

FACULTAD DE CIENCIAS
GRADO EN MATEMÁTICAS
TRABAJO FIN DE GRADO
CURSO ACADÉMICO 2015-2016

TÍTULO:

SERIES DE DIRICHLET

AUTOR:

ADRIÁN LLINARES ROMERO

TUTOR:

JUAN MATÍAS SEPULCRE MARTÍNEZ

Resumen

Las series de potencias constituyeron una herramienta esencial manejada por Weierstrass en el siglo XIX dentro de su programa de aritmetización del Análisis Matemático. Más tarde, a principios del siglo XX, en conexión con la función zeta de Riemann se inició un estudio intensivo de las series de Dirichlet, que constituyen el objeto fundamental de este trabajo fin de grado. En lo que a la estructura del trabajo se refiere, se empieza con una breve presentación histórica y posteriormente se procede a ilustrar el concepto de serie de Dirichlet, introduciendo sus propiedades inmediatas, como bien pueden ser la convergencia y la analiticidad de la forma más general posible, para luego centrarnos en el caso de las series de Dirichlet clásicas u ordinarias, haciendo un inciso en su estructura algebraica existente y en los productos de Euler. Finalmente y como no podía ser de otra forma, cerramos este estudio con una introducción a las características de la ya mencionada función zeta de Riemann y la archiconocida hipótesis de Riemann. Se adjuntan además tres anexos con los resultados necesarios para la correcta evolución del trabajo.

Palabras clave: *Variable compleja, funciones analíticas, series de Dirichlet, abscisas de convergencia, productos de Euler, zeta de Riemann, funciones L de Dirichlet, hipótesis de Riemann.*

Abstract

Power series constituted an essential tool managed by Weierstrass in the XIX century in his program of arithmetization of Mathematical Analysis. Later, in the early XX century, in connection with the Riemann zeta function began an intensive study of Dirichlet series, which constitute the primary object of this paper. As the structure of the work is concerned, we begin with a brief historical presentation and then proceed to illustrate the concept of Dirichlet series, introducing its immediate properties, as would it be the convergence and analyticity, and then focus on the case of ordinary Dirichlet series, studying their existing algebraic structure and the Euler products. Finally, we close this study with an introduction to the features of the Riemann zeta function and the famous Riemann hypothesis. In addition, three annexes are attached in order to achieve the successful development of work.

Key words: *Complex variable, analytic functions, Dirichlet series, convergence strips, Euler products, Riemann zeta function, Dirichlet L function, Riemann hypothesis.*

Índice

1. Introducción	5
1.1. Notación previa	5
1.2. Reseñas históricas	6
2. Definiciones y propiedades básicas	8
2.1. Abscisas de convergencia	8
2.2. Analiticidad de las series de Dirichlet	22
2.3. Comportamiento asintótico y unicidad	26
2.4. Representación integral	27
3. Series de Dirichlet ordinarias	29
3.1. Producto de series de Dirichlet ordinarias	29
3.2. Estructura algebraica	30
3.3. Productos de Euler	37
3.4. Propiedades de la función zeta de Riemann y las funciones L de Dirichlet	40
3.4.1. Representación mediante la función zeta de Hurwitz	40
3.4.2. Extensiones analíticas	42
3.4.3. Fórmulas de Hurwitz. Hipótesis de Riemann	47
A. Teoremas auxiliares	53
A.1. Teoremas de variable compleja	53
A.2. Complementos de teoría de anillos	56
B. Funciones aritméticas	58
B.1. Definición y ejemplos relevantes	58
B.2. Funciones multiplicativas	59
B.3. Convolución de Dirichlet	59
B.4. Caracteres de Dirichlet	60
C. Propiedades de $\Gamma(s)$	63

1. Introducción

1.1. Notación previa

A lo largo del texto, será recurrente la siguiente notación:

- Denotaremos como \mathbb{C} al cuerpo de los números complejos, designando el valor i a la unidad imaginaria.
- Denotaremos como \mathbb{R} al cuerpo de los números reales y \mathbb{R}^+ al conjunto de los números reales estrictamente positivos.
- Denotamos como \mathbb{Z} y \mathbb{N} a los conjuntos de los números enteros y enteros positivos, respectivamente.
- Salvo que se indique lo contrario, reservaremos la grafía p para denotar a los números primos exclusivamente.
- Denotamos (a, b) como el máximo común divisor de los enteros a y b .
- Si $k \in \mathbb{Z}$, denotaremos a su clase residual módulo n como $[k]_n$, omitiendo el subíndice en caso de que no haya posibilidad de confusión.
- Dado un complejo s , manejaremos la notación $s = \sigma + it$, $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Es decir, denotaremos σ y t como las partes real e imaginaria de s , respectivamente.
- Dado un número complejo $s = \sigma + it$, denotaremos como $\bar{s} = \sigma - it$ a su conjugado y $|s| = \sqrt{\sigma^2 + t^2}$ a su módulo.
- Denotaremos como $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ al conjunto de todas las sucesiones de números complejos.
- Dada una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y dos reales positivos x e y , con $x < y$, emplearemos la siguiente notación:

$$\sum_{k=x}^y a_k := \sum_{k=\lceil x \rceil}^{\lfloor y \rfloor} a_k,$$

donde $\lceil \cdot \rceil$ y $\lfloor \cdot \rfloor$ denotan las funciones techo y suelo, respectivamente.

- Dada una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, y $x, y \in \mathbb{R}^+$ con $x < y$, consideraremos

$$A(x) := \sum_{k=1}^x a_k \text{ y } A(x, y) := \sum_{k=x}^y a_k.$$

- A una sucesión de números complejos $\{a_n\}_{n \geq 1}$, le asociaremos la siguiente progresión:

$$\Delta a_n := a_n - a_{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

1.2. Reseñas históricas

No hay matemático, ya sea por profesión o por afición, por el cual no hayan pasado por su punto de mira en algún momento los números primos. Esto no es de extrañar, pues si recordamos el Teorema Fundamental de la Aritmética:

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental de la Aritmética) ([7], teorema 6.7, página 12) *Todo entero positivo puede factorizarse de forma única, salvo reordenación de los factores, como producto de primos.*

Es decir, que la comprensión de posiblemente el conjunto numérico más elemental de todos, los números naturales, pasa por un escurridizo subconjunto suyo: los dichosos números primos.

Empleamos los calificativos “escurridizo” y “dichosos” pues, como el lector probablemente sabrá, a pesar de que los números naturales y los números primos llevan estudiándose desde prácticamente los albores de las Matemáticas (recordemos que ya Euclides probó la infinidad de los números primos en sus *Elementos*, [9]) conocemos muy poco acerca de la distribución de éstos.

Y esta es precisamente una de las razones por las cuales nacen las series de Dirichlet: intentar estudiar la distribución de los números primos.

Podemos encontrar los primeros vestigios de las series de Dirichlet con Leonhard Euler, prolífico matemático suizo del siglo XVIII, quien estableció en 1737 mediante la que sería conocida como la función zeta de Riemann la siguiente relación entre todos los números naturales y los números primos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-x}}, \quad \forall x > 1.$$

Esta conexión sería denominada en su honor producto de Euler de la función zeta de Riemann, concepto que se extendería a cualquier serie de Dirichlet que cumpla las condiciones pertinentes, las cuales estudiaremos a lo largo de la sección 3.3.

Un siglo después, en 1837, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet estudió las que pasarían a la historia en reconocimiento de su labor como L funciones de Dirichlet para probar la existencia de infinitos primos dentro de una sucesión aritmética $\{a+d(n-1)\}_{n \geq 1}$ con $(a, d) = 1$, resultado que previamente ya había conjeturado Gauss.

Es en 1859 cuando Bernhard Riemann propone tratar a la función zeta de Riemann como una función de variable compleja y estudiar la localización de sus ceros, conjeturando uno de los mayores retos, de hecho aún por resolver, de la historia de las Matemáticas: la hipótesis de Riemann. Veremos a lo largo de la sección 3.4.3 su trascendencia a la hora de la comprensión de los números primos y su distribución.

No es hasta los inicios del siglo XX cuando comienza el verdadero desarrollo de la teoría de series de Dirichlet de la mano de otras grandes eminencias como Hardy, Littlewood, Bohr, Riesz y Landau, entre otros muchos; muy posiblemente como parte de un intento de construcción de un nuevo marco teórico con el cual finalizar la búsqueda de una respuesta a la citada hipótesis de Riemann.

En lo que a la actualidad respecta, la investigación en el campo de las series de Dirichlet ha conseguido considerables avances, gracias a nuevas técnicas propias del Análisis Funcional y el estudio de series de Dirichlet en espacios de Banach más generales. Para más información sobre la relación entre las series de Dirichlet y el Análisis Funcional recomendamos que se consulten [21] y [22].

Puesto que realizar un estudio exhaustivo sobre las series de Dirichlet exceden en demasía los límites de este trabajo, nos centraremos en las propiedades más elementales y características de éstas.

2. Definiciones y propiedades básicas

Definición 2.1 (Serie de Dirichlet) Definimos una serie general de Dirichlet como una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

con $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de números complejos y $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión estrictamente creciente de números reales no negativos de límite infinito.

En el caso de que $\lambda_n = \ln n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, la serie anterior se reduce a la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

que recibe el nombre de serie de Dirichlet clásica u ordinaria.

Ejemplos 2.2 Algunos ejemplos relevantes de series de Dirichlet son:

1. La función zeta de Riemann:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}.$$

2. La función eta de Dirichlet o zeta alternada de Riemann:

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}.$$

3. Las funciones L de Dirichlet:

$$L(\chi, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}.$$

con χ un carácter de Dirichlet (véase el anexo B.4).

2.1. Abscisas de convergencia

Puesto que las series de Dirichlet no dejan de ser un caso particular de series de números complejos, resulta natural que las primeras propiedades que debemos estudiar sean los diferentes tipos de convergencia que pueden suceder para de una serie de Dirichlet dada.

Comenzaremos estudiando la convergencia absoluta.

Teorema 2.3 ([2], teorema 8, página 8) Consideremos la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ y supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{-\lambda_n s}|$ converge para $s_0 \in \mathbb{C}$ y no converge en todo \mathbb{C} . Entonces existe σ_a real tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ converge absolutamente si $s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_a\}$ y no converge absolutamente si $s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma < \sigma_a\}$.

Demostración. Para todo n natural, resulta inmediato que para todo $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$

$$|a_n e^{-\lambda_n s}| = |a_n e^{-\lambda_n(\sigma+it)}| = |a_n| e^{-\lambda_n \sigma},$$

con lo que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{-\lambda_n s}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}, \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Por tanto, consideremos el siguiente conjunto:

$$D := \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} \text{ diverge} \right\}.$$

Por hipótesis, tenemos que existe al menos un $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{C}$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s_0}$ converge absolutamente.

Entonces

$$|a_n| e^{-\lambda_n \sigma} \leq |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0}, \quad \forall n \geq 1, \forall \sigma \geq \sigma_0, \quad (1)$$

lo que implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} < \infty, \quad \forall \sigma \geq \sigma_0,$$

y consecuentemente $\sigma \notin D$ para cualquier $\sigma \geq \sigma_0$. Por tanto D , que es no vacío por hipótesis, está acotado superiormente por σ_0 y tiene supremo, que denotaremos como σ_a .

- Si $\sigma > \sigma_a$, al ser σ_a el supremo de D necesariamente $\sigma \notin D$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$ converge.

- Si $\sigma < \sigma_a$, demostraremos mediante reducción al absurdo que la serie diverge en σ .

En caso de que convergiese, el mismo argumento dado en (1) prueba que, para cualquier $\sigma' \in [\sigma, \sigma_a]$, necesariamente $\sigma' \notin D$, en contradicción con el hecho de que σ_a es el supremo de D .

Por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$ diverge si $\sigma < \sigma_a$, lo cual finaliza la demostración. ■

Corolario 2.4 *Toda serie de Dirichlet tiene asociada un semiplano de convergencia absoluta $\{s = \sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_a\}$, donde σ_a puede ser eventualmente $-\infty$ ó ∞ .*

Demostración. Consecuencia inmediata del teorema anterior. ■

Definición 2.5 (Abscisa de convergencia absoluta) *El valor σ_a introducido en el corolario 2.4 recibe el nombre de abscisa de convergencia absoluta.*

Ejemplos 2.6

1. Dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^\sigma} = \infty, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R},$$

necesariamente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^s}$ no converge absolutamente en ningún $s \in \mathbb{C}$, con lo que $\sigma_a = \infty$.

2. Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$ para $p > 1$, la serie de Dirichlet que define $\zeta(s)$ converge absolutamente en $\{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$. Además no converge para $s = 1$, y en consecuencia su abscisa de convergencia absoluta es finita vale 1. En el ejemplo 2.16 veremos una forma alternativa para el cálculo de dicho valor.

3. A partir del teorema B.18, tenemos que para cualquier carácter de Dirichlet y cualquier $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\chi(n)}{n^\sigma} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \infty,$$

con lo que cualquier serie que defina una función L de Dirichlet $L(s, \chi)$ tiene abscisa de convergencia absoluta menor o igual que 1.

4. Para cada $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^{-(n+1)}}{(n+1)^\sigma}}{\frac{e^{-n}}{n^\sigma}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\sigma = e^{-1} < 1,$$

probando mediante el criterio del cociente que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^s}$ converge absolutamente en todo $s \in \mathbb{C}$, y así $\sigma_a = -\infty$.

Para poder extender estos resultados a la convergencia (no necesariamente absoluta) de las series de Dirichlet, necesitamos disponer de los lemas previos 2.7 y 2.8.

Lema 2.7 (Lema de Abel) ([2], lema 1, página 3) Sean $\{a_n\}_{n \geq 1}$ y $\{b_n\}_{n \geq 1}$ dos sucesiones de números complejos, y sean $x, y \in \mathbb{R}^+$, con $y > x$. Entonces

$$\sum_{k=x}^y a_k b_k = \sum_{k=x}^{y-1} A(x, k) \Delta b_k + A(x, y) b_{[y]}.$$

Demostración. Como consecuencia de la notación empleada (sección 1.1), resulta suficiente demostrar el resultado para el caso en que x e y sean enteros positivos, con lo que de ahora en adelante impondremos esta condición.

En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=x}^{y-1} A(x, k) \Delta b_k &= \sum_{k=x}^{y-1} A(x, k) b_k - \sum_{k=x}^{y-1} A(x, k) b_{k+1} \\ &= \sum_{k=x}^{y-1} A(x, k) b_k - \sum_{n=x+1}^y A(x, n-1) b_n. \end{aligned} \quad (2)$$

A partir de la definición de A (sección 1.1) y de (2), rápidamente obtenemos que

$$\sum_{k=x}^{y-1} A(x, k) \Delta b_k = \sum_{k=x}^{y-1} a_k b_k - A(x, y-1) b_y. \quad (3)$$

Finalmente, a partir de (3), concluimos que

$$\sum_{k=x}^{y-1} A(x, k) \Delta b_k + A(x, y) b_y = \sum_{k=x}^{y-1} a_k b_k - A(x, y-1) b_y + A(x, y) b_y = \sum_{k=x}^y a_k b_k.$$

■

Lema 2.8 ([2], lema 2, página 3) Sea $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, con $\sigma \neq 0$. Entonces

$$|\Delta e^{-\lambda_n s}| \leq \frac{|s|}{\sigma} \Delta e^{-\lambda_n \sigma}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |\Delta e^{-\lambda_n s}| &= |e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}| \\ &= \left| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} s e^{-xs} dx \right| \\ &\leq \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} |s e^{-xs}| dx \\ &= |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-x\sigma} dx \\ &= \frac{|s|}{\sigma} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1} \sigma}) = \frac{|s|}{\sigma} \Delta e^{-\lambda_n \sigma}. \end{aligned}$$

■

Una vez probados los lemas 2.7 y 2.8, podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 2.9 ([2], teorema 3, página 4) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ una serie de Dirichlet convergente en $s_0 = \sigma_0 + it_0$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ también converge para todo $s = \sigma + it$ con $\sigma > \sigma_0$.

Demostración. Sea $s = \sigma + it$. Por el lema de Abel (lema 2.7), tenemos que

$$\sum_{k=n}^m a_k e^{-\lambda_k s} = \sum_{k=n}^{m-1} A(n, k) \Delta e^{-\lambda_k s} + A(n, m) e^{-\lambda_m s}. \quad (4)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $s_0 = 0$, y consecuentemente dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|A(n, k)| = \left| \sum_{i=n}^k a_i \right| < \frac{\varepsilon \sigma}{|s|}, \quad \forall k \geq n \geq n_0. \quad (5)$$

A partir de la desigualdad triangular, el lema 2.8 y las igualdades (4) y (5), tenemos que si $m \geq n \geq n_0$ y $\sigma > \sigma_0 = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n}^m a_k e^{-\lambda_k s} \right| &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} A(n, k) \Delta e^{-\lambda_k s} + A(n, m) e^{-\lambda_m s} \right| \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} |A(n, k)| |\Delta e^{-\lambda_k s}| + |A(n, m)| e^{-\lambda_m \sigma} \\
&\leq \varepsilon \left(\sum_{k=n}^{m-1} \Delta e^{-\lambda_k \sigma} + \frac{\sigma e^{-\lambda_m \sigma}}{|s|} \right) \\
&\leq \varepsilon \left(\sum_{k=n}^{m-1} \Delta e^{-\lambda_k \sigma} + e^{-\lambda_m \sigma} \right) \\
&= \varepsilon e^{-\lambda_n \sigma} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

demostrando así que la serie converge en s . ■

Corolario 2.10 *Toda serie de Dirichlet tiene asociada un plano de convergencia $\{s = \sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_c\}$, donde eventualmente σ_c puede ser $-\infty$ ó ∞ .*

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema anterior, podemos deducir la existencia del semiplano de convergencia de forma análoga a la demostración del teorema 2.3. ■

Definición 2.11 (Abscisa de convergencia) *El valor σ_c introducido en el corolario 2.10 recibe el nombre de abscisa de convergencia.*

Observación 2.12 *Puesto que la convergencia absoluta de una serie implica la convergencia de ésta, resulta evidente que*

$$\sigma_c \leq \sigma_a.$$

Ejemplos 2.13 *Retomando los argumentos dados en los ejemplos 2.6, tenemos que*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^s}$ no converge para ningún $s \in \mathbb{C}$, con lo que $\sigma_c = \infty$.
2. La serie de Dirichlet que define $\zeta(s)$ tiene abscisa de convergencia finita, cuyo valor es la unidad. En efecto, pues $\sigma_c \leq 1$ por el ejemplo 2.6 y no converge para $s = 1$. Otro cálculo alternativo se mostrará en el ejemplo 2.17.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^s}$ converge en todo $s \in \mathbb{C}$, y en consecuencia $\sigma_c = -\infty$.

Veamos ahora dos proposiciones que nos permitirán calcular las abscisas de convergencia y convergencia absoluta en el caso de que estos valores sean no negativos.

Proposición 2.14 ([2], página 6) *Dada una serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ que no converge en $s = 0$, podemos calcular su abscisa de convergencia de la siguiente forma:*

$$\sigma_c = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |A(n)|}{\lambda_n}, \text{ donde } A(n) := \sum_{k=1}^n a_k.$$

Demostración. Sea $\gamma := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |A(n)|}{\lambda_n}$. Dividiremos la demostración en dos partes:

1. En primer lugar, veamos que la serie converge para cualquier valor mayor que γ . Por tanto, consideremos $s = \gamma + \delta$, con $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño.

Sea $\varepsilon \in (0, \delta)$. Por definición de γ , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\ln |A(n)|}{\lambda_n} < \gamma + \delta - \varepsilon \implies |A(n)| < e^{(\gamma + \delta - \varepsilon)\lambda_n} \text{ si } n \geq n_0. \quad (6)$$

De nuevo por el lema de Abel (lema 2.7),

$$\sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k s} = \sum_{k=1}^{n-1} A(k) \Delta e^{-\lambda_k s} + A(n) e^{-\lambda_n s}.$$

Por un lado, tenemos que

$$|A(n) e^{-\lambda_n s}| < e^{\lambda_n(s - \varepsilon - s)} = e^{-\lambda_n \varepsilon}, \quad \forall n \geq n_0,$$

con lo que este término tiende a cero debido a que λ_n tiende a ∞ .

Por tanto, la convergencia de la serie depende de la convergencia de $\sum_{k=1}^{n-1} A(k) \Delta e^{-\lambda_k s}$, que, por lo visto en (6), a su vez depende de la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{(\lambda + \delta - \varepsilon)\lambda_k} \Delta e^{-(\lambda + \delta)\lambda_k}.$$

Puesto que $\gamma + \delta - \varepsilon > 0$, dado $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$e^{(\gamma + \delta - \varepsilon)\lambda_k - (\gamma + \delta)x} = e^{(\gamma + \delta - \varepsilon)(\lambda_k - x)} e^{-\varepsilon x} \leq e^{-\varepsilon x}, \quad \forall x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}],$$

y así, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} e^{(\gamma+\delta-\varepsilon)\lambda_k} \Delta e^{-(\gamma+\delta)\lambda_k} &= (\gamma + \delta) \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{(\gamma+\delta-\varepsilon)\lambda_k - (\gamma+\delta)x} dx \\ &\leq (\gamma + \delta) \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-\varepsilon x} dx. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} e^{(\lambda+\delta-\varepsilon)\lambda_k} \Delta e^{-(\lambda+\delta)\lambda_k} &\leq (\gamma + \delta) \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-\varepsilon x} dx \\ &= (\gamma + \delta) \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} e^{-\varepsilon x} dx, \end{aligned}$$

y, dado que la sucesión $\left\{ (\gamma + \delta) \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} e^{-\varepsilon x} dx \right\}_{n \geq 1}$ converge a $\frac{(\gamma + \delta)e^{-\varepsilon\lambda_1}}{\varepsilon}$, hemos llegado a la conclusión deseada, de donde se desprende, que

$$\gamma \geq \sigma_c$$

2. Para probar la otra desigualdad, sea $s > 0$ tal que la serie converja, y consideremos la siguiente sucesión:

$$b_n := a_n e^{-\lambda_n s}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Aplicando el lema de Abel (lema 2.7),

$$A(n) = \sum_{k=1}^n b_k e^{\lambda_k s} = \sum_{k=1}^{n-1} B(k) \Delta e^{\lambda_k s} + B(n) e^{\lambda_n s}.$$

Por tanto, existe una constante $K > 0$ tal que

$$|A(n)| < K e^{\lambda_n s} \implies \ln |A(n)| < \lambda_n s + \ln K,$$

y puesto que λ_n tiende a ∞ , tenemos que, para todo $\delta > 0$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$\ln |A(n)| < (s + \delta) \lambda_n \implies s > \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |A(n)|}{\lambda_n},$$

de donde se deduce,

$$\sigma_c \geq \gamma,$$

terminando así la demostración.

■

Proposición 2.15 ([2], teorema 8, página 8) Dada una serie de Dirichlet con $\sigma_a \geq 0$, tenemos que

$$\sigma_a = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \bar{A}(n)}{\lambda_n}, \text{ con } \bar{A}(n) := \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Demostración. Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ converge absolutamente si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n s}$ converge, el resultado se deduce del teorema previo. ■

Ejemplos 2.16 Consideremos la serie de Dirichlet que define a la función $\zeta(s)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Resulta inmediato que no es convergente para $s = 0$, con lo que $\sigma_{a,\zeta} \geq 0$ y podemos aplicar la fórmula facilitada por la proposición anterior, es decir,

$$\sigma_{a,\zeta} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^n |1| \right)}{\ln n} = 1.$$

Además, puesto que la convergencia absoluta de la serie que define $\zeta(s)$ es equivalente a la convergencia absoluta de la serie que define $\eta(s)$, tenemos que

$$\sigma_{a,\eta} = \sigma_{a,\zeta} = 1.$$

Ejemplos 2.17 Para calcular la abscisa de convergencia de la serie que define $\zeta(s)$, podemos aplicar la fórmula facilitada por la proposición 2.14, lo que resulta

$$\sigma_{c,\zeta} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \sum_{i=1}^n 1 \right|}{\ln n} = 1,$$

mientras que en el caso de la serie que define $\eta(s)$,

$$\sigma_{c,\eta} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \sum_{i=1}^n (-1)^i \right|}{\ln n} = 0.$$

Por tanto, a diferencia de lo que pudimos ver con las abscisas de convergencia absoluta en los ejemplos 2.16, las abscisas de convergencia de las series que definen $\zeta(s)$ y $\eta(s)$ son diferentes.

Y puesto que tenemos fórmulas explícitas para el cálculo de las abscisas de convergencia en el caso de que sean no negativas, podemos obtener la siguiente cota para su diferencia:

Teorema 2.18 ([2], teorema 9, página 9) *Bajo la misma notación empleada anteriormente, tenemos que*

$$\sigma_a - \sigma_c \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n},$$

siempre y cuando σ_c y σ_a sean finitas.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ no converge en $s = 0$. En efecto, si $\sigma_c \in \mathbb{R}$ es su abscisa de convergencia, podemos considerar la siguiente transformación,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(\sigma_c-1)} e^{-\lambda_n(s-\sigma_c+1)},$$

con lo que si $b_n := a_n e^{-\lambda_n(\sigma_c-1)}$ y realizamos el cambio de variable $z = s - \sigma_c + 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z},$$

además la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z}$ no converge para $z = 0$, pues $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(\sigma_c-1)}$ no converge, y al ser el cambio de variable una traslación, si σ'_c y σ'_a son las abscisas de convergencia y convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z}$,

$$\sigma'_a - \sigma'_c = (\sigma_a - \sigma_c + 1) - (\sigma_c - \sigma_c + 1) = \sigma_a - \sigma_c,$$

con lo que el supuesto de que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ no converge para $s = 0$ es lícito.

Por la proposición 2.14, tenemos que para todo $\delta > 0$, existe n_0 tal que

$$\frac{\ln |A(n)|}{\lambda_n} < \sigma_c + \delta \implies |A(n)| < e^{(\sigma_c + \delta)\lambda_n}, \quad \forall n \geq n_0 - 1.$$

Por tanto, para cada $n \geq n_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} |a_n| &= |A(n) - A(n-1)| \\ &\leq |A(n)| + |A(n-1)| \\ &< e^{(\sigma_c + \delta)\lambda_n} + e^{(\sigma_c + \delta)\lambda_{n-1}} \\ &< 2e^{(\sigma_c + \delta)\lambda_n}. \end{aligned}$$

Además, podemos suponer que n_0 es lo suficientemente grande para que

$$2 < e^{\delta\lambda_n}, \quad \forall n \geq n_0,$$

con lo que

$$|a_n| < e^{(\sigma_c + 2\delta)\lambda_n}.$$

Entonces de nuevo tomando M que verifique que

$$n_0 \leq M \text{ y } \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| < ne^{(\sigma_c + 2\delta)\lambda_n}(e^{\delta\lambda_n} - 1), \quad \forall n \geq M,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_k| &< \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| + \sum_{k=n_0+1}^n e^{(\sigma_c + 2\delta)\lambda_k} \\ &< \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| + ne^{(\sigma_c + 2\delta)\lambda_n} \\ &< ne^{(\sigma_c + 3\delta)\lambda_n}, \quad \forall n \geq M. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\ln \left(\sum_{k=1}^n |a_k| \right)}{\lambda_n} < \frac{\ln n}{\lambda_n} + \sigma_c + 3\delta, \quad \forall n \geq M,$$

De donde se deduce, por la proposición 2.15, que

$$\sigma_a - \sigma_c \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}.$$

■

Corolario 2.19 ([1], teorema 11.10, página 290) *Dada una serie ordinaria de Dirichlet, tenemos que*

$$0 \leq \sigma_a - \sigma_c \leq 1.$$

Demostración. El resultado se deduce del teorema anterior teniendo en cuenta que $\lambda_n = \ln n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para las series ordinarias de Dirichlet. ■

Ejemplo 2.20 *A partir de los ejemplos 2.16 y 2.17, las series de Dirichlet que definen las funciones $\zeta(s)$ y $\eta(s)$ constituyen ejemplos de series donde alguna de las igualdades del corolario anterior se alcanza, demostrando además que la cota dada en el teorema 2.18 para $\sigma_a - \sigma_c$ es la mejor posible.*

Resulta evidente que si una serie de Dirichlet converge uniformemente en un semiplano $S \subset \mathbb{C}$, entonces converge uniformemente sobre cualquier semiplano cerrado $S' \subset S$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.21 (Abscisa de convergencia uniforme) *Dada una serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, definimos la abscisa de convergencia uniforme como el menor valor real σ_u tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ converge uniformemente en cualquier semiplano cerrado contenido en $\{\sigma + it : \sigma > \sigma_u\}$.*

Veamos para finalizar con esta sección cual es la relación existente entre la abscisa de convergencia uniforme y las abscisas de convergencia y convergencia absoluta.

Proposición 2.22 *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ una serie de Dirichlet con $\sigma_a \neq \infty$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ converge uniformemente en todo semiplano $\{s = \sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma \geq \sigma'\}$ con $\sigma' > \sigma_a$.*

Demostración. Sea $\sigma' > \sigma_a$. Nótese que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^m a_k e^{-\lambda_k s} \right| &\leq \sum_{k=n}^m |a_k e^{-\lambda_k s}| \\ &= \sum_{k=n}^m |a_k| e^{-\lambda_k \sigma} \\ &\leq \sum_{k=n}^m |a_k| e^{-\lambda_k \sigma'}, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C}, \sigma \geq \sigma'\}. \end{aligned}$$

Puesto que $\sigma' > \sigma_a$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma'}$ converge absolutamente, con lo que para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que para $m \geq n \geq n_0$ tenemos que

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k e^{-\lambda_k s} \right| \leq \sum_{k=n}^m |a_k| e^{-\lambda_k \sigma'} \leq \varepsilon, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma \geq \sigma'\},$$

es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ converge uniformemente en $\{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma \geq \sigma'\}$. ■

Corolario 2.23 *Dada una serie de Dirichlet con abscisas de convergencia, convergencia absoluta y convergencia uniforme σ_c , σ_a y σ_u , respectivamente, se tiene que*

$$\sigma_c \leq \sigma_u \leq \sigma_a.$$

Demostración. Consecuencia de la proposición 2.22 y del hecho que la convergencia uniforme implica convergencia. ■

Ejemplos 2.24 *En vista del resultado anterior y los ejemplos 2.6 y 2.13,*

1. Para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^s}$ se verifica que $\sigma_u = \infty$, pues no converge en ningún punto.
2. Para la serie que define $\zeta(s)$, $\sigma_u = 1$ pues $\sigma_c = \sigma_a = 1$.
3. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^s}$ converge absolutamente en todo número complejo $s \in \mathbb{C}$, $\sigma_u = -\infty$.

De forma análoga al problema relativo a la obtención de una cota superior para $\sigma_a - \sigma_c$, podemos tratar de conseguir una cota superior para $\sigma_a - \sigma_u$. Este problema fue extensamente tratado por el danés Harald Bohr para el caso de series de Dirichlet ordinarias (véase [11]), aunque en este trabajo extenderemos sus argumentos a series generales de Dirichlet.

Teorema 2.25 *Dada una serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, se tiene que*

$$\sigma_a - \sigma_u \leq \frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}.$$

Demostración. Denotemos $K := \frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}$. Supongamos que este valor es finito (si no lo fuese el resultado es trivial) y que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ converge uniformemente sobre la recta $\{\sigma + it : \sigma = b\}$, para algún $b \in \mathbb{R}$, y sea $\varepsilon > 0$. Veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n (b+K+\varepsilon)}$ converge absolutamente para demostrar el teorema.

En primer lugar, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (teorema A.14), tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(b+K+\varepsilon)} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n b} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n(K+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Por un lado, veamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n(K+\varepsilon)}$ converge. Por definición de K tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\ln n}{\lambda_n} \leq 2K + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \implies -\ln n \geq -\lambda_n(2K + \varepsilon), \quad \forall n \geq n_0. \quad (8)$$

Entonces

$$e^{-2\lambda_n(K+\varepsilon)} \leq e^{-\ln n - \lambda_n \varepsilon} = \frac{e^{-\varepsilon \lambda_n}}{n}, \quad \forall n \geq n_0. \quad (9)$$

Por (8),

$$-\frac{\ln n}{2K + \varepsilon} \geq -\lambda_n, \quad \forall n \geq n_0,$$

y aplicando esto en (9), se tiene que

$$e^{-2\lambda_n(K+\varepsilon)} \leq \frac{e^{-\varepsilon \lambda_n}}{n} \leq \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2K+\varepsilon}}}, \quad \forall n \geq n_0,$$

y así

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-2\lambda_n(K+\varepsilon)} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2K+\varepsilon}}} < \infty,$$

demostrando que $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n(K+\varepsilon)}$ converge.

Por otro lado, puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ converge uniformemente sobre la recta $\{b+it : t \in$

$\mathbb{R}\}$, tenemos que la sucesión de sumas parciales $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k(b+it)} \right\}_{n \geq 1}$ es uniformemente acotada, con lo que existe $M > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k(b+it)} \right| \leq M, \quad \forall n \geq 1, \forall t \in \mathbb{R}.$$

En efecto, este resultado es cierto en virtud de la proposición A.5 ya que las sumas parciales son acotadas pues para cada $n \geq 1$

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k(b+it)} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| e^{-\lambda_k b}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tomando cuadrados,

$$\begin{aligned}
M^2 &\geq \left| \sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k(b+it)} \right|^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k(b+it)} \right) \overline{\left(\sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k(b+it)} \right)} \\
&= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 e^{-2\lambda_k b} + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{1 \leq N < M \leq n} a_N \overline{a_M} e^{-b(\lambda_N + \lambda_M)} e^{it(\lambda_M - \lambda_N)} \right). \quad (10)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{it(\lambda_M - \lambda_N)} dt = \frac{1}{2T} \frac{e^{iT(\lambda_M - \lambda_N)} - e^{-iT(\lambda_M - \lambda_N)}}{i(\lambda_M - \lambda_N)} = \frac{\operatorname{sen}(T(\lambda_M - \lambda_N))}{T(\lambda_M - \lambda_N)}, \quad \forall T > 0,$$

tomando medias en (10)

$$M^2 \geq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 e^{-2\lambda_k b} + \frac{2}{T} \operatorname{Re} \left(\sum_{1 \leq N < M \leq n} \frac{a_N \overline{a_M} e^{-b(\lambda_N + \lambda_M)} \operatorname{sen}(T(\lambda_M - \lambda_N))}{\lambda_M - \lambda_N} \right),$$

y haciendo T tender a infinito concluimos que

$$M^2 \geq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 e^{-2\lambda_k b}, \quad \forall n \geq 1,$$

probando que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n b} < \infty$, con lo que el resultado queda probado en virtud de (7). ■

Observación 2.26 *La cota dada en el teorema 2.25 es óptima. Un ejemplo de serie de Dirichlet donde se alcanza la igualdad puede encontrarse en [11]. Este resultado se conoce como teorema de Bohr-Bohnenblust-Hille.*

2.2. Analiticidad de las series de Dirichlet

Una vez tratada la convergencia, el tema a considerar es la analiticidad de las series de Dirichlet. Demostremos previamente el siguiente teorema:

Teorema 2.27 ([2], teorema 4, página 5) *Toda serie de Dirichlet converge uniformemente sobre todo conjunto compacto contenido en el semiplano de convergencia.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el semiplano de convergencia es $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$; y sea $K \subset D$ compacto. Consideremos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} M &:= \max \left\{ \frac{|s|}{\sigma} : s \in K \right\}, \\ \sigma_0 &:= \min \{ \sigma : s \in K \}. \end{aligned}$$

Nótese que estos valores están bien definidos en virtud de la compacidad de K . Si planteamos la siguiente sucesión,

$$b_n := a_n e^{-\lambda_n \sigma_0}, \quad n = 1, 2, \dots$$

tenemos que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n (s - \sigma_0)}.$$

Ahora, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|B(n, k)| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \forall k \geq n \geq n_0,$$

y consecuentemente, de nuevo aplicando el lema de Abel y el lema 2.8, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^m a_n e^{-\lambda_n s} \right| &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} B(n, k) \Delta e^{-\lambda_k (s - \sigma_0)} + B(n, m) e^{-\lambda_m (s - \sigma_0)} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M} \left(\sum_{k=n}^{m-1} |\Delta e^{-\lambda_k (s - \sigma_0)}| + e^{-\lambda_m (\sigma - \sigma_0)} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M} \left(\frac{|s|}{\sigma} \sum_{k=n}^{m-1} \Delta e^{-\lambda_k (\sigma - \sigma_0)} + e^{-\lambda_m (\sigma - \sigma_0)} \right) \\ &\leq \varepsilon \left(\sum_{k=n}^{m-1} \Delta e^{-\lambda_k (\sigma - \sigma_0)} + \frac{e^{-\lambda_m (\sigma - \sigma_0)}}{M} \right), \quad \forall m \geq n \geq n_0, \end{aligned} \quad (11)$$

y puesto que $M \geq 1$, a partir de (11),

$$\left| \sum_{k=n}^m a_n e^{-\lambda_n s} \right| \leq \varepsilon e^{-\lambda_n (\sigma - \sigma_0)} \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq n \geq n_0,$$

demostrando así que la serie converge uniformemente sobre K . ■

Corolario 2.28 ([2], teorema 4, página 5) *La función $f(s)$ definida como*

$$f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_c\},$$

es analítica y además su derivada, $f'(s)$, es también una serie de Dirichlet, dada por

$$f'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n e^{-\lambda_n s}.$$

Demostración. Consecuencia del teorema anterior y el teorema de Weierstrass (teorema A.6). ■

Observación 2.29 *Dada una serie de Dirichlet y su serie derivada, ambas tienen misma abscisa de convergencia (absoluta). En efecto, si $\sigma > \sigma_c$, tenemos que $f'(\sigma)$ existe al ser f analítica en su semiplano de convergencia, y además la serie $-\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n e^{-\lambda_n \sigma}$ converge a este valor, por lo que, si denotamos como σ'_c a la abscisa de convergencia de la serie $-\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n e^{-\lambda_n s}$, $\sigma'_c \leq \sigma_c$. Por otro lado, al ser $-\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n e^{-\lambda_n s}$ es analítica en su semiplano de convergencia, admite primitiva, y mediante un procedimiento análogo puede demostrarse que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma}$ converge a $f(\sigma)$ si $\sigma \geq \sigma'_c$, con lo que $\sigma'_c \geq \sigma_c$, demostrando que $\sigma_c = \sigma'_c$.*

Ejemplos 2.30 *A partir del corolario 2.28 y el ejemplo 2.17, tenemos que*

1. *La función $\zeta(s)$ es analítica en $\{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$ y además*

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s}.$$

2. *La función $\eta(s)$ es analítica en $\{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$ con derivada,*

$$\eta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^s}.$$

En el caso especial de que los coeficientes $\{a_n\}_{n \geq 1}$ sean no negativos, encontramos el siguiente teorema relativo a la existencia de singularidades:

Teorema 2.31 (Landau) ([2], teorema 10, página 10) Sea $f(s)$ definida por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, con $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales no negativos. Entonces $f(s)$ tiene una singularidad en $s_0 = \sigma_c$, en el caso de que este valor sea finito.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\sigma_c = 0$. Puesto que $a_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$, tenemos que la serie convergerá absolutamente si, y sólo si, converge, con lo que esta serie verificará que

$$\sigma_c = \sigma_a = \sigma_u = 0.$$

Supongamos que $s = 0$ no es una singularidad de $f(s)$. Puesto que es analítica en $\{\sigma + it : \sigma > 0\}$ (corolario 2.28), podemos considerar su serie de Taylor centrada en $s = 1$.

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (s-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-s)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^k e^{-\lambda_n}, \quad (12)$$

y esta serie tendrá un radio de convergencia superior o igual a la unidad, con lo que convergerá para cierto $\sigma' < 0$

Por la convergencia uniforme de la serie sobre $\{\sigma + it : \sigma > 0\} \cup \{\sigma'\}$, podemos invertir el orden de sumación, con lo que

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} (1-s)^k, \quad \forall s \in \{\sigma + it : \sigma > 0\} \cup \{\sigma'\},$$

y a partir del desarrollo en serie de Taylor de e^s ,

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} e^{(1-s)\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad \forall s \in \{\sigma + it : \sigma > 0\} \cup \{\sigma'\},$$

con lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma'}$ converge, en contradicción con el hecho de que $\sigma_c = 0$. ■

2.3. Comportamiento asintótico y unicidad

Proposición 2.32 Si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, $s \in D$, donde D es el semiplano de convergencia de la serie, entonces se tiene que,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f(s) = \begin{cases} a_1 & \text{si } \lambda_1 = 0 \\ 0 & \text{si } \lambda_1 > 0. \end{cases}$$

Demostración. Consecuencia de la convergencia uniforme sobre $\{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_u\}$ y de tomar límites. ■

Ejemplo 2.33 Como consecuencia de la proposición anterior, deducimos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \zeta(s) = 1 = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \eta(s).$$

Corolario 2.34 ([2], teorema 6, página 6) Mediante la misma notación que el teorema anterior, si existe una sucesión de ceros de f , $\{s_n\}_{n \geq 1}$, con $s_n = \sigma_n + it_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$, necesariamente $f(s)$ es idénticamente nula.

Demostración. Demostremos mediante el Principio de Inducción Completa que $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es la sucesión idénticamente nula. Consideramos la serie

$$g_1(s) := e^{-\lambda_1 s} f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_1)s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\delta_n s} \text{ con } \delta_n := \lambda_n - \lambda_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Observar que $g_1(s)$ es una serie de Dirichlet con $\delta_1 = 0$, con lo que por la proposición 2.32, tenemos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} g_1(s) = a_1.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_1(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda_1 s_n} f(s_n) = 0,$$

probando así que necesariamente $a_1 = 0$.

Mediante hipótesis de inducción, supongamos que $a_k = 0$ para todo $k < n$. Entonces

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k s} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k s},$$

y mediante un razonamiento completamente análogo al anterior probamos que $a_n = 0$.

Por tanto hemos probado que $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$ y f es idénticamente nula. ■

Observación 2.35 *Nótese que, en virtud del Principio de Indentidad (teorema A.7), este resultado es también cierto si sustituimos la condición de que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$ por la de que la sucesión $\{\sigma_n + it_n\}_{n \geq 1}$ converja.*

El corolario 2.34 nos permite establecer un criterio para asegurar la igualdad entre series de Dirichlet: si tenemos dos series de Dirichlet y consideramos la región de \mathbb{C} donde ambas convergen absolutamente, la diferencia de ambas puede reordenarse de tal forma que resulta una nueva serie de Dirichlet dentro de esta región, y así estar en disposición de aplicar el corolario 2.34 de la siguiente forma:

Corolario 2.36 (Teorema de unicidad) *Sean $f(s)$ y $g(s)$ dos funciones engendradas por dos series de Dirichlet, ambas con abscisa de convergencia absoluta finita. Si existe una sucesión $\{s_n\}_{n \geq 1}$, $s_n = \sigma_n + it_n$, tal que $f(s_n) = g(s_n)$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$, entonces $f \equiv g$ en la región del plano complejo donde ambas convergen absolutamente.*

Y como consecuencia directa:

Corolario 2.37 *Sea $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ una función no idénticamente nula. Entonces existe $\sigma' \geq \sigma_a$ tal que $f(s)$ no tiene ceros en $\{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma \geq \sigma'\}$.*

2.4. Representación integral

Para terminar con las series generales de Dirichlet, demostremos el siguiente resultado que nos resultará de utilidad en la sección 3.4.

Teorema 2.38 ([2], teorema 11, página 11) *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ con $\sigma_u \leq 0$. Se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s \ln \lambda_n} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} dx, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 0\},$$

siempre y cuando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s \ln \lambda_n}$ converja.

Demostración. Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ converge uniformemente en $(0, \infty)$ y teniendo en cuenta la definición de la función $\Gamma(s)$ (definición C.1),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\lambda_n x} dx &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^\infty a_n \int_0^\infty x^{s-1} e^{-\lambda_n x} dx \\ &\stackrel{y=\lambda_n x}{=} \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\lambda_n^s} \int_0^\infty y^{s-1} e^{-y} dy \\ &= \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\ln \lambda_n s}, \end{aligned}$$

terminado así la prueba. ■

3. Series de Dirichlet ordinarias

A lo largo de esta sección desarrollaremos una serie de propiedades de las series de Dirichlet ordinarias,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Puesto que $\lambda_n = \ln n$ para todo n natural, tenemos que una serie ordinaria de Dirichlet estará determinada completamente a partir de sus coeficientes $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

3.1. Producto de series de Dirichlet ordinarias

Veamos como se comporta el producto entre dos series de Dirichlet ordinarias.

Teorema 3.1 ([1], teorema 11.5, página 283) Sean $f(s)$ y $g(s)$ dos funciones generadas por dos series de Dirichlet ordinarias,

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad y \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}.$$

Entonces $h(s) := f(s)g(s)$ es también una serie de Dirichlet ordinaria en la región donde ambas convergen absolutamente, cuyos coeficientes, $\{c_n\}_{n \geq 1}$, se obtienen mediante la convolución de Dirichlet (sección B.3) de $\{a_n\}_{n \geq 1}$ y $\{b_n\}_{n \geq 1}$, es decir

$$c_n = (a * b)_n.$$

Demostración. Si ambas series convergen absolutamente en s , tenemos que

$$h(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n b_m}{(nm)^s}.$$

Precisamente por la convergencia absoluta, podemos reordenar la serie de la siguiente forma:

$$h(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d|k} \frac{a_d b_{\frac{k}{d}}}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a * b)_k}{k^s},$$

finalizando así la demostración del teorema. ■

Ejemplos 3.2

1. $\zeta^2(s)$ es una serie de Dirichlet con coeficientes $a_n = \text{card}\{d : d|n\}$, para $s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$.

2. Teniendo en cuenta el teorema B.3, entonces

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1 \implies \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}.$$

3. En virtud del teorema B.4, tenemos que

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\zeta'(s).$$

3.2. Estructura algebraica

Una vez visto como se comporta el producto de series de Dirichlet ordinarias (teorema 3.1), una cuestión interesante es si podemos dotar a las series de Dirichlet (o algún subconjunto suyo) de una estructura algebraica. Partamos del siguiente conjunto:

$$\mathcal{D}_{-\infty} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} : \{a_n\}_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ tal que } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^s} \right| < \infty \quad \forall s \in \mathbb{C} \right\},$$

es decir, consideramos $\mathcal{D}_{-\infty}$ al conjunto de todas las series de Dirichlet ordinarias convergentes absolutamente en todo \mathbb{C} . Este conjunto es trivialmente no vacío, pues $\mathbb{C} \subset \mathcal{D}_{-\infty}$.

Consideremos las siguientes operaciones sobre $\mathcal{D}_{-\infty}$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) +_{\mathcal{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \right) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n^s}, \text{ para } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}, \\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) \cdot_{\mathcal{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \right) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a * b)_n}{n^s}, \text{ para } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}. \end{aligned}$$

Veamos que estructura algebraica dotan estas operaciones a $\mathcal{D}_{-\infty}$.

Teorema 3.3 $(\mathcal{D}_{-\infty}, +_{\mathcal{D}})$ es un grupo abeliano.

Demostración. En primer lugar veamos que $+_{\mathcal{D}}$ está bien definida. Para cada $s = \sigma + it$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n + b_n}{n^s} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n + b_n|}{n^{\sigma}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + |b_n|}{n^{\sigma}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^{\sigma}} < \infty, \quad \forall \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}, \end{aligned}$$

con lo que $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) +_{\mathcal{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \right) \in \mathcal{D}_{-\infty}$.

Resulta evidente que $+_{\mathcal{D}}$ verifica las propiedades asociativa y conmutativa, pues las hereda de la suma ordinaria en \mathbb{C} .

Además, también se verifica que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) +_{\mathcal{D}} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + 0}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \forall \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty},$$

demostrando que 0 es el elemento neutro de $+_{\mathcal{D}}$.

Finalmente, para cada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}$ es inmediato que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-a_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}$ y asimismo

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) +_{\mathcal{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-a_n}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + (-a_n)}{n^s} = 0,$$

probando así que $(\mathcal{D}_{-\infty}, +_{\mathcal{D}})$ es un grupo abeliano. ■

Teorema 3.4

1. $(\mathcal{D}_{-\infty}, \cdot_{\mathcal{D}})$ es un monoide conmutativo.
2. $\cdot_{\mathcal{D}}$ es distributiva respecto de $+_{\mathcal{D}}$.

Demostración.

1. En primer lugar, veamos que la operación $\cdot_{\mathcal{D}}$ está bien definida. Dadas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}$ y $s = \sigma + it$ a partir del teorema 3.1 y la proposición B.10,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(a * b)_n}{n^s} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(a * b)_n|}{n^{\sigma}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|a| * |b|)_n}{n^{\sigma}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma}} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^{\sigma}} \right) < \infty, \quad \forall \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}. \end{aligned}$$

La asociatividad y la conmutatividad se heredan de forma inmediata de la convolución de Dirichlet (teorema B.8).

Nótese además que, dado que $\left\{ \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor \right\}_{n \geq 1}$ juega el papel del elemento neutro para la convolución de Dirichlet (teorema B.8), tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) \cdot_{\mathcal{D}} 1 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) \cdot_{\mathcal{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lfloor \frac{1}{n} \rfloor}{n^s} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \forall \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}. \end{aligned}$$

Hemos demostrado así que $(\mathcal{D}_{-\infty}, \cdot_{\mathcal{D}})$ es un monoide conmutativo.

2. Consecuencia directa del teorema B.9. ■

Teorema 3.5 $(\mathcal{D}_{-\infty}, +_{\mathcal{D}}, \cdot_{\mathcal{D}})$ es un anillo conmutativo y unitario.

Demostración. Inmediata a partir de los teoremas 3.3 y 3.4. ■

Notación 3.6 Una vez demostrada la estructura de anillo de $(\mathcal{D}_{-\infty}, +_{\mathcal{D}}, \cdot_{\mathcal{D}})$, lo denotaremos simplemente como $\mathcal{D}_{-\infty}$ con el fin de reducir la notación.

Observación 3.7 *Nótese que $\mathcal{D}_{-\infty}$ no es un cuerpo. En efecto, consideremos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}$ con $a_1 = 0$. Sin lugar a dudas esta serie existe, pues dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}$, basta considerar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} - a_1,$$

y esta serie verifica las condiciones deseadas. Entonces la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ no es invertible para la convolución de Dirichlet (teorema B.8), con lo que no existe $\{b_n\}_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$(a * b)_n = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad \forall n \geq 1,$$

y consecuentemente no existe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}$ tal que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) \cdot_{\mathcal{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \right) = 1,$$

demostrando así que $\mathcal{D}_{-\infty}$ no es un cuerpo.

Si estudiamos con detenimiento los elementos invertibles de $\mathcal{D}_{-\infty}$, obtenemos los siguientes resultados:

Proposición 3.8 *El conjunto de elementos invertibles de $\mathcal{D}_{-\infty}$ son aquellas series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}$ tal que $a_1 \neq 0$.*

Demostración. Puesto que $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es invertible para la convolución de Dirichlet si, y sólo si, $a_1 \neq 0$ (teorema B.8), el resultado se sigue de este hecho. ■

Proposición 3.9 *El conjunto $\mathcal{I}_{-\infty}$ de elementos no invertibles de $\mathcal{D}_{-\infty}$,*

$$\mathcal{I}_{-\infty} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty} : a_1 = 0 \right\}, \quad (13)$$

es un ideal de $\mathcal{D}_{-\infty}$.

Demostración. La igualdad (13) es consecuencia de la proposición 3.8. Veamos que es un ideal de $\mathcal{D}_{-\infty}$.

Por un lado, si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \in \mathcal{I}_{-\infty}$, resulta inmediato que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) +_{\mathcal{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{n^s} \in \mathcal{I}_{-\infty}, \text{ puesto que } a_1 = b_1 = 0.$$

Por otra parte, si $a_1 = 0$, tenemos que

$$(a * b)_1 = a_1 b_1 = 0, \quad \forall \{b_n\}_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},$$

por lo que deducimos que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) \cdot_{\mathcal{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a * b)_n}{n^s} \in \mathcal{I}_{-\infty}, \quad \forall \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \in \mathcal{I}_{-\infty}, \forall \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}.$$

La demostración se concluye por la caracterización de los ideales de un anillo conmutativo (teorema A.19). ■

Observación 3.10 *El ideal $\mathcal{I}_{-\infty}$ es maximal, es decir, si \mathcal{J} es otro ideal de $\mathcal{D}_{-\infty}$ tal que $\mathcal{I}_{-\infty} \subset \mathcal{J}$, entonces $\mathcal{J} = \mathcal{I}_{-\infty}$ o $\mathcal{J} = \mathcal{D}_{-\infty}$.*

En efecto, si $\mathcal{I}_{-\infty} \subsetneq \mathcal{J}$, existe un elemento de \mathcal{J} que no está contenido en $\mathcal{I}_{-\infty}$. Por definición de $\mathcal{I}_{-\infty}$, necesariamente este elemento debe ser invertible, con lo que a partir de la proposición A.20 forzosamente $\mathcal{J} = \mathcal{D}_{-\infty}$.

La propiedad de que todos los elementos no invertibles formen un ideal de cierto anillo no es un hecho que se verifique en general (como por ejemplo el anillo de los números enteros), pero que se verifique para $\mathcal{D}_{-\infty}$ nos permite probar los siguientes teoremas:

Teorema 3.11 *Empleando la misma notación que la proposición anterior, tenemos que $\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$ es un cuerpo.*

Demostración. El teorema A.21 nos garantiza que $\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$ es un anillo conmutativo y unitario. Basta probar que todo elemento no nulo tiene inverso para ver que efectivamente $\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$ es un cuerpo.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} \neq \mathcal{I}_{-\infty}$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \notin \mathcal{I}_{-\infty}$ y por tanto $a_1 \neq 0$. A partir de la proposición 3.8, tenemos que existe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \in \mathcal{D}_{-\infty}$ tal que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) \cdot_{\mathcal{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \right) = 1,$$

y consecuentemente

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} + \mathcal{I}_{-\infty} \right) \cdot_{\mathcal{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} + \mathcal{I}_{-\infty} \right) = 1 +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty},$$

con lo que $\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$ es un cuerpo. ■

Teorema 3.12 $\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$ es isomorfo (como cuerpo) con el cuerpo de los números complejos \mathbb{C} .

Demostración. Probemos en primer lugar que

$$\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty} = \{a +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} : a \in \mathbb{C}\}.$$

La inclusión hacia la izquierda es inmediata, con lo que basta probar la inclusión hacia la derecha. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} \in \mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} = \left(a_1 +_{\mathcal{D}} \overbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}}^{\in \mathcal{I}_{-\infty}} \right) +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} = a_1 +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} \in \{a +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} : a \in \mathbb{C}\}.$$

Establezcamos a partir de esta nueva representación de $\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$ un isomorfismo de cuerpos con \mathbb{C} . Consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \psi &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty} \\ a &\longmapsto a +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty}. \end{aligned}$$

Recordamos que $\mathbb{C} \subset \mathcal{D}_{-\infty}$, con lo que ψ está bien definida. Veamos que es un isomorfismo de cuerpos.

- Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\psi(a+b) &= (a+b) +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} = (a +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty}) +_{\mathcal{D}} (b +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty}) = \psi(a) +_{\mathcal{D}} \psi(b), \\ \psi(ab) &= (ab) +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} = (a +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty}) \cdot_{\mathcal{D}} (b +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty}) = \psi(a) \cdot_{\mathcal{D}} \psi(b),\end{aligned}$$

con lo que ψ es un homomorfismo de cuerpos.

- ψ es inyectiva pues

$$\begin{aligned}\psi(a) = \psi(b) &\iff a +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} = b +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} \\ &\iff (a-b) +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} = \mathcal{I}_{-\infty} \\ &\iff a-b \in \mathcal{I}_{-\infty} \\ &\iff a-b = 0 \iff a = b.\end{aligned}$$

- ψ es suprayectiva, pues

$$\psi(\mathbb{C}) = \{a +_{\mathcal{D}} \mathcal{I}_{-\infty} : a \in \mathbb{C}\} = \mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}.$$

Así pues, hemos encontrado un isomorfismo de cuerpos entre $\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$ y \mathbb{C} , con lo que son isomorfos (como cuerpos). ■

Teorema 3.13 $\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$ es algebraicamente cerrado, es decir, todo polinomio con coeficientes en $\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$.

Demostración. Puesto que $\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$ es isomorfo a \mathbb{C} y éste es algebraicamente cerrado en virtud del Teorema Fundamental del Álgebra (teorema A.1), necesariamente $\mathcal{D}_{-\infty}/\mathcal{I}_{-\infty}$ es algebraicamente cerrado. ■

Para finalizar esta sección cabe señalar que toda la construcción realizada puede repetirse sustituyendo $\mathcal{D}_{-\infty}$ por \mathcal{D}_{σ} , donde

$$\mathcal{D}_{\sigma} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} : \sigma_a \leq \sigma \right\}, \quad \text{para } \sigma \in \mathbb{R}.$$

Es decir, \mathcal{D}_{σ} es el conjunto de series de Dirichlet ordinarias cuyas abscisas de convergencia absoluta es menor o igual que un σ real prefijado.

Entonces pueden probarse de forma análoga los siguientes resultados:

Teorema 3.14 \mathcal{D}_{σ} es un anillo conmutativo y unitario.

Teorema 3.15 *El conjunto de los elementos no invertibles de \mathcal{D}_σ , \mathcal{I}_σ , verifica que*

$$\mathcal{I}_\sigma = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \in \mathcal{D}_\sigma : a_1 = 0 \right\}.$$

Además, \mathcal{I}_σ es un ideal maximal de \mathcal{D}_σ que cumple que $\mathcal{D}_\sigma/\mathcal{I}_\sigma$ es un cuerpo isomorfo a \mathbb{C} .

Teorema 3.16 *$\mathcal{D}_\sigma/\mathcal{I}_\sigma$ es algebraicamente cerrado.*

También esto induce naturalmente a la siguiente relación de inclusión entre los sucesivos anillos introducidos:

Teorema 3.17 *Si $\sigma_1 \leq \sigma_2$, \mathcal{D}_{σ_1} es un subanillo de \mathcal{D}_{σ_2} .*

Demostración. Inmediata a partir de la definición. ■

3.3. Productos de Euler

Recordemos antes de empezar esta sección que decimos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si la sucesión de productos parciales $\prod_{k=1}^n z_k$ es convergente, y decimos que es absolutamente convergente si el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |z_n - 1|)$ es convergente. Para más información consúltese el capítulo 6 de [4].

También es conveniente recordar las definiciones de sucesiones multiplicativa y completamente multiplicativa, ambas disponibles en el apéndice B.

Los siguientes resultados nos mostrarán la estrecha relación entre las sucesiones multiplicativas y completamente multiplicativas con los números primos, lo cual nos permitirá definir el concepto de producto de Euler de una serie de Dirichlet.

Teorema 3.18 ([1], teorema 11.6, página 286) *Si $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión multiplicativa tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces podemos expresar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en forma de producto sobre todos los primos de la forma:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_p (1 + a_p + a_{p^2} + \dots).$$

Además, este producto es absolutamente convergente.

Demostración. Sea $P(x)$ la función definida mediante el producto

$$P(x) := \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p^n} \right), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, también convergen absolutamente las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p^n}$, para cada $p \leq x$, y al ser $P(x)$ un producto de series absolutamente convergentes, podemos multiplicarlas y reordenar los sumandos sin alterar el resultado.

Teniendo en cuenta que $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es multiplicativa, los nuevos sumandos quedan de la siguiente forma:

$$a_{p_1^{\alpha_1}} \dots a_{p_k^{\alpha_k}} = a_{p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}} \text{ con } k = \text{card}\{p \leq x\}, \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, \dots, k.$$

Si consideramos la notación $\mathcal{A} := \{p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} : \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, \dots, k\}$, tenemos

$$P(x) = \sum_{n \in \mathcal{A}} a_n.$$

Además, por construcción de \mathcal{A} obtenemos que

$$\{n \leq x\} \subset \mathcal{A} \implies \{n > x\} \supset \mathbb{N} \setminus \mathcal{A},$$

y así,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - P(x) \right| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{A}} a_n \right| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{A}} |a_n| \leq \sum_{n > x} |a_n|. \end{aligned}$$

De esta forma, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, tenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tal y como queríamos demostrar.

Finalmente, para demostrar la convergencia absoluta del producto, teniendo en cuenta que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces

$$\sum_{p \leq x} |a_p + a_{p^2} + \dots| \leq \sum_{p \leq x} (|a_p| + |a_{p^2}| + \dots) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

demostrando mediante el teorema A.8 la convergencia absoluta del producto. ■

Corolario 3.19 ([1], teorema 11.6, página 286) *Bajo la mismas condiciones del teorema 3.18, si imponemos además que $\{a_n\}_{n \geq 1}$ sea completamente multiplicativa tenemos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_p \frac{1}{1 - a_p},$$

siempre y cuando $|a_p| < 1$ para todo primo p .

Demostración. Si $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es completamente multiplicativa, resulta inmediato que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{p^k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_p^k = \frac{1}{1 - a_p},$$

con lo que a partir del teorema anterior, se completa la demostración. ■

Definición 3.20 (Producto de Euler) *Los productos que aparecen en el teorema 3.18 y el corolario 3.19 reciben el nombre de productos de Euler asociados a sus series.*

Y finalmente enunciamos el teorema que nos permitirá definir los productos de Euler de una serie de Dirichlet ordinaria:

Teorema 3.21 ([1], teorema 11.7, página 288) *Dada una serie de Dirichlet ordinaria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ con $\{a_n\}_{n \geq 1}$ multiplicativa, tenemos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{a_p}{p^s} + \frac{a_{p^2}}{p^{2s}} + \dots \right), \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_a\}.$$

Si además $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es completamente multiplicativa, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - a_p p^{-s}}, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_a\},$$

siempre que $|a_p p^{-s}| < 1$ para todo primo p .

Demostración. Consecuencia del teorema 3.18 y el corolario 3.19. ■

Ejemplos 3.22

1. Puesto que la sucesión $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, es completamente multiplicativa, podemos representar $\zeta(s)$ en forma de producto de la siguiente forma:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}.$$

2. Dado que cualquier carácter de Dirichlet es una función aritmética completamente multiplicativa con $|\chi(n)| \leq 1$ para todo $n \geq 1$ (teoremas B.17 y B.18),

$$L(s, \chi) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}.$$

Observación 3.23 Podemos extender los productos de Euler a series de Dirichlet generales siempre y cuando impongamos la condición de que

$$\lambda_{nm} = \lambda_n + \lambda_m, \quad \text{si } (n, m) = 1,$$

en el caso de que $\{a_n\}_{n \geq 1}$ sea multiplicativa, o

$$\lambda_{nm} = \lambda_n + \lambda_m, \quad \forall n, m \geq 1,$$

para cuando sea completamente multiplicativa con $|a_p e^{-\lambda_p s}| < 1$ para todo p .

3.4. Propiedades de la función zeta de Riemann y las funciones L de Dirichlet

3.4.1. Representación mediante la función zeta de Hurwitz

Introducimos en esta sección la función zeta de Hurwitz, $\zeta(s, a)$, definida mediante la serie

$$\zeta(s, a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \quad 0 < a \leq 1.$$

Por la construcción de $\zeta(s, a)$, tenemos el siguiente teorema relativo a sus propiedades de convergencia y analiticidad:

Teorema 3.24 ([1], teorema 12.1, página 311) Para $0 < a \leq 1$, $\zeta(s, a)$ converge absolutamente en el semiplano $\{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$. Además, $\zeta(s, a)$ es analítica en este mismo semiplano.

Demostración. En el caso de que $a = 1$, $\zeta(s, a) = \zeta(s)$, con lo que por lo visto en los ejemplos 2.16 y 2.30 el resultado es cierto.

Si $0 < a < 1$, podemos escribir

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\ln(n+a)s} = e^{-\ln(a)s} + \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\ln(n+a)s}}^{f(s):=},$$

con lo que la convergencia absoluta y la analiticidad de $\zeta(s, a)$ depende de la convergencia absoluta y la analiticidad de $f(s)$, que es una serie de Dirichlet no convergente en $s = 0$.

Por tanto, al aplicar las fórmulas dadas en las proposiciones 2.14 y 2.15, tenemos que sus abscisas de convergencia y convergencia absoluta, σ_c y σ_a , son ambas la unidad, terminando la demostración en virtud del corolario 2.28. ■

Observación 3.25 *A partir del teorema de Landau (teorema 2.31), vemos que $\zeta(s, a)$ tiene una singularidad en $s = 1$. Más adelante veremos la naturaleza de dicha singularidad.*

Para poder explorar las propiedades de la función zeta de Riemann y las funciones L de Dirichlet (recordamos que sus definiciones como series de Dirichlet están disponibles en los ejemplos 2.2) emplearemos que éstas pueden expresarse mediante $\zeta(s, a)$. En efecto, ya hemos visto que $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$, y si $L(s, \chi)$ es tal que χ es un carácter de Dirichlet módulo n , tenemos que para cada k natural existen unos únicos q y r , con $1 \leq r \leq n$ tal que

$$k = qn + r,$$

y consecuentemente, como χ tiene periodo n , en virtud de la convergencia absoluta de $L(s, \chi)$ en el semiplano $\{\sigma + it : \sigma > 1\}$ (ejemplo 2.6) deducimos que

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s} \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^n \frac{\chi(qn + r)}{(qn + r)^s} \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^n \frac{\chi(r)}{(qn + r)^s} \\ &= \frac{1}{n^s} \sum_{r=1}^n \chi(r) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\left(q + \frac{r}{n}\right)^s}, \quad \forall s \in \{\sigma + it : \sigma > 1\}, \end{aligned}$$

y finalmente, como $r \leq n$,

$$L(s, \chi) = \frac{1}{n^s} \sum_{r=1}^n \chi(r) \zeta\left(s, \frac{r}{n}\right), \quad \forall s \in \{\sigma + it : \sigma > 1\}. \quad (14)$$

3.4.2. Extensiones analíticas

Hallaremos en primer lugar una extensión de $\zeta(s, a)$ y mediante ella se desprenderán las extensiones de $\zeta(s)$ y $L(s, \chi)$. Para ello, serán necesarias algunas propiedades elementales de la función gamma de Euler, disponibles en el apéndice C.

Teorema 3.26 ([1], teorema 12.2, página 312) Para $0 < a \leq 1$, se tiene que

$$\Gamma(s) \zeta(s, a) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}.$$

Demostración. Para realizar esta demostración, emplearemos el teorema 2.38.

Sea $0 < a \leq 1$. Consideremos la serie $\sum_{n=0}^\infty e^{-(n+a)s}$. Resulta evidente que esta serie no converge para $s = 0$. Sin embargo, para $\sigma > 0$,

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-(n+a)\sigma} = e^{-a\sigma} \sum_{n=0}^\infty e^{-n\sigma} = e^{-a\sigma} \frac{1}{1 - e^{-\sigma}} < \infty.$$

Por tanto $\sum_{n=0}^\infty e^{-(n+a)s}$ converge absolutamente en $\{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$, demostrando así que su abscisa de convergencia, de convergencia absoluta y convergencia uniforme es nula, con lo que estamos en condiciones de aplicar el teorema 2.38,

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \zeta(s, a) &= \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=0}^\infty e^{-(n+a)x} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx. \end{aligned}$$

■

Lema 3.27 Si consideramos como \mathcal{C} a la curva de la figura 1 y $0 < a \leq 1$, tenemos que

$$I(s, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{z^{s-1} e^{az}}{1 - e^z} dz,$$

es una función entera (respecto de la variable s).

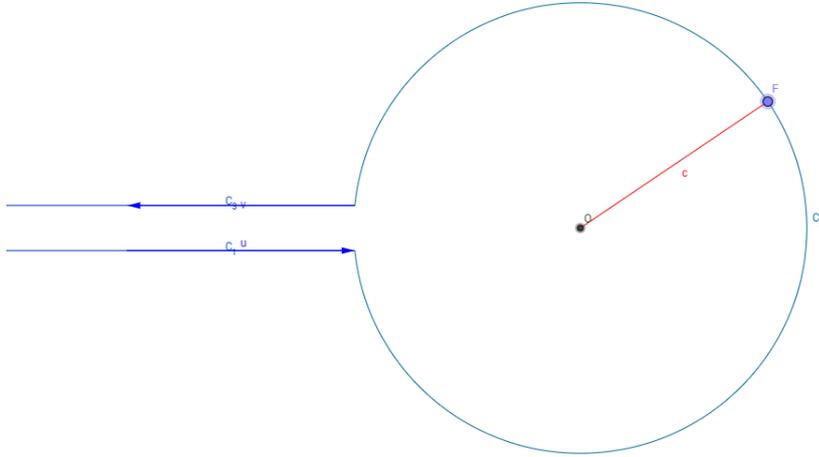


Figura 1: Curva \mathcal{C} .

La curva \mathcal{C}_2 es una circunferencia de radio $c < 2\pi$ y centro en el origen; mientras que \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_3 son los lados de un “corte” sobre los reales negativos menores que $-c$.

Demostración. Disponible en [1] (Teorema 12.3, página 314). ■

Teorema 3.28 ([1], teorema 12.3, página 314) Para todo $s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$ y $0 < a \leq 1$,

$$\zeta(s, a) = \Gamma(1 - s)I(s, a). \quad (15)$$

Demostración. Denotemos $g(s) := \frac{e^{as}}{1 - e^s}$. Por definición de $I(s, a)$ tenemos que

$$2\pi i I(s, a) = \int_{\mathcal{C}_1} z^{s-1} g(z) dz + \int_{\mathcal{C}_2} z^{s-1} g(z) dz + \int_{\mathcal{C}_3} z^{s-1} g(z) dz. \quad (16)$$

Parametrizando por polares \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 , obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} z^{s-1} g(z) dz &= \int_{\infty}^c r^{s-1} e^{-\pi i(s-1)} g(re^{-\pi i}) e^{-\pi i} dr \\ &= -e^{-\pi i s} \int_c^{\infty} r^{s-1} g(-r) dr, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} z^{s-1} g(z) dz &= \int_{-\pi}^{\pi} c^{s-1} e^{i\theta(s-1)} g(ce^{i\theta}) cie^{i\theta} d\theta \\ &= c^s i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} z^{s-1} g(z) dz &= \int_c^\infty r^{s-1} e^{\pi i(s-1)} g(re^{\pi i}) e^{\pi i} dr \\
&= e^{\pi i s} \int_c^\infty r^{s-1} g(-r) dr.
\end{aligned} \tag{19}$$

Combinando (16), (17), (18) y (19) tenemos que

$$\begin{aligned}
2\pi i I(s, a) &= -e^{-\pi i s} \int_c^\infty r^{s-1} g(-r) dr + c^s i \int_{-\pi}^\pi e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta + e^{\pi i s} \int_c^\infty r^{s-1} g(-r) dr \\
&= 2i \operatorname{sen}(\pi s) \int_c^\infty r^{s-1} g(-r) dr + c^s i \int_{-\pi}^\pi e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta,
\end{aligned} \tag{20}$$

con lo que

$$\pi I(s, a) = \operatorname{sen}(\pi s) \int_c^\infty r^{s-1} g(-r) dr + \frac{c^s}{2} \int_{-\pi}^\pi e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta.$$

A partir de la regla de L'Hôpital (teorema A.2) tenemos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} sg(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{se^{as}}{1 - e^s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{as} + sae^{as}}{-e^s} = -1, \tag{21}$$

de donde deducimos que $sg(s)$, en virtud del teorema A.3, tiene una singularidad evitable en $s = 0$, con lo que es analítica en $\{s \in \mathbb{C} : |s| < c\}$, y consecuentemente es acotada por cierta constante $M > 0$ en dicho conjunto.

Entonces dado $s = \sigma + it$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{c^s}{2} \int_{-\pi}^\pi e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta \right| &\leq \frac{c^\sigma}{2} \int_{-\pi}^\pi e^{-\theta t} |g(ce^{i\theta})| d\theta \\
&\leq \frac{c^\sigma}{2} \int_{-\pi}^\pi e^{-\theta t} \frac{M}{c} d\theta \\
&= \frac{c^{\sigma-1} M}{2} \int_{-\pi}^\pi e^{-\theta t} d\theta \leq M c^{\sigma-1} e^{\pi|t|},
\end{aligned}$$

con lo que si $\sigma > 1$,

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{c^s}{2} \int_{-\pi}^\pi e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta = 0,$$

y así a partir del teorema 3.26,

$$\begin{aligned}
\pi I(s, a) &= \lim_{c \rightarrow 0} \left(\operatorname{sen}(\pi s) \int_c^\infty r^{s-1} g(-r) dr + \frac{c^s}{2} \int_{-\pi}^\pi e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta \right) \\
&= \operatorname{sen}(\pi s) \int_0^\infty \frac{r^{s-1} e^{-ar}}{1 - e^{-r}} dr = \operatorname{sen}(\pi s) \Gamma(s) \zeta(s, a) \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, a partir del teorema C.11, concluimos que

$$\zeta(s, a) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s) \Gamma(s)} I(s, a) = \Gamma(1 - s) I(s - a),$$

como queríamos demostrar. ■

Teorema 3.29 ([1], teorema 12.4, página 316) *La función $\zeta(s, a)$ definida mediante la ecuación (15) es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, teniendo un polo simple en $s = 1$ con residuo 1.*

Demostración. A partir de la ecuación (15), tenemos que $\zeta(s, a)$ es producto de dos funciones analíticas en $\mathbb{C} \setminus \{n : n \in \mathbb{N}\}$, y esto unido al hecho de que $\zeta(s, a)$ es analítica en $\{\sigma + it : \sigma > 1\}$ (teorema 3.24) tenemos que $\zeta(s, a)$ es analítica en todo el plano complejo salvo en $s = 1$.

Si tenemos en cuenta las propiedades de $\Gamma(s)$ (teorema C.8 y la observación C.7) y la propia ecuación (15)

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s, a) &= \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\Gamma(1-s)I(s, a) \\ &= -\lim_{s \rightarrow 1} \Gamma(2-s)I(s, a) \\ &= -\Gamma(1)I(1, a) \\ &= -I(1, a). \end{aligned}$$

Por lo visto durante la demostración anterior, más concretamente en la ecuación (20), tenemos que

$$2\pi i I(1, a) = 2i \operatorname{sen}(\pi) \int_c^\infty \frac{e^{-ar}}{1-e^{-r}} dr + \int_{\mathcal{C}_2} \frac{e^{az}}{1-e^z} dz = \int_{\mathcal{C}_2} \frac{e^{az}}{1-e^z} dz.$$

Puesto que la única singularidad de $\frac{e^{as}}{1-e^s}$ en $\{s \in \mathbb{C} : |s| < c\}$ es $s = 0$, ya que $c < 2\pi$, a partir del Teorema de los Residuos (teorema A.13)

$$I(1, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{e^{az}}{1-e^z} dz = \operatorname{Res} \left(\frac{e^{as}}{1-e^s}, 0 \right),$$

pero de nuevo en la demostración anterior y la proposición A.4, se puede deducir de (21) que $\operatorname{Res} \left(\frac{e^{as}}{1-e^s}, 0 \right) = -1$, con lo que

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s, a) = 1,$$

es decir, que $\zeta(s, a)$ tiene un polo simple de residuo 1 en $s = 1$ por el teorema A.3 y la proposición A.4. ■

Y una vez que hemos extendido analíticamente $\zeta(s, a)$, transmitimos dicha propiedad para $\zeta(s)$ y $L(s, \chi)$ a partir de sus representaciones mediante $\zeta(s, a)$.

Corolario 3.30 (Extensión analítica de $\zeta(s)$) ([1], teorema 12.5, página 317) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ admite una extensión analítica a todo el plano complejo salvo en $s = 1$, donde tiene un polo simple de residuo 1.

Demostración. Consecuencia inmediata del teorema 3.29, ya que $\zeta(s) = \zeta(s, 1)$. ■

Corolario 3.31 (Extensión analítica de $L(s, \chi)$) ([1], teorema 12.5, página 317) Sea χ un carácter de Dirichlet módulo n .

1. Si χ es el carácter principal módulo n , entonces $L(s, \chi)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, teniendo un polo simple en $s = 1$ con residuo $\frac{\varphi(n)}{n}$.
2. Si χ es distinto al carácter principal de Dirichlet módulo n , $L(s, \chi)$ es una función entera.

Demostración. Por lo visto en (14), podemos prolongar analíticamente $L(s, \chi)$ a todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Diferenciamos los dos casos:

1. Si χ es el carácter principal módulo n , a partir de los teoremas 3.29 y B.19 y la proposición A.4, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)L(\chi, s) &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \chi(r) \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta\left(s, \frac{r}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \chi(r) = \frac{\varphi(n)}{n}, \end{aligned}$$

teniendo el resultado deseado a partir del teorema A.3 y la proposición A.4.

2. Si χ no es el carácter principal módulo n , análogamente

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)L(s, \chi) = 0,$$

con lo que $L(s, \chi)$ es analítica en $s = 1$, demostrando que es entera. ■

3.4.3. Fórmulas de Hurwitz. Hipótesis de Riemann

Lema 3.32 Consideremos la sucesión de funciones $\{I_n(s, a)\}_{n \geq 1}$ definida de la forma

$$I_n(s, a) = \int_{C_n} \frac{z^{s-1} e^{az}}{1 - e^z} dz, \quad (22)$$

donde la curva C_n , $n \geq 1$, es la curva considerada en la figura 2.

Entonces para $s = \sigma + it$ con $\sigma < 0$ verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(s, a) = I(s, a). \quad (23)$$

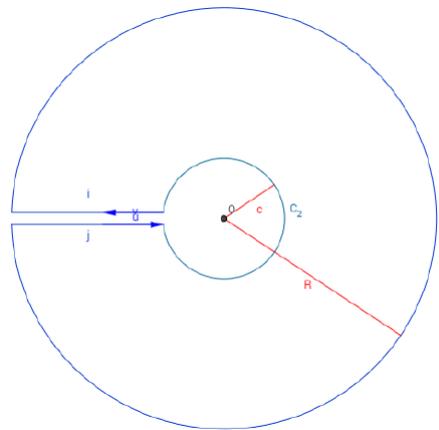


Figura 2: Curva C_n .

Para cada $n \geq 1$, C_n está formada por dos circunferencias concéntricas de radio $c < 2\pi$ y $R = (2n + 1)\pi$ y un “corte” sobre los reales negativos comprendidos entre dichas circunferencias.

Demostración. Disponible en [1] (teorema 12.6, página 319). ■

Definición 3.33 (Zeta periódica) Definimos la función zeta periódica $F(x, s)$ de la siguiente forma:

$$F(x, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi nxi}}{n^s}$$

Observación 3.34 Nótese que la función zeta periódica, $F(x, s)$, recibe dicho nombre porque $F(1, s) = \zeta(s)$ y además es periódica con respecto a x de período 1.

Una vez conocido el lema 3.32 y definida la función zeta periódica, estamos en disposición de probar de forma sencilla la fórmula de Hurwitz para la función $\zeta(s, a)$.

Teorema 3.35 (Fórmula de Hurwitz) ([1], teorema 12.6, página 319) Si $0 < a \leq 1$, se verifica que

$$\zeta(1-s, a) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(e^{-\frac{\pi is}{2}} F(a, s) + e^{\frac{\pi is}{2}} F(-a, s) \right), \quad \forall s \in \{\sigma + it : \sigma > 1\}. \quad (24)$$

Demostración. A partir del Teorema de los Residuos (teorema A.13), tenemos que

$$\begin{aligned} I_n(1-s, a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{z^{-s} e^{az}}{1-e^z} dz \\ &= - \sum_{k=-n, k \neq 0}^n \operatorname{Res} \left(\frac{z^{-s} e^{az}}{1-e^z}, 2k\pi i \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Por otra parte, para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, a partir de la regla de L'Hôpital (teorema A.2), el teorema A.3 y la proposición A.4,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2k\pi i} (z - 2k\pi i) \frac{z^{-s} e^{az}}{1-e^z} &= \lim_{z \rightarrow 2k\pi i} \frac{z^{-s} e^{az} + (z - 2k\pi i) (-s z^{-(s+1)} e^{az} + z^{-s} a e^{az})}{-e^z} \\ &= - \frac{e^{2k\pi i a}}{(2k\pi i)^s}. \end{aligned} \quad (26)$$

Aplicando (26) en (25),

$$\begin{aligned} I_n(1-s, a) &= \sum_{k=-n, k \neq 0}^n \frac{e^{2k\pi i a}}{(2k\pi i)^s} \\ &= \frac{e^{-\frac{\pi is}{2}}}{(2\pi)^s} \sum_{k=1}^n \frac{e^{2k\pi i a}}{k^s} + \frac{e^{\frac{\pi is}{2}}}{(2\pi)^s} \sum_{k=1}^n \frac{e^{-2k\pi i a}}{k^s}. \end{aligned} \quad (27)$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito en (27), obtenemos mediante el lema 3.32 que

$$I(1-s, a) = \frac{e^{-\frac{\pi is}{2}}}{(2\pi)^s} F(a, s) + \frac{e^{\frac{\pi is}{2}}}{(2\pi)^s} F(-a, s), \quad \forall s \in \{\sigma + it : \sigma > 1\}.$$

Finalmente, por (15), multiplicando esta última igualdad por $\Gamma(s)$

$$\begin{aligned} \zeta(1-s, a) &= \Gamma(s) I(1-s, a) \\ &= \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(e^{-\frac{\pi is}{2}} F(a, s) + e^{\frac{\pi is}{2}} F(-a, s) \right), \quad \forall s \in \{\sigma + it : \sigma > 1\}. \end{aligned}$$

■

Observación 3.36 Nótese que si $a \neq 1$ la fórmula (24) también es válida para $s \in \{\sigma + it : \sigma > 0\}$.

Corolario 3.37 (Fórmula de Hurwitz para $\zeta(s)$) ([1], teorema 12.7, página 322) La función $\zeta(s)$ verifica la siguiente ecuación funcional:

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s). \quad (28)$$

Demostración. Tomando $a = 1$ en (24), tenemos que

$$\begin{aligned} \zeta(1-s) &= \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(e^{-\frac{\pi is}{2}} \overbrace{F(1,s)}^{\zeta(s)} + e^{\frac{\pi is}{2}} \overbrace{F(-1,s)}^{\zeta(s)} \right) \\ &= (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \zeta(s) \left(e^{-\frac{\pi is}{2}} + e^{\frac{\pi is}{2}} \right) \\ &= 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \zeta(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad \forall s \in \{\sigma + it : \sigma > 1\}, \end{aligned}$$

y podemos extender este resultado para todo s mediante prolongación analítica.

Finalmente realizando el cambio de variable $z = 1-s$ obtenemos la conclusión deseada:

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= 2(2\pi)^{z-1} \Gamma(1-z) \cos\left(\frac{\pi(1-z)}{2}\right) \zeta(1-z) \\ &= 2(2\pi)^{z-1} \Gamma(1-z) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) \zeta(1-z) \end{aligned}$$

■

La ecuación (28) nos permite apreciar a simple vista que $s = -2k$, $k \geq 1$, es un cero de la función zeta de Riemann. En efecto, a partir de (28),

$$\zeta(-2k) = 2(2\pi)^{-2k-1} \Gamma(2k+1) \operatorname{sen}(-k\pi) \zeta(2k+1) = 0, \quad \forall k \geq 1,$$

con lo que estos valores reciben el nombre de **ceros triviales** de la función $\zeta(s)$.

Sin embargo, esta propiedad no se verifica para los pares no negativos debido a las propiedades de la función $\Gamma(s)$. Apreciemos con más detalle este hecho.

Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}(x) \sim_{k\pi} (-1)^k (x - k\pi), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (29)$$

Entonces para cada $k \geq 0$, al ser $\zeta(s)$ continua en $s = 2k$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\zeta(2k) &= \lim_{x \rightarrow 2k} \zeta(x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 2k} 2(2\pi)^{x-1} \Gamma(1-x) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{2} \right) \zeta(1-x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 2k} 2(2\pi)^{x-1} (-x) \Gamma(-x) (-1)^k \left(\frac{\pi x}{2} - k\pi \right) \zeta(1-x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 2k} \frac{(-1)^k (2\pi)^x}{2} x \Gamma(-x) (-x + 2k) \zeta(1-x). \tag{30}
\end{aligned}$$

Pero puesto que $\Gamma(s)$ tiene un polo simple en $s = -2k$ de residuo $\frac{(-1)^{2k}}{(2k)!}$ (teorema C.10), por la proposición A.4,

$$\lim_{x \rightarrow 2k} \Gamma(-x) (-x + 2k) \stackrel{y=-x}{=} \lim_{y \rightarrow -2k} \Gamma(y) (y + 2k) = \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{(2k)!},$$

y aplicando este resultado a (30),

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^k (2\pi)^{2k}}{2} (2k) \frac{1}{(2k)!} \zeta(1-2k) = \frac{(-1)^k (2\pi)^{2k} \zeta(1-2k)}{2(2k-1)!}, \quad \forall k > 0,$$

de donde vemos que no es posible determinar que $\zeta(2k) = 0$.

Observación 3.38 *De hecho, por la representación como serie de Dirichlet de $\zeta(s)$, sabemos que $\zeta(2k) > 0$ para todo $k > 0$, con lo que no pueden ser ceros de $\zeta(s)$.*

Para $k = 0$, el corolario 3.30 y la proposición A.4 nos garantiza que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \zeta(1-x) x \stackrel{y=1-x}{=} - \lim_{y \rightarrow 1} \zeta(y) (y-1) = -1,$$

con lo que (30) se reduce a

$$\zeta(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2\pi)^x}{2} \Gamma(-x) (-x) x \zeta(1-x) = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

Dentro de la distribución de los ceros de $\zeta(s)$ encontramos la siguiente conjetura, formulada en el año 1859 por Bernhard Riemann:

Conjetura 3.39 (Hipótesis de Riemann) *Todos los ceros de $\zeta(s)$ con parte real comprendida entre 0 y 1 tienen parte real $\frac{1}{2}$.*

En 1914, Godfrey H. Hardy probó que existe una infinidad de ceros sobre la recta $\left\{ \sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma = \frac{1}{2} \right\}$ ([14]); y previamente, en 1896, Jacques Hadamard y Charles-Jean de la Vallée-Poussin demostraron independientemente mediante argumentos muy sofisticados que ningún cero yace sobre la recta $\{ \sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma = 1 \}$ ([15] y [16]). En lo que a los intentos numéricos de refutar esta conjetura, quizás el más importante sea el de Xavier Gourdon en el año 2004 ([17]), en el cual se calcularon trillones de ceros de la función zeta de Riemann, todos ellos con parte real $\frac{1}{2}$. Muchos otros resultados se han dado sobre la localización de los ceros de $\zeta(s)$ o sus sumas parciales, pero hasta la fecha nadie ha logrado demostrar la veracidad o falsedad de dicho enunciado.

La dificultad de este resultado es tal que David Hilbert lo incluyó dentro de su famosa lista de los 23 problemas (conocidos como *problemas de Hilbert* en su honor) en su ponencia en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900 de París; y más recientemente, en el año 2000, el Clay Mathematics Institute lo reconoció como uno de los siete *problemas del milenio*, recompensando al posible autor de la prueba con un millón de dólares. Cabe destacar que es la única cuestión en común en ambas listas.

Esta conjetura puede generalizarse para las funciones $L(s, \chi)$, conociéndose como hipótesis de Riemann generalizada.

Conjetura 3.40 (Hipótesis de Riemann generalizada) *Los ceros de $L(s, \chi)$ en la banda $\{ \sigma + it \in \mathbb{C} : 0 \leq \sigma \leq 1 \}$ tienen parte real $\frac{1}{2}$.*

Una de las muestras de la importancia de la hipótesis de Riemann es su relación intrínseca con la distribución de los números primos, la cual podemos intuir sin extendernos en demasía mediante el producto de Euler de $\zeta(s)$ (ejemplos 3.22) y el siguiente teorema demostrado por Helge von Koch en 1901:

Teorema 3.41 (von Koch) *La hipótesis de Riemann es cierta si, y sólo si,*

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x} \ln x),$$

donde $\pi(x)$ es la cantidad de primos menores o iguales que x y $\text{Li}(x)$ es la integral logarítmica desplazada

$$\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Demostración. Véase [12]. ■

Este resultado fue mejorado en 1976 por Lowell Schoenfeld como vemos a continuación:

Teorema 3.42 (Schoenfeld) *La hipótesis de Riemann es equivalente a que*

$$|\pi(x) - \text{Li}(x)| < \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \ln(x), \quad \forall x \geq 2657.$$

Demostración. Disponible en [13]. ■

Para más información sobre la historia de la distribución de los números primos y la hipótesis de Riemann, recomendamos la lectura [18], donde se encuentra disponible una traducción al castellano de [10].

A. Teoremas auxiliares

A.1. Teoremas de variable compleja

En esta sección introducimos una serie de teoremas fundamentales en la teoría de variable compleja, imprescindibles para el correcto desarrollo del texto.

Teorema A.1 (Teorema Fundamental del Álgebra) *Si $p(x)$ es un polinomio de grado n y coeficientes complejos, entonces $p(x)$ tiene n raíces complejas.*

Demostración. Véase [4] (teorema 2.4.3, página 35). ■

Teorema A.2 (Regla de L'Hôpital) *Si f y g son dos funciones analíticas en un entorno de $s_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = 0 = \lim_{s \rightarrow s_0} g(s)$, entonces*

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f(s)}{g(s)} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f'(s)}{g'(s)}.$$

Demostración. Véase [6] (teorema 1.4, página 304). ■

Teorema A.3 (Clasificación de singularidades aisladas) *Supóngase que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene una singularidad aislada en s_0 . Entonces*

1. *f tiene una singularidad evitable en s_0 si, y sólo si, $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) \in \mathbb{C}$.*
2. *f tiene un polo de orden n , $n \geq 1$, en s_0 si y sólo si, $\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)^n f(s) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*
3. *f tiene una singularidad esencial en s_0 si, y sólo si, no existe $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s)$.*

Demostración. Véase [4] (teorema 4.1.5, página 64). ■

Proposición A.4 *Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene un polo simple en s_0 se tiene que*

$$\text{Res}(f, s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)f(s).$$

Demostración. Disponible en [4] (observación 4.2.2.d, página 68). ■

Proposición A.5 *Si una sucesión de funciones acotadas $\{f_n\}_{n \geq 1}$, $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$, converge uniformemente a cierta función f , entonces $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es uniformemente acotada, es decir, existe $K > 0$ tal que*

$$|f_n(s)| \leq K, \quad \forall s \in U, \forall n \geq 1.$$

Demostración. Supongamos que para cada $n \geq 1$ existe K_n tal que

$$|f_n(s)| \leq K_n, \quad \forall x \in U.$$

Puesto que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente a f , tenemos que existe n_0 natural tal que

$$|f_n(s) - f(s)| \leq 1, \quad \forall s \in U, \quad \forall n \geq n_0,$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} |f_n(s)| &\leq |f_n(s) - f(s)| + |f(s) - f_{n_0}(s)| + |f_{n_0}(s)| \\ &\leq 2 + K_{n_0}, \quad \forall s \in U, \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Finalmente basta tomar $K := \max\{K_1, \dots, K_{n_0}, 2 + K_{n_0}\}$ para tener la cota uniforme deseada. ■

Teorema A.6 (Weierstrass) *Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones analíticas sobre un abierto $D \subset \mathbb{C}$ que además converge uniformemente a cierta función f en todo compacto de D . Entonces f es analítica en D y $\{f'_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente a f' en todo compacto de D .*

Demostración. Disponible en [1] (Lema 3, página 292) y [4] (Teorema 2.2.17, página 30). ■

Teorema A.7 (Principio de Identidad) *Sean $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$, con U un abierto conexo del plano complejo. Si f y g coinciden en un subconjunto de U con al menos un punto de acumulación, entonces $f \equiv g$ en U .*

Demostración. En [4] (Teorema 2.4.8, página 37). ■

Teorema A.8 *El producto*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n),$$

converge (absolutamente) si, y sólo si, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

converge (absolutamente).

Demostración. Véase [4] (Consecuencia del lema 6.1.2, página 138). ■

Definición A.9 (Factores canónicos elementales) Definimos los factores canónicos elementales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_0(s) &:= 1 - s \\ E_m(s) &:= (1 - s)e^{\sum_{k=1}^m \frac{s^k}{k}}, \quad \forall m \geq 1. \end{aligned}$$

Definición A.10 (Exponente de convergencia) Dada una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cuyo módulo tiende a infinito, definimos su exponente de convergencia de la siguiente forma:

$$\mu := \inf \left\{ x > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^x} < \infty \right\}.$$

Teorema A.11 (Factorización de Hadamard) Sea f una función entera, no constante, de orden finito λ y con ceros en s_1, \dots, s_n, \dots (considerando sus multiplicidades repetidas). Si denotamos μ al exponente de convergencia de $\{s_n\}_{n \geq 1}$ y k es el orden del cero en $s = 0$, entonces

$$f(s) = s^k \prod_{s_n \neq 0} E_h \left(\frac{s}{s_n} \right) e^{g(s)},$$

donde $g(s)$ es un polinomio de grado menor o igual que λ y h es el menor entero tal que $h > \mu - 1$.

Demostración. Disponible en [5] (teorema 3.2, página 207). ■

Corolario A.12 Para todo $s \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\operatorname{sen}(\pi s) = \pi s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2} \right).$$

Demostración. Consecuencia del teorema de factorización de Hadamard (teorema A.11). ■

Teorema A.13 (Teorema de los Residuos) Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica salvo en un conjunto de singularidades aisladas S . Entonces para todo camino cerrado \mathcal{C} en $U \setminus S$

$$\int_{\mathcal{C}} f(s) ds = 2\pi i \sum_{w \in S} n(\mathcal{C}, w) \operatorname{Res}(f, w),$$

donde $n(\mathcal{C}, w)$ representa el índice de w respecto a la curva \mathcal{C} y $\operatorname{Res}(f, w)$ el residuo de la singularidad w de f .

Demostración. Disponible en [4] (teorema 4.2.3, página 69). ■

Teorema A.14 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Dadas dos sucesiones $\{a_n\}_{n \geq 1}$ y $\{b_n\}_{n \geq 1}$ de números complejos, se tiene que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración. Consecuencia de que

$$\langle \{a_n\}_{n \geq 1}, \{b_n\}_{n \geq 1} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,$$

es un producto escalar. ■

A.2. Complementos de teoría de anillos

Definición A.15 (Anillo) Decimos que $(\mathcal{R}, +, \cdot)$, siendo $+$ y \cdot dos operaciones binarias sobre el conjunto \mathcal{R} , es un anillo si se verifica que

1. $(\mathcal{R}, +)$ es un grupo abeliano.
2. \cdot es asociativa.
3. \cdot es distributiva respecto de $+$.

Si además \cdot es conmutativa o si posee elemento neutro, se dice que el anillo $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ es conmutativo o unitario, respectivamente.

Notación A.16 Reduciremos la notación $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ a simplemente \mathcal{R} . Además, empleando una notación tradicional, denotaremos como 0 y 1 a los elementos neutros de $+$ y \cdot , respectivamente, en el caso de que existan.

Definición A.17 (Cuerpo) Si un anillo conmutativo y unitario \mathcal{R} verifica que todo elemento $a \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ tiene inverso para \cdot , decimos que \mathcal{R} es un cuerpo.

Definición A.18 (Ideal) Sea un anillo conmutativo \mathcal{R} y \mathcal{I} un subanillo suyo. Decimos que \mathcal{I} es un ideal de \mathcal{R} si verifica que

$$xy \in \mathcal{I}, \quad \forall y \in \mathcal{I}, \forall x \in \mathcal{R}.$$

Teorema A.19 (Caracterización de ideales) Sea \mathcal{R} un anillo conmutativo y \mathcal{I} un subconjunto suyo no vacío. Entonces \mathcal{I} es un ideal de \mathcal{R} si, y sólo si, se verifican estas dos condiciones:

1. $y_1 - y_2 \in \mathcal{I}$ para cualesquiera $y_1, y_2 \in \mathcal{I}$.
2. $xy \in \mathcal{I}$ para cualesquiera $y \in \mathcal{I}$ y $x \in \mathcal{R}$.

Demostración. Véase [7] (teorema 2.2, página 123). ■

Proposición A.20 Sea \mathcal{I} un ideal de un anillo unitario \mathcal{R} . Entonces \mathcal{I} contiene a algún elemento invertible de \mathcal{R} si, y sólo si, $\mathcal{I} = \mathcal{R}$.

Demostración. Si $a \in \mathcal{I}$ es un elemento invertible, para todo $r \in \mathcal{R}$ tenemos que

$$r = (ra^{-1})a \in \mathcal{I} \implies \mathcal{R} \subset \mathcal{I} \implies \mathcal{I} = \mathcal{R}.$$

Puesto que el recíproco es trivial, es resultado queda probado. ■

Teorema A.21 Si \mathcal{R} es un anillo conmutativo y unitario e \mathcal{I} un ideal suyo, \mathcal{R}/\mathcal{I} es un anillo conmutativo y unitario con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} (a + \mathcal{I}) + (b + \mathcal{I}) &:= (a + b) + \mathcal{I}, \quad \forall a + \mathcal{I}, b + \mathcal{I} \in \mathcal{R}/\mathcal{I}, \\ (a + \mathcal{I}) \cdot (b + \mathcal{I}) &:= (ab) + \mathcal{I}, \quad \forall a + \mathcal{I}, b + \mathcal{I} \in \mathcal{R}/\mathcal{I}. \end{aligned}$$

Además los elementos neutros de ambas operaciones son, respectivamente, \mathcal{I} y $1 + \mathcal{I}$.

Demostración. Véase [7] (teorema 2.7, página 125). ■

B. Funciones aritméticas

B.1. Definición y ejemplos relevantes

Definición B.1 (Función arimética) Decimos que una función real o compleja es aritmética si está definida sobre los enteros positivos.

Ejemplos B.2 Algunas funciones ariméticas importantes son las que siguen:

1. La función de Möbius.

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ es producto de } k \text{ primos distintos} \\ 0 & \text{si es divisible por un cuadrado de un primo.} \end{cases}$$

2. La función indicatriz de Euler

$$\varphi(n) := \text{card}\{k : (k, n) = 1\}.$$

3. La función de Mangoldt

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \ln p & \text{si } n \text{ es potencia de } p \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

4. La función $\lambda(n)$ de Liouville

$$\lambda(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^{\sum_{i=1}^k a_k} & \text{si } n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}. \end{cases}$$

Teorema B.3

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad \forall n \geq 1.$$

Demostración. Véase [1] (Teorema 2.1, página 30). ■

Teorema B.4

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n, \quad \forall n \geq 1.$$

Demostración. Véase [1] (Teorema 2.10, página 40). ■

B.2. Funciones multiplicativas

Definición B.5 (Función multiplicativa) Se dice que una función aritmética f no idénticamente nula es multiplicativa si

$$f(nm) = f(n)f(m), \quad \text{si } (m, n) = 1.$$

Además, si se verifica

$$f(nm) = f(n)f(m), \quad \forall n, m \geq 1,$$

se dice que f es completamente multiplicativa.

Ejemplos B.6 Retomando con los ejemplos B.2, tenemos que

1. La función de Möbius es multiplicativa, pero no completamente multiplicativa.
2. La indicatriz de Euler también es multiplicativa, pero tampoco lo es completamente.
3. La función de Mangoldt no es multiplicativa.
4. La función λ de Liouville es completamente multiplicativa.

B.3. Convolución de Dirichlet

Definición B.7 (Convolución de Dirichlet) Dadas dos funciones aritméticas f y g , definimos su convolución de Dirichlet, $f * g$, de la siguiente forma:

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right), \quad \forall n \geq 1.$$

Teorema B.8 La convolución de Dirichlet cumple que:

1. Verifica la propiedad asociativa.
2. Es una operación conmutativa.
3. La función

$$I(n) := \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad \forall n \geq 1,$$

juega el papel de elemento neutro.

4. f es invertible para la convolución de Dirichlet si, y sólo si, $f(1) \neq 0$. Su inversa puede calcularse de forma recursiva de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f^{-1}(1) &= \frac{1}{f(1)} \\ f^{-1}(n) &= -\frac{1}{f(1)} \sum_{d|n, d < n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d), \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Demostración. [1] (Teoremas 2.6, 2.7 y 2.8, páginas 36 y 37). ■

Teorema B.9 *La convolución de Dirichlet es distributiva respecto a la suma de funciones aritméticas.*

Demostración. Si f , g y h son funciones aritméticas, para cada $n \geq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} (f * (g + h))(n) &= \sum_{d|n} f(d)(g + h)\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} f(d) \left(g\left(\frac{n}{d}\right) + h\left(\frac{n}{d}\right) \right) \\ &= \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} f(d)h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= (f * g)(n) + (f * h)(n). \end{aligned}$$

■

Proposición B.10 *Dadas dos funciones aritméticas f y g ,*

$$|f * g|(n) \leq (|f| * |g|)(n), \quad n \geq 1.$$

Demostración. Consecuencia directa de la desigualdad triangular. ■

B.4. Caracteres de Dirichlet

Definición B.11 (Carácter) *Dado un grupo G , cuya operación la llamaremos yuxtaposición, diremos que $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es un carácter (lineal¹) de G si no es idénticamente nula y además,*

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \forall a, b \in G.$$

Si $f(g) = 1$ para todo $g \in G$, recibe el nombre de carácter principal de G .

Teorema B.12 *Todo grupo abeliano finito admite exactamente tantos caracteres como su orden.*

Demostración. Véase [1] (teorema 6.8, página 168). ■

Teorema B.13 (Identidad de Bézout) *Sean a y b dos enteros no nulos. Entonces (a, b) existe y existen otros dos enteros u y v tales que*

$$(a, b) = au + bv.$$

Si además $(a, b) = 1$, entonces los enteros u y v introducidos anteriormente son únicos.

Demostración. Véase [7] (teorema 6.5, página 11). ■

Teorema B.14 *Si denotamos por \mathbb{Z}_n^* al grupo multiplicativo de clases residuales módulo n , entonces $[k] \in \mathbb{Z}_n^*$ si, y sólo si, $(k, n) = 1$.*

Demostración. Consecuencia de la Identidad de Bézout. ■

Definición B.15 (Carácter de Dirichlet) *Dado un carácter f de \mathbb{Z}_n^* , podemos asociarle una función aritmética χ de la siguiente forma,*

$$\chi(k) = \begin{cases} f([k]) & \text{si } (k, n) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta función χ recibe el nombre de carácter de Dirichlet módulo n .

Si f es el carácter principal de \mathbb{Z}_n^ , se dice que χ es el carácter principal de Dirichlet módulo n .*

Corolario B.16 *Existen un total de $\varphi(n)$, donde φ es la indicatriz de Euler (véanse los ejemplos B.2), caracteres de Dirichlet módulo n .*

Demostración. Consecuencia de B.12. ■

Teorema B.17 *Sea χ un carácter de Dirichlet módulo n . Entonces*

1. χ es completamente multiplicativa.
2. χ es periódica con periodo n .

El recíproco es también cierto.

Demostración. Véase [1] (Teorema 6.15, página 174). ■

Teorema B.18 *Sea χ un carácter de Dirichlet módulo n . Entonces $|\chi(k)| \leq 1$ para todo $k \geq 1$.*

Demostración. Véase [8] (teorema 1.3, página 114). ■

Teorema B.19 *Sea χ un carácter de Dirichlet módulo n . Entonces*

$$\sum_{k=1}^n \chi(k) = \begin{cases} \varphi(n) & \text{si } \chi \text{ es el carácter principal módulo } n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Disponible en [8] (teorema 2.1.iii, página 119). ■

C. Propiedades de $\Gamma(s)$

A lo largo de este apéndice probaremos algunas propiedades elementales de la conocida función gamma de Euler, $\Gamma(s)$, como la equivalencia entre algunas de sus posibles definiciones, las ecuaciones funcionales que verifica o la fórmula de Gauss.

Para empezar, tomemos la siguiente definición de $\Gamma(s)$:

Definición C.1 Definimos $\Gamma(s)$ de la siguiente forma:

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}.$$

Teorema C.2 ([6], página 506) Para $s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$, tenemos que

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} t^{s-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$. Teniendo en cuenta que, para todo $t \in [0, n]$ se tiene que

$$1 - \frac{t^2}{n} \leq e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq 1,$$

para cada $s = \sigma + it$, con $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^n t^{s-1} e^{-t} dt - \int_0^n t^{s-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \right| &\leq \int_0^n \left| t^{s-1} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] \right| dt \\ &= \int_0^n t^{\sigma-1} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] dt \\ &= \int_0^n t^{\sigma-1} e^{-t} \left[1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] dt \\ &\leq \int_0^n t^{\sigma-1} e^{-t} \left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \right] dt \\ &= \frac{1}{n} \int_0^n t^{\sigma+1} e^{-t} dt, \end{aligned} \tag{31}$$

y puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{\sigma+1} e^{-t} dt = \Gamma(\sigma + 2) < \infty$, tenemos que al tomar límites en (31)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^n t^{s-1} e^{-t} dt - \int_0^n t^{s-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \right| = 0,$$

finalizando así la demostración. ■

A partir de esta nueva representación, estamos en disposición de demostrar el siguiente resultado.

Teorema C.3 (Fórmula de Gauss) ([6], página 505) *La función $\Gamma(s)$ verifica que*

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos la integral $\int_0^n t^{s-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. Al hacer el cambio de variable $x = \frac{t}{n}$, tenemos que

$$\int_0^n t^{s-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^s \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^n dx.$$

Integrando por partes reiteradamente tenemos que

$$\begin{aligned} n^s \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^n dx &= n^s \frac{n}{s} \int_0^1 x^s (1-x)^{n-1} dx \\ &= \dots \\ &= \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n-1)} \int_0^1 x^{s+n-1} dx \\ &= \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)}, \end{aligned} \tag{32}$$

y tomando límites en (32) se desprende el resultado. ■

Lema C.4 *La sucesión $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$, con $\gamma_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$, es convergente.*

Demostración. Basta probar que $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión decreciente de términos positivos.

Para ver que es decreciente, tenemos que

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} < 0 \iff \frac{1}{n} + \ln \left(\frac{n-1}{n} \right) < 0, \quad \forall n \geq 2. \tag{33}$$

A partir de la representación en serie del logaritmo,

$$\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{-1}{n} \right)^k = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kn^k},$$

deducimos que

$$\frac{1}{n} + \ln \left(\frac{n-1}{n} \right) = - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kn^k} < 0,$$

probando así por (33) que γ_n es decreciente.

El hecho de que $\gamma_n > 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se desprende de que

$$\ln n = \int_1^n \frac{dx}{x}.$$

Si denotamos como P a una partición del intervalo $[0, n]$ y $S_P(f(x))$ su suma superior de Riemann de la función $f(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n-1} \max_{x \in [k, k+1]} \left\{ \frac{1}{x} \right\} \\ &\geq \inf_P \left\{ S_P \left(\frac{1}{x} \right) \right\} = \int_1^n \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

con lo que

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

Definición C.5 (Constante de Euler-Mascheroni) Definimos como constante de Euler-Mascheroni al límite de la sucesión introducida en el lema C.4, y lo denotaremos como γ .

Teorema C.6 ([6], página 504) La función $\Gamma(s)$ satisface que

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n} \right)^{-1} e^{\frac{s}{n}}.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{n^n n!}{s(s+1)\dots(s+n)} &= \frac{e^{(\ln n)s}}{s} \frac{1}{\left(\frac{s+1}{1}\right)\dots\left(\frac{s+n}{n}\right)} \\ &= \frac{e^{(\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})s}}{s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k} \right)^{-1} e^{\frac{s}{k}}, \end{aligned} \quad (34)$$

y al tomar límites en (34) se termina la prueba por la fórmula de Gauss (Teorema C.3).

■

Observación C.7 El teorema C.6 nos permite extender analíticamente la función $\Gamma(s)$ sobre todo el plano complejo salvo en $\{-n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Teorema C.8 ([6], página 505) La función $\Gamma(s)$ verifica la siguiente ecuación funcional:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Demostración. A partir de la fórmula de Gauss (Teorema C.3),

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{s+1}n!}{(s+1)\dots(s+n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ns}{s+n+1} \cdot \frac{n!n^s}{s\dots(s+n)} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ns}{s+n+1} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^s}{s\dots(s+n)} \right) \\ &= s\Gamma(s), \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}. \end{aligned}$$

■

Corolario C.9 $\Gamma(n) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Realizaremos la demostración mediante el Principio de Inducción.

Para $n = 1$, a partir de la fórmula de Gauss (Teorema C.3),

$$\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n}{(n+1)!} = 1.$$

Mediante hipótesis de inducción (HI), supongamos que el resultado es cierto para $n-1$. Por el teorema C.8,

$$\Gamma(n) = n\Gamma(n-1) \stackrel{\text{HI}}{=} n(n-1)! = n!,$$

y se finaliza la demostración por el Principio de Inducción. ■

Teorema C.10 Si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces $s_n = -n$ es un polo simple de $\Gamma(s)$ con residuo $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Demostración. A partir del teorema C.6, resulta evidente que $s_n := -n$, $n \geq 0$, es una singularidad aislada de $\Gamma(s)$. Completamos la demostración mediante el Principio de Inducción.

Para $s_0 = 0$, por teorema C.8 tenemos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\Gamma(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s+1) = \Gamma(1) = 1 = \frac{(-1)^0}{0!},$$

con lo que s_0 , como consecuencia del teorema A.3 y la proposición A.4, es un polo simple de residuo $\frac{(-1)^0}{0!}$.

Mediante hipótesis de inducción (HI), supongamos que $s_{n-1} := -(n-1)$ es un polo simple de $\Gamma(s)$ con residuo $\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$. Veamos que $s_n := -n$ es otro polo simple de residuo $\frac{(-1)^n}{n!}$. De nuevo a partir de los teoremas C.8 y A.3 y la proposición A.4,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -n} \Gamma(s)(s+n) &= \lim_{s \rightarrow -n} \frac{\Gamma(s+1)}{s}(s+n) \\ &\stackrel{z=s+1}{=} \lim_{z \rightarrow -(n-1)} \frac{1}{z-1} \Gamma(z)(z+n-1) \\ &\stackrel{\text{HI}}{=} -\frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}, \end{aligned}$$

finalizando así la demostración. ■

Teorema C.11 ([6], página 506) *Se satisface que*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)}.$$

Demostración. A partir del teorema C.8, tenemos que

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = -s\Gamma(s)\Gamma(-s). \quad (35)$$

A partir del teorema C.6,

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(-s) &= \left(\frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{\frac{s}{n}} \right) \left(-\frac{e^{\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{-\frac{s}{n}} \right) \\ &= -\frac{1}{s^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Combinando (35) y (36) con el corolario A.12, tenemos que

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{1}{s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right)^{-1} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)}.$$

■

Notas

¹En la literatura especializada en teoría de grupos, suele definirse el concepto de carácter de forma más general que la aquí presente, siendo los caracteres lineales una subclase particular suya. Puesto que para el desarrollo de este escrito es tan solo necesario el manejo de caracteres lineales, omitiremos este calificativo con el fin de aligerar la nomenclatura. Para más información sobre esta definición más general consúltese el capítulo 4 de [8].

Índice alfabético

- L* de Dirichlet, 7, 8, 10, 40–42, 45, 46, 51
Abscisa de convergencia absoluta, 10, 41
Convergencia absoluta, 41
Extensión analítica, 45, 46
Hipótesis de Riemann generalizada, 51
Producto de Euler, 40
- Anillo, 32–34, 36, 37, 56, 57
Commutativo, 32, 36, 56, 57
Ideal, 33, 34, 37, 57
Unitario, 32, 36, 56, 57
- Bohr, Harald, 7, 20
- Carácter, 8, 10, 40–42, 46, 60, 61, 68
de Dirichlet, 8, 10, 40–42, 46, 60–62
Principal, 46, 60–62
- Clay Mathematics Institute, 51
Problemas del milenio, 51
- Congreso Internacional de Matemáticos, 51
- Constante de Euler-Mascheroni, 65
- Criterio del cociente, 11
- Cuerpo, 5, 33–37, 57
Algebraicamente cerrado, 36, 37
- de la Vallée-Poussin, Charles-Jean, 51
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz, 21, 56
- Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune, 7
- Eta de Dirichlet, 8, 16, 19, 24, 26
Abscisa de convergencia, 16
Abscisa de convergencia absoluta, 16
Analiticidad, 24
Derivada, 24
- Euclides, 6
- Euler, Leonhard, 6
- Función aritmética, 29, 30, 37, 39, 40, 58–60
Completamente multiplicativa, 37, 39, 40, 59
Convolución de Dirichlet, 29, 30, 59, 60
Multiplicativa, 37, 39, 40, 59
- Función de Möbius, 30, 58, 59
- Función de Mangoldt, 30, 58, 59
- Gamma de Euler, 27, 28, 42–45, 48–50, 63–67
Ecuación funcional, 66
Fórmula de Gauss, 63–66
Singularidades, 50, 66
- Gauss, Carl Friedrich, 7
- Gourdon, Xavier, 51
- Grupo, 30, 56, 60, 61
Abeliano, 30, 56, 61
- Hadamard, Jacques, 51
- Hardy, Godfrey Harold, 7, 51
- Hilbert, David, 51
Problemas de Hilbert, 51
- Identidad de Bézout, 61
- Indicatriz de Euler, 46, 58, 59, 61
- Integral logarítmica desplazada, 51, 52
- Lambda de Liouville, 58, 59
- Landau, Edmund, 7
- Lema de Abel, 11, 12, 14, 15, 23
- Littlewood, John Edensor, 7
- Monoide, 31
- Número primo, 5–7, 37, 39, 51, 52
Distribución, 7, 51, 52

- Principio de Identidad, 27, 54
- Producto, 37, 54
- Convergencia, 37, 54
 - Convergencia absoluta, 37, 54
- Regla de L'Hôpital, 44, 48, 53
- Riemann, Bernhard, 7, 50
- Riesz, Marcel, 7
- Schoenfeld, Lowel, 52
- Serie de Dirichlet, 6–20, 22, 24, 27, 29–37, 39, 40
- Abscisa de convergencia, 13–20, 24
 - Abscisa de convergencia absoluta, 10, 13, 14, 16–20, 24
 - Abscisa de convergencia uniforme, 19, 20, 27
 - Analiticidad, 22, 24
 - Derivada, 24
 - Estructura algebraica, 30–37
 - Ordinaria, 8, 18–20, 29–37, 39
 - Producto de Euler, 37, 39, 40
 - Representación integral, 27
 - Unicidad, 27
- Suma superior de Riemann, 65
- Teorema de Bohr-Bohnenblust-Hille, 22
- Teorema de Factorización de Hadamard, 55
- Exponente de convergencia, 55
 - Factores canónicos elementales, 55
- Teorema de Landau, 25, 41
- Teorema de los Residuos, 45, 48, 56
- Teorema de Schoenfeld, 52
- Teorema de von Koch, 51
- Teorema de Weierstrass, 24, 54
- Teorema Fundamental de la Arimética, 6
- Teorema Fundamental del Álgebra, 36, 53
- von Koch, Helge, 51
- Zeta de Hurwitz, 40–48
- Analiticidad, 40
 - Convergencia, 40
 - Ecuación funcional, 42, 43
 - Extensión analítica, 45
 - Fórmula de Hurwitz, 47, 48
- Zeta de Riemann, 6–8, 10, 13, 16, 19, 20, 24, 26, 30, 40–42, 45–47, 49–52
- Abscisa de convergencia, 13, 16, 20
 - Abscisa de convergencia absoluta, 10, 16, 20
 - Abscisa de convergencia uniforme, 20
 - Analiticidad, 24
 - Ceros triviales, 49, 50
 - Derivada, 24, 30
 - Extensión analítica, 45, 46
 - Fórmula de Hurwitz, 47, 49
 - Hipótesis de Riemann, 7, 47, 50–52
 - Producto de Euler, 6, 40, 51
- Zeta periódica, 47, 48

Referencias

- [1] Tom M. Apostol. *Introducción a la Teoría Analítica de Números*. Editorial Reverté. Barcelona, 1980.
- [2] Godfrey H. Hardy, Marcel Riesz. *The General Theory of Dirichlet's Series*. Cambridge University Press. Londres, 1915.
- [3] Hugh L. Montgomery, Robert C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory*. Cambridge University Press. Cambridge, 2007.
- [4] Robert B. Ash, W. P. Novinger. *Complex Variables*. Academic Press. Nueva York, 2004.
- [5] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill. Nueva York, 1979.
- [6] Bruce P. Palka. *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer-Verlag. Nueva York, 1991.
- [7] Thomas W. Hungerford. *Algebra*. Springer-Verlag. Nueva York, 1974.
- [8] Daniel Gorenstein. *Finite groups*. Chelsea Publishing Company. Nueva York, 1980.
- [9] Euclides. *Elementos*. Alejandría, 300 a.C.
<http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf>
- [10] Bernhard Riemann. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsberichter der Berliner Akademie. Berlín, 1859.
- [11] Harold P. Boas. *The football player and the infinite series*. Notices of the AMS (44) 11, 1430-1435. Diciembre 1997.
<http://www.ams.org/notices/199711/boas.pdf>
- [12] Helge von Koch. *Sur la distribution des nombres premiers*. Acta Mathematica 24 (1): 159–182. 1901.
- [13] Lowell Schoenfeld. *Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II*. Mathematics of Computation 30 (134): 337–360. 1976.
- [14] Godfrey H. Hardy. *Sur les Zéros de la Fonction $\zeta(s)$ de Riemann*. C. R. Acad. Sci. París 158: 1012–1014. 1914.

- [15] Jacques Hadamard. *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*. Bulletin Société Mathématique de France 14: 199–220. 1896
- [16] Charles-Jean de la Vallée-Poussin. *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*. Ann. Soc. Sci. Bruselas 20: 183–256. 1896.
- [17] Xavier Gourdon. *The 10^{13} first zeros of the Riemann Zeta function, and zeros computation at very large height*. 2004.
<http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf>
- [18] José Manuel Sánchez Muñoz. *Historias de Matemáticas. Riemann y los Números Primos*. Pensamiento Matemático. Octubre 2011.
http://www2.camino.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/riemann_y_los_numeros_primos.pdf
- [19] Andreas Defant, Domingo García, Manuel Maestre, David Pérez-García. *Bohr's strip for vector valued Dirichlet series*. Mathematische Annalen. Abril 2008.
- [20] Andreas Defant, Domingo García, Manuel Maestre. *New strips of convergence for Dirichlet series*. Publ. Mat. 54: 369-388. 2010.
- [21] Henri Queffélec. *H. Bohr's vision of ordinary Dirichlet series; old and new results*. J. Anal. 3, 43-60. 1995.
- [22] Hakan Hedenmalm. *Dirichlet series and functional analysis. The Legacy of Niels Henrik Abel*, pp. 673-684. Springer, Berlín. 2004.
- [23] Alejandro Mas. *Sobre los ceros de los polinomios exponenciales*. Trabajo de Fin de Grado. Universidad de Alicante, 2015.