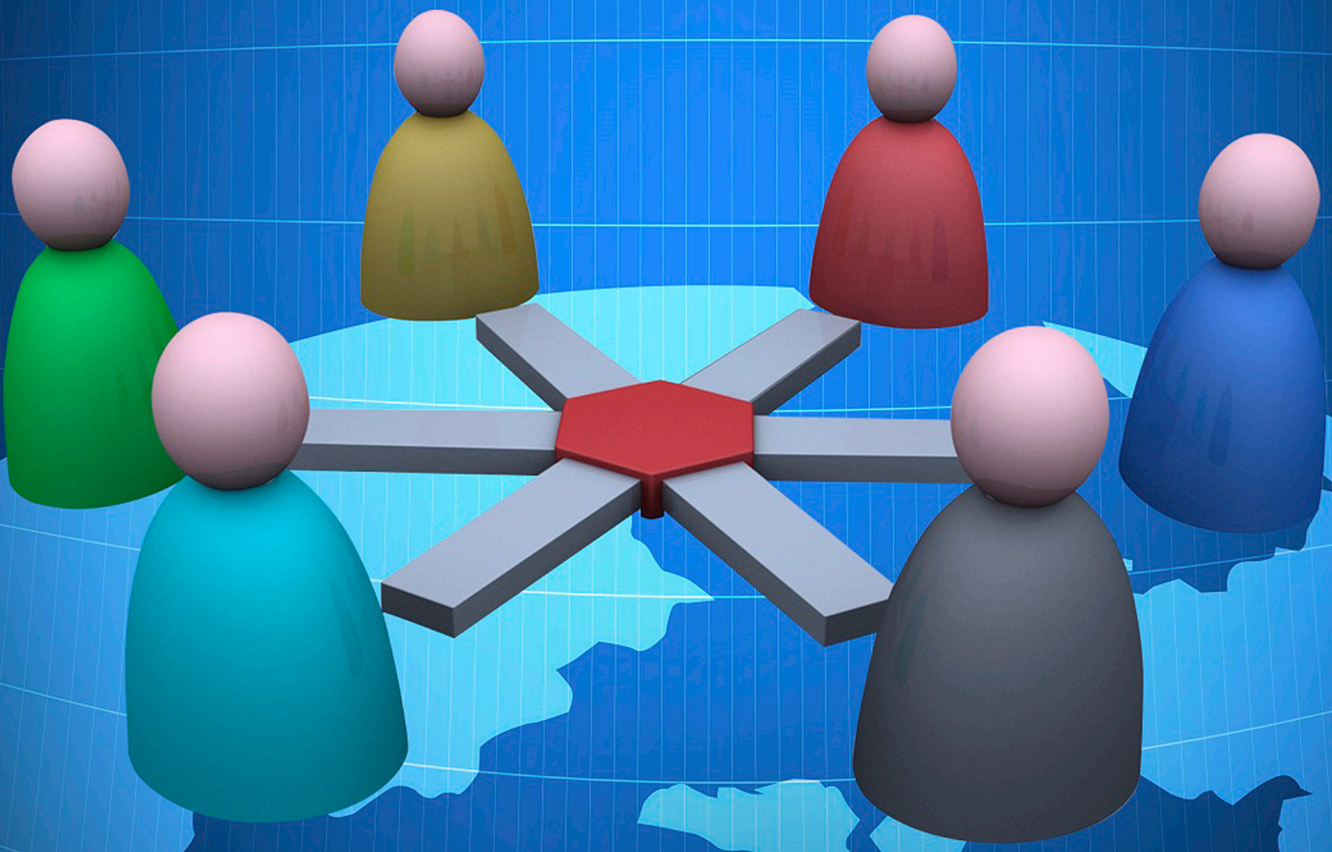
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

XIV JORNADES DE XARXES D´INVESTIGACIÓ EN DOCÈNCIA UNIVERSITÀRIA

Investigació, innovació i ensenyament universitari: enfocaments pluridisciplinars



JORNADAS DE REDES DE INVESTIGACIÓN EN DOCENCIA UNIVERSITARIA XIV

Investigación, innovación y enseñanza universitaria: enfoques pluridisciplinares

Coordinadores i coordinadors / *Coordinadoras y coordinadores:*

María Teresa Tortosa Ybáñez

Salvador Grau Company

José Daniel Álvarez Teruel

ISBN: 978-84-608-7976-3

Revisión y maquetación: Verónica Francés Tortosa

Publicación: Julio 2016

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático sobre fracciones a través de una trayectoria de aprendizaje

P. Ivars; C. Fernández; A. Buforn

Departamento Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante

RESUMEN

Una competencia que los maestros deben desarrollar es mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje en el aula, y en particular, el pensamiento matemático de los estudiantes. Esta competencia es conceptualizada como tres destrezas: identificar los elementos matemáticos relevantes en las respuestas de los estudiantes, interpretar la comprensión de los estudiantes, y fundamentar las decisiones de acción en función de la comprensión. En el diseño de los módulos de enseñanza, en la formación de maestros, se potencia el desarrollo de esta competencia y usamos las trayectorias de aprendizaje como modelo teórico que ayuden a los estudiantes para maestro a centrar su atención en aspectos importantes de la comprensión de los estudiantes de educación primaria. Entendemos trayectoria de aprendizaje como un camino hipotético por el que los aprendices pueden progresar en su aprendizaje. En esta comunicación presentamos el diseño de un módulo de enseñanza para la formación de maestros de educación primaria, y describimos las características de las tareas diseñadas para el desarrollo de esta competencia, en el caso particular del esquema fraccionario.

Palabras clave: formación de maestros, esquema fraccionario, mirada profesional, trayectoria de aprendizaje, módulo de enseñanza.

1. INTRODUCCIÓN

Los acontecimientos que se desarrollan en una clase ocurren de manera simultánea, superponiéndose unos a otros y los docentes tienen que ser capaces de focalizar su atención y discriminar entre las acciones relevantes para la enseñanza y las que no lo son en base a su criterio (Sherin y van Es, 2005). Siguiendo esta perspectiva, desde los programas de formación se defiende la necesidad de favorecer el desarrollo de habilidades en los docentes que les permitan trabajar con una mayor flexibilidad, atendiendo a las necesidades cognitivas del alumnado mientras se está impartiendo una lección (van Es y Sherin, 2002).

El desarrollo de esta flexibilidad está vinculado a la toma de consciencia de los sucesos acaecidos en el aula y a la manera en que se deben manejar las situaciones de enseñanza aprendizaje. Más allá de ser un experto en la materia que se imparte, un buen docente necesita ser consciente de lo que ocurre a su alrededor para conducir la clase de manera efectiva (Mason, 1998). Por tanto, es necesario que los docentes adquieran habilidades que les permitan determinar e identificar las situaciones de aula importantes para el correcto desarrollo de las competencias del alumnado.

Con el objeto de dar respuesta a esta necesidad en los docentes se ha desarrollado una línea de investigación internacional que ha identificado como una competencia docente importante *mirar profesionalmente* las situaciones de aula (*professional noticing*) para dar respuestas eficaces en el seno de la clase, mediante la toma de decisiones pedagógicas y con la capacidad de adaptar estas decisiones a una situación concreta que surja en mitad de la instrucción y que no puede ser previamente planificada.

1.1 La competencia mirar profesionalmente

Mason (2011) postuló que mirar profesionalmente es "un movimiento o un cambio en la atención" (p. 45) y caracterizó diferentes maneras en las que la gente es capaz de atender: i) *Holding holes* implica atender a algo pero sin discernir detalles, ii) *Discerning details* implica atender a los detalles descomponiéndolos, subdividiéndolos para establecer distinciones, iii) *Recognizing relationships* implica establecer relaciones entre los distintos detalles discernidos anteriormente, iv) *Perceiving properties* consiste en ser consciente de las relaciones particulares entre diferentes situaciones como ejemplos de propiedades y v) *Reasoning in the basis of agreed properties* implica utilizar las propiedades justificadas anteriormente para convencerse a uno mismo y a los demás a partir de razonamientos basados en definiciones y axiomas.

Esta perspectiva subraya la importancia de identificar los aspectos relevantes en las situaciones de enseñanza-aprendizaje (discerning details) e interpretarlos (recognising relationschips) en función de las referencias teóricas previas (perceiving properties) que respaldarán las decisiones de acción que se tomen. Esta conceptualización de la competencia mirar profesionalmente pone de manifiesto la importancia de la interpretación como instrumento que guía la comprensión de cómo los profesores usan su conocimiento en la práctica de sus labores profesionales (Llinares, 2013).

Numerosas investigaciones previas han identificado contextos que ayudan a los profesores a desarrollar la competencia mirar profesionalmente (Coles, 2013; Llinares y Valls, 2010; Santagata, Zanonni y Stigler, 2007; Sherin y van Es, 2005; van Es y Sherin, 2002, 2008, 2010). Nuestro estudio, enmarcado en esta línea de investigación, se centra en el desarrollo de los procesos de atención de los estudiantes para maestro hacia la comprensión de los estudiantes. En este sentido, investigaciones previas han demostrado que cuando los profesores en formación focalizan su atención en las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes, en un dominio matemático concreto, desarrollan una mayor capacidad para tomar decisiones de acción (Son, 2013; Wilson, Mojica y Confrey, 2013). En este contexto, las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes (Battista, 2012) pueden ayudar a los estudiantes para maestro a identificar los objetivos de aprendizaje de su alumnado, a anticipar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y a dar respuesta utilizando una instrucción apropiada (Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012).

De esta manera, centraremos nuestra investigación en cómo los estudiantes para maestro aprenden a mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio de las fracciones. Para ello, hemos diseñado un entorno de aprendizaje que ayude a promover el desarrollo de una mirada profesional en los estudiantes para maestro, a través de una trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de educación primaria sobre el esquema fraccionario.

1.2 Una trayectoria de aprendizaje del esquema fraccionario

Una trayectoria de aprendizaje es un camino hipotético por el que los aprendices pueden progresar en su aprendizaje y consta de tres componentes: **un objetivo de**

aprendizaje, unas actividades de aprendizaje y la descripción de un proceso de aprendizaje: en nuestro caso los **niveles de desarrollo del esquema fraccionario** (Battista, 2011; Simon, 1995).

Nuestra trayectoria de aprendizaje sobre el esquema fraccionario se ha caracterizado teniendo en cuenta los estudios empíricos sobre el desarrollo del pensamiento de los estudiantes sobre fracciones (Battista, 2012; Steffe, 2004; Steffe y Olive, 2010). El primer componente de esta trayectoria de aprendizaje sobre el esquema fraccionario es decir, **el objetivo de aprendizaje**, se deriva del currículum de educación primaria: dar sentido a la idea de la fracción y su interpretación como parte-todo, para comprender el significado de las operaciones de fracciones. Esta meta de aprendizaje pone de manifiesto la necesidad de lograr adquirir dos aspectos clave: a) la transición desde el significado intuitivo de dividir en partes congruentes hasta la idea de fracción como parte-todo teniendo en cuenta diferentes representaciones y b) la construcción del significado de las operaciones con fracciones.

Por lo que respecta a los **niveles de desarrollo del esquema fraccionario**, hemos considerado seis diferentes niveles de comprensión (Figura 1) de los estudiantes de educación primaria (Battista, 2012; Steffe, 2004; Steffe y Olive, 2010) sobre la base de los elementos matemáticos representados en la Figura 2.

En relación a las **actividades de aprendizaje** diseñadas para apoyar a los estudiantes en la transición desde los niveles iniciales hasta los niveles superiores en el desarrollo del esquema fraccionario, se han considerado tareas de:

- Reparto equitativo de cantidades continuas
- Representar e identificar parte de un todo (discreto/continuo, y en la recta numérica)
    - Considerar fracciones propias e impropias, y
    - reconstruir el todo
- Comparar fracciones: ordenar fracciones, determinar qué fracción es mayor
- Reconocer/construir fracciones equivalentes
- Situaciones de suma/resta de fracciones como contexto para dotar de sentido a las operaciones (no necesariamente al algoritmo)
- Situaciones para dotar de sentido la multiplicación de un entero por una fracción, multiplicación de fracciones y división de fracciones (división de natural por fracción)

Figura 1. Características de los niveles de desarrollo en la trayectoria de aprendizaje

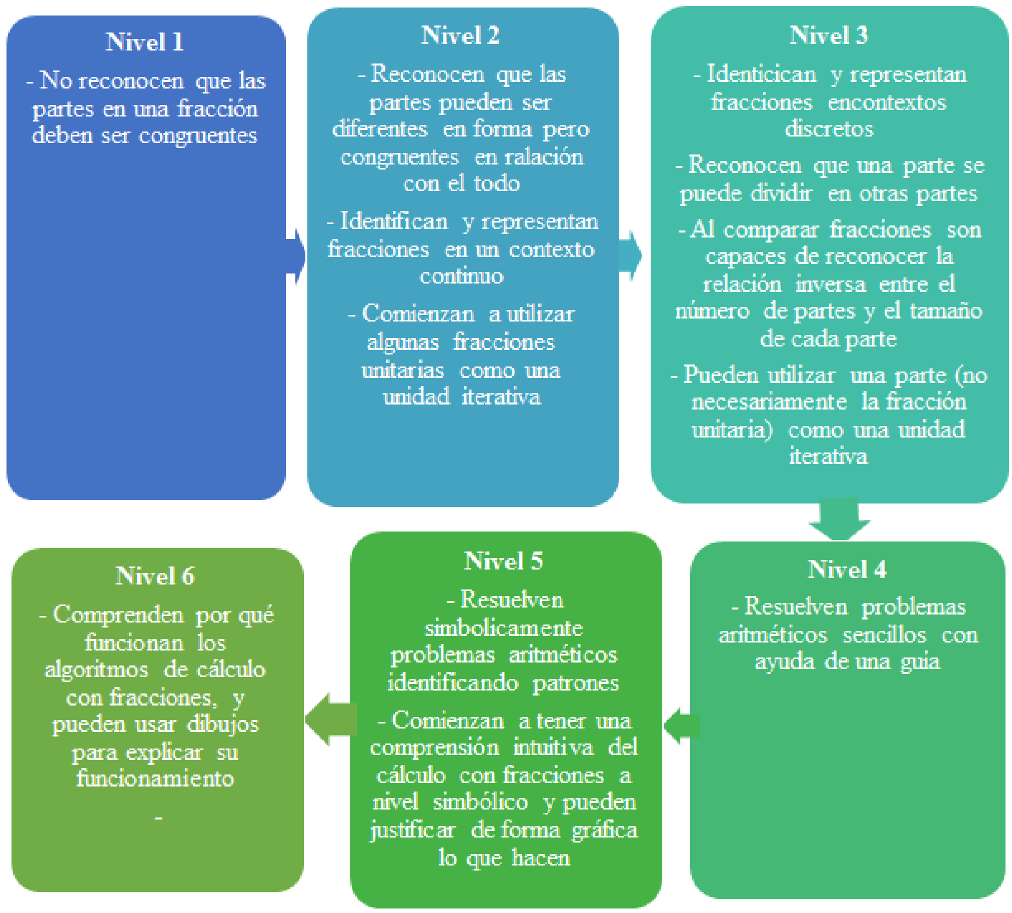


Figura 2. Elementos matemáticos

Del significado intuitivo de dividir en partes congruentes a la idea de la fracción como parte-todo

- las partes han de ser congruentes. Pueden ser diferentes en su forma pero congruentes en relación al todo
- una parte puede dividirse en otras partes
- considerar una parte como una unidad iterativa,
- relación inversa entre el número de piezas y el tamaño de cada parte

Construcción del significado de las operaciones con fracciones

- las partes deben ser congruentes para unirse o para separarse
- repetir una fracción para construir una fracción, “n veces a/b”
- fracción como una operador "a/b de c/d"
- división como medida "cuántas veces cabe a/b en B" o " cuántas veces cabe a/b en c/d "
- El resto en una división de fracciones

Tras la presentación del diseño de nuestra trayectoria de aprendizaje sobre fracciones, acometeremos, en el siguiente apartado, la presentación del diseño del entorno de aprendizaje.

2. EL DISEÑO DE UN ENTORNO DE APRENDIZAJE PARA LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO

El entorno de aprendizaje se ha diseñado a través de seis sesiones de 2 horas cada una (Figura 3).

En las dos primeras sesiones se introducen los elementos matemáticos relevantes a través de la resolución y el análisis, por parte de los estudiantes para maestro, de actividades de educación primaria sobre fracciones. Como por ejemplo, actividades de representación y de identificación de fracciones propias e impropias en un contexto continuo o discreto o actividades de reconstrucción de la unidad (Figura 4) y con el visionado y discusión de diferentes videoclips en los que se pueden observar las estrategias utilizadas por estudiantes de primaria y las dificultades que presentan a la hora de resolver actividades sobre fracciones en diversos contextos. El objetivo de estas tareas es ayudar a los estudiantes para maestro a focalizar su atención sobre los elementos matemáticos que intervienen en las tareas de fracciones.

Figura 3. Distribución de las sesiones del módulo

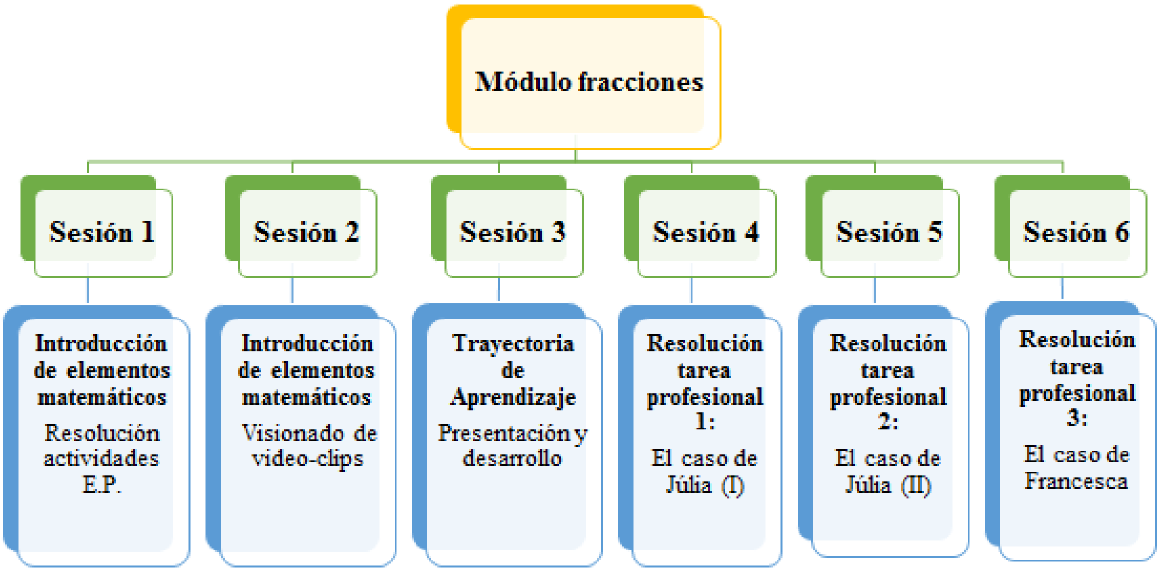
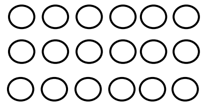


Figura 4. Ejemplos de actividades sobre fracciones que resolvieron y analizaron los estudiantes para maestro

Encontrar una parte de un todo.

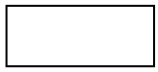
a) ¿Cuántos puntos son 2/3 del conjunto dado?



Encontrar un todo desde una parte

a) El conjunto de puntos es 3/8 del total. ¿Cuántos puntos son el total?

Encontrar una parte de otra parte

a) Ana se comió 2/3 de un pastel. Queda lo siguiente  ¿Cómo de grande era el pastel?

El objetivo de la tercera sesión es discutir la trayectoria de aprendizaje del esquema fraccionario en el aula (proporcionada en un documento teórico). El objetivo de las sesiones 4, 5 y 6 es que los estudiantes para maestro aprendan a interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes teniendo en cuenta la trayectoria de aprendizaje y propongan decisiones de acción que ayuden a los estudiantes de educación primaria a progresar en la trayectoria de aprendizaje. De esta manera, se pide a los estudiantes para maestro que den respuesta a tres tareas profesionales (casos de aula) que siguen la misma estructura. En primer lugar, se describe el contexto del aula. En segundo lugar, se presenta la resolución de tres estudiantes diferentes (situados en diferente nivel de la trayectoria de aprendizaje). Finalmente los estudiantes para maestro tienen que responder a cuatro preguntas utilizando la información de la trayectoria de aprendizaje sobre el esquema fraccionario proporcionada en la sesión anterior.

- **Describe la tarea** en función del objetivo de aprendizaje: ¿cuáles son los **elementos matemáticos** que el resolutor debe usar para resolverlo?
- Describe **cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la tarea** identificando **cómo han utilizado los elementos matemáticos** implicados y las **dificultades** que han tenido con ellos
- ¿En qué **nivel de la Trayectoria de Aprendizaje** situarías a cada pareja? Justifica tu respuesta

- Define **un objetivo de aprendizaje y propón una actividad** (o modifica la propuesta inicialmente por Júlia) para ayudar a sus alumnos progresar en la comprensión de las fracciones según la Trayectoria de Aprendizaje prevista

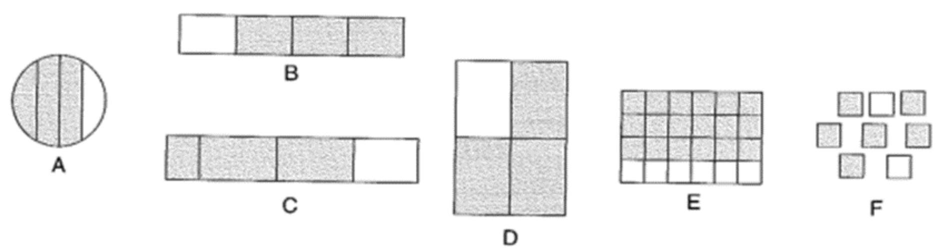
Estas preguntas se centran en la atención, de los estudiantes para maestro, sobre los aspectos relevantes de las respuestas de los estudiantes identificando los elementos matemáticos relevantes (discernir detalles); en la interpretación de estas respuestas reconociendo las relaciones entre los elementos matemáticos y el nivel de desarrollo del esquema fracción en relación a la trayectoria de aprendizaje y en la toma de decisiones de enseñanza que ayuden a los estudiantes de primaria a progresar en la trayectoria de aprendizaje.

Presentamos a continuación una de las tres tareas profesionales que forman parte del entorno de aprendizaje, la que corresponde al caso de aula donde se realiza una tarea de identificación de fracciones (Figura 5).

2.1 Tarea de identificación de fracciones

Figura 5. Tarea de identificación de fracciones (Adaptada de Battista, 2012)

1. ¿Qué figura representa ¾?



Mientras que los estudiantes realizan las actividades Júlia va pasando por las mesas observándoles. Al observar cómo los diferentes grupos están resolviendo la actividad Júlia se da cuenta que ***usan los elementos matemáticos del concepto de fracción de manera sistemática*** *lo que le permite identificar aquellos que les crean dificultades.*

La respuesta de Víctor y Xavi

Júlia: *¿Cuál es vuestra respuesta?*

Víctor: *Mmmm, bueno nosotros creemos que la figura A, B C y D representan tres-cuartos.*

Júlia: *Xavi, ¿tú estás de acuerdo con Víctor?*

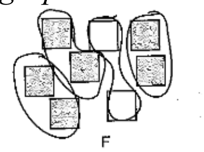
Xavi: *Sí, creo que sí porque A, B, C y D son 3 partes de 4 sombreadas, es decir tres-cuartos*

Júlia: *¿Estáis todos de acuerdo?*

La respuesta de Joan y Tere

Joan: *Nosotros no, seño (Joan forma equipo con Tere)*
Júlia: *¿Qué pensáis vosotros?*
Tere: *Nosotros creemos que la figura B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales y hay tres sombreadas. Las figuras A y C tienen 3 partes de 4 sombreadas, pero las partes no son iguales…*
Júlia: *¿Y la figura E? ¿Qué pensáis de la figura E?*
Joan: *La figura E no son tres cuartos porque si te fijas están divididos en 24 partes iguales y hay pintadas 18.*
Tere: *Eso es, no son tres-cuartos.*
Júlia: *Entonces la F…*
Joan y Tere: *…. Tampoco, eso son 6 cuadrados sombreados*
Júlia: *¿Estáis todos de acuerdo con la respuesta de Joan y Tere? ¿Hay alguien que lo haya pensado de manera diferente? ¿Félix y Álvaro qué han hecho?*

La respuesta de Félix y Álvaro
Félix: *Bueno… sí. La A, B C y D son como dicen ellos (Joan y Tere), lo que pasa es que la E lo hemos hecho de otra manera…*
Júlia: *¿Cómo? Explícanoslo*
Álvaro: *Bueno… mmmm pues así, mira. Si te fijas cada línea tiene 6 cuadritos, es decir son todas iguales, y como hay 3 líneas sombreadas de las 4 pues entonces son tres cuartos. Además… para la F también son tres cuartos porque si haces así (agrupando los cuadros de 2 en 2), obtienes 4 grupos de 2 cuadros, y de esos 4 grupos, 1,2 y 3 (señalando a la vez que cuenta cada grupo sombreado) están sombreados, que son tres grupos sombreados de los cuatro que tenemos*


F

En esta tarea los estudiantes para maestro deberían ser capaces de identificar, en primer lugar, los elementos matemáticos que intervienen en la misma:

Estas son actividades de **reconocimiento/identificación de fraccione**s propias (f<1) (interpretación de la fracción como parte-todo). Se presentan varias representaciones de la unidad (un círculo, rectángulo, y fichas) y dos fracciones propias.
En la actividad 1, en dos representaciones (A y C) las partes no son congruentes, y en B y D sí lo son. La inclusión de estas representaciones en la actividad tiene como **objetivo** determinar la comprensión de los estudiantes de que **las partes deben ser congruentes**. (En la actividad 2, A, B y C son congruentes y D, y E no son congruentes).
En la actividad 1, la inclusión de las representaciones E y F, dan la posibilidad de que los estudiantes movilicen la idea de que **una parte puede ser dividida en otras partes/ considerar un grupo de partes como una parte** (en la actividad 2, esto se pone de manifiesto en las representaciones C y F)

En relación con las respuestas de los estudiantes, cada pareja se sitúa en un nivel de la trayectoria de aprendizaje. Así, Víctor y Xavi se encontraban en el primero nivel de la trayectoria, Joan y Tere en el segundo nivel y Félix y Álvaro en el tercer nivel. Las características que muestran sus respuestas se observan en la Tabla 1.

Tabla 1. Características de las respuestas de los estudiantes

Actividad 1 (fracción ¾)	Víctor y Xavi	Joan y Tere	Félix y Álvaro
Las partes deben ser congruentes.	NO	SI	SI
Una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.	NO	NO	SI

Una vez que los estudiantes para maestro habían identificado el nivel donde se encontraba cada pareja en relación a la trayectoria de aprendizaje, debían definir un objetivo de aprendizaje y proponer una tarea que ayudara a los alumnos a progresar en el desarrollo del esquema fracción (trayectoria de aprendizaje). Por ejemplo, para la pareja Xavi y Víctor se les podía ayudar a progresar del nivel 1 al nivel 2 de la trayectoria de aprendizaje.

Un posible objetivo de aprendizaje sería: *reconocer que el todo está formado por partes congruentes y que las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma pero deben ser congruentes.* Una posible tarea que puede ayudar a desarrollar este objetivo de aprendizaje es: con hojas de papel del mismo tamaño pedir a los alumnos de educación primaria que la doblen de diferente manera, teniendo en cuenta que los dobleces tienen que ser iguales animando a los estudiantes a explicar sus argumentaciones a los compañeros.

3. REFLEXIÓN FINAL

Este entorno de aprendizaje está diseñado para desarrollar la atención de los estudiantes para maestro hacia la comprensión de sus alumnos en el dominio del esquema fraccionario y por tanto ayudarles a desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Se ha utilizado una trayectoria de aprendizaje del esquema fraccionario como referencia teórica que puede ayudar a los estudiantes para maestro a identificar los objetivos de aprendizaje de su alumnado, a interpretar el nivel de comprensión de sus estudiantes (en nuestro caso el nivel de desarrollo del esquema fraccionario) y a dar respuesta utilizando una instrucción apropiada que ayude a los estudiantes de educación primaria a progresar en su comprensión. Nuestra hipótesis es que este tipo de conocimiento les permitirá trasladarse desde comentarios evaluativos, basados en la corrección o incorrección de las respuestas de los estudiantes, a comentarios interpretativos basados en las evidencias observadas tras la observación de las características de los elementos matemáticos importantes evidenciados en las respuestas de los estudiantes. Finalmente, consideramos que este entorno de aprendizaje ayudará a los estudiantes para maestro a diseñar y proponer actividades coherentes con la forma en que comprenden los estudiantes de educación primaria.

.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Battista, M.T. (2011). Conceptualizations and issues related to learning progressions, learning trajectories, and levels of sophistication. *The Mathematics Enthusiasts, 8*(3), 507-570.

Battista, M.T. (2012). *Cognition-Based Assessment and Teaching of Fractions: Building on Students' Reasoning*. Portsmouth, N.H. Heinemann.

Clements, D.H.; Sarama, J.; Spitler, M.E., Lange, A.A. & Wolfe, C.B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(2), 127-166.

Coles, A. (2013). Using video for professional development: the role of the discussion facilitator. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(3), 165-184.

Fernández, C.; Llinares, S. & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM*, *44*(6), 747-759.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(3), 243-267

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge.

Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. En M.G. Sherin; V.R. Jacobs & R.A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 35–50). New York: Routledge.

McCloskey, A.V. & Norton, A.H. (2009). Using Steffe's advanced fraction schemes. *Mathematics teaching in the middle school*, *15*(1), 44-50.

Mojica, G.F. (2010). Preparing pre-service elementary teachers to teach mathematics with learning trajectories. Retrieved from: http://www.lib.ncsu.edu/resolver/1840.16/6226

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Sánchez-Matamoros, G.; Fernández, C. & Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International journal of science and mathematics education, 13*(6), 1305-1329.

Sherin, M.; Jacobs, V. & Philipp, R. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. Routledge.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, 114-145.

Son, J. (2013). How pre-servive teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles, *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 49-70.

Steffe, L.P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 129-162.

Steffe, L. & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.

Sztajn, P.; Confrey, J.; Wilson, P.H. & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, *41*(5), 147-156.

Van Es, E.A. & Sherin, M.G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *10*(4), 571-595.

Wilson, P.H.; Mojica, G.F. & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 103-121.