción. Términos absolutos y relativos. Conocer que cuanto más cuadrado es algo, su diferencia si es un rectángulo, será menor cuanto más se aproxime a uno.* *b) Respuesta 1: El alumno lo hace bien, mediante términos relativos y sabe que es más cuadrado un loft cuando la diferencia sea más cercana a uno.* *Respuesta 2: Este alumno realiza la misma argumentación que el primero, por lo tanto también está bien.* *Respuesta 3: Este alumno/a realiza la resolución de forma diferente porque en vez de hallar la razón en términos relativos, lo hace en términos absolutos.*

Figura 4.14. Respuesta de un EPM de la Perfil 3a

El estudiante para maestro identificó los elementos matemáticos del esquema fraccionario, de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y del pensamiento relacional como el estudiante para maestro del Perfil 2c, pero además, en este caso también identificó los elementos matemáticos clave relacionados con la covarianza-cualitativa ("*problemas de a "+,+", "+,-", "-,+", y "-,-", sin datos numéricos*"). Asimismo, el estudiante para maestro reconoció características de la comprensión de los estudiantes a estos problemas, es decir, reconoció características de la comprensión de los estudiantes a los mismos problemas que el Perfil 2c, pero además reconoció características de la comprensión de los estudiantes en el problema covarianza-cualitativa. El estudiante para maestro en este caso comentó que el estudiante 1 "*interpreta los problemas de comparación entre más-menos y más-más*", el segundo estudiante "*sabe interpretar los problemas de comparaciones entre más-menos, pero no los de más-más*" y en el tercer caso que "*no sabe interpretar los problemas en ninguno de los casos*", mostrando de esta manera que reconocía las características de los problemas de comparación sin datos numéricos.

Sin embargo, en el problema de razón no fue capaz de identificar los elementos matemáticos, comentando solamente "*contextos de razón y proporción*" sin centrar la atención en la idea de aproximación a 1 (razón como índice comparativo), ni reconoció características de la comprensión de los estudiantes, ya que diferenció entre respuestas con un pensamiento relacional o absoluto aceptando que ambas son válidas, pero diferentes enfoques (respuesta 3: *"este alumno/a realiza la resolución de forma diferente porque en vez de hallar la razón en términos relativos, lo hace en términos absolutos"*).

4.2.2.7. Perfil 3b. Identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario, la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, el pensamiento relacional y la razón como índice comparativo, y reconoce características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas donde identifica los elementos

Los estudiantes para maestro de este perfil identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario, la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, el pensamiento relacional y la comparación cuantitativa (razón como índice comparativo), pero no las situaciones de comparación cualitativa (covarianza-cualitativa). Los estudiantes para maestro reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en los problemas donde habían identificado los elementos. Por tanto, los estudiantes para maestro de este perfil también muestran un avance sobre los estudiantes para maestro del Perfil 2c.

Se muestran las características de este perfil con la respuesta del estudiante para maestro E002 (Figura 4.15).

Parte-todo: *a) Trabaja la parte-todo, ya que debe extraer la parte del todo del conjunto y tiene que tener en cuenta el numerador y el denominador.* *b) Respuesta 1: es correcta, ya que ha dividido el todo en tres grupos (denominaros) que son 6 bolas por grupo, ya que son 18 bolas y de esos 3 grupos se cogen 2, como cada grupo tiene 6 bolas, serán 12 bolas.* *Respuesta 2: ha utilizado la fracción como operador, que también se puede extraer así, ya que como tenemos 18 bolas y solo cogemos 2/3 del total que son 18, realiza correctamente la operación.* *Respuesta 3: lo realiza mal ya que no extrae los grupos en los que se divide el todo de bolas y por lo tanto al indicar el numerador no lo realiza adecuadamente.*	**Cociente**: *a) Como se trabaja que parte de la pizza le pertenece a cada niño debe conocer parte-todo. Ya que tiene que sacar en cuantas partes se divide la pizza y cuántas partes completan el todo.* *b) Respuesta 1: Es correcta, ya que ha averiguado los trozos de pizza que como cada uno, que son 3, por lo tanto divide cada pizza en 4 pedazos y cada niño se como 3 pedazos de cada pizza. El último niño se como ¼ de cada pizza que en total es ¾.* *Respuesta 2: Ha utilizado correctamente los conceptos matemáticos, ya que saca la parte que como cada niño de cada pizza y finalmente lo suma.* *Respuesta 3: la responde mal ya que no entiende que tiene que buscar la unidad, con lo cual como son 3 pizzas y hay 4 niños cada pizza se divide entre 4 y por lo tanto cada niño come un pedazo de cada pizza.*
Operador: *a) Utiliza la fracción como operador ya que tiene que aumentar o disminuir la fracción para volver al documento de origen.* *b) Respuesta 1: sabe cual es la fracción por la que debe multiplicar ¾ para que vuelva a la forma original, por lo tanto lo realiza bien.* *Respuesta 2: lo realiza mal, ya que añade una fila más y por lo tanto piensa que es 1/3 más.* *Respuesta 3: no sabe realizarlo, porque no sabe por cuanto tiene que multiplicar para que vuelva a su tamaño de origen.*	**Medida-recta numérica**: *a) Se utiliza la relación parte-todo ya que tiene que averiguar en cuantas partes se divide el todo para poder extraer exactamente donde se encuentra x.* *b) Respuesta 1: divide el segmento en 1/5 que son dos rayitas (fracción unitaria), por lo tanto va contando y al final sale 7/5 que lo representa también como 1+2/5, es decir, una unidad entera 5/5 y 2/5 de la unidad.* *Respuesta 2: la explicación es correcta, ya que como sabe el fragmento del segmento que son 2/5, va acumulando grupos de 2/5, les da 3 grupos enteros y explica que tiene ½ de 2/5 por lo tanto utiliza fracción como operador para saber cuanto es este pedazo. Luego saca el m.c.m y ya suma las fracciones.* *Respuesta 3: no se entiende lo que pone.*
Razonamiento up and down: *a) Como tienen que sacar cuanto es el todo para calcular que parte representa los 4 rectángulos, se trabaja parte-todo, todo.* *b) Respuesta 1: sabe representar lo que es la unidad (3 rectángulos pequeños), y por lo tanto sabe que un rectángulo grande son una unidad y 1/3 de la unidad. Por lo tanto, 1+1/3.* *Respuesta 2: sabe extraer la unidad de la figura representada y por lo tanto dice que el todo son ¾ del rectángulo, pero no dice exactamente lo que representan los 4 rectángulos pequeños, solo dice el total.* *Respuesta 3: no sabe identificar el total del dibujo. En este caso 3/3, con lo cual no es coger el rectángulo de 4 rectángulos pequeños como unidad, sino coger solo 3 rectángulos pequeños como la unidad (todo).*	**Medida-densidad**: *a) Se deben buscar fracciones equivalentes de las dos que tenemos, por lo tanto tenemos que multiplicar por 2 o por 3 o por 4, la fracción tanto el numerador como el denominador.* *b) Respuesta 1: no ha calculado el m.c.m de 6 y de 5, directamente ha calculado 90 como denominador y ha averiguado por cuanto se ha multiplicado el denominador y por lo tanto luego lo multiplica al numerador.* *Respuesta 2: realiza una gráfica, que es otra manera de poder extraer las fracciones que hay entre esas dos, con lo cual lo que realiza cuando las sitúa es sacar fracciones equivalentes (dividiendo la gráfica en 30 partes). Luego saca fracciones equivalentes.* *Respuesta 3: no termina el ejercicio, como no realiza más fracciones equivalentes, no puede extraer más fracciones que estén entre esas dos.*
Problema valor perdido no proporcional: *a) Es un problema de adición, por lo tanto se resuelve con estrategias aditivas y no con estrategias proporcionales, es decir, deben extraer la cantidad de ventaja que lleva uno con respecto al otro.* *b) Respuesta 1: ha resuelto adecuadamente el ejercicio, buscando la ventaja que lleva una empresa con respecto a la otra y calculando la cantidad de cajas que ha fabricado la fábrica B con respecto a la A.* *Respuesta 2: reconoce que es de tipo aditivo y no multiplicativo, con lo cual, saca la diferencia que hay en el trascurso del tiempo de la fábrica A y luego el resultado se lo suma a la fábrica B, ya que van a la misma velocidad.* *Respuesta 3: no entiende que es un problema aditivo y que hay que extraer el dato de ventaja en este problema para calcular cuantas cajas lleva la fábrica B cuando la A lleve 120, directamente piensa que es el doble por ver 40 y 80 y por proporcionalidad calcula el doble de 120.*	**Problema valor perdido proporcional**: *a) El problema de la tarea 2 es de proporcionalidad, con lo cual deberían dominar las estrategias relacionadas con el enfoque funcional o escalar, así como también la estrategia constructiva para extraer la incógnita.* *b) Respuesta 1: El niño usa una estrategia de enfoque funcional para resolver el problema, ya que extrae la varianza que existe entre la máquina R y la J y luego, lo multiplica por las que tiene R, de esta forma extrae el resultado.* *Respuesta 2: sa una estrategia constructiva, en la que cada 40 tornillos que fabrica R le suma 120 a J, con lo cual cuando llega a 200 tornillos fabricados por R, J tiene 600, por lo tanto lo realiza bien.* *Respuesta 3: lo realiza mal, ya que utiliza una estrategia aditiva en un problema de proporcionalidad, con lo cual extrae la ventaja que los diferencia, en vez de averiguar la incógnita utilizando estrategias de proporcionalidad.*

Pensamiento relacional:

a) *Es un problema de proporcionalidad en la que hay que comparar las razones que obtengamos de la división de las dos medidas, ya que es un cambio relativo.*

b) *Respuesta 1: El niño de la respuesta 1 ha interpretado el problema como un cambio absoluto, es decir sacar la diferencia de lo que han crecido y no por cambio relativo, que es comparar la proporción de lo que han crecido en esos dos años, por tanto lo ha resuelto mal.*

Respuesta 2: lo realiza correctamente, ya que usa una comparación de razones, puesto que entiende que es un problema de cambio relativo, con lo cual reconoce el resultado mayor como la proporción mayor de crecimiento.

Respuesta 3: el alumno reconoce que se puede resolver por dos vías, por cambio absoluto y por relativo, como no lo especifica en el problema, responde de las dos formas, por tanto lo realiza bien.

Proceso unitizing:

a) *Es un problema de comparación de razones, es decir, proporcional. Con lo cual debe saber comparar los resultados para poder responder a la pregunta que se pide, es decir, cual es mayor o menor.*

b) *Respuesta 1: lo realiza bien, ya que reconoce que es un problema de proporcionalidad y compara las razones de las dos cantidades.*

Respuesta 2: la respuesta está bien, aunque realiza una regla de tres y sería mejor si hubiera utilizado una estrategia de proporcionalidad como el uso de estrategias escalares o funcionales. Pero al haber sacado lo que cuesta 12 Kg de la caja A, ha podido comprobar que esta es más barata que la caja B.

Respuesta 3: la justificación no está bien argumentada, ya que dice que es más barata porque contiene 4 kg más y solo hay de diferencia 0.9 €, pero no ha realizado ninguna comparación de razones para averiguarlo.

Covarianza cualitativa:

a) *Es un problema de proporcionalidad dónde hay que comparar cantidades sin especificar. En este caso, hay que saber el concepto de velocidad que es distancia partido tiempo para saber si ha ido a mayor o menor velocidad.*

b) *Respuesta 1: el niño de la respuesta 1 ha sabido relacionar los conceptos de tiempo y de distancia y por lo tanto ha razonado de manera adecuada y respondiendo correctamente a la pregunta.*

Respuesta 2: a la primera pregunta no contesta del todo bien, ya que no responde a la pregunta que se plantea, sino que dice cuándo fue la velocidad mayor, en vez de la menor. En el segundo, no relaciona el tiempo mayor con mayor distancia, con lo cual dice que "hoy" es menor su velocidad.

Respuesta 3: la respuesta al apartado primero lo realiza erróneamente porque no sabe relacionar la distancia con el tiempo, es decir, hallar la velocidad imaginaria y por lo tanto saber cuándo fue mayor o menor. Por el contrario, la segunda sí que la realiza adecuadamente, ya que sabe que ayer hizo menos tiempo pero en menos km que hoy.

Razón:

a) *Es un problema de proporcionalidad, específicamente de comparación de razones, donde para realizar esta tarea debe conocer diferentes aspectos como: que los lados de un cuadrado son iguales y que la razón de proporcionalidad de los lados de un cuadrado es 1, por lo tanto, el resultado de la división de los lados de un rectángulo que se asemeje a un cuadrado debe ser próximo a 1.*

b) *Respuesta 1: el alumno de la respuesta 1 entiende el concepto de que los lados de un cuadrado son iguales y que por lo tanto la relación entre estos da 1. El niño, tras haber realizado la división de los tres lofts, identifica cual es el que se asemeja más a un cuadrado, es decir a 1.*

Respuesta 2: También identifica el loft que es más cuadrado pero justifica su respuesta argumentando que será más cuadrado al tener los lados más iguales.

Respuesta 3: Ha realizado el problema utilizando una estrategia de adición, por lo tanto, no ha entendido el problema ya que este es de proporcionalidad. El niño ha extraido la diferencia, realizando una resta, de las paredes de los lofts y no una relación entre estas.

Figura 4.15. Respuesta de un EPM del Perfil 3b

El estudiante para maestro identificó los elementos matemáticos del esquema fraccionario, de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y del pensamiento relacional como el estudiante para maestro del Perfil 2c, pero además, en este caso también identificó los elementos matemáticos clave relacionados con la comparación cuantitativa (razón como índice comparativo). El ejemplo muestra que el estudiante para maestro identificó como elemento matemático la aproximación a 1 (aunque use un lenguaje no del todo adecuado) ("*la razón de proporcionalidad de los lados de un cuadrado es 1, por lo tanto, el resultado de la división de los lados de un rectángulo que se asemeje a un cuadrado debe ser próximo a 1*"). Además, el estudiante para maestro reconoció características de la comprensión de los estudiantes a estos problemas, es decir, reconoció características de la comprensión de los estudiantes a los mismos problemas que el Perfil 2c, pero además reconoció características de la comprensión de los estudiantes en el problema de comparación cuantitativa (razón como índice comparativo). El estudiante para maestro reconoció la importancia de interpretar que la razón entre los lados de un cuadrado es 1 cuando comentó que en el estudiante 1 "*entiende el concepto de que los lados de un cuadrado son iguales y que por lo tanto la relación entre éstos da 1*", y en el tercer caso, que "*ha extraído la diferencia de las paredes de los lofts y no una relación entre éstas*". Sin embargo, en el problema de covarianza-cualitativa identificó algún elemento matemático ("*comparar cantidades sin especificar*") sin centrar la atención en las situaciones que tienen solución o que no se puede saber la solución (más-menos, más-más) y no reconoció características de la comprensión de los estudiantes, ya que se centró en la corrección de las respuestas ("*ha sabido relacionar los conceptos [...] respondiendo correctamente*" o "*lo realiza incorrectamente porque no sabe relacionar la distancia con el tiempo*").

4.2.2.8. Perfil 3c. Identifica los elementos matemáticos del razonamiento proporcional (esquema fraccionario, distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, comparación de razones) y reconoce características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas

Los estudiantes para maestro de este perfil identificaron los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto operador inverso), la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y las situaciones de comparación tanto cuantitativa como cualitativa; y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en todos los problemas.

Los estudiantes para maestro de este perfil muestran un avance sobre los estudiantes para maestro de los Perfiles 3a y 3b, ya que identifican los elementos matemáticos relacionados con todos los sub-constructos de razonamiento proporcional a excepción del operador inverso. También reconocieron características de la comprensión de los estudiantes de todos los problemas donde habían identificado los elementos.

Se muestran las características de este perfil con la respuesta del estudiante para maestro E007 (Figura 4.16).

<u>Parte-todo</u>: *a) El alumno para resolver la tarea debe ser capaz de interpretar la fracción como parte-todo. En este aspecto, es necesario que entiendan que el todo se debe dividir en partes congruentes, además de saber identificar el todo.* *b) Respuesta 1: el alumno pone de manifiesto sus conocimientos en cuanto a la interpretación de la fracción como parte-todo, ya que es capaz de identificar el todo y realizar los agrupamientos de bolitas de forma congruente (dividir el todo en partes congruentes).* *Respuesta 2: el alumno lleva a cabo la identificación del total de bolas y de ese total coge 2/3, es decir 12 bolas. En este caso interpreta el todo como 18 y tiene en cuenta en el ejercicio que el todo serán 3/3 (fracción). De manera que lleva a cabo la aplicación de una operación matemática, en este caso la interpretación de la fracción como operador (una fracción transforma una cantidad).* *Respuesta 3: el alumno no reconoce el todo y por esta razón no realiza bien el ejercicio, por esta razón al no realizar bien la comprensión del todo 3/3, no realiza el agrupamiento en partes congruentes.*	**<u>Cociente</u>**: *a) El alumno debe ser capaz de identificar la fracción unitaria e interpretar la fracción como cociente. Además también es necesario que conozca cual es el todo y que éste debe dividirse de forma congruente.* *b) R 1: El alumno comprende que cada persona come3 trozos de pizza y el resto (lo que sobra) son otros 3 trozos para la persona que falta. Por lo que comprende la idea de todo y la interpretación de la fracción como cociente.* *Respuesta 2: El alumno es capaz de interpretar los conceptos matemáticos implicados para su elaboración, ya que comprende que cada pizza son 4/4 y cada porción ¼.* *Respuesta 3: el alumno lleva a cabo la partición de las pizzas de forma desigual, por lo que no comprende la idea de razón como cociente. En cambio realiza una división 12:4 en la cual comprende que son 12 trozos para 4, pero no interpreta bien el resultado.*
<u>Operador</u>: *a) El alumno debe ser capaz de identificar la fracción unitaria y los conceptos sobre partes congruentes e identificación del todo.* *b) Respuesta 1: el alumno no comprende la idea de fracción unitaria, busca una fracción que multiplicada por ¾ de 1, no teniendo en cuenta cual es el todo.* *Respuesta 2: el alumno no es capaz de identificar el todo. Comprende que al reducir el trozo de papel es menor, pero no entiende la idea de fracción unitaria y lleva a cabo otra interpretación del todo.* *Respuesta 3: es capaz de identificar el todo 4/4 y por tanto que está formado por 4 veces ¼, es decir, la fracción unitaria.*	**<u>Razonamiento up and down</u>**: *a) Los alumnos deben ser capaces de comprender la relación parte-parte, identificar el todo y la fracción unitaria.* *b) Respuesta 1: este alumno comprende la representación, además de lo que representa cada cuadrito pequeño. Además es importante destacar que utiliza la notación mixta, en este caso 1+1/3.* *Respuesta 2: tal y como se puede observar el alumno entiende cual es el todo y la representación de 3+2/3, pero no es capaz de responder a la pregunta que se le plantea.* *Respuesta 3: este alumno no es capaz de interpretar la unidad ya que ve que un rectángulo pequeño es 1/3 del total, que en este caso es 3/3.*
<u>Medida-recta numérica</u>: *a) El alumno debe conocer el concepto de fracción unitaria para reconocer que fracción representa cada línea de la recta. También debe conocer el concepto de fracción parte-todo para representar la fracción ya que el denominador indica las partes en las que se divide la recta y el numerador la parte que coger. Por último también debe conocer el concepto de fracción equivalente, ya que debe comprender que dos fracciones distintas puedan representar un mismo número en la recta.* *b) Respuesta 1: realiza la tarea sin dificultades, ya que es capaz de identificar la fracción unitaria en la recta.* *Respuesta 2: realiza la tarea utilizando las fracciones equivalentes y la idea de fracción como operador, ayudándole todo ello a resolver la tarea con éxito.* *Respuesta 3: el alumno no es capaz de identificar la fracción unitaria ya que realiza la división de la recta sin tener en cuenta la fracción 2/5.*	**<u>Medida-densidad</u>**: *a) El alumno debe ser capaz de entender que el todo se divide en partes congruentes, además de saber identificar el todo y la fracción unitaria.* *b) Respuesta 1: el alumno demuestra que comprende los conceptos matemáticos necesarios para su resolución, ya que reconoce que debe buscar un todo grande común para encontrar dos fracciones entre 1/6 y 1/5.* *Respuesta 2: el alumno es capaz de identificar la fracción equivalente de 1/6 y 1/5, por ello divide la recta numérica en partes iguales (30 partes). A continuación, cuenta 5 lugares y 6, es decir, 5 veces 1/30 y 6 veces 1/30. Por lo que pone de manifiesto que comprende la idea de fracción unitaria, partes congruentes, e identificación del todo, aunque solo ha encontrado una fracción ya que no ha buscado más múltiplos de ambas fracciones.* *Respuesta 3: el alumno comprende que debe buscar un todo común y busca fracciones equivalentes, pero no comprende que el todo debe ser mayor para poder encontrar dos fracciones comprendidas entre 1/6 y 1/5.*

Problema valor perdido no proporcional: *a) El alumno para llevar a cabo la resolución de la tarea debe saber identificar entre problemas proporcionales y no proporcionales, ya que en este caso nos encontramos ante un problema no proporcional, no pudiéndose aplicar por ello ningún tipo de estrategia proporcional.* *b) Respuesta 1: El alumno ha resuelto de forma correcta el ejercicio, ya que ha identificado que no es un problema de proporcionalidad, aplicando por ello una estrategia aditiva.* *Respuesta 2: El alumno entiende que al no ser un problema proporcional debe aplicar una estrategia aditiva, aunque en este caso no calcula la ventaja entre ambas empresas sino que calcula la diferencia entre las cajas de la misma empresa y luego esa diferencia se la suma a la otra empresa.* *Respuesta 3: El alumno no ha interpretado de forma correcta la tarea, ya que afirma que puesto que la empresa B fabrica el doble de cajas que A, cuando la empresa A fabrique 120 cajas la empresa B fabricara 120X2, es decir el doble. Por lo que claramente demuestra que no comprende que estamos ante un problema aditivo y por lo tanto no puede aplicar ninguna relación de proporcionalidad.*	**Problema valor perdido proporcional**: *a) El alumno para llevar a cabo la resolución del ejercicio debe comprender el concepto de proporcionalidad, así como identificar los problemas de este tipo. Además, debe comprender que ante este tipo de ejercicios existen diversas estrategias proporcionales que puede utilizar, así como que la relación entre las razones puede ser entera o no.* *b) Respuesta 1: El alumno comprende que es un problema de proporcionalidad, llevando a cabo por ello la utilización del enfoque funcional (uso de razones externas). En este caso resuelve de forma correcta el ejercicio.* *Respuesta 2: El alumno identifica que es un problema de proporcionalidad y utiliza como estrategia para su resolución la estrategia constructiva (uso de relaciones aditivas). En este caso va sumándole a 40 diversos números hasta llegar a 200, realizando lo mismo con el 120. Este alumno también resuelve el problema de forma correcta.* *Respuesta 3: El alumno no identifica que es un problema de proporcionalidad y aplica por ello una estrategia aditiva. En este caso halla los tornillos que diferencian a la Máquina R y J, es decir la ventaja, la cual suma a continuación a 200. Este alumno no resuelve de forma correcta el ejercicio.*
Pensamiento relacional: *a) El alumno para llevar a cabo la resolución del ejercicio debe comprender los cambios absolutos y los cambios relativos. De tal forma que debe ser capaz de interpretar de forma correcta el ejercicio y el resultado del mismo.* *b) Respuesta 1: El alumno solamente tiene en cuenta el cambio absoluto en el problema, de tal forma que da como resultado que ambas han crecido lo mismo, no teniendo por lo tanto en cuenta el cambio relativo.* *Respuesta 2: En este caso el alumno aplica el cambio relativo, en el cuál es necesario tener en cuenta lo que median anteriormente. Por ello debido a que el alumno realiza una comparación entre las razones y tiene en cuenta qué media cada una anteriormente da el resultado correctamente. Aunque no justifica que con el cambio absoluto la interpretación sería diferente.* *Respuesta 3: El alumno tiene en cuenta que dependiendo de si aplica el cambio absoluto o el relativo el resultado será diferente, resolviendo por lo tanto el ejercicio de forma correcta.*	**Proceso unitizing**: *a) El alumno para llevar a cabo la resolución de la tarea debe comprender el concepto de proporcionalidad, concretamente de comparación de razones. Además, debe ser capaz de identificar problemas de éste tipo.* *b) Respuesta 1: El alumno comprende que es un ejercicio de proporcionalidad, concretamente de comparación de razones. En este caso realiza de forma correcta el ejercicio ya que interpreta de forma correcta el resultado obtenido.* *Respuesta 2: El alumno interpreta que es un problema de proporcionalidad pero lo realiza de forma errónea, ya que utiliza una regla de tres, no comprendiendo que en este caso es un ejercicio de comparación de razones.* *Respuesta 3: El alumno no interpreta que está ante un ejercicio de comparación de razones (proporcionalidad), por esta razón a parte de apuntar mal el resultado de lo que cuesta la caja B (pone 2.46€ en vez de 2.64€), lleva a cabo una resta lo cual es incorrecto en este tipo de problemas.*

Covarianza cualitativa:	Razón:
a) El alumno para llevar a cabo la resolución de la tarea debe comprender las relaciones no proporcionales y proporcionales, ya que éste es un tipo de problema que plantea situaciones sin cantidades específicas que requieren comparaciones, siendo una de las situaciones proporcional y otra no. *b) Respuesta 1: El alumno es capaz de interpretar que existe una relación proporcional en uno de los problemas, resolviéndolo correctamente. En cambio en el otro no argumenta de forma correcta, ya que dice que le falta los datos para poder saber el resultado, lo cual es incorrecto, ya que no podemos saber el resultado debido a que estamos ante una relación más-más.* *Respuesta 2: Al igual que en la respuesta 1, el alumno identifica uno de los problemas, el cual es el que tiene una relación proporcional, resolviéndolo correctamente. En cambio, el problema cuya relación no es proporcional no es capaz de interpretarlo correctamente y lo resuelve de forma errónea.* *Respuesta 3: El alumno no resuelve ninguno de los dos problemas de forma correcta, ya que interpreta mal ambos enunciados.*	*a) El alumno para poder llevar a cabo la resolución del problema, es necesario que comprenda el concepto de proporcionalidad y sea capaz de identificar los problemas de éste tipo, concretamente de comparación de razones. Además también debe ser capaz de identificar que en este caso cuanto más cercano esté el resultado de 1, más cuadrado será el loft.* *b) Respuesta 1: El alumno lleva a cabo la ejecución del problema de forma correcta, ya que comprende que es un problema proporcional y realiza una comparación de razones escogiendo como resultado la comparación que se acerca más a 1.* *Respuesta 2: El alumno entiende que debe realizar una comparación de razones, pero no comprende que el resultado correcto es el que está más cercano a 1. Éste considera que el resultado correcto es aquella razón en la cual entre el numerador y denominador hay una menor diferencia.* *Respuesta 3: El alumno no comprende que debe realizar una comparación entre las razones y lleva a cabo la realización de restas. En este caso considera que el resultado correcto es aquel en el cual los lados son más similares, es decir 5.08 y 4.55 ya que en el cuadrado todos los lados son iguales.*

Figura 4.16. Respuesta de un EPM del Perfil 3c

Este último perfil es una combinación de los perfiles 3a y 3b. El estudiante para maestro identificó los elementos matemáticos del esquema fraccionario, la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, y la comparación de razones tanto cualitativa como cuantitativa. Es decir, identificó los elementos matemáticos del Perfil 2c ("*parte-todo*", "*fracción unitaria*", "*partes congruentes"*, "*equivalencia de fracciones*", "*cociente*", "*operador*", "*problemas proporcionales y no proporcionales"*) y los elementos matemáticos de los Perfiles 3a y 3b ("*cuanto más cercano esté el resultado de 1, más cuadrado será el loft.*" en el problema de la razón y "*situaciones sin cantidades específicas que requieren comparaciones, siendo una de las situaciones proporcional y otra no*" en el problema de covarianza-cualitativa).

Además, el estudiante para maestro reconoció características de la comprensión de los estudiantes a todos estos problemas, es decir, reconoció características de la comprensión de los estudiantes a los mismos problemas que el Perfil 2c, pero además, reconoció características de la comprensión de los estudiantes a los problemas de razón y covarianza-cualitativa. En el problema *razón* el estudiante para maestro diferenció entre la respuesta correcta centrada en la aproximación de la razón a 1 ("*realiza una comparación de razones escogiendo como resultado la comparación que se acerca más* *a 1*") y en las otras dos que se centra en la diferencia entre los lados ("*no comprende que debe realizar una comparación entre las razones y lleva a cabo la realización de restas*"). En el problema de covarianza-cualitativa reconoció en las respuestas de los estudiantes las situaciones con o sin solución interpretando correctamente lo que hacen los estudiantes ("*es capaz de interpretar que existe una relación proporcional", "no podemos saber el resultado debido a que estamos ante una relación más-más"*).

4.2.3. Qué actividades proponen los estudiantes para maestro considerando la comprensión de los estudiantes

El análisis inductivo generó cinco categorías de las decisiones de acción dadas por los estudiantes para maestro (cuestiones c y d), generales para todas las tareas (12 sub-constructos) atendiendo a si las características de las actividades propuestas tenían relación con: los cambios de representación, volver a explicar el contenido, modificar los números o la actividad teniendo en cuenta los elementos matemáticos relevantes de cada problema, acciones más generales como cambios en el tamaño de los números, añadir más elementos o cambiar a otros contextos, y propuestas sin sentido o en blanco. En este apartado mostraremos los resultados obtenidos de las decisiones propuestas por los estudiantes para maestro para ayudar a los estudiantes que no han comprendido el problema, y los resultados obtenidos para las decisiones propuestas por los estudiantes para maestro para ayudar al estudiante a progresar en su comprensión en caso de haber resuelto con éxito el problema. Además, mostraremos la relación entre los perfiles de estudiantes para maestro sobre cómo identifican y reconocen la comprensión de los estudiantes y las actividades propuestas por los estudiantes para maestro tanto para ayudar al estudiante que no ha comprendido como para ampliar el conocimiento del estudiante que ha comprendido el problema.

4.2.3.1. Actividades propuestas por los estudiantes para maestro cuando el estudiante no ha comprendido el problema

La Tabla 4.8 muestra las decisiones de acción que proponen los estudiantes para maestro para ayudar a los estudiantes que no han comprendido los diferentes sub-constructos del razonamiento proporcional. Estos resultados muestran tres ideas. La primera es que el tipo de actividades que los estudiantes para maestro proponen depende del sub-constructo. Así, en el sub-constructo parte-todo, por ejemplo, la mayoría de los estudiantes para maestro (n=39) proponen un cambio en la representación (de un contexto discreto a un contexto continuo), 12 estudiantes para maestro proponen volver a explicar el contenido, 23 estudiantes para maestro proponen modificar la actividad prestando atención al significado parte-todo (todo, fracción unitaria, partes congruentes) y solamente 13 estudiantes para maestro proponen tareas sin sentido. Sin embargo, en el sub-constructo operador, 14 proponen que se ayude con una representación gráfica, 0 proponen volver a explicar el contenido (posiblemente porque no entienden el problema), solamente 13 proponen modificar la tarea atendiendo al significado de operador inverso, y 64 proponen actividades sin sentido.

Tabla 4.8. Decisiones de acción de los estudiantes para maestro para ayudar a los estudiantes que no comprenden para cada sub-constructo

		Categoría					
Bloque	**Sub-constructo**	**Cambio represen-tación**	**Volver a explicar contenido**	**Modificar nº/actividad según el sub-constructo**	**Comentario general**	**Sin sentido / en blanco**	**Total**
A	1. Parte-todo	39	12	23	19	13	106
	2. Medida-recta numérica	7	4	41	5	37	94
	3. Medida-densidad	0	18	38	0	35	91
	4. Cociente	21	10	14	7	40	92
	5. Operador	14	0	13	0	64	91
	6. Razonam. up and down	10	3	41	1	40	95
B	7. PVP proporcional	12	5	17	31	33	98
	8. PVP no proporcional	12	9	24	16	34	95
C	9. Pensamiento relacional	4	12	12	39	30	97
	10. Proceso unitizing	0	6	34	43	20	103
	11. Razón	23	9	15	40	23	110
	12. Covarianza cualitativo	13	2	0	48	33	96

*Los totales suman más de 91 porque algunos EPM propusieron más de una actividad

La segunda idea que se puede observar es que en el dominio del esquema fraccionario (bloque A) predominan los cambios de representación (o ayudar con una representación gráfica) y la modificación de las actividades basadas en el propio significado (como la fracción unitaria, la iteración de las fracciones, la identificación del todo, las partes congruentes). Sin embargo, en los dominios de distinguir entre situaciones proporcionales y no proporcionales (bloque B) y comparar razones (bloque C) predominan los comentarios generales que engloban propuestas de actividades en las que se modifican los números, por ejemplo a números más pequeños o números enteros sin referencia a la relación entre las cantidades que es el significado de la idea de razón. Estos resultados parecen indicar que en los sub-constructos donde los estudiantes para maestro fueron más capaces de identificar los elementos clave del problema (KDU) y usarlos para interpretar la comprensión de los estudiantes (primero sub-constructos del esquema fraccionario, después sub-constructos de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y finalmente los sub-constructos de la comparación de razones), también fueron más capaces de proponer más actividades centradas en el significado o comprensión del sub-constructo.

Finalmente, los resultados muestran que la destreza de decidir cómo modificar la tarea para ayudar a un estudiante que no comprende no es una tarea fácil para los estudiantes para maestro por la cantidad de respuestas sin sentido o en blanco que aparecen en todos los sub-constructos.

4.2.3.2. Actividades propuestas por los estudiantes para maestro para ayudar a progresar cuando el estudiante ha comprendido el problema

La Tabla 4.9 muestra las decisiones de acción que proponen los estudiantes para maestro para ayudar a progresar a los estudiantes que han comprendido los sub-constructos del razonamiento proporcional. De nuevo se observan las tres ideas comentadas en la tabla anterior. El tipo de actividades que los estudiantes para maestro proponen dependen del sub-constructo que están tratando. En el sub-constructo parte-todo la mayoría de los estudiantes para maestro propone modificar la actividad prestando atención al significado parte-todo (todo, fracción unitaria, partes divididas en partes) (n=53), solamente 5 estudiantes para maestro proponen actividades más generales como poner más bolas o que se resuelva mediante otra estrategia, y 27 proponen actividades en blanco o sin sentido. Sin embargo, en el sub-constructo proceso unitizing, 8 proponen modificar la tarea atendiendo a la idea de buscar una unidad de referencia que les permita comparar (significado del sub-constructo proceso unitizing), 40 proponen modificaciones de actividades centradas en el cambio de números (más altos o con más decimales) y 44 proponen actividades sin sentido o dejan la tarea en blanco.

Por otro lado, en el dominio del esquema fraccionario (bloque A) predominan las modificaciones de las actividades basadas en el propio significado (como la fracción unitaria, la iteración de las fracciones, la identificación del todo, que las partes pueden estar divididas en más partes). Sin embargo, en los dominios de distinguir entre situaciones proporcionales y no proporcionales (bloque B) y comparar razones (bloque C) predominan los comentarios generales que engloban propuestas de actividades en las que se modifican los números, por ejemplo a números más altos o números decimales. Estos resultados indican que en los sub-constructos donde los estudiantes para maestro fueron más capaces de identificar los elementos clave del problema y usarlos para interpretar la comprensión de los estudiantes (KDU), también fueron más capaces de proponer más actividades centradas en el significado o comprensión del sub-constructo. Finalmente, sigue habiendo un número muy alto de respuestas sin sentido o en blanco en todos los sub-constructos.

Tabla 4.9. Decisiones de acción de los estudiantes para maestro para ampliar el conocimiento de los estudiantes que comprenden cada sub-constructo

		Categoría				Total
Bloque	**Sub-constructo**	**Cambio represen -tación**	**Modificar nº/actividad según el significado del sub-constructo**	**Comentario general**	**Sin sentido / en blanco**	
A	1. Parte-todo	7	53	5	27	92
	2. Medida-recta numérica	0	38	3	51	92
	3. Medida-densidad	0	8	13	70	91
	4. Cociente	19	25	1	50	95
	5. Operador	0	19	0	72	91
	6. Razonam. up and down	14	18	8	52	92
B	7. PVP proporcional	0	60	10	22	92
	8. PVP no proporcional	0	29	24	39	92
C	9. Pensamiento relacional	0	4	36	52	92
	10. Proceso unitizing	0	8	40	44	92
	11. Razón	0	21	21	50	92
	12. Covarianza cualitativo	0	0	33	58	91

*Los totales suman más de 91 porque algunos EPM propusieron más de una actividad

Si se comparan ambas tablas (Tablas 4.8 y 4.9), se observa que el número de decisiones de acción relacionadas con el cambio de representación disminuye cuando tienen que proponer actividades para ampliar el conocimiento de los estudiantes e, incluso, desaparece en los sub-constructos relacionados con los dominios de distinguir situaciones proporcionales y no proporcionales (bloque B) y comparar razones (bloque C). Por otro lado, desaparece la categoría de volver a explicar el contenido. Esta disminución se compensa con el aumento del número de propuestas sin sentido o en blanco, lo que sugiere que proponer actividades para ampliar el conocimiento es más difícil que proponer actividades para ayudar a los estudiantes que no han comprendido.

4.2.3.3. Relación entre los perfiles obtenidos y las actividades propuestas por los estudiantes para maestro

Las Tablas 4.10 y 4.11 muestran, en detalle, las decisiones de acción propuestas por los estudiantes para maestro que hemos visto en los apartados anteriores, agrupadas según los perfiles obtenidos tras el análisis conjunto de las destrezas identificar los elementos matemáticos y reconocer características de la comprensión de todos los sub-constructos considerados en esta investigación. En estas tablas, los perfiles se han agrupado como Perfil 0, Perfil 1, Perfil 2 y Perfil 3 según los dominios matemáticos del razonamiento proporcional (esquema fraccionario, distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y comparación de razones).

De las tablas 4.10 y 4.11, se observa que las decisiones de acción no dependieron del perfil en el que estaban los estudiantes para maestro. Es decir, los estudiantes para maestro de cualquiera de los perfiles proponían decisiones de acción de todos los tipos tanto para ayudar al estudiante que no había comprendido como para el estudiante que había comprendido el problema. Este resultado indica que la relación entre reconocer características de la comprensión y tomar decisiones no es lineal.

Tabla 4.10. Decisiones de acción de los estudiantes para maestro para ayudar a los estudiantes que no comprenden para cada sub-constructo por perfiles

Perfil	Categoría	Esquema fraccionario						Distinción		Comparación de razones			
		Parte-todo	Recta num.	Densid.	Cociente	Operador	Raz. up & down	PVP prop.	PVP no prop.	Pens. relativo	Proceso unitizing	Covarianza cualitativo	Razón
P0 N=20	Cambio de representación	7	2	0	4	4	4	3	4	1	0	3	5
	Volver a explicar el contenido	5	1	7	2	0	1	0	0	2	2	0	0
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	3	6	4	1	3	4	1	0	1	5	0	2
	Comentario general	1	0	0	2	0	0	3	4	7	8	7	10
	Sin sentido / en blanco	5	12	9	11	13	12	13	13	10	8	12	6
P1 N=17	Cambio de representación	7	3	0	4	3	0	4	3	1	0	4	2
	Volver a explicar el contenido	1	2	2	3	0	0	0	1	3	2	0	2
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	5	8	10	4	2	9	4	3	0	7	0	3
	Comentario general	4	1	0	0	0	0	5	1	6	8	6	8
	Sin sentido / en blanco	3	4	5	6	12	8	6	9	8	3	9	4
P2 N=19	Cambio de representación	7	0	0	5	3	4	2	2	0	0	1	4
	Volver a explicar el contenido	3	1	5	1	0	1	1	3	1	0	0	2
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	5	13	7	3	3	9	4	6	3	9	0	4
	Comentario general	7	1	0	2	0	0	7	4	8	9	12	6
	Sin sentido / en blanco	1	4	7	8	13	6	7	5	8	6	6	8
P3 N=16	Cambio de representación	11	1	0	5	1	1	0	0	0	0	1	4
	Volver a explicar el contenido	1	0	3	3	0	0	3	4	2	1	1	4
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	6	10	11	4	3	14	4	8	6	8	0	3
	Comentario general	3	1	0	2	0	1	8	2	9	6	11	8
	Sin sentido / en blanco	0	5	2	3	12	1	3	2	1	2	3	2

Tabla 4.11. Decisiones de acción de los estudiantes para maestro para ampliar el conocimiento de los estudiantes que comprenden para cada sub-constructo por perfiles

Perfil	Categoría	Esquema fraccionario						Distinción		Comparación de razones			
		Parte-todo	Recta num.	Densid.	Cociente	Operador	Raz. up & down	PVP prop.	PVP no prop.	Pens. relativo	Proceso unitizing	Covarianza cualitativo	Razón
P0 N=20	Cambio de representación	0	0	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	8	6	2	6	2	3	11	4	0	0	0	3
	Comentario general	2	0	2	1	0	0	3	3	6	9	6	2
	Sin sentido / en blanco	10	14	16	12	18	14	6	13	14	11	14	15
P1 N=17	Cambio de representación	2	0	0	4	0	1	0	0	0	0	0	0
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	10	7	2	4	3	4	7	3	0	2	0	4
	Comentario general	0	2	2	0	0	1	4	2	5	8	3	4
	Sin sentido / en blanco	5	8	13	10	14	11	6	11	12	7	14	9
P2 N=19	Cambio de representación	3	0	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	11	12	1	7	3	3	14	8	2	0	0	3
	Comentario general	1	0	2	0	0	3	0	5	7	7	8	2
	Sin sentido / en blanco	5	7	16	11	16	10	5	6	10	12	11	15
P3 N=16	Cambio de representación	1	0	0	10	0	4	0	0	0	0	0	0
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	12	7	3	6	6	5	13	6	2	3	0	8
	Comentario general	1	1	4	0	0	3	3	4	9	7	9	5
	Sin sentido / en blanco	2	9	9	3	10	5	1	6	6	6	7	3

Sin embargo podemos observar algunas tendencias en los totales, en cuanto al tipo de decisiones que los estudiantes para maestro tomaban en cada uno de los perfiles. Las Tablas 4.12 y 4.13 muestran los totales de las Tablas 4.10 y 4.11 agrupados por los dominios esquema fraccionario, distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y comparación de razones.

Tabla 4.12. Totales de las decisiones de acción de los estudiantes para maestro para ayudar a los estudiantes que no comprenden por dominios y perfiles

Perfil	Categoría	Esquema fraccionario	Distinción entre situaciones prop. y no prop.	Comparación de razones	Total
P0 N=20	Cambio de representación	21	7	9	37
	Volver a explicar el contenido	16	0	4	20
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	21	1	8	30
	Comentario general	3	7	32	42
	Sin sentido / en blanco	62	26	36	124
P1 N=17	Cambio de representación	17	7	7	31
	Volver a explicar el contenido	8	1	7	16
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	38	7	10	55
	Comentario general	5	6	28	39
	Sin sentido / en blanco	38	15	24	77
P2 N=19	Cambio de representación	19	4	5	28
	Volver a explicar el contenido	11	4	3	18
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	40	10	16	66
	Comentario general	10	11	35	56
	Sin sentido / en blanco	39	12	28	79
P3 N=16	Cambio de representación	19	0	5	24
	Volver a explicar el contenido	7	7	8	22
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	48	12	17	77
	Comentario general	7	10	34	51
	Sin sentido / en blanco	23	5	8	36

En la Tabla 4.12 sobre decisiones de acción de los estudiantes para maestro para ayudar a los estudiantes que no han comprendido el problema, se observa cómo las propuestas de actividades centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo aumenta según se van incorporando los dominios del razonamiento proporcional en los perfiles y las respuestas sin sentido o en blanco disminuyen. Es decir, conforme los estudiantes para maestro mostraban más capacidad para identificar los elementos matemáticos en cada uno de los sub-constructos considerados y reconocían evidencias de la comprensión de los estudiantes, las actividades centradas en el significado del sub-constructo aumentan (de 30 propuestas en el P0 hasta 77 que se propusieron en el P3) y las respuestas en blanco o sin sentido disminuyen (de 124 propuestas en el P0 a 36 en el P3). Esto parece indicar que la identificación de los elementos matemáticos relevantes del problema y su comprensión en las respuestas de los estudiantes (KDU) ayudó a los estudiantes para maestro a proponer actividades más centradas en los significados.

Así, respecto al dominio del esquema fraccionario, solamente hubo 21 propuestas de actividades centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo en el Perfil 0, en el que no identificaron los elementos matemáticos ni reconocieron características de la comprensión de los estudiantes. Sin embargo, en los perfiles en los que los estudiantes para maestro sí que habían identificado los elementos matemáticos y reconocido características de la comprensión de los estudiantes, el número de propuestas de actividades centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo aumentó (38 propuestas en el Perfil 1, 40 propuestas en el Perfil 2 y 48 propuestas en el Perfil 3). Por otro lado, hubo 62 respuestas sin sentido o en blanco en el Perfil 0 (que no identificaron ni reconocieron). Además, el número de respuestas sin sentido o en blanco disminuyó en los perfiles en los que los estudiantes para maestro sí que identificaron los elementos del esquema fraccionario y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes (38 propuestas en el Perfil 1, 39 en el Perfil 2 y 23 en el Perfil 3).

Respecto al dominio de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, solamente hubo 1 propuesta en el Perfil 0 y 7 en el Perfil 1 centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo, que son los perfiles en los que no identificaron los elementos matemáticos ni reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en este dominio. Sin embargo, en los perfiles en los que los estudiantes para maestro sí que habían identificado los elementos matemáticos y reconocido características de la comprensión de los estudiantes, el número de propuestas de actividades centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo aumentó (10 propuestas en el Perfil 2 y 12 propuestas en el Perfil 3). Por otro lado, hubo 26 respuestas sin sentido o en blanco en el Perfil 0 y 15 en el Perfil 1 (que no identificaron ni reconocieron características en este dominio). Sin embargo, el número de respuestas sin sentido o en blanco disminuyó en los perfiles en los que los estudiantes para maestro sí que identificaron los elementos de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes (12 en el Perfil 2 y 5 en el Perfil 3).

Finalmente, en cuanto al dominio de comparación de razones, hubo 8 propuestas en el Perfil 0, 10 en el Perfil 1 y 16 en el Perfil 2 centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo, que son los perfiles en los que no identificaron los elementos matemáticos ni reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en el dominio de la comparación de razones. Sin embargo, en el perfil en el que los estudiantes para maestro sí que habían identificado los elementos matemáticos y reconocido características de la comprensión de los estudiantes, el número de propuestas de actividades centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo aumentó (17 propuestas en el Perfil 3). Por otro lado, hubo 36 respuestas sin sentido o en blanco en el Perfil 0, 24 en el Perfil 1 y 28 en el Perfil 2 (que no identificaron ni reconocieron características en este dominio). Sin embargo, el número de respuestas sin sentido o en blanco disminuyó en el perfil en el que los estudiantes para maestro si que identificaron los elementos de la comparación de razones y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes (8 en el Perfil 3).

Por otro lado, en la Tabla 4.13 sobre decisiones de acción de los estudiantes para maestro para ampliar el conocimiento de los estudiantes que sí comprenden los problemas, se observan las mismas tendencias que en las decisiones de acción para ayudar a un estudiante que no ha comprendido el problema, es decir, se observa cómo las propuestas de actividades centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo aumenta según se va incorporando la capacidad en identificar los elementos matemáticos de los diferentes sub-constructos y de reconocer evidencias de su comprensión (45 propuestas en P0 y 71 propuestas en P3) y las respuestas sin sentido o en blanco disminuyen (157 propuestas en P0 y 67 propuestas en P3). Esto parece indicar que, del mismo modo que ocurre cuando los estudiantes para maestro tuvieron que tomar decisiones de acción para ayudar a los estudiantes que no comprendían los problemas, la identificación de los elementos matemáticos relevantes del problema y el reconocimiento de las características de la comprensión de los estudiantes (KDU) ayudó a los estudiantes para maestro a proponer actividades para ayudar a progresar conceptualmente.

Tabla 4.13. Totales de las decisiones de acción de los estudiantes para maestro para ampliar el conocimiento de los estudiantes que comprenden por dominios y por perfiles

Perfil	**Categoría**	**Esquema fraccionario**	**Distinción entre situaciones prop. y no prop.**	**Comparación de razones**	**Total**
	Cambio de representación	4	0	0	4
P0	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	27	15	3	45
N=20	Comentario general	5	6	23	34
	Sin sentido / en blanco	84	19	54	157
	Cambio de representación	7	0	0	7
P1	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	30	10	6	46
N=17	Comentario general	5	6	20	31
	Sin sentido / en blanco	61	17	42	120
	Cambio de representación	7	0	0	7
P2	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	37	22	5	64
N=19	Comentario general	6	5	24	35
	Sin sentido / en blanco	65	11	48	124
	Cambio de representación	15	0	0	15
P3	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	39	19	13	71
N=16	Comentario general	9	7	30	46
	Sin sentido / en blanco	38	7	22	67

De manera particular en cada dominio, en relación al esquema fraccionario, solamente hubo 27 propuestas centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo en el Perfil 0, en el que no identificaron los elementos matemáticos ni reconocieron características de la comprensión de los estudiantes. Sin embargo, en los perfiles en los que los estudiantes para maestro sí que habían identificado los elementos matemáticos y reconocido características de la comprensión de los estudiantes, el número de propuestas de actividades centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo aumentó (30 propuestas en el Perfil 1, 37 propuestas en el Perfil 2 y 39 propuestas en el Perfil 3). Por otro lado, hubo 84 respuestas sin sentido o en blanco en el Perfil 0 (que no identificaron ni reconocieron). Sin embargo, parece que el número de respuestas sin sentido o en blanco tendió a disminuir en los perfiles en los que los estudiantes para maestro sí que identificaron los elementos del esquema fraccionario y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes (61 propuestas en el Perfil 1, 65 en el Perfil 2 y 38 en el Perfil 3).

Respecto a la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, hubo 15 propuestas en el Perfil 0 y 10 en el Perfil 1 centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo, que son los perfiles en los que no identificaron los elementos matemáticos ni reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en el dominio de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales. Sin embargo, en los perfiles en los que los estudiantes para maestro sí que habían identificado los elementos matemáticos y reconocido características de la comprensión de los estudiantes, el número de propuestas de actividades centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo aumentó (22 propuestas en el Perfil 2 y 19 propuestas en el Perfil 3). Por otro lado, hubo 19 respuestas sin sentido o en blanco en el Perfil 0 y 17 en el Perfil 1 (que no identificaron ni reconocieron características en este dominio). Además, el número de respuestas sin sentido o en blanco disminuyó en los perfiles en los que los estudiantes para maestro sí que identificaron los elementos de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes (11 en el Perfil 2 y 7 en el Perfil 3).

Finalmente, en cuanto al dominio de comparación de razones, hubo 3 propuestas en el Perfil 0, 6 en el Perfil 1 y 5 en el Perfil 2 centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo, que son los perfiles en los que no identificaron los elementos matemáticos ni reconocieron características de la comprensión de los estudiantes en el dominio de la comparación de razones. Sin embargo, en el perfil en el que los estudiantes para maestro sí que habían identificado los elementos matemáticos y reconocido características de la comprensión de los estudiantes, el número de propuestas de actividades centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructo aumentó (13 propuestas en el Perfil 3). Por otro lado, hubo 54 respuestas sin sentido o en blanco en el Perfil 0, 42 en el Perfil 1 y 48 en el Perfil 2 (que no identificaron ni reconocieron características en este dominio). Además, el número de respuestas sin sentido o en blanco disminuyó en el perfil en el que los estudiantes para maestro sí que identificaron los elementos de la comparación de razones y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes (22 en el Perfil 3).

La Tabla 4.14 compara las decisiones de acción tomadas por los estudiantes para maestro tanto para ayudar a los estudiantes que no han comprendido los problemas como las decisiones de acción para ampliar el conocimiento de los estudiantes que sí han comprendido el problema.

Tabla 4.14. Decisiones de acción de los estudiantes para maestro para ayudar si no comprenden y para ampliar el conocimiento si han comprendido por dominios y por perfiles

Perfil	Categoría	Esquema fraccionario		Distinción sit. prop. y no prop.		Comp. de razones		Total	
	Toma de decisiones	**Ay.**	**Am.**	**Ay.**	**Am.**	**Ay.**	**Am.**	**Ay.**	**Am.**
P0 N=20	Cambio de representación	21	4	7	0	9	0	37	4
	Volver a explicar el contenido	16	0	0	0	4	0	20	0
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	21	27	1	15	8	3	30	45
	Comentario general	3	5	7	6	32	23	42	34
	Sin sentido / en blanco	62	84	26	19	36	54	124	157
P1 N=17	Cambio de representación	17	7	7	0	7	0	31	7
	Volver a explicar el contenido	8	0	1	0	7	0	16	0
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	38	30	7	10	10	6	55	46
	Comentario general	5	5	6	6	28	20	39	31
	Sin sentido / en blanco	38	61	15	17	24	42	77	120
P2 N=19	Cambio de representación	19	7	4	0	5	0	28	7
	Volver a explicar el contenido	11	0	4	0	3	0	18	0
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	40	37	10	22	16	5	66	64
	Comentario general	10	6	11	5	35	24	56	35
	Sin sentido / en blanco	39	65	12	11	28	48	79	124
P3 N=16	Cambio de representación	19	15	0	0	5	0	24	15
	Volver a explicar el contenido	7	0	7	0	8	0	22	0
	Modificar los nº/actividad según el significado del sub-constructo	48	39	12	19	17	13	77	71
	Comentario general	7	9	10	7	34	30	51	46
	Sin sentido / en blanco	23	38	5	7	8	22	36	67

(*) Ay. = decisiones para ayudar a los estudiantes que no comprenden el problema

Am. = decisiones para ampliar el conocimiento de los que han comprendido el problema

Los resultados sugieren dos ideas. La primera es la dificultad que tienen los estudiantes para maestro para tomar decisiones en base a la comprensión identificada en las respuestas de los estudiantes. Esto se evidencia por la cantidad de respuestas sin sentido o en blanco a lo largo de todos los perfiles y de todos los dominios del razonamiento proporcional. La segunda es que parece ser que proponer actividades para ampliar el conocimiento de los estudiantes que ha comprendido el problema es más difícil que proponer actividades para ayudar a los estudiantes que no han comprendido. Esto se evidencia, de manera general en los totales de todos los perfiles (excepto en el perfil 0). Así los estudiantes para maestro propusieron más decisiones centradas en el cambio de representación y en el significado del sub-constructo para los estudiantes que no habían comprendido (ayudar) que para los estudiantes que habían comprendido (ampliar) y dieron más decisiones sin sentido o en blanco en las decisiones para ampliar el conocimiento. Este dato sugiere que tomar decisiones de acción para ayudarles a progresar conceptualmente es más difícil que tomar decisiones de acción para reforzar o ayudar cuando no han comprendido.

Sin embargo, el comportamiento considerando los diferentes dominios que se han tenido en cuenta varía. Así, en el esquema fraccionario y la comparación de razones las diferencias entre el número de propuestas centradas en modificar la actividad según el significado del sub-constructos para ayudar a los estudiantes que no han comprendido el problema y las propuestas de ampliación cuando sí han comprendido son:

Perfil 1: 38 vs 30 (esquema fraccionario), y 10 vs 7 (comparación de razones)

Perfil 2: 40 vs 37 (esquema fraccionario), y 16 vs 5 (comparación de razones)

Perfil 3: 48 vs 39 (esquema fraccionario), y 17 vs 3 (comparación de razones)

Mientras que en el dominio de distinguir entre situaciones proporcionales y no proporcionales la diferencia es al contrario (proponen más tareas centradas en el significado del sub-constructo para ampliar que para ayudar):

Perfil 1: 7 vs 10

Perfil 2: 10 vs 22

Perfil 3: 12 vs 19

Este variación en la toma de decisiones instruccionales subraya la influencia del dominio considerado en esta destreza. Es decir, aunque globalmente en los perfiles 1, 2 y 3 se proponían más actividades centradas en el significado del sub-constructo para ayudar en la comprensión que en ampliar la comprensión, este dato debe matizarse en función del dominio considerado (el esquema fraccionario, distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, y comparación de razones).

4.3. RELACIÓN ENTRE EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y LA INTERPRETACIÓN DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES

En esta sección mostraremos la relación entre el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro y cómo identificaron los elementos matemáticos y reconocieron características de la comprensión de los estudiantes.

La Tabla 4.15 muestra el nivel de éxito de los problemas del Cuestionario 1 de los 72 estudiantes para maestro clasificados en los perfiles sobre cómo identifican y reconocen características de la comprensión de los estudiantes. La Tabla 4.15 muestra los perfiles agrupados según los dominios del razonamiento proporcional y los estudiantes para maestro que resolvieron con éxito cada problema.

Tabla 4.15. Relación entre el conocimiento matemático y los perfiles sobre cómo identificaron elementos matemáticos y usaron estos elementos para reconocer características de la comprensión de los estudiantes

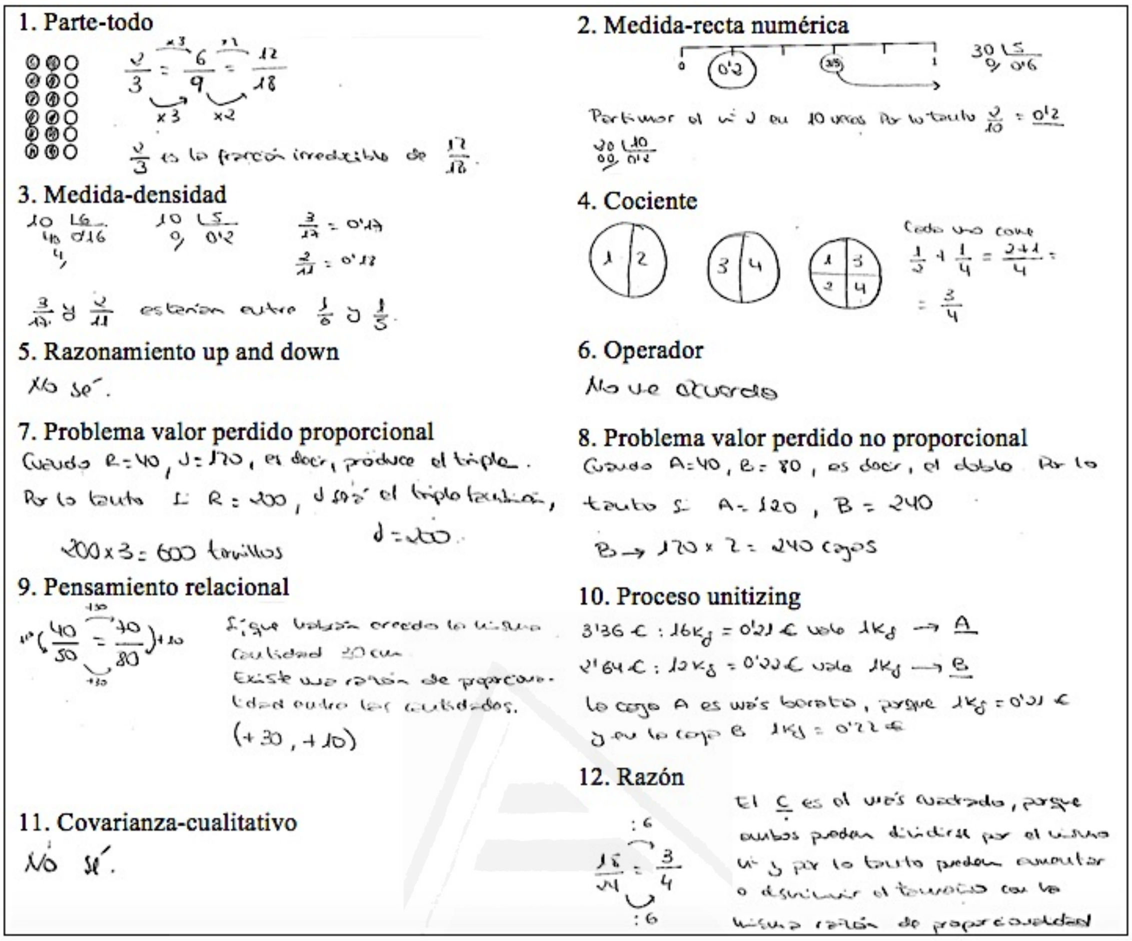
Dominio	Sub-constructo	Perfil 0 (n=20)	Perfil 1 (n=17)	Perfil 2 (n=19)	Perfil 3 (n=16)	Total
A	Parte-todo	19	17	19	16	71
	Medida-recta numérica	17	15	18	15	65
	Medida-densidad	6	5	4	4	19
	Cociente-reparto equitativo	19	17	18	16	70
	Operador	0	1	0	2	3
	Razonamiento up& down	3	2	5	4	14
B	Problema valor perdido proporcional	19	12	16	12	59
	Problema valor perdido no proporcional	3	5	5	9	22
C	Pensamiento relacional	1	2	6	2	11
	Proceso unitizing	13	9	16	15	53
	Covarianza	6	6	3	8	23
	Razón	2	1	2	2	7

Los resultados muestran que tener el conocimiento matemático no implica que los estudiantes para maestro sean capaces de identificar los elementos matemáticos y reconocer características de la comprensión de los estudiantes. Esto se ve evidenciado, por ejemplo, en el Perfil 0, ya que los estudiantes para maestro tenían el conocimiento de algunos sub-constructos (parte-todo, medida-recta numérica, problema de valor perdido proporcional, proceso unitizing), sin embargo no fueron capaces de identificar los elementos matemáticos relevantes de cada problema ni de reconocer características de la comprensión de los estudiantes (KDUs). Cabe recordar, que los problemas donde los estudiantes para maestro tuvieron más éxito eran los que se podían resolver aplicando procedimientos, lo que nos muestra que tener un conocimiento procedimental que ayuda a resolver los problemas no implica ser capaz de reconocer los KDU en las respuestas de los estudiantes (comprensión de los elementos matemáticos clave -centrados en el concepto y no en el procedimiento).

Otro resultado que se observa, es que en todos los perfiles hubo estudiantes para maestro que no resolvieron correctamente algunos problemas, pero después sí que fueron capaces de identificar los elementos matemáticos de los problemas y usarlos para reconocer características de la comprensión de los estudiantes (KDUs). El hecho de que aunque no resolvieron el problema algunos estudiantes para maestro identificaran los elementos y reconocieran características de la comprensión de los estudiantes, parece sugerir que el formato de la tareas en el Cuestionario 2 ayudó a algunos estudiantes para maestro a identificar el elemento matemático del problema al tener que analizar las respuestas de los estudiantes. Este resultado sugiere que el hecho de presentar respuestas de estudiantes con diferentes características puede ayudar a los estudiantes para maestro a reconocer los elementos matemáticos relevantes en el problema y a interpretar la comprensión de los estudiantes.

Por otro lado, si nos fijamos en qué sub-constructos son los que han tenido más o menos éxito en el Cuestionario 1 y qué sub-constructos son los que han marcado las características de cada perfil (Cuestionario 2), estos sí que coinciden. Esto muestra que solamente aquellos estudiantes para maestro que fueron capaces de distinguir entre situaciones proporcionales y no proporcionales y resolver algunos de los problemas de comparación de razones, es decir, resolver problemas centrados en lo conceptual y no en los procedimientos, fueron capaces de identificar los elementos matemáticos relevantes del problema y reconocer características de la comprensión en el dominio de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales (Perfil 2) y en la comparación de razones (Perfil 3). Y, aquellos que solamente tuvieron éxito en los problemas que se podían resolver mediante procedimientos tuvieron más dificultades en la identificación de los elementos matemáticos y el reconocimiento de las características de la comprensión (Perfil 0, que no identifica ni reconoce, y Perfil 1, que solo identifica y reconoce algunos sub-constructos del esquema fraccionario).

Presentamos a continuación un ejemplo del comportamiento de un estudiante para maestro del Perfil 1 en el cuestionario sobre conocimiento matemático y en el cuestionario sobre reconocer la comprensión de los estudiantes (Figura 4.17).


1. Parte-todo

$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{12}{18}$

$\frac{2}{3}$ es la fracción irreducible de $\frac{12}{18}$.

2. Medida-recta numérica

Partimos el n.º 2 en 10 unos. Por lo tanto $\frac{2}{10} = 0'2$

3. Medida-densidad

$\frac{3}{17} = 0'17$

$\frac{2}{11} = 0'18$

$\frac{3}{17}$ y $\frac{2}{11}$ estarían entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{5}$.

4. Cociente

Cada uno come

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$

5. Razonamiento up and down

No sé.

6. Operador

No me acuerdo

7. Problema valor perdido proporcional

Cuando R = 40, J = 120, es decir, produce el triple.

Por lo tanto si R = 200, J será el triple también,

200 x 3 = 600 tornillos

J = 600.

8. Problema valor perdido no proporcional

Cuando A = 40, B = 80, es decir, el doble. Por lo tanto si A = 120, B = 240

B → 120 x 2 = 240 cajas

9. Pensamiento relacional

Sí que habrían crecido la misma cantidad 30 cm.

Existe una razón de proporcionalidad entre las cantidades.

(+30, +10)

10. Proceso unitizing

3'36 € : 16 kg = 0'21 € vale 1 kg → A

2'64 € : 12 kg = 0'22 € vale 1 kg → B

La caja A es más barata, porque 1 kg = 0'21 € y en la caja B 1 kg = 0'22 €

11. Covarianza-cualitativo

No sé.

12. Razón

$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

El C es el más cuadrado, porque ambos pueden dividirse por el mismo n.º y por lo tanto pueden aumentar o disminuir el tamaño con la misma razón de proporcionalidad

Figura 4.17. Respuesta del E008 al Cuestionario 1

Este estudiante para maestro resuelve correctamente los problemas del Cuestionario 1 del esquema fraccionario (excepto el razonamiento up and down y operador), el problema sobre el proceso unitizing y el problema de valor perdido proporcional, pero no el resto de los problemas, es decir, resuelve con éxito los problemas más procedimentales. En el problema *parte-todo* realiza fracciones equivalentes, en *medida-recta numérica*, *medida-densidad* y *proceso unitizing* usa divisiones y en el *problema de valor perdido proporcional* usa la idea de "triple", pero no distingue las situaciones no proporcionales ya que en el *problema de valor perdido no proporcional* usa la idea de "doble" incorrectamente. En el problema sobre *pensamiento relacional* usa una estrategia aditiva y una estrategia sin sentido en el problema de *razón*. Además, no resuelve correctamente los problemas de reconstrucción de la unidad (*razonamiento up and down* y *operador* inverso) ni sabe resolver el problema de *covarianza-cualitativo*.

En cuanto al Cuestionario 2 (identificar los elementos matemáticos relevantes del problema y reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes) (Figura 4.18), este estudiante para maestro identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto el razonamiento up and down y operador) y reconoce algunas características de la comprensión de los estudiantes en estos problemas. Sin embargo, no identifica ni reconoce características de la comprensión en el resto de sub-constructos (característica del Perfil 1).

Así en relación a las diferentes respuestas de los estudiantes a los problemas indica que, en el problema *parte-todo* reconoce la relación entre el todo y las partes congruentes, el uso del operador por parte del estudiante 2 "*al coger 2/3 es lo que tiene que coger y tiene 18 canicas*", y que el estudiante 3 "*no tiene en cuenta el todo*". En el problema *medida-recta numérica* reconoce el uso de la fracción unitaria y la búsqueda de la unidad en la respuesta del estudiante 1 y el uso del operador en la respuesta del estudiante 2, y en la respuesta 3 la identificación incorrecta del todo. En el problema de *medida-densidad* reconoce la necesidad de obtener varias fracciones equivalentes para encontrar las fracciones comprendidas entre las dadas. Y en el problema *cociente* reconoce las diferentes estrategias usadas por los estudiantes ("*adjudica 1 pizza para cada persona" y "de cada pizza le da un trozo a cada persona"*).

Sin embargo, este estudiante para maestro no reconoce características de la comprensión de los estudiantes del problema *operador* ni del *razonamiento up and down* perteneciente también al esquema fraccionario (en la respuesta 3 comenta "*justifica la respuesta buscando la unidad y utilizando la fracción como operador*" y entre las otras dos no diferencia que un estudiante no representa la fracción pedida). Tampoco reconoce diferencias en cómo los estudiantes resuelven los problemas de distinción de situaciones proporcionales y no proporcionales ni en los problemas de comparación de razones, proporcionando una descripción basada en los procedimientos y dejando algunas respuestas en blanco sin mostrar evidencias de las características entre cada una de las respuestas (problemas de valor perdido proporcional y no proporcional).

1. Parte-todo
"a) Es necesario saber interpretar la parte-todo y medida, porque necesitan reconocer el todo y dividir un todo en partes congruentes. También necesitan conocer el contexto discreto.
b) R1: Utiliza la fracción como parte-todo y lo hace de forma correcta, porque identifica los 2 grupos necesarios dentro del conjunto que se le da.
R2: Utiliza la fracción como operador, porque modifica la situación inicial para conseguir la final. Lo hace correcto porque interpreta que 2/3 es lo que tiene que coger y tiene 18 canicas.
R3: La respuesta es incorrecta. Cree que cada grupo tienen 3 bolas y que tiene que coger dos grupos. No tiene en cuenta el todo que se la ha dado."

2. Medida-recta numérica
"a) Fracciones y fracciones equivalentes.
b) R1: Identifica la fracción unitaria. Busca la unidad y después da el resultado.
R2: Utiliza la fracción como operador.
R3: Identifica incorrectamente el todo y dice que es X es 15/19 veces esa fracción."

3. Medida-densidad
"a) Fracciones. Fracciones equivalentes.
b) R1: Busca fracciones equivalentes y después las fracciones comprendidas entre estas nuevas fracciones obtenidas.
R2: Saca fracciones equivalentes, pero necesita obtener más; porque este resultado no le permite averiguar 2 fracciones, solo una.
R3: Saca el m.c.m., pero necesita obtener más fracciones equivalentes para poder resolver el ejercicio."

4. Cociente
"a) Es necesario interpretar la fracción como cociente, ya que hay que hacer un reparto equitativo.
b) R1: Hace partes congruentes, porque son 4 personas. El reparto la hace de forma que adjudica 1 pizza para cada persona y lo que le sobra para la otra persona que le falta.
R2: El reparto es diferente a los demás. Divide cada pizza en 4 partes (según las personas) y de cada pizza le da un trozo a cada persona.
R3: Hace el m.c.m entre pizzas y personas para saber en cuántas partes tiene que dividir las pizzas y así saber cuánto le toca a cada uno. No hace partes congruentes"

5. Razonamiento up and down
"a) Es necesario interpretar la fracción como parte-todo e identificar el todo.
b) R1: Justifica la respuesta buscando la unidad, utilizando la fracción como parte-todo.
R2: Lo hace igual que el anterior, es decir, utilizando la fracción como parte-todo pero de forma gráfica.
R3: Justifica la respuesta buscando la unidad y utilizando la fracción como operador."

6. Operador
"No se lo que hay que hacer."

7. Problema valor perdido proporcional
"a) Proporcionalidad, razones externas o internas.
b) R1: Utiliza el enfoque funcional, relacionado los tornillos de R y los de J.
R2:
R3: Utiliza una estrategia incorrecta para un problema de proporcionalidad."

8. Problema valor perdido no proporcional
"a) No es un problema de proporcionalidad, es aditivo.
b) R1: Utiliza una estrategia aditiva.
R2:
R3: Utiliza la proporcionalidad para un problema aditivo por lo tanto es incorrecto."

9. Pensamiento relacional
"a) Proporcionalidad, cambios relativos.
b) R1: Cambios absolutos.
R2: Cambios relativos
R3: Cambios relativos."

10. Proceso unitizing
a) Proporcionalidad, razones internas y externas.
b) R1: Relaciona ambas magnitudes (€ y kg) mediante relaciones externas.
R2: Realiza una regla de 3, calculando cuánto valdrían 12kg

11. Covarianza-cualitativo
"a) Proporcionalidad.
b) R1: Correcto, utiliza un pensamiento proporcional.
R2: Ambas respuestas son incorrectas.
R3: Establece relaciones, pero no concluye de forma correcta."

12. Razón
"a) Razones internas (metros – metros)
b) R1: Relaciona ambas cantidades mediante una razón interna y lo hace de forma correcta.
R2: Calcula razones internas, pero su explicación no es

Figura 4.18. Respuesta del E008 al Cuestionario 2

Protocolos como este sugieren que el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro y su capacidad de reconocer evidencias de la comprensión en los estudiantes está vinculada al carácter procedimental o conceptual de los sub-constructos considerados en los problemas planteados.

CHAPTER 5. CONCLUSION AND DISCUSSION

CHAPTER 5. CONCLUSION AND DISCUSSION

This study follows in the line of research on pre-service teachers' knowledge, how they interpret students' understanding, and how they thus make teaching decisions, applying this research area to the specific domain of proportional reasoning. Therefore this study focuses on characterising how pre-service teachers interpret students' answers and how this interpretation relates to their own mathematical knowledge of the sub-constructs involved in proportional reasoning.

To understand this relationship, our analysis focused not only on how pre-service teachers solved problems related to fractional scheme's sub-constructs, distinction between proportional situations and ratios in comparison situations, but also how they identified relevant mathematical elements in each problem, how they interpreted students' answers who present different characteristics of understanding, and how they made decisions based on the identification of this understanding.

In the following sections we discuss our findings and the way they relate to previous studies, providing answers to our research questions below:

(i) How do pre-service teachers solve proportional reasoning problems?

(ii) How do pre-service teachers identify mathematical elements associated with sub-constructs of the proportional reasoning and how do they use those elements to interpret students' answers to these problems?

(iii) What kind of decisions do pre-service teachers make to help students progress conceptually taking into account students' understanding?

(iv) What is the relationship between how pre-service teachers solve problems and how they interpret students' answers?

We conclude by highlighting implications for teacher training and future research.

5.1. PRE-SERVICE TEACHER'S MATHEMATICAL KNOWLEDGE

Results on pre-service teacher's specialised mathematical knowledge are presented over a two-fold discussion as follows: (i) the extent to which pre-service teachers know the sub-constructs involved in the development of proportional reasoning and (ii) characteristics of pre-service teacher's mathematical knowledge of these sub-constructs.

5.1.1. Pre-service teacher's specialised knowledge of the different sub-constructs involved in proportional reasoning

Results indicate that pre-service teachers succeeded in sub-constructs in which a previously learned procedure could be applied such as the rule of three or the division algorithm. However, they had difficulties with sub-constructs requiring conceptual understanding, that is, when sub-constructs implied recognising the relationship between quantities and where a learned procedure could not be applied. Thus, pre-service teachers successfully solved problems associated with part-whole, measure-number line and quotient (in fractional scheme), missing value proportional problem (in distinction between proportional and non-proportional situations) and the problem linked to the unitizing process (from the ratio comparison domain). Nonetheless, they had difficulties with problems that required rebuilding the unit (inverse operator and reasoning up and down), recognising a non-proportional situation and quantitative and qualitative comparison situations. These difficulties resemble those encountered in previous studies that specifically examined some of these sub-constructs: Buforn and Fernández (2014b) and Lee et al. (2011) on the understanding of the idea of unit and on the constitution of multiple units to construct improper fractions; Gómez and García (2014) and Livy and Vale (2011) on the interpretation of ratio in comparison situations; Buforn and Fernández (2014a) and Valverde and Castro (2009) on the recognition of proportional situations. The cluster analysis corroborates this result by showing four sub-constructs that do not distinguish groups: the part-whole relationship, measure-number line, quotient-division situation and the unitizing process that had the highest success rate and involved learned procedures.

This characteristic was transversally shared by all three domains concerned (fractional scheme, distinction between proportional and non-proportional situations, and ratio in comparison situations), indicating that the procedural-conceptual characteristic determines what mathematical knowledge is necessary to teach beyond immediate mathematical domains concerned. This feature was previously identified in a study showing that teachers employed two types of knowledge when solving proportional problems: *structural mathematical reasoning* using algorithms, rules and properties; and *quantitative reasoning* in which quantities and relationships between quantities are used (Lobato et al., 2011). This suggests that pre-service teachers do possess mathematical knowledge of concepts involved in procedural proportional reasoning independently of the particular domain under consideration. This outcome in turn seems to indicate that pre-service teachers often rely on procedural explanations to justify their solution strategies and will show little flexibility in the use of alternative strategies (Berk, Taber, Carrino-Gorowara, and Poetzl, 2009; Son, 2013). Nevertheless, although they have not developed conceptual understanding of fraction, ratio and proportion concepts, they may succeed in some more procedural problems that support the development of proportional reasoning.

5.1.2. Characteristics of pre-service teacher's specialised knowledge of sub-constructs involved in proportional reasoning

The way the knowledge profiles emerged revealed three characteristics of pre-service teacher's specialised knowledge. First of all, profiles were partially nested (Figure 5.1). Profile 1 is characterised by solving problems relating to all four sub-constructs common to all profiles and by solving missing value proportional problems. Pre-service teacher performance in this type of problems can be attributed to the algorithmic procedure usually introduced in schools to solve proportional problems (the rule of three, cross-multiplying elements in equal ratios). However, the fact that teachers used this procedure and produced a correct answer in proportional situations does not imply they were able to distinguish whether the relationship between quantities in a given situation was proportional or not (because pre-service teachers with this profile did not correctly solve the missing value non-proportional problem). Profile 3 was characterised by the four common sub-constructs and by the ability to solve the missing value non-proportional problem (additive, in this case). This group of pre-service teachers was equally unable to distinguish proportional from non-proportional situations (because they were not successful at solving the missing value proportional problem). The main characteristic of this pre-service teacher category was that they used an additive reasoning in situations that required a multiplicative reasoning, showing difficulties with the transition from additive to multiplicative thinking.

Compared to profile 1, profiles 2 and 4 presented the added ability to distinguish proportional from non-proportional situations. This shows that the ability to recognise proportional or non-proportional relationships between quantities in a situation is a key element in shaping teacher knowledge in the domain of proportional reasoning. The difference between profile 2 and profile 4 is that profile 2 added to profile 1 the extra ability to coordinate the recognition of a fraction as a multiple unit to reconstruct the whole, and the use of the unit fraction as an iterative unit to represent a fraction (reasoning up and down sub-construct). This capacity represented a high level of understanding of the fraction concept from the perspective of part-whole in a measure context as it related to the concept of fraction as an iterative unit. It is necessary to develop this type of reasoning to consolidate the fractional scheme (Steffe and Olive, 2010). Therefore, understanding this sub-construct is a key element in the characterisation of pre-service teacher's specialised knowledge. However, it seems that the understanding of fractional scheme was not consolidated as pre-service teachers with this profile obtained a 0% success rate in the (inverse) operator problem. Results suggest that the idea of fraction as inverse operator was not linked to the ratio concept with little contribution to the development of proportional reasoning. This is significant, because when the problem posed involves the direct operator then the idea of ratio is more strongly related (Pitta-Pantazi and Christou, 2011). Profile 4 added to profile 1 success in conceptual aspects of ratio and fraction such as the sub-constructs: operator, ratio as comparative index, relative thinking and covariance-qualitative.

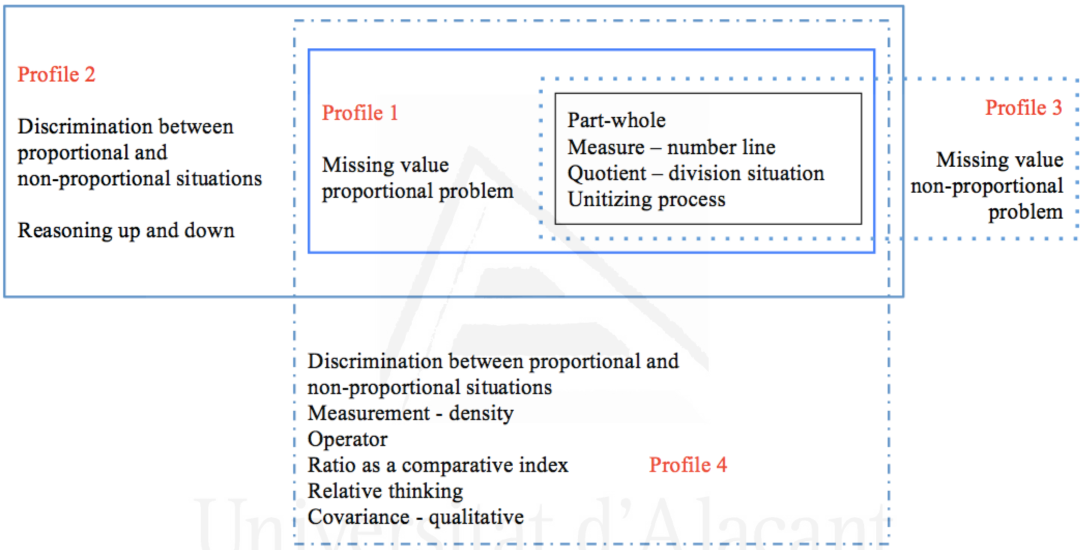


Figure 5.1. Nestedness of pre-service teacher knowledge profiles relating to proportional reasoning sub-constructs

Thus, the way these knowledge profiles were nested characterises how pre-service teachers know the different sub-constructs. Pre-service teachers begin by solving problems with the most procedural solutions (based on multiplicative reasoning - profile 1, or on additive reasoning - profile 3), then pass on to distinguish proportional and non-proportional situations, and finally begin to acquire meanings related to the conceptual understanding of ratio and proportion.

The second characteristic revealed some dissociation between the knowledge of the procedures involved in proportional reasoning (for example, ratio as the division of two quantities or use of the rule of three) and the meanings of the idea of ratio not directly linked to procedures (ratio as comparative index, relative/absolute thinking and the covariance idea). This was observed in profiles 1 and 3, where pre-service teachers were able to solve problems through procedures that were not linked to the meanings of fraction, ratio or proportion but were not able to distinguish proportional from non-proportional situations, nor solve problems involving the meaning of ratio when not linked to a procedure.

Third, results indicate that reasoning up and down is not related to sub-constructs linked to the meaning of ratio. This is evidenced in profiles 2 and 4 that were differentiated by success in the reasoning up and down sub-construct or by success in sub-constructs related to the meaning of ratio. However, since the ability to coordinate the recognition of a fraction as a multiple unit to reconstruct the whole and the use of the unit fraction as an iterative unit to represent a fraction (reasoning up and down) is a key element (KDU) for the consolidation of fractional scheme, these results can define areas of focused attention for teacher trainers.

These knowledge profile characteristics suggest that the learning of mathematical knowledge necessary to support the development of proportional reasoning goes beyond posing proportions problems and calculating correct solutions to missing value proportional problems (Cramer et al., 1993; Vergnaud, 1988). In particular, necessary complementarity between profiles 1 and 3 on the one hand, and 2 and 4 on the other, is proposed as a learning objective in teacher training programs and is supported by acquiring knowledge on the procedures associated with understanding, flexibility and critical judgment of the relevance of the use of proportionality in certain situations (Star, 2005). Thus, placing the focus on the relationship between the procedure and the relevance of its use in relation to the identification of the relationships between quantities and co-variation may lead to distinguish proportional from non-proportional situations to be seen as a conceptual step forward in pre-service teacher's knowledge. This approach in teacher training may allow merging conceptual and procedural aspects in the development of proportional reasoning knowledge and represent key knowledge needed to teach mathematics.

5.2. PRE-SERVICE TEACHERS' PROFESSIONAL NOTICING IN PROPORTIONAL REASONING

These outcomes allow us to discuss two relevant questions: (i) what relationships exist between the ability to identify key elements of the problem, interpret students' mathematical understanding, and make decisions to help students progress conceptually, and (ii) inferring different stages in pre-service teachers' learning processes from their ability to identify key mathematical elements in problems, and based on this identification, recognising characteristics of students' understanding over the different sub-constructs involved in proportional reasoning.

5.2.1. Relationship between the ability to identify key elements of the problem, to interpret students' understanding, and to decide how to respond

Results in this section lead to two interesting outcomes. First, they highlight pre-service teacher difficulty in identifying and using the mathematical elements associated with the development of proportional reasoning to generate an articulated discourse on the problem's mathematics and on students' mathematical understanding. Second, results point to the existence of relationships between the way in which pre-service teachers recognise evidence of students' understanding of the sub-constructs involved in the development of proportional reasoning, and the activities they propose towards their development and consolidation.

5.2.1.1. Relationship between identifying the mathematical elements of the problem and recognising characteristics of students' understanding

Our results show that pre-service teachers who recognised evidence of students' understanding based on the mathematical elements implicit in the answers, had also previously identified them in the problem. This fact suggests that identifying the key mathematical elements of the problem is a necessary condition for recognising characteristics of students' understanding. That is, pre-service teachers who are able to identify students' understanding of key mathematical elements as a key developmental understanding (KDU, Simon, 2006) rely on prior identification of the mathematical elements of the problem. However, identifying the mathematical elements in the problem does not necessarily imply using them to describe students' understanding. This second fact suggests that to be able to identify mathematical elements is not a sufficient condition to suitably interpret students' mathematical thinking. One possible explanation for this is that pre-service teachers may be able to identify the key mathematical elements of the problem but not know how to use this knowledge to interpret students' understanding. In other words, they know how to identify the key mathematical elements in the problem, but not to recognise their understanding as a conceptual advance (KDU). Another possible explanation is that pre-service teachers may actually believe that students' answers are "right or wrong" (i.e., understood or not understood) (Copes, 1982).

These results are compatible with findings from previous studies showing that the identification of relevant mathematical elements in a problem improves pre-service teachers' ability to recognise students' understanding (Bartell et al., 2013, Callejo and Zapatera, (1998), Sánchez-Matamoros et al., 2015), emphasising the existence of a relationship between mathematical knowledge and the knowledge of mathematics and students (Bartell et al., 2013; Spitzer, Phelps, Beyers, Johnson and Sieminski, 2011).

On the other hand, previous research related to the interpretation of students' answers in the domain of proportional reasoning shows that teachers have difficulties in recognising and explaining students' answers in particular domains or sub-constructs such as: missing value problems (Lobato et al., 2011; Rivas et al., 2012; Son, 2013); distinction between proportional and non-proportional situations (Fernández et al., 2012); part-whole fractions (Ivars et al., 2016); and equipartitioning problems (Wilson et al., 2013). Our results deepen this prior finding by seeking to understand relationships between the different sub-constructs or domains of proportional reasoning, thus revealing that not all the sub-constructs have the same level of difficulty. Our results indicate that pre-service teachers had less difficulty in identifying the mathematical elements of the problem and recognising characteristics of students' understanding in the case of the following sub-constructs: fractional scheme, relative thinking, missing value proportional problem, and missing value non-proportional problem. However, they had more difficulty in identifying the relevant mathematical elements and recognising students' understanding in the operator and covariance-qualitative sub-constructs since most pre-service teachers did not understand student's answers to these problems. These findings indicate that tasks where pre-service teachers had to distinguish between an additive or multiplicative thought in students' answers facilitated the recognition of the characteristics of student's understanding. However, when it was necessary to know the concepts involved (idea of unit, ratio. etc.), it became more difficult. In this sense, these results support findings by Bartell et al. (2013) and Spitzer et al. (2011) providing evidence of the role played by the differentiation by pre-service teachers of conceptual and procedural understanding of mathematical elements in the recognition of students' understanding. Therefore, this importantly implies that the recognition by pre-service teachers of students' understanding depends not so much on their mathematical knowledge, but on the way in which the pre-service teacher knows these mathematical elements conceptually or procedurally. While these previous studies had pinpointed the relationship between pre-service teachers' mathematical knowledge and their ability to recognise students' understanding of procedural behaviours or not, our results indicate that coming to recognise whether procedural behaviour in students may or may not involve understanding of the mathematical element, depends on the way pre-service teachers themselves know the mathematical content (procedurally or conceptually).

These results on how pre-service teachers know and recognise procedural and conceptual aspects of student answers help us understand the nature of their choice of teaching interventions, i.e. to understand the decisions that pre-service teachers propose to help students progress in their learning. This aspect is discussed in the next section.

5.2.1.2. Relationship between identifying the key elements of the problem, recognising characteristics of students' understanding and deciding how to respond

Our results bring to light three aspects relating to the ability to suggest activities to support and consolidate the development of proportional reasoning based on students' understanding. First of all, teachers had difficulty in proposing activities centred on relevant mathematical elements when they had not previously identified them, as evidenced by the number of nonsense or blank answers, and general or focused proposals to "re-explain the content". This finding is compatible with previous research results showing that decision-making seems to focus on "re-teaching" (Cooper, 2009) or teaching students how to do it correctly (Son, 2013), rather than focusing on supporting understanding of the relevant mathematical elements of the problem (KDUs) that make them progress in their learning. In particular, these results indicate that the lack of ability to identify the mathematical elements in the problem fed the lack of ability to respond to students adequately (Son, 2013).

Second, our results suggest that when pre-service teachers identified the relevant mathematical elements of the problem and the reflection of their understanding in students' answers (KDU), they were more able to propose activities centred on the meaning of the sub-construct (i.e., decisions based on a more conceptual perspective). This is evidenced by the increase in number of proposals focused on modifying the activity according to the meaning of the sub-construct in accordance with the incorporation of domains of proportional reasoning in the profiles and with the decrease in nonsense or blank answers. However, the fact that some pre-service teachers were able to recognise signs of understanding of key mathematical elements in problems but proposed teaching actions that were not necessarily meaning focused, points to how complex the relationship can be between the ability to identify mathematical elements in a problem, the ability to recognise evidence of their understanding in students' answers, and the ability to decide how to respond (Son, 2013).

Finally, pre-service teachers had more difficulty in proposing activities to consolidate understanding than in proposing activities to support the progress of proportional reasoning. This result supports previous findings (Zapatera, 2015), suggesting that it is more difficult to provide tasks to improve students' understanding than tasks that help students if they do not understand mathematical concepts.

So far, previous research had shown the interrelationship between all three skills (identifying, interpreting, and deciding) revealing that the skill of identify came before the skill of interpret, and the skill of interpret in turn preceded the ability to decide how to respond based on student's understanding (Jacobs et al., 2010; Barnhart and van Es, 2015). Furthermore, with practice, all three can be developed (Schack et al., 2013). In our study, all three aspects discussed above uncovered that the relationships between these three skills were complex. In addition, we disclosed the existence of a tendency to increase the number of proposals aimed at modifying the activity focused on sub-construct meanings (both to help students who had not understood and to extend knowledge when they had understood) when pre-service teachers were able to identify the mathematical elements of the problem and to recognise characteristics of students' understanding. This result shows that identifying key elements of the problem as a key developmental understanding (KDU, Simon, 2006) helps pre-service teachers make decisions based on the identification of this understanding.

One implication of these outcomes for teacher training is that in order for pre-service teachers to provide activities that allow students to progress, they should know the successive progression steps in the understanding of mathematical elements. This could be achieved in teacher training by providing "observation guides" to pre-service teachers (Ivars, Buforn, Llinares, 2017; Santagata and Angelici, 2010; Wilson et al., 2013).

5.2.2. Different stages in pre-service teachers' learning process to identify key mathematical elements in problems and to recognise characteristics of students' understandings

The profiles obtained, after the cluster analysis and the refinement, led to several observations. On the one hand, the fact that 52 out of 72 pre-service teachers classified in the different profiles were able to identify the key mathematical elements of fractional scheme problems and began to recognise characteristics of students' understanding in some of these problems, suggests that the characteristics of the learning environment and set tasks helped pre-service teachers focus on specific aspects of students' problems and answers and recognise characteristics of understanding. In this sense, unlike in the case of studies such as Mellone, Tortora, Jakobsen and Ribeiro (2017) or Son (2013) that focused only on the interpretation of incorrect answers, we found that presenting students' answers with different (both correct and incorrect) characteristics helped pre-service teachers structure their noticing, and enabled them to recognise characteristics of students' understanding.

Characteristics of obtained profiles allow us to infer different development stages in the ability of pre-service teachers to interpret student's mathematical thinking related to sub-constructs involved in the development of proportional reasoning. Thus, these stages show a possible development path in the skill of noticing students' thinking in the domain of proportional reasoning (Figure 5.2).

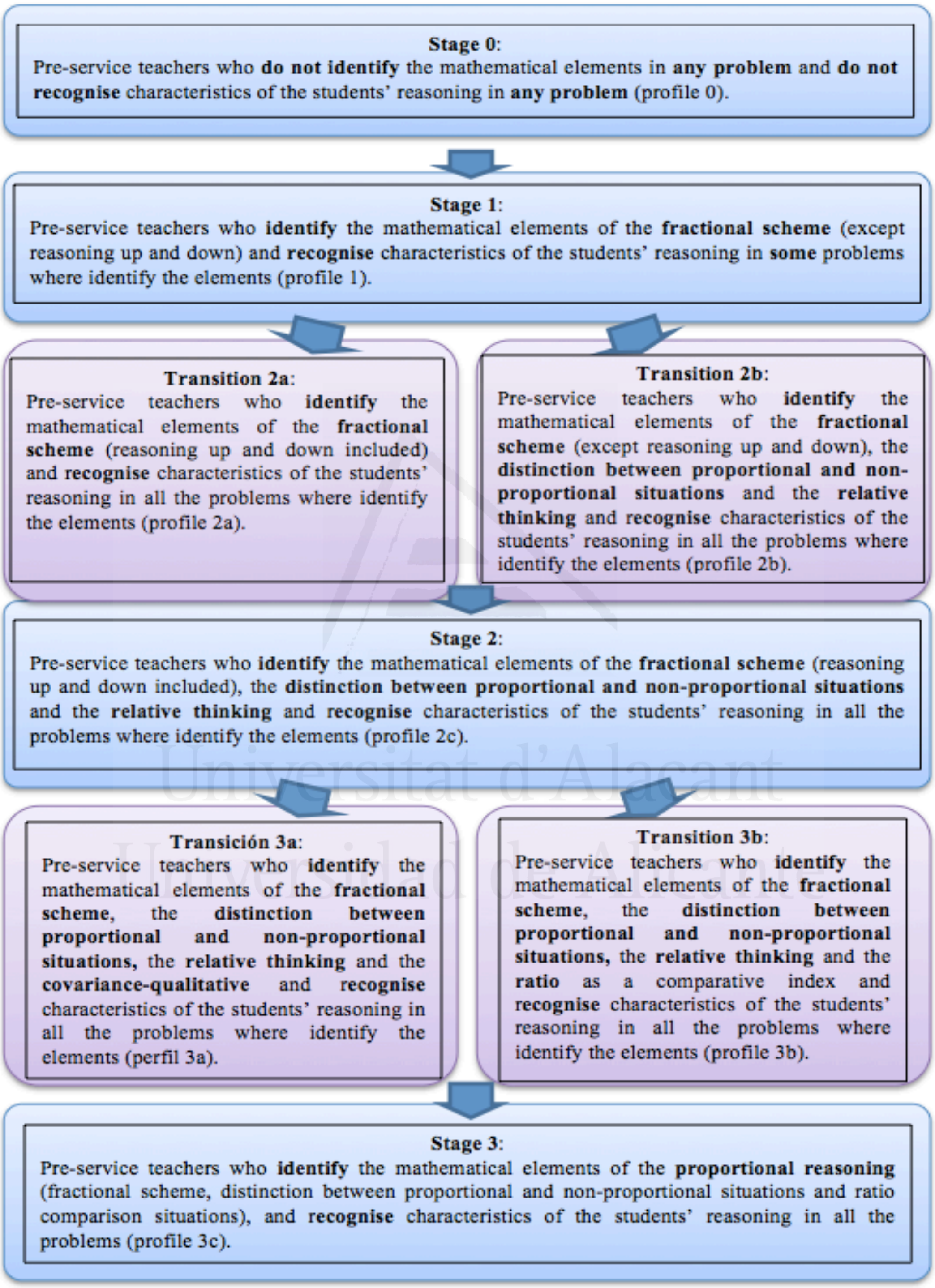


Figure 5.2. Different stages in the learning process of pre-service teachers in identifying the key mathematical elements of problems and recognising characteristics of students' understanding

Pre-service teachers at Stage 0 would not be able to identify the relevant mathematical elements of the problem or recognise characteristics of students' understanding. Pre-service teachers at Stage 1 would be able to identify the mathematical elements of fractional scheme problems (with the exception of reasoning up and down) but would only be able to recognise characteristics of students' understanding in some fractional scheme problems.

In order to reach stage 2, where pre-service teachers would be able to identify the mathematical elements of the fractional scheme, distinction between proportional and non-proportional situations and relative thinking and recognise characteristics of students' understanding of these problems, there are two possible transitions. One possible path is the identification of fractional scheme mathematical elements including reasoning up and down and the recognition of students' understanding of these problems (Transition 2a). The other path is the identification of the mathematical elements of the fractional scheme (except reasoning up and down), distinction between proportional and non-proportional situations, and relative thinking, as well as the recognition of students' understanding of these problems (Transition 2b).

Pre-service teachers at Stage 3 would be able to identify, in addition to the mathematical elements identified by pre-service teachers at stage 2, the remaining sub-construct elements belonging to the domain of interpretation of ratios in comparison situations and recognise characteristics of students' understanding of these problems. However, there are also two possible ways to reach stage 3. One possible path is when pre-service teachers are able to identify the mathematical elements of the fractional scheme, distinction between proportional and non-proportional situations, relative thinking and the covariance-qualitative sub-construct, and recognise characteristics of students' understanding of these problems (Transition 3a). The other way would be to identify elements of fractional scheme, distinction between proportional and non-proportional situations, relative thinking and ratio sub-construct as a comparative index, and the recognition of students' understanding of these problems (Transition 3b).

All pre-service teacher profiles were indeed able to identify the idea of operator when it appeared in answer 2 of the *part-whole* problem and in answer 2 of the *measure-number line* problem although they failed to recognise characteristics of students' understanding in the *operator* problem since the underlying idea is that of inverse operator (this sub-construct did not influence the profiles obtained after the cluster analysis and the refinement). Bearing this in mind, we can say that Profile 3c completed all domains of proportional reasoning (fractional scheme, distinction between proportional and non-proportional situations and ratio in comparison situations). More specifically, pre-service teachers were able to identify the mathematical elements in all the sub-constructs involved in proportional reasoning and used them to recognise characteristics of students' understanding. The fact that the idea of operator was indeed taken into consideration but not the inverse operator seems to indicate that this sub-construct (inverse operator) did not provide information on the development of proportional reasoning as it happened in questionnaire 1 (about mathematical knowledge). Nevertheless, considering that pre-service teachers did identify and recognise the (direct) operator in students' answers suggests that the sub-construct operator is linked to reasoning proportional as shown by Pitta-Pantazi and Christou (2011) when they validate Lamon's model of proportional reasoning (2007).

The profiles indicate that recognising students' understanding characteristics in this mathematical domain depended on the different sub-constructs involved in proportional reasoning. Thus, for pre-service teachers it was easier to identify and use mathematical elements to recognise characteristics of students' understanding of problems related to the fractional scheme (except operator and reasoning up and down), while those related to reasoning up and down, distinction between proportional and non-proportional situations and relative thinking were more difficult. However the latter, in turn, were easier than the mathematical elements relating to the remaining sub-constructs of the ratio in comparison situations. One possible justification for relative thinking to be incorporated at the same time as distinction between proportional and non-proportional situations is that this problem required distinguish between absolute thinking (additive approach) and relative thinking (multiplicative approach), just as problems related to distinguish between proportional and non-proportional situations required differentiating between proportional strategies (multiplicative approach) and additive strategies.

Furthermore, some of these sub-constructs corresponded to those that characterised each of the transitions to the different stages. Thus, the identification and recognition of students' understanding of reasoning up and down, distinction between proportional and non-proportional situations, and relative thinking sub-constructs would be considered a KDU (Simon, 2006) for pre-service teachers as it reflected a conceptual advance to move to Stage 2. Likewise, the identification and recognition of students' understanding of the qualitative-covariance and ratio as a comparative index sub-constructs would also be considered to be a KDU (Simon, 2006) since it manifests a move to Stage 3. In this case, sub-constructs that enabled pre-service teachers to progress conceptually when they have to identify mathematical elements and recognise characteristics of students' understanding in the domain of proportional reasoning are being considered as KDUs. This means that KDUs are regarded as the sub-constructs allowing pre-service teachers to move from one stage to another.

Therefore, this research defines a possible path of development of the skill of noticing students' mathematical thinking in the domain of proportional reasoning. The stages obtained from the profiles suggest a process where pre-service teachers learn to notice students' mathematical thinking in the domain of proportional reasoning and provides us with information to design a learning trajectory of how students learn to notice students' mathematical thinking in the domain of proportional reasoning (Simon, 1995). Simon (1995) defines a hypothetical learning trajectory as follows:

> *"An hypothetical learning trajectory consists of the goal for the students' learning, the mathematical tasks that will be used to promote student learning, and hypotheses about the process of the students' learning"* (as cited in Simon and Tzur, 2004, p.93).

Based on this definition, the goal would consist in the development of the skill of noticing students' mathematical thinking in the domain of proportional reasoning, the learning process would consist in the stages and transitions obtained in this study, and the tasks to promote student's learning would correspond to tasks used in Questionnaire 2.

5.3. RELATIONSHIP BEWEEN MATHEMATICAL KNOWLEDGE AND PRE-SERVICE TEACHER INTERPRETATION OF STUDENT MATHEMATICAL THINKING

Results suggest that there is no linear relationship between pre-service teachers' knowledge of sub-constructs involved in proportional reasoning with how they identify mathematical elements or recognise characteristics of students' understanding. First of all, results show that possessing mathematical knowledge does not imply that these teachers are able to identify mathematical elements and recognise characteristics of students' understanding. This is evidenced in Profiles 0, 1 and 2 where pre-service teachers had knowledge of some sub-constructs, but were not able to identify relevant mathematical elements of the problems of those profiles or recognise characteristics of students' understanding.

Second, some pre-service teachers existed across all profiles who did not possess mathematical knowledge of some sub-constructs but later did know how to identify mathematical elements and use them to recognise characteristics of students' understandings in those problems. One explanation for this could be the task's designed format, since the fact of presenting three answers with different characteristics seems to have helped them to recognise characteristics of students' mathematical thinking. Another possible reason is that the module that had been taught between data collection of Questionnaire 1 and Questionnaire 2 where pre-service teachers were provided theoretical information from the literature on how elementary students understood concepts, acted as a guide to help pre-service teachers focus their attention on the mathematical elements of the problem and the characteristics of students' understanding. Therefore, it produced a learning experience for pre-service teachers.

Although there was no linear relationship between mathematical knowledge of pre-service teachers and how they recognised characteristics of students' understanding, if we look at which sub-constructs had more or less success in Questionnaire 1 and which sub-constructs marked the characteristics of each profile (Questionnaire 2), these did indeed coincide. Pre-service teachers succeeded solving problems in which they could apply a previously learned procedure, but had difficulties with problems requiring understanding of meanings related to the relation between quantities and in which a procedure was not available (reasoning up and down, operator, missing value non-proportional problem (they could not make the difference), relative thinking, ratio and qualitative-covariance). Likewise, they had greater difficulty in recognising characteristics of students' understanding in those situations in which students' answers showed some conceptual understanding but were not procedurally based. Thus, for pre-service teachers, it was easier to identify and use mathematical elements to describe understanding in problems related to the fractional scheme (except operator and reasoning up and down), than those related to distinguish between proportional situations and non-proportional and reasoning up and down. These, in turn, were easier than interpret ratios in comparison situations. This shows that rule-based knowledge to solve problems of proportionality contributes little to mathematical knowledge for teaching, i.e. it does not help to understand or explain answers given by students (Rivas et al., 2012). Consequently, these results indicate that the fact of possessing the procedural knowledge that helps solve problems does not imply being able to recognise the KDU of the problem (i.e. key mathematical elements that centre on the concept and not on the procedure).

These outcomes further indicate that pre-service teachers' mathematical knowledge and their ability to recognise evidence of students' understanding is linked to the procedural or conceptual nature of the sub-constructs considered in the problems posed (Hiebert and Lefevre, 1986; Star, 2005). This difficulty of pre-service teachers in recognising evidence of students' understanding when a procedure is not reflected has been found in other mathematical domains thus pointing to the existence of a characteristic of the skill of noticing students' mathematical thinking (Bartell et al. 2013; Son, 2013; Son and Crespo, 2009).

These outcomes suggest that teacher trainers should design learning opportunities for pre-service teachers that would allow them to reflect on how procedural or conceptual knowledge of some curricular domain determines how they can recognise characteristics of their students' understanding.

5.4. IMPLICATIONS FOR TEACHER TRAINING

In this study we characterised pre-service teachers' mathematical knowledge when solving mathematical problems and how they recognise characteristics of students' understanding in the specific domain of proportional reasoning.

Regarding pre-service teachers' mathematical knowledge when solving mathematical problems (Questionnaire 1), results showed that pre-service teachers can succeed in some procedural problems supporting the development of proportional reasoning without having developed a conceptual understanding of the ideas of fraction, ratio and proportion. This result highlights the necessary complementarity between profiles 1 and 3 and 2 and 4 (Figure 5.1) and can be considered a new learning objective in teacher training programs. The integration of problems of distinguishing between proportional and non-proportional situations and the problems that require the identification between the quantities to establish relations of proportionality, can be considered as a conceptual advance in teacher's knowledge, allowing to bring together conceptual and procedural aspects in the development of knowledge of fraction, ratio and proportion as a key aspect of knowledge required to teach mathematics.

Regarding the characterisation of the skill of noticing students' mathematical thinking in the specific domain of proportional reasoning (Questionnaire 2), we obtained four relevant findings.

The first one deals with the relationship between the skills of identifying, interpreting and deciding. Our findings show that identifying and interpreting students' answers, showing the importance of recognising what is considered a conceptual advance in student's learning (KDU, Simon, 2006), helps pre-service teachers make appropriate decisions according to previously identified students' understandings.

Second, we identified eight profiles reflecting a gradation of the skill of noticing. Different stages obtained from these profiles suggest a process of how pre-service teachers learn to notice the students' mathematical thinking in the domain of proportional reasoning and provides us with information to design a learning trajectory reflecting how pre-service teachers learn to notice the students' mathematical thinking in the domain of proportional reasoning (Simon, 1995). This possible trajectory could provide information to trainers to interpret the progress of pre-service teachers in the development of the skill of noticing students' mathematical thinking in this mathematical domain. In addition, the stages and transitions inferred from the profiles show which sub-constructs allow pre-service teachers to make conceptual advance (KDUs) when they have to identify mathematical elements and recognise characteristics of students' understanding in the domain of proportional reasoning.

Third, theoretical findings from literature on how elementary students understand concepts acted as a guide to help pre-service teachers focus their attention on the mathematical elements of the problem and the characteristics of students' understanding. This allowed them to identify relevant mathematical elements of the problem, to recognise characteristics of students' understanding, and to make appropriate decisions based on student's understanding.

Lastly, the way in which tasks were presented in Questionnaire 2 (one problem and three answers with different characteristics of understanding) helped pre-service teachers to learn to notice student's answers and take teaching decisions.

In summary, on the one hand, these results suggest that teacher trainers should design learning opportunities for pre-service teachers to allow them to reflect on how the procedural or conceptual knowledge of some curricular domains determines how they can recognise characteristics of students' understanding. On the other, obtained stages (from the profiles) provide a reference to constitute a learning trajectory on how pre-service teachers learn to notice students' mathematical thinking in the domain of proportional reasoning and could be implemented in teacher training modules.

5.5. FUTURE PERSPECTIVES

Bearing in mind a few limitations of this study, we now discuss ways to pursue this research in the near future.

We do not seek to generalise results of this study, since we addressed only a few characteristics of the sub-constructs involved in the development of proportional reasoning in the tasks that were set up. Nevertheless, the study's outcomes did unveil important features that training programs should take into account. In this sense, our research could be extended to cover continuous and discrete contexts in part-whole problems, integer and non-integer ratios in comparison problems, use of the meaning of (direct) operator, etc.

With respect to the fractions and proportional reasoning module, although specific information was provided on proportional reasoning mathematical elements and on the characteristics of students' understandings, it would be interesting to constitute a content guide, for example in the form of a learning trajectory. Indeed, recent research has shown that the use of learning trajectory as a guide help pre-service teachers identify relevant mathematical elements, recognise characteristics of students' understanding and make teaching decisions based on this understanding (Ivars et al., 2016).

Another method that could lead to further understanding of how pre-service teachers notice students' mathematical thinking could be the use of interviews. Interviews can provide information on aspects that pre-service teachers may not have taken into account or considered as relevant when responding to the questionnaire. Online discussions could also help pre-service teachers "notice" aspects they would not have paid attention to when reading their peers' contributions.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Balderas, R., Block, D. y Guerra, M.T. (2014). Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestro de secundaria. *Educación Matemática 26*(2), 7-32.

Ball, D.L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, *93*(4), 373-397.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barnhart, T. y van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: examining the relationship between pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, 45, 83-93.

Bartell, T.G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 57-79.

Behr, M., y Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. En T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2nd ed., pp. 201-248). Boston: Allyn y Bacon.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. En D. A. Grouws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 296–333). New York: MacMillan Publishing Company.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., y Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct. En T. P. Carpenter, E. Fennema, y T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 13–47). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1994). Units of Quantity: A conceptual Basis Common to Additive and Multiplicative Structures. En G. Harel y J. confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics (*pp. 123-180). New York: SUNNY

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T., y Silver, E. (1983). Rational-Number concepts. En R. Lesh y M. Landau (eds.) *Adquisition of Mathematics Concepts and processes*. (pp.91-126). Academic Press: Orlando.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T., y Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers’ strategies on a rational number as operator task. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 48–69.

Ben-Chaim, D., Fay, J. T., Fitzgerald, M. W., Benedetto, C., y Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experience. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 247–273.

Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C., y Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(3), 113-135.

Boyer, T. W. y Levine, S. C. (2012). Child proportional scaling: Is 1/3=2/6=3/9=4/12? *Journal of Experimental Child Psychology*, *111*(3), 516–533.

Buforn, A. y Fernández, C. (2014a). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de Primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA, 28*(48), 21-41.

Buforn, A. y Fernández, C. (2014b). La coordinación de la idea de unidad en la representación de fracciones impropias. *Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (pp.491-500). Baeza, CEAM. ISBN: 978-84-15641-08-7.

Callejo, M.L., y Zapatera, A. (2016). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, DOI 10.1007/s10857-016-9343-1.

Carraher, D. W. (1996). Learning about fractions. En L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 241–266). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Hasery M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Chapman, O. (2008). Narratives in mathematics teacher education. In D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (vol2, pp. 15-38). Taiwan/Rotterdam: Sense Publishers.

Charalambous, C.Y. y Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), 293–316.

Clarke, D.M. y A. Roche. (2009) Students' Fraction Comparison Strategies as a Window into Robust Understanding and Possible Pointers for Instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72*(1), 127-138.

Coles, A. (2013). Using video for professional development: the role of the discussion facilitator. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(3), 165-184.

Coles, A., Fernández, C. y Brown, L. (2013). Teacher noticing and growth indicators for mathematics teacher development. En Lindmeier, A. M. y Heinze, A. (Eds), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education* (vol. 2, pp. 209-216).Kiel, Germany: PME.

Confrey, J., Maloney, A. P., Wilson, P. H., y Nguyen, K. H. (2010). Understanding over time: The cognitive underpinnings of learning trajectories. En *Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association* Denver, CO.

Cooper, S. (2009). Preservice teachers' analysis of children's work to make instructional decisions. *School Science and Mathematics, 109*(6), 355–362.

Copes, L. (1982). The Perry development scheme: A methaphor for learning and teaching mathematics. *For the Learning of Mathematics, 3*(1), 38-44.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Proportional reasoning. *The Mathematics Teacher*. 86, 404-407.

Cramer, K., Post, T. y Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In Owens, D. T. (ed), *Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics*. (pp. 159-178). New York: MacMillan Publishing Company.

DeWolf, M. y Vosniadou, S. (2014). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction, 37*, 39-49.

Ekawati, R., Lin, F. y Yang, K. (2015). Developing an instrument for measuring teachers' mathematics content knowledge on ratio and proportion: A case of Indonesian primary teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(1), 1-24.

Eraut, M. (1996), *Developing Professional Knowledge and Competence*. Londres: The Falmer Press.

Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M.I. (2007). Fractions: conceptuals and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae. Mathematics. 7*, 81-116.

Fernández, A. (2009). *Razón y Proporción. Un estudio en la escuela Primaria*. DDM-Universitat de Valencia: Valencia

Fernández, C. (2010). *Características del desarrollo del razonamiento proporcional. Estrategias y mecanismos constructivos*. Tesis Doctoral. Universidad de Alicante, España.

Fernández, C. y Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes Educacionales, 15*(1), 11-22.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 15*(1), 9-33.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2008). Implicative analysis of strategies in solving proportional and non-proportional problems. En O. Figueras y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XXX North American* (vol. 3. pp. 1-8). Morelia, México: PME.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education, 44*, 747–759.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking. *The Mathematics Enthusiast, 10(1y2)*, 441-468.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., y Verschaffel, L. (2012). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *European journal of psychology of education*, *27*(3), 421-438.

Fernández, S. y Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 291-301). Lleida: SEIEM.

Freudenthal, H. (1983). Ratio and Proportionality. En H. Freudenthal, *Didáctical Phenomenology of Mathematical Structures* (pp. 178-209).D. Reidel Publishin Co: Dordrecht.

García M., S. Llinares S. y Sánchez-Matamoros G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 9(5), 1023-1045l.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION. Revista Iberoamericana de Educacion Matemática, 20, 1*3-31.

Godino, J. D., y Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. En *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3325-3326).

Gómez, B. (2016). Sobre el análisis didáctico de la razón. Investigación en Educación matemática. En Castro, E., Castro, E., Lupiáñez, J.L., Ruíz, J.F., y Torralbo, M. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico*. Granada: Editorial Comares.

Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Goldsmith, L. T. y Seago, N. (2011). Using classroom artifacts to focus teachers' noticing: Affordances and opportunities. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs, y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 169–187). New York: Taylor and Francis.

Hackenberg, A.J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 27–47.

Harel, G. y Behr, M. (1989). Structure and hierarchy of missing-value proportion problems and their representations. *Journal of Mathematical Behavior, 8*(1), 77-119.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER Nelson.

Heller, P., Ahlgren, A., Post, T., Behr, M. y Lesh, R. (1989). Proportional reasoning: The effect of two context variables, rate type and problem setting. *Journal for Research in Science Teaching, 26*(1), 205-220.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hill, H.C., Ball D.L., y Schilling S.G. (2008), Unpacking pedagogical content Knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hill, H., Sleep, L., Lewis, J. y Ball, D. (2007). Assessing Teachers' Mathematical Knowledge: What Knowledge matters and What Evidence Counts? En F.K. Lester Jr. (eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, NC: IAP-NCTM, pp. 111-156.

Hines, E., y McMahon, M. T. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strate- gies: observations from prospective teachers. *School Science and Mathematics, 105*(2), 88–105.

Ivars, P. y Fernández, C. (2015). Aprendiendo a mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el contexto de las prácticas de enseñanza. El papel de las narrativas. *ENSAYOS. Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1), 45-54.

Ivars, P., Buforn, A., y Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente". *Acta Scientiae, 18*(4), 48-66.

Ivars, P., Buforn, A. y Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En A. Salcedo (compilador), *Alternativas Pedagógica para la Educación matemática* *del Siglo XXI* (pp. 65-88). Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación: Carácas, Venezuela

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2015) Sharing narratives in online discussions, a context for helping pre-service teachers to develop the noticing skill. En *EDULEARN15 Proceedings* (pp. 3041-3049).

Jacobs, V.R., Lamb. L.C., y Philipp, R.A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Jiang, R., Li, X., Fernández, C., y Fu, X. (2016). Students' performance on missing-value word problems: a cross-national developmental study. *European Journal of Psychology of Education*, 1-20.

Kaput, J. y Maxwell, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel y J. Confrey (eds.) *The development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 237-292). New York: SUNNY Press

Kaput, J. y West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel y J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 235-287). New York: State University of New York Press.

Karplus, R., Adi, H., y Lawson, A. (1980). Intellectual development beyond elementary school XIII: Proportional, probabilistic, and correlational reasoning. *School Science and Mathematics, 80*(8), 673-83.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate'. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 219-233.

Khoury, H. A. (2002). Exploring proportional reasoning: Mr. Tall/Mr. Short. *Making sense of fractions, ratios and proportions: 2002 yearbook.*

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101–144). Columbus: ERIC-SMEAC.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162–181). Reston, VA/Hillsdale NJ: National Council of Teachers of Mathematics/Lawrence Erlbaum.

Kieren, T. (1992). Rational and Fractional Numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En G. Leinhardt; R. Putnam, y R. Hattrup (eds.) *Analysis of Arithmetics for Mathematics Teaching* (pp.323-372). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Asso.

Kieren, T.E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. En T.P. Carpenter, E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49-84). Hillsade, NJ: Erlbaum.

Lamon, S. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. En J.T. Sowder y B.P. Schappelle (Eds.). *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades*. Albury, NY: State University of NY Press.

Lamon, S. J. (1996). The Development of Unitizing: Its Role in Children's Partitioning Strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 170-193.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teacher*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. In F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC.

Lee, S. J., Brown, R. E. y Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(3), pp. 198-220.

Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2), 22-43.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M.C. Chamorro (ed.). *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 187-220). Madrid: Pearson – Prentice Hall.

Llinares, S. (2013). Professional Noticing: A component of the mathematics teacher's profesional practice. *Sisyphus., Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Llinares, S., Fernández, C., y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(8), 2155-2170.

Lobato, J., Orrill, C., Druken, B., y Jacobson, E. (2011, April). *Middle school teachers' knowledge of proportional reasoning for teaching*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), New Orleans, LA.

Magiera, M.T., van den Kieboom, L.A. y Moyer, J.C. (2013). An exploratory study of pre-service middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 93-113.

Marshall, S. P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. En T. P. Carpenter, E. Fennema, y T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 261–288). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (1998). Enabling Teachers to be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of Attention. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(3), 243-267.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

McCloskey, A.V., y Norton, A.H. (2009). Using Steffe's advanced fractions schemes. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*, 44–56.

Meert, G., Grégoire, J. y Noël, M.P. (2009). Rational numbers: componential vs. holistic representation of fractions in a magnitude comparison task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 62*(8), 1598-1616.

Mellone, M., Tortora, R., Jakobsen, A., y Ribeiro, M. (2017). Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research. *Proceedings of the X CERME.* Dublin: Irlanda.

Mitchell, R.N. y Marin, K.A. (2015). Examining the use of a structured analysis framework to support prospective teachers noticing. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(6), 551-575.

Modestou, M. y Gagatsis, A. (2010) Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(1), p. 36-53.

Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Gómez, B. (2013). Trabajando la metacognición en una tarea de razón y proporción. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 393-401). Bilbao: SEIEM.

Montes, M.A., Contreras, L.C. y Carrillo,. J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 311-318). Bilbao: SEIEM.

Muñoz, C, Contreras, L.C., Carrilo, J., Rojas, N., Montes, M.S., Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del professor de matemátcas (MTSK).*Gaceta dela Real Sociedad Matemática Española, 18*(3), 589-605.

Naik, S. y Subramaniam, K. (2008). Integrating the measure and quotient interpretation of fractions. In O. Figueras et al. (Eds.), *International group of the psychology of mathematics education: Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX (PME29)* (vol 4, pp. 17-24). Morelia, Mexico.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Nicolau, A. y Pitta-Pantazi, D. (2016). Hierarchical levels of Abilities that Constitute Fraction Understanding at Elementary School. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14,* 757-776.

Norton, A. y Wilkins, J.L.M. (2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fractions schemes. *Journal of Mathematical Behavior, 28*, 150-161.

Nunes, T. y Bryant, P (1997). *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*. México, Siglo XXI.

Olive, J., y Lobato, J. (2008). The learning of rational number concepts using technology. En K. Heid y G. Blume (Eds.), *Research on technology and teaching and learning of mathematics: Research synthesis, 1*, pp. 1-53. NC: Information Age Publishing.

Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2009). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the sixth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 26372646). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(2), 149–169.

Post, T. R., Harel, G., Behr, M., y Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. *Integrating research on teaching and learning mathematics*, 177-198.

Reyes-Gasperini, D., Cantoral, R., y Montiel, G. (2015). Teacher empowerment and socioepistemology: an alternative for the professional development of teachers. In CERME *9-Ninth Congress of European Research in Mathematics Education* (Vol. TWG 18: Mathematics teacher eduaction and professional development) (pp. 2902-2908). Prague, Czech Republic.

Ribeiro, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., Montes, M. y Gamboa, G. (2017). Intertwining noticing and knowledge in video analysis of self-practice: the case of Carla. *Proceedings of the X CERME.* Dublin: Irlanda.

Rivas, M.A., Godino, J.D. y Castro, W.F. (2012) Desarrollo del conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros profesores de Primaria. *Bolema, 26*(42B), 559-588.

Roller, S. A. (2016). What they notice in video: a study of prospective secondary mathematics teachers learning to teach. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(5), 477-498.

Rosaen, C. L., Lundeberg, M., Cooper, M., Fritzen, A. y Terpstra, M. (2008). Noticing: how does investigation of video records change how teachers reflect on their experiences? *Journal of teacher Education, 59,* 347-360.

Roth McDuffie, A., Foote, M.Q., Bolson C., Turner, E., Aguirre, J., Gau Bartell, T., Drake, C. y Land, T. (2014). Using video analysis to support prospective K-8 teachers noticing of students' multiple mathematical knowledge base. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(3), 245-270.

Rowland, T. y Ruthven, K. (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching.* London: Springer.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. Journal of Mathematics Teacher Education, 8, 255-281.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M. y Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497 - 508). Jaén: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education, 13,* 1305-1329.

Santagata, R., y Yeh, C. (2016). The role of perception, interpretation, and decision making in the development of beginning teachers' competence. *ZDM*, *48*(1-2), 153-165.

Santagata, R. y Angelici, G. (2010). Studying the impact of the lesson analysis framework on preservice teachers' abilities to reflect on videos of classroom teaching. *Journal of Teacher Education, 61*(4), 339-349.

Schack, E. O., Fisher, M.H., Thomas, J.N., Eisenhardt, S., Tassell, J., y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16* (5), 379-397.

Schultz, K., y Ravitch, S. M. (2013). Narratives of learning to teach: Taking on professional identities. *Journal of Teacher Education*, *64*(1), 35-46.

Seidel, T., Stürmer, K., Blomberg, G., Kobarg, M., y Schwindt, K. (2011). Teacher learning from analysis of videotaped classroom situations: Does it make a difference whether teachers observe their own teaching or that of others? *Teaching and Teacher Education, 27*, 259-267.

Sherin, M.G. y van Es, E.A. (2005). Using video to support teachers' ability to notice classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 13*, 475–491.

Sherin, M.G., Jacobs, V.R. y Philipp, R.A. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* New York: Routledge.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 2 - 14.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114–145.

Simon, M.A. (2006). Key Developmental Understandings in Mathematics: A Direction for Investigating and Establishing Learning Goals. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 359-371.

Simon, M. A., y Blume, G. W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 472-494.

Simon, M.A. y Tzur, R. (2004).Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Simpson, A., Vondrova, N. y Zalska, J. (2017). Sources of shifts in pre-service teachers' patterns of attention: the roles of teaching experience and of observational experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, doi:10.1007/s10857-017-9370-6.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. Educational Studies in Mathematics , 43(3), 271-292.

Son, J.W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84*,49- 70.

Son, J., y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning about students' non-traditional strategies when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 236–261.

Spitzer, S. M., Phelps, C. M., Beyers, J. E., Johnson, D. Y., y Sieminski, E. M. (2011). Developing prospective elementary teachers' abilities to identify evidence of student mathematical achievement. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(1), 67-87.

Stahnke, R., Schueler, S., y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decisión-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 1-27.

Star, J.R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*, pp. 404-411.

Steffe, L. (1992). Learning stages in the construction of the number sequence. En J. Bideaud, C. Meljac, y J. Fischer (Eds.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (pp. 83–88). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(3), 267-307.

Steffe, L. y Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.

Tjoe, H., y de la Torre, J. (2014). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 1-7.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in*

Mathematics Education, 30(4), 390–416.

Valverde, A.G. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González, J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-532). Santander y Universidad de Cantabria: SEIEM.

Van Dooren, W., De Bock, D., y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction, 28*(3), 360–381.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. y Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(2), 187-211.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86.

van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp.134-151). New York: Routledge.

van Es, E.A. y Sherin, M.G. (2002). Learning to Notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571-596.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En Hiebert, H. and Behr, M. (Eds.), *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. (pp. 141-161). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual Field: What and Why?. En G. Harel y J. confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics (*pp. 41-60). New York: SUNNY

Walkoe, J. (2015). Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(6), 523–550.

Wilson, P. H., Mojica, G., y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 103–121.

Zapatera, A. (2015). *La competencia "mirar con sentido" de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnus de educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Alicante, España.