

Una aplicación de la Regresión no lineal a los Hormigones Reciclados



Máster Universitario en Ingeniería de los
Materiales, Agua y Terreno

Trabajo Fin de Máster

Autor:

Junior Alexis Reyes Sánchez

Tutores:

José Antonio Reyes Perales

Ferran Josep Verdú Monllor



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Resumen

En la actualidad se estima que los consumos de áridos naturales empleados anualmente en la fabricación de hormigón en el mundo son del orden de 10.000 millones de toneladas. Por otra parte se generan anualmente más de 10 millones de toneladas de residuos procedentes de la industria de la construcción. La incorporación de *áridos reciclados* en la fabricación de hormigones, surge principalmente debido a un factor ambiental ya que se destaca la reducción en el consumo de materias primas, disminución de la emisión de contaminantes a la atmósfera derivados de los procesos de extracción de áridos naturales entre otros.

La Instrucción Española del Hormigón, EHE, limita el contenido de reemplazo de áridos reciclados hasta un máximo del 20% en hormigones estructurales, principalmente por su alto valor de absorción y su considerable reducción en la resistencia mecánica. Lo que se plantea en el presente estudio es proporcionar diversos modelos matemáticos sencillos, que sean capaces de predecir el comportamiento mecánico del hormigón en la medida que se añade árido reciclado.

Se ha elaborado una base de datos con de 343 diferentes mezclas de hormigones con árido reciclado, recolectados de publicaciones efectuadas en revistas científicas, esta es la que ha servido para poder alimentar el programa denominado *Polimodels*, el cual utilizando diferentes algoritmos de regresión no lineal es capaz de generar los diferentes modelos. El criterio de selección para el mejor modelo se ha efectuado en base al modelo con el menor *Coefficiente de Variación Porcentual Media* (CVP_{med}) y el *Coefficiente de Determinación* (R^2) como medida complementaria de análisis, pero en algunos también se ha seleccionado el modelo que se aprecia más sencillo al momento de la sustitución de los datos. Se proponen tres modelos de resistencia mecánica a compresión, seis modelos de resistencia a tracción y seis para el módulo de elasticidad, haciendo un total de 15 diferentes modelos de predicción. Estos modelos serán dependientes de ciertos parámetros físicos y mecánicos del árido reciclado como ser el porcentaje de absorción, coeficiente de desgaste de los ángeles y del porcentaje de sustitución. Se puede apreciar la notable reducción en las propiedades mecánicas debido a la influencia que posee la incorporación de áridos reciclados en los hormigones, de igual forma el mejor ajuste de los modelos en la

medida que poseemos más variables independientes que nos ayuden a predecir el comportamiento del hormigón reciclado.

Palabras claves

Modelos matemáticos, regresión no lineal, áridos reciclados, propiedades mecánicas.

Abstract

Currently it is estimated that the consumption of natural aggregates used annually in the manufacture of concrete in the world are the order of 10,000 million tons. Furthermore it generated annually more than 10 million tons of waste from the construction industry. The incorporation of recycled aggregates in concrete manufacture, arises mainly due to an environmental factor as the reduction is highlighted in the consumption of raw materials, reduced emission of pollutants into the atmosphere resulting from extraction processes of natural aggregates between others. The Spanish Instruction Concrete, EHE, limits the content of recycled aggregate replacement up to 20% in structural concrete, mainly because of its high absorption value and considerable reduction in mechanical strength. In the present study has been prepared to provide a number of simple mathematical models capable of predicting the mechanical behavior of concrete as in recycled aggregate is added.

A database has been developed composed of 343 different mixtures of concrete made with recycled aggregate collected from publications made in scientific journals, this is what has served to feed the program called Polimodel, which use different algorithms nonlinear regression is capable of generating different models. The selection criteria for the best model has been made based on the model with the lowest *Coefficient of Variation Percentage Media* (CVP_{med}) and *Coefficient of Determination* (R^2) as a follow-analysis, but some also have selected the model that can be seen easier when replacement data. Three models of mechanical resistance to compression, six models of tensile strength and six for the elastic modulus are proposed, making a total of 15 different prediction models. These models will be dependent on certain physical and mechanical parameters such as the recycling rate of absorption, wear coefficient of angels and replacement percentage aggregate. The significant reduction can be appreciated in the mechanical properties due to the influence that has the incorporation of recycled aggregates in concrete, just as a better fit of the models to the extent that we have more independent variables that help us predict appreciated the recycled concrete behavior.

Keywords

Mathematical models, nonlinear regression, recycled aggregates, mechanical properties.

Justificación

Las diferentes ciencias por su naturaleza experimental se han propuesto en las diferentes épocas que marcan nuestra historia, describir el mundo que nos rodea. Desde los griegos hasta la época actual, se ha pretendido encontrar diversos modelos matemáticos, que nos ayuden a comprender toda la naturaleza del universo, desde la química, física, astronomía, botánica, etc., se han buscado ecuaciones que permitan predecir el comportamiento de un determinado sistema. En la elaboración de las ecuaciones que describen el modelo, se pueden encontrar diversas leyes, pero en algunas ocasiones resulta difícil obtenerlas, por lo cual es de gran utilidad desarrollar estos modelos desde un punto de vista estadístico y a partir de datos experimentales realizados con anterioridad, siendo esto la labor de este Trabajo de Fin de Máster.

En la actualidad y dado el gran avance tecnológico, se han desarrollado poderosas herramientas computacionales que no solo permiten desarrollar modelos con gran facilidad, sino que además estas se pueden programar para que proporcionen estimadores que nos ayuden a discriminar la cercanía que existe entre los datos estimados por experimentación y los datos estimados aplicando los diferentes modelos desarrollados. Polimodels, es un poderoso y completo software que permite buscar simultáneamente de entre diferentes modelos de carácter tanto lineal como no lineal (Verdú Monllor, 2004b), y que además proporciona los suficientes datos para poder discriminar la diferencia entre los datos estimados y los observados.

Dado el enorme avance científico, la disponibilidad y facilidad para poder obtener datos experimentales de diferentes revistas científicas de credibilidad se hace posible crear bases de datos que nos permitan modelizar un determinado experimento y verificar su aplicabilidad. En esta área de modelización todavía hay mucho que recorrer ya que en las diferentes publicaciones encontradas no fue posible obtener ecuaciones sencillas que predijeran el comportamiento mecánico del hormigón fabricado a partir de áridos reciclados, como las obtenidas en el presente estudio. Se han realizado tantos y diferentes experimentos en el campo de la Ingeniería Civil para estudiar el comportamiento mecánico de los hormigones, que se han encontrado los suficientes datos necesarios para poder generar la base de datos y crear los modelos que hoy se presentan.

Agradecimientos

- A mi maestro de todos los tiempos **Juan Bautista Nieto**, su apoyo y motivación hasta la fecha han sido los pilares que me han motivado a entregarlo todo dentro y fuera de las aulas de clases, obtener más conocimiento sobre la Ingeniería Civil. Sin él no estaría hoy escribiendo estas líneas de trabajo.
- A la **Universidad Nacional Autónoma de Honduras** por brindar el apoyo económico mediante gestiones realizadas por las autoridades **Mónico Oyuela** y **Rutilia Calderón** ellos me han dado la oportunidad de estudiar en España.
- A mis tutores **José Antonio Reyes Perales** y **Ferran Josep Verdú Monllor** por estar siempre disponibles y aclarar las dudas durante todo el desarrollo del proyecto.
- A un tercer tutor **Antonio José Tenza Abril** el cual me ha ayudado en toda la parte ingenieril de los modelos, por su disponibilidad a aclarar dudas durante toda la ejecución del proyecto.
- A **mis compañeros** por compartir sus experiencias y ser parte en diversos equipos de trabajos.

Dedicatoria

- A Dios por darme fuerza, fortaleza y sabiduría para iniciar y poder llegar a esta etapa importante en el proceso de formación profesional.
- A mi padre y la memoria de mi madre que han confiado plenamente en mí y han estado conmigo siempre, brindando su apoyo, orientación, cercanía y motivación a seguir estudiando.
- A mis hermanos, mi novia y demás familiares por estar conmigo, por compartir momentos inolvidables que fortalecen como persona y me motiva a lograr un esfuerzo constante y aplicación para el cumplimiento de metas.

Citas

*“Nunca la derrota me sobrecogerá, si mi determinación para alcanzar el éxito es lo
suficientemente poderosa.”*

Og Mandino

Índice

I.	Introducción	1
II.	Estado del arte	3
2.1.	Introducción	3
2.2.	Modelos de regresión lineal múltiple	6
2.2.1.	Regresión por el método de los mínimos cuadrados	13
2.3.	Modelos de regresión no lineal	15
2.3.1.	Modelos linealmente transformables.....	18
2.3.2.	Método utilizado para el ajuste de parámetros	19
2.4.	Discriminación y criterio de selección de entre los modelos no lineales	22
2.4.1.	Coeficiente de determinación (R^2)	23
2.4.2.	Medidas directas del error, elección del mejor modelo.....	25
III.	Objetivos	27
3.1.	Objetivo General	27
3.2.	Objetivos Específicos.....	27
IV.	Metodología	28
4.1.	Construcción de la base de datos.....	28
4.2.	Descripción y funcionamiento del programa Polimodel	33
V.	Cuerpo del trabajo	34
5.1.	Introducción	34
5.2.	Una aplicación con hormigones de áridos reciclados aplicando la regresión no lineal ...	35
5.2.1.	Estudio y relación de las diferentes variables.....	35
5.2.2.	Modelos de Resistencia a Compresión.....	38
5.2.3.	Modelos de Resistencia a Tracción Indirecta.....	43
5.2.4.	Modelos de Módulo de Elasticidad	54
5.3.	Trabajos futuros.....	64
VI.	Conclusiones	65
VII.	Bibliografía y referencias	66

Índice de figuras

Figura 1: Etapas generales del proceso de modelización. Fuente: (Verdú Monllor, 2004b)	4
Figura 2: Diagrama de flujo para el método de selección de modelo lineal. Fuente: (Kleinbaum, 1998).....	8
Figura 3: Variables que intervienen en un modelo de regresión lineal para el caso de bidimensional. Fuente: Elaboración propia.	9
Figura 4: Variables que intervienen en un modelo de regresión lineal para el caso tridimensional. Fuente: Elaboración propia.	10
Figura 5: Mejor recta de regresión para un diagrama de dispersión de una sola variable independiente. Fuente: Elaboración propia.	11
Figura 6: Mejor plano apropiado para datos tridimensionales. Fuente: (Kleinbaum, 1998)	11
Figura 7: Diagrama de dispersión no lineal y mejor curva de ajuste para una sola variable independiente. Fuente: (Kleinbaum, 1998)	17
Figura 8: Diagrama de dispersión y mejor curva de regresión para un espacio tridimensional. Fuente: Elaboración propia.	17
Figura 9. Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para la resistencia a compresión (Modelo 1). Fuente: Elaboración propia.	40
Figura 10: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para la resistencia a compresión (Modelo 2). Fuente: Elaboración propia.	41
Figura 11: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para la resistencia a compresión (Modelo 3). Fuente: Elaboración propia.	41
Figura 12: Variación de R^2 y el <i>CVP media</i> en los modelos de resistencia a compresión con respecto al número de variables independientes. Fuente: Elaboración propia.	42
Figura 13: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para la resistencia a tracción indirecta considerando la resistencia a compresión (Modelo 4). Fuente: Elaboración propia.....	46
Figura 14: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para la resistencia a tracción indirecta considerando la resistencia a compresión (Modelo 5). Fuente: Elaboración propia.....	46
Figura 15: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para la resistencia a tracción indirecta considerando la resistencia a compresión (Modelo 6). Fuente: Elaboración propia.....	47

Figura 16: Variación de R^2 y el CVP media en los modelos de a tracción tomando en consideración la resistencia a compresión, dependiendo del número de variables independientes. Fuente: Elaboración propia.....	48
Figura 17: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para la resistencia a tracción indirecta considerando la tracción indirecta sin sustitución (Modelo 7). Fuente: Elaboración propia.	50
Figura 18: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para la resistencia a tracción indirecta considerando la tracción indirecta sin sustitución (Modelo 8). Fuente: Elaboración propia.	51
Figura 19: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para la resistencia a tracción indirecta (modelo 9). Fuente: Elaboración propia.	52
Figura 20: Variación de R^2 y el CVP media en los modelos de resistencia a tracción indirecta con respecto al número de variables independientes. Fuente: Elaboración propia.	53
Figura 21: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para módulo de elasticidad (Modelo 10). Fuente: Elaboración propia.....	56
Figura 22: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para módulo de elasticidad (Modelo 11). Fuente: Elaboración propia.....	56
Figura 23: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para módulo de elasticidad (Modelo 12). Fuente: Elaboración propia.....	57
Figura 24: Variación de R^2 y el CVP media en los modelos de módulo de elasticidad con respecto al número de variables independientes. Fuente: Elaboración propia.....	58
Figura 25: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para el módulo de elasticidad (Modelo 13). Fuente: Elaboración propia.	60
Figura 26: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para el módulo de elasticidad (Modelo 14). Fuente: Elaboración propia.	61
Figura 27: Representación grafica de los <i>valores observados</i> y los <i>estimados</i> para el módulo de elasticidad (Modelo 15). Fuente: Elaboración propia.	62
Figura 28: Variación de R^2 y el CVP media en los modelos del módulo de elasticidad con respecto al número de variables independientes. Fuente: Elaboración propia.....	63

Índice de tablas

Tabla 1. Rangos de dosificación del total de mezclas analizadas.....	29
Tabla 2. Rangos de dosificación del total de mezclas analizadas.....	31
Tabla 3. Propiedades de los áridos utilizados para la generación de cada uno de los modelos.....	32
Tabla 4. Rango de estudio de las propiedades mecánicas para cada tipo de modelo	32
Tabla 5. Tabla resumen de variables dependientes e independientes.	37
Tabla 6. Coeficientes de las diferentes variables para los modelos 1, 2 y 3.	39
Tabla 7: Coeficientes de las diferentes variables para los modelos 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 6.1 y 6.2.	44
Tabla 8: Coeficientes de las diferentes variables para los modelos 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1 y 9.2.	50
Tabla 9: Coeficientes de las diferentes variables para los modelos 10, 11 y 12.	55
Tabla 10: Coeficientes de las diferentes variables para los modelos 13, 14 y 15.	59

Índice de abreviaturas

CVP_{med}	Coefficiente de variación porcentual media
R^2	Coefficiente de determinación
SSE	Suma de los cuadrados residuales (inexplicada)
SST	Suma total de cuadrados
SSR	Suma de cuadrados explicada
RC	Hormigón reciclado
a/c	Relación agua/cemento
WA	Porcentaje de absorción
LA	Coefficiente de desgaste de los ángeles
RCA	Porcentaje de sustitución del árido reciclado
$f_{c,CC}$	Resistencia a compresión del hormigón
$f_{ct,CC}$	Resistencia a tracción indirecta del hormigón de referencia
f_c	Resistencia a compresión del hormigón de referencia
E_{CC}	Módulo de elasticidad del hormigón de referencia
MPa	Mega Pascales

I. Introducción

La utilización de áridos reciclados en la fabricación de hormigones, tiene varios propósitos, entre los que cabe destacar la reducción en el consumo de materias primas, disminuir la emisión de CO₂ a la atmósfera derivados de los procesos de extracción de áridos naturales, así como la valorización de los residuos de construcción. Se estima que los consumos de áridos naturales empleados anualmente en la fabricación de hormigón en el mundo son del orden de 10.000 millones de toneladas. Por otra parte se generan anualmente más de 10 millones de toneladas de residuos procedentes de la industria de la construcción (Rahal, 2007). Por tanto el medio ambiente ha de absorber una cantidad muy importante de materiales de desecho procedentes del sector de la construcción, consumiendo por otra parte una elevada cantidad de materias primas para la fabricación de hormigones.

La utilización de hormigones con áridos reciclados, proporciona una alternativa de alto valor medioambiental y más racional desde el punto de vista económico (Corinaldesi, 2010). La extracción de áridos naturales, la fabricación de cemento y todos los procesos productivos relacionados con la fabricación de hormigón, con el consiguiente consumo de energía de estos procesos, llevan asociados la emisión de toneladas de CO₂ a la atmósfera. Este hecho pone en valor la sustitución de áridos naturales por áridos reciclados.

Actualmente las causas de la baja utilización de hormigón con áridos reciclados, se fundamenta en las menores prestaciones que ofrece frente al empleo del árido natural, afectando principalmente a las propiedades de absorción y permeabilidad, que son mayores en los áridos reciclados. Además la Instrucción Española del Hormigón Estructural, EHE-08, limita el contenido de reemplazo de áridos reciclados hasta un máximo del 20% en hormigones estructurales (España. Ministerio de Fomento, 2011).

La principal diferencia entre el árido reciclado y el natural es el mortero adherido al primero que provoca una mayor absorción y una menor densidad, siendo éstas las propiedades que determinan las mayores divergencias entre ambos árido, afectando negativamente en el módulo elástico, retracción, fluencia y durabilidad del hormigón fabricado con árido reciclado (RA). Cuanto mayor es el contenido de mortero adherido que presenta el árido reciclado, más lo acusará el hormigón fabricado con él (Etxeberria, Vazquez, Mari, & Barra, 2007). Las propiedades del hormigón reciclado pueden verse

afectadas negativamente respecto a las de un hormigón convencional con la misma dosificación. El aumento de la cantidad de árido reciclado en la dosificación del hormigón, presenta una disminución del módulo elástico y resistencia a compresión (Topcu & Guncan, 1995).

El interés principal de este trabajo es predecir, mediante la utilización de modelos no lineales, las propiedades mecánicas de hormigones (resistencia a compresión, resistencia a tracción indirecta y módulo de elasticidad) conociendo algunas propiedades físicas de los RA como es la absorción a 24 horas (WA), el coeficiente de desgaste de los Ángeles (LA) y porcentaje de árido reciclado que se pretende incorporar (RCA). Así mismo, predecir cómo influye el número de variables 2, 3 ó 4 en los modelos no lineales y también analizar modelos de predicción basados en la resistencia a compresión (que son los habitualmente utilizados en normativas e investigaciones). Qué efecto produce sobre las propiedades mecánicas de un hormigón convencional, la incorporación de un porcentaje de árido reciclado (en peso). Esto puede suponer un ahorro para los fabricantes de hormigón reciclado ya que pueden prever las propiedades mecánicas conociendo las propiedades físicas de los RA y su porcentaje de incorporación.

II. Estado del arte

2.1. Introducción

Cuando se analizan datos en las diferentes disciplinas que conforman las ciencias, con frecuencia es conveniente obtener algún conocimiento acerca de la relación entre dos variables a través de modelos que describan esta relación. La naturaleza e intensidad de las relaciones entre estas variables se pueden examinar por medio de los análisis de regresión y correlación, que son dos técnicas estadísticas que, aunque estén relacionadas, sirven para propósitos diferentes. El *análisis de regresión* se efectúa para averiguar la forma probable de las relaciones existentes entre las variables del modelo, y su objetivo final, es predecir o estimar el valor de una variable que corresponde al valor dado de otra variable. Las ideas de regresión fueron expuestas por primera vez por el científico inglés Sir Francis Galton (1822-1911) en sus informes de investigación acerca de la herencia, primero en chicharos y luego en la estatura humana. Por otra parte el *análisis de correlación* se refiere a la medida de la intensidad de la relación entre las variables. De igual forma, el origen de los conceptos y la etimología del análisis de correlación se remontan a Galton (Daniel, 2002).

El modelo puede en algunos casos reducirse a una ecuación o una serie de ecuaciones, que contienen información respecto al fenómeno estudiado ajustándose en mayor o menor medida al comportamiento real. Es además de gran interés su utilización para predecir situaciones diferentes a las observadas experimentalmente (Verdú Monllor, 2004b). En la búsqueda de las ecuaciones que definen el modelo se pueden aplicar abstracciones, pero en algunos planteamientos es difícil obtener leyes que las describan, por lo que además resulta útil aproximarse al modelo desde el punto de vista estadístico y a partir de los datos experimentales conocidos, siendo éste el caso en el que se aplicarán las metodologías consideradas en este trabajo.

En general para el proceso de modelización se ha de seguir un proceso similar al que se expone a continuación:

- ✓ Análisis de datos
- ✓ Identificación de las relaciones
- ✓ Formulación matemática de las relaciones
- ✓ Validación

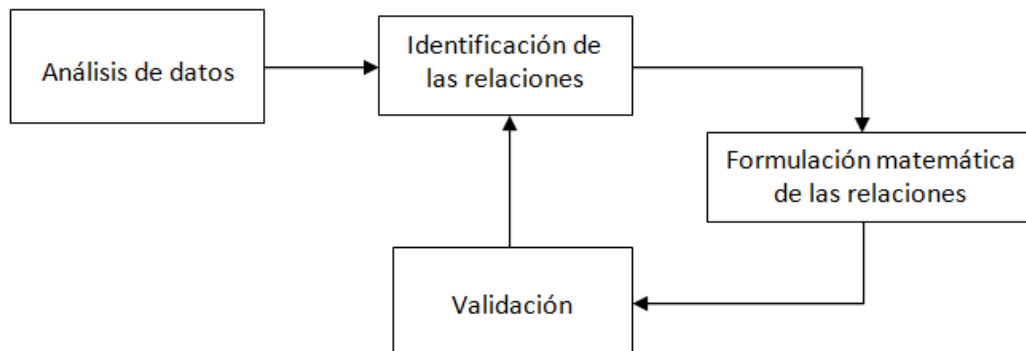


Figura 1: Etapas generales del proceso de modelización. Fuente: (Verdú Monllor, 2004b)

En primer lugar para cualquier problema de investigación, se dispone de una muestra de observaciones en la cual se debe dar previamente un análisis a los datos, según se muestra en la **Figura 1**, el investigador debe poseer la pericia de discriminar entre los datos que serán necesarios para la formulación matemática. En general factores que nos llevarían a descartarlos por distintos motivos ya sean estadísticos, matemáticos o propios de la materia objeto de estudio que ayudan a obtener conclusiones acertadas en la validación. Una vez depuradas las bases de datos, se identifican las diversas relaciones que podrían existir entre las variables, hay que tener en cuenta en este caso la diferencia entre relación y causalidad, la correlación se produce cuando dos o más eventos ocurren al mismo tiempo. Dichos sucesos pueden compartir algún tipo de asociación entre sí, sin embargo, una correlación no implica una relación de causalidad. Se trata simplemente de establecer una especie de comparación entre dos o más variables al mismo tiempo, pero de ningún modo la correlación busca explicar porqué las variables sufren tal o cual cambio. (Kleinbaum, 1998). Por regla general la identificación de las relaciones en el modelo es un punto que se deja en manos del especialista experto en la materia que se pretende explicar con el modelo y el que es capaz de identificar si la ecuación elegida tiene o no sentido o simplemente si le es válida para sus propósitos.

Ahora bien, para la formulación matemática de las relaciones que se efectúan partiendo de los datos observados, ya existe una larga trayectoria en diversas investigaciones cuyos estudios desde el punto de vista matemático y computacional están basados en:

- ✓ Técnicas de análisis de regresión lineal: en las cuales los modelos poseen una forma lineal, además la variable dependiente puede ser explicada ya sea por una única variable independiente o por múltiples variables independientes.

- ✓ Técnicas propias del análisis de regresión no lineal: ya en este tipo su forma es de tipo no lineal, con lo cual se utilizan técnicas de cálculo avanzadas, además de hacer indispensable el uso de alguna herramienta computacional que nos permita poder desarrollar ecuaciones que predigan el fenómeno en estudio.

Básicamente a pesar de que en los modelos lineales la variable dependiente Y puede ser explicada a través de múltiples variables independientes X_1, X_2, \dots, X_k , su tratamiento puede ser más fácil debido a su comportamiento lineal, en comparación con modelos no lineales en los cuales su tratamiento puede llegar a ser tedioso y además en ocasiones resulta complicado el obtener estas relaciones entre las variables. De esta forma se profundizará estos dos tipos posibles de modelos en secciones posteriores, en los cuales se detalla cual es su implementación y su respectiva pertinencia con respecto al desarrollo de la investigación, además su validez matemática así como sus respectivos parámetros que ayuden a discriminar entre los diferentes modelos obtenidos.

En la práctica, (Kleinbaum, 1998) establece que el análisis de regresión es apropiado para varias aplicaciones, algunas posiblemente superpuestas, como podrían ser:

Aplicación 1: Se desea caracterizar la relación entre las variables dependientes e independientes mediante la determinación del grado, la dirección y fuerza de la asociación.

Aplicación 2: Se buscan una fórmula cuantitativa o una ecuación para describir la variable dependiente Y como una función de las variables independientes X_1, X_2, \dots, X_k .

Aplicación 3: Se quiere describir de manera cuantitativa o cualitativamente la relación entre X_1, X_2, \dots, X_k e Y , pero el control de los efectos de algunas otras variables C_1, C_2, \dots, C_p , que se cree, tiene una relación importante con la variable dependiente.

Aplicación 4: Se desea determinar cuál de las varias variables independientes son importantes y cuáles no lo son para describir o predecir una variable dependiente. Es posible que se desee controlar otras variables. También es posible que se desee para clasificar las variables independientes en su orden de importancia.

Aplicación 5: Se desea determinar el mejor modelo matemático para describir la relación entre una variable dependiente y una o más variables independientes.

Aplicación 6: Se desea comparar varias relaciones de regresión derivadas.

Aplicación 7: Se desea evaluar los efectos interactivos de dos o más variables independientes con respecto a una variable dependiente.

Aplicación 8: Se desea obtener una válida y precisa estimación de uno o más coeficientes de regresión a partir de un conjunto más amplio de los coeficientes de regresión en un modelo dado.

Ahora bien, como se han explicado estas diversas aplicaciones, prácticamente el trabajo de investigación ha pasado por todas y cada una de ellas, desde buscar el grado y fuerza de asociación de múltiples variables analizadas, hasta obtener una válida y precisa estimación de los coeficientes de regresión como se verá más adelante.

2.2. Modelos de regresión lineal múltiple

En el problema representativo de regresión, como en la mayoría de los problemas de estadística aplicada, los investigadores disponen de una muestra de observaciones extraída de una población hipotética o real. Con base en los resultados del análisis de los datos de la muestra, se pretende llegar a una decisión respecto a la población de la que se extrajo la muestra. Por lo tanto, es importante que los investigadores comprendan la naturaleza de las poblaciones en las que están interesados. Deben saber lo suficiente respecto a las poblaciones para que sean capaces de elaborar un modelo matemático que la represente, o determinar si se ajusta razonablemente a algún modelo ya establecido. Por ejemplo, si un investigador va a analizar un conjunto de datos mediante los métodos de regresión lineal múltiple, debe estar seguro de que el modelo de regresión lineal múltiple proporciona una representación al menos aproximada de la población. No es de esperarse que el modelo sea una representación fiel de la situación real, dado que pocas veces se encuentra esta característica en los modelos de valor práctico. Un modelo elaborado de forma que corresponda precisamente con los detalles de la situación es, por lo general, muy complicado para proporcionar alguna información de valor. Por otra parte, los resultados que se obtienen a partir del análisis de datos que han sido forzados dentro de un modelo al

que no se ajustan tampoco tienen valor. Sin embargo, por fortuna un modelo perfectamente ajustado no es un requisito para obtener resultados útiles. Los investigadores deben ser capaces de distinguir entre el caso en que el modelo elegido y los datos son lo suficientemente compatibles como para poder proceder y el caso en que se deberá rechazar dicho modelo.

La estrategia elegida para comenzar a modelizar depende del tipo de problema y de los datos; no hay reglas arduas y rápidas. La calidad de los resultados a menudo depende más de la habilidad con la que se aplica una estrategia que en la estrategia particular elegida. A menudo es tentador tratar muchas estrategias y luego utilizar los resultados que proporcionan la interpretación más "razonable" de la relación entre las variables de respuesta y de predicción. Esta aproximación exploratoria exige un cuidado especial para asegurar la fiabilidad de cualquier conclusión. El caso que se estudia puesto que es el más simple, es el de modelos lineales y en general el proceso propuesto para encontrar un modelo válido propuesto por (Kleinbaum, 1998) se puede utilizar como una base para la comprensión de otros métodos, de acuerdo a la **Figura 2** se ofrece una descripción paso a paso de la estrategia:

1. Supongamos que el modelo lineal es el modelo apropiado. Más tarde, la validez de esta hipótesis puede ser investigado.
2. Encontrar mejor plano, que es el plano entre todos los posibles planos que mejor se ajusta (como se definirá más adelante) con los datos.
3. Determinar si el plano que se encuentra en el paso 2 es de ayuda significativa para describir la variable dependiente Y . Aquí es necesario para comprobar que ciertos supuestos estadísticos básicos (ej. Normalidad) se cumplen. Estas suposiciones se discutirán en detalle posteriormente.
4. Examinar si la suposición de un modelo lineal es el correcto. Un enfoque para hacer esto se llama la prueba de bondad de ajuste, aunque otros enfoques pueden ser utilizados en su lugar.
5. Si se determina que la asunción de modelo lineal como no válida en el paso 4, coloque un nuevo modelo (ej. Más o diferentes coeficientes) a los datos, determinar qué tan bien se describe Y (ej. repita el paso 3), y luego decidir si el nuevo modelo es apropiado (ej. repita el paso 4).

6. Continuar a probar nuevos modelos hasta que se encuentre una apropiada.

El diagrama que describe este procedimiento en detalle, se muestra a continuación:

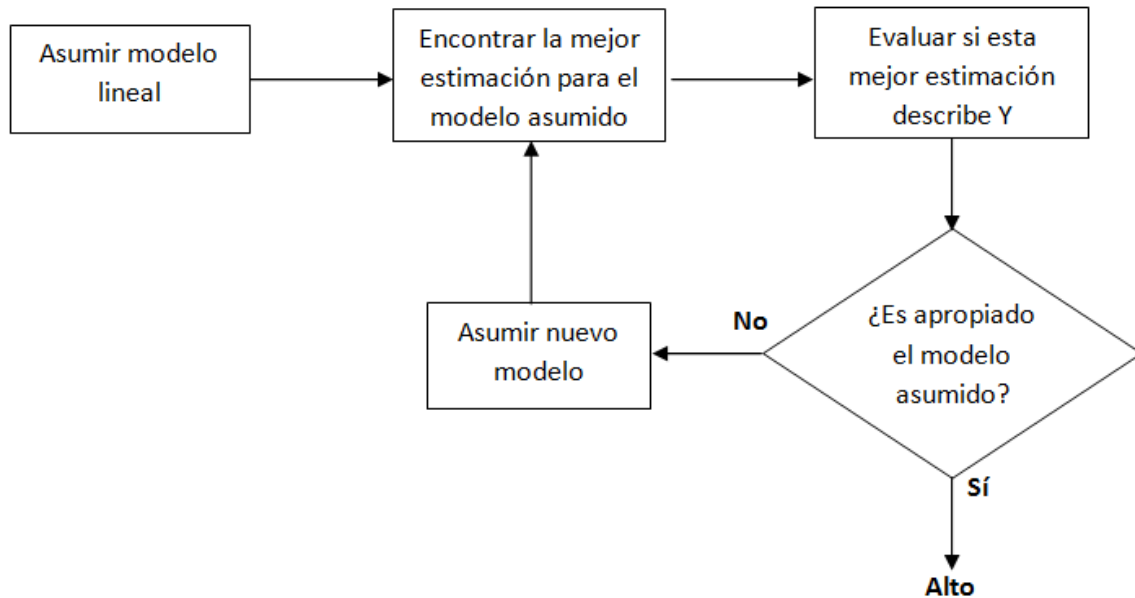


Figura 2: Diagrama de flujo para el método de selección de modelo lineal. Fuente: (Kleinbaum, 1998).

El análisis de regresión lineal múltiple es una herramienta estadística para evaluar la relación lineal existente de una o k variables independientes X_1, X_2, \dots, X_k a una única, continua o discreta variable dependiente Y . Se utiliza con mayor frecuencia cuando las variables independientes no se pueden controlar, como cuando se recogen en una encuesta por muestreo u otro estudio observacional. Sin embargo, es igualmente aplicable a situaciones experimentales más controladas (Kleinbaum, 1998). En algunos escritos a las variables independientes se les llama *variables explicativas* porque se utilizan para explicar la variación en Y . También como *variables de predicción*, porque se usan para predecir Y (Daniel, 2002). O bien en algunos otros textos a la variable dependiente se le llama *endógena*, ya que se origina o se modifica a causa de una o varias variables independientes o *exógenas* (Martinez Rodriguez, 2005).

Un ejemplo de un modelo de regresión lineal múltiple viene dado por cualquier polinomio de segundo orden, u órdenes superiores. Añadiendo términos de orden superior (ej. Un término X^2 o X^3) a un modelo puede ser considerado como equivalente a la adición de

nuevas variables independientes. Por lo tanto, si cambiamos el nombre X por X_1 y X^2 por X_2 el modelo de segundo orden,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + E$$

Puede reescribirse como

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + E$$

Por supuesto, en la regresión polinómica sólo tenemos una variable independiente básica, las otras son funciones matemáticas simples de esta variable básica. En múltiples problemas de regresión más generales, sin embargo, el número de variables independientes básicos puede ser mayor que uno. La forma general de acuerdo a (Daniel, 2002), para un modelo de regresión de k variables independientes, está dada por

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + \dots + \beta_k x_{kj} + e_j \tag{1}$$

La ecuación (1) es básica en la formulación de modelos lineales múltiples, donde y_j es un valor representativo de una de las subpoblaciones de los valores de Y , β_i son los coeficientes de regresión que necesitan ser estimados, las $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{kj}$ son los valores específicos de las variables independientes X_1, X_2, \dots, X_k que deben ser todas variables básicas separadas, o algunas pueden ser funciones de algunas variables básicas. e_j es la cantidad en la que la respuesta observada de cualquier individuo se desvía de la superficie de respuesta. Por lo tanto, e_j es el componente de error en el modelo.

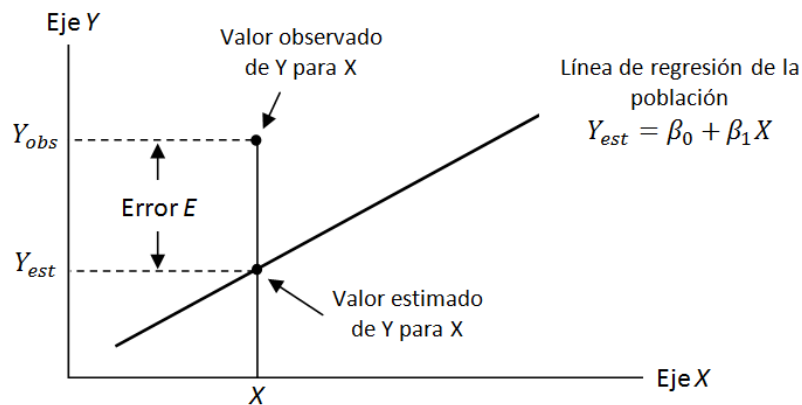


Figura 3: Variables que intervienen en un modelo de regresión lineal para el caso de bidimensional. Fuente: Elaboración propia.

En la **Figura 3** podemos observar las diferentes variables que intervienen en la construcción del modelo de regresión lineal para el caso en el que Y depende de una única variable X , el cual se representa mediante una línea recta en el espacio bidimensional. De igual forma en la **Figura 4** podemos observar todos estos datos que intervienen en el modelo de regresión

para el caso que Y depende de dos variables independientes X_1 y X_2 , cuya representación se amplía a un plano en el espacio tridimensional.

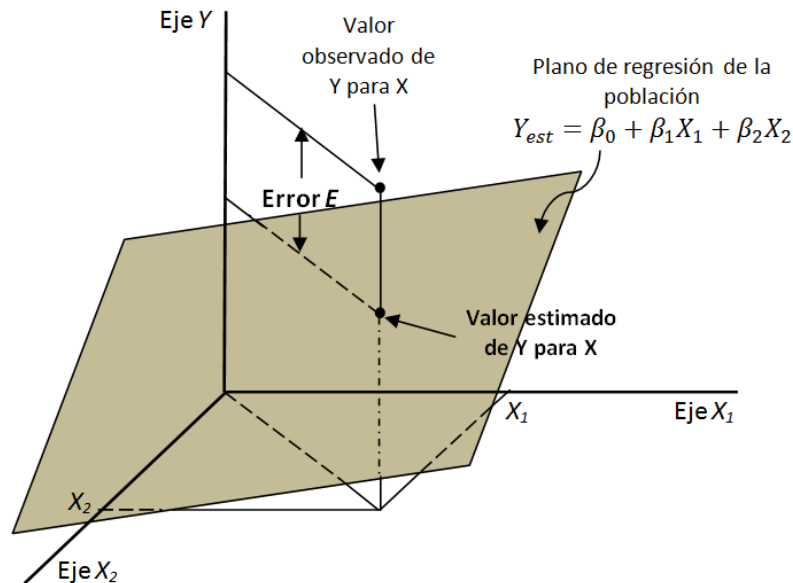


Figura 4: Variables que intervienen en un modelo de regresión lineal para el caso tridimensional. Fuente: Elaboración propia.

Cuando se trata con una sola variable independiente, nuestro problema fácilmente puede describirse gráficamente como la de encontrar la curva que mejor se ajusta a la dispersión obtenido de n puntos individuales, $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$. Por lo tanto, tenemos una representación en dos dimensiones que implica una representación de la forma que se muestra en la **Figura 5**. Además, la ecuación de regresión para este problema se define como la trayectoria descrita por los valores medios de la distribución de Y cuando se permite variar X .

De acuerdo a (Kleinbaum, 1998) cuando el número k de variables independientes (básicas) es dos o más, la (gráfica) dimensión del problema aumenta. La ecuación de regresión deja de ser una curva en el espacio de dos dimensiones y se convierte en una hipersuperficie en el espacio $(k + 1)$ -dimensional. Obviamente, no vamos a ser capaces de representar en una sola grafica o bien la dispersión de los puntos de datos o la ecuación de regresión si se trata de más de dos variables independientes básicas. En el caso especial $k = 2$, el problema es encontrar la superficie en el espacio tridimensional que mejor se adapte a la dispersión de los puntos $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$. La ecuación de regresión en este caso, por lo tanto, es la superficie descrita por la los valores medios de las Y en varias combinaciones de valores

de X_1 y X_2 ; es decir, lo que corresponde a cada par distinto de valores de X_1 y X_2 es una distribución de los valores de Y con media $\mu_{Y|X_1, X_2}$ y varianza $\sigma_{Y|X_1, X_2}^2$.

Del mismo modo que la curva más simple en espacio de dos dimensiones es una línea recta, la superficie más simple en el espacio tridimensional es un plano, que tiene la forma del modelo de la forma $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + E$, por lo tanto, encontrar el mejor ajuste del plano es con frecuencia el primer paso para determinar el mejor ajuste de la superficie en el espacio tridimensional cuando dos variables independientes son relevantes, al igual que la mejor línea recta es el primer paso cuando se trata de una variable independiente. Una representación gráfica de un ajuste planar de los datos de una situación tridimensional se da en la **Figura 6**.

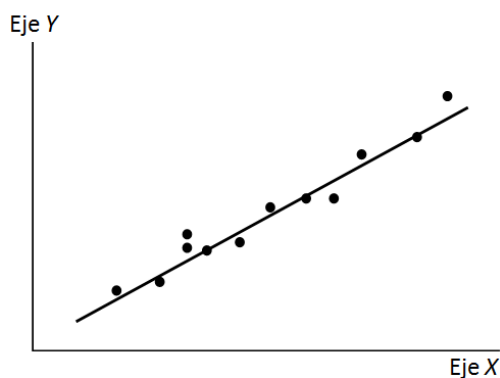


Figura 5: Mejor recta de regresión para un diagrama de dispersión de una sola variable independiente. Fuente: Elaboración propia.

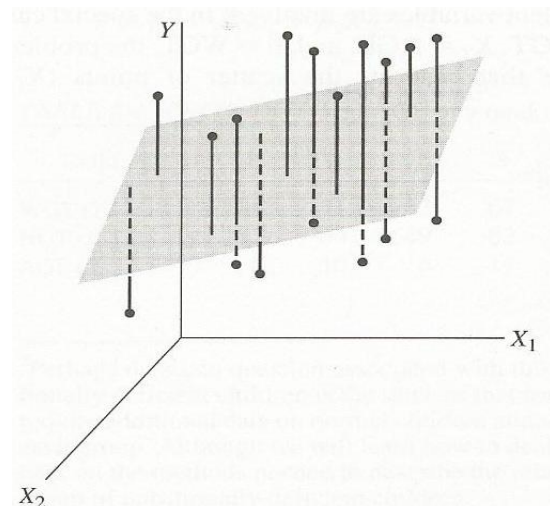


Figura 6: Mejor plano apropiado para datos tridimensionales. Fuente: (Kleinbaum, 1998)

Algunas de las suposiciones en las cuales se basa el análisis de regresión lineal múltiple mencionadas por (Kleinbaum, 1998) se detallan a continuación:

Suposición 1: Existencia: Para cada específica combinación de valores (básica) de las variables independientes X_1, X_2, \dots, X_k , Y es una (univariable) variable aleatoria con una cierta distribución de probabilidad teniendo media y varianza finita.

Suposición 2: Independencia: Las observaciones Y son estadísticamente independientes una de otra. Al igual que con la regresión lineal, esta suposición se viola cuando por lo general varias observaciones de Y se hacen sobre el mismo tema. Los métodos para hacer frente a un modelo de regresión de los datos correlacionados

incluyen técnicas ANOVA de medidas repetidas y las técnicas de estimación de ecuaciones generalizadas (GEE).

Suposición 3: Linealidad: El valor medio de Y para cada combinación específica de X_1, X_2, \dots, X_k es una función lineal de X_1, X_2, \dots, X_k . Es decir:

$$\mu_{Y|X_1, X_2, \dots, X_k} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k \quad (2)$$

Ó

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + E \quad (3)$$

Donde E es el componente de error que refleja la diferencia entre la respuesta observada de un individuo Y , y la verdadera respuesta promedio $\mu_{Y|X_1, X_2, \dots, X_k}$. Algunos

comentarios están en orden con respecto a la Asunción 3:

1. La superficie descrita por la ecuación (2) se llama la ecuación de regresión (o superficie de respuesta o de la superficie de regresión).
2. Si algunas de las variables independientes son funciones de orden superior de un par de variables independientes básicas (ej. $X_3 = X_1^2, X_5 = X_1 X_2$), la expresión $\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k$ es no lineal en las variables básicas (de ahí el uso de la palabra superficie en lugar de plano).
3. En consonancia con su significado en la regresión lineal, E es la cantidad en la que la respuesta observada de cualquier individuo se desvía de la superficie de respuesta. Por lo tanto, E es el componente de error en el modelo.

Suposición 4: Homocedasticidad: La varianza de Y es la misma para cualquier combinación fija de X_1, X_2, \dots, X_k . Esto es:

$$\sigma_{Y|X_1, X_2, \dots, X_k} = \text{Var}(Y|X_1, X_2, \dots, X_k) \equiv \sigma^2 \quad (4)$$

Como antes, esto se llama el supuesto de homocedasticidad. Una alternativa (pero equivalente) definición de homocedasticidad, basado en (3) tenemos entonces

$$\sigma_{E|X_1, X_2, \dots, X_k} \equiv \sigma^2$$

Esta suposición puede parecer muy restrictiva. Pero la varianza de la heterocedasticidad necesita ser considerado sólo cuando la base de datos muestra evidentes y significativas salidas de homogeneidad. En general, las salidas suaves no tienen efectos adversos significativos en los resultados.

Suposición 5: Normalidad: para cualquier combinación fija de X_1, X_2, \dots, X_k , la variable Y se distribuye normalmente, con media μ y varianza σ^2 . En otras palabras,

$$Y \sim N(\mu_{Y|X_1, X_2, \dots, X_k}, \sigma^2)$$

O equivalentemente,

$$E \sim N(0, \sigma^2) \tag{5}$$

Este supuesto no es necesario para el ajuste de los mínimos cuadrados del modelo de regresión, pero se requiere en general para efectuar la inferencia. Las pruebas paramétricas habituales de hipótesis e intervalos de confianza utilizados en un análisis de regresión son vigorosas, en el sentido de que sólo las salidas extremas de la distribución de Y a partir de resultados falsos producto de la normalidad. (Esta declaración se basa tanto en la evidencia teórica y experimental). Si la hipótesis de normalidad no se sostiene, uno generalmente busca una transformación de Y - digamos, $\log Y$ o \sqrt{Y} - para producir un conjunto transformado de observaciones Y , que son aproximadamente normal. Si la variable Y es bien categórica u ordinal, sin embargo, los métodos de regresión alternativos como la regresión logística (para Y 's binarias) o la regresión de Poisson (para Y 's discretas) normalmente son obligatorios.

2.2.1. Regresión por el método de los mínimos cuadrados

Las estimaciones para determinar los coeficientes de regresión $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ del modelo especificado por la ecuación (1) se obtiene por el método de los mínimos cuadrados. Esto quiere decir que se quiere minimizar la suma de las desviaciones elevadas al cuadrado de los valores observados de Y respecto de la superficie de regresión resultante. En general, es posible representar la desviación de un punto a partir de la curva mediante la siguiente ecuación:

$$e_j = y_j - \beta_0 - \beta_1 x_{1j} - \beta_2 x_{2j} - \dots - \beta_k x_{kj}$$

Lo que se requiere es que esta expresión sea la mínima:

$$\sum e_j^2 = \sum (y_j - \beta_0 - \beta_1 x_{1j} - \beta_2 x_{2j} - \dots - \beta_k x_{kj})^2 \tag{6}$$

Esta cantidad, es conocida como la *Suma de los Cuadrados Residuales (SSE)* y además puede denotarse como:

$$SCR = S(\beta) = \sum (y_j - \hat{y}_j)^2$$

La minimización de esta función viene dada por la resolución del sistema de ecuaciones que se plantea al igualar a cero el gradiente de esta función $S(\beta)$, considerando, claro está, las derivadas parciales respecto a cada β_i . De esta forma tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum (y_j - \beta_i x_{1j} - \beta_i x_{2j} - \dots - \beta_k x_{kj}) \cdot x_{1j} &= 0 \\ \sum (y_j - \beta_i x_{1j} - \beta_i x_{2j} - \dots - \beta_k x_{kj}) \cdot x_{2j} &= 0 \\ &\dots \\ \sum (y_j - \beta_i x_{1j} - \beta_i x_{2j} - \dots - \beta_k x_{kj}) \cdot x_{kj} &= 0 \end{aligned}$$

El cual (Bates & Watts, 1988), propone el estimador de máxima probabilidad $\hat{\beta}$, el cual es el valor de β que minimiza $S(\beta)$. Conocido como la forma matricial para el método de mínimos cuadrados y se escribe de la forma:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \quad (7)$$

Para el cual

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{k1} & \dots & x_{kj} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si para la ecuación (1) se elimina el término independiente, la ecuación toma la forma:

$$y_j = \beta_i x_{1j} + \beta_i x_{2j} + \dots + \beta_k x_{kj} + e_j$$

El planteamiento es exactamente el mismo, salvo que X ahora vendrá dada por la matriz:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \dots & x_{kj} \end{pmatrix}$$

El tema puede continuar siendo ampliado tanto como se quiera, los autores que profundizan y que se recomiendan son (Bates & Watts, 1988), (Box, Hunter, & Hunter, 2005), (Daniel, 2002), (Kleinbaum, 1998) y (Seber & Wild, 2003).

2.3. Modelos de regresión no lineal

La idea básica de la regresión no lineal es el mismo que el de regresión lineal, es decir, relacionar una respuesta a un vector de variables de predicción. La regresión no lineal se caracteriza por el hecho de que existe una ecuación de predicción que se relaciona de manera no lineal en una o más parámetros desconocidos. Mientras que la regresión lineal se utiliza a menudo para la construcción de un modelo puramente empírica, la regresión no lineal por lo general se presenta cuando hay razones físicas para creer que la relación entre la respuesta y los predictores sigue una forma no lineal. Los parámetros desconocidos en la función de regresión son típicamente estimados minimizando la suma residual de cuadrados, aunque otros criterios se pueden utilizar si se desea proteger contra los errores no normales. Los modelos de regresión no lineal populares incluyen sumas de funciones exponenciales, funciones racionales o curvas de crecimiento, tales como curvas logísticas o de Gompertz (Smyth, 2006).

La descripción de los modelos de regresión no lineal se efectúa por medio del planteamiento de una ecuación matemática no lineal para los parámetros, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$, de la ecuación (1), entonces el sistema que se plantea no tiene el carácter lineal, por lo que hay que recurrir a técnicas de cálculo numérico para obtener una solución. Hay una gran cantidad de literatura sobre cómo determinar las estimaciones de los parámetros mediante la técnica de mínimos cuadrados, una vez que se ha especificado un modelo no lineal y un conjunto de datos obtenidos (Chambers, 1973). Este modelo / combinación de conjunto de datos, determina de forma única las estimaciones de mínimos cuadrados salvo casos patológicos, pero algunos puede, sin embargo requerir considerable esfuerzo computacional para llegar a las estimaciones (Ratkowsky, 1983). De esta forma se nombran las técnicas más utilizadas ya que estas son diversas y varían según cada situación, así (Verdú Monllor, 2004b) resume como métodos habituales o clásicos los siguientes:

- ✓ Método de Gauss-Newton
- ✓ Método del Gradiente o de paso descendente
- ✓ Método de Levenberg-Marquardt

Estos tres métodos funcionan de forma iterativa, de manera que se parte de un valor inicial para los parámetros y en cada paso se va aproximando a un nuevo valor más cercano al óptimo. En general los dos últimos métodos habría que enmarcarlos dentro de las técnicas generales de optimización de campos escalares. El primer método está basado en la linealización de la ecuación del modelo y por medio de las técnicas de regresión lineal ir obteniendo una aproximación mejor a cada paso iterativo del algoritmo. En cualquier caso, el tercer método es un "híbrido" de los dos primeros.

Todos los métodos tienen el problema de no tener garantizada la convergencia hacia el óptimo global, con el consecuente problema de poder obtener un óptimo local o en algunos casos la no convergencia. Los tres métodos necesitan resolver una serie de cuestiones que se plantean a la hora de implementar los algoritmos, y que principalmente se centran en la obtención de los valores de las derivadas parciales de dichas ecuaciones. Originalmente, esto era abordado por medio de técnicas de cálculo numérico para la obtención de las mismas, o simplemente introduciendo su expresión dado que se disponía de la ecuación por lo que introducir por parte del usuario dichas derivadas parciales estaba a su alcance aunque obliga a dicho usuario debe intervenir a cada cambio de modelo.

La técnica por excelencia para determinar los coeficientes de las diferentes variables involucradas en los modelos no lineales, es el método de los mínimos cuadrados. A continuación se describe los principales términos involucrados en este método:

Dado el modelo $y = f(\bar{x}; \bar{\alpha}) + z$, se dice que es no lineal si al menos una de las derivadas parciales respecto a algún parámetro α_j , depende, al menos, de uno de estos parámetros α_j con $j = l..k$, donde k es el número de parámetros a determinar.

Para este caso, y por regla general, los métodos para determinar el valor de los parámetros son complejos y están basados en los algoritmos iterativos mencionados con anterioridad. Algunos ejemplos de modelos bien conocidos de esta naturaleza vienen dados por las ecuaciones:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 x_1^2 \rightarrow \text{Movimiento en caída libre}$$

$$y = \alpha_1 \sin\left(\frac{2\pi}{\alpha_2}\right) (x_1 \pm \alpha_3 x_2) \rightarrow \text{Movimiento de una onda en una cuerda}$$

$$y = \alpha_1 \cos(\alpha_2 x_1 + \alpha_3) \rightarrow \text{Oscilador armónico simple}$$

$$y = \alpha_1 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot x_1} \cdot \cos(\alpha_3 x_1 + \alpha_4) \rightarrow \text{Oscilador armónico amortiguado}$$

En estos ejemplos, los parámetros a ser estimados los denotamos por α_j y por x_j denotamos el vector de las variables independientes. Como se aprecia, se ha cambiado un poco la nomenclatura y para denotar a los parámetros se ha decidido utilizar como símbolo para los parámetros α y no β para enfatizar la diferencia sobre el caso lineal. En general, el modelo viene denotado como:

$$y = f(\bar{x}; \bar{\alpha}) + z \tag{8}$$

O simplemente

$$y = f(x; \alpha) + z$$

Donde $Z \sim N(0, \sigma^2)$ es una magnitud asociada al concepto de error en la medición de los datos u otras múltiples causas.

Esta asunción principal de normalidad para el *error* se hace necesaria para posteriores asunciones sobre distribuciones conocidas de estadísticos que se utilizan en la validación del modelo, aunque para este caso pierde peso esta condición previa, como veremos más adelante. En paralelismo a la **Figura 5** y **Figura 6** podríamos considerar la siguiente aproximación a graficas similares:

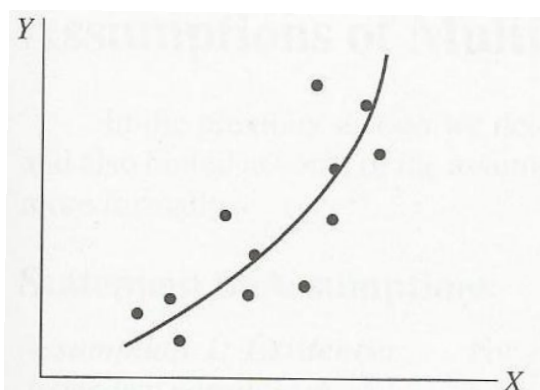


Figura 7: Diagrama de dispersión no lineal y mejor curva de ajuste para una sola variable independiente. Fuente: (Kleinbaum, 1998)

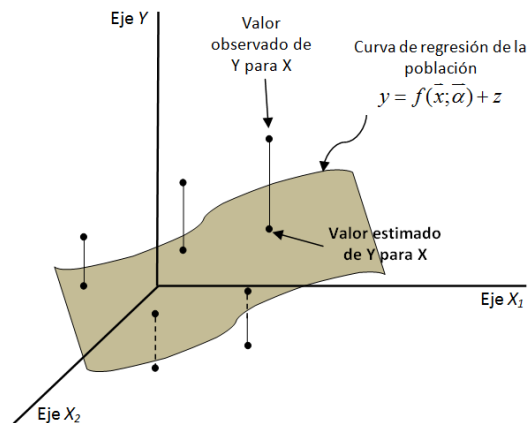


Figura 8: Diagrama de dispersión y mejor curva de regresión para un espacio tridimensional. Fuente: Elaboración propia.

En las imágenes anteriores podemos apreciar gráficamente lo que se ha explicado con anterioridad. Para el caso de la **Figura 7** cuando solo se trata de una única variable independiente, caemos al caso para una curva bidimensional, y para la **Figura 8** estamos en el caso de dos variables independientes para las cuales su representación sería una curva en el espacio tridimensional. De igual forma se va ampliando el concepto a medida que agregamos variables independientes de tal forma que al pretender efectuar representaciones graficas se deben realizar en el hiperespacio. Además según se aprecia, ya los cálculos se van tornando más difíciles por el hecho de que perdemos la linealidad, pero de igual forma se poseen poderosas herramientas computacionales que nos facilitan el trabajo de la realización de las iteraciones para llegar a valores validos de los parámetros.

2.3.1. Modelos linealmente transformables

Un caso sencillo para trabajar es el de modelos no lineales, para los cuales existe la posibilidad de hacer una serie de procedimientos para poder analizar los datos desde una forma lineal. Un caso conocido y común en ingeniería es la elaboración de curvas de Intensidad, duración y frecuencia (IDF) en hidrología para determinar la ecuación que rige la intensidad para diferentes periodos de retorno:

$$I = \frac{\alpha_1}{(x_1 + \alpha_2)^{\alpha_3}} \rightarrow \log(I) = \log(\alpha_1) - \alpha_3 \log(x_1 + \alpha_2)$$

Donde α_1, α_2 y α_3 son tres parámetros que están relacionados con el periodo de retorno p , y x_1 es la duración para un periodo de retorno p .

Ahora bien, asumiendo que $y = \log(I)$, $\beta_1 = \log(\alpha_1)$, $\beta_2 = \alpha_3$ y $u = \log(x_1 + \alpha_2)$, entonces la ecuación anterior la podremos expresar de la forma:

$$y = \beta_1 - \beta_2 u$$

Llamamos a este tipo de modelos linealmente transformables, algunos autores utilizan el término "intrínsecamente lineal". Los modelos linealmente transformables tienen algunas ventajas en la regresión no lineal, ya que es mucho más fácil obtener los valores de los parámetros involucrados en la ecuación.

Es importante entender, sin embargo, que una transformación de los datos implica una transformación del término de perturbación también, que afecta a los supuestos en él. Por lo tanto, aunque esta transformación permite una mayor facilidad en el trato de los datos y

del modelo los supuestos para la ecuación (8) e inferencias que se hagan a partir de los datos transformados, no son necesariamente apropiados para el modelo no lineal. Por lo tanto debemos utilizar la regresión lineal de los datos originales, o los mínimos cuadrados ponderados en los datos transformados. A veces, por supuesto, la transformación de un conjunto de datos para inducir varianza constante también produce una función expectativa lineal en el que caso de regresión lineal se puede utilizar en los datos transformados (Bates & Watts, 1988). De todos modos, nuestro objetivo es abordar el caso general en el que su reducción a un modelo lineal no es posible.

2.3.2. Método utilizado para el ajuste de parámetros

Retomando el caso de los modelos no lineales, básicamente los métodos se engloban dentro de los distintos algoritmos existentes para la minimización de campos escalares. Se ha de definir una función objetivo que será minimizada, y sobre ella se aplican los distintos métodos de cálculo de mínimos.

Así se define como *suma de los errores al cuadrado (SSE)*:

$$S(\alpha) = \sum (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum (f(x; \alpha) - y_i)^2 \quad (9)$$

Por tanto definimos nuestro problema como el de obtener los valores de α tales que minimicen la *suma de los errores al cuadrado (SSE)*. Así debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} \sum (f(x; \alpha) - y_i) \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = 0 \\ \sum (f(x; \alpha) - y_i) \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = 0 \\ \vdots \\ \sum (f(x; \alpha) - y_i) \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} = 0 \end{cases}$$

Si tomamos el caso para el cual $f(x; \alpha)$ es lineal respecto a todos los parámetros, entonces

$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$ no depende de los parámetros, y por tanto el sistema es independiente de α teniendo

la condición de lineal respecto a estos parámetros y por tanto, de fácil resolución por métodos algebraicos, como hemos visto en la sección anterior. Así es que nos vamos a centrar en su resolución para el caso no lineal en alguno de los parámetros. Ello sitúa el

sistema en la esfera de lo imposible de abordar desde el punto de vista algebraico por lo que se hace necesario la utilización de métodos iterativos (Verdú Monllor, 2004b).

Los métodos iterativos clásicos, como se ha mencionado son 3 los principalmente utilizados, aunque con posterioridad se han ido mejorando estos algoritmos para casos concretos con características específicas del modelo. Estos son: Linealización o Gauss Newton, de paso descendente y de Marquardt-Levenberg. La idoneidad de un método u otro, viene en función del tipo de modelo elegido, para el caso del programa utilizado para generar los modelos se hace especial énfasis en el de carácter más general el cual es el de linealización, también conocido como algoritmo de Gauss-Newton.

Para esto, se toma en consideración el desarrollo de Taylor para el modelo $y = f(x; \alpha)$ en un valor concreto de $\alpha = \alpha_0$ la forma:

$$f(x; \alpha) = f(x; \alpha_0) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha_i} \cdot (\alpha_i - \alpha_{i0}) \quad (10)$$

Donde k representa el número de parámetros. Además para la forma matricial se utilizará la siguiente notación:

$$\begin{aligned} f_x^0 &= f(x; \alpha_0) \\ \beta_i^0 &= (\alpha_i - \alpha_{i0}) \\ V_{ix}^0 &= \left. \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=\alpha_0} \end{aligned}$$

Con este planteamiento, la ecuación (10) quedaría expresada como:

$$y = f_x^0 + \sum_{i=1}^k \beta_i^0 V_{ix}^0 \quad (11)$$

Es decir, estaríamos considerando un modelo lineal, en el sentido de la sección anterior y razonaríamos de forma similar a como lo hemos hecho en la sección 2.2 con el objetivo de estimar valores para los sucesivos β_i^0 , que denotaremos como b_i^0 . Por tanto, considerando la teoría de mínimos cuadrados se llegará a obtener los valores b_i^0 que mejor aproximan los valores planteados en la ecuación (11) definiendo:

$$V_0 = \begin{pmatrix} V_{11}^0 & V_{21}^0 & \cdots & V_{k1}^0 \\ V_{12}^0 & V_{22}^0 & \cdots & V_{k2}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{1n}^0 & V_{2n}^0 & \cdots & V_{kn}^0 \end{pmatrix}$$

$$b_0 = \begin{pmatrix} b_1^0 \\ b_2^0 \\ \vdots \\ b_k^0 \end{pmatrix}$$

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_1 - f_1^0 \\ y_2 - f_2^0 \\ \vdots \\ y_k - f_k^0 \end{pmatrix} = y - f^0$$

Llegamos a la conclusión, según lo visto en la sección 2.2 que:

$$b_0 = (V_0^t V_0)^{-1} V_0^t (y - f^0)$$

Este vector, b_0 es el que minimiza la correspondiente suma de cuadrados:

Recordando que $\beta_i^0 = (\alpha_i - \alpha_{i0})$, entonces, podríamos considerar $\alpha_{i1} = \alpha_i = b_i^0 - \alpha_{i0}$ para $i=1..p$, como valores para los parámetros α que aproximan mejor que los valores α_{i0} .

Razonando de forma análoga, llegamos al siguiente argumento iterativo, que supone en sí mismo una definición del mismo algoritmo:

$$\bar{\alpha}_{j+1} = \bar{\alpha}_j + b_j$$

$$\bar{\alpha}_{j+1} = \bar{\alpha}_j + (V_j^t V_j)^{-1} V_j^t (y - f^j)$$

Este proceso iterativo, continúa hasta que se satisfaga la condición de parada. Ésta se suele plantear en términos de que los valores consecutivos de los valores de α sean "suficientemente" pequeños:

$$\|\alpha_{i+1} - \alpha_i\| < \delta$$

A cada paso de la iteración, $S(\alpha_j)$ puede ser evaluado comprobando que efectivamente este valor ha disminuido. Dado que estamos utilizando una linealización del modelo original, este hecho de disminución del valor de $S(\alpha_j)$ podría no darse. En este caso, se han propuesto en la literatura diversas posibilidades, siendo la más habitual la que resulta

de dividir recursivamente el valor de b_j hasta que se obtenga una disminución del valor $S(\alpha_{j+1})$.

Así, consideraríamos el factor de paso λ de la siguiente forma:

$$\bar{\alpha}_{j+1} = \bar{\alpha}_j + \lambda \cdot b_j$$

Para $\lambda = 1$, simplemente tendríamos la ecuación original, y subdividimos el valor de λ en forma reiterada hasta encontrar una disminución en el valor de $S(\alpha_{j+1})$. Además si se desea ampliar más sobre la regresión no lineal, se deja al lector las siguientes lecturas, (Bates & Watts, 1988), (Seber & Wild, 2003) y (Ratkowsky, 1983).

2.4. Discriminación y criterio de selección de entre los modelos no lineales

Concerniente a la validación y criterio de selección de los diferentes modelos elaborados, el investigador debe proceder a estudiar la correspondencia que existe entre los resultados obtenidos mediante el modelo propuesto y los que proporciona la base de los datos que se elaborado en base a experimentos u observación. El error que se produce, lo ideal sería que fuese el menor posible o que al menos siguiese una distribución ya conocida y estudiada, pero al enfocarnos en modelos de regresión no lineal vemos se acarrea el problema de la pérdida de normalidad. Por tanto las condiciones de partida que se han propuesto en el modelo lineal y sus posibles inferencias dejan de tener su sentido. Sin embargo, no hay estudios en la literatura sobre la construcción de métodos alternativos para los casos no lineales. Su dificultad extrema entorpece líneas de investigación en este sentido. A falta, pues, de resultados en esta línea los estudios más recientes han seguido manteniendo la condición de linealidad sobre la variable independiente basado en la suposición de que en los puntos observados, la aproximación lineal de Taylor al modelo está suficientemente cercana como para que las propiedades características sobre normalidad se mantengan (Verdú Monllor, 2004b). Análogamente en (Bates & Watts, 1988) se puede comprobar como para la validación del modelo se utilizan las mismas técnicas que para el caso lineal. De esta forma, si el modelo es inadecuado o alguna de las asunciones hechas no es apropiada, entonces el modelo debe ser modificado y el análisis continuará hasta que un resultado satisfactorio sea obtenido.

Se podría considerar el diseño de contraste de hipótesis en cuanto a las ventajas de un modelo sobre otro, pero la pérdida de la normalidad derivada de una ausencia de linealidad en muchos de los modelos resultantes, evita los cálculos de ser rigurosa y formal. Por esta razón, cualquier intento en este sentido no puede ser más que una mera aproximación por parte del investigador (Verdu & Villacampa, 2008), con lo cual se ha decidido dejar de lado estas pruebas y pasar directamente a analizar estimadores que sean más fiables y directos como ser el *Coefficiente de Determinación* (R^2) y el *Coefficiente de Variación Porcentual Medio* (CVP_{med}).

2.4.1. Coeficiente de determinación (R^2)

Primero se estudia el valor del *coeficiente de determinación* (R^2) que es el estimador más utilizado para la regresión en el ámbito de la investigación, aunque su única consideración como medida de la bondad del ajuste nos lleva, a elaborar conclusiones equivocadas y a la afirmación de que es necesario contar con medidas adicionales que completen el análisis (Martinez Rodriguez, 2005). A pesar de todo esto que se ha mencionado con anterioridad se ha decidido calcular los respectivos valores de R^2 para los modelos propuestos como una medida que ayude a inferir sobre los datos, también para saber cómo varía este en la medida que el modelo se torna más complejo o simplemente dependa de más variables, además es un valor que se incluye en todos los estudios encontrados a pesar de su poca aplicabilidad.

Según (Daniel, 2002), el *coeficiente de determinación* es una forma de evaluar la eficiencia de la ecuación de regresión, el cual compara la dispersión de los puntos en torno a la curva de regresión con la dispersión en torno a \bar{y} , la media de los valores de la muestra de Y . Algunos términos importantes que se involucran en este coeficiente se mencionan a continuación:

- ✓ *Suma total de cuadrados (SST)*: es una medida de la dispersión de los valores observados de Y en torno a su media \bar{y} ; es decir, ese término es una medida de la variación total en los valores observados de Y . Se puede identificar este término como el numerador de la fórmula de la varianza muestral, además su magnitud viene definida por la ecuación:

$$SST = \sum_{j=1}^k (y_j - \bar{y})^2 \quad (12)$$

Donde y_j es el valor observado para la variable dependiente; \bar{y} es la media de los valores de la muestra Y .

- ✓ *Suma de cuadrados explicada (SSR)*: mide la cantidad de variabilidad total en los valores observados de Y que se toman en cuenta mediante la relación lineal entre los valores observados de X e Y . A esta cantidad se le conoce también como la suma de cuadrados debido a la regresión y viene expresada por la ecuación:

$$SSR = \sum_{j=1}^k (\hat{y}_j - \bar{y})^2 \quad (13)$$

Donde \hat{y}_j es el valor estimado que proporciona la ecuación de la regresión.

- ✓ *Suma de cuadrados inexplicada (SSE)*: es una medida de la dispersión de los valores observados de Y en torno a la recta de regresión, la cual se conoce también como *suma de cuadrados del error* o *suma residual de cuadrados*. Esta cantidad se minimiza cuando se obtiene la recta de mínimos cuadrados y se expresa mediante la ecuación

$$SSE = \sum_{j=1}^k (y_j - \hat{y}_j)^2 \quad (14)$$

Luego la relación existente entre las ecuaciones (12), (13) y (14) viene dada por medio de:

$$SST = SCE + SSE \quad (15)$$

Estas sumas, son importantes ya que también se involucran al momento de efectuar la tabla ANOVA. Ahora, continuando con la definición del *coeficiente de determinación* tenemos que se define como:

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = \frac{\sum_{j=1}^k (\hat{y}_j - \bar{y})^2}{\sum_{j=1}^k (y_j - \bar{y})^2} \quad (16)$$

De acuerdo a la relación implicada por la ecuación (15) el R^2 también se puede expresar de la forma:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^k (y_j - \hat{y}_j)^2}{\sum_{j=1}^k (y_j - \bar{y})^2}$$

Con lo cual se puede deducir la propiedad que $0 \leq R^2 \leq 1$.

La utilidad fundamental del *coeficiente de determinación* es, como estadístico descriptivo del éxito de las variables independientes, para explicar el comportamiento de la variable dependiente. Mientras que resulta ciertamente válido en este contexto, su utilización puede criticarse en circunstancias donde el número de variables independientes no es una proporción pequeña del número total de observaciones. En este caso, puede parecer que el modelo se ajusta muy bien a los datos, aunque lo cierto es que las variables independientes no tienen un vínculo fuerte con la variable dependiente.

2.4.2. Medidas directas del error, elección del mejor modelo

En esta sección se va a plantear un nuevo problema. Se han planteado, hasta el momento, que distintos modelos pueden ser usados para explicar una variable en función de otras. Podría, por tanto, darse la circunstancia de que el investigador que busca el modelo tuviera que elegir entre distintos modelos. Para ello se hace necesaria la utilización de criterios que nos permitan seleccionar un modelo u otro. De nuevo se puede plantear el diseño de contrastes de hipótesis sobre la bondad del ajuste de un modelo frente a otro. Pero la pérdida de la condición de normalidad por ausencia de linealidad impide que los cálculos sean rigurosos y formales. Por tanto cualquier intento en esta línea no deja de suponer una mera aproximación.

Hay incluso razones más subjetivas que objetivas en las manos del investigador que permitirán discriminar unos modelos frente a otros simplemente por justificación física, química, botánica, ingenieril, etc., en los parámetros que intervienen en cada modelo, y ésta podría suponer una razón de tanto peso como cualquier otra de carácter más objetivo. En términos generales, se debe elegir el modelo con el promedio más bajo de los residuos como el modelo "mejor" para explicar el fenómeno (Verdú Monllor, 2004a). En este sentido, varias "distancias" se pueden establecer entre el vector observado y el vector de valores estimados; en otras palabras, se pueden considerar diferentes normas para el vector de residuos, las cuales se definen así:

$$\|e\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \dots + e_k^2} \quad (17)$$

$$\|e\|_1 = \max \{abs(e_1), abs(e_2), abs(e_3), \dots, abs(e_k)\} \quad (18)$$

$$\|e\|_2 = \frac{abs(e_1) + abs(e_2) + abs(e_3) + \dots + abs(e_k)}{k} \quad (19)$$

Con e_1, \dots, e_k como el valor absoluto de la diferencia entre el valor observado y el valor estimado; $k=1..n$. es el número de observaciones. Además nótese que $\|e\|$ es equivalente a utilizar *SSR*.

Es en este sentido que se buscan nuevos índices, que incorporen una medida de interpretación más cómoda para el investigador, como es el caso del denominado *coeficiente de variación porcentual medio* (CVP_{med}), el cual se define mediante la ecuación:

$$CVP_{med} = \frac{abs\left(\frac{e_1}{y_1}\right) + abs\left(\frac{e_2}{y_2}\right) + abs\left(\frac{e_3}{y_3}\right) + \dots + abs\left(\frac{e_k}{y_k}\right)}{k} \quad (20)$$

Con e_1, \dots, e_k como el valor absoluto de la diferencia entre el valor observado y el valor estimado; y_1, \dots, y_k son los valores observados y $k=1..n$. es el número de observaciones.

Como se puede apreciar, $\frac{e_k}{y_k} \cdot 100$ es una medida del porcentaje de error cometido con

respecto a nuestra variable observada, y_k , es en este sentido que se escoge CVP_{med} , como la medida de discriminación y criterio de selección entre los diferentes modelos por ser un coeficiente que incluye la medida objetiva del error para toda la base de datos elaborada y también un valor que nos permite saber en qué porcentaje de influencia está con respecto a los valores observados. Esta medida como se podrá observar en la parte del contenido específico de la parte ingenieril, se ha calculado y representado este valor gráficamente para cada modelo elaborado. Para ampliar más sobre este coeficiente se recomienda (de Myttenaere, Golden, Le Grand, & Rossi, 2016).

III. Objetivos

3.1. Objetivo General

- ✓ Seleccionar, estudiar y depurar datos provenientes de un campo específico de índole ingenieril para su modelización.

3.2. Objetivos Específicos

- ✓ Estudiar el programa *Polimodels* para la obtención de modelos que se ajusten en la medida de lo posible a los datos, seleccionando las mejores variantes de los algoritmos clásicos de regresión no lineal.
- ✓ Utilizar técnicas estadísticas de comparación y validación de modelos, que ayuden a seleccionar el mejor modelo, indicando los parámetros que lo indican así indicando sus pros y contras.

IV. Metodología

Se explica y detalla la forma en la cual se han obtenido los diferentes parámetros que integran la base de datos así como su respectiva bibliografía, las cuales proceden en su totalidad de revistas indexadas. Además se detalla variables que integran los diferentes modelos así como las características de cada una de las 343 diferentes mezclas de hormigones fabricados a partir de hormigones reciclados, se desglosa la procedencia de los datos para los modelos de resistencia a compresión, tracción y módulo de elasticidad.

4.1. Construcción de la base de datos

La base de datos se ha llevado a cabo tomando en consideración una serie de trabajos en los cuales el tema central es el estudio de la adición de árido grueso proveniente de hormigón reciclado, dada la variación observable en su comportamiento mecánico como puede ser la resistencia a compresión y el módulo de elasticidad, así como parámetros físicos que se ven afectados directamente por la incorporación de este (trabajabilidad, relación a/c, etc), como se puede ver en numerosos estudios previos (Padmini, Ramamurthy, & Mathews, 2009).

Las propiedades que se analizaron fueron las siguientes: resistencia a compresión, tracción indirecta y módulo de elasticidad. El estudio se enfoca en el análisis de estas propiedades extraídas de un hormigón de control (hormigón convencional) y descubrir cómo estas varían al efectuar adiciones de árido reciclado en diversos porcentajes, de esta forma dar tratamiento a los datos y poder generar modelos matemáticos que sean capaces de; conociendo algunas propiedades y datos de dosificación predecir cuál será el comportamiento mecánico de nuestro hormigón a 28 días. Para lograr este objetivo, se ha generado una base de datos a partir de 343 mezclas diferentes extraídas de diferentes investigaciones donde el tema principal era el hormigón reciclado (RC).

Las características de las mezclas utilizadas se muestran en la **Tabla 1**. En dicha tabla se puede observar el rango de los valores de dosificación de los principales materiales que componen las diferentes mezclas: cantidad de cemento, relaciones agua/cemento (a/c) total y efectiva, las cantidades de arena y grava, la cantidad de árido reciclado y el porcentaje que representa el mismo respecto al árido grueso, así como el valor medio. Como se puede observar el rango de la dosificación es muy amplio, lo que permitirá que los modelos

deducidos sean aplicables prácticamente a cualquier tipo de hormigón con árido reciclado que se pueda fabricar.

Tabla 1. Rangos de dosificación del total de mezclas analizadas

Características	Valor medio	Rango de valores	
		Mínimo	Máximo
Cantidad de cemento (kg)	354.47	140.00	520.00
Adición (kg)	57.53	0.00	210.00
Relación a/c	0.54	0.35	1.25
Relación a/b	0.52	0.35	0.82
Relación a/c efectiva	0.47	0.24	1.17
Relación a/b efectiva	0.45	0.28	0.72
Aditivo (kg/m ³)	3.31	0.00	72.00
Arena (kg)	708.31	21.00	1000.00
Grava (kg)	513.55	0.00	1353.00
AR (kg)	576.15	0.00	1471.00
% Árido reciclado (peso)	52.14	0.00	100.00

Fuente: Elaboración propia

En la **Tabla 2** se incluyen las características de las mezclas para generar los distintos modelos matemáticos ya que cada propiedad tenía un número de datos diferente. En el caso de la resistencia a compresión, la base de datos procede de las investigaciones (Abdulla, 2015; Barbudo, de Brito, Evangelista, Bravo, & Agrela, 2013; Bravo, de Brito, Pontes, & Evangelista, 2015; Butler, West, & Tighe, 2011; Cakir, 2014; Corinaldesi, 2010; Cui, Shi, Memon, Xing, & Tang, 2015; Etxeberria et al., 2007; Gomes, de Brito, & Bravo, 2014; Ismail & Ramli, 2014; S. C. Kou & C. S. Poon, 2010; Kwan, Ramli, Kam, & Sulieman, 2012; Lotfi, Eggimann, Wagner, Mroz, & Deja, 2015; Matias, de Brito, Rosa, & Pedro, 2014; Medina, Zhu, Howind, de Rojas, & Frias, 2014; Mefteh, Kebaili, Oucief, Berredjem, & Arabi, 2013; Pepe, Toledo, Koenders, & Martinelli, 2014; Poon, Shui, Lam, Fok, & Kou, 2004; Purushothaman, Amirthavalli, & Karan, 2015; Rahal, 2007; Rao, Bhattacharyya, & Barai, 2011; Sagoe-Crentsil, Brown, & Taylor, 2001; Sheen, Wang, Juang, & Le, 2013; Tabsh & Abdelfatah, 2009; Xiao, Li, & Zhang, 2005; Xuan, Zhan, &

Poon, 2016; Zega & Di Maio, 2011) y por consiguiente los modelos generados, toman en consideración varias fases; a) aún no se conocen las propiedades físicas del árido reciclado pero que ya se ha efectuado ensayos a compresión previos, con lo cual ya se conoce la resistencia a compresión del hormigón sin adición de árido reciclado, b) que se conoce el porcentaje de absorción (WA) del árido reciclado y c) que además de contar con el porcentaje de absorción se conoce el coeficiente de desgaste de los ángeles (LA). Para todas las fases, hay otro parámetro que hay que tomar en cuenta, el cual es decidir el porcentaje de sustitución del árido reciclado (RCA), además cabe señalar que uno de los parámetros más importantes a tomar en cuenta al momento de diseñar la dosificación es el porcentaje de absorción del árido reciclado (España. Ministerio de Fomento, 2011; Etxeberria et al., 2007) ya que esta es mayor a la del árido natural lo cual influirá en las propiedades físicas y mecánicas finales del hormigón (Cui et al., 2015; Padmini et al., 2009) con lo cual se verá contrastada en los modelos y los resultados, que en su mayoría están ligados a este parámetro.

Para la resistencia a tracción se han utilizado los datos de los estudios (Barbudo et al., 2013; Bravo et al., 2015; Cakir, 2014; Dilbas, Simsek, & Cakir, 2014; Etxeberria et al., 2007; Gomes et al., 2014; Javier Zega & Antonio Di Maio, 2011; S.-C. Kou & C.-S. Poon, 2010; Medina et al., 2014; Mefteh et al., 2013; Pepe et al., 2014; Rao et al., 2011; Sagoe-Crentsil et al., 2001; Xuan et al., 2016) y el módulo de elasticidad de las investigaciones (Barbudo et al., 2013; Bravo et al., 2015; Corinaldesi, 2010; Cui et al., 2015; Dilbas et al., 2014; Etxeberria et al., 2007; Gomes et al., 2014; Ismail & Ramli, 2014; Javier Zega & Antonio Di Maio, 2011; Pepe et al., 2014; Purushothaman et al., 2015; Rahal, 2007; Rao et al., 2011; Sheen et al., 2013; Xiao et al., 2005; Xuan et al., 2016) . Se han considerado las siguientes fases; a) aún no conocemos las propiedades físicas del árido reciclado pero que ya hemos efectuado ensayos a compresión, tracción y módulo de elasticidad previos, con lo cual ya conocemos la resistencia a compresión del hormigón sin adición de árido reciclado, b) que ya hemos efectuado un estudio previo de nuestro árido reciclado, y conocemos al menos WA y c) que hemos estudiado también las propiedades mecánicas del árido reciclado y además de contar con su WA también conocemos su LA.

Concretamente, las características de las mezclas utilizadas para la obtención de cada uno de los modelos no lineales de predicción de las propiedades mecánicas se muestran en la

Tabla 2, con lo cual queda especificada la gama de valores para los cuales puede ser más fidedigna los modelos a emplear dependiendo de qué parámetro se pretenda estimar.

Tabla 2. Rangos de dosificación del total de mezclas analizadas

Característica	Modelos de resistencia a compresión (1, 2 y 3)		Modelos de resistencia a tracción (4, 5, 6, 7, 8 y 9)			Modelos de módulo de elasticidad (10, 11, 12, 13, 14 y 15)			
	Valor medio	Rango de valores Mínimo Máximo		Valor medio	Rango de valores Mínimo Máximo		Valor medio	Rango de valores Mínimo Máximo	
Cantidad de cemento (kg)	354.47	140.00	520.00	342.17	140.00	493.00	364.15	249.00	520.00
Adición (kg)	57.53	0.00	210.00	57.53	0.00	210.00	26.25	17.50	35.00
Relación a/c	0.54	0.35	1.25	0.57	0.37	1.25	0.52	0.35	0.82
Relación a/b	0.52	0.35	0.82	0.53	0.37	0.82	0.52	0.35	0.82
Relación a/c efectiva	0.47	0.24	1.17	0.50	0.28	1.17	0.46	0.24	0.72
Relación a/b efectiva	0.45	0.28	0.72	0.45	0.28	0.65	0.48	0.29	0.65
Aditivo (kg/m ³)	3.31	0.00	72.00	1.69	0.00	4.48	4.48	0.00	72.00
Arena (kg)	708.31	21.00	1000.00	731.05	395.00	1000.00	697.52	395.00	1000.00
Grava (kg)	513.55	0.00	1353.00	606.02	0.00	1353.00	530.56	0.00	1353.00
AR (kg)	576.15	0.00	1471.00	523.39	0.00	1280.00	542.63	0.00	1149.00
% A. reciclado (peso)	52.14	0.00	100.00	0.00	100.00	48.54	49.69	0.00	100.00

Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a las principales propiedades de los áridos reciclados utilizados para la generación de cada uno de los modelos se muestran la **Tabla 3**. En dicha tabla se puede observar el rango de densidades aparentes, del porcentaje de absorción de agua a las 24 horas (WA) y del Coeficiente de desgaste de Los Ángeles (LA) de los áridos reciclados utilizados, así como su valor medio. Como se puede observar el rango de valores de dichas propiedades es muy amplio, por lo que la inmensa mayoría de los áridos reciclados que se puedan utilizar para la fabricación de hormigones estarán dentro del intervalo contemplado en el presente estudio.

Tabla 3. Propiedades de los áridos utilizados para la generación de cada uno de los modelos

Características	Modelos de resistencia a compresión (1, 2 y 3)			Modelos de resistencia tracción (4, 5, 6, 7, 8 y 9)			Modelos de módulo de elasticidad (10, 11,12, 13, 14 y 15)		
	Valor medio	Rango de valores		Valor medio	Rango de valores		Valor medio	Rango de valores	
		Mínimo	Máximo		Mínimo	Máximo		Mínimo	Máximo
Densidad (kg/m ³)	2202.27	1115	2890	2253.74	1115	2890	2191.07	1239	2750
Absorción 24 horas (%)	5.82	0.24	23.9	5.92	0.6	16.34	5.39	0.24	16.34
Desg. Los Ángeles (%)	40.18	11.9	65.45	38.84	20	65.45	41.26	21.56	65.45

Fuente: Elaboración propia.

El rango de valores de cada una de las propiedades mecánicas estudiadas para cada uno de los modelos se muestra en la **Tabla 4**. En dicha tabla se muestra para cada tipo de modelo el intervalo de valores y el valor medio de la resistencia a compresión del hormigón patrón (f_c) y con áridos reciclados ($f_{c,RCA}$), la resistencia a tracción del hormigón patrón ($f_{ct,CC}$) y con áridos reciclados ($f_{ct,RC}$), módulo de elasticidad del hormigón patrón (E_{CC}) y con áridos reciclados (E_{RC}) que se han utilizado en el presente estudio. Como se puede observar el intervalo de valores de dichas propiedades es amplio, por lo que los modelos resultantes serán de aplicación para prácticamente todos los hormigones que se puedan fabricar.

Tabla 4. Rango de estudio de las propiedades mecánicas para cada tipo de modelo

Característica	Modelos de resistencia a compresión (1, 2 y 3)			Modelos de resistencia tracción (4, 5, 6, 7, 8 y 9)			Modelos de módulo de elasticidad (10, 11,12, 13, 14 y 15)		
	Valor medio	Rango de valores		Valor medio	Rango de valores		Valor medio	Rango de valores	
		Mínimo	Máximo		Mínimo	Máximo		Mínimo	Máximo
f_c (MPa)	43	17.3	79	41.98	20	79	42.73	17.3	79
$f_{c,RC}$ (MPa)	38.92	5	79	38.72	16.5	79	38.32	13.4	79
$f_{ct,CC}$ (MPa)	4.2	2.1	15.5	4.2	2.1	15.5	5.01	2.1	15.5
$f_{ct,RC}$ (MPa)	3.75	1.4	16.5	3.78	1.4	16.50	4.31	1.4	16.5
E_{cc} (MPa)	32937	18900	49000	33706	24770	49000	32937	18900	49000
E_{rc} (MPa)	27992	11300	49000	30541	20350	49000	28540	13800	49000

Fuente: Elaboración propia.

4.2. Descripción y funcionamiento del programa Polimodels

De las metodologías y software que se puede encontrar en la literatura científica hay que resaltar como característica común el partir de un modelo cuyo planteamiento se ha propuesto por el experto del área objeto de estudio, obviándose por tanto en el algoritmo su génesis, y es a partir de este momento cuando se inicia el estudio de los valores de los parámetros que intervienen en él. A este respecto nos surge la siguiente cuestión: *¿Por qué no plantear un modelo variable cuya ecuación pueda ir moldeándose a medida?* Dicho de otra manera, el proceso de modelización planteado, conlleva que si no se da por válido el modelo, nos vemos obligados a replantearlo, buscando funciones matemáticas distintas y a su vez, repitiendo los siguientes pasos. Este retroceso tiene actualmente un carácter manual sin que se haya mecanizado. *Polimodels*¹ es un programa que es capaz de generar múltiples modelos, lineales y no lineales, para un conjunto de datos correspondientes a variables dependientes e independientes.

Las principales características del algoritmo se basan en la generación de valores de variables aleatorias de distribución conocida. Estos valores se asocian a las distintas variables que intervienen en la ecuación de la que se pretende estudiar su sensibilidad. Una vez que se han generado estas simulaciones se utiliza una medida de error respecto a los valores originales (Verdú Monllor, 2004b). La representación gráfica de estos errores viene determinada por la representación de la función de sensibilidad ya definida, situando en el eje *X* la dispersión producida en la simulación de los datos y en el eje *Y* el valor del correspondiente error.

La entrada de datos del programa viene dada por un fichero de tipo texto. En este fichero se especifica en primer lugar el número de observaciones en primer lugar, luego el número de variables que intervienen en el modelo y por último tabla de datos a los que se ajustan dichas variables en estudio (ver anejos). De forma paralela al algoritmo se ha desarrollado un intérprete capaz de evaluar las expresiones matemáticas clásicas así como las funciones que generan propiamente los valores aleatorios asociados a cada variable.

¹ Para ampliar sobre el tema y descargar el programa, visitar el sitio web <http://polimodels.com/>

V. Cuerpo del trabajo

5.1. Introducción

Como se describió en la sección 4.1, las variables analizadas fueron la resistencia a compresión, tracción y módulo de elasticidad. Se considera respectivamente, que cada uno de estas variables es dependiente de los parámetros que según la fase en la que se encuentre, serán 2, 3 ó 4 variables independientes. En este apartado se desglosan los diferentes modelos generados mediante el programa Polimodel, podemos diferenciar tres grupos diferentes.

1. Predicción de la resistencia a compresión con hormigón que incorpora árido reciclado, esto mediante la creación de un hormigón de referencia sin sustitución y además conociendo algunas propiedades físicas del árido reciclado (WA y LA) así como el porcentaje de sustitución que deseamos estudiar (RCA).
2. Predicción de la resistencia a tracción indirecta que incorpora árido reciclado, ya sea conociendo el valor de la resistencia a compresión del hormigón con el respectivo porcentaje sustitución o conociendo el valor de la resistencia a tracción indirecta del hormigón de referencia sin sustitución. Además como en el inciso anterior estudiando las propiedades físicas del árido reciclado y el respectivo porcentaje de sustitución.
3. Predicción del módulo de elasticidad que incorpora árido reciclado, ya sea conociendo el valor de la resistencia a compresión del hormigón con sustitución o conociendo el valor módulo de elasticidad del hormigón de referencia sin sustitución. Además estudiando las propiedades físicas del árido reciclado y el respectivo porcentaje de sustitución.

Para la validación de los resultados se muestra para todos los modelos los valores observados y los estimados con la respectiva función identidad (recta $Y=X$), además se calcula el Coeficiente de Variación Porcentual Medio (CVP_{med}) y el valor del Coeficiente de Determinación (R^2). Sumado a esto se observa como varían estos coeficientes al ir añadiendo a cada modelo las diferentes variables que intervienen en su respectivo valor final.

5.2. Una aplicación con hormigones de áridos reciclados aplicando la regresión no lineal

5.2.1. Estudio y relación de las diferentes variables

La norma ACI 318, Eurocódigo 2 y otras diversas normativas internacionales proporcionan algunas fórmulas para poder determinar la resistencia a tracción y el módulo de elasticidad del hormigón, a partir de la resistencia a compresión (Gupta, Khaudhair, & Ahuja, 2015), pero no hacen mención a su variación al utilizar árido reciclado. Es en este sentido que como se puede apreciar en los diferentes modelos, el estudio se hizo en algunos casos tomando como parámetro de referencia la resistencia a compresión del hormigón de referencia (sin árido reciclado) y luego variando los porcentajes de árido reciclado. En términos generales, las variables que intervienen directamente en cada modelo son:

- ✓ $f_{c,RCA}$: resistencia a compresión del hormigón con sustitución de áridos reciclados para el cálculo del módulo de elasticidad y resistencia a tracción indirecta (MPa)
- ✓ $f_{c,RC}$: resistencia a compresión del hormigón con sustitución de áridos reciclados calculado a partir del modelo (MPa)
- ✓ f_c : resistencia a compresión del hormigón de referencia sin sustitución de áridos reciclados (para los modelos de resistencia a compresión, MPa)
- ✓ $f_{ct,CC}$: resistencia a tracción indirecta del hormigón de referencia (MPa)
- ✓ $f_{ct,RC}$: resistencia a tracción indirecta del hormigón con sustitución de áridos reciclados calculado a partir del modelo (MPa).
- ✓ E_{CC} : módulo de elasticidad del hormigón de referencia (MPa)
- ✓ E_{RC} : módulo de elasticidad del hormigón con porcentaje de sustitución de árido reciclado calculado a partir del modelo (MPa)
- ✓ RCA : porcentaje de árido reciclado en peso que sustituye árido grueso convencional
- ✓ WA : porcentaje de absorción de agua del árido reciclado a las 24 horas
- ✓ LA : coeficiente de desgaste de Los Ángeles del árido reciclado.

Se hace uso de la nomenclatura $y = f(x_1, x_2, x_3)$ para hacer mención de la variable dependiente que se está analizando, leyéndose así que y (variable dependiente) es función de x_1, x_2, x_3 (variables independientes). Además para cada una de las variables

independientes se han analizado los diferentes modelos, *asumiendo* la dependencia de las variables según se aprecia a continuación:

1) Resistencia a compresión ($f_{c,RC}$):

a) $y = f_{c,RC}(f_c, RCA)$

b) $y = f_{c,RC}(f_c, RCA, WA)$

c) $y = f_{c,RC}(f_c, RCA, WA, LA)$

2) Resistencia a tracción indirecta ($f_{ct,RC}$):

a) $y = f_{ct,RC}(f_{c,CC}, RCA)$

b) $y = f_{ct,RC}(f_{c,CC}, RCA, WA)$

c) $y = f_{ct,RC}(f_{c,CC}, RCA, WA, LA)$

d) $y = f_{ct,RC}(f_{ct,CC}, RCA)$

e) $y = f_{ct,RC}(f_{ct,CC}, RCA, WA)$

f) $y = f_{ct,RC}(f_{ct,CC}, RCA, WA, LA)$

3) Módulo de elasticidad (E_{RC}):

a) $y = E_{RC}(f_{c,CC}, RCA)$

b) $y = E_{RC}(f_{c,CC}, RCA, WA)$

c) $y = E_{RC}(f_{c,CC}, RCA, WA, LA)$

d) $y = E_{RC}(E_{CC}, RCA)$

e) $y = E_{RC}(E_{CC}, RCA, WA)$

f) $y = E_{RC}(E_{CC}, RCA, WA, LA)$

En la **Tabla 5** se encuentran agrupadas todas las variables que se analizaron en el estudio, además se aprecia cómo se han combinado cada una de estas a los diferentes 15 modelos. Para los modelos de resistencia a tracción indirecta y módulo de elasticidad, como se puede apreciar hay dos posibles casos, el primero es conocer el valor de la resistencia a compresión del hormigón con su respectivo porcentaje de sustitución y el segundo caso es conocer un parámetro de referencia, es decir la resistencia a tracción y el módulo de elasticidad según sea el caso, pero sin sustitución.

Tabla 5. Tabla resumen de variables dependientes e independientes.

Modelo	Parámetro estudiado	Variable dependiente	Variables independientes							
			$f_{c,CC}$	f_c	$f_{ct,CC}$	E_{CC}	RCA	WA	LA	
1	Resistencia a compresión*	$f_{c,RC}$		✓				✓		
2				✓			✓	✓		
3				✓			✓	✓	✓	
4			✓				✓			
5			✓				✓	✓		
6	Resistencia a tracción	$f_{ct,RC}$	✓				✓	✓	✓	
7					✓		✓			
8						✓		✓	✓	
9						✓		✓	✓	✓
10			✓				✓			
11			✓				✓	✓		
12	Módulo de elasticidad	E_{RC}	✓				✓	✓	✓	
13						✓	✓			
14							✓	✓	✓	
15							✓	✓	✓	✓

*Para todos los modelos, la resistencia a compresión utilizada fue a 28 días. Fuente: Elaboración propia.

En las **Figuras 9 a la 28** se puede apreciar dos parámetros que han sido cruciales en la elección del mejor modelo. Se proporciona el valor de R^2 que si bien como se ha explicado detalladamente no es tan representativo, nos ha ayudado a hacer inferencias con respecto a qué modelo tomar pero básicamente el primer parámetro de elección ha sido el valor de CVP_{med} . Cada modelo se ha escogido de tal forma que su CVP_{med} sea el mínimo, de tal forma que es una medida directa y según se aprecia en la fórmula en la sección 2.4.2. este coeficiente nos ayuda en cierta medida a saber que tanto es el error porcentual que se comete con respecto a la variable observada, en el caso específico que nos compete, este

parámetro nos ayuda a saber que tanto es el error porcentual que se comete al tomar como valido el dato que nos proporciona el modelo en estudio.

5.2.2. Modelos de Resistencia a Compresión

Para los modelos de resistencia a compresión como se ha mencionado, se proponen los siguientes tres modelos. Se discutirá brevemente cada uno de estos modelos y se harán las respectivas representaciones graficas que han ayudado en la discriminación del mejor modelo. Además para una mejor visualización y facilidad en la aplicación de la fórmula, se han dejado los términos de los coeficientes como variables y se anexa la **Tabla 6** con los respectivos valores para cada uno de los coeficientes. Los modelos para la resistencia a compresión de hormigones con áridos reciclados son:

$$\text{Modelo 1: } f_{c,RC} = \alpha_1 \cdot RCA^4 + \alpha_2 \cdot f_c + (\alpha_3 \cdot f_c \cdot RCA)$$

$$\text{Modelo 2: } f_{c,RC} = \alpha_1 \cdot WA^3 + \alpha_2 \cdot RCA^4 + \alpha_3 \cdot f_c + (\alpha_4 \cdot f_c \cdot RCA)$$

$$\text{Modelo 3: } f_{c,RC} = \alpha_1 \cdot WA^4 + \alpha_2 \cdot LA + \alpha_3 \cdot RCA^2 + \alpha_4 \cdot f_c + (\alpha_5 \cdot LA \cdot RCA)$$

Como era de esperarse, en los diferentes modelos se puede apreciar una notable reducción del valor de la resistencia a compresión en la medida que se añade árido reciclado. Para el *Modelo 1*, los coeficientes α_1 y α_3 son negativos, estos se relacionan con el porcentaje de sustitución de hormigón reciclado, a su vez se aprecia una reducción directa relacionada con este parámetro. El coeficiente α_1 es relativamente pequeño, con lo cual su aporte a la fórmula se ve reducido, donde se puede apreciar la reducción del valor para la resistencia a compresión es en el coeficiente α_3 para el cual se aprecia una reducción porcentual a medida que se añade árido reciclado al hormigón, por otra parte como se ve prácticamente el valor principal que toma la resistencia a compresión con árido reciclado para el modelo se basa en el valor de referencia del hormigón sin árido reciclado, f_c esto se puede inferir por el valor relativamente alto que se aprecia en el coeficiente α_2 .

En el *Modelo 2*, se pueden hacer observaciones similares al modelo anterior, pero en este caso es el porcentaje de absorción el que influye también en el decremento de $f_{c,RC}$, lo cual se aprecia por el valor negativo del coeficiente α_1 y esto se ve contrastado con los estudios

encontrados ya que en ellos se comenta que una de las principales causas de la reducción de la calidad del hormigón se ve porque se debe añadir una mayor cantidad de agua para obtener una igual trabajabilidad en comparación con el hormigón convencional sin sustitución de árido reciclado debido al valor excesivo del porcentaje de absorción del árido reciclado (Padmini et al., 2009; Tabsh & Abdelfatah, 2009). Además este valor de resistencia a compresión se ve afectado directamente por el porcentaje de sustitución de áridos reciclado que se añada, α_4 .

Tabla 6. Coeficientes de las diferentes variables para los modelos 1, 2 y 3.

Modelo	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
Modelo 1	$2.75 \cdot 10^{-8}$	$9.91 \cdot 10^{-1}$	-0.0021	-	-
Modelo 2	$-8.30 \cdot 10^{-4}$	$2.93 \cdot 10^{-8}$	$9.98 \cdot 10^{-1}$	-0.0022	-
Modelo 3	$-2.34 \cdot 10^{-5}$	$5.14 \cdot 10^{-2}$	$6.60 \cdot 10^{-4}$	$9.53 \cdot 10^{-1}$	-0.0035

Fuente: Elaboración propia.

En el *Modelo 3*, se puede apreciar un ligero cambio, al añadir la variable *LA* se puede apreciar como este crea una directa y pequeña aportación positiva al valor de $f_{c,RC}$ según el valor de α_2 , pero el valor de *WA* como en el modelo anterior crea un decremento en $f_{c,RC}$, según se aprecia por el valor negativo de α_1 . Además se aprecia en el coeficiente α_5 una notable reducción del valor de $f_{c,RC}$ dependiendo directamente este parámetro del porcentaje de sustitución de árido reciclado que se añada al hormigón.

Ahora se comentará sobre la validación y conveniencia de un modelo sobre otro, además de los parámetros de selección. Como se puede apreciar en la **Figura 9**, **Figura 10** y **Figura 11** se ha hecho una representación gráfica de los valores observados los cuales son los datos reales de $f_{c,RC}$ tomados de los diversos estudios realizados en áridos reciclados, contra los valores estimados los cuales son los obtenidos a partir de las fórmulas elaboradas aplicando los *Modelos 1, 2 y 3* respectivamente, esto es sustituyendo los valores de las variables *RCA*, *WA* y *LA* en cada una de las ecuaciones por los datos recopilados en los estudios.

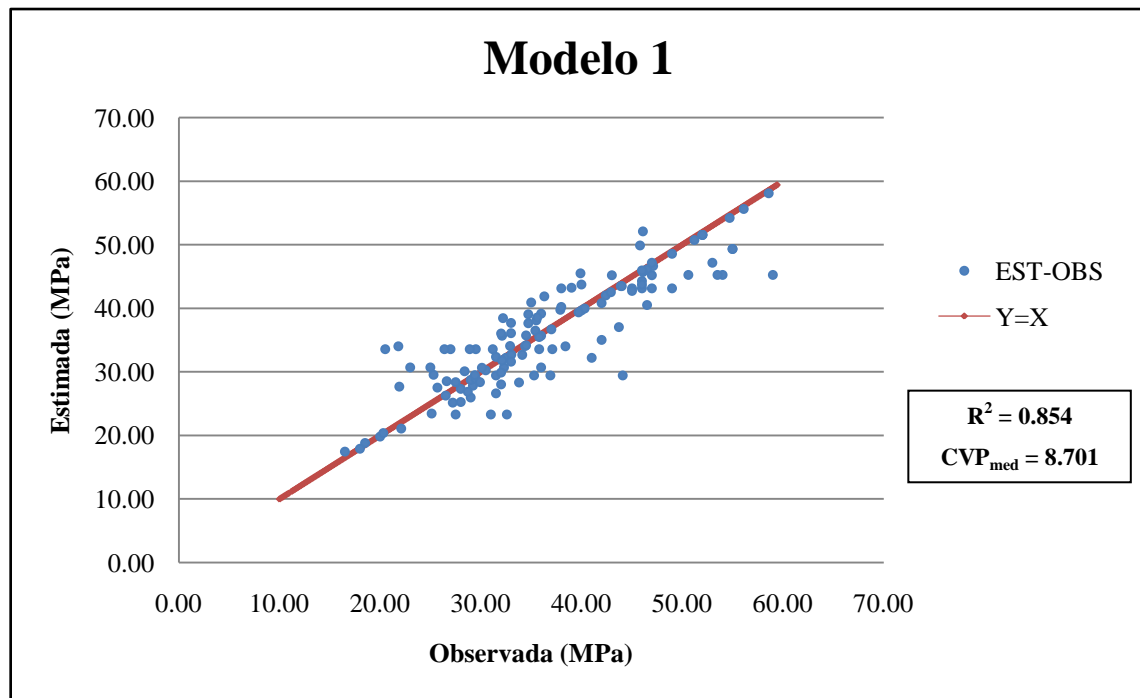


Figura 9. Representación grafica de los valores *observados* y los *estimados* para la resistencia a compresión (Modelo 1). Fuente: Elaboración propia.

En cada una de las graficas, se puede apreciar dos parámetros que han sido cruciales en la elección del mejor modelo. Se proporciona el valor de R^2 y el CVP_{med} , cada modelo se ha escogido de tal forma que su CVP_{med} sea el mínimo. Específicamente para el rango de datos que se ha recolectado, se tiene que el CVP_{med} para el *Modelo 1*, *2* y *3* es 8.701%, 8.361% y 7.359% respectivamente, de lo cual se puede decir que los modelos de resistencia a compresión con hormigón de áridos reciclados tiene un error en promedio de entre un 7.359% y 8.701% dependiendo del número de variables que estén disponibles.

Se puede apreciar también de las **Figura 9**, **Figura 10** y **Figura 11** que en la medida que agregamos más variables independientes (implícito más datos) a nuestro modelo, este se torna más preciso para predecir la $f_{c,RC}$ que es nuestra variable en estudio. Esto se ve gráficamente porque los valores observados y estimados se van ajustando mejor a la función identidad, recta $Y = X$.

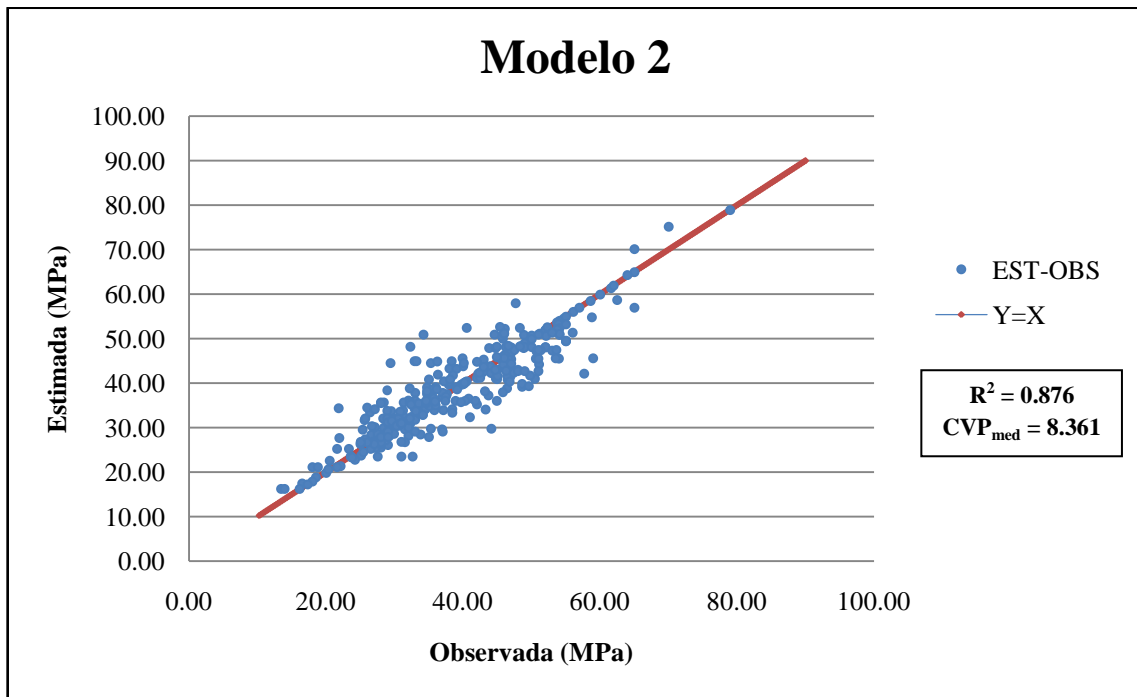


Figura 10: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para la resistencia a compresión (Modelo 2). Fuente: Elaboración propia.

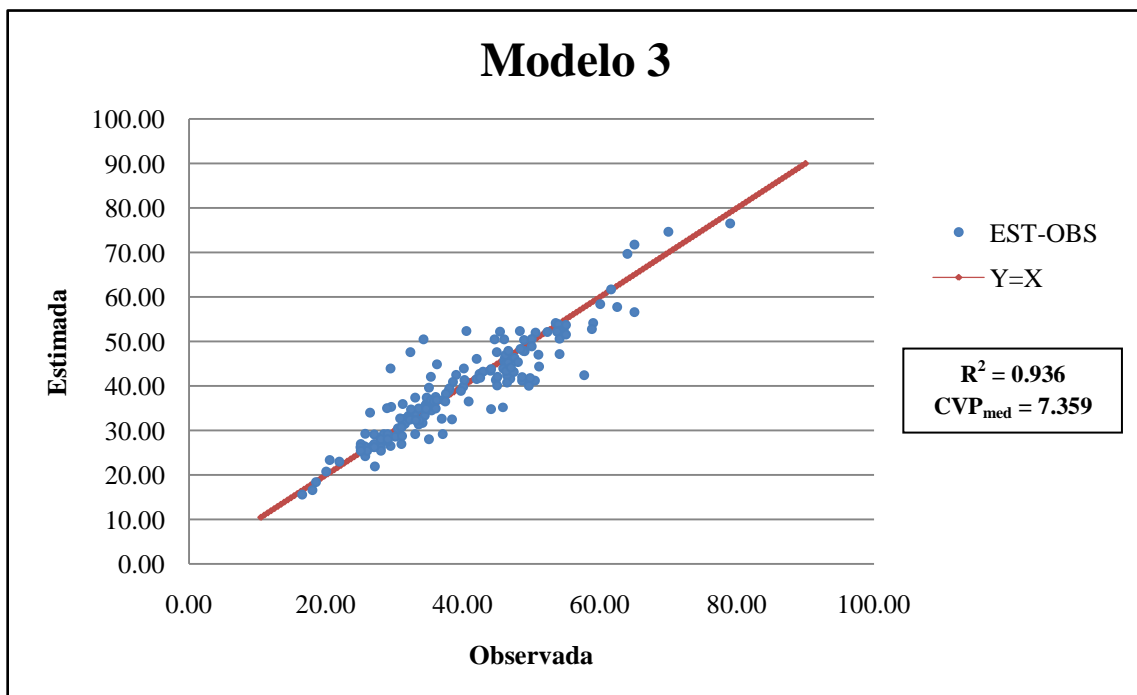


Figura 11: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para la resistencia a compresión (Modelo 3). Fuente: Elaboración propia.

Todo lo descrito anteriormente, lleva a manera de resumen la elaboración del siguiente gráfico, **Figura 12**, mediante el cual se puede apreciar notablemente que a medida que

añadimos variables dependientes el valor de predicción del modelo se torna más preciso. Cuando este consta de dos variables independientes el valor de $R^2 = 0.854$ a diferencia del modelo que depende de cuatro variables cuyo valor asciende a $R^2 = 0.936$ con lo cual se puede inferir que este se ajusta de mejor a los datos reales de $f_{c,RC}$, pero queda claro que esto depende en gran medida de los datos que se disponga. Por otro lado, se puede apreciar también que hay una disminución del valor CVP_{med} el cual desciende de 8.701 a 7.359 con lo cual el error cometido al hacer uso del modelo de cuatro variables es mucho menor que el de dos variables, con lo cual se puede decir que lo ideal sería poder contar con los datos de WA y LA para así de esta obtener valores más precisos al momento de efectuar las predicciones de $f_{c,RC}$.

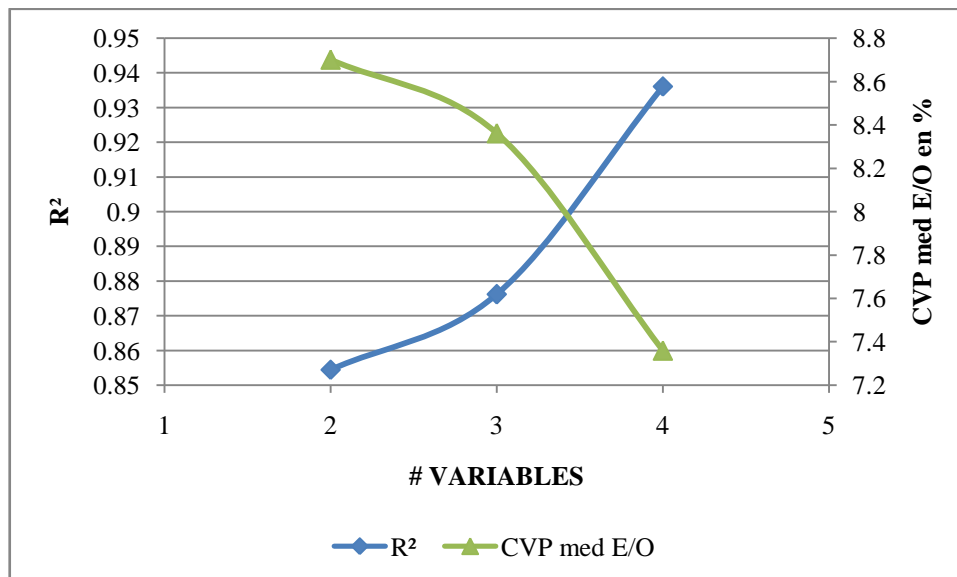


Figura 12: Variación de R^2 y el CVP media en los modelos de resistencia a compresión con respecto al número de variables independientes. Fuente: Elaboración propia.

Como última observación se debe decir que algunos modelos, pese a ser un poco más precisos que los mostrados anteriormente se han dejado de lado por el hecho que su fórmula era demasiado complicada, su utilización sería un poco tediosa y la idea del estudio es facilitar una manera sencilla de poder predecir la $f_{c,RC}$ de tal forma que se han escogidos aquellos modelos que sean simples y que también aporten datos que sean de utilidad al estudio del hormigón de áridos reciclados.

5.2.3. Modelos de Resistencia a Tracción Indirecta

En los ensayos de tracción indirecta hay que discriminar dos tipos de modelos diferentes, el primer tipo es el que toma como parámetro de referencia la resistencia a compresión del hormigón con sustitución de árido reciclado, $f_{c,RCA}$, y el segundo tipo que toma como parámetro de referencia la resistencia a tracción del hormigón sin sustitución, $f_{ct,CC}$.

Como se puede apreciar en esta ocasión hay que distinguir dentro de este tipo de modelos una subdivisión, se propone una función por tramos para la resistencia a tracción con la cual para valores menores de 7 MPa se debe utilizar los *Modelos 4.1, 5.1, 6.1, 7.1, 8.1 y 9.1* para valores mayores los *Modelos 4.2, 5.2, 6.2, 7.1, 8.1 y 9.1*. Con esto lo que se pretende es lograr una mayor precisión de predicción dado que al momento de elaborar un único modelo que predijera los valores de resistencia a tracción, $f_{ct,RC}$, nos encontramos con un error mucho mayor que efectuando estas subdivisiones.

Básicamente la forma de la ecuación se mantiene para ambos tramos, lo que varía son los coeficientes α que acompañan a las variables (ver **Tabla 7, Tabla 8 y Tabla 9**), como se mencionó anteriormente lo que se pretende es darle al investigador una herramienta capaz de predecir con cierta precisión los valores de resistencia mecánica del hormigón, además de relativa sencillez y utilización. Una posible explicación de este comportamiento es que como se sabe por naturaleza el hormigón posee una ruptura frágil, esta propiedad lo que implica es que cuando este es sometido a cierta resistencia a tracción este falla súbitamente con lo cual normalmente este valor no es considerado en el diseño de estructuras. Al ir a valores altos de resistencia de tracción, como ser 7 MPa o más, se obtienen valores un tanto diferentes y la predicción del comportamiento no es tan simple.

Considerando la resistencia a compresión

Para los modelos de resistencia a tracción como se ha mencionado, se proponen los siguientes tres modelos. Se discutirá brevemente cada uno de estos modelos y se harán las respectivas representaciones graficas que han ayudado en la discriminación del mejor modelo. Además para una mejor visualización y facilidad en la aplicación de la fórmula, se han dejado los términos de los coeficientes como variables y se anexa la **Tabla 7** con los

respectivos valores para cada uno de los coeficientes. Los modelos para la resistencia a tracción de hormigones con áridos reciclados son:

Modelo 4.1 y 4.2: $f_{ct,RC} = \alpha_1 \cdot RCA^4 + \alpha_2 \cdot f_{c,RCA} + \alpha_3$

Modelo 5.1 y 5.2: $f_{ct,RC} = \alpha_1 \cdot WA + \alpha_2 \cdot RCA + \alpha_3 \cdot f_{c,RCA}^4 + \alpha_4$

Modelo 6.1 y 6.2: $f_{ct,RC} = \alpha_1 \cdot WA^4 + \alpha_2 \cdot LA^4 + \alpha_3 \cdot RCA + \alpha_4 \cdot f_{c,RCA}^4 + \alpha_5$

Hay que dejar en claro que el valor de referencia $f_{c,RCA}$ corresponde al valor de resistencia a compresión para el hormigón con un porcentaje de sustitución de árido RCA . También en esta ocasión se aprecia en los diferentes modelos la reducción del valor de la resistencia a tracción en la medida que se añade árido reciclado. En el *Modelo 4.1* se aprecia una pequeña reducción en el valor final de $f_{ct,RC}$ en la medida del porcentaje de sustitución por el valor negativo del coeficiente α_1 , por otro lado se aprecia que el termino independiente, α_3 , brinda un gran aporte al valor de resistencia a compresión dado que se trata de valores relativamente pequeños. A diferencia del *Modelo 4.2* para valores altos de resistencia a tracción cuyo término independiente, α_3 , provee una aportación de decremento para el valor $f_{ct,RC}$, además se aprecia un aumento de la contribución del $f_{c,RCA}$ por el aumento del valor del coeficiente α_2 .

Tabla 7: Coeficientes de las diferentes variables para los modelos 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 6.1 y 6.2.

Modelo	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
Modelo 4.1	$-2.49 \cdot 10^{-10}$	0.0459	1.4066	-	-
Modelo 4.2	$-1.62 \cdot 10^{-08}$	0.2186	-0.4682	-	-
Modelo 5.1	0.0366	$-3.75 \cdot 10^{-3}$	$1.34 \cdot 10^{-7}$	2.6675	-
Modelo 5.2	-0.0317	$-1.75 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-7}$	10.2839	-
Modelo 6.1	$-2.12 \cdot 10^{-5}$	$7.82 \cdot 10^{-8}$	$-4.60 \cdot 10^{-3}$	$1.27 \cdot 10^{-7}$	2.7856
Modelo 6.2	-0.0205	$2.70 \cdot 10^{-5}$	$-1.75 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-7}$	$4.08 \cdot 10^{-5}$

Fuente: Elaboración propia.

Para el *Modelo 5.1* y *5.2* se puede apreciar que a medida que se añade árido reciclado al hormigón, el valor de $f_{ct,RC}$ va en decremento debido al valor negativo de α_2 . Por otro lado se aprecia que es poco el aporte que da la variable $f_{ct,RC}$ debido al bajo valor del coeficiente α_3 y que WA dependiendo en que tramo se encuentra puede aportar de forma positiva para el primer tramo o negativa para el segundo. Para ambos tramos el termino independiente da un aporte negativa que se puede decir que aporta como base para el modelo.

En el *Modelo 6.1* y *6.2* se puede apreciar como claramente dos factores intervienen a forma de decremento en el valor de $f_{ct,RC}$, WA y RCA, este último modifica directamente los valores de resistencia en la medida que aumenta la el porcentaje de árido reciclado.

Ahora se comentará sobre la validación y conveniencia de un modelo sobre otro, además los respectivos parámetros de selección. Como se puede apreciar en la **Figura 13**, **Figura 14** y **Figura 15** se ha hecho una representación grafica de los valores observados los cuales son los datos reales de $f_{ct,RC}$ tomados de los diversos estudios realizados en áridos reciclados, contra los valores estimados los cuales son los obtenidos a partir de las fórmulas elaboradas aplicando los *Modelos 4, 5 y 6* respectivamente, esto es sustituyendo los valores de las variables RCA, WA y LA en cada una de las ecuaciones por los datos recopilados en los estudios.

En cada una de las graficas, podemos apreciar dos parámetros que han sido cruciales en la elección del mejor modelo. Se proporciona el valor de R^2 y el CVP_{med} , cada modelo se ha escogido de tal forma que su CVP_{med} sea el mínimo. Específicamente para el rango de datos que se ha recolectado, se tiene que el CVP_{med} para el *Modelo 4, 5 y 6* es 14.093%, 14.477% y 12.485% respectivamente, de lo cual se puede decir que los modelos de resistencia a tracción con hormigón de áridos reciclados tiene un error en promedio de entre un 12.485% y 14.477% dependiendo del número de variables que estén disponibles.

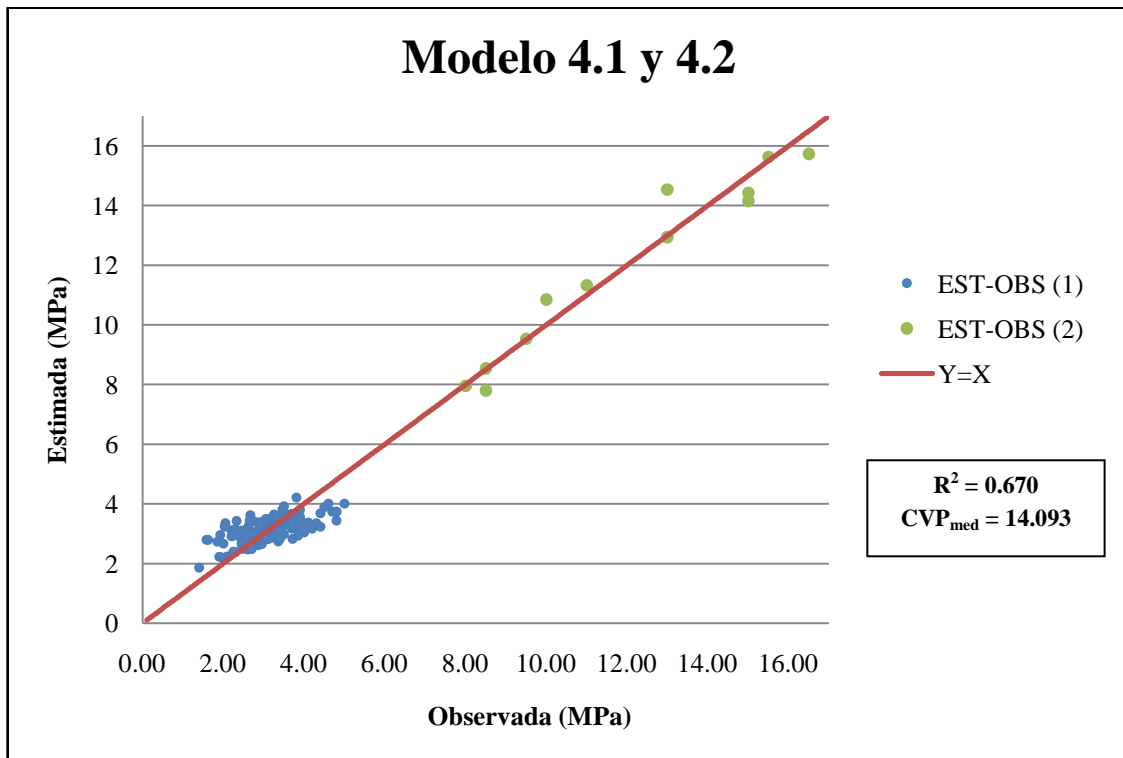


Figura 13: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para la resistencia a tracción indirecta considerando la resistencia a compresión (Modelo 4). Fuente: Elaboración propia.

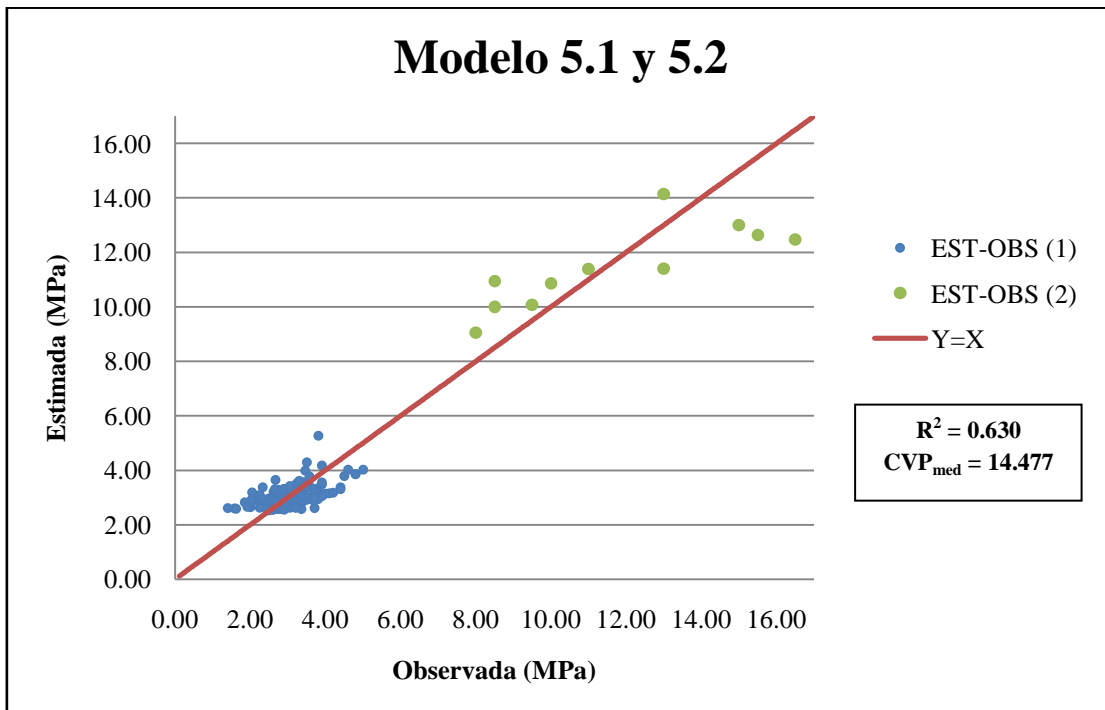


Figura 14: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para la resistencia a tracción indirecta considerando la resistencia a compresión (Modelo 5). Fuente: Elaboración propia.

Se puede apreciar de las **Figura 13**, **Figura 14** y **Figura 15** que hay una reducción en la precisión de predicción del modelo cuando se añade la variable *WA* (*Modelo 5*), se puede apreciar gráficamente en la dispersión que se da con respecto a la función identidad, recta $Y = X$ de los valores estimados respecto a los observados. Por otro lado sí agregamos más variables se aprecia una mejoría en la predicción del *Modelo 6*, ya que gráficamente se da un mejor ajuste con respecto a la recta $Y = X$.

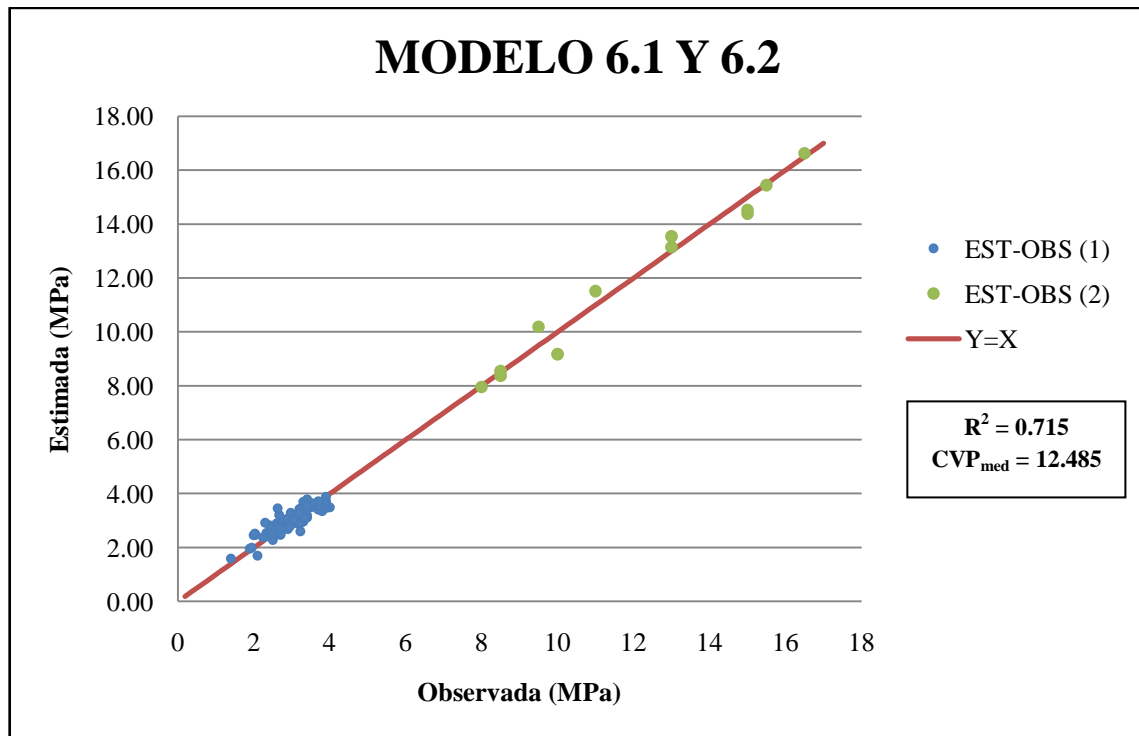


Figura 15: Representación gráfica de los *valores observados* y los *estimados* para la resistencia a tracción indirecta considerando la resistencia a compresión (*Modelo 6*). Fuente: Elaboración propia.

Todo lo descrito anteriormente, lleva a manera de resumen la elaboración del siguiente gráfico, **Figura 16**, mediante el cual se puede apreciar una reducción en la precisión del modelo para tres variables dependientes, pero un aumento en la predicción cuando tenemos cuatro variables independientes. Cuando este consta de dos variables independientes el valor de $R^2 = 0.670$ a diferencia del modelo que depende de cuatro variables cuyo valor asciende a $R^2 = 0.715$ con lo cual se puede inferir que este se ajusta de una mejor manera a los datos reales de $f_{ct,RC}$, pero queda claro que esto depende en gran medida de los datos que se disponga.

Por otro lado, se puede apreciar también que hay una disminución del valor CVP_{med} el cual desciende de 14.093 a 12.485 con lo cual el error cometido al hacer uso del modelo de cuatro variables es mucho menor que el de dos variables, con lo cual se puede decir lo ideal sería poder contar con los datos de WA y LA para así de esta obtener valores más precisos al momento de efectuar las predicciones de $f_{c,RC}$.

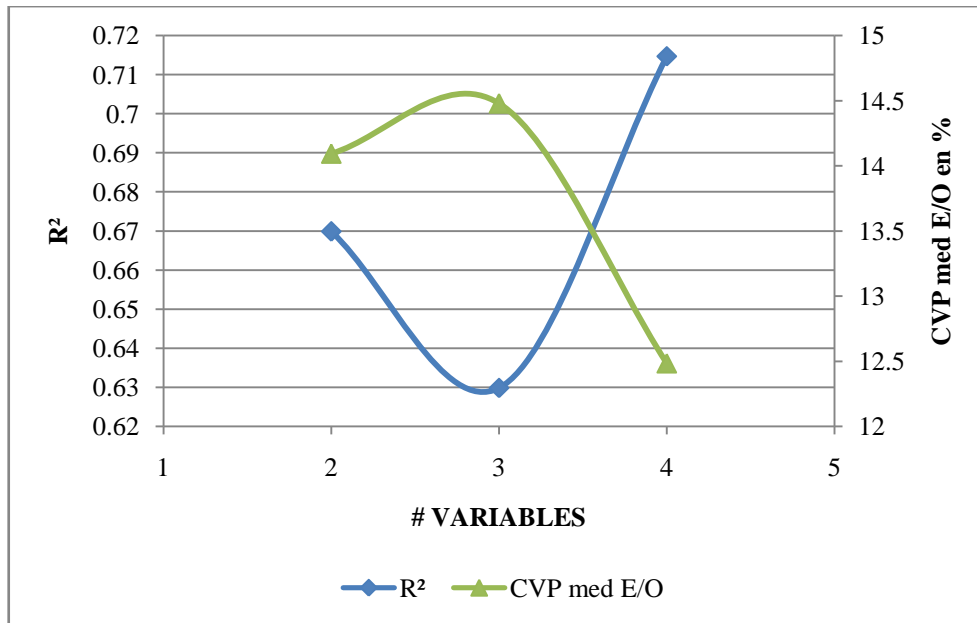


Figura 16: Variación de R^2 y el CVP media en los modelos de a tracción tomando en consideración la resistencia a compresión, dependiendo del número de variables independientes. Fuente: Elaboración propia.

Un último comentario al respecto a estos modelos es que el error de predicción no es tan bajo como el obtenido en la resistencia a compresión, con lo cual se dice que es valor serviría como una mera aproximación para posteriormente efectuar los respectivos estudios más formales.

Considerando resistencia a tracción indirecta

En estos tipos de modelos de resistencia a tracción como se ha mencionado, se proponen los siguientes tres modelos. Se discutirá brevemente cada uno de estos modelos y se harán las respectivas representaciones gráficas que han ayudado en la discriminación del mejor modelo. Además para una mejor visualización y facilidad en la aplicación de la fórmula, se han dejado los términos de los coeficientes como variables y se anexa la **Tabla 8** con los respectivos valores para cada uno de los coeficientes. Los modelos para la resistencia a tracción de hormigones con áridos reciclados son:

$$\text{Modelo 7.1 y 7.2: } f_{ct,RC} = \alpha_1 \cdot RCA^3 + \alpha_2 \cdot f_{ct,CC} + \alpha_3 \cdot RCA \cdot f_{ct,CC}$$

$$\text{Modelo 8.1 y 8.2: } f_{ct,RC} = \alpha_1 \cdot WA^4 + \alpha_2 \cdot RCA^2 + \alpha_3 \cdot f_{ct,CC}^4 + \alpha_4 \cdot RCA \cdot f_{ct,CC}$$

$$\text{Modelo 9.1 y 9.2: } f_{ct,RC} = \alpha_1 \cdot WA^3 + \alpha_2 \cdot LA^2 + \alpha_3 \cdot RCA + \alpha_4 \cdot f_{ct,CC} + \alpha_5 \cdot RCA \cdot f_{ct,CC}$$

Como era de esperarse, en los diferentes modelos se puede apreciar una notable reducción del valor de la resistencia a compresión en la medida que se añade árido reciclado. Para el *Modelo 7*, únicamente el coeficiente α_3 es negativo, el cual está directamente relacionado con el porcentaje de sustitución de hormigón reciclado realizando una reducción directa al valor de $f_{ct,RC}$. Por otro lado, el coeficiente α_1 que está directamente relacionado con el porcentaje de sustitución es relativamente pequeño, con lo cual su aporte a la fórmula se ve reducido.

En el *Modelo 8*, se pueden hacer observar como el porcentaje de absorción influye también en el decremento de $f_{ct,RC}$, lo cual se aprecia por el valor negativo del coeficiente α_1 y como se ha explicado con anterioridad era un comportamiento esperado. Además se aprecia que este valor $f_{ct,RC}$ se ve afectado directamente por el porcentaje de sustitución de áridos reciclado que se añade, debido al coeficiente negativo α_4 .

En el *Modelo 9*, se puede apreciar un ligero cambio, al añadir la variable LA se puede apreciar como este crea una directa y pequeña aportación negativa al valor de $f_{ct,RC}$ según el valor de α_2 , pero el valor de WA como en el modelo anterior crea un decremento en $f_{ct,RC}$, según se aprecia por el valor negativo de α_1 según se trate del primer o segundo

tramo. Además se aprecia en el coeficiente α_5 una notable reducción del valor de $f_{ct,RC}$ dependiendo directamente este parámetro del porcentaje de sustitución de árido reciclado que se añade al hormigón.

Tabla 8: Coeficientes de las diferentes variables para los modelos 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1 y 9.2.

Modelo	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
Modelo 7.1	$2.67 \cdot 10^{-7}$	0.9968	-0.0023	-	-
Modelo 7.2	$4.02 \cdot 10^{-7}$	0.9844	-0.0030	-	-
Modelo 8.1	$-2.55 \cdot 10^{-5}$	$4.20 \cdot 10^{-5}$	1.0143	-0.0028	-
Modelo 8.2	$-2.17 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-5}$	1.0143	-0.0028	-
Modelo 9.1	$-1.34 \cdot 10^{-4}$	$-3.51 \cdot 10^{-5}$	$5.09 \cdot 10^{-3}$	0.9998	-0.0031
Modelo 9.2	0.0074	$-3.74 \cdot 10^{-3}$	$5.52 \cdot 10^{-2}$	1.1659	-0.0062

Fuente: Elaboración propia.

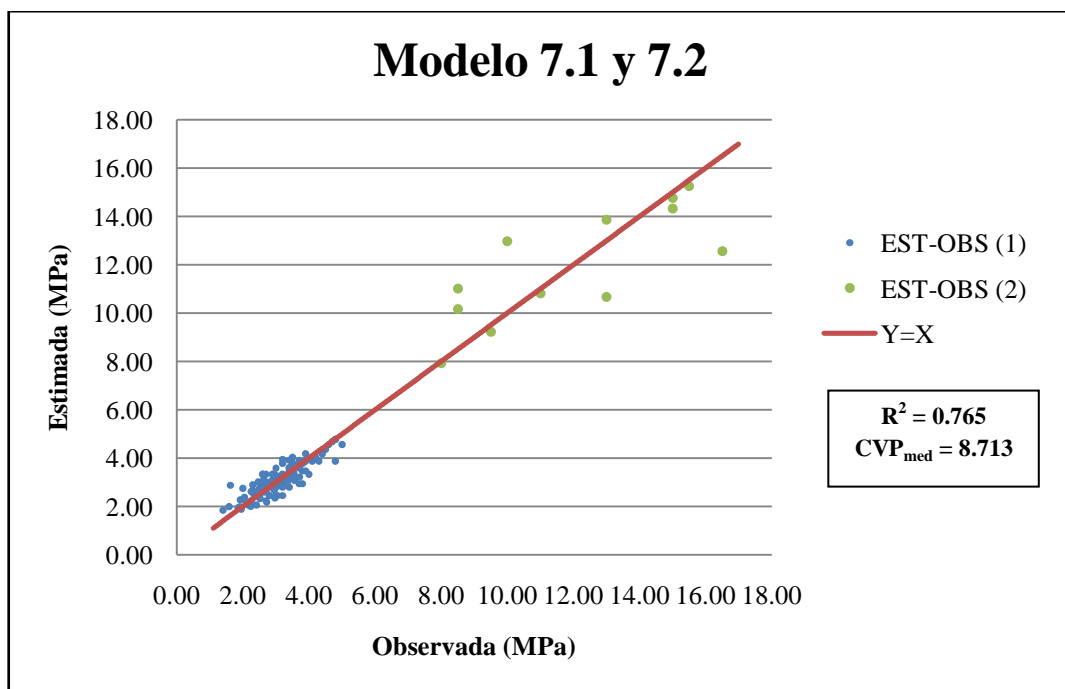


Figura 17: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para la resistencia a tracción indirecta considerando la tracción indirecta sin sustitución (Modelo 7). Fuente: Elaboración propia.

Ahora se comentará sobre la validación y conveniencia de un modelo sobre otro, además de los parámetros de selección. Como se puede apreciar en la **Figura 17**, **Figura 18** y

Figura 19 se ha hecho una representación grafica de los valores observados los cuales son los datos reales de $f_{ct,RC}$ tomados de los diversos estudios realizados en áridos reciclados, contra los valores estimados los cuales son los obtenidos a partir de las fórmulas elaboradas aplicando los *Modelos 7, 8 y 9* respectivamente, esto es sustituyendo los valores de las variables RCA , WA y LA en cada una de las ecuaciones por los datos recopilados en los estudios.

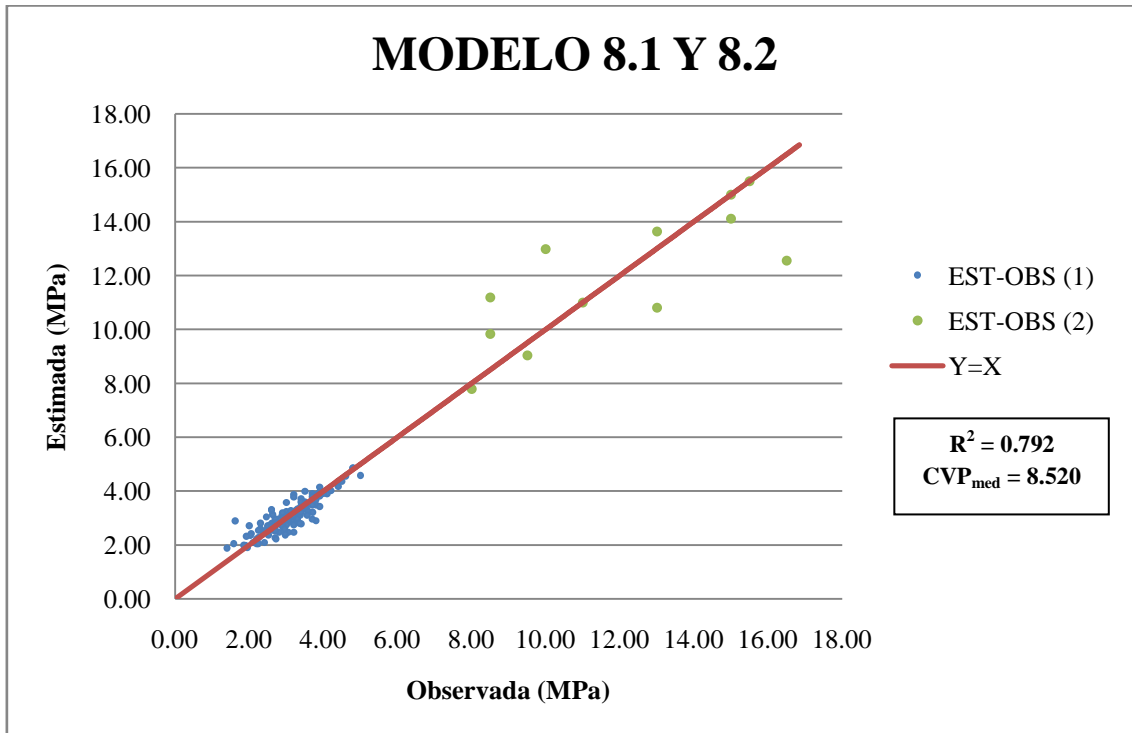


Figura 18: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para la resistencia a tracción indirecta considerando la tracción indirecta sin sustitución (Modelo 8). Fuente: Elaboración propia.

En cada una de las graficas, se pueden apreciar los parámetros que han sido cruciales en la elección del mejor modelo. Se proporciona el valor de R^2 y el CVP_{med} , y específicamente para el rango de datos que se ha recolectado, se tiene que el CVP_{med} para el *Modelo 7, 8 y 9* es 8.713%, 8.520% y 8.379% respectivamente, de lo cual se puede decir que los modelos de resistencia a compresión con hormigón de áridos reciclados tiene un error en promedio de entre un 8.379% y 8.713% dependiendo del número de variables que estén disponibles.

Además se puede apreciar de las **Figura 17, Figura 18 y Figura 19** que en la medida que agregamos más variables independientes (implícito más datos) a nuestro modelo, este se torna más preciso para predecir la $f_{ct,RC}$ que es nuestra variable en estudio. Esto se ve

gráficamente porque los valores observados y estimados se van ajustando mejor a la función identidad, recta $Y = X$.

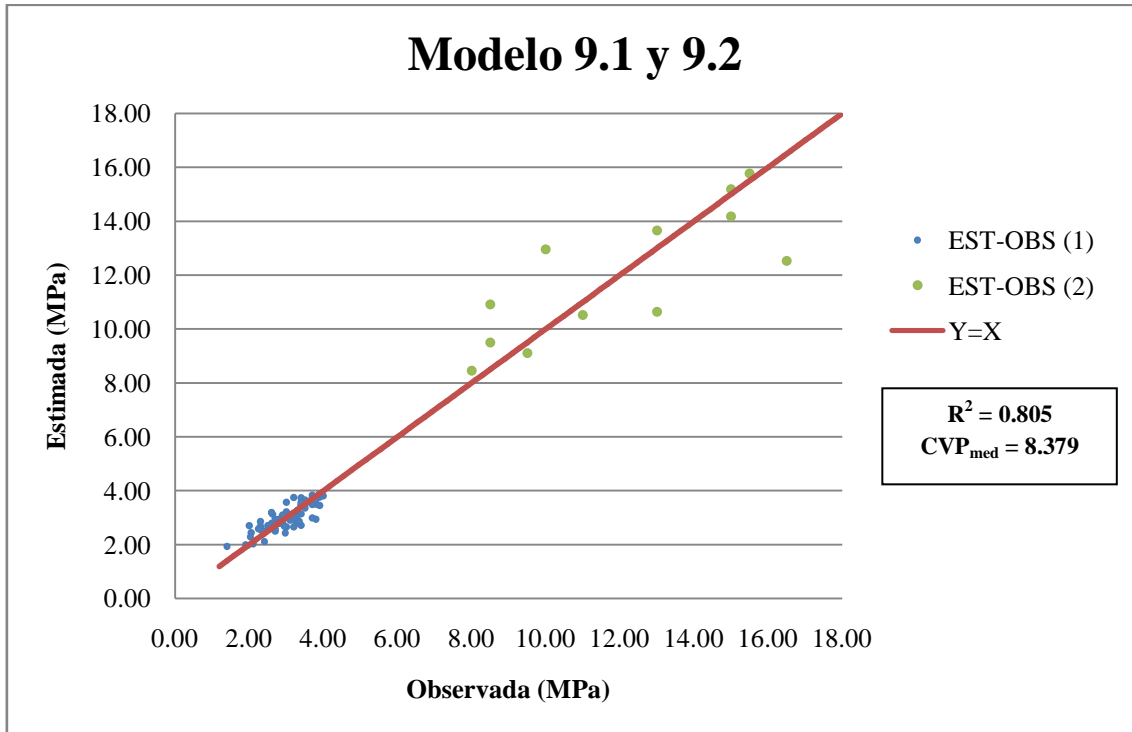


Figura 19: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para la resistencia a tracción indirecta (modelo 9). Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, se analizará todos estos datos en conjunto elaborando de forma resumida la **Figura 20**, mediante el cual se puede apreciar notablemente que a medida que añadimos variables dependientes el valor de predicción del modelo se torna más preciso. Cuando este consta de dos variables independientes el valor de $R^2 = 0.765$ a diferencia del modelo que depende de cuatro variables cuyo valor asciende a $R^2 = 0.805$ con lo cual se puede inferir que este se ajusta de una mejor manera a los datos reales de $f_{ct,RC}$, pero queda claro que esto depende en gran medida de los datos que se disponga. Por otro lado, se puede apreciar también que hay una disminución del valor CVP_{med} el cual desciende de 8.713 a 8.379 con lo cual el error cometido al hacer uso del modelo de cuatro variables es mucho menor que el de dos variables, y se puede decir lo ideal sería poder contar con los datos de WA y LA para así de esta obtener valores más precisos al momento de efectuar las predicciones de $f_{ct,RC}$.

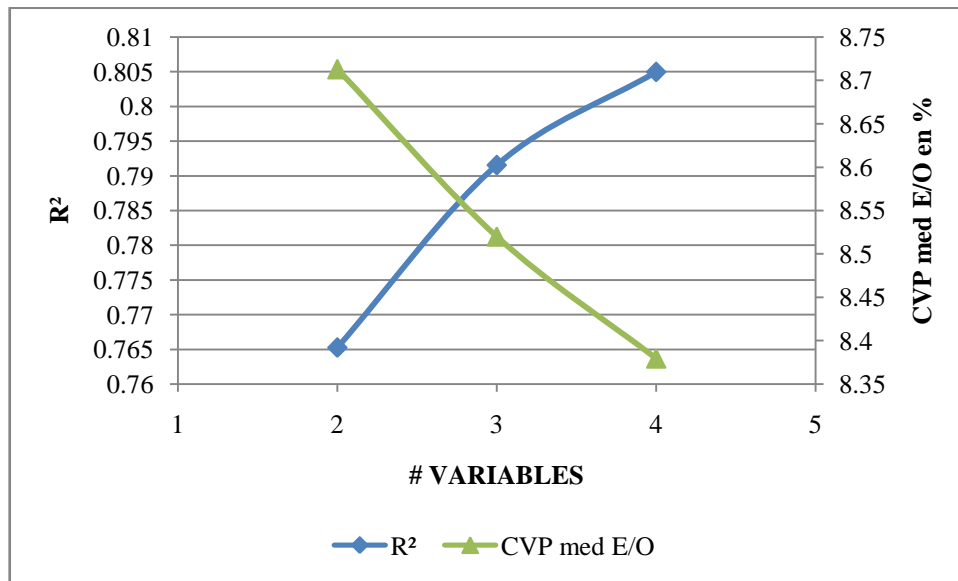


Figura 20: Variación de R^2 y el CVP media en los modelos de resistencia a tracción indirecta con respecto al número de variables independientes. Fuente: Elaboración propia.

Como última observación se dice que los modelos de predicción son precisos al momento de efectuar las predicciones debido al bajo valor del error que se ha encontrado. Cabe recabar que todos estos modelos para poder predecir el comportamiento de la resistencia a compresión, son una mera aproximación del valor real, con lo cual se recomienda al investigador efectuar los debidos estudios posteriores para corroborar esta disminución de resistencia.

5.2.4. Modelos de Módulo de Elasticidad

En este último bloque de modelos, analizaremos seis modelos de módulo de elasticidad como se ha mencionado. Se deben discriminar dos diversos tipos de modelos, el primer tipo que toma como parámetro de referencia la resistencia a compresión del hormigón con sustitución, $f_{c,RCA}$, y el segundo tipo que toma como parámetro de referencia el módulo de elasticidad del hormigón pero sin sustitución, E_{CC} .

Se discutirá brevemente cada uno de estos modelos y se harán las respectivas representaciones graficas que han ayudado en la discriminación del mejor modelo. Además para una mejor visualización y facilidad en la aplicación de la fórmula, se han dejado los términos de los coeficientes como variables y se anexa la **Tabla 9** con los respectivos valores para cada uno de los coeficientes. Los modelos para elasticidad de hormigones con áridos reciclados son:

Considerando la resistencia a compresión

$$\text{Modelo 10: } E_{RC} = \alpha_1 \cdot RCA^2 + (\alpha_2 \cdot f_{c,CC})^{1/2} + \alpha_3$$

$$\text{Modelo 11: } E_{RC} = \alpha_1 \cdot WA + \alpha_2 \cdot RCA^2 + (\alpha_3 \cdot f_{c,CC})^{1/2} + \alpha_4 \cdot WA \cdot RCA$$

$$\text{Modelo 12: } E_{RC} = (\alpha_1 \cdot WA)^{1/2} + \alpha_2 \cdot LA^4 + \alpha_3 \cdot RCA + (\alpha_4 \cdot f_{c,CC})^{1/2} + \alpha_5 \cdot WA \cdot RCA$$

Al igual que en los otros modelos, se puede apreciar una notable reducción del valor de la resistencia a compresión ligada al valor de adición del árido reciclado. Para el *Modelo 10*, los coeficientes α_1 es negativo, con lo cual es evidente que con el porcentaje de sustitución de hormigón reciclado esta intrínsecamente relacionado a la reducción del módulo de elasticidad. El coeficiente α_1 es relativamente pequeño, con lo cual su aporte a la fórmula se ve reducido, y por ende la reducción no es tan grande en comparación al aporte dado por los coeficiente α_2 y α_3 que sus valores son positivos, estando una relación directa con la resistencia a compresión $f_{c,CC}$.

En el *Modelo 11*, se pueden hacer aseveraciones similares al modelo anterior, pero en este caso el porcentaje de absorción influye en el incremento de E_{RC} , lo cual se aprecia por el

valor positivo del coeficiente α_1 . Además este valor del módulo de elasticidad se ve afectado directamente por el porcentaje de sustitución de áridos reciclado que se añade, α_4 y α_2 .

Tabla 9: Coeficientes de las diferentes variables para los modelos 10, 11 y 12.

Coeficientes	Modelo 10	Modelo 11	Modelo 12
α_1	-0.6965	832.2269	27860377.4332
α_2	20363919.0450	-0.2236	$-6.74 \cdot 10^{-4}$
α_3	3468.2104	20817766.5512	-171.1019
α_4	-	-11.1317	17316805.0849
α_5	-	-	8.7052

Fuente: Elaboración propia.

En el *Modelo 12*, se puede apreciar que hay dos valores que intervienen en el decremento del valor de E_{RC} , LA y RCA , esto debido que los coeficientes que los acompañan α_2 y α_3 son negativos. Por otro lado se puede ver que la principal aportación al valor E_{RC} se da por los parámetros WA y $f_{c,CC}$.

Ahora se comentará sobre la validación y conveniencia de un modelo sobre otro, además de los parámetros de selección. Como se puede apreciar en la **Figura 21**, **Figura 22** y **Figura 23** se ha hecho una representación grafica de los valores observados los cuales son los datos reales de E_{RC} tomados de los diversos estudios realizados en áridos reciclados, contra los valores estimados los cuales son los obtenidos a partir de las fórmulas elaboradas aplicando los *Modelos 10, 11 y 12* respectivamente, esto es sustituyendo los valores de las variables RCA , WA y LA en cada una de las ecuaciones por los datos recopilados en los estudios.

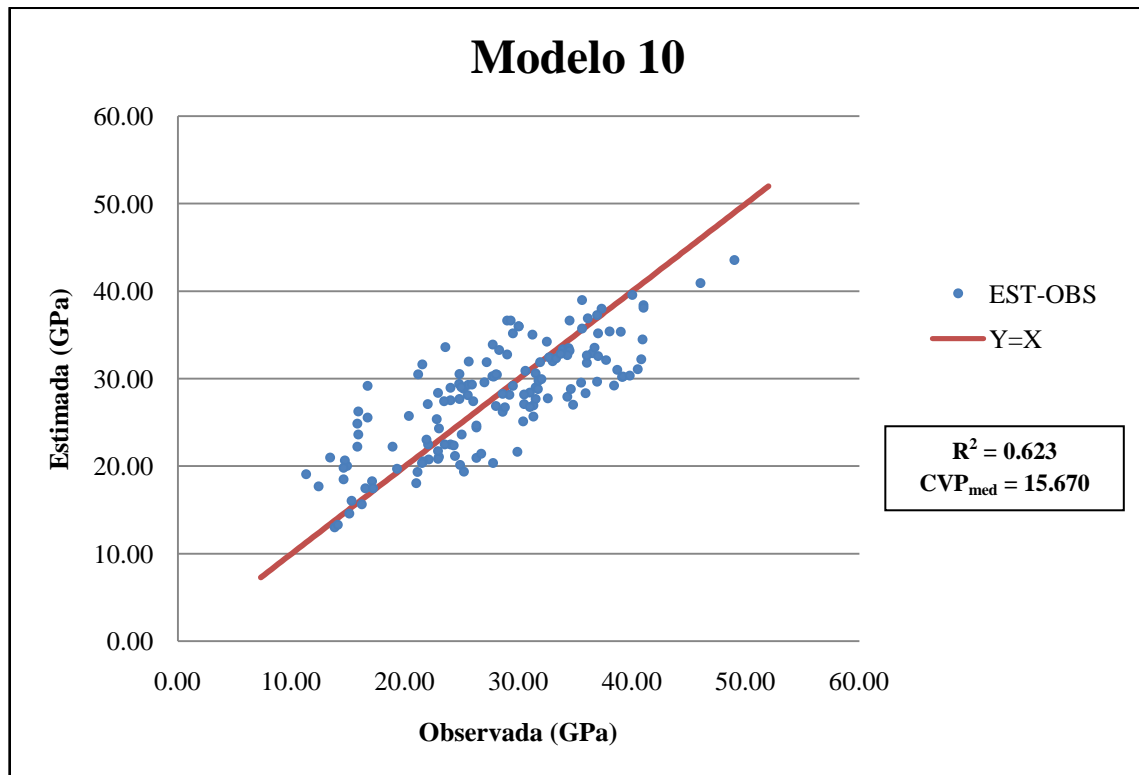


Figura 21: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para módulo de elasticidad (Modelo 10). Fuente: Elaboración propia.

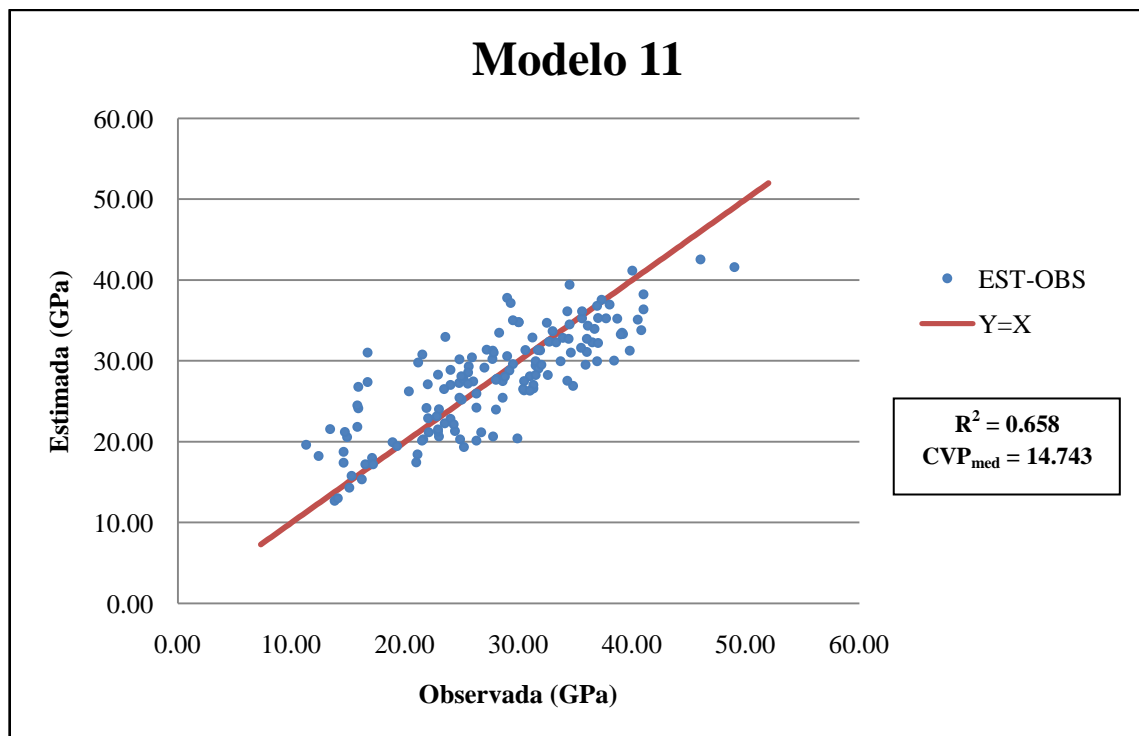


Figura 22: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para módulo de elasticidad (Modelo 11). Fuente: Elaboración propia.

En cada una de las graficas, se puede apreciar dos parámetros que han sido cruciales en la elección del mejor modelo. Se proporciona el valor de R^2 y el CVP_{med} , específicamente para el rango de datos que se ha recolectado, se tiene que el CVP_{med} para el *Modelo 10, 11* y *12* es 15.670%, 14.743% y 9.769% respectivamente, de lo cual se puede decir que los modelos de resistencia a compresión con hormigón de áridos reciclados tiene un error en promedio de entre un 9.769% y 15.670% dependiendo del número de variables que estén disponibles.

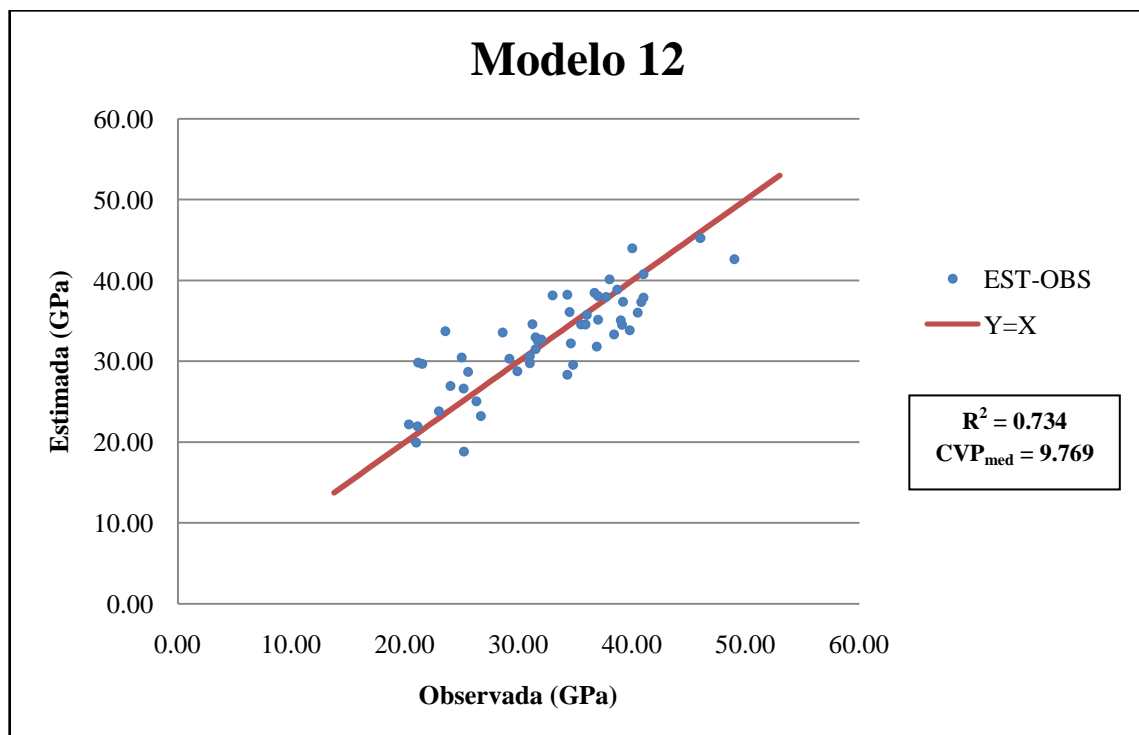


Figura 23: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para módulo de elasticidad (Modelo 12). Fuente: Elaboración propia.

También se puede apreciar también de las **Figura 21**, **Figura 22** y **Figura 23** que en la medida que agregamos más variables independientes (implícito más datos) a nuestro modelo, este se torna más preciso para predecir la E_{RC} que es nuestra variable en estudio. Esto se ve gráficamente porque los valores observados y estimados se van ajustando mejor a la función identidad, recta $Y = X$.

Con todos los datos anteriores, se elabora el siguiente resumen, **Figura 24**, mediante el cual se puede apreciar notablemente que en la medida que añadimos variables dependientes el valor de predicción del modelo se torna más preciso. Cuando este consta

de dos variables independientes el valor de $R^2 = 0.624$ a diferencia del modelo que depende de cuatro variables cuyo valor asciende a $R^2 = 0.734$ con lo cual se puede inferir que este se ajusta de una mejor manera a los datos reales de E_{RC} , pero queda claro que esto depende en gran medida de los datos que se disponga. Por otro lado, se puede apreciar también que hay una disminución del valor CVP_{med} el cual desciende de 15.670 a 9.769 con lo cual el error cometido al hacer uso del modelo de cuatro variables es mucho menor que el de dos variables, con lo cual se puede decir lo ideal sería poder contar con los datos de WA y LA para así de esta obtener valores más precisos al momento de efectuar las predicciones de E_{RC} .

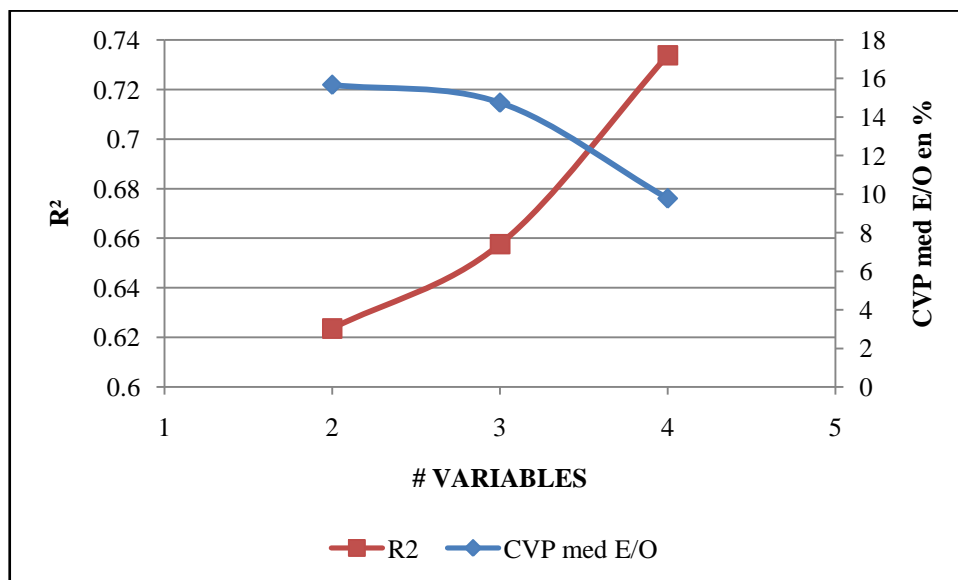


Figura 24: Variación de R^2 y el CVP_{media} en los modelos de módulo de elasticidad con respecto al número de variables independientes. Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, a pesar que los valores de R^2 son bajos, se puede apreciar que las aproximaciones son buenas, esto se puede inferir por medio de las graficas descritas anteriormente, además por otro lado se puede apreciar que los valores de CVP_{med} son bajos.

Considerando el módulo de elasticidad

Para los modelos de resistencia a compresión como se ha mencionado, se proponen los siguientes tres modelos. Se discutirá brevemente cada uno de estos modelos y se harán las respectivas representaciones gráficas que han ayudado en la discriminación del mejor modelo. Además para una mejor visualización y facilidad en la aplicación de la fórmula, se han dejado los términos de los coeficientes como variables y se anexa la **Tabla 10** con los respectivos valores para cada uno de los coeficientes. Los modelos para la resistencia a compresión de hormigones con áridos reciclados son:

$$\text{Modelo 13: } E_{RC} = \alpha_2 \cdot e^{\alpha_1 \cdot RCA} + \alpha_3 \cdot E_{CC} + \alpha_4 \cdot RCA \cdot E_{CC}$$

$$\text{Modelo 14: } E_{RC} = \alpha_1 \cdot WA^2 + \alpha_3 \cdot e^{\alpha_2 \cdot RCA} + \alpha_4 \cdot E_{CC} + \alpha_5 \cdot RCA \cdot E_{CC}$$

$$\text{Modelo 15: } E_{RC} = \alpha_1 \cdot WA^3 + \alpha_2 \cdot LA^4 + \alpha_3 \cdot RCA + \alpha_4 \cdot E_{CC} + \alpha_5 \cdot LA \cdot RCA$$

Como era de esperarse, en los diferentes modelos se puede apreciar una notable reducción del valor de la resistencia a compresión en la medida que se añade árido reciclado. Para el *Modelo 13*, el coeficiente α_4 es negativo, este se relaciona con el porcentaje de sustitución de hormigón reciclado, a su vez se aprecia una reducción directa relacionada con este parámetro. El coeficiente α_1 y α_2 es relativamente pequeño, con lo cual su aporte a la fórmula se ve reducido, y su influencia es casi nula. Por otro lado se ve que el coeficiente α_3 es el que crea la máxima aportación para los valores de predicción del modelo debido a que está relacionado directamente con el módulo de elasticidad.

Tabla 10: Coeficientes de las diferentes variables para los modelos 13, 14 y 15.

Modelo	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
Modelo 1	1.0000	$5.30 \cdot 10^{-4}$	1.0000	-0.0030	-
Modelo 2	-38.2692	-161.2062	-1006.6104	1.0427	-0.0026
Modelo 3	2.0311	-0.0004	124.6535	1.0023	-5.8433

Fuente: Elaboración propia.

En el *Modelo 14*, se pueden hacer observaciones similares al modelo anterior, pero en este caso es el porcentaje de absorción el que influye también en el decremento de E_{RC} , lo cual

se aprecia por el valor negativo del coeficiente α_1 . Ahora bien, el valor de porcentaje de sustitución no se vincula directamente en la fórmula por el valor alto de α_2 , el cual al ser un exponente reduce la aportación de RCA , este parámetro influye directamente a manera de decremento en el valor de E_{RC} por medio del coeficiente α_5 .

Como último modelo propuesto se tiene el *Modelo 15*, se puede apreciar un ligero cambio en la forma ya que en las dos anteriores se tenían funciones exponenciales a excepción de esta última que es de forma potencial. Al añadir la variable LA se puede apreciar como este crea una directa y pequeña aportación negativa al valor de E_{RC} según el valor de α_2 , y el valor cinco de su potencia. Por otro lado el valor de WA y RCA crean un aporte positivo al valor de E_{RC} , según se aprecia por el valor negativo de α_1 y α_3 respectivamente. Además se aprecia en el coeficiente α_5 una notable reducción del valor de E_{RC} dependiendo directamente este parámetro del porcentaje de sustitución de árido reciclado que se añada al hormigón.

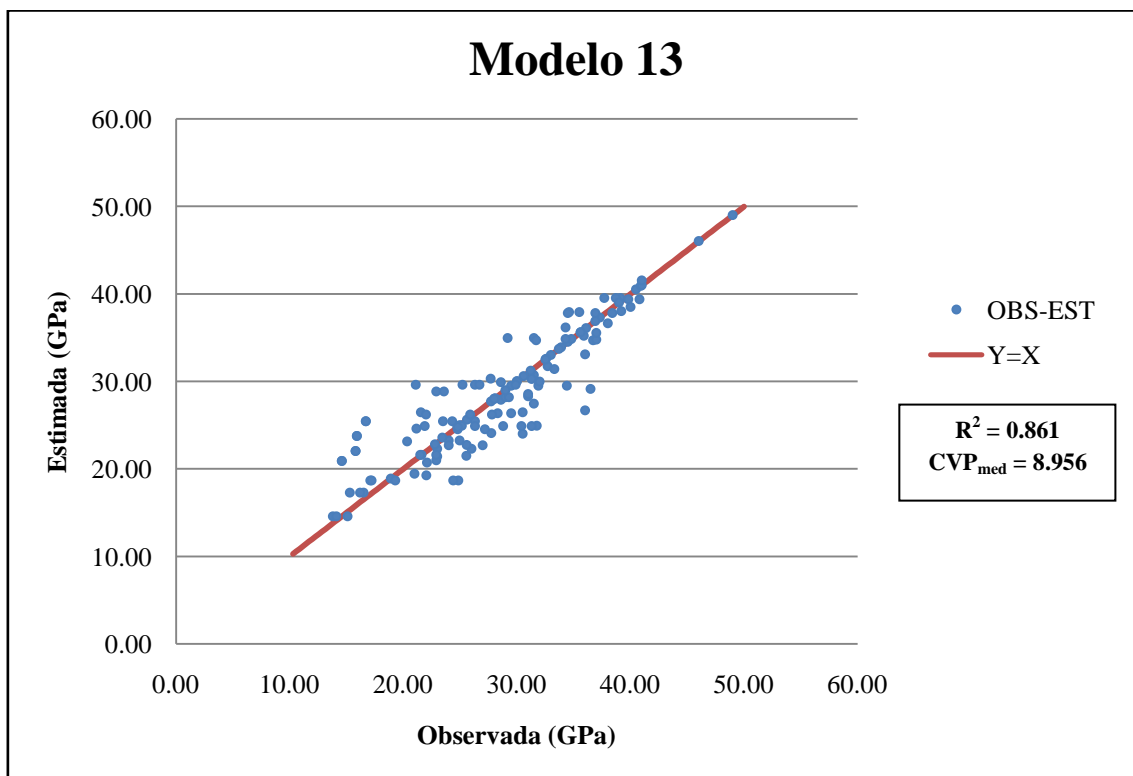


Figura 25: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para el módulo de elasticidad (Modelo 13). Fuente: Elaboración propia.

Ahora se comentará sobre la validación y conveniencia de un modelo sobre otro, además de los parámetros de selección. Como se puede apreciar en la **Figura 25**, **Figura 26** y **Figura 27** se ha hecho una representación grafica de los valores observados los cuales son los datos reales de E_{RC} tomados de los diversos estudios realizados en áridos reciclados, contra los valores estimados los cuales son los obtenidos a partir de las fórmulas elaboradas aplicando los *Modelos 13, 14 y 15* respectivamente, esto es sustituyendo los valores de las variables RCA , WA y LA en cada una de las ecuaciones por los datos recopilados en los estudios.

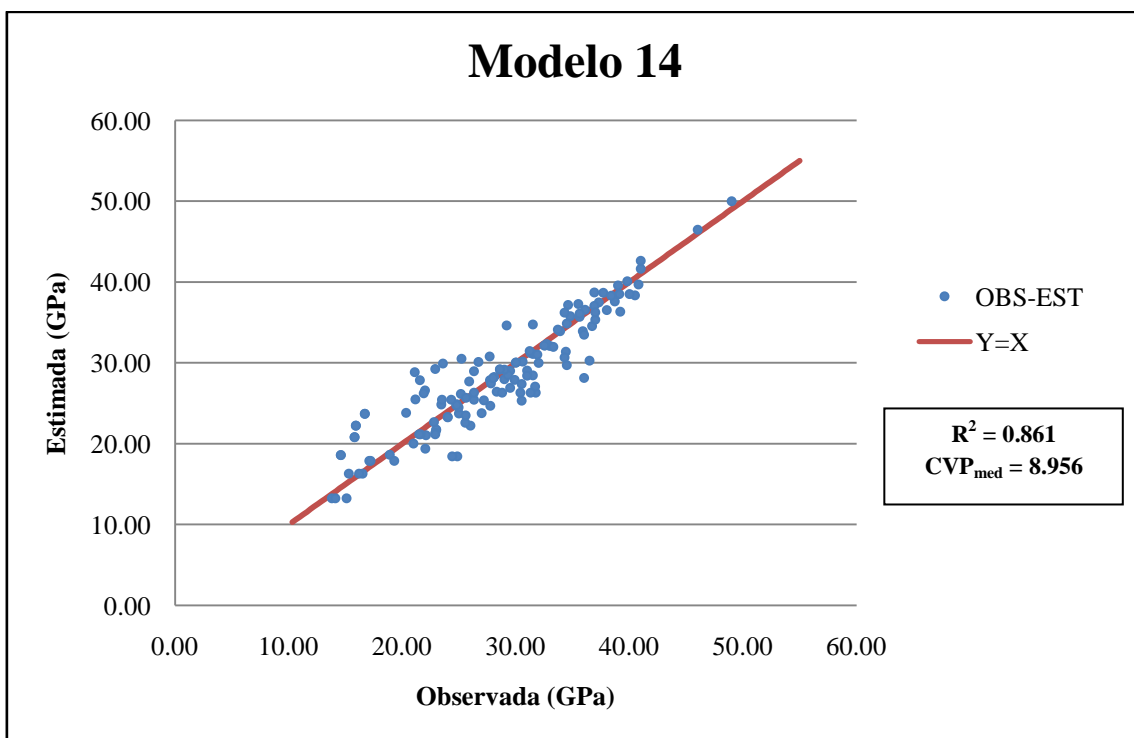


Figura 26: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para el módulo de elasticidad (Modelo 14). Fuente: Elaboración propia.

En cada una de las graficas, se puede apreciar dos parámetros que han sido cruciales en la elección del mejor modelo. Se proporciona el valor de R^2 y el CVP_{med} , cada modelo se ha escogido de tal forma que su CVP_{med} sea el mínimo. Específicamente para el rango de datos que se ha recolectado, se tiene que el CVP_{med} para el *Modelo 13, 14 y 15* es 8.956%, 8.400% y 4.551% respectivamente, de lo cual se puede decir que los modelos de módulo de elasticidad con hormigón de áridos reciclados tiene un error en promedio de entre un 4.551% y 8.956% dependiendo del número de variables que estén disponibles.

Se puede apreciar también de la **Figura 25**, **Figura 26** y **Figura 27** que en la medida que agregamos más variables independientes (implícito más datos) a nuestro modelo, este se torna más preciso para predecir la E_{RC} que es nuestra variable en estudio. Esto se ve gráficamente porque los valores observados y estimados se van ajustando mejor a la función identidad, recta $Y = X$.

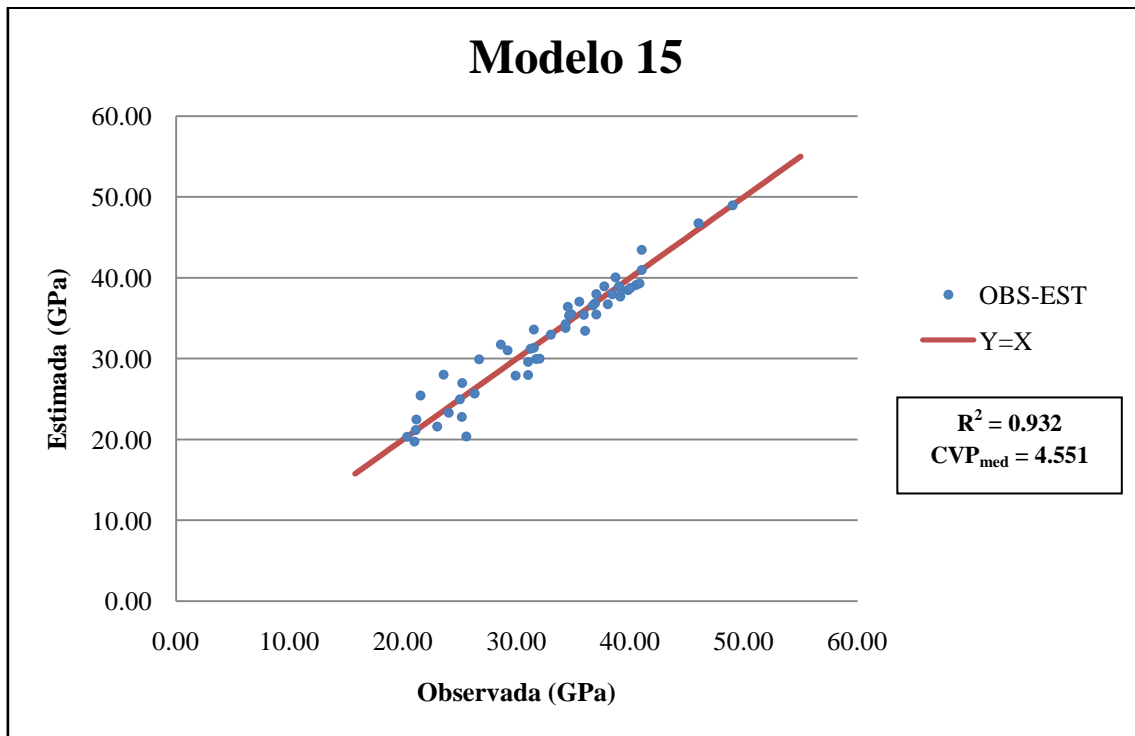


Figura 27: Representación grafica de los *valores observados* y los *estimados* para el módulo de elasticidad (Modelo 15). Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien como forma de resumen se tiene la **Figura 28**, mediante el cual se puede apreciar notablemente que a medida que añadimos variables dependientes el valor de predicción del modelo se torna más preciso. Cuando este consta de dos variables independientes el valor de $R^2 = 0.861$ a diferencia del modelo que depende de cuatro variables cuyo valor asciende a $R^2 = 0.932$ con lo cual se puede inferir que este se ajusta de una mejor manera a los datos reales de E_{RC} , pero queda claro que esto depende en gran medida de los datos que se disponga. Por otro lado, se puede apreciar también que hay una disminución del valor CVP_{med} el cual desciende de 8.956 a 4.551 con lo cual el error cometido al hacer uso del modelo de cuatro variables es mucho menor que el de dos variables, con lo cual se puede decir lo ideal sería poder contar con los datos de WA y LA

para así de esta obtener valores más precisos al momento de efectuar las predicciones de E_{RC} .

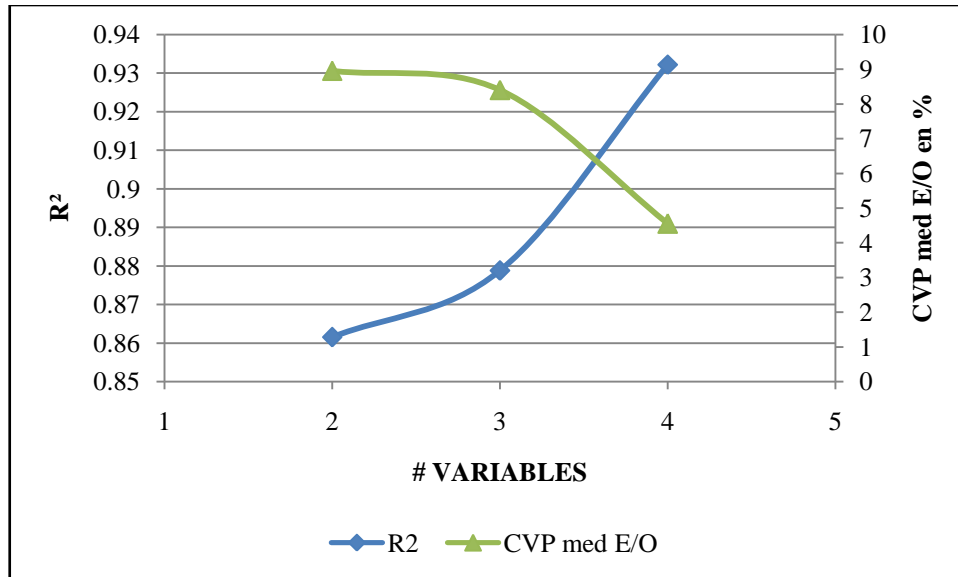


Figura 28: Variación de R^2 y el CVP media en los modelos del módulo de elasticidad con respecto al número de variables independientes. Fuente: Elaboración propia.

5.3. Trabajos futuros

- ✓ Ampliación de las bases de datos: Se puede ampliar la base de datos tanto como se quiera, debido a que el tiempo era escaso, se ha limitado la base de datos a un total de 343 diferentes mezclas pero en la actualidad la diversidad de estudios con respecto a la resistencia mecánica de hormigones que incorporan áridos reciclados es amplia con lo cual se puede hacer búsquedas en las diferentes revistas científicas u otro recursos bibliográficos que sean fiables, tomar los respectivos datos que incorporan los diferentes modelos y enriquecer la base de datos para que los valores de predicción sean aún más precisos.
- ✓ Verificación de la relación con otras variables: Se ha acotado en este estudio al análisis de las propiedades mecánicas del hormigón con áridos reciclados, esto es la resistencia mecánica, resistencia a tracción indirecta y módulo de elasticidad, pero se pueden analizar otras propiedades físicas como ser trabajabilidad, densidad, asentamiento, etc.
- ✓ Ampliación del rango de resistencia a tracción: Se debe ampliar el estudio de la resistencia a tracción ya que los valores observados presentan una discontinuidad entre los 6 y 8 MPa, con lo cual lo ideal sería contar una amplia base de datos que contenga todo el rango de datos sin ruptura, claro está que en los estudios encontrados al respecto es difícil encontrar datos que superen los 6 MPa por la naturaleza frágil que posee el hormigón como se ha explicado, además de la notable reducción de la resistencia a tracción al añadir áridos reciclados.

VI. Conclusiones

- ✓ En base a los resultados y los diferentes estudios que se han encontrado, siempre se aprecia una reducción de la resistencia a compresión de los hormigones en base a la cantidad de sustitución de áridos reciclados que se efectúe. Una de las posibles inferencias que se pueden hacer a partir de los modelos a compresión es que la causa de este decremento se debe al alto valor del porcentaje de absorción de este tipo de árido (WA) por su procedencia, esto a su vez hace que se deba añadir más cantidad de agua para obtener iguales valores de trabajabilidad en comparación con un hormigón sin áridos reciclados.
- ✓ Para los modelos de resistencia a tracción indirecta, se tomaron dos parámetros como referencia, el primero es la resistencia a compresión con sustitución de áridos reciclados y el segundo es la resistencia a tracción indirecta pero sin sustitución. En ambos casos se puede apreciar la notable discontinuidad de los datos, por lo cual se han propuesto dos diferentes modelos para los cuales se tendrán mejores valores de predicción, se puede intuir que ocurren cambios en el modelo en la medida que el valor de resistencia a tracción indirecta aumenta el cual puede ser atribuible a la naturaleza frágil del hormigón.
- ✓ La precisión de cada modelo, dependerá de la cantidad de datos con que se cuente, en la medida que se posean más datos respecto a las propiedades físicas de los áridos reciclados con que se trabaje (WA y LA) los valores de predicción de los diferentes 15 modelos serán más próximos a los valores reales de la variable que se esté analizando, esto se puede apreciar en las Figura 12, 16, 20, 24 y 28.

VII. Bibliografía y referencias

- Abdulla, N. A. (2015). Effect of Recycled Coarse Aggregate Type on Concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 27(10). doi:Artn 0401427310.1061/(Asce)Mt.1943-5533.0001247
- Barbudo, A., de Brito, J., Evangelista, L., Bravo, M., & Agrela, F. (2013). Influence of water-reducing admixtures on the mechanical performance of recycled concrete. *Journal of Cleaner Production*, 59, 93-98. doi:10.1016/j.jclepro.2013.06.022
- Bates, D. M., & Watts, D. G. (1988). *Nonlinear regression analysis and its applications*. New York: John Wiley.
- Box, G. E. P., Hunter, W. G., & Hunter, J. S. (2005). *Estadística para investigadores : introducción al diseño de experimentos, análisis de datos y construcción de modelos = Statistic for experimanters : An introduction to desing, to data analysis, and model building*. Barcelona: Editorial Reverté, S.A.
- Bravo, M., de Brito, J., Pontes, J., & Evangelista, L. (2015). Mechanical performance of concrete made with aggregates from construction and demolition waste recycling plants. *Journal of Cleaner Production*, 99, 59-74. doi:10.1016/j.jclepro.2015.03.012
- Butler, L., West, J. S., & Tighe, S. L. (2011). The effect of recycled concrete aggregate properties on the bond strength between RCA concrete and steel reinforcement. *Cement and Concrete Research*, 41(10), 1037-1049. doi:10.1016/j.cemconres.2011.06.004
- Cakir, O. (2014). Experimental analysis of properties of recycled coarse aggregate (RCA) concrete with mineral additives. *Construction and Building Materials*, 68, 17-25. doi:10.1016/j.conbuildmat.2014.06.032
- Corinaldesi, V. (2010). Mechanical and elastic behaviour of concretes made of recycled-concrete coarse aggregates. *Construction and Building Materials*, 24(9), 1616-1620. doi:10.1016/j.conbuildmat.2010.02.031

- Cui, H. Z., Shi, X., Memon, S. A., Xing, F., & Tang, W. C. (2015). Experimental Study on the Influence of Water Absorption of Recycled Coarse Aggregates on Properties of the Resulting Concretes. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 27(4). doi:Artn 0401413810.1061/(Asce)Mt.1943-5533.0001086
- Daniel, W. W. (2002). *Bioestadística : base para el análisis de las ciencias de la salud* (4a ed ed.). México: Limusa.
- de Myttenaere, A., Golden, B., Le Grand, B., & Rossi, F. (2016). Mean Absolute Percentage Error for regression models. *Neurocomputing*, 192, 38-48. doi:10.1016/j.neucom.2015.12.114
- Dilbas, H., Simsek, M., & Cakir, O. (2014). An investigation on mechanical and physical properties of recycled aggregate concrete (RAC) with and without silica fume. *Construction and Building Materials*, 61, 50-59. doi:10.1016/j.conbuildmat.2014.02.057
- España. Ministerio de Fomento. (2011). *EHE-08 : Code on Structural Concrete : Articles and Annexes*. Madrid: Ministerio de Fomento.
- Etxeberria, M., Vazquez, E., Mari, A., & Barra, M. (2007). Influence of amount of recycled coarse aggregates and production process on properties of recycled aggregate concrete. *Cement and Concrete Research*, 37(5), 735-742. doi:10.1016/j.cemconres.2007.02.002
- Gomes, M., de Brito, J., & Bravo, M. (2014). Mechanical Performance of Structural Concrete with the Incorporation of Coarse Recycled Concrete and Ceramic Aggregates. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 26(10). doi:10.1061/(asce)mt.1943-5533.0000973
- Gupta, P. K., Khaidhair, Z. A., & Ahuja, A. K. (2015). A New Method for Proportioning Recycled Concrete. *Structural Concrete*. doi:10.1002/suco.201400076.
- Ismail, S., & Ramli, M. (2014). Mechanical strength and drying shrinkage properties of concrete containing treated coarse recycled concrete aggregates. *Construction and Building Materials*, 68, 726-739. doi:10.1016/j.conbuildmat.2014.06.058

- Javier Zega, C., & Antonio Di Maio, A. (2011). Recycled Concretes Made with Waste Ready-Mix Concrete as Coarse Aggregate. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 23(3), 281-286. doi:10.1061/(asce)mt.1943-5533.0000165
- Kleinbaum, D. G. (1998). *Applied regression analysis and other multivariable methods* (3rd ed ed.). Pacific Grove (Estados Unidos) [etc.]: Duxbury Press.
- Kou, S.-C., & Poon, C.-S. (2010). Properties of concrete prepared with PVA-impregnated recycled concrete aggregates. *Cement & Concrete Composites*, 32(8), 649-654. doi:10.1016/j.cemconcomp.2010.05.003
- Kou, S. C., & Poon, C. S. (2010). Properties of concrete prepared with PVA-impregnated recycled concrete aggregates. *Cement & Concrete Composites*, 32(8), 649-654. doi:10.1016/j.cemconcomp.2010.05.003
- Kwan, W. H., Ramli, M., Kam, K. J., & Sulieman, M. Z. (2012). Influence of the amount of recycled coarse aggregate in concrete design and durability properties. *Construction and Building Materials*, 26(1), 565-573. doi:10.1016/j.conbuildmat.2011.06.059
- Lotfi, S., Eggimann, M., Wagner, E., Mroz, R., & Deja, J. (2015). Performance of recycled aggregate concrete based on a new concrete recycling technology. *Construction and Building Materials*, 95, 243-256. doi:10.1016/j.conbuildmat.2015.07.021
- Martinez Rodriguez, E. (2005). Errores frecuentes en la interpretación del coeficiente de determinación lineal (Vol. XXXVIII, pp. 315-332). Anuario Jurídico y Económico Escurialense.
- Matias, D., de Brito, J., Rosa, A., & Pedro, D. (2014). Durability of Concrete with Recycled Coarse Aggregates: Influence of Superplasticizers. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 26(7). doi:Artn 0601401110.1061/(Asce)Mt.1943-5533.0000961
- Medina, C., Zhu, W. Z., Howind, T., de Rojas, M. I. S., & Frias, M. (2014). Influence of mixed recycled aggregate on the physical - mechanical properties of recycled

- concrete. *Journal of Cleaner Production*, 68, 216-225. doi:10.1016/j.jclepro.2014.01.002
- Mefteh, H., Kebaili, O., Oucief, H., Berredjem, L., & Arabi, N. (2013). Influence of moisture conditioning of recycled aggregates on the properties of fresh and hardened concrete. *Journal of Cleaner Production*, 54, 282-288. doi:10.1016/j.jclepro.2013.05.009
- Padmini, A. K., Ramamurthy, K., & Mathews, M. S. (2009). Influence of parent concrete on the properties of recycled aggregate concrete. *Construction and Building Materials*, 23(2), 829-836. doi:10.1016/j.conbuildmat.2008.03.006
- Pepe, M., Toledo, R. D., Koenders, E. A. B., & Martinelli, E. (2014). Alternative processing procedures for recycled aggregates in structural concrete. *Construction and Building Materials*, 69, 124-132. doi:10.1016/j.conbuildmat.2014.06.084
- Poon, C. S., Shui, Z. H., Lam, L., Fok, H., & Kou, S. C. (2004). Influence of moisture states of natural and recycled aggregates on the slump and compressive strength of concrete. *Cement and Concrete Research*, 34(1), 31-36. doi:10.1016/S0008-8846(03)00186-8
- Purushothaman, R., Amirthavalli, R. R., & Karan, L. (2015). Influence of Treatment Methods on the Strength and Performance Characteristics of Recycled Aggregate Concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 27(5). doi:Artn 0401416810.1061/(Asce)Mt.1943-5533.0001128
- Rahal, K. (2007). Mechanical properties of concrete with recycled coarse aggregate. *Building and Environment*, 42(1), 407-415. doi:10.1016/j.buildenv.2005.07.033
- Rao, M. C., Bhattacharyya, S. K., & Barai, S. V. (2011). Influence of field recycled coarse aggregate on properties of concrete. *Materials and Structures*, 44(1), 205-220. doi:10.1617/s11527-010-9620-x
- Ratkowsky, D. A. (1983). *Nonlinear regression modeling : a unified practical approach*. New York: Marcel Dekker.

- Sago-Crentsil, K. K., Brown, T., & Taylor, A. H. (2001). Performance of concrete made with commercially produced coarse recycled concrete aggregate. *Cement and Concrete Research*, 31(5), 707-712. doi:Doi 10.1016/S0008-8846(00)00476-2
- Seber, G. A. F., & Wild, C. J. (2003). *Nonlinear regression*. New York [etc.]: Wiley Interscience.
- Sheen, Y. N., Wang, H. Y., Juang, Y. P., & Le, D. H. (2013). Assessment on the engineering properties of ready-mixed concrete using recycled aggregates. *Construction and Building Materials*, 45, 298-305. doi:10.1016/j.conbuildmat.2013.03.072
- Smyth, G. K. (2006). *Nonlinear Regression*. John Wiley & Sons, Ltd. doi:10.1002/9780470057339.van017
- Tabsh, S. W., & Abdelfatah, A. S. (2009). Influence of recycled concrete aggregates on strength properties of concrete. *Construction and Building Materials*, 23(2), 1163-1167. doi:10.1016/j.conbuildmat.2008.06.007
- Topcu, I. B., & Guncan, N. F. (1995). Using Waste Concrete as Aggregate. *Cement and Concrete Research*, 25(7), 1385-1390. doi:Doi 10.1016/0008-8846(95)00131-U
- Verdu, F., & Villacampa, Y. (2008). A computational algorithm for the multiple generation of nonlinear mathematical models and stability study. *Advances in Engineering Software*, 39(5), 430-437. doi:10.1016/j.advengsoft.2007.03.004
- Verdú Monllor, F. (2004a). *Un algoritmo para la construcción múltiple de modelos matemáticos no lineales y el estudio de su estabilidad*. (Tesis Doctoral), Alacant, Dialnet.
- Verdú Monllor, F. (2004b). *Un algoritmo para la construcción múltiple de modelos matemáticos no lineales y el estudio de su estabilidad*. (Doctorado), Alacant, Dialnet.

-
- Xiao, J. Z., Li, J. B., & Zhang, C. (2005). Mechanical properties of recycled aggregate concrete under uniaxial loading. *Cement and Concrete Research*, 35(6), 1187-1194. doi:10.1016/j.cemconres.2004.09.020
- Xuan, D. X., Zhan, B. J., & Poon, C. S. (2016). Assessment of mechanical properties of concrete incorporating carbonated recycled concrete aggregates. *Cement & Concrete Composites*, 65, 67-74. doi:10.1016/j.cemconcomp.2015.10.018
- Zega, C. J., & Di Maio, A. A. (2011). Recycled Concretes Made with Waste Ready-Mix Concrete as Coarse Aggregate. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 23(3), 281-286. doi:10.1061/(Asce)Mt.1943-5533.0000165

VIII. Anejos

8.1. Archivo introducido a Polimodels

A continuación se deja un ejemplo de cómo eran las diferentes bases de datos introducidas en el programa *Polimodels*:

1 166 ← *Numero de observaciones*

1 5 ← *Numero de variables (4 dependientes y 1 independiente)*

5.8 33.6 0 20 20
5.8 33.6 23 20 18.5
5.8 33.6 47 20 18
5.8 33.6 73 20 16.5
5.8 33.6 0 40 40
5.8 33.6 23 40 33
5.8 33.6 47 40 34.5
:
1.75 24 0 31 31
8.3 25 20 31 29
8.3 27 40 31 28
8.3 30 60 31 31
8.3 32 80 31 27
8.3 35 100 31 26
1.75 24 0 31 31
8.3 25 20 31 33
8.3 27 40 31 29
8.3 30 60 31 25.05
8.3 32 80 31 25
8.3 35 100 31 25.05

Datos (en la última columna se coloca siempre la variable dependiente).

8.2. Archivo de salida de Polimodels

Formato de salida proporcionado en archivo de texto por el programa *Polimodels*:

```

Fichero estudiado: 3. rc - resistencia patrón a compresión - %ra - absorc - cda.dtos
Fecha: 10/05/2016 14:09:23
Tiempo Transcurrido..... 0:10'23''720
nvars;nfunc;nop;prof
4 8 1 1
FUNCIONES ESTUDIADAS
V1:$*V1;/(1+@exp(-%#));@exp(@#);@#^2;@#^3;@#^4;(@#)^(0.5);cos() *exp();cos() *ln()
V2:$*V2;/(1+@exp(-%#));@exp(@#);@#^2;@#^3;@#^4;(@#)^(0.5);cos() *exp();cos() *ln()
V3:$*V3;/(1+@exp(-%#));@exp(@#);@#^2;@#^3;@#^4;(@#)^(0.5);cos() *exp();cos() *ln()
V4:$*V4;/(1+@exp(-%#));@exp(@#);@#^2;@#^3;@#^4;(@#)^(0.5);cos() *exp();cos() *ln()
Terminos independientes
T.i.::@*V1*V3;@*V2*V3;@*V4*V3
Algoritmo utilizado: ( Ge0Ini5Regres0Inv0 )
Gauss-Newton: Nonlinear regression... p. 40
Regresion SDL recorrido clásico sin aux
(Reducido) (Desc)
POA
N. Veces sobrepasa tope =10
Tope FError=25
N Max Iterc. =50
Cond. de parada=Epsilon iter. =0.0000001
Se inicializan los parámetros con el mejor de los mejores SCR
Se inicializan los parámetros con el mejor de los mejores SCR
N. combinaciones :6561
Modelos estudiados : 6560
R2 ; DistE_O ; MediaE_O ; MediaE_O(Abs) ; MaxE_O ; SCE ; SCR ; Alfa ; N. Iter.
*****
** RESULTADOS **
*****
N. modelos obtenidos= 197
*****
Los mejores 20 resultados con R2
*****
0.98561455095606;70.14337028635965;0.16071434943326;3.51230967850448;29.26105344092991;21177.9300761661664;4920.09239512936256;0;4
FORMULA0 = (-0.03139660411776)*V1+(-0)*EXP(1*V2)+(-0.05544816820693)*V3+1*V4+((-0.00356431265017)*V1*V3)
FORMULA1 = A1*V1+A3*EXP(A2*V2)+A4*V3+A5*V4+(A6*V1*V3);Params=-0.03139660411776,1,-0,-0.05544816820693,1,-0.00356431265017
FORMULA2 = (0,2,0,0,2);VDtrib=(1,3,4,5,6)
FORMULA3 =
PO=
-----ANOVA-----
Fuente S. Cuadrados Valor F Alfa
-----ANOVA-----
Regresion 21177.9300761661696 114.06597721091121 0
Residuos 4920.09239512936256
-----ANOVA-----
:
:
-----ANOVA-----
Fuente S. Cuadrados Valor F Alfa
-----ANOVA-----
Regresion 18916.2771802112704 157.43870975277677 0
Residuos 3844.8032934040512
-----ANOVA-----
Casos lineales
*****
0.9581712563976;69.26362133518994;-0.29760459353804;3.64657085348292;29.36857697268433;20588.2551645541152;4797.4492404645792;0;6
FORMULA0 = 0.04187489705055*V1+(-0.08264147314022)*V2+(-0.05544816820693)*V3+1.02375430866021*V4
FORMULA1 = A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4*V4;Params=0.04187489705055,-0.08264147314022,-0.05544816820693,1.02375430866021
FORMULA2 = (0,0,0,0,0);VDtrib=(1,2,3,4,17)
FORMULA3 =
PO=
-----ANOVA-----
Fuente S. Cuadrados Valor F Alfa
-----ANOVA-----
Regresion 20588.2551645541184 172.7328896747337 0
Residuos 4797.4492404645792
-----ANOVA-----
MEJOR R2 :
MEJOR distancia media :306%
MEJOR distancia max :2189.33%
MEJOR SCR :3844.8032934040512
-----
Ultima formula estudiada: 0.80651911695365;64.47735068825001;0.00000056705755;3.35835785349663;30.38843058297533;17329.7009945393152
FORMULA0 = COS(-7.42522533633824)*V1+201.02466103931498)*LN(47.49699628769887*V1+(-767.51811744267008))+COS((-0.00665814138C
FORMULA1 = COS(A4*V1+A3)*LN(A2*V1+A1)+COS(A8*V2+A7)*LN(A6*V2+A5)+COS(A12*V3+A11)*LN(A10*V3+A9)+COS(A16*V4+A15)*LN(A14*V4+A13)
FORMULA2 = (8,8,8,8,4);VDtrib=(4,8,12,16,17)
FORMULA3 =
PO=
-----ANOVA-----
Fuente S. Cuadrados Valor F Alfa
-----ANOVA-----
Regresion 17329.7009945393152 81.80622758606255 0
Residuos 4157.32875177557504
-----ANOVA-----
*****
*****Polimodels*****
*****
*****ferran.verdu@ua.es*****
*****2016*****

```


Una aplicación de la regresión no lineal a los Hormigones Reciclados

2016

Un segundo archivo con formato texto que incluye todas las diferentes funciones de una forma mas reducida:

```
Fichero estudiado: 3. rc - resistencia patrón a compresión - %ra - absorc - cda.dtos
Fecha: 10/05/2016 14:09:23
Tiempo transcurrido:..... 0:10'23''720
nvars;nfunc;nop;prof
4 8 1 1
FUNCIONES ESTUDIADAS
V1:$V1;@(1+@exp(-%#));@exp(@#);@#^2;@#^3;@#^4;(@#)^(0.5);cos( )*exp( );cos( )*ln( )
V2:$V2;@(1+@exp(-%#));@exp(@#);@#^2;@#^3;@#^4;(@#)^(0.5);cos( )*exp( );cos( )*ln( )
V3:$V3;@(1+@exp(-%#));@exp(@#);@#^2;@#^3;@#^4;(@#)^(0.5);cos( )*exp( );cos( )*ln( )
V4:$V4;@(1+@exp(-%#));@exp(@#);@#^2;@#^3;@#^4;(@#)^(0.5);cos( )*exp( );cos( )*ln( )
Terminos independientes
t.í.;;@#^1^3;@#^2^3;@#^4^3
Algoritmo utilizado: ( Ge0Ini5Regres0Inv0 )
Gauss-Newton: Nonlinear regression... p. 40
Regresion SDL recorrido clásico Sin aux
(Reducido) (Desc)
PODA
N. Veces sobrepasa tope =10
Tope FError=25
N Max Iterc. =50
Cond. de parada=Epsilon iter. =0.000001
se inicializan los parámetros con el mejor de los mejores SCR
se inicializan los parámetros con el mejor de los mejores SCR
N. combinaciones :6561
Modelos estudiados : 6560
*** FINALIZACION ***
*** NORMAL ***
POR R2
0.985614550956C1ave; Formula=A1*V1+A3*EXP(A2*V2)+A4*V3+A5*V4+(A6*V1*V3); R2=0.98561455095606; Params=-0.03139660411776,1,-(
0.975679919297C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A4*EXP(A3*V3)+A5*V4; R2=0.97567991929657; Params=-0.08543123449835,-0.18502801397(
0.973869455861C1ave; Formula=COS(A4*V1+A3)*EXP(A2*V1+A1)+A5*V2+A6*V3+A7*V4; R2=0.973869455861; Params=-2.81527875690872,0.2
0.963847357364C1ave; Formula=A2*EXP(A1*V1)+A3*V2+A4*V3+A5*V4; R2=0.96384735736448; Params=0.61430049982204,-0.0000048619365(
0.962722065779C1ave; Formula=A1*V1+A2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V1*V3); R2=0.9627220657793; Params=0.02309661175625,-0.075263(
0.961509268150C1ave; Formula=A1*V1+A2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V1*V3); R2=0.96150926814976; Params=0.02396841739807,-0.07604(
0.958620719092C1ave; Formula=A1*V1+A2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V1*V3); R2=0.95862071909168; Params=0.02585841641875,-0.078224
0.958171256398C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4*V4; R2=0.9581712563976; Params=0.04187489705055,-0.08264147314022,-0.0554
0.957118447218C1ave; Formula=A1*V1+A2+A3*V3+A4*V4; R2=0.95711844721812; Params=-0.00667369626661,-0.06242195639351,-0.
0.956455703246C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V1*V3); R2=0.95645570324598; Params=0.00068135470366,-0.0573(
0.956107291306C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4; R2=0.95610729130633; Params=-0.00002592582222,-0.0648920824007,-0.
0.95590955014C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V1*V3); R2=0.9559095501414; Params=0.00069120054703,-0.05781(
0.955218710606C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4*V4; R2=0.9552187106056; Params=-0.00047212764907,-0.06263469607937,-0.
0.955001960629C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V1*V3); R2=0.95500196062918; Params=0.00071560979806,-0.058367
0.952232778477C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V1*V3); R2=0.95223277847694; Params=0.00075956601413,-0.06098421
0.951444834773C1ave; Formula=A1*V1+A2+A3*V3+A4*V4+(A5*V1*V3); R2=0.95144483477258; Params=0.02756488700611,-0.08600435
0.950496792788C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V1*V3); R2=0.95049679278768; Params=0.00001709115932,-0.05447464
0.9497088217819C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V1*V3); R2=0.9497088217819; Params=0.00001814946705,-0.054379C
0.949425804403C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V1*V3); R2=0.94942580440299; Params=0.00001902430609,-0.053697
:
:
POR Máx E/o en valor absoluto y %
21.89333269521C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V2*V3); R2=0.53019814391421; Params=0.29753878886485,0.4
22.027637348678C1ave; Formula=A1*V1+A3*EXP(A2*V2)+A4*V3+A5*V4+(A6*V2*V3); R2=0.42808029723804; Params=-0.0313966041177
22.226601864418C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V2*V3); R2=0.53819139301812; Params=0.00004641683365,
22.275226594407C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V2*V3); R2=0.5374005432432; Params=-0.00099198800844,0
22.322643493142C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V2*V3); R2=0.80468484103506; Params=-0.10065142357
22.407389423386C1ave; Formula=A1*V1+A2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V2*V3); R2=0.5317494591779; Params=-0.01561719276623,
22.773676220025C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V2*V3); R2=0.54821446816881; Params=0.26365342739613,0.4
22.9057897849488C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V2*V3); R2=0.8283216734473; Params=-0.0000258432
23.05452126249C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V1*V3); R2=0.49274552185417; Params=1.51087354481128,0.1
23.149806422213C1ave; Formula=A1*V1+A2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V2*V3); R2=0.55056736015138; Params=-0.01531391220261,
23.158362072574C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V2*V3); R2=0.55658409533592; Params=-0.00004517128644,
23.226210665476C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V2*V3); R2=0.55579459781308; Params=-0.00096381777028,
23.277509959156C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A4*EXP(A3*V3)+A5*V4+(A6*V4*V3); R2=0.80136075422944; Params=-0.09149127467
23.412958881123C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V4*V3); R2=0.4292384901846; Params=0.34122375943674,0.29
23.463136420501C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V4*V3); R2=0.43320012762781; Params=0.33610349203212,0.2
23.5711499146717C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V4*V3); R2=0.43907953694043; Params=-0.000054212178264,
23.682902737683C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V4*V3); R2=0.43802322808256; Params=-0.00111086505563,
23.683727075700C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V4*V3); R2=0.4311428865937; Params=-0.0176895169293,0.
23.862317856661C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4+A5*V4+(A5*V1*V3); R2=0.50164007697478; Params=1.62115567108131,0.1
POR SCR
3844.803293404051C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.88035789955301; Params=-0.00002584324421,0.
3859.308959945700C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.88194499081637; Params=-0.0005228547637,0.0
3879.304284166767C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.87445332704877; Params=-0.0002441128888,0.
3880.896761610438C1ave; Formula=A1*V1+A2+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.88757103487566; Params=-0.00920972618448,0.
3895.130631164222C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.87527926185925; Params=-0.00048196928331,0.
3910.565306722277C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.92702718535267; Params=-0.00002664763583,
3911.716282447303C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.89417819369775; Params=-0.1031792259852,0.000
3914.725354244481C1ave; Formula=A1*V1+A2+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.87979706617944; Params=-0.00842268474584,0.
3915.450182687766C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.86826184787201; Params=-0.00002268646883,0.
3932.860507792409C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.86810879024895; Params=-0.00043074918067,0.
3933.369300261226C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.92857172704793; Params=-0.00051001917595,
3934.320916878934C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.9210321880516; Params=-0.00002547961293,0.
3936.038753341063C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.85831771959618; Params=-0.0000211637268,0.039
3939.419998850787C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.88709176926302; Params=-0.10065142357808,0.00
3950.841963743171C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.88448197037332; Params=-0.00002344401761,0.
3950.8993820247642C1ave; Formula=A1*V1+A2+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.87083085300882; Params=-0.00729808008008,0.
3953.899165961468C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.91110459567132; Params=-0.00002428260398,
3954.567938026301C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.85709217213767; Params=-0.00038401343972,0.04
3957.685452151928C1ave; Formula=A1*V1+A3+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.92212407579356; Params=-0.00047727798365,
Lineal
Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4*V4; R2=0.9581712563976; Params=0.04187489705055,-0.08264147314022,-0.05544816820693,1.02375430866
Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4*V4+A5; R2=0.7966543298537; Params=-0.03400524711655,-0.14633111564761,-0.06870795028379,0.9182526
MEJOR R2 : 0.985614550956C1ave; Formula=A1*V1+A3*EXP(A2*V2)+A4*V3+A5*V4+(A6*V1*V3); R2=0.98561455095606; Params=-0.031
MEJOR distancia media : 3.059951815866C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.88448197037332; Para
MEJOR distancia max : 21.89333269521C1ave; Formula=A1*V1+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.53019814391421; Params
MEJOR SCR : 3844.803293404051C1ave; Formula=A1*V1+A4+A2*V2+A3*V3+A4*V4+(A5*V2*V3); R2=0.88035789955301; Params=-0.00002584324421,0.
```