



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Densificación en espacios de Banach y su
relación con las medidas de no-compacidad

Gonzalo García Macías



Tesis

Doctorales

www.eltallerdigital.com

UNIVERSIDAD de ALICANTE



Densificación en espacios de Banach y su relación con las medidas de no-compacidad

Universidad de Alicante

Facultad de Ciencias - Dpto. de Matemáticas

TESIS DOCTORAL

Gonzalo García Macías

Alicante - Febrero 2016

*No hay rama de la Matemática, por abstracta que sea,
que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.*

N. I. Lobachevsky (1792-1856)



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Memoria de tesis realizada por D. Gonzalo García Macías en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Alicante bajo la dirección y supervisión de D. Gaspar Mora Martínez, Catedrático de Escuela Universitaria, para optar al Grado de Doctor.

Vº Bº El Director de la Memoria

Fdo.: Gaspar Mora Martínez

Vº Bº La Secretaria del Departamento



Fdo.: Lorena Segura Abad

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Alicante, Febrero de 2016

AGRADECIMIENTOS

No sería justo pasar por alto el agradecimiento que le debo a muchas personas que, de una u otra forma, me han acompañado en esta *aventura* de escribir la presente tesis doctoral. Así pues, me gustaría dedicar esta página para dar las gracias a tales personas. Por supuesto, el orden de aparición no obedece a ningún tipo de preferencia.

En primer lugar, a todos mis familiares y amigos/as, por su apoyo y sus ánimos desde el inicio. El motivo de omitir una lista con sus nombres no es otro que la extensión de la misma. Siempre he podido contar con ellos/as, para cualquier cosa, sin importar las circunstancias ni el momento.

Esta tesis no existiría sin la inestimable ayuda del Prof. Dr. Gaspar Mora, quien durante todos estos años ha guiado pacientemente esta memoria, aportando valiosísimas ideas y correcciones. Mi más sincera y profunda gratitud, también, por todo lo que he aprendido a su lado y por abrirme las puertas del maravilloso mundo de la investigación Matemática. Gracias Gaspar, ¡muchas gracias por todo!. Me gustaría hacer extensible mi agradecimiento a todos los miembros del antiguo Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Alicante, por su inmejorable trato.

Y, por supuesto, a *Loli*.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

*A mis padres,
in memoriam.*



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Índice general

Índice general	9
Introducción	1

I	Curvas α-densas y V-densas	
1	El Concepto de Densificación	1
1.1	Densificación fuerte. Curvas α -densas	2
1.2	Algunas aplicaciones de las curvas α -densas	5
1.2.1	Optimización global en espacios métricos	5
1.2.2	Aproximación de raíces reales de polinomios	11
1.3	Densificación débil. Curvas V -densas	16
1.4	Algunas aplicaciones de las curvas V -densas	21
1.4.1	Optimización global en espacios de Banach	21
1.4.2	Programas de Helly	23
2	Optimización y Densificación	25
2.1	Optimización en los espacios L^p	26
2.1.1	Introducción. El problema (PL)	26
2.1.2	Los problemas $(\theta_n - PL)$ y $(\gamma_n - PL)$	27
2.1.3	Convergencia del método	29
2.2	Optimización en espacios producto	31
2.2.1	Planteamiento del problema (OMO)	31
2.2.2	Densificación débil en el espacio producto	31
2.2.3	Un problema de optimización en $\mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \times L^1$	33

II

Medidas de no-compacidad y punto fijo

3	Medidas de no-compacidad y densificación	39
3.1	Primeras definiciones y ejemplos	40
3.2	Algunas relaciones entre la MNC χ y el GND ϕ_d	41
3.3	La MNC Φ . Una cota superior para las MNC definidas en $(X, \ \cdot\)$	44
3.4	Curvas totalmente λ -densas	49
3.5	La MNC Ψ . Una nueva MNC en (X, σ) .	53
4	Punto fijo y densificación	57
4.1	Los teoremas de punto fijo de Banach, Schauder y Darbo-Sadovskii	58
4.1.1	El teorema de punto fijo de Banach	58
4.1.2	El teorema de punto fijo de Schauder	59
4.1.3	Iteraciones	60
4.1.4	El teorema de punto fijo de Darbo-Sadovskii	63
4.1.5	Ecuaciones integrales de Volterra	67
4.2	Otros resultados de punto fijo	70
4.2.1	Aplicaciones ϕ_d -no-expansivas y ϕ_d -contractivas	70
4.2.2	El problema de Cauchy	75
4.2.3	Estructura ϕ_d -normal	79

III

Índices y referencias

Índice de figuras	85
Índice de tablas	87
Bibliografía	89
Índice alfabético	93
Índice de Símbolos	95

Introducción



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

En una carta fechada el cinco de enero de 1874 Cantor planteaba a Dedekind, con quien mantuvo una fructífera y fluida correspondencia epistolar hasta 1882, la siguiente cuestión:

¿Puede una superficie (digamos, un cuadrado que incluye su frontera) ser referido unívocamente a una línea (digamos, un segmento de recta que incluye los extremos) de modo que para cada punto de la superficie haya un punto correspondiente de la línea e, inversamente, para cada punto de la línea haya un punto correspondiente de la superficie? Yo creo que dar respuesta a esta pregunta no va a ser un trabajo fácil, no obstante el hecho de que la respuesta parece muy claramente ser "no", y la prueba parece casi innecesaria.

Tres años más tarde, en 1877, fue el propio Cantor quien escribió a Dedekind con una prueba en sentido afirmativo a la cuestión de arriba. Este resultado era altamente sorprendente en la época, como el mismo Cantor reconoció al escribir *¡Lo veo, pero no lo creo!*. Ese mismo año, Cantor envió su demostración a la revista alemana *Für die reine und angewandte Mathematik de August Leopold Crelle*, más conocida como *Crelle's Journal*, seguramente la revista matemática más prestigiosa de la época. No obstante, Kronecker (editor del *Crelle's Journal*) se opuso a la publicación del artículo, hasta que en 1878, gracias a la intervención de Dedekind a favor de Cantor, el artículo fue finalmente publicado.

Por supuesto, este resultado tuvo importantes implicaciones para la geometría y la noción de dimensión de un espacio. Pensemos que el resultado de Cantor establece, por ejemplo, que existe una aplicación $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ biyectiva. Fue el propio Cantor quien resaltó en su artículo el hecho de que tal f no es una aplicación continua. También podemos encontrar una prueba de que tal aplicación f no puede ser continua en el Teorema de Netto (cf. [66, Th. 1.3, p. 6]).

Como era de esperar, tras la publicación del artículo de Cantor, se plantearon muchas cuestiones, entre ellas la siguiente: puesto que el intervalo $[0, 1]$ y el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ tienen el mismo cardinal, ¿es posible construir una aplicación continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ que pase por todos los puntos del cuadrado? O dicho de otra forma, ¿se puede construir una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ sobreyectiva? También en este caso la respuesta es afirmativa, y fue Peano en 1890 el primero en construir dicha curva dando lugar a lo que hoy en día se conocen como *curvas que llenan el espacio* o *curvas de Peano*. A la construcción de Peano, le siguieron muchas otras como la curva de Hilbert, Lebesgue, Sierpiński, etc. . . Una excelente referencia de las curvas que llenan el espacio es el libro de H. Sagan [66]. Mostramos en la Figura 1 algunas aproximaciones de la curva de Hilbert.

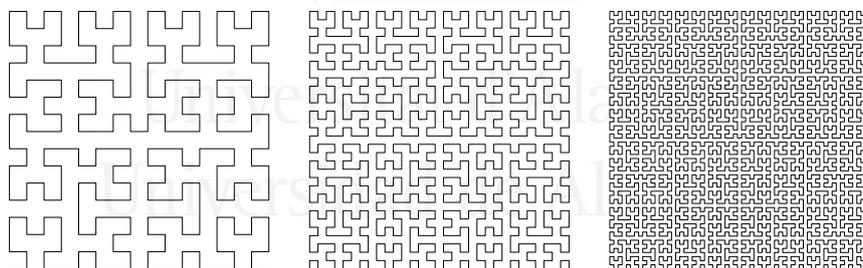


Figura 1: Algunas aproximaciones de la curva de Hilbert.

Otra cuestión que se planteó tras la aparición de las curvas que llenan el espacio fue, caracterizar los conjuntos que son la imagen continua del intervalo $[0, 1]$. Esta caracterización nos la proporciona el famoso Teorema de Hahn-Mazurkiewicz (cf. [66], [73]), resultado que usaremos muchas veces en esta memoria. Dicho teorema se puede enunciar de esta forma: dado un espacio métrico (E, d) , un subconjunto de E es la imagen continua del intervalo $[0, 1]$ si, y sólo si, es compacto, conexo y localmente conexo. Debemos mencionar que un resultado clave en la prueba del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz es el bien conocido Teorema de Hausdorff (cf. [66, Th. 6.6, p. 100]), el cual establece que en un espacio métrico cualquier compacto es la imagen continua del conjunto ternario de Cantor.

No obstante, trabajar con curvas que llenan el espacio es, al menos desde el punto de vista computacional, difícil. Esto es debido a que dichas curvas, por lo general, se definen como una sucesión de funciones (uniformemente) convergente a la curva que llena el espacio. Además, hay que añadir que la expresión de las funciones que componen tal sucesión no es (de nuevo, al menos desde el punto de vista computacional) de fácil manejo. En esta memoria, por lo general, no trabajaremos con curvas que llenan el espacio sino con otro tipo de curvas con las que se puede trabajar de una forma mucho más cómoda, y que además, son una generalización (en el sentido indicado en el párrafo siguiente) de las curvas que llenan el espacio.

El concepto de curva α -densa (Definición 1.1.2) fue introducido en 1997 [57]. En esencia, fijado

un espacio métrico (E, d) , si dado $B \subset E$ acotado existe un número $\alpha > 0$ y una aplicación continua $\gamma_\alpha : I := [0, 1] \rightarrow (E, d)$ tal que $\gamma_\alpha(I) \subset B$ y la distancia de Hausdorff de B a $\gamma(I)$ es menor o igual a α se dice que γ_α es una curva α -densa en B . Si para cualquier $\alpha > 0$ siempre existe una curva α -densa en B se dice que B es densificable. Como vemos, desde el punto de vista de la distancia de Hausdorff, las curvas α -densas son una generalización de las curvas que llenan el espacio, descritas en los párrafos anteriores. Más aún, las curvas α -densas que usaremos en esta memoria para resolver ciertos problemas numéricos, son funciones *suaves* y descritas en términos de funciones elementales, más concretamente, de la función coseno.

Hasta hoy, la principal aplicación de las curvas α -densas la encontramos en la resolución de ciertos problemas de optimización. Aunque trataremos con detalle este tema en el Capítulo 1, Sección 1.2.1, la idea es la siguiente: dada una función continua $f : B \subset (E, d) \rightarrow \mathbb{R}$, si el conjunto B es densificable, es posible reducir el número de variables de la función f del problema siguiente:

$$(P) \quad \inf \{ f(x) : x \in B \},$$

siempre que dicho ínfimo sea finito. Para ello, componemos la función f con una curva α -densa apropiada, pongamos $\gamma_\alpha : I \rightarrow (E, d)$, con $\gamma_\alpha(I) \subset B$, y resolvemos el problema de optimización siguiente:

$$(P)_\alpha \quad \min \{ f(\gamma_\alpha(t)) : t \in I \}.$$

Entonces, el problema $(P)_\alpha$ es un problema de optimización de una sola variable y por lo tanto, en general, más fácil de resolver que el problema (P) .

Además de aproximar las soluciones de ciertos problemas de optimización, probaremos en la Sección 1.2.2 que las curvas α -densas proporcionan un método para aproximar (en caso de que existan) las raíces reales de una función $F : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua, siendo K un conjunto densificable. Al igual que el método para aproximar las soluciones de ciertos problemas de optimización, la idea es reducir el número de variables de la función F a una sola variable y buscar las raíces de esta nueva función. Mostramos además varios ejemplos numéricos para ilustrar dicho método.

Otra aplicación que hemos encontrado en las curvas α -densas consiste en aproximar la dimensión *box-counting*, también conocida como *dimensión logarítmica*, de un objeto contenido en el hipercubo unidad y cerrado $I^n \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Es un hecho bien sabido, que la dimensión logarítmica, en general, es muy difícil de calcular, creciendo dicha complejidad de forma exponencial con la dimensión n (cf. [35]). Probamos en [40] que la dimensión logarítmica de un conjunto $F \subset I^n$, no vacío, se puede aproximar con error arbitrariamente pequeño, mediante la dimensión logarítmica de un subconjunto del intervalo I . Para esto, mostramos explícitamente una familia de curvas α_k -densas en I^n , pongamos γ_k , que verifican la siguiente propiedad

$$\lim_k \dim_B(\gamma_k^{-1}(F_k)) = \dim_B(F),$$

siendo \dim_B la dimensión logarítmica, y $F_k \subset I^n$, para cada $k \in \mathbb{N}$, cierto conjunto que también mostramos explícitamente. Por supuesto, para cada $k \in \mathbb{N}$, el cálculo de $\dim_B(\gamma_k^{-1}(F_k))$ es mucho más fácil que el cálculo de $\dim_B(F)$, ya que $\gamma_k^{-1}(F_k)$ es un subconjunto de I , es decir, uni-dimensional. Así pues, las curvas α -densas, además de proporcionar un método altamente preciso y eficiente en la resolución de problemas de optimización, también proporcionan un método para aproximar, con error arbitrariamente pequeño, la dimensión logarítmica de objetos multi-dimensionales. Para ilustrar dicho método, en [40], mostramos varios ejemplos (la mayoría de ellos fractales muy conocidos como el triángulo de Sierpiński o la esponja de Menger, cf. [35]) donde los resultados obtenidos muestran claramente que la aproximación $\dim_B(\gamma_k^{-1}(F_k)) \approx \dim_B(F)$ es realmente buena, llegando incluso a darse la igualdad en dicha aproximación. Aunque no mostramos estos resultados en esta memoria, los mismos han sido enviados a la revista *Complex Geometry, Patterns, and Scaling in Nature and Society* para su revisión y, si procede, publicación.

En el Capítulo 1 de esta memoria estudiaremos también otro tipo de curvas, llamadas curvas V -densas (Definición 1.3.2). Estas curvas serán más útiles para nuestros objetivos cuando trabajamos en espacios de Banach de dimensión infinita, como quedará patente en dicho capítulo. Además de definir y estudiar las principales diferencias entre las curvas α -densas y las curvas V -densas, mostraremos algunas aplicaciones de las segundas en las secciones 1.4.1 y 1.4.2.

En el Capítulo 2 continuamos con el estudio de ciertos problemas de optimización, enfocando dichos problemas desde el punto de vista de las curvas α -densas y V -densas. Así pues, en la Sección 2.1 analizaremos

un problema de optimización en el espacio L^p de las funciones de potencia p -ésima Lebesgue integrable, del siguiente modo: planteamos una serie de problemas de optimización en espacios de dimensión finita y resolvemos tales problemas mediante curvas α -densas, tal y como probaremos en el Capítulo 1. En el Teorema 2.1.1 se prueba entonces que la sucesión de soluciones de tales problemas de optimización en dimensión finita converge a una solución del problema inicial planteado en el espacio L^p .

Por otro lado, en la Sección 2.2 del Capítulo 2 estudiaremos ciertos problemas de optimización en el espacio producto. Esto es, si $(X_1, \|\cdot\|_1), \dots, (X_n, \|\cdot\|_n)$ son espacios de Banach, planteamos el problema siguiente

$$\text{mín} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(b_i) : (b_1, \dots, b_n) \in B_1 \times \dots \times B_n \right\},$$

siendo $B_1 \times \dots \times B_n \subset X_1 \times \dots \times X_n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ números reales y $f_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$ lineales y continuas para cada $i = 1, \dots, n$. Antes de abordar el problema anterior, es necesario probar la existencia de curvas V -densas en $X_1 \times \dots \times X_n$, si consideramos en este espacio la topología (débil) producto. Probaremos esto en el Teorema 2.2.1, mientras que en la Sección 2.2.3 analizaremos un caso concreto de este tipo de problemas.

Damos por finalizado el papel de las curvas α -densas y V -densas en los problemas de optimización tras los Capítulos 1 y 2 de esta memoria, y nos ocupamos en el Capítulo 3 de la relación de tales curvas con el concepto de compacidad, o mejor dicho, con una generalización de dicho concepto. Si (E, d) es un espacio métrico, una forma de generalizar el concepto de conjunto compacto es mediante las así llamadas *medidas de no-compacidad*, MNC, que recordaremos en la Definición 3.1.1. Como su propio nombre sugiere, y hablando de manera poco formal, tales medidas establecen, en un sentido adecuado, la distancia de un conjunto acotado dado a la clase de los compactos de (E, d) . En estas notas nos ocuparemos principalmente del caso concreto en el que $(E, d) = (X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Las curvas α -densas generan un *grado de no-densificación*, GND ϕ_d (Definición 1.1.4), que domina de forma óptima a la bien conocida MNC de Hausdorff (Definición 3.1.3) en espacios de Banach de dimensión infinita. Es de señalar que el GND ϕ_d no es una MNC. Dicho GND ϕ_d genera, a su vez, una MNC Φ , que como se probará en el Corolario 3.3.1, posee la propiedad de acotar superiormente a cualquier otra MNC y además dicha acotación es óptima en espacios de Banach de dimensión infinita para la MNC de Hausdorff. Estos resultados han sido publicados en la revista *Journal of Convex Analysis* [39], y como mostraremos en esta memoria, los usaremos para probar otros nuevos resultados sobre punto fijo. Tradicionalmente, se han probado muchos resultados (sobre todo de punto fijo) basados en las MNCs (cf. [10], [11], [14], [15]) y en esta memoria, mostraremos que se pueden establecer resultados totalmente análogos, o incluso más generales, mediante el GND ϕ_d que pese a no ser una MNC, ha resultado ser una muy buena herramienta para el estudio y análisis del concepto de compacidad. Resumiremos, de forma breve, tales resultados en esta introducción.

Si en lugar de considerar $(X, \|\cdot\|)$, dotamos a X de la topología débil, pongamos (X, σ) , también es posible definir sobre los conjuntos acotados de (X, σ) medidas de no-compacidad, como por ejemplo la bien conocida MNC de De Blasi (Definición 3.1.4). En este caso, también definiremos una MNC que notaremos por Ψ y cuya definición está basada en curvas totalmente λ -densas (Definición 3.4.2), que son una clase particular de las curvas V -densas. Quedará probado que las MNC Φ y Ψ tienen algunas similitudes, pero son esencialmente distintas: como hemos señalado antes, Φ es una MNC en $(X, \|\cdot\|)$ mientras que Ψ es una MNC en (X, σ) .

Concluimos esta memoria con el Capítulo 4. En la Sección 4.1 revisamos tres teoremas de punto fijo muy conocidos, a saber, los teoremas de Banach, Schauder y Darbo-Sadovskii. Probablemente, uno de los resultados de punto fijo más influyentes es, sin duda, el Teorema de punto fijo de Banach (Teorema 4.1.1), el cual establece la existencia de un único punto fijo para una k -contracción dada, con $0 < k < 1$ (Definición 4.1.2). Dicho teorema nos proporciona una sucesión convergente al punto fijo de la aplicación dada, mostrando incluso una cota del error cometido en cada aproximación. Mostraremos este resultado, detalladamente, en la Sección 4.1.1.

No obstante, la condición de ser una k -contracción para algún $0 < k < 1$ es bastante restrictiva para una aplicación $T : C \subset X \rightarrow C$. Así pues, tenemos el Teorema de punto fijo de Schauder (Teorema 4.1.4) el cual establece que si $T : C \subset X \rightarrow C$ es continua, con C convexo y compacto, entonces T tiene algún punto fijo. Por supuesto, la condición de continuidad es mucho más débil que la condición de ser una k -contracción, para algún $0 < k < 1$, aunque la condición de compacidad sobre C , en dimensión infinita, es una condición bastante restrictiva. Debemos decir, que el Teorema de punto fijo de Schauder no ofrece, a priori, ningún método para calcular o aproximar los puntos fijos de la aplicación T dada. Sin embargo, en el Teorema 4.1.5

mostramos una sucesión, basada en curvas α -densas, que converge a algún punto fijo de T en el caso de que la aplicación T sea no-expansiva (Definición 4.1.2). Si T sólo es continua, dicha sucesión posee una subsucesión convergente a algún punto fijo de T , y obtenemos por lo tanto el Teorema de punto fijo de Schauder, como indicamos en el Corolario 4.1.1.

Por otro lado, existe un teorema de punto fijo basado en MNCs que generaliza los teoremas de punto fijo de Banach y Schauder. Nos referimos al famoso Teorema de punto fijo de Darbo-Sadovskii (Teorema 4.1.6). Revisamos dicho teorema en la Sección 4.1.4. Además, mostraremos que una generalización del Teorema de punto fijo de Darbo-Sadovskii se puede escribir en términos del GND ϕ_d . Probaremos este resultado en el Teorema 4.1.8. Más aún, en la Sección 4.1.5 damos una versión integral del Teorema 4.1.8 y como aplicación mostraremos condiciones suficientes para que ciertas ecuaciones integrales de Volterra tengan alguna solución. Concretamente, probaremos que la siguiente ecuación integral tiene, bajo ciertas condiciones, alguna solución continua

$$x(t) = g(t, x(t)) + \int_0^{p(t)} f(t, s, x(s)) ds,$$

donde $g : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p : I \rightarrow [0, +\infty)$ y $f : I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones conocidas.

En la Sección 4.2 estudiaremos otros resultados de punto fijo, basados en el GND ϕ_d (Definición 1.1.4). Por un lado, en la Sección 4.2.1 generalizamos los conceptos de aplicación no-expansiva y k -contracción (para $0 < k < 1$), que llamaremos aplicaciones ϕ_d -no-expansivas (Definición 4.2.1) y aplicaciones ϕ_d -contractivas (Definición 4.2.2), respectivamente. Mostramos en el Teorema 4.2.1 un nuevo resultado sobre punto fijo, basado en el concepto de aplicación ϕ_d -contractiva. Por otro lado, y como aplicación de este nuevo resultado de punto fijo, en la Sección 4.2.2 probaremos en el Teorema 4.2.2 la existencia de soluciones del problema de Cauchy, planteado en espacios de Banach de dimensión infinita. Recordemos que dicho problema consiste en hallar un intervalo $[0, a] \subset [0, 1]$ y una aplicación $x : [0, a] \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ de forma que

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in [0, a], \quad x(0) = x_0,$$

donde $f : I \times X \rightarrow X$ y $x_0 \in X$ son conocidos. El Teorema 4.2.2 generaliza otros resultados, por ejemplo, un famoso teorema de Peano sobre la existencia de soluciones para el problema de Cauchy.

Finalmente, en la Sección 4.2.3, recordamos el concepto de estructura normal. Dicho concepto tiene un papel muy importante en la Teoría de Punto Fijo, ya que gracias a un célebre teorema de W. A. Kirk (Teorema 4.2.3) cualquier aplicación no-expansiva $T : C \rightarrow C$, con $C \subset X$ no vacío, convexo, débil compacto y con estructura normal, tiene algún punto fijo. Además, introducimos un concepto que hemos llamado estructura ϕ_d -normal (Definición 4.2.5), y probamos en el Ejemplo 4.2.12 que cualquier conjunto con estructura normal, en particular, tiene estructura ϕ_d -normal. No obstante, no hemos podido probar si dicho concepto generaliza el de estructura normal, por lo que dejamos planteado el Problema 1. En caso afirmativo, estaríamos ante una nueva generalización del Teorema de punto fijo de Kirk, ya que en el Corolario 4.2.2 probaremos que dicho teorema permanece válido si, en las condiciones anteriores, asumimos que C tiene estructura ϕ_d -normal en lugar de estructura normal.

Curvas α -densas y V -densas



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

1	El Concepto de Densificación	1
1.1	Densificación fuerte. Curvas α -densas	
1.2	Algunas aplicaciones de las curvas α -densas Optimización global en espacios métricos Aproximación de raíces reales de polinomios	
1.3	Densificación débil. Curvas V -densas	
1.4	Algunas aplicaciones de las curvas V -densas Optimización global en espacios de Banach Programas de Helly	
2	Optimización y Densificación	25
2.1	Optimización en los espacios L^p Introducción. El problema (PL) Los problemas $(\theta_n - PL)$ y $(\gamma_n - PL)$ Convergencia del método	
2.2	Optimización en espacios producto Planteamiento del problema (OMO) Densificación débil en el espacio producto Un problema de optimización en $\mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \times L^1$	

1. El Concepto de Densificación



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

1.1 Densificación fuerte. Curvas α -densas

En estas notas I denotará el intervalo unidad $[0, 1]$. Puesto que el concepto de curva será crucial en esta memoria, adoptaremos la siguiente definición:

Definición 1.1.1 Dado un espacio topológico (Z, \mathcal{T}) , diremos que una aplicación $\gamma : I \rightarrow (Z, \mathcal{T})$ es una curva si es continua.

En lo que sigue, (E, d) será un espacio métrico. En 1997 fue introducido [57] el concepto de curva α -densa en un conjunto acotado $B \subset (E, d)$ de la siguiente manera:

Definición 1.1.2 Sea $B \subset (E, d)$ acotado y $\alpha > 0$. Una curva $\gamma_\alpha : I \rightarrow (E, d)$ se dice que es una curva α -densa en B , o que densifica a B con densidad α , si:

1. $\gamma_\alpha(I) \subset B$.
2. Dado cualquier $x \in B$, existe $t \in I$ tal que $d(x, \gamma_\alpha(t)) \leq \alpha$.

Si para cualquier $\alpha > 0$ existe una curva α -densa en B , diremos que B es densificable.

Como se puede observar, la definición anterior es equivalente a la siguiente: dado $B \subset (E, d)$ acotado, una curva $\gamma_\alpha : I \rightarrow E$ se dice que es una curva α -densa en B , si $d_H(B, \gamma_\alpha(I)) \leq \alpha$, siendo d_H la distancia de Hausdorff (cf. [47, Chap. IV, Prob. D]). Así pues, en un espacio métrico (E, d) , el parámetro α mide cuán diferente es un conjunto acotado B de un subconjunto suyo del tipo $\gamma_\alpha(I)$ que es compacto, conexo y localmente conexo, es decir, un *continuo de Peano* (cf. [66], [73]). Nótese además, que en el caso concreto que B sea un compacto con interior no vacío si $\alpha = 0$ tenemos una *curva que llena el espacio* (cf. [66]). Así pues, podemos decir que las curvas α -densas son, desde el punto de vista de la distancia de Hausdorff, una generalización de las curvas que llenan el espacio.

■ **Ejemplo 1.1.1** Curva de los cosenos. Dado un entero $n > 1$, consideremos el hipercubo unidad $I^n := [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ (n veces) del espacio euclídeo \mathbb{R}^n . Entonces, se tiene que I^n es densificable. De hecho, dado un entero positivo m , en [26, Prop. 9.5.4, p. 144] se prueba que la aplicación

$$t \in I \mapsto \gamma_m(t) := \left(t, \frac{1}{2}(1 - \cos(m\pi t)), \dots, \frac{1}{2}(1 - \cos(m^{n-1}\pi t)) \right),$$

es una curva $\frac{\sqrt{n-1}}{m}$ -densa en I^n . En las Figuras 1.1 y 1.2 podemos ver la gráfica de algunas de estas curvas.

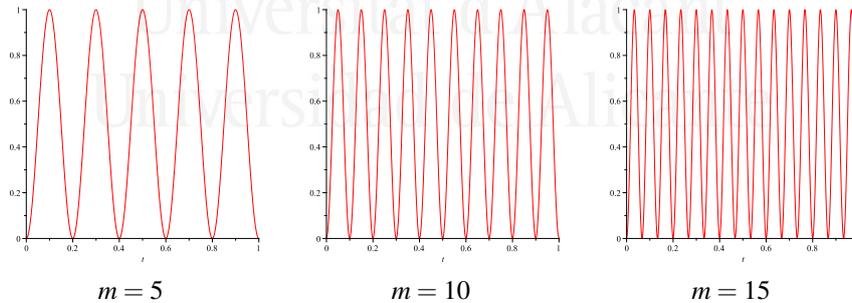


Figura 1.1: Gráfica de la curva de los cosenos γ_m para $n := 2$ y algunos valores de m

Como era de esperar, no todos los conjuntos de un espacio métrico son densificables incluso cuando éstos son conexos y compactos, como probaremos en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 1.1.2** Consideremos el siguiente conjunto:

$$B := \left\{ (x, \sin(x^{-1})) : x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \right\} \cup \left\{ (0, y) : y \in [-1, 1] \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Está claro que B es acotado, conexo y compacto, pero no es densificable: dada cualquier curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, si $\gamma(I) \subset B$, entonces $\gamma(I)$ debe estar contenida en alguna de las tres componentes conexas por caminos del conjunto B , ya que $\gamma(I)$ es un conjunto conexo por caminos. Así pues, si $0 < \alpha < 1$, no existe en B ninguna curva α -densa y por lo tanto B no es densificable.

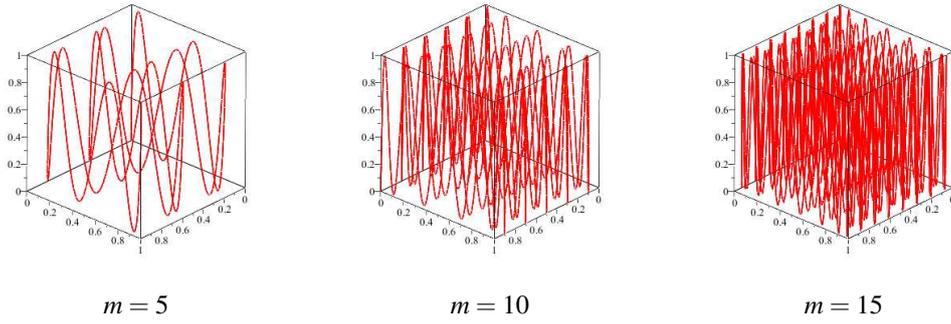


Figura 1.2: Gráfica de la curva de los cosenos γ_m para $n := 3$ y algunos valores de m

Nota 1.1.1 En [26] se prueba que cualquier hipercubo $K \subset \mathbb{R}^n$, cerrado y acotado, se puede densificar con densidad arbitrariamente pequeña $\alpha > 0$, y además, podemos tomar una curva de clase \mathcal{C}^∞ . De hecho, en la demostración de dicho resultado, se considera la siguiente modificación de la curva de los cosenos del Ejemplo 1.1.1

$$t \in I \mapsto \left(a_1 + (b_1 - a_1)t, a_2 + \frac{1}{2}(b_2 - a_2)(1 - \cos(m\pi t)), \dots, a_n + \frac{1}{2}(b_n - a_n)(1 - \cos(m^{n-1}\pi t)) \right),$$

si el hipercubo a densificar es $K := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$, con $-\infty < a_i < b_i < +\infty$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Queda claro entonces, según los ejemplos anteriores, que no todos los conjuntos acotados de un espacio métrico (E, d) son densificables. Nótese, que aunque los conjuntos de los Ejemplos 1.1.1 y 1.1.2 son ambos conexos y compactos, estas condiciones no son, por lo general, suficientes para establecer si un conjunto es o no densificable. Como probaremos en el siguiente resultado (Teorema 1.1.1), la precompacidad y la propiedad de ser densificable son conceptos equivalentes en conjuntos conexos por caminos.

En adelante, las bolas cerradas de centro $x \in E$ y radio $r > 0$ las escribiremos como $\bar{B}(x, r)$, es decir,

$$\bar{B}(x, r) := \{y \in E : d(y, x) \leq r\}.$$

Teorema 1.1.1 Sea $B \subset (E, d)$ conexo por caminos. Entonces, B es densificable si, y sólo si, es precompacto.

Demostración. Sea $\alpha > 0$ cualquiera, y supongamos que B es precompacto. Gracias a la precompacidad de B existe $\{x_1, \dots, x_m\} \subset B$ tales que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^m \bar{B}(x_i, \alpha). \quad (1.1)$$

Entonces, si $\gamma_\alpha : I \rightarrow (E, d)$ es la poligonal que une los puntos $\{x_1, \dots, x_m\}$, es claro que γ_α es una curva α -densa en B gracias a (1.1).

Por otro lado, si B es densificable, dado cualquier $\alpha > 0$ existe una curva $\gamma_\alpha : I \rightarrow (E, d)$ α -densa en B . Puesto que $\gamma_\alpha(I)$ es compacto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \gamma_\alpha(I) \subset B$ tales que

$$\gamma_\alpha(I) \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(y_i, \varepsilon), \quad (1.2)$$

y así pues, de la definición de curva α -densa (Definición 1.1.2) y de (1.2) concluimos que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(y_i, \alpha + \varepsilon).$$

Teniendo en cuenta la arbitrariedad de α y ε , se sigue la precompacidad del conjunto B .

□

En el teorema anterior hemos dado una caracterización topológica de los conjuntos densificables de un espacio métrico (E, d) . Por otro lado, en [26] se prueba una caracterización analítica de las curvas α -densas en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n usando el concepto de funciones estocásticamente independientes. Probaremos esto en las siguientes líneas.

Dado $A \subset \mathbb{R}$, no vacío, notaremos por $\text{Diam}(A)$ el diámetro de A y por Λ_1 la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Para simplificar la escritura, diremos que un subconjunto de \mathbb{R} es medible si lo es respecto a Λ_1 .

Definición 1.1.3 Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y no constantes, y sea η un número positivo tal que

$$\eta \leq \min \left\{ \text{Diam}(\varphi_i(I)) : i = 1, \dots, n \right\}.$$

Diremos que $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ son η -estocásticamente independientes, η -e.i., si dados los intervalos $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$ tales que

$$\text{Diam}(A_i \cap \varphi_i(I)) \geq \eta \quad i = 1, \dots, n,$$

se tiene que

$$\Lambda_1(\varphi_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \varphi_n^{-1}(A_n)) > 0.$$

■ **Ejemplo 1.1.3** Las funciones $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow I$ definidas como $\varphi_1(t) := t$ y $\varphi_2(t) := 1 - t$ son η -e.i. siempre que $0 < \eta \leq \frac{1}{2}$ (cf. [26, Exam. 4.3.3, p. 60]). ■

Con la definición anterior podemos generar y caracterizar las curvas α -densas (cf. [26, Th. 4.3.4 y Th. 4.3.5]):

Teorema 1.1.2 Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuas. Entonces, se tiene que:

1. Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ son η -e.i., y $K := \prod_{i=1}^n \varphi_i(I)$, entonces, la curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t) := (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ es $\eta\sqrt{n}$ -densa en K .
2. Si la curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva α -densa en el hipercubo cerrado y acotado $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, siendo

$$0 < \alpha < \frac{1}{2} \min \left\{ \text{Diam}(\varphi_i(I)) : i = 1, \dots, n \right\},$$

entonces, las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ son η -e.i. para cualquier η verificando

$$2\alpha < \eta < \min \left\{ \text{Diam}(\varphi_i(I)) : i = 1, \dots, n \right\}.$$

En lo que sigue, notaremos por \mathcal{B}_E la clase de los conjuntos no vacíos y acotados de un espacio métrico (E, d) . Como ha quedado evidenciado en el Ejemplo 1.1.2, no todos los conjuntos de \mathcal{B}_E son densificables. Por este motivo, es conveniente definir el ínfimo de los $\alpha > 0$ para los que existe una curva α -densa en un conjunto $B \in \mathcal{B}_E$ dado. Notaremos por $\Gamma_{\alpha, B}$ la clase de todas las curvas α -densas en B . Observemos que, dado cualquier $B \in \mathcal{B}_E$, siempre es $\Gamma_{\alpha, B} \neq \emptyset$ para algún $\alpha > 0$, ya que al ser B un conjunto acotado de E , fijado cualquier $x_0 \in B$, la curva $\gamma : I \rightarrow (E, d)$ dada por $\gamma(t) := x_0$, para cada $t \in I$, es una curva α -densa en B , cualquiera que sea $\alpha \geq \text{Diam}(B)$.

Definición 1.1.4 Se define el grado de no-densificación, GND, como la aplicación $\phi_d : \mathcal{B}_E \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$\phi_d(B) := \inf \left\{ \alpha > 0 : \Gamma_{\alpha, B} \neq \emptyset \right\}, \quad \forall B \in \mathcal{B}_E.$$

Por ejemplo, si B es el conjunto del Ejemplo 1.1.2 se tiene que $\phi_d(B) = 1$, mientras que $\phi_d(I^n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, según el Ejemplo 1.1.1. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.1.3 (cf. [59, Th. 12]) En un espacio de Banach X se verifica que:

$$\phi_d(B_X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ es de dimensión finita} \\ 1 & \text{si } X \text{ es de dimensión infinita} \end{cases},$$

siendo B_X la bola unidad cerrada de X .

Así pues, según el teorema anterior, si X es de dimensión finita, entonces B_X es densificable, mientras que si X es de dimensión infinita, el menor $\alpha > 0$ para los que existe una curva α -densa en B_X es igual a uno.

1.2 Algunas aplicaciones de las curvas α -densas

En esta sección mostraremos dos aplicaciones de las curvas α -densas: el papel de las curvas α -densas en los problemas de optimización global, y un método para aproximar (en caso de que existan) las raíces reales de funciones continuas de varias variables.

1.2.1 Optimización global en espacios métricos

Al igual que en secciones anteriores, (E, d) será un espacio métrico y \mathcal{B}_E será la clase de los conjuntos no vacíos y acotados de (E, d) .

Una de las principales aplicaciones de las curvas α -densas la encontramos en los problemas de optimización global (cf. [25], [26], [54], [57], [58]), ya que dichas curvas nos proporcionan un método para resolver ciertos problemas de optimización. Podemos resumir dicho método como sigue: dado un espacio métrico (E, d) , que generalmente es $E = \mathbb{R}^n$, para algún entero $n > 1$ y d la distancia euclídea, $B \in \mathcal{B}_E$, y una función $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ continua, consideremos el problema de optimización siguiente

$$(P) \quad \inf \{ f(x) : x \in B \},$$

que suponemos tiene solución, es decir, que el ínfimo de arriba es finito.

Entonces, la solución de dicho problema puede ser aproximada por la solución del siguiente problema de optimización:

$$(P)_\alpha \quad \min \{ f(\gamma_\alpha(t)) : t \in I \},$$

asumiendo que exista $\gamma_\alpha : I \rightarrow (E, d)$ una curva α -densa en B , para un $\alpha > 0$ arbitrariamente pequeño, es decir, asumiendo que B es densificable (Definición 1.1.2).

Nota 1.2.1 En adelante, cuando hagamos referencia al mínimo de una función, si no se indica otra cosa, nos referimos al mínimo global de dicha función.

Por supuesto, el problema $(P)_\alpha$ está bien definido porque I es compacto y $f \circ \gamma_\alpha$ es continua, así que gracias a un conocido teorema de Weierstrass la existencia de soluciones de $(P)_\alpha$ está garantizada. La ventaja de trabajar sobre el problema $(P)_\alpha$ es que, en este caso, estamos ante una función de una sola variable, lo cual facilita mucho los cálculos y además, gracias a la continuidad de f , se cumple que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \min \{ f(\gamma_\alpha(t)) : t \in I \} = \inf \{ f(x) : x \in B \}.$$

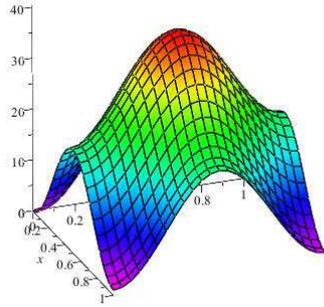
Probaremos la igualdad de arriba más adelante. Como quedará patente en los siguientes ejemplos, el método descrito arriba para aproximar la solución del problema (P) mediante las soluciones del problema $(P)_\alpha$ resulta ser un método eficiente y altamente preciso. En ambos ejemplos, los cálculos se han realizado con el software $\text{\textcircled{R}}\text{Maple}$.

■ **Ejemplo 1.2.1** Sean f y g las funciones test de Rastrigin y Ackley (cf. [50, p. 468]) definidas, respectivamente, como

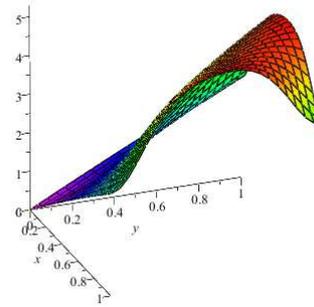
$$f(x_1, \dots, x_n) := 10n + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)),$$

$$g(x_1, \dots, x_n) := 20 + e - 20 \exp \left(-0.2 \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) - \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(2\pi x_i) \right),$$

para cada $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$. En la Figura 1.3 mostramos el gráfico de estas funciones para $n := 2$.



Superficie de Rastrigin $f(x,y)$



Superficie de Ackley $g(x,y)$

Figura 1.3: Gráficas de las superficies de Rastrigin y Ackley

Entonces, el mínimo global de ambas funciones es cero, y se alcanza en el punto $(0, 0, \dots, 0)$. En la Tabla 1.1 mostramos los resultados obtenidos para el problema

$$(P)_m \quad \text{mín} \left\{ h(\gamma_m(t)) : t \in I \right\},$$

para $h = f, g$, siendo para cada entero positivo m , γ_m la curva de los cosenos del Ejemplo 1.1.1. Hemos notado por $t_m^* \in I$ el valor de t donde la función $h(\gamma_m(t))$ alcanza su mínimo global, y por $h_m^* := h(\gamma_m(t_m^*))$, para $h = f, g$.

n	m	t_f^*	f_m^*	t_g^*	g_m^*
10	5	3.25E-12	0	4.9E-17	-5.61E-8
	15	6.25E-16	0	0	0
50	5	0	0	0	0
	10	0	0	0	0
150	5	0	0	0	0
	30	0	0	0	0

Tabla 1.1: Aproximaciones del mínimo de las funciones test de Rastrigin y Ackley mediante la curva de los cosenos del Ejemplo 1.1.1.

■ **Ejemplo 1.2.2** Consideremos la función $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) := \exp(\sin(2\pi xy) + \cos(2\pi xy))$ y el problema

$$(P) \quad \text{mín} \left\{ f(x,y) : x,y \in I \right\}.$$

Una solución del problema (P) se alcanza en el punto

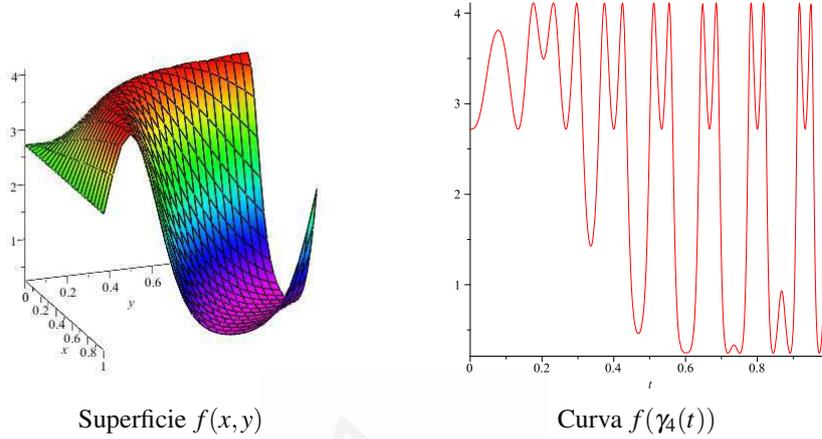
$$(x^*, y^*) \simeq (0.790569415042073009, 0.790569415042074009),$$

y además, $f(x^*, y^*) \simeq 0.243116734434214221$. Entonces, usando la curva de los cosenos γ_m del Ejemplo 1.1.1, planteamos para cada entero positivo m el problema

$$(P)_m \quad \text{mín} \left\{ f(\gamma_m(t)) : t \in I \right\},$$

y obtenemos los resultados mostrados en la Tabla 1.2. Hemos notado por $t_m^* \in I$ el punto donde la función $f(\gamma_m(t))$ alcanza un mínimo absoluto. Nótese que, para $m = 4$ es $f(\gamma_4(t_4^*)) = f(x^*, y^*)$, por lo que, efectivamente, la solución del problema (P) puede ser aproximada mediante las soluciones de los problemas $(P)_m$.

m	t_m^*	$f(\gamma_m(t_m^*))$	$f(\gamma(t^*)) - f(x^*, y^*)$
1	0.584607049780029752	0.290503855258469390	0.0473871209
2	0.833333328405301943	0.243116734434216581	0.00000000000000226
3	0.783795094850843643	0.243116734434214360	0.00000000000000014
4	0.635025085929167176	0.243116734434214221	0

Tabla 1.2: Aproximaciones del mínimo de $f(x, y)$ mediante la curva de los cosenos del Ejemplo 1.1.1Figura 1.4: Gráficas de la superficie $f(x, y)$ y de la curva $f(\gamma_4(t))$

Mostramos en la Figura 1.4 las gráficas de la superficie $f(x, y)$ y de la curva $f(\gamma_4(t))$. ■

En las siguientes líneas, acotaremos el error cometido cuando aproximamos la solución (o soluciones) de un problema de optimización global mediante curvas α -densas. En lo que sigue, $K := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ será un hiper cubo cerrado y acotado, y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Nótese que, gracias al Teorema 1.1.1, tenemos que K es densificable. Dado $\alpha > 0$, $\gamma_\alpha : I \rightarrow K$ será una curva α -densa en K que, según la Nota 1.1.1, podemos asumir que es de clase \mathcal{C}^∞ .

Definición 1.2.1 ([26, Def. 5.4.1, p. 85]) Se define el error de aproximación del mínimo global f de orden γ_α como:

$$E(f; \gamma_\alpha) := \min \{ f(\gamma_\alpha(t)) : t \in I \} - \min \{ f(x) : x \in K \}.$$

La función asociada a f de orden γ_α será la función $F_{\gamma_\alpha} : K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F_{\gamma_\alpha}(x) := \min \{ |f(x) - f(\gamma_\alpha(t))| : t \in I \}, \quad \forall x \in K.$$

De la definición anterior se deduce fácilmente que $E(f; \gamma_\alpha)$ y F_{γ_α} son no negativas. Además

$$|F_{\gamma_\alpha}(x) - F_{\gamma_\alpha}(y)| \leq |f(x) - f(y)| \quad \forall x, y \in K,$$

por lo que F_{γ_α} es una función continua.

Se puede definir una norma para F_{γ_α} de la forma siguiente (cf. [26, p. 85])

$$\|F_{\gamma_\alpha}\|_0 := \max \{ \min \{ |f(x) - f(\gamma_\alpha(t))| : t \in I \} : x \in K \},$$

y con la notación que estamos usando, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.2.1 Se cumple la siguiente desigualdad:

$$E(f; \gamma_\alpha) \leq \|F_{\gamma_\alpha}\|_0 \leq \omega(f; \alpha), \quad (1.3)$$

siendo $\omega(f; \alpha)$ el módulo de continuidad de f de orden α que, recordemos (cf. [26]), viene dado por:

$$\omega(f; \alpha) := \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : d(x, y) \leq \alpha \right\}.$$

Demostración. Sea x^* un mínimo global de f . Entonces,

$$\begin{aligned} \|F_{\gamma_\alpha}\|_0 &\geq \min \left\{ |f(x^*) - f(\gamma_\alpha(t))| : t \in I \right\} = \min \left\{ f(\gamma_\alpha(t)) : t \in I \right\} - \\ &- \min \left\{ f(x) : x \in K \right\} = E(f; \gamma_\alpha), \end{aligned}$$

y tenemos la primera desigualdad del enunciado. Ahora, dado $x \in K$, por la propia definición de F_{γ_α} se tiene que

$$F_{\gamma_\alpha}(x) \leq |f(x) - f(\gamma_\alpha(t))| \quad \forall t \in I.$$

Como γ_α es una curva α -densa en K , para cada $x \in K$ existe $t \in I$ tal que $d(x, \gamma_\alpha(t)) \leq \alpha$, y por lo tanto, usando la desigualdad de arriba y la definición del módulo de continuidad deducimos que

$$\begin{aligned} F_{\gamma_\alpha}(x) &\leq |f(x) - f(\gamma_\alpha(t_x))| \leq \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : d(x, y) \leq \alpha \right\} = \\ &= \omega(f; \alpha), \end{aligned}$$

y esto concluye la prueba del teorema. □

El teorema anterior muestra que, efectivamente, la solución del problema (P) puede ser aproximada por las soluciones de los problemas (P_α) descritos arriba. Formalmente:

Corolario 1.2.1 Con la notación que estamos usando, se verifica que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} E(f; \gamma_\alpha) = 0.$$

Nota 1.2.2 Debemos observar que si el problema (P) lo planteamos en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ de dimensión infinita puesto que, en general, los conjuntos acotados y conexos por caminos de X no son densificables ya que no son precompactos (Teorema 1.1.3), el planteamiento que acabamos de ver para aproximar dicho problema usando curvas α -densas no es válido. Necesitamos pues, establecer otro concepto de densificación en espacios de Banach de dimensión infinita: la densificación débil. De esta cuestión nos ocuparemos en la próxima sección.

Como hemos probado, el método para aproximar la solución del problema (P) consiste en componer la función objetivo f con una curva α -densa ($\alpha > 0$ pequeño), pongamos γ_α , que densifica el dominio de definición de f . Por otro lado, y aunque $f \circ \gamma_\alpha$ es una función real de una sola variable, en general, tiene una gran cantidad de minimizadores locales debido a las *oscilaciones*¹ de γ_α , lo que puede dificultar la búsqueda de algún minimizador global. Para salvar este inconveniente contamos con los denominados *operadores que preservan los optimizadores globales* y que estudiaremos a continuación. En lo que sigue, notaremos por $\mathcal{C}^*(I)$ la clase de las funciones $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas con, a lo sumo, un número finito de puntos de discontinuidad.

¹Para que γ_α pueda densificar el conjunto de definición de la función objetivo, debe oscilar mucho para densificar dicho conjunto con una densidad muy pequeña. De hecho, en la práctica, las curvas suelen ser funciones trigonométricas, como la curva de los cosenos del Ejemplo 1.1.1.

Definición 1.2.2 Dada $h \in \mathcal{C}^*(I)$, el conjunto factible de soluciones de h será el conjunto de minimizadores (locales o globales) de h , y lo notaremos por $S(h)$, es decir,

$$S(h) := \left\{ x \in I : x \text{ es un mínimo local o global de } h \right\}.$$

Un punto $\bar{x} \in S(h)$ se dice que es un minimizador propio si existe un entorno de \bar{x} , $N(\bar{x})$, tal que $h(\bar{x}) < h(x)$ para cualquier $x \in N(\bar{x})$ distinto de \bar{x}

Por otro lado, dado un número real r y $h \in \mathcal{C}^*(I)$, el conjunto de nivel r de la función h se define como

$$L_h(r) := \left\{ x \in I : h(x) \leq r \right\}.$$

Definición 1.2.3 Una aplicación $T : F \subset \mathcal{C}^*(I) \rightarrow \mathcal{C}^*(I)$ es un operador que preserve los optimizadores, O.P.O., si para cualquier $h \in \mathcal{C}^*(I)$ se verifica que:

1. $S(T(h)) \subset S(h)$.
2. Los conjuntos $S(T(h))$ y $S(h)$ tienen algún minimizador global en común.

Dada $h \in \mathcal{C}^*(I)$, ejemplos de O.P.O. son las aplicaciones $T(h) := e^h$, y $T(h) = ah + b$, con $a > 0$ y b números reales. En general, si g es estrictamente creciente, la composición $g \circ h$ es un O.P.O. (cf. [26]).

Los O.P.O. han sido estudiados en [26], incluso se prueba un resultado para construir un O.P.O. cuando F es la clase de las funciones lipschitzianas. En estas notas mostraremos un resultado, Teorema 1.2.2, probado en [54] que permite construir un O.P.O. en una bola cerrada de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, el espacio de las funciones reales definidas en I con derivada continua, considerando este espacio dotado de su norma habitual

$$\|h\|_1 := |h(0)| + \sup \left\{ |h'(x)| : x \in I \right\}.$$

En el siguiente resultado Θ es la función característica de los reales positivos (función de Heaviside).

Teorema 1.2.2 (cf. [54, Th. 3.1]) Sea $A \in \mathbb{R}$ cualquiera y $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ una función de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ biyectiva y con $\Phi' > 0$. Dado $M > 0$, consideremos los números siguientes:

$$\begin{aligned} m_1 &:= \min \{ \Phi(x) : x \in [-M+A, M+A] \}, \\ M_1 &:= \max \{ 1 + \Phi(x) : x \in [-M+A, M+A] \}, \\ D_1 &:= \max \{ \Phi'(x) : x \in [-M+A, M+A] \}, \\ D_2 &:= \max \{ (\Phi^{-1})'(w) : w \in [m_1, M_1] \}, \\ C &:= MD_1 D_2. \end{aligned}$$

Entonces, fijados $0 < \varepsilon < \min \{ C^{-1}, 1 \}$ y $x_0 \in I$, la aplicación

$$T(h^{(\varepsilon, A)}(x)) := \Phi^{-1}(\varepsilon + \Phi(h(x) - h(x_0) + A)) + \frac{1}{\varepsilon} x \Theta(h(x) - h(x_0)), \quad \forall x \in I$$

define un O.P.O. en $MB_{\mathcal{C}^1}$, siendo $B_{\mathcal{C}^1}$ la bola unidad cerrada de $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. Además:

1. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T(h^{(\varepsilon, A)}(x)) - g(x))$ es constante en $L_h(h(x_0))$.
2. Todos los minimizadores no nulos de $T(h^{(\varepsilon, A)})$ están en $L_h(h(x_0))$.

El teorema anterior nos proporciona un método para eliminar los minimizadores locales obtenidos al componer la función objetivo del problema (P) con una curva α -densa. Formalmente:

Corolario 1.2.2 (cf. [54, Cor. 4.1]) Sea $M > 0$ y $h \in MB_{\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})}$, siendo $B_{\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})}$ la bola unidad cerrada de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ tal que $S(h)$ es finito y cada minimizador de h es propio. Entonces, aplicando reiteradas veces el teorema anterior a h , obtenemos un método para hallar un minimizador global de h .

Demostración. Usamos la notación del teorema anterior. Sea $x_0 \in I$ un minimizador cualquiera de h y tomemos $A_0 := A := h(x_0)$. Notamos por ε_0 el correspondiente ε del teorema anterior y definimos la función

$$h_1(x) := T(h^{(\varepsilon_0, A_0)}(x)) := \Phi^{-1}(\varepsilon_0 + \Phi(h(x))) + \frac{1}{\varepsilon_0} x \Theta(h(x) - h(x_0)), \quad \forall x \in I.$$

Si todos los minimizadores de h_1 son iguales a x_0 , entonces $S(h_1) = \{x_0\}$, y como x_0 es un minimizador de g tendríamos el resultado deseado. En caso contrario, sea $x_1 \neq x_0$ un minimizador de la función h_1 , el cual en virtud del teorema anterior, será un minimizador global de h y cumple la desigualdad

$$h(x_1) \leq h(x_0). \quad (1.4)$$

Tomando $A_1 := A = h(x_1)$ y el correspondiente ε del teorema anterior, que notaremos por ε_1 , definimos la función

$$h_2(x) := T(h^{\varepsilon_1, A_1})(x) := \Phi^{-1}(\varepsilon_1 + \Phi(h(x))) + \frac{1}{\varepsilon_1} x \Theta(h(x) - h(x_1)), \quad \forall x \in I.$$

Si $S(h_2) = \{x_0, x_1\}$, entonces, gracias a (1.4), tenemos que x_1 es el mínimo global de h y el proceso termina. Si por el contrario, existe $x_2 \in S(h_2) \setminus \{x_0, x_1\}$, entonces, según el teorema anterior, x_2 es un minimizador de h y, además:

$$h(x_2) \leq h(x_1) \leq h(x_0). \quad (1.5)$$

Si repetimos este proceso $n + 1$ veces llegamos a la función dada por

$$h_{n+1}(x) := T(h^{\varepsilon_n, A_n})(x) := \Phi^{-1}(\varepsilon_n + \Phi(h(x))) + \frac{1}{\varepsilon_n} x \Theta(h(x) - h(x_n)), \quad \forall x \in I.$$

Si $S(h_{n+1}) = \{x_0, \dots, x_n\}$, entonces x_n es el mínimo global de h , y en caso contrario, tomando $x_{n+1} \in S(h_{n+1}) \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ tenemos que:

$$h(x_{n+1}) \leq h(x_n) \leq \dots \leq h(x_1) \leq h(x_0). \quad (1.6)$$

Finalmente, puesto que el conjunto de todos los minimizadores globales de la sucesión de funciones $(h_n)_{n \geq 1}$ está contenido en $S(h)$, la sucesión (1.6) es finita y nos proporciona un minimizador global de h . \square

Recapitulando lo expuesto en esta sección, dada una función continua $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, siendo K un hipercubo acotado y cerrado de \mathbb{R}^n , podemos aproximar la solución del problema

$$(P) \quad \text{mín} \left\{ f(x) : x \in K \right\},$$

siguiendo los pasos indicados a continuación:

1. Planteamos del problema $(P)_\alpha$: tomamos, para un $\alpha > 0$ pequeño, una curva $\gamma_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que sea α -densa en K , y reducimos la dimensión del problema (P) planteando el siguiente problema

$$(P)_\alpha \quad \text{mín} \left\{ f(\gamma_\alpha(t)) : t \in I \right\}.$$

2. Con el método dado en el Corolario 1.2.2, calculamos algún minimizador global de la función $h := f \circ \gamma_\alpha$.
3. El punto $\gamma_\alpha(t^*)$, siendo $t^* \in I$ minimizador global de h , aproxima a un minimizador global de f .
4. Según el Teorema 1.2.1, el error de la aproximación obtenida es

$$f(\gamma_\alpha(t^*)) - f(x^*) \leq \omega(f; \alpha),$$

siendo $x^* \in K$ un minimizador de f .

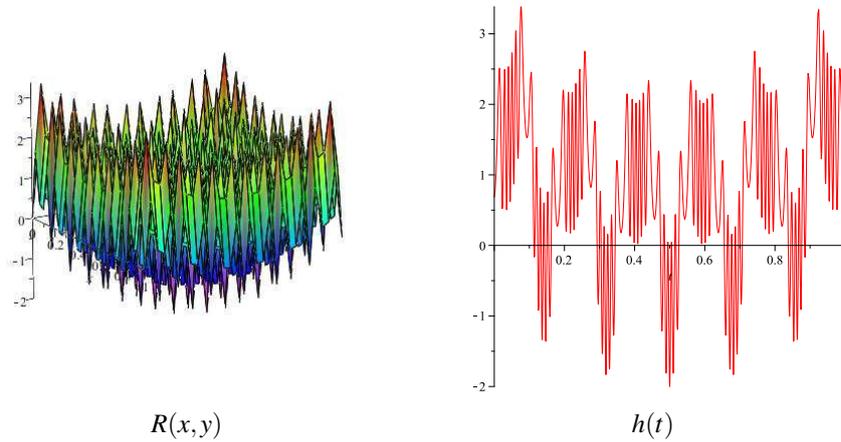
Terminamos esta sección con un ejemplo:

■ **Ejemplo 1.2.3** Sea la función de Rastrigin $R : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$R(x, y) := (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 - \cos(18\pi(2x - 1)) - \cos(18\pi(2y - 1)) \quad \forall x, y \in I,$$

y la curva $\gamma(t) := (t, \frac{1}{2}(1 - \cos 11\pi t))$, para cada $t \in I$ (es la curva del Ejemplo 1.1.1 para $m = 11$). Entonces, la función dada por $h(t) := R(\gamma(t))$, para cada $t \in I$, posee muchos extremos locales, uno de ellos en $t_0 := 0,318209$, siendo $h(t_0) \simeq -1,8337217$.

Tomando $\varepsilon_0 := 0,001$ y $\Phi(t) := e^t$, la primera función $h_1(t)$ obtenida con el método del Corolario 1.2.2 sólo tiene un mínimo global en $t_1 := 0,5$. Por lo tanto, la función $h(t)$ alcanza su mínimo global en t_1 y es $h(0,5) = -2$. En la Figura 1.5 mostramos la gráfica de la superficie $R(x, y)$ y de la función $h(t)$. \blacksquare

Figura 1.5: Gráficas de la superficie $R(x,y)$ y de la curva $h(t) := R(\gamma_{11}(t))$

1.2.2 Aproximación de raíces reales de polinomios

En este apartado $\|\cdot\|$ denotará la norma euclídea de \mathbb{R}^n . Además, usaremos la siguiente notación: dada una función $F : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, notaremos por $\mathcal{Z}(F, K)$ el conjunto (posiblemente vacío) de las raíces reales de F en K , es decir,

$$\mathcal{Z}(F, K) := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K : F(x_1, \dots, x_n) = 0 \right\}.$$

En esta sección nos ocuparemos de aproximar las raíces de polinomios de varias variables mediante curvas α -densas, cuando dichas raíces existan. Recordemos que un polinomio de n variables es una función $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma siguiente

$$P(x_1, \dots, x_n) := \sum_{0 \leq i_1 \leq v_1, \dots, 0 \leq i_n \leq v_n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

donde i_1, \dots, i_n son enteros, $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{N}$ con $v_1 + \dots + v_n := v$ y los a_{i_1, \dots, i_n} son números reales. El entero positivo v es el grado de P . El conjunto de los polinomios de n variables de grado menor o igual a v lo denotaremos por $\mathbb{P}[n, v]$.

En general, dado $P \in \mathbb{P}[n, v]$, hallar sus raíces en un conjunto K dado, es decir, hallar el conjunto $\mathcal{Z}(P, K)$ (cuando no sea vacío) es bastante difícil. En esta sección proponemos un método para aproximar dichas raíces usando curvas α -densas en K . La idea es reducir el número de variables del polinomio P a una sola, componiendo éste con una curva α -densa apropiada. El resultado clave para este propósito es el siguiente:

Teorema 1.2.3 Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto densificable, n, v, k enteros positivos con $n > 1$, $P \in \mathbb{P}[n, v]$, y para cada k , $\gamma_{\alpha_k} : I \rightarrow K$ dada por $\gamma_{\alpha_k}(t) := (\gamma_1^{(k)}(t), \dots, \gamma_n^{(k)}(t))$ una curva α_k -densa en K , con $\alpha_k \rightarrow 0$.

Entonces, se tiene que $\mathcal{Z}(P, K) \neq \emptyset$ si, y sólo si, $\mathcal{Z}(P \circ \gamma_{\alpha_k}, I) \neq \emptyset$ para algún α_k . Más aún, si $\mathcal{Z}(P, K) \neq \emptyset$ se tiene que:

$$\mathcal{Z}(P, K) = \overline{\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{Z}(P, \gamma_{\alpha_k}(I))}. \quad (1.7)$$

Demostración. Si existe $\alpha_k > 0$ tal que $\mathcal{Z}(P \circ \gamma_{\alpha_k}, I) \neq \emptyset$, entonces existe $t_0 \in I$ tal que $P(\gamma_{\alpha_k}(t_0)) = 0$, de donde se deduce que $(\gamma_1^{(k)}(t_0), \dots, \gamma_n^{(k)}(t_0)) \in \mathcal{Z}(P, K)$, y por lo tanto, $\mathcal{Z}(P, K) \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que $\mathcal{Z}(P, K) \neq \emptyset$. Dado $r := (r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{Z}(P, K)$, puesto que P es una función continua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $P(r') = 0$ para todo $r' \in \bar{B}(r, \varepsilon) \cap K$. Recordemos que $\bar{B}(r, \varepsilon)$ denota la bola cerrada centrada en r y radio ε . Así pues, tomando $0 < \alpha_k \leq \varepsilon$, puesto que γ_{α_k} es una curva α_k -densa en K , existe $t_0 \in I$ tal que $\|r - \gamma_{\alpha_k}(t_0)\| \leq \alpha_k \leq \varepsilon$, y por lo tanto, $\gamma_{\alpha_k}(t_0) \in \bar{B}(r, \varepsilon) \cap K$, de donde se deduce que $P(\gamma_{\alpha_k}(t_0)) \in \mathcal{Z}(P \circ \gamma_{\alpha_k}, I)$, es decir, $\mathcal{Z}(P \circ \gamma_{\alpha_k}, I) \neq \emptyset$.

Para probar (1.7), supongamos que $\mathcal{Z}(P, K) \neq \emptyset$. En primer lugar notemos que $\mathcal{Z}(P, K)$ es un conjunto cerrado. En efecto, dada una sucesión $(z_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{Z}(P, K)$ con $z_k \rightarrow z$, gracias a la continuidad de P se tiene que

$$\|P(z)\| = \|P(z) - P(z_k)\| \rightarrow 0,$$

y por lo tanto, $z \in \mathcal{Z}(P, K)$.

Por otro lado, para cada entero positivo k tenemos, como ya se ha probado antes, que $\mathcal{Z}(P, \gamma_{\alpha_k}(I)) \subset \mathcal{Z}(P, K)$. Así pues, tenemos la inclusión

$$\bigcup_{k \geq 1} \overline{\mathcal{Z}(P, \gamma_{\alpha_k}(I))} \subset \mathcal{Z}(P, K), \quad (1.8)$$

ya que el conjunto $\mathcal{Z}(P, K)$ es cerrado. Ahora, tomemos $z \in \mathcal{Z}(P, K)$ cualquiera y $(t_k)_{k \geq 1} \subset I$ una sucesión tal que $\|z - \gamma_{\alpha_k}(t_k)\| \leq \alpha_k$ para cada entero positivo k . La selección de dicha sucesión $(t_k)_{k \geq 1}$ es posible gracias a que cada γ_{α_k} es una curva α_k -densa en K , para cada $k \in \mathbb{N}$.

Entonces, puesto que K es precompacto por ser densificable (Teorema 1.1.1), existe una subsucesión de $(\gamma_{\alpha_k}(t_k))_{k \geq 1}$, que notaremos igual, tal que $\gamma_{\alpha_k}(t_k) \rightarrow y$ para cierto

$$y \in \bigcup_{k \geq 1} \overline{\mathcal{Z}(P, \gamma_{\alpha_k}(I))}.$$

Además, se verifica que

$$\|z - y\| \leq \|z - \gamma_{\alpha_k}(t_k)\| + \|\gamma_{\alpha_k}(t_k) - y\| \leq \alpha_k + \|\gamma_{\alpha_k}(t_k) - y\| \rightarrow 0,$$

y por lo tanto

$$z = y \in \bigcup_{k \geq 1} \overline{\mathcal{Z}(P, \gamma_{\alpha_k}(I))}. \quad (1.9)$$

De (1.8) y (1.9) se sigue la igualdad (1.7), y el teorema queda probado. \square

Nota 1.2.3 Antes de continuar, debemos notar que en la prueba del teorema anterior, de las propiedades del polinomio P , sólo hemos usado la continuidad del mismo, por lo que el resultado sería válido para cualquier función continua $F : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, no necesariamente un polinomio. El hecho de que en esta sección nos centremos en los polinomios es sólo por fijar un tipo concreto de funciones continuas, que tengan una expresión lo más sencilla posible.

El resultado anterior se puede aplicar a sistemas de ecuaciones polinómicas:

Corolario 1.2.3 Sean, para $i = 1, \dots, m$, $P_i(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{P}[n, v_i]$, donde $n > 1$ y v_1, \dots, v_m son enteros positivos, $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto densificable, y consideremos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$S := \begin{cases} P_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ P_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases},$$

Por otro lado, sea

$$P(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^m P_i^2(x_1, \dots, x_n),$$

y para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $\gamma_{\alpha_k} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva α_k -densa en K , con $\alpha_k \rightarrow 0$. Entonces, S tiene solución en K , i.e. $\bigcap_{i=1}^m \mathcal{Z}(P_i, K) \neq \emptyset$, si, y sólo si, $\mathcal{Z}(P \circ \gamma_{\alpha_k}, I) \neq \emptyset$ para algún α_k .

También podemos aproximar las raíces de funciones de varias variables que admitan un desarrollo en serie de potencias:

Corolario 1.2.4 Sea $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con K densificable, tal que admita un desarrollo de Taylor de orden m en un entorno de $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n) \in K$, es decir, existe $r > 0$ tal que

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{T}_{f,m}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^m),$$

para todo $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{a}, r) \subset K$ siendo $B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{a}, r)$ la bola abierta de centro \mathbf{a} y radio r , $\mathcal{T}_{f,m}$ el correspondiente polinomio de Taylor de grado m de f en el punto \mathbf{a} , y $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^m)$ el resto de dicho desarrollo.

Por otro lado, sea para cada $k \in \mathbb{N}$ $\gamma_{\alpha_k} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una de curva α_k densa en $B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{a}, r)$ con $\alpha_k \rightarrow 0$. Entonces, si $\mathcal{L}(\mathcal{T}_{f,m} \circ \gamma_{\alpha_k}, I) \neq \emptyset$ para algún α_k , se tiene que

$$|f(\gamma_{\alpha_k}(\rho))| \leq |o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^m)|,$$

para cualquier $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{T}_{f,m} \circ \gamma_{\alpha_k}, I)$.

Antes de continuar, es conveniente hacer un par de observaciones. Por un lado, como hemos probado en el Teorema 1.2.3, para aproximar las raíces de un polinomio $P \in \mathbb{P}[n, \nu]$, para ciertos enteros positivos $n > 1$ y ν , debemos hallar las raíces de $P \circ \gamma_{\alpha_k}$ (usamos la notación de dicho teorema), que aunque es una función de una sola variable, lo ideal sería que tuviese una expresión lo más *sencilla* posible, por ejemplo, un polinomio, ya que de esta forma los cálculos serán más rápidos y precisos. Por otro lado, y en el caso de que $P(\gamma_{\alpha_k}(t))$ sea un polinomio de una sola variable, el grado de este será, en general, muy grande (como mostraremos en la Proposición 1.2.1), y lo que obtendremos (con la ayuda de un software apropiado) serán aproximaciones de las raíces del polinomio $P(\gamma_{\alpha_k}(t))$.

Así pues, teniendo presente los comentarios del párrafo anterior, dado $P \in \mathbb{P}[n, \nu]$, para aproximar sus raíces reales en un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ densificable, lo más conveniente (al menos desde el punto de vista computacional) es que las curvas γ_{α_k} que tomemos para densificar el conjunto K sean polinomios. Como mostraremos en las siguientes líneas, tal elección es posible cuando el conjunto K es un hipercubo cerrado y acotado, es decir, un conjunto de la forma $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, con $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Recordemos la definición de los polinomios de Chebyshev (cf. [26], [37]):

Definición 1.2.4 Para cada entero positivo m , se define el m -ésimo polinomio de Chebyshev como:

$$T_m(x) := \cos(m \arccos(x)) \quad \forall x \in [-1, 1].$$

En la Figura 1.6 podemos ver algunas gráficas de estos polinomios.

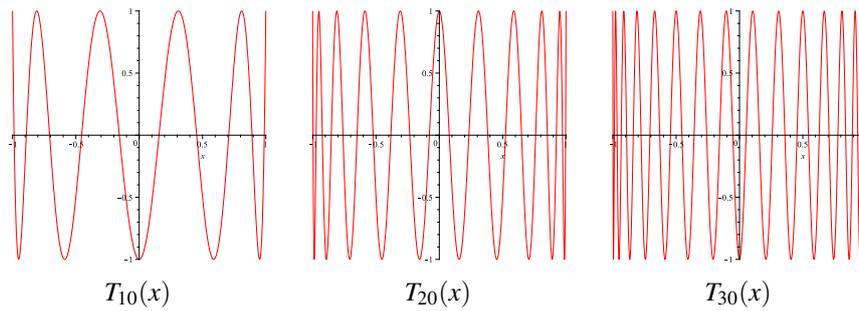


Figura 1.6: Gráfica de algunos polinomios de Chebyshev.

En [37] se puede consultar la siguiente propiedad de los polinomios de Chebyshev (aunque la prueba es una comprobación rutinaria):

$$T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \quad \forall x \in [-1, 1] \quad \forall m \geq 2,$$

siendo $T_0(x) := 1$ y $T_1(x) := x$ para cada $x \in [-1, 1]$. Así pues, tenemos que cada $T_m(x)$ es un polinomio de grado m . Estos polinomios se pueden usar para definir una curva que densifica I^n con una densidad $\alpha > 0$ arbitrariamente pequeña, como mostramos en el siguiente resultado.

Lema 1.2.1 (cf. [26, Th. 5.2.4]) Sea $\alpha > 0$ y $\gamma_m : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ la curva dada por

$$t \in I \mapsto \gamma_m(t) := \left(t, \frac{1}{2}(1 + T_m(2t - 1)), \dots, \frac{1}{2}(1 + T_{m^{n-1}}(2t - 1)) \right),$$

donde cada T_k es el polinomio de Chebyshev de grado k , y $m \in \mathbb{N}$ es mayor o igual que $4\pi\sqrt{n}/\alpha$. Entonces, γ_m es una curva α -densa en I^n , que llamaremos curva de Chebyshev.

En las Figuras 1.7 y 1.8 podemos ver la gráfica de algunas de las curvas del lema anterior.

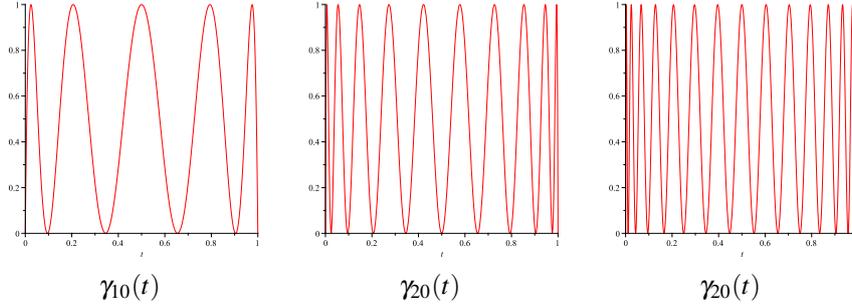


Figura 1.7: Gráfica de la curva de Chebyshev para $n := 2$ y algunos valores de m .

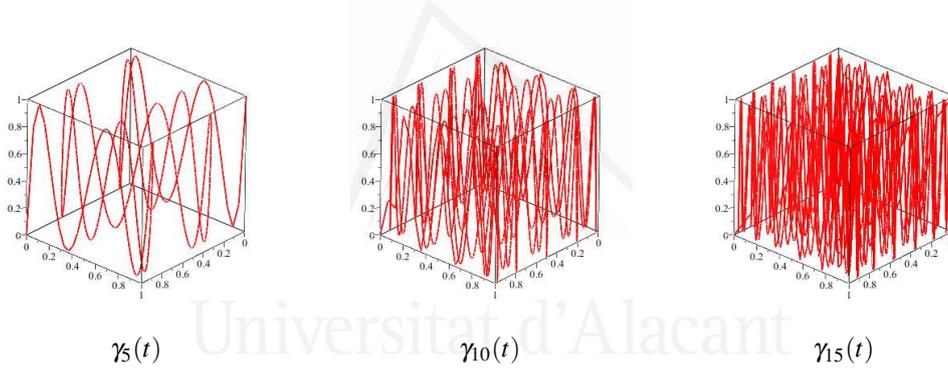


Figura 1.8: Gráfica de la curva de Chebyshev para $n := 3$ y algunos valores de m .

Con el resultado anterior, podemos establecer este otro:

Proposición 1.2.1 Sea $P(x_1, \dots, x_n) := \sum_{0 \leq i_1 \leq v_1, \dots, 0 \leq i_n \leq v_n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, donde i_1, \dots, i_n son enteros, $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{N}$ y a_{i_1, \dots, i_n} son números reales no nulos. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, si γ_m es la curva del lema anterior, $P \circ \gamma_m \in \mathbb{P}[1, \hat{v}]$, donde

$$\hat{v} := v_1 + v_2 m + \dots + v_n m^{n-1}. \quad (1.10)$$

Además, $\mathcal{Z}(P, I^n) \neq \emptyset$ si, y sólo si, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{Z}(P \circ \gamma_m, I) \neq \emptyset$, y en este caso

$$\left\{ \left(\rho, \frac{1}{2}(1 + T_m(2\rho - 1)), \dots, \frac{1}{2}(1 + T_{m^{n-1}}(2\rho - 1)) \right) : \rho \in \mathcal{Z}(P \circ \gamma_m, I) \right\} \subset \mathcal{Z}(P, I^n).$$

Demostración. De la definición del polinomio P y de los polinomios de Chebyshev (Definición 1.2.4), la prueba de (1.10) es evidente. La segunda parte del enunciado se tiene aplicando el Teorema 1.2.3. □

Terminamos esta sección con algunos ejemplos numéricos.

■ **Ejemplo 1.2.4** Consideremos el polinomio siguiente:

$$P(x, y, z) := 10x^2y^4 - 2y^3z^3 - 3xyz^2 + xz - 1 \in \mathbb{P}[3, 6]$$

m	t	$P(\gamma_m(t))$	$\gamma_m(t)$
2	0.8851459896	-2E-9	(0.8851459896, 0.5933497330, 0.0348566906)
3	0.3638045198	-2E-9	(0.9435398580, 0.5654849740, 0.3080381661)
4	0.2019369594	-1E-10	(0.4105682559, 0.8761254004, 0.0173613654)

Tabla 1.3: Aproximación de algunas raíces de $P(x, y, z)$

Componiendo el polinomio $P(x, y, z)$ con la curva del Lema 1.2.1 obtenemos los resultados de la Tabla 1.3.

■ **Ejemplo 1.2.5** En este ejemplo aproximaremos algunas raíces, en I^8 , del polinomio

$$P(x_1, \dots, x_8) := -x_1x_2^2x_3^2x_4^2x_5 - 2x_1^3x_2^2x_4x_5 - x_1^4x_3^2x_8^3 + 2x_2x_3^2x_6^3x_7^2 - x_1^2x_8^3 + 1 \in \mathbb{P}[8, 9].$$

Procediendo como en el ejemplo anterior, obtenemos los datos de la Tabla 1.4.

m	t	$P(\gamma_m(t))$
2	0.9413797996	-1.4E-8
3	0.8718067068	9.15E-7
4	0.9837813419	0.0000033977

Tabla 1.4: Aproximación de algunas raíces de $P(x_1, \dots, x_8)$

Por otro lado, en la Figura 1.9 podemos ver la gráfica de la función $P(\gamma_m(t))$ para los valores de m indicados en la Tabla 1.4

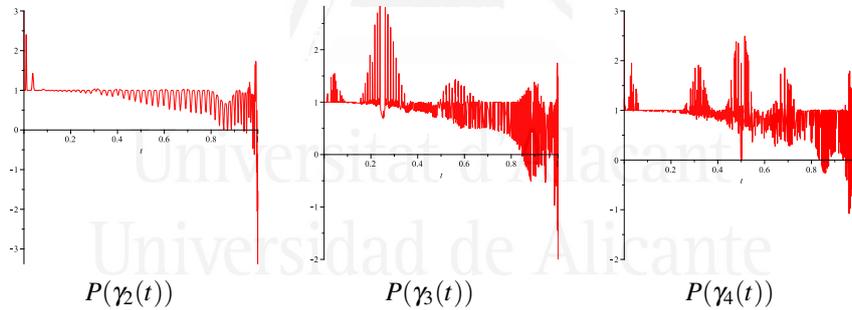


Figura 1.9: Gráfica de algunas funciones $P(\gamma_m(t))$

■ **Ejemplo 1.2.6** Para ilustrar el Corolario 1.2.3 consideremos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} P_1(x, y) := xy^2 - x^3y = 0 \\ P_2(x, y) := 2xy - xy^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Es claro que una solución del sistema anterior es $(x_0, y_0) := (1, 1)$. Sin embargo, el software $\text{\textcircled{R}}\text{Maple}$ devuelve como solución

$$(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) := (0.9999999999999997386, 0.9999999999999991818).$$

Por otro lado, definimos el polinomio

$$P(x, y) := P_1^2(x, y) + P_2^2(x, y), \quad \forall x, y \in I,$$

y hallamos las raíces de $P(t, \gamma_m(t))$ en I^2 , siendo γ_m la curva de Chebyshev del Lema 1.2.1. Para $m = 2, 3$ tenemos que $t_0 := 1$ es una raíz del polinomio $P(t, \gamma_m(t))$ y, además, $(1, \gamma_m(1)) = (x_0, y_0) = (1, 1)$. ■

■ **Ejemplo 1.2.7** Este último ejemplo lo dedicamos al Corolario 1.2.4. Sea la función $f(x, y) := xy - \frac{1}{2}e^{xy} + \sin(x+y)$ para cada $x, y \in [-1, 1]^2$. Tomamos, para cada $m \in \mathbb{N}$, la curva $\gamma_m(t) := (t, T_m(t))$, para cada $t \in [-1, 1]$. Se tiene (cf. [26, Th. 5.2.1, p. 79]) que cada γ_m es una curva α -densa en $[-1, 1]^2$ si se cumple que $m \geq \pi/\alpha$. El hecho de tomar el intervalo $[-1, 1]$ en lugar de I es irrelevante en este caso.

El polinomio de Taylor de f en $(0, 0)$, en la Tabla 1.5, lo notamos por \mathcal{T}_f . Mostramos en dicha tabla los resultados obtenidos al aproximar, mediante la familia de curvas γ_m antes descritas, algunas raíces del polinomio \mathcal{T}_f . Nótese que definimos la familia de curvas γ_m en el cuadrado $[-1, 1]^2$ en lugar de algún entorno del $(0, 0)$, aunque las raíces que hallamos sí pertenecen a un entorno del $(0, 0)$.

m	Grado de \mathcal{T}_f	$T_m(t)$	$f(\gamma_m(t))$
4	6	(-0.1696484152, 0.7763818982)	0.0001783288
4	10	(-0.1697055973, 0.7762355972)	1.6E-7
4	15	(-0.1697056492, 0.7762354644)	-10E-10
5	15	(0.08600253731, 0.4173657200)	2E-10
6	15	(0.2911074329, 0.2001479056)	0

Tabla 1.5: Aproximación de algunas raíces de $f(x, y)$ en un entorno del $(0, 0)$

1.3 Densificación débil. Curvas V -densas

En las secciones anteriores hemos introducido el concepto de curva α -densa así como el de conjunto densificable, y hemos visto algunas aplicaciones de dichas curvas. Asimismo, hasta ahora, hemos trabajado con un espacio métrico (E, d) , y lo hemos considerado, como es usual, dotado de la topología generada por la distancia d . Como quedará patente a lo largo de esta sección, en general, dicha topología no es la más adecuada para nuestros propósitos cuando X es un espacio de Banach de dimensión infinita.

En lo que sigue y salvo que se indique lo contrario, $(X, \|\cdot\|)$ denotará un espacio de Banach real de dimensión infinita, y X^* su dual topológico, recordemos

$$X^* := \{x^* : X \longrightarrow \mathbb{R} : x^* \text{ es lineal y continua}\}.$$

La bola unidad cerrada de X la notaremos por B_X . Notaremos por $\sigma := \sigma(X, X^*)$ la topología débil de X , topología que hace a X un espacio vectorial topológico localmente convexo (cf. [45], [64], [67]). Escribiremos por \mathcal{N}_0^σ la clase de los entornos básicos, débiles, convexos y equilibrados del vector nulo de X . Recordamos que dichos entornos vienen dados por

$$V := \{x_1^*, \dots, x_n^*\}^\circ := \{x \in X : |x_i^*(x)| \leq 1, i = 1, \dots, n\},$$

donde $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ y $n \in \mathbb{N}$. Salvo que se especifique otra cosa, entenderemos por entorno básico del cero cualquier V de la forma dada arriba.

Si consideramos en X la topología de la norma, hablando de manera poco formal, el *tamaño* de los entornos, es decir, de las bolas, nos lo proporciona el radio de las mismas. En el caso de la topología débil, el *tamaño* de los entornos básicos del cero nos lo proporciona el siguiente número:

Definición 1.3.1 Sea $V := \{x_1^*, \dots, x_n^*\}^\circ \in \mathcal{N}_0^\sigma$ para ciertos $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$. Se define el orden esférico de V como el número

$$\lambda_V := \sup \{ \beta > 0 : \beta B_X \subset V \}.$$

Es evidente que λ_V está bien definido, ya que la topología σ es más débil que la topología de la norma. Además, tenemos el siguiente resultado para calcular de forma efectiva el orden esférico:

Proposición 1.3.1 Dado $V := \{x_1^*, \dots, x_r^*\}^\circ \in \mathcal{N}_0^\sigma$ para ciertos $x_1^*, \dots, x_r^* \in X^*$, se tiene que:

$$\lambda_V = \frac{1}{\max\{\|x_i^*\| : i = 1, \dots, r\}}.$$

Demostración. Sea $M := \max\{\|x_i^*\| : i = 1, \dots, r\}$. Veamos, en primer lugar, que para cada $\beta \in [0, \frac{1}{M}]$ se cumple:

$$\beta B_X \subset V. \quad (1.11)$$

Para $\beta = 0$, (1.11) es trivial, así que asumimos que $\beta > 0$. Si la inclusión (1.11) no fuese cierta, existiría algún $x_0 \in B_X$ tal que

$$|x_j^*(x_0)| > \frac{1}{\beta} \geq M \geq \|x_j^*\|, \quad (1.12)$$

para algún $1 \leq j \leq r$. Entonces, tenemos

$$|x_j^*(x_0)| \leq \|x_j^*\| \|x_0\| \leq \|x_j^*\|,$$

que es contradictorio con (1.12), y en consecuencia, se verifica (1.12). Así pues, por la propia definición de orden esférico:

$$\lambda_V \geq \frac{1}{M}. \quad (1.13)$$

Si fuese $\lambda_V > \frac{1}{M}$, existiría $\beta > 0$ tal que $\lambda_V > \beta > \frac{1}{M}$ y, además, $\beta B_X \subset V$. Entonces, tenemos que

$$|x_i^*(x)| \leq \frac{1}{\beta} < M \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad \forall x \in B_X, \quad (1.14)$$

y en concreto, si $1 \leq k \leq r$ es tal que $M = \|x_k^*\|$, tenemos que

$$|x_k^*(x)| \leq \frac{1}{\beta} < \|x_k^*\| \quad \forall x \in B_X. \quad (1.15)$$

Por otro lado, por la propia definición² de la norma de X^* , para cada entero positivo n existe $x_n \in B_X$ tal que

$$\|x_k^*\| - |x_k^*(x_n)| < \frac{1}{n}, \quad (1.16)$$

y por lo tanto, según (1.15) y (1.16) debe ser

$$|x_k^*(x_n)| \leq \frac{1}{\beta} < |x_k^*(x_n)| + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde se deduce, haciendo $n \rightarrow \infty$ en la desigualdad de arriba, la siguiente contradicción

$$\lim_n |x_k^*(x_n)| = \|x_k^*\| \leq \frac{1}{\beta} < \|x_k^*\|.$$

Así pues, tenemos que (1.13) es una igualdad y esto termina la prueba. □

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es la siguiente:

Corolario 1.3.1 Sea $V := \lambda \{x^*\}^\circ$ para ciertos $\lambda > 0$ y $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$. Entonces, el orden esférico de V es λ .

A continuación daremos una definición que será crucial en estas notas: la de curva V -densa. Hablando de manera informal, podríamos decir que en un espacio de Banach de dimensión infinita, dotado de la topología débil, las curvas V -densas son muy parecidas a las curvas α -densas en espacios métricos, ya estudiadas en secciones anteriores. No obstante, y como se probará más adelante, estos dos tipos de curvas son esencialmente distintas (véase el Teorema 1.3.2).

²Se recuerda que dado $x^* \in X^*$, es $\|x^*\| := \sup\{|x^*(x)| : x \in B_X\}$

Definición 1.3.2 Sea $B \subset X$ acotado y $V \in \mathcal{N}_0^\sigma$. Diremos que una curva $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ es una curva V -densa en B si

1. $\gamma(I) \subset B$.
2. Para todo $x \in B$, existe $t \in I$ tal que $x - \gamma(t) \in V$.

Si para cualquier $V \in \mathcal{N}_0^\sigma$ existe una curva V -densa en B , diremos que B es débilmente densificable, o que B es σ -densificable.

Si X es de dimensión finita, la definición anterior es la misma que la definición de curva α -densa (Definición 1.1.2), ya que en dimensión finita la topología generada por la norma (topología fuerte) y la débil coinciden.

■ **Ejemplo 1.3.1** Sea L^1 el espacio de Banach de las funciones $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de valor absoluto Lebesgue integrable, con su norma habitual

$$\|f\| := \int_0^1 |f(x)| dx, \quad \forall f \in L^1.$$

Sea L^∞ el espacio de Banach de las funciones $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ esencialmente acotadas con la norma del supremo esencial,

$$\|h\|_\infty := \sup \left\{ |h(x)| : \text{para casi todo } x \in I \right\} \quad \forall h \in L^\infty.$$

Es un hecho bien conocido que L^∞ es isométricamente isomorfo al dual topológico de L^1 (cf. [19]). De hecho, dada $h \in L^\infty$, tal isomorfismo viene dado por:

$$h(f) := \int_0^1 h(x)f(x) dx, \quad \forall f \in L^1.$$

Por otro lado, para cada entero positivo n , sea r_n la correspondiente función de Rademacher, que recordemos (cf. [6], [23]) viene dada por

$$r_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) \quad k \text{ par} \\ 0 & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \quad k = 1, \dots, 2^n \\ 1 & \text{si } x \in \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) \quad k \text{ impar} \end{cases}$$

En la Figura 1.10 podemos ver la gráfica de algunas de estas funciones.

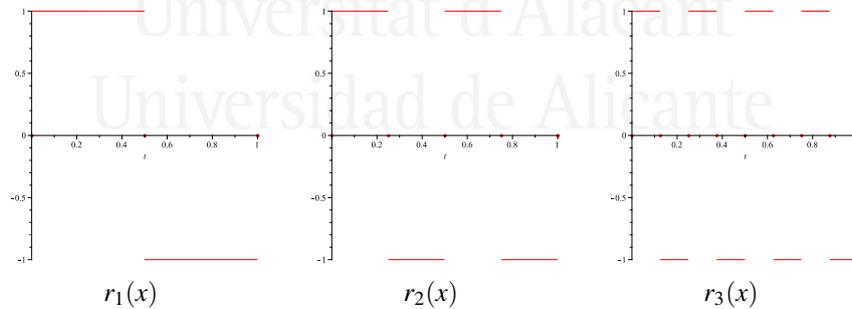


Figura 1.10: Gráfica de algunas funciones de Rademacher

Las funciones de Rademacher verifican (cf. [6], [23]) que $\|r_n\| = 1$ para cada n , $\int_0^1 r_n(x)r_m(x) dx = 0$ si $n \neq m$, y, además, $(r_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión débilmente nula: dada $h \in L^\infty$, se tiene que

$$\lim_n \left| \int_0^1 h(x)r_n(x) dx \right| = 0. \quad (1.17)$$

Definamos ahora $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ como

$$t \in I \mapsto \gamma(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0 \\ n(n+1) \left(\frac{1}{n} - t\right) r_{n+1}(x) + n(n+1) \left(t - \frac{1}{n+1}\right) r_n(x), \\ \text{si } t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \quad \text{para algún entero positivo } n \end{cases}$$

para cada $x \in I$. Claramente $\gamma(I) \subset B_{L^1}$, y, además, γ es continua para cada $t \in (0, 1]$, tanto si consideramos a L^1 con la topología de la norma como si lo dotamos de la topología débil, ya que para dichos valores de t la aplicación γ es una poligonal que une las funciones r_n y r_{n+1} . Ahora bien, como probaremos a continuación, γ no es norma continua en $t = 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\gamma_t\| = \lim_n \|\gamma_{\frac{1}{n}}\| = \lim_n \|r_n\| = 1.$$

Por otro lado, gracias a (1.17), se tiene que γ sí es σ -continua en $t = 0$: dada cualquier $h \in L^\infty$, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \int_0^1 h(x) \gamma_t(x) dx \right| = \lim_n \left| \int_0^1 h(x) \gamma_{\frac{1}{n}}(x) dx \right| = \lim_n \left| \int_0^1 h(x) r_n(x) dx \right| = 0.$$

y así pues, tenemos que γ es una curva en (X, σ) pero no en $(X, \|\cdot\|)$.

Finalmente, fijada $h \in L^\infty$ (no idénticamente nula), se tiene que γ es una curva V -densa en (B_{L^1}, σ) , siendo $V := \|h\|_\infty \{h\}^\circ$. En efecto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, según (1.17) existe un entero positivo m tal que

$$\left| \int_0^1 h(x) r_n(x) dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m. \quad (1.18)$$

Dada $f \in B_{L^1}$, para cualquier $n \geq m$ y teniendo presente (1.18) y la desigualdad de Hölder, se verifica que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 h(x) (f(x) - \gamma_{\frac{1}{n}}(x)) dx \right| &\leq \left| \int_0^1 h(x) f(x) dx \right| + \left| \int_0^1 h(x) r_n(x) dx \right| \leq \\ &\leq \|h\|_\infty \|f\| + \varepsilon \leq \|h\|_\infty + \varepsilon, \end{aligned}$$

y de la arbitrariedad de ε se sigue que γ es una curva V -densa en B_{L^1} . ■

Como en el caso de las curvas α -densas (Teorema 1.1.1), vamos a dar una condición necesaria y suficiente para que un conjunto $B \subset X$, conexo por caminos, sea σ -densificable:

Teorema 1.3.1 Sea $B \subset X$ un conjunto conexo por caminos. Entonces, B es σ -densificable si, y sólo si, es acotado.

Demostración. Sea $V \in \mathcal{A}_0^\sigma$ cualquiera, y supongamos que B es acotado. Puesto que B es acotado tenemos que B es σ -precompacto (cf. [67, Cor. 2, p. 150]), así pues existe $\{x_1, \dots, x_r\} \subset B$ tal que

$$B \subset \{x_1, \dots, x_r\} + V. \quad (1.19)$$

Entonces, tomando una curva $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ uniendo los vectores $\{x_1, \dots, x_r\}$ (es posible definir tal curva puesto que B es conexo por caminos), se tiene que γ es una curva V -densa en B gracias a (1.19).

Supongamos ahora que B es σ -densificable y sea $V \in \mathcal{A}_0^\sigma$ cualquiera. Tomemos $U \in \mathcal{A}_0^\sigma$ tal que $U + U \subset V$. Esta elección de U es posible puesto que la suma es una aplicación continua en cualquier espacio vectorial topológico.

Sea $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ una curva U -densa en B cuya existencia está garantizada por ser B un conjunto σ -densificable. Entonces, tenemos que

$$B \subset \gamma(I) + U. \quad (1.20)$$

y puesto que $\gamma(I)$ es σ -compacto, existe $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \gamma(I)$ tal que

$$\gamma(I) \subset \{y_1, \dots, y_n\} + U, \quad (1.21)$$

y de (1.20), (1.21) y la elección de U concluimos que

$$B \subset \{y_1, \dots, y_n\} + U + U \subset \{y_1, \dots, y_n\} + V,$$

y, por lo tanto, B es σ -precompacto y en consecuencia acotado (cf. [67]). □

Entonces, según el teorema anterior, en dimensión infinita B_X es densificable respecto a la topología débil, igual que en dimensión finita lo es respecto a la topología de la norma (Teorema 1.1.1). Ahora bien, existe una diferencia esencial entre la densificación fuerte y la densificación débil de un conjunto dado, a saber: si γ es una curva α -densa en un cierto conjunto $K \subset X$ para algún $\alpha > 0$, también será α' -densa para cualquier $\alpha' > \alpha$, esto es evidente a partir de la definición de curva α -densa (Definición 1.1.2). Pero si γ es una curva V -densa en K para un cierto $V \in \mathcal{N}_0^\sigma$ de orden esférico $0 < \lambda_V < 1$, existe $V' \in \mathcal{N}_0^\sigma$ de orden esférico $\lambda_{V'} < \lambda_V < 1$ para el cual γ no es una curva V' -densa.

Teorema 1.3.2 Si X no es reflexivo, dada una curva $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ cualquiera con $\gamma(I) \subset B_X$, existe $\lambda_0 \in (0, 1)$ tal que para cualquier $\lambda \in (0, 1 - \lambda_0)$ y $V_\lambda \in \mathcal{N}_0^\sigma$ de orden esférico λ , γ no es una curva V_λ -densa en B_X .

Demostración. Sea $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ una curva cualquiera con $\gamma(I) \subset B_X$. Observemos que $\gamma(I) \neq B_X$ puesto que X no es reflexivo. Gracias a un conocido teorema de James (cf. [36]), como X no es reflexivo existe $x^* \in X^*$ que no alcanza su supremo en B_X , esto es,

$$\|x^*\| > |x^*(x)| \quad \forall x \in B_X. \quad (1.22)$$

Por otro lado, puesto que $\gamma(I)$ es σ -compacto existe $t^* \in I$ tal que

$$|x^*(\gamma(t^*))| = \max \{ |x^*(\gamma(t))| : t \in I \}. \quad (1.23)$$

Según (1.22) tenemos que $\|x^*\| > |x^*(\gamma(t^*))|$, así que

$$\lambda_0 := \frac{|x^*(\gamma(t^*))|}{\|x^*\|} \in (0, 1).$$

Sea $\lambda \in (0, 1 - \lambda_0)$ cualquiera, y $g := x^*/\|x^*\|$. Según el Corolario 1.3.1, el orden esférico de $V_\lambda := \lambda \{g\}^\circ$ es λ . Vamos a ver que γ no es V_λ -densa en B_X . En caso contrario tendríamos que:

$$B_X \subset \gamma(I) + V_\lambda. \quad (1.24)$$

Entonces, tomando

$$0 < \varepsilon < \frac{(1 - \lambda)\|x^*\| - |x^*(\gamma(t^*))|}{\lambda},$$

y teniendo en cuenta la definición de $\|x^*\|$, existe $x_0 \in B_X$ tal que

$$\|x^*\| - |x^*(x_0)| \leq \varepsilon \lambda. \quad (1.25)$$

Así que, gracias a (1.24), existe $t_0 \in I$ tal que $x_0 - \gamma(t_0) \in V_\lambda$, y por lo tanto

$$|x^*(x_0) - x^*(\gamma(t_0))| \leq \lambda \|x^*\|.$$

Teniendo en cuenta esta desigualdad junto con (1.23) y (1.25) llegamos a que

$$\|x^*\| - \lambda \varepsilon \leq |x^*(x_0)| \leq |x^*(x_0) - x^*(\gamma(t_0))| + |x^*(\gamma(t_0))| \leq \lambda \|x^*\| + |x^*(\gamma(t^*))|,$$

y en consecuencia,

$$\frac{(1 - \lambda)\|x^*\| - |x^*(\gamma(t^*))|}{\lambda} \leq \varepsilon,$$

que es contradictorio con la elección de ε y por lo tanto el teorema queda probado. □

Como ocurre en el caso de dimensión finita con la densificación fuerte, no todo conjunto de \mathcal{B}_X es débilmente densificable: sean $x, y \in X$, con $x \neq y$, y $V \in \mathcal{N}_0^\sigma$ tal que $x - y \notin V$. Entonces, si γ es una curva cualquiera en $B := \{x, y\}$, debe ser $\gamma(t) = x$ o bien $\gamma(t) = y$ para todo $t \in I$, y por lo tanto, γ no puede ser una curva V -densa en B . Así pues, al igual que en el caso de las curvas α -densas (Definición 1.1.4), no todo conjunto acotado de X es σ -densificable. Por este motivo, es conveniente definir el ínfimo de los $\lambda_V > 0$ para los que existe una curva V -densa, $V \in \mathcal{N}_0^\sigma$ de orden esférico λ_V , en un conjunto $B \in \mathcal{B}_X$ dado. Notaremos por $\Gamma_{\lambda_V, B}$ la familia de todas las curvas V -densas en B con $V \in \mathcal{N}_0^\sigma$ de orden esférico λ_V .

Definición 1.3.3 Se define el grado de no-densificación débil, σ -GND, como la aplicación $\phi_\sigma : \mathcal{B}_X \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$\phi_\sigma(B) := \inf \left\{ \lambda_V > 0 : \Gamma_{\lambda_V, B} \neq \emptyset \right\}.$$

para cada $B \in \mathcal{B}_X$.

Nótese que dado cualquier $B \in \mathcal{B}_X$ siempre es $\Gamma_{\lambda_V, B} \neq \emptyset$ para algún $\lambda_V > 0$: al ser B un conjunto acotado de X , fijado cualquier $x_0 \in B$, la curva $\gamma : I \rightarrow (X, \sigma)$ dada por $\gamma(t) := x_0$ para cada $t \in I$ es una curva λ_V -densa en B cualquiera que sea $\lambda_V \geq \text{Diam}(B)$.

El Teorema 1.3.1 nos proporciona el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo 1.3.2** Sea B_X la bola unidad cerrada de X . Entonces, $\phi_\sigma(B_X) = 0$. ■

1.4 Algunas aplicaciones de las curvas V -densas

En las siguientes secciones estudiaremos dos aplicaciones de las curvas V -densas. Por un lado, en la Sección 1.4.1 mostraremos un método para aproximar las soluciones de un determinado problema de optimización en dimensión infinita usando curvas V -densas.

Por otro lado, en la Sección 1.4.2 estudiaremos un determinado programa, que llamaremos *programa de Helly*, compuesto por un sistema de ecuaciones lineales con una restricción no lineal. En este caso, mostraremos un método para aproximar las soluciones de dicho programa usando una combinación adecuada de curvas V -densas y curvas α -densas.

1.4.1 Optimización global en espacios de Banach

Como en el caso de la densificación fuerte (esto es, cuando consideramos en X la topología de la norma), una de las principales aplicaciones de la densificación débil en espacios de dimensión infinita la encontramos en los problemas de optimización global (cf. [56]). Probaremos esto en las siguientes líneas.

Dada $f : B \subset (X, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua, consideramos el problema de optimización siguiente

$$(P) \quad \bar{f} := \inf \left\{ f(x) : x \in B \right\}.$$

Nota 1.4.1 Puesto que si f es lineal y continua, se sigue que f es acotada en conjuntos acotados y por lo tanto, el ínfimo de arriba es finito. En otras palabras, el problema (P) está bien planteado.

Si B es σ -densificable (Definición 1.3.2), las soluciones del problema (P) se pueden aproximar mediante las soluciones del problema

$$(P)_\sigma \quad \min \left\{ f(\gamma_V(t)) : t \in I \right\}.$$

siendo $\gamma_V : I \rightarrow (X, \sigma)$ una curva V -densa en B para un $V \in \mathcal{A}_0^\sigma$ adecuado, de orden esférico pequeño, que luego definiremos. Nótese que el problema $(P)_\sigma$ está bien planteado ya que I es compacto y la función $f \circ \gamma_V$ es continua. Puesto que $f \in X^*$, para cada entero positivo n tenemos que:

$$V_n := \frac{1}{n} \{f\}^\circ \in \mathcal{A}_0^\sigma.$$

Ahora bien, como B es σ -densificable, para cada n existe una curva $\gamma_n : I \rightarrow (X, \sigma)$ que es V_n -densa en B , es decir,

$$B \subset \gamma_n(I) + V_n. \tag{1.26}$$

Puesto que $\gamma_n(I)$ es σ -compacto para cada entero positivo n , se tiene que

$$\exists \eta_n := \min \left\{ f(y) : y \in \gamma_n(I) \right\} < +\infty.$$

y es claro que $\eta_n \geq \bar{f}$ para cada n . Vamos a probar que

$$\bar{f} = \lim_n \eta_n.$$

Gracias a las propiedades del ínfimo, para cada entero positivo n existe $x_n \in B$ tal que

$$f(x_n) \leq \bar{f} + \frac{1}{n}.$$

Por otro lado, teniendo presente (1.26), existen $y_n \in \gamma_n(I)$ y $v_n \in V_n$ tales que $x_n = y_n + v_n$, así que:

$$\eta_n \leq f(y_n) = f(x_n) - f(v_n) \leq \bar{f} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \bar{f} + \frac{2}{n}.$$

Por lo tanto $\eta_n - \frac{2}{n} \leq \bar{f} \leq \eta_n$ para cada entero positivo n , y como para cualquier n se tiene que $\gamma_n(I) \subset B$, debe ser $\lim_n \eta_n = \bar{f}$.

Terminamos esta sección con un ejemplo estudiado con detalle en [56], en el que aplicaremos el método que hemos descrito arriba.

■ **Ejemplo 1.4.1** Sea $(L^1, \|\cdot\|)$ el espacio de las funciones de valor absoluto Lebesgue integrables (Ejemplo 1.3.1).

En Estadística, una función $f \in L^1$ se dice que es una función de densidad si $f \geq 0$ y, además, $\int_0^1 f(x)dx = 1$. El conjunto de las funciones de densidad lo notaremos por \mathcal{D} , es decir

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in L^1 : f \geq 0, \int_0^1 f(x)dx = 1 \right\}.$$

El tiempo de vida, pongamos θ , de cierto componente electrónico es, desde el punto de vista matemático, una variable aleatoria definida sobre el intervalo I . Sea $\varphi(\theta, a)$, para cierto $a \in (0, 1)$, una función continua y positiva definida sobre $I \times (0, 1)$ que se anula en la diagonal $\theta = a$. El problema que se plantea en [56] es determinar si existe $\bar{f} \in \mathcal{D}$ que minimice la esperanza de vida del componente electrónico dado. Esto es, si fijado $a \in (0, 1)$ existe $\bar{f} \in \mathcal{D}$ solución para el problema siguiente:

$$(P) \quad \text{mín} \left\{ \int_0^1 f(\theta)\varphi(\theta, a)d\theta : f \in \mathcal{D} \right\}.$$

Este problema no tiene solución: supongamos que existe una función $\bar{f} \in \mathcal{D}$ solución de (P). Para cada $n > \frac{1}{1-a}$ definamos la sucesión

$$f_n(\theta) := \begin{cases} n & \text{para } \theta \in [a, a + \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \forall \theta \in I.$$

Es claro que $f_n \in \mathcal{D}$ para cada entero $n > \frac{1}{1-a}$. Así pues, teniendo en cuenta que \bar{f} es solución del problema (P) y el teorema de la media integral, debe ser:

$$\int_0^1 \bar{f}(\theta)\varphi(\theta, a)d\theta \leq \int_0^1 f_n(\theta)\varphi(\theta, a)d\theta = n \int_a^{a+\frac{1}{n}} \varphi(\theta, a)d\theta = \varphi(\theta_n, a),$$

para algún $\theta_n \in [a, a + \frac{1}{n}]$. Y por lo tanto, haciendo $n \rightarrow \infty$, tenemos que $\bar{f} = 0$ (ya que $\varphi(\theta_n, a) \rightarrow 0$) y esto no es posible puesto que estamos asumiendo que $\bar{f} \in \mathcal{D}$.

Por otro lado, es claro que el problema

$$(P)_\sigma \quad \bar{f}_0 := \text{ínf} \left\{ \int_0^1 f(\theta)\varphi(\theta, a)d\theta : f \in \mathcal{D} \right\}$$

está bien planteado. Para aproximar, con error controlado, el valor de \bar{f}_0 basta aplicar el método anteriormente descrito si definimos para cada entero positivo n

$$V_n := \frac{1}{n} \{\Phi\}^\circ \in \mathcal{N}_0^\sigma,$$

donde $\Phi \in L^\infty$ viene dada por $\Phi(f) := \int_0^1 f(\theta)\varphi(\theta, a)d\theta$, para cada $f \in L^1$. ■

1.4.2 Programas de Helly

Un teorema muy conocido en Análisis Funcional sobre la existencia de soluciones, en una cierta bola cerrada, de ecuaciones lineales en un espacio de Banach es el teorema de Helly (cf. [34, Teorema. 1.1.2, p. 3]). Dicho teorema establece una condición suficiente para que tal sistema de ecuaciones tenga solución, pero, a priori, dicho teorema no establece ningún método para calcular, o aproximar, dichas soluciones. En esta sección, usando técnicas de densificación, mostraremos un método (Teorema 1.4.2) para aproximar, con error controlado, las soluciones de sistemas lineales que verifican el teorema de Helly.

Nota 1.4.2 Aunque siempre hablaremos de soluciones, en plural, podría ocurrir que los problemas aquí estudiados tuviesen una única solución. El hecho de usar el plural es para generalizar, siendo irrelevante para nuestros propósitos el número de soluciones de tales problemas.

Empezamos recordando el bien conocido teorema de Helly antes mencionado:

Teorema 1.4.1 — Teorema de Helly. (cf. [34, Th. 1.1.2, p. 3]) Sean $M > 0$, $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1. $\forall \varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in X$ con $\|x_\varepsilon\| \leq M + \varepsilon$ tal que $x_i^*(x_\varepsilon) = c_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.
2. Cualesquiera que sean los números $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i c_i \right| \leq M \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i^* \right\|.$$

Fijados $M > 0$, $x_i^* \in X^*$, y $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, n$, consideremos el sistema de ecuaciones lineales, junto a una restricción no lineal, siguiente:

$$S_{M,\varepsilon} := \begin{cases} x_i^*(x) = c_i \\ \text{sujeto a } x \in (M + \varepsilon)B_X \end{cases},$$

para cada $\varepsilon > 0$, siendo B_X la bola unidad cerrada de X .

Definición 1.4.1 Si fijado $M > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que el programa $S_{M,\varepsilon}$ cumple las condiciones del teorema de Helly, diremos que $S_{M,\varepsilon}$ es un programa de Helly.

En lo que sigue, asumimos que $x_i^* \in X^*$ son linealmente independientes, para $i = 1, \dots, n$, y escribiremos $S_{M,\varepsilon}$ el correspondiente programa de Helly. La norma de \mathbb{R}^n la notaremos por $\|\cdot\|$, y por el contexto no habrá confusión con la norma de X .

Teorema 1.4.2 Sea $S_{M,\varepsilon}$ un programa de Helly, y $x_\varepsilon \in (M + \varepsilon)B_X$ una solución del mismo. Entonces, para cada $\alpha > 0$ existe una curva $\gamma_\alpha : I \rightarrow (X, \sigma)$ tal que $\gamma_\alpha(I) \subset (M + \varepsilon)B_X$ y

$$|x_i^*(x_\varepsilon) - x_i^*(\gamma_\alpha(t))| \leq \alpha \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

para cierto $t \in I$.

Demostración. Para cada $\alpha > 0$ definimos

$$V_\alpha := \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \{x_1^*\}^\circ \cap \dots \cap \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \{x_n^*\}^\circ \in \mathcal{N}_0^\sigma.$$

Según el Teorema 1.3.1, existe $\gamma_\alpha : I \rightarrow (X, \sigma)$ tal que:

$$(M + \varepsilon)B_X \subset \gamma_\alpha(I) + V_\alpha. \quad (1.27)$$

Definamos la aplicación lineal $T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$T(x) := (x_1^*(x), \dots, x_n^*(x)) \quad \forall x \in X.$$

En la prueba del Teorema de Helly (cf. [34, Teorema. 1.1.2, p. 3]) se demuestra que T es sobreyectiva y que $c := (c_1, \dots, c_n) = (x_1^*(x_\varepsilon), \dots, x_n^*(x_\varepsilon)) \in (M + \varepsilon)T(B_X)$.

Por otro lado, consideremos la curva $\omega_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\omega_\alpha(t) := T(\gamma_\alpha(t))$, para cada $t \in I$. Es claro que ω es una curva y que $\omega_\alpha(I) \subset (M + \varepsilon)T(B_X)$. Ahora, dado cualquier $P \in (M + \varepsilon)T(B_X)$, pongamos $P := (x_1^*(x_0), \dots, x_n^*(x_0))$ para cierto $x_0 \in (M + \varepsilon)B_X$, tenemos que

$$\|P - \omega_\alpha(t_0)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^*(x_0) - x_i^*(\gamma_\alpha(t_0)))^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{\alpha^2}{n}} = \alpha,$$

siendo $t_0 \in I$ tal que $|x_i^*(x_0) - x_i^*(\gamma_\alpha(t_0))| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$, cuya existencia está garantizada gracias a (1.27). Así pues, tenemos que ω_α es una curva α -densa en $(M + \varepsilon)T(B_X)$.

Puesto que $(c_1, \dots, c_n) \in (M + \varepsilon)T(B_X)$, y ω_α es una curva α -densa en $(M + \varepsilon)T(B_X)$, existe $t_c \in I$ tal que

$$\|c - \omega_\alpha(t_c)\| \leq \alpha. \quad (1.28)$$

Entonces, dado cualquier $t \in I$ verificando (1.28), si escribimos $\omega_\alpha(t) := (\xi_1, \dots, \xi_n)$, debe ser, para cada $i = 1, \dots, n$:

$$(c_i - \xi_i)^2 = (x_i^*(x_\varepsilon) - x_i^*(\gamma_\alpha(t)))^2 \leq \alpha^2,$$

de donde se deduce que

$$|x_i^*(x_\varepsilon) - x_i^*(\gamma_\alpha(t))| = |c_i - \xi_i| \leq \alpha \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n,$$

y el teorema queda probado. □

Para terminar este capítulo, a continuación describiremos el método que se obtiene del teorema anterior para aproximar las soluciones de un programa de Helly.

Dado un programa de Helly $S_{M,\varepsilon}$, el Teorema de Helly (Teorema 1.4.1) garantiza la existencia de alguna solución del mismo en la bola $(M + \varepsilon)B_X$. El teorema anterior nos proporciona un método para aproximar, con error controlado, las soluciones de estos sistemas: fijado $\alpha > 0$, y construida la curva ω_α de la prueba del teorema anterior, se procede de la forma siguiente:

1. Tomamos una partición apropiada de I . Puesto que ω_α es continua en I , será uniformemente continua, así que existe $\delta > 0$ tal que $\|\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(t')\| \leq \alpha$ siempre que $|t - t'| \leq \delta$. Entonces, la partición de I será $\{t_i := \frac{i}{m} : i = 0, \dots, m\}$, siendo m el menor entero positivo tal que $\frac{1}{m} \leq \delta$. Así pues, $|t - t'| \leq \delta$ siempre que $t, t' \in [t_{i-1}, t_i]$ para algún $1 \leq i \leq m$.
2. Ahora, basta computar $\|c - \omega_\alpha(\bar{t}_i)\|$, siendo \bar{t}_i el punto medio de t_{i-1}, t_i para $i = 1, \dots, m$. Es evidente que $\|c - \omega_\alpha(\bar{t}_{k_1})\| \leq \alpha$ para algún conjunto de puntos $\{\bar{t}_{k_1}, \dots, \bar{t}_{k_r}\} \subset \{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m\} \subset I$, y esto nos proporciona el conjunto (usamos la misma notación que en el teorema anterior)

$$\{\gamma_\alpha(\bar{t}_{k_1}), \dots, \gamma_\alpha(\bar{t}_{k_r})\} \subset (M + \varepsilon)B_X,$$

que es la aproximación de la solución x_ε del programa de Helly $S_{M,\varepsilon}$.

2. Optimización y Densificación



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

2.1 Optimización en los espacios L^p

2.1.1 Introducción. El problema (PL)

En lo que sigue, fijado $1 < p < +\infty$, L^p será el espacio de las funciones reales definidas en I de potencia p -ésima Lebesgue integrable, con la norma habitual

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Además, el dual de L^p lo notaremos por L^q siendo $q > 0$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Sea, para cada $s \in I$, $\psi_1(s) := 1$ y para $k = 0, 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$ definimos la sucesión de funciones siguiente

$$\psi_{2^{k+i}}(s) := \chi_{\left[\frac{2i-2}{2^{k+1}}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right)}(s) - \chi_{\left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{2i}{2^{k+1}}\right)}(s) \quad \forall s \in I,$$

siendo χ_A la función característica del conjunto $A \subset I$. La sucesión $(\psi_n)_{n \geq 1}$ es una base de Schauder en L^p , es decir, dada $f \in L^p$ existe una única sucesión de números f_n tales que

$$f = \sum_{n \geq 1} f_n \psi_n,$$

donde la convergencia de la serie de arriba es respecto a la norma. La sucesión $(\psi_n)_{n \geq 1}$ se denomina *Sistema de Haar* (cf. [6], [23], [34]).

Sea $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en L^q tal que

$$\varphi_n(\psi_m) = \int_0^1 \varphi_n(s) \psi_m(s) ds = \delta_{nm} \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

siendo δ_{nm} el símbolo de Kronecker, $\delta_{nm} = 1$ si $n = m$ y $\delta_{nm} = 0$ si $n \neq m$. Entonces, dada $f \in L^p$ es claro que

$$f = \sum_{n \geq 1} \varphi_n(f) \psi_n.$$

Multiplicando por un número adecuado cada $\varphi_{2^{k+i}}$ (esto no supone ninguna pérdida de generalidad) para cada $k = 0, 1, 2, \dots$ y cada $i = 1, 2, \dots, 2^k$ se tiene que:

$$\|\varphi_{2^{k+i}}\|_q = \frac{1}{\|\psi_{2^{k+i}}\|_p} \frac{1}{(p+1)^{2^{k+i}}}. \quad (2.1)$$

Nota 2.1.1 Aunque no usaremos este hecho, la sucesión φ_n es una base de Schauder en L^q , puesto que L^p es reflexivo (cf. [34, p. 47]).

A continuación, vamos a describir el problema de optimización que analizaremos en las secciones siguientes. Dadas $g, g_1, \dots, g_l \in L^q$, y unos números b_1, \dots, b_l positivos, definimos el problema (PL) como:

$$(PL) \begin{cases} f^* := \inf \left\{ \int_0^1 g(s) f(s) ds : f \in L^p \right\}, \\ \text{sujeto a: } f \in B_{L^p}, \quad \int_0^1 g_j(s) f(s) ds = b_j, \quad j = 1, \dots, l, \end{cases}$$

Antes de continuar, debemos decir que el problema (PL) está bien planteado (cf. [32]), es decir, que tiene solución puesto que el conjunto de restricciones es no vacío.

Definición 2.1.1 Se define el conjunto factible del problema (PL) como:

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in B_{L^p} : \int_0^1 g_j(s) f(s) ds = b_j, \quad j = 1, \dots, l \right\}.$$

Con esta notación, el problema de optimización (PL) se puede escribir como:

$$(PL) \quad f^* := \inf \left\{ \int_0^1 g(s)f(s)ds : f \in \mathcal{F} \right\}.$$

Nuestro objetivo será aproximar el número f^* mediante las soluciones de una serie de problemas de optimización en dimensión finita. Veremos esto en detalle en las secciones siguientes.

2.1.2 Los problemas $(\theta_n - PL)$ y $(\gamma_n - PL)$

Como hemos notado anteriormente, nuestro objetivo será aproximar las soluciones del problema (PL) mediante soluciones de problemas de optimización en espacios de dimensión finita. En esta sección definiremos estos problemas, además de otros problemas (en dimensión finita) *auxiliares* que necesitaremos para nuestros objetivos.

Notaremos por L_n^p el subespacio vectorial de L^p generado por $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, siendo $(\psi_n)_{n \geq 1}$ el sistema de Haar definido en la Sección 2.1.1. Dada una sucesión de números positivos θ_n , con $\theta_n \rightarrow 0$, definimos el conjunto siguiente:

$$\mathcal{F}_n := \left\{ h := \sum_{i=1}^n \varphi_i(f)\psi_i : f \in B_{L^p}, \left| \int_0^1 h(s)\psi_i(s)g_j(s)ds - b_j \right| \leq \theta_n, j = 1, \dots, l \right\}.$$

Hablando de manera poco formal, se podría decir que cada \mathcal{F}_n es una *truncación* del conjunto factible \mathcal{F} del problema (PL).

Lema 2.1.1 $\mathcal{F}_n \subset B_{L_n^p}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si $\mathcal{F}_n = \emptyset$ entonces el resultado es trivial, así que vamos a suponer que $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Dado cualquier $m > n$, tenemos (cf. [34, Th. 2.1.1, p. 37]) la desigualdad

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i(f)\psi_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^m \varphi_i(f)\psi_i \right\|, \quad (2.2)$$

para cada $f \in B_{L^p}$. Por lo tanto, haciendo $m \rightarrow \infty$ en (2.2) deducimos que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i(f)\psi_i \right\|_p \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(f)\psi_i \right\|_p = \|f\|_p \leq 1.$$

Así pues, tenemos que $F_n \subset B_{L^p}$ siendo

$$F_n := \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_i(f)\psi_i : f \in B_{L^p} \right\} \supset \mathcal{F}_n,$$

y el lema queda probado. □

Como probaremos en la Sección 2.1.3 (Teorema 2.1.1), para una sucesión $(\theta_n)_{n \geq 1}$ adecuada se verifica que $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$ para cada $n > 1$. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$. Entonces, definimos el problema siguiente:

$$(\theta_n - PL) \quad f_n^* := \inf \left\{ \int_0^1 g(s)h(s)ds : h \in \mathcal{F}_n \right\}.$$

A continuación, veremos el papel de las curvas α -densas en la aproximación de las soluciones de los problemas $(\theta_n - PL)$:

Proposición 2.1.1 Supongamos que $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$ para cierto entero positivo n . Entonces, \mathcal{F}_n es densificable. Además, dado $\alpha > 0$, y una curva $\gamma_\alpha : I \rightarrow L_n^p$ α -densa en \mathcal{F}_n , pongamos $\gamma_\alpha(t) := (y_1(t), \dots, y_n(t))$ para cada $t \in I$, si definimos el problema

$$(\gamma_n - PL) \quad \gamma_n^* := \min \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^1 y_i(t) g(s) ds : t \in I \right\},$$

se tiene que

$$0 \leq \gamma_n^* - f_n^* \leq \alpha \|g\|_q \frac{p}{p+1} \left[1 - \left(\frac{1}{p+1} \right)^n \right].$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$. Para probar que \mathcal{F}_n es densificable, según el Teorema 1.1.1 bastará demostrar que \mathcal{F}_n es acotado y convexo, ya que L_n^p es un espacio métrico de dimensión finita.

El conjunto \mathcal{F}_n es acotado según el Lema 2.1.1. También se tiene que \mathcal{F}_n es convexo: sean $h_1 := \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_1) \psi_i(s)$, $h_2 := \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_2) \psi_i(s) \in \mathcal{F}_n$ para ciertas $f_1, f_2 \in B_{L^p}$ y $0 < \lambda < 1$, verificando

$$\left| \int_0^1 h_1(s) g_j(s) ds - b_j \right| \leq \theta_n, \quad \text{y} \quad \left| \int_0^1 h_2(s) g_j(s) ds - b_j \right| \leq \theta_n, \quad (2.3)$$

para cada $j = 1, \dots, l$.

Entonces, $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \in \mathcal{F}_n$ ya que

$$\lambda h_1 + (1 - \lambda) h_2 = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2) \psi_i,$$

y además, gracias a (2.3) tenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 (\lambda h_1(s) + (1 - \lambda) h_2(s)) g_j(s) ds - b_j \right| = \\ & = \left| \int_0^1 (\lambda h_1(s) + (1 - \lambda) h_2(s)) g_j(s) ds - \lambda b_j - (1 - \lambda) b_j \right| \leq \lambda \left| \int_0^1 h_1(s) g_j(s) ds - b_j \right| + \\ & + (1 - \lambda) \left| \int_0^1 h_2(s) g_j(s) ds - b_j \right| \leq \lambda \theta_n + (1 - \lambda) \theta_n = \theta_n, \end{aligned}$$

para cualquier $j = 1, \dots, l$. Queda probado entonces que \mathcal{F}_n es convexo.

Así pues, dado cualquier $\alpha > 0$ existe una curva $\gamma_\alpha : I \rightarrow L_n^p$ que es α -densa en \mathcal{F}_n , ya que \mathcal{F}_n es densificable, y por lo tanto el problema $(\gamma_n - PL)$ está bien planteado.

Por otro lado, sea $F : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por:

$$F(h) := \int_0^1 h(s) g(s) ds, \quad \forall h \in \mathcal{F}_n.$$

Dadas $h_1 := \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_1) \psi_i(s)$, $h_2 := \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_2) \psi_i(s) \in \mathcal{F}_n$, teniendo presente (2.1), se verifica que

$$\begin{aligned} |F(h_1) - F(h_2)| & \leq \sum_{i=1}^n |\varphi_i(f_1) - \varphi_i(f_2)| \int_0^1 |\psi_i(s)| |g(s)| ds \leq \\ & \leq \|g\|_q \|f_1 - f_2\|_p \sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|_q \|\psi_i\|_p \leq \|g\|_q \|f_1 - f_2\|_p \sum_{i=1}^n \frac{1}{(p+1)^i} = \\ & = \|g\|_q \|f_1 - f_2\|_p \frac{p}{p+1} \left[1 - \left(\frac{1}{p+1} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

Así pues, una cota superior para el módulo de continuidad de F de orden α (véase el Teorema 1.2.1) $\omega(F; \alpha)$ es la siguiente

$$\omega(F; \alpha) \leq \alpha \|g\|_q \frac{p}{p+1} \left[1 - \left(\frac{1}{p+1} \right)^n \right].$$

Entonces, según el Teorema 1.2.1, tenemos que

$$0 \leq \gamma_n^* - f_n^* \leq \omega(F; \alpha) \leq \alpha \|g\|_q \frac{p}{p+1} \left[1 - \left(\frac{1}{p+1} \right)^n \right],$$

y esto completa la prueba. □

Usando la notación del teorema anterior, nótese que si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$, tenemos que $\gamma_n^* \geq f_n^*$, y puesto que $L_n^p \subset L^p$, también se cumple que $f_n^* \geq f^*$.

Un esquema de nuestro método para aproximar las soluciones del problema (PL) es el siguiente:

1. Buscamos una sucesión $(\theta_n)_{n \geq 1}$ tal que exista un entero positivo m verificando que $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq m$.
2. Una vez planteados los problemas $(\theta_n - PL)$, se plantean los correspondientes problemas $(\gamma_n - PL)$ y calculamos las soluciones γ_n^* de los mismos.
3. La aproximación de f^* , con error controlado y arbitrariamente pequeño, nos la proporciona la sucesión $(\gamma_n^*)_{n \geq 1}$.

En la próxima sección probaremos que, bajo ciertas condiciones, el método arriba descrito es convergente, es decir, que $\gamma_n^* \rightarrow f^*$.

2.1.3 Convergencia del método

El siguiente lema lo usaremos más adelante:

Lema 2.1.2 Se verifica que:

1. El sistema de Haar es una base monótona en L^p , es decir, cualesquiera que sean los enteros positivos n, m , con $n < m$, y los números a_1, \dots, a_m se tiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \psi_i \right\|_p \leq \left\| \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right\|_p.$$

2. Para cada entero positivo $m > 1$, se tiene que

$$\sum_{n \geq m} \|\varphi_n\|_q \|\psi_n\|_p = \frac{1}{p(p+1)^{m-1}}.$$

Demostración. La prueba del apartado 1 del enunciado se puede consultar, por ejemplo, en [34, Lema 2.1.1 p. 39]. La prueba de 2 es simple: dado un entero $m > 1$ sean $k, i \in \mathbb{N}$ con $0 \leq i \leq 2^k$, tales que $m = 2^k + i$. Entonces, según (2.1), tenemos que:

$$\|\varphi_m\|_q \|\psi_m\|_p = \frac{1}{(p+1)^m}, \quad \|\varphi_{m+1}\|_q \|\psi_{m+1}\|_p = \frac{1}{(p+1)^{m+1}}, \quad \dots$$

y teniendo presente la bien conocida fórmula de sumación de las series geométricas, concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq m} \|\varphi_n\|_q \|\psi_n\|_p &= \frac{1}{(p+1)^m} + \frac{1}{(p+1)^{m+1}} + \dots = \\ &= \frac{1}{(p+1)^m} \left[1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + \dots \right] = \frac{1}{(p+1)^m} \frac{p+1}{p} = \frac{1}{p(p+1)^{m-1}}. \end{aligned}$$

□

Ya estamos preparados para enunciar y probar el resultado principal de esta sección:

Teorema 2.1.1 Para cada entero $n > 1$, definimos

$$\theta_n := \frac{M}{p(p+1)^n} \quad \text{y} \quad p_n := \|g\|_q \frac{p}{p+1} \left[1 - \left(\frac{1}{p+1} \right)^n \right],$$

siendo $M := \max\{\|g_j\|_q : j = 1, \dots, l\}$. Entonces, el correspondiente conjunto \mathcal{F}_n es no vacío para cada entero $n > 1$, es decir, que los problemas $(\theta_n - PL)$ están bien planteados.

Más aún, dada una sucesión de números positivos $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ con $\varepsilon_n \rightarrow 0$, existe para cada $n \in \mathbb{N}$ una curva $\gamma_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\gamma_n(I) \subset \mathcal{F}_n$, tal que la sucesión $(\gamma_n^*)_{n \geq 1}$ de soluciones de los problemas $(\gamma_n - PL)$ verifica las desigualdades siguientes:

$$0 \leq \gamma_n^* - f^* \leq \varepsilon_n + \frac{\|g\|_q}{p(p+1)^n} \quad \forall n > 1.$$

Demostración. En primer lugar, vamos a probar que $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$ para cada $n > 1$. En efecto: sea $f_{\text{opt}} \in \mathcal{F}$ una solución del problema (PL) , es decir, $f_{\text{opt}} \in B_{L^p}$ y para cada $j = 1, \dots, l$ se verifica que

$$\int_0^1 g_j(s) f_{\text{opt}}(s) ds = b_j.$$

Para cada $n > 1$ definamos

$$f_n := \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_{\text{opt}}) \psi_i \in L_n^p. \quad (2.4)$$

Vamos a probar que $f_n \in \mathcal{F}_n$. Por un lado, según el Lema 2.1.2, para cada $m > n$ se verifica que

$$\|f_n\|_p = \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_{\text{opt}}) \psi_i \right\|_p \leq \left\| \sum_{i=1}^m \varphi_i(f_{\text{opt}}) \psi_i \right\|_p \rightarrow \|f_{\text{opt}}\|_p,$$

cuando $m \rightarrow \infty$, y puesto que $f_{\text{opt}} \in B_{L^p}$ tenemos que $\|f_n\|_p \leq 1$ para cada n . Por otro lado, dado $1 \leq j \leq l$, teniendo presente (2.4), gracias a la desigualdad de Hölder y al Lema 2.1.2, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f_n(s) g_j(s) ds - b_j \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_{\text{opt}}) \int_0^1 \psi_i(s) g_j(s) ds - b_j \right| = \\ &= \left| \sum_{i \geq n+1} \varphi_i(f_{\text{opt}}) \int_0^1 \psi_i(s) g_j(s) ds \right| \leq \sum_{i \geq n+1} |\varphi_i(f_{\text{opt}})| \int_0^1 |\psi_i(s) g_j(s)| ds \leq \\ &\leq M \|f_{\text{opt}}\|_p \sum_{i \geq n+1} \|\varphi_i\|_q \|\psi_i\|_p \leq \frac{M}{p(p+1)^n}, \end{aligned}$$

y por lo tanto $f_n \in \mathcal{F}_n$ para cada $n > 1$. Queda probada entonces la primera parte del teorema.

Ahora, sea $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números positivos con $\varepsilon_n \rightarrow 0$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea γ_n una curva (ε_n/p_n) -densa en \mathcal{F}_n . Tal sucesión de curvas existe gracias a la Proposición 2.1.1.

Los problemas $(\gamma_n - PL)$ están bien definidos, puesto que lo están los problemas $(\theta_n - PL)$. Como hemos notado anteriormente, para cada $n > 1$, γ_n^* será una solución del problema $(\gamma_n - PL)$. Puesto que $\gamma_n^* \geq f_n^* \geq f^*$, pongamos:

$$0 \leq \gamma_n^* - f^* = \gamma_n^* - f_n^* + f_n^* - f^*. \quad (2.5)$$

Por un lado, gracias a la Proposición 2.1.1 tenemos que

$$\gamma_n^* - f_n^* \leq \varepsilon_n. \quad (2.6)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta una vez más el Lema 2.1.2 y la desigualdad de Hölder, llegamos a

$$\begin{aligned} f_n^* - f^* &= \left| \int_0^1 f_n(s) g(s) ds - \int_0^1 f_{\text{opt}}(s) g(s) ds \right| = \left| \sum_{i \geq n+1} \int_0^1 \varphi_i(f_{\text{opt}}) \psi_i(s) g(s) ds \right| \leq \\ &\leq \sum_{i \geq n+1} \|\varphi_i\|_q \|f_{\text{opt}}\|_p \|\psi_i\|_p \|g\|_q \leq \|g\|_q \sum_{i \geq n+1} \|\varphi_i\|_q \|\psi_i\|_p = \frac{\|g\|_q}{p(p+1)^n}, \end{aligned}$$

y de la desigualdad de arriba se deduce que

$$\begin{aligned} f_n^* - f^* &\leq \int_0^1 f_n(s)g(s)ds - \int_0^1 f_{\text{opt}}(s)g(s)ds \leq \\ &\leq \left| \int_0^1 f_n(s)g(s)ds - \int_0^1 f_{\text{opt}}(s)g(s)ds \right| \leq \frac{\|g\|_q}{p(p+1)^n}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.6) y (2.7) en (2.5) terminamos la prueba. \square

2.2 Optimización en espacios producto

2.2.1 Planteamiento del problema (OMO)

En lo que sigue, $(X_1, \|\cdot\|_1), \dots, (X_n, \|\cdot\|_n)$ serán espacios de Banach reales de dimensión infinita, y X_1^*, \dots, X_n^* sus duales topológicos. Además, para cada $i = 1, \dots, n$, notaremos la topología débil de X_i^* por $\sigma_i := \sigma(X_i, X_i^*)$.

Dado un conjunto $B_1 \times \dots \times B_n \subset X_1 \times \dots \times X_n$, nos ocuparemos en esta sección de estudiar, bajo ciertas condiciones, el problema de optimización siguiente

$$(OMO) \quad \min \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(b_i) : (b_1, \dots, b_n) \in B_1 \times \dots \times B_n \right\},$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, positivos, y $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in X_1^* \times \dots \times X_n^*$ no nulos son conocidos. Una solución del problema (OMO) será cualquier $(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n) \in B_1 \times \dots \times B_n$ tal que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(\tilde{b}_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(b_i) \quad \forall (b_1, \dots, b_n) \in B_1 \times \dots \times B_n.$$

Nota 2.2.1 El nombre (OMO) se corresponde con las siglas de optimización multi-objetivo por su similitud, en formas, con dicho tipo de problemas (cf. [53]).

Existen varios métodos para resolver problemas de optimización en espacios producto, como el *método de Gauss-Seidel*, por citar alguno (cf. [24, Chap. IV]). Nosotros, como ya hemos hecho en el Capítulo 1 y en la Sección 2.1 con otros problemas de optimización, estudiaremos la existencia de soluciones del problema (OMO) con la ayuda de ciertas curvas. Para nuestro objetivo, en la Sección 2.2.2, probaremos la existencia de curvas V -densas en el espacio producto $X_1 \times \dots \times X_n$ dotado de la topología producto $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$. Al igual que en secciones anteriores, la clave para estudiar problemas de optimización será reducir el número de variables del problema dado, en este caso el problema (OMO), a una sola variable mediante técnicas de densificación.

En la Sección 2.2.3 plantearemos un problema del tipo (OMO), que no tiene solución. No obstante, proponemos el siguiente problema:

$$(OMO)' \quad \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(b_i) : (b_1, \dots, b_n) \in B_1 \times \dots \times B_n \right\}.$$

Es inmediato comprobar que el problema anterior está bien planteado si los conjuntos B_1, \dots, B_n son acotados.

2.2.2 Densificación débil en el espacio producto

En esta sección notaremos $X := \prod_{i=1}^n X_i$. Hay muchas formas de definir una norma en X para que éste sea un espacio de Banach, por ejemplo,

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x := (x_1, \dots, x_n) \in X.$$

No obstante, puesto que X es un espacio de Banach de dimensión infinita, como ya comentamos en el Capítulo 1 (véase la Nota 1.2.2), en este caso es más conveniente para nuestros objetivos dotar a X de la topología débil, en lugar de la topología generada por una norma. En las siguientes líneas describiremos dicha topología débil en X .

Sea π la topología producto (o topología de Tychonoff, cf. [47], [73]) de las topologías $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, esto es, $\pi := \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$. La clase de los entornos básicos, cerrados, convexos y equilibrados del cero en topología π la notaremos por \mathcal{N}_0^π . Recordemos (cf. [47], [73]) que $V \in \mathcal{N}_0^\pi$ si, y sólo si, $V = V_1 \times \dots \times V_n$ siendo $V_i \in \mathcal{N}_0^{\sigma_i}$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Definición 2.2.1 Sea $\prod_{i=1}^n B_i \subset X$ no vacío, y $V \in \mathcal{N}_0^\pi$. Diremos que una curva $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ en una curva V -densa en $\prod_{i=1}^n B_i$ si

1. $\gamma(I) \subset \prod_{i=1}^n B_i$.
2. Para cada $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n B_i$ existe $t \in I$ tal que $(x_1, \dots, x_n) - \gamma(t) \in V$.

Si para cada $V \in \mathcal{N}_0^\pi$ existe una curva V -densa en $\prod_{i=1}^n B_i$ diremos que $\prod_{i=1}^n B_i$ es π -densificable..

Parece razonable pensar que un conjunto $\prod_{i=1}^n B_i \subset X$ es π -densificable si, y sólo si, cada B_i es σ_i -densificable, para cada $i = 1, \dots, n$. Y así es:

Teorema 2.2.1 $\prod_{i=1}^n B_i \subset X$ es π -densificable si, y sólo si, B_i es σ_i -densificable, para cada $i = 1, \dots, n$.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^n B_i \subset X$ es π -densificable. Fijado $1 \leq j \leq n$ sea $U_j \in \mathcal{N}_0^{\sigma_j}$ arbitrario, y consideremos

$$V := V_1 \times \dots \times V_{j-1} \times U_j \times V_{j+1} \times \dots \times V_n \in \mathcal{N}_0^\pi,$$

donde $V_i \in \mathcal{N}_0^{\sigma_i}$ son cualesquiera, para $i \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$. Puesto que $\prod_{i=1}^n B_i$ es π -densificable existe $\gamma: I \rightarrow (X, \pi)$, pongamos $\gamma(t) := (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ para cada $t \in I$, tal que

$$B_1 \times \dots \times B_j \times \dots \times B_n \subset \gamma_1(I) \times \dots \times \gamma_j(I) \times \dots \times \gamma_n(I) + V_1 \times \dots \times V_{j-1} \times U_j \times V_{j+1} \times \dots \times V_n.$$

de donde se deduce que $\gamma_j: I \rightarrow (X_j, \sigma_j)$ es una curva U_j -densa en B_j , y por lo tanto B_j es σ_j -densificable.

Recíprocamente, dado $\prod_{i=1}^n B_i \subset X$ supongamos que cada B_i es σ_i -densificable para $i = 1, \dots, n$, y sea $V_1 \times \dots \times V_n \in \mathcal{N}_0^\pi$ cualquiera. Entonces, para cada $i = 1, \dots, n$, existe $\gamma_i: I \rightarrow (X_i, \sigma_i)$ tal que:

$$B_i \subset \gamma_i(I) + V_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Según el teorema de Hahn-Mazurkiewicz (cf. [66], [73]) existe una curva $\phi: I \rightarrow I^n$, pongamos $\phi(t) := (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$ para cada $t \in I$, tal que $\phi(I) = I^n$.

Por otro lado, consideremos la curva $\omega: I \rightarrow (X, \pi)$ dada por

$$\omega(t) := \left(\gamma_1(\phi_1(t)), \dots, \gamma_n(\phi_n(t)) \right) \quad \forall t \in I.$$

Entonces, dado cualquier $(b_1, \dots, b_n) \in B_1 \times \dots \times B_n$, existen $t_1, \dots, t_n \in I$ tales que $b_i - \gamma_i(t_i) \in V_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Así pues, tomando $t \in I$ tal que $\phi(t) = (t_1, \dots, t_n)$, llegamos a que

$$(b_1, \dots, b_n) - \omega(t) \in V_1 \times \dots \times V_n,$$

de donde se deduce que γ es $V_1 \times \dots \times V_n$ -densa en $\prod_{i=1}^n B_i \subset X$ y esto termina la prueba. □

A continuación, probaremos cómo el teorema anterior nos proporciona un método para aproximar la solución del problema (OMO) en el caso de que dicho problema tenga solución.

Sea $B := \prod_{i=1}^n B_i \subset X$ π -densificable, y supongamos que existe el número

$$\tilde{b} := \text{mín} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(b_i) : (x_1, \dots, x_n) \in B_1 \times \dots \times B_n \right\}.$$

Dada una sucesión de números positivos $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ con $\varepsilon_k \rightarrow 0$, definimos

$$U_k := \varepsilon_k \{x_1^*\}^\circ \times \dots \times \varepsilon_k \{x_n^*\}^\circ \in \mathcal{N}_0^\pi \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

y $\gamma_k : I \rightarrow (X, \pi)$ una curva U_k -densa en B , pongamos $\gamma_k(t) := (\gamma_k^{(1)}(t), \dots, \gamma_k^{(n)}(t))$ para cada $t \in I$. Así pues, para cada entero positivo k , se verifica que:

$$B \subset \gamma_k(I) + U_k. \quad (2.8)$$

Sea, para cada $k \in \mathbb{N}$, el problema de optimización siguiente

$$(\gamma_k - OMO) \quad \text{mín} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(\gamma_k^{(i)}(t)) : t \in I \right\}.$$

Nótese, que el número

$$\tilde{\eta}_k := \text{mín} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(\gamma_k^{(i)}(t)) : t \in I \right\},$$

existe y es finito, para cada entero positivo k , independientemente de que exista el número \tilde{b} ya que I es compacto y cada $\gamma_k^{(i)}$ es continua. Entonces, si tomamos $(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n) \in B$ y $\tilde{t}_k \in I$ tales que

$$\tilde{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(\tilde{b}_i), \quad \tilde{\eta}_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(\gamma_k^{(i)}(\tilde{t}_k)),$$

y $t'_k \in I$ verificando

$$(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n) - \gamma_k(t'_k) \in U_k,$$

tenemos, gracias a (2.8), que

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{\eta}_k - \tilde{b} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i^*(\gamma_k^{(i)}(\tilde{t}_k)) - x_i^*(\tilde{b}_i)) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i^*(\gamma_k^{(i)}(t'_k)) - x_i^*(\tilde{b}_i)) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i^*(\gamma_k^{(i)}(t'_k)) - x_i^*(\tilde{b}_i)| \leq \varepsilon_k \sum_{i=1}^n \lambda_i, \end{aligned}$$

y puesto que $\varepsilon_k \rightarrow 0$, se verifica que $\tilde{\eta}_k \rightarrow \tilde{b}$.

El método anterior es válido siempre y cuando exista el número \tilde{b} . Ahora bien, se puede dar el caso en el que dicho número no exista, como mostraremos en la siguiente sección. En tal caso, como hemos comentado en la Sección 2.2.1 al definir el problema $(OMO)'$, consideraremos el número

$$\tilde{x} := \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(b_i) : (b_1, \dots, b_n) \in B_1 \times \dots \times B_n \right\},$$

que siempre existe si los conjuntos B_1, \dots, B_n son acotados (o, en particular, débilmente densificables) y lo aproximaremos mediante técnicas de densificación, de forma totalmente análoga al procedimiento antes descrito.

2.2.3 Un problema de optimización en $\mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \times L^1$

En este apartado estudiaremos, como aplicación del Teorema 2.1, un problema de optimización del tipo (OMO) descrito en la Sección 2.2.1. Como sugiere el título de esta sección, nos ocuparemos del caso particular en el que $X_1 \times X_2 \times X_3 := \mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \times L^1$, siendo $\mathcal{C}(I)$ el espacio de Banach de las funciones continuas definidas sobre I , con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$, y L^1 el espacio de las funciones Lebesgue integrables (Ejemplo 1.3.1), con su norma habitual $\|\cdot\|_1$. La única razón de elegir estos tres espacios no es otra que simplificar la notación y estudiar un caso concreto. Antes necesitamos recordar algunos resultados y fijar la notación que emplearemos.

Nota 2.2.2 En lo que sigue, la norma del supremo de $\mathcal{C}(I)$ y la norma del supremo esencial de L^∞ las notaremos de la misma forma, $\|\cdot\|_\infty$. Por el contexto no habrá lugar a confusión.

Dada una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, recordemos que la variación total de f viene dada por

$$V_I(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}} \left\{ \sum_{i=1}^m |f(x_{i-1}) - f(x_i)| : P := \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathcal{P} \right\},$$

siendo \mathcal{P} la clase de todas las particiones de I . Si $V(f) < +\infty$, se dice que f es de variación acotada, y notaremos por BV el espacio vectorial de dichas funciones. Si dotamos a BV con la norma $\|g\|_{BV} := V_I(g)$, para cada $g \in BV$, tenemos que $(BV, \|\cdot\|_{BV})$ es un espacio de Banach (cf. [12]).

Es un hecho bien conocido (cf. [12, Th. 13.1, p. 218]) que el dual topológico de $\mathcal{C}(I)$, $\mathcal{C}(I)^*$, es isométricamente isomorfo al espacio BV . De hecho, la relación entre $\mathcal{C}(I)^*$ y BV es la siguiente: si $\Lambda \in \mathcal{C}(I)^*$, existe $g \in BV$ tal que

$$\Lambda(f) = \int_0^1 f(x) dg(x) \quad \forall f \in \mathcal{C},$$

donde la integral de arriba se debe entender en el sentido de Riemann-Stieltjes. Así pues, dadas $g_1, \dots, g_m \in BV$, estas funciones definen un entorno débil básico y absolutamente convexo de cero para la topología débil de $\mathcal{C}(I)$, $\sigma := \sigma(\mathcal{C}(I), BV)$ de la forma siguiente:

$$\{g_1, \dots, g_m\}^\circ := \left\{ f \in \mathcal{C}(I) : \left| \int_0^1 f(x) dg_i(x) \right| \leq 1, i = 1, \dots, m \right\}.$$

Vamos a plantear nuestro problema de optimización. Definamos los conjuntos siguientes

$$B_{\mathcal{C}(I)}^+ := \left\{ f \in B_{\mathcal{C}(I)} : f(x) > 0 \text{ para todo } t \in (0, 1) \right\},$$

$$B_{L^1}^+ := \left\{ f \in B_{L^1} : f(x) > 0 \text{ para casi todo } t \in I \right\},$$

y consideremos la aplicación $F : B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{L^1}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(f_1, f_2, f_3) := \lambda_1 \int_0^1 f_1(x) dg_1(x) + \lambda_2 \int_0^1 f_2(x) dg_2(x) + \lambda_3 \int_0^1 h(x) f_3(x) dx, \quad (2.9)$$

para cada $(f_1, f_2, f_3) \in B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{L^1}^+$ donde $g_1, g_2 \in BV$, $h \in L^\infty$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ números positivos con $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ son conocidos.

Así pues, con esta notación, el problema de optimización que estudiaremos será el siguiente:

$$(OMO) \quad \text{mín} \left\{ F(f_1, f_2, f_3) : (f_1, f_2, f_3) \in B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{L^1}^+ \right\}$$

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.2.1 El problema (OMO) no tiene solución.

Demostración. Supongamos que existe $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3) \in B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{L^1}^+$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_0^1 \hat{f}_i(x) dg_i(x) + \lambda_3 \int_0^1 h(t) \hat{f}_3(x) dx &\leq \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_0^1 f_i(x) dg_i(x) + \\ &+ \lambda_3 \int_0^1 h(x) f_3(x) dx, \end{aligned} \quad (2.10)$$

para cualquier $(f_1, f_2, f_3) \in B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{L^1}^+$. Por otro lado, para cada entero positivo n , definamos la función

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{n}x & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{2}{n}(1-x) & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Es inmediato comprobar que $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ y $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$, y por lo tanto, para cada entero positivo n , tenemos que $(f_n, f_n, f_n) \in B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{L^1}^+$. Entonces, según (2.10), para cada $n \in \mathbb{N}$ se debe cumplir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_0^1 \hat{f}_i(x) dg_i(x) + \lambda_3 \int_0^1 h(t) \hat{f}_3(x) dx &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_0^1 dg_i(x) + \frac{1}{2n} \|h\|_\infty \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \max \{V_I(g_1), V_I(g_2)\} + \frac{1}{2n} \|h\|_\infty < \frac{1}{n} \max \{V_I(g_1), V_I(g_2), \|h\|_\infty\}, \end{aligned}$$

de donde se deduce, si hacemos $n \rightarrow \infty$, que

$$\int_0^1 \hat{f}_1(x) dg_1(x) = \int_0^1 \hat{f}_2(x) dg_2(x) = \int_0^1 h(x) \hat{f}_3(x) dx = 0,$$

y por lo tanto $\hat{f}_1(x) = \hat{f}_2(x) = 0$ para cada $x \in (0, 1)$, y $\hat{f}_3(x) = 0$ en casi todo $x \in I$, lo que no es posible por la propia definición de $B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{L^1}^+$. □

Aunque el problema (OMO) no tiene solución, el problema

$$(OMO)' \quad \inf \left\{ F(f_1, f_2, f_3) : (f_1, f_2, f_3) \in B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{L^1}^+ \right\},$$

sí está bien planteado, siendo F la aplicación dada en (2.9). En efecto, dado el vector $(f_1, f_2, f_3) \in B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{L^1}^+$, se tiene que (usamos la desigualdad de Hölder):

$$\begin{aligned} |F(f_1, f_2, f_3)| &\leq \sum_{i=1}^2 \lambda_i \left| \int_0^1 f_i(x) dg_i(x) \right| + \lambda_3 \left| \int_0^1 h(x) f_3(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \lambda_i \|f_i\|_\infty \|g_i\|_{BV} + \lambda_3 \|f_3\|_1 \|h\|_\infty \leq \sum_{i=1}^2 \lambda_i \|g_i\|_{BV} + \lambda_3 \|h\|_\infty \leq \\ &\leq \max \{V_I(g_1), V_I(g_2), \|h\|_\infty\} < +\infty. \end{aligned}$$

Como en la Sección 2.2.2, notaremos $X := \mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \times L^1$ y $\pi := \sigma \times \sigma \times \sigma_1$, siendo σ la topología débil de $\mathcal{C}(I)$ y σ_1 la topología débil de L^1 .

En lo que resta de este apartado, nos proponemos aproximar las soluciones del problema (OMO)' mediante las soluciones de los problemas siguientes

$$(\gamma_n - OMO) \quad \min \left\{ F(\gamma_n(t)) : t \in I \right\},$$

siendo $\gamma_n : I \rightarrow (X, \pi)$ una sucesión de curvas que luego veremos con detalle. Necesitaremos el siguiente resultado.

Lema 2.2.1 El conjunto $B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{L^1}^+$ es π -densificable.

Demostración. Gracias al Teorema 2.2.1, basta probar que $B_{\mathcal{C}(I)}^+$ es σ -densificable, y $B_{L^1}^+$ es σ_1 -densificable. Pero esto es inmediato: el conjunto $B_{\mathcal{C}(I)}^+$ es convexo y acotado (esto es claro), y por lo tanto (Teorema 1.3.1) es σ -densificable. El mismo razonamiento prueba que $B_{L^1}^+$ es σ_1 -densificable. □

Finalmente, llegamos al resultado principal de esta sección. Mantenemos la notación usada en secciones anteriores.

Teorema 2.2.2 Dada una sucesión de números positivos $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ con $\varepsilon_n \rightarrow 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una curva $\gamma_n : I \rightarrow (X, \pi)$, pongamos $t \in I \mapsto \gamma_{n,t} \in X$, tal que

$$0 \leq y_n^* - f^* \leq \varepsilon_n$$

para cada entero positivo n , siendo

$$f^* := \inf \left\{ F(f_1, f_2, f_3) : (f_1, f_2, f_3) \in B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{L^1}^+ \right\}, \quad y_n^* := \min \left\{ F(\gamma_{n,t}) : t \in I \right\},$$

y F la aplicación definida en (2.9).

Demostración. La desigualdad $y_n^* - f^* \geq 0$ es evidente, así que nos ocuparemos de probar que $y_n^* - f^* \leq \varepsilon_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada entero positivo n , definimos:

$$U_n := \frac{\varepsilon_n}{4} \{g_1\}^\circ \times \frac{\varepsilon_n}{4} \{g_2\}^\circ \times \frac{\varepsilon_n}{4} \{h\}^\circ \in \mathcal{N}_0^\pi.$$

Tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, una curva $\gamma_n : I \rightarrow (X, \pi)$, pongamos

$$t \in I \mapsto \gamma_{n,t}(x) := (\gamma_{n,t}^{(1)}(x), \gamma_{n,t}^{(2)}(x), \gamma_{n,t}^{(3)}(x)) \quad \forall x \in I$$

de forma que:

$$B^+ := B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{\mathcal{C}(I)}^+ \times B_{L^1}^+ \subset \gamma_n(I) + U_n. \quad (2.11)$$

La existencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, de la curva γ_n está garantizada gracias al Lema 2.2.1.

Por otro lado, para cada entero positivo n , por las propiedades del ínfimo existe $f_n^* := F(f_n^{(1)}, f_n^{(2)}, f_n^{(3)})$, para ciertas funciones $(f_n^{(1)}, f_n^{(2)}, f_n^{(3)}) \in B^+$ tal que

$$f_n^* \leq f^* + \frac{\varepsilon_n}{4}. \quad (2.12)$$

Entonces, gracias a (2.11), para cada entero positivo n , existe $t_n \in I$ tal que:

$$\begin{aligned} |f_n^* - F(\gamma_{n,t_n})| &\leq \sum_{i=1}^2 \lambda_i \left| \int_0^1 (f_i(x) - \gamma_{n,t_n}^{(i)}(x)) dg_i(x) \right| + \\ &+ \lambda_3 \left| \int_0^1 h(x) (f_3(x) - \gamma_{n,t_n}^{(3)}(x)) dx \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{4} + \frac{\varepsilon_n}{4} + \frac{\varepsilon_n}{4} = \frac{3\varepsilon_n}{4}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Teniendo en cuenta (2.12) y (2.13), concluimos que

$$y_n^* - f^* \leq y_n^* - f_n^* + \frac{\varepsilon_n}{4} \leq F(\gamma_{n,t_n}) - f_n^* + \frac{\varepsilon_n}{4} \leq \frac{3\varepsilon_n}{4} + \frac{\varepsilon_n}{4} = \varepsilon_n,$$

y esto termina la prueba. □

Medidas de no-compacidad y punto fijo



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

3	Medidas de no-compacidad y densificación	39
3.1	Primeras definiciones y ejemplos	
3.2	Algunas relaciones entre la MNC χ y el GND ϕ_d	
3.3	La MNC Φ . Una cota superior para las MNC definidas en $(X, \ \cdot\)$	
3.4	Curvas totalmente λ -densas	
3.5	La MNC Ψ . Una nueva MNC en (X, σ) .	
4	Punto fijo y densificación	57
4.1	Los teoremas de punto fijo de Banach, Schauder y Darbo-Sadovskii	
	El teorema de punto fijo de Banach	
	El teorema de punto fijo de Schauder	
	Iteraciones	
	El teorema de punto fijo de Darbo-Sadovskii	
	Ecuaciones integrales de Volterra	
4.2	Otros resultados de punto fijo	
	Aplicaciones ϕ_d -no-expansivas y ϕ_d -contractivas	
	El problema de Cauchy	
	Estructura ϕ_d -normal	

3. Medidas de no-compacidad y densificación



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

3.1 Primeras definiciones y ejemplos

En esta sección recordaremos la definición de medida de no-compacidad (cf. [4], [11], [13], [16]), así como algunas de dichas medidas muy conocidas. En lo que sigue, (E, d) será un espacio métrico y dado $B \subset (E, d)$ notaremos por \bar{B} la clausura de B , mientras que \mathcal{B}_E denotará la clase de los conjuntos no vacíos y acotados de E , y $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

Aunque la definición de medida de no-compacidad en espacios métricos puede variar ligeramente según el autor (compárese, por ejemplo, las definiciones dadas en [11] y en [16]) en estas notas adoptaremos la siguiente definición:

Definición 3.1.1 Una aplicación $\mu : \mathcal{B}_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una medida de no-compacidad, MNC, si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{B}_E$ se verifican las siguientes propiedades:

1. Regularidad: $\mu(A) = 0$ si, y sólo si, A es relativamente compacto.
2. Invarianza bajo clausura: $\mu(\bar{A}) = \mu(A)$.
3. Semi-aditividad: $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$.

En el caso particular que (E, d) sea un espacio de Banach a la aplicación μ , además de las propiedades anteriores, le exigiremos las dos siguientes:

4. Semi-homogeneidad: $\mu(sA) = |s|\mu(A)$ para cualquier $s \in \mathbb{R}$.
5. Invarianza bajo traslaciones: $\mu(x+A) = \mu(A)$ para cualquier $x \in E$.

Históricamente, la primera MNC fue definida en 1930 por K. Kuratowski [52]:

Definición 3.1.2 Se define la MNC de Kuratowski $\kappa : \mathcal{B}_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ como

$$\kappa(B) := \inf\{\varepsilon > 0 : B \text{ se puede cubrir con un número finito de conjuntos de diámetro } \leq \varepsilon\},$$

para cada $B \in \mathcal{B}_E$.

Otra MNC muy conocida es la MNC de Hausdorff introducida en 1957 por Gohberg, Gol'denshtein y Markus [43]:

Definición 3.1.3 Se define la MNC de Hausdorff $\chi : \mathcal{B}_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ como

$$\chi(B) := \inf\{\varepsilon > 0 : B \text{ se puede cubrir con un número finito de bolas de radio } \leq \varepsilon\},$$

para cada $B \in \mathcal{B}_E$.

En adelante, para simplificar la escritura, notaremos por $\mathcal{W}_X^{\|\cdot\|}$ (resp. \mathcal{W}_X^σ) los conjuntos relativamente compactos de $(X, \|\cdot\|)$ (resp. de (X, σ)).

■ **Ejemplo 3.1.1** Se tiene que $\kappa(B_X) = \chi(B_X) = 0$ si X es de dimensión finita, mientras que $\kappa(B_X) = 2$, $\chi(B_X) = 1$ en otro caso (cf. [11, Th. 2.5, p. 23]). ■

Se verifican las siguientes desigualdades entre las MNCs κ y χ :

Teorema 3.1.1 (cf. [11, Th. 2.7, p. 24]): Dado $B \in \mathcal{B}_E$, se cumple que

$$\chi(B) \leq \kappa(B) \leq 2\chi(B),$$

y estas desigualdades son las mejores posibles en espacios de Banach de dimensión infinita.

Cuando dotamos a X de la topología débil tenemos la MNC de De Blasi, que apareció por primera vez en [29]:

Definición 3.1.4 Se define la MNC de De Blasi $\beta : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}_+$ como

$$\beta(B) := \inf\left\{\varepsilon > 0 : \exists K \in \mathcal{W}_X^\sigma \text{ tal que } B \subset K + \varepsilon B_X\right\},$$

para cada $B \in \mathcal{B}_X$.

Nota 3.1.1 De la definición anterior, se sigue que $\beta(B) = 0 \Leftrightarrow B \in \mathcal{W}_X^\sigma$, ya que en este caso estamos considerando en X la topología débil en lugar de la topología de la norma.

■ **Ejemplo 3.1.2** La MNC de De Blasi β verifica la siguiente propiedad (cf. [29]):

$$\beta(B_X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ es reflexivo} \\ 1 & \text{si } X \text{ no es reflexivo} \end{cases}.$$

En las diferentes secciones de este Capítulo relacionaremos las MNC definidas en esta sección con distintos tipos de curvas. Además, definiremos dos nuevas MNCs basadas en tales curvas.

3.2 Algunas relaciones entre la MNC χ y el GND ϕ_d

En este apartado estudiaremos algunas relaciones entre la MNC de Hausdorff χ (Definición 3.1.3) y el GND ϕ_d (Definición 1.1.4), que recordamos a continuación:

$$\phi_d(B) := \inf \left\{ \alpha > 0 : \Gamma_{\alpha,B} \neq \emptyset \right\} \quad \forall B \in \mathcal{B}_E,$$

siendo $\Gamma_{\alpha,B}$ la clase de todas las curvas α -densas en B .

Nota 3.2.1 Dado $H \subset X$ y un conjunto de índices J , si $\{U_j : j \in J\}$ es un recubrimiento de H , es decir, $H \subset \cup_{j \in J} U_j$, vamos a suponer sin pérdida de generalidad que $H \cap U_j \neq \emptyset$ para todo $j \in J$.

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.2.1 Dado $B \in \mathcal{B}_E$ conexo por caminos se verifica que

$$\chi(B) \leq \phi_d(B) \leq 2\chi(B).$$

Además, estas desigualdades son las mejores posibles en espacios de Banach de dimensión infinita.

Demostración. Sean $B \in \mathcal{B}_X$ conexo por caminos, $\varepsilon > 0$ y $\alpha := \phi_d(B)$. Nótese que al ser B un conjunto no vacío y acotado, el número α está bien definido. Entonces, existe una curva $\gamma_\varepsilon : I \rightarrow (E, d)$ la cual es $(\alpha + \frac{\varepsilon}{2})$ -densa en B . Puesto que $\gamma_\varepsilon(I)$ es compacto, existe $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \gamma_\varepsilon(I)$ de forma que

$$\gamma_\varepsilon(I) \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(y_i, \frac{\varepsilon}{2}), \quad (3.1)$$

siendo $\bar{B}(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$ la bola cerrada de centro y_i y radio $\frac{\varepsilon}{2}$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Por otro lado, fijado cualquier $x \in B$, puesto que γ_ε es una curva $(\alpha + \frac{\varepsilon}{2})$ -densa en B , existe $y \in \gamma_\varepsilon(I)$ tal que $d(x, y) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, y este hecho junto con la desigualdad triangular y (3.1) nos lleva a que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(y_i, \alpha + \varepsilon),$$

y puesto que ε es arbitrario tenemos que $\chi(B) \leq \alpha = \phi_d(B)$.

Sea ahora $\alpha := \chi(B)$. Entonces, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\{c_1, \dots, c_n\} \subset E$ tal que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(c_i, \alpha + \frac{\varepsilon}{2}). \quad (3.2)$$

Tomemos para cada $i = 1, \dots, n$, $b_i \in B \cap \bar{B}(c_i, \alpha + \frac{\varepsilon}{2})$ (dicha elección es posible según hemos comentado en la Nota 3.2.1) y definamos la curva $\gamma_\varepsilon : I \rightarrow (E, d)$ como la poligonal que une los puntos c_1, \dots, c_n . Nótese que γ_ε está bien definida puesto que B es conexo por caminos. Por otro lado, gracias a (3.2), dado $x \in B$, existe $c_j \in E$ para algún $1 \leq j \leq n$ tal que

$$d(x, c_j) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.3)$$

Así pues, tomando $t_j \in I$ con $\gamma_\varepsilon(t_j) = b_j$, de (3.3) y de la desigualdad triangular llegamos a

$$d(x, \gamma_\varepsilon(t_j)) = d(x, b_j) \leq d(x, c_j) + d(c_j, b_j) \leq 2\alpha + \varepsilon,$$

y de la arbitrariedad de ε se sigue que $\phi_d(B) \leq 2\alpha = 2\chi(B)$. Así pues, la primera parte del enunciado queda probada.

Que las desigualdades del enunciado son las mejores posibles en espacios de Banach de dimensión infinita lo probaremos en los Ejemplos 3.2.1 y 3.2.2.

□

Antes de continuar, debemos notar que la hipótesis de conexión por caminos es imprescindible en el resultado anterior: dados $x, y \in E$ con $x \neq y$ se tiene que $\chi(\{x, y\}) = 0$ ya que el conjunto $\{x, y\}$ es compacto, mientras que $\phi_d(\{x, y\}) = \|x - y\| > 0$. También se tiene que el resultado anterior es claramente falso para el σ -GND ϕ_σ (Definición 1.3.3), ya que $\phi_\sigma(B_X) = 0$ (Ejemplo 1.3.2) mientras que $\chi(B_X) = 1$ (Ejemplo 3.1.1).

Por otro lado, la aplicación $\chi_i : \mathcal{B}_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\chi_i(B) := \inf\{\varepsilon > 0 : B \text{ se puede cubrir con un número finito de bolas centradas en } B \text{ de radio } \leq \varepsilon\},$$

para cualquier $B \in \mathcal{B}_E$ se conoce como *MNC interior de Hausdorff*, aunque pese a su nombre no es una MNC (cf. [15, Chap. 5, Sec. 5.6]). Siguiendo la prueba de la Proposición 3.2.1, encontramos que χ_i y ϕ_d coinciden en la clase de los conjuntos acotados y conexos por caminos de E . Pero, estas aplicaciones, sólo coinciden en esta clase de conjuntos. De hecho, el conjunto B del Ejemplo 1.1.2 (conocido como *seno del topólogo*) verifica que $\phi_d(B) = 1$ mientras que $\chi_i(B) = 0$. Debemos notar que, precisamente porque χ_i no es una MNC, hasta donde nosotros sabemos, no se suele aplicar para establecer resultados análogos a los que se pueden obtener con las MNCs. No obstante, y como probaremos a lo largo de esta memoria, el GND ϕ_d sí que puede ser usado para establecer resultados totalmente análogos a otros ya existentes basados en las MNCs.

En el siguiente ejemplo probaremos que la primera desigualdad de la Proposición 3.2.1 puede ser estricta.

■ **Ejemplo 3.2.1** Consideremos el conjunto de las funciones de densidad

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in L^1 : f \geq 0, \int_0^1 f(x) dx = 1 \right\},$$

siendo L^1 el espacio de Banach de las funciones Lebesgue integrables, introducido en el Ejemplo 1.3.1. Vamos a probar que:

$$\phi_d(\mathcal{D}) = 2. \tag{3.4}$$

Puesto que $\mathcal{D} \subset B_{L^1}$, su diámetro $\text{Diam}(\mathcal{D}) \leq 2$. Entonces, existe una curva 2-densa en \mathcal{D} , y por lo tanto, debe ser $\phi_d(\mathcal{D}) \leq 2$. Supongamos que $\phi_d(\mathcal{D}) < 2$, y tomemos η tal que

$$\phi_d(\mathcal{D}) < \eta < 2. \tag{3.5}$$

Como la sucesión $\{f_n := n\varphi_{[0, \frac{1}{n}]} : n \geq 1\} \subset \mathcal{D}$, siendo $\varphi_{[0, \frac{1}{n}]}$ la función característica del intervalo $[0, \frac{1}{n}]$, no tiene ninguna subsucesión convergente (esto es inmediato de probar) tenemos que \mathcal{D} no es compacto. Así pues, dada cualquier curva α -densa en \mathcal{D} , pongamos γ_α , puesto que $\gamma_\alpha(I)$ es compacto, la densidad α de dicha curva debe ser positiva. En particular, $\gamma_\alpha(I)$ es débilmente compacto, y por lo tanto (cf. [23, Prop. 13.1]) la familia de medidas

$$\mathcal{F} := \left\{ \int_A |g(x)| dx : g \in \gamma_\alpha(I) \right\},$$

es uniformemente integrable. Así pues, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier boreliano $A \subset I$ cuya medida (de Lebesgue) sea menor o igual que δ se verifica que:

$$\int_A g(x) dx < \varepsilon, \quad \forall g \in \gamma_\alpha(I). \tag{3.6}$$

Puesto que $\alpha > 0$, gracias a (3.5) podemos tomar $0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{2}(\frac{2}{\eta} - 1)$. Al ser $\gamma_\alpha(I)$ uniformemente integrable, para el ε anterior existe un $\delta > 0$ de forma que se verifica (3.6). Tomando un entero $m > \max\{1, \frac{1}{\delta}\}$, sea el boreliano $A := [0, \frac{1}{m}]$ y la función $f_m := m\varphi_{[0, \frac{1}{m}]} \in \mathcal{D}$. Puesto que γ_α es una curva α -densa en \mathcal{D} , y teniendo presente (3.6), existe $g_m \in \gamma_\alpha(I)$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \|f_m - g_m\| = \int_0^1 |f_m(x) - g_m(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{m}} |f_m(x) - g_m(x)| dx + \\ &+ \int_{\frac{1}{m}}^1 |f_m(x) - g_m(x)| dx \geq \int_0^{\frac{1}{m}} (f_m(x) - g_m(x)) dx + \int_{\frac{1}{m}}^1 g_m(x) dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{m}} (f_m(x) - g_m(x)) dx - 2 \int_0^{\frac{1}{m}} g_m(x) dx + \int_0^1 g_m(x) dx > 2 - 2\varepsilon > 2 - \alpha \left(\frac{2}{\eta} - 1\right), \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\alpha > \eta$, y por lo tanto, $\phi_d(\mathcal{D}) \geq \eta$, que es contradictorio con (3.5). Así pues, la igualdad (3.4) es cierta y concluimos que

$$\phi_d(\mathcal{D}) = 2 > 1 \geq \chi(\mathcal{D}),$$

ya que, al ser $\mathcal{D} \subset B_{L^1}$ gracias a las propiedades de la MNC de Hausdorff χ (3.1.3) se tiene que $\chi(\mathcal{D}) \leq \chi(B_{L^1}) = 1$. ■

En el siguiente ejemplo probaremos que la segunda desigualdad de la Proposición 3.2.1 puede ser una igualdad.

■ **Ejemplo 3.2.2** Sea $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de Banach de las funciones continuas definidas en I con la norma del supremo, y definamos el conjunto

$$C := \left\{ f \in \mathcal{C}(I) : 0 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1, \text{ para cada } x \in I \right\},$$

el cual, es convexo y cerrado. También es evidente que C no es compacto: basta notar que la sucesión $(f_n)_{n \geq 1} := (x^n)_{n \geq 1} \subset C$ no tiene ninguna subsucesión uniformemente convergente a alguna función de C . Más aún, se tiene (cf. [11, Exam. 2, p. 169]) que

$$\chi(C) = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, no es difícil probar (cf. [68, Exam. 4.2, p. 204]) que $\text{Diam}(C) = 1$ y por lo tanto $\phi_d(C) \leq 1$. Si fuese $\phi_d(C) < 1$, fijando una curva α -densa en C con $0 < \alpha < 1$, pongamos $\gamma: I \rightarrow (\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ dada por $t \in I \mapsto \gamma_t \in C$, tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $3\varepsilon < 1 - \alpha$. Puesto que $\gamma(I)$ es compacto gracias al Teorema de Arzelá-Ascoli (cf. [47]) es equicontinuo, y por lo tanto existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|\gamma_t(x) - \gamma_t(x')| \leq \varepsilon \quad \forall t \in I, \quad (3.7)$$

siempre que $|x - x'| \leq \delta_1$. Puesto que $\gamma_t(1) = 1$, ya que $\gamma_t \in C$, para cada $t \in I$, otra vez por la equicontinuidad de $\gamma(I)$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\gamma_t(x') \geq 1 - \varepsilon \quad \text{para cualquier } x' \in I \text{ con } 1 - x' \leq \delta_2. \quad (3.8)$$

Sean $0 < x' < x < 1$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f_n(x) = x^n \leq \varepsilon$ y $1 - x' \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Es inmediato comprobar que para esta elección de x y x' se verifican las desigualdades (3.7) y (3.8). Entonces, puesto que γ es una curva α -densa en C , tomando $t \in I$ tal que

$$\|f_n - \gamma_t\|_\infty \leq \alpha, \quad (3.9)$$

gracias (3.7), (3.8) y (3.9) llegamos a

$$\alpha \geq |x^n - \gamma_t(x)| \geq |x^n - \gamma_t(x')| - |\gamma_t(x) - \gamma_t(x')| \geq 1 - 2\varepsilon - |\gamma_t(x) - \gamma_t(x')| \geq 1 - 3\varepsilon,$$

que es contradictorio con la elección de ε . Así pues, tenemos que $\phi_d(C) = 1 = 2\chi(C)$ y esto termina el ejemplo. ■

Para terminar esta sección, mostraremos algunas consecuencias de la Proposición 3.2.1. Este primer corolario ya ha sido probado en [59] (véase el Teorema 1.1.3):

Corolario 3.2.1 X es de dimensión finita si, y sólo si, $\phi_d(B_X) = 0$.

Demostración. Según [11, Th. II.2.5] X es de dimensión finita si, y sólo si, $\chi(B_X) = 0$. Entonces, el resultado se tiene gracias a la Proposición 3.2.1. □

El siguiente corolario es consecuencia directa del Teorema 3.1.1 y la Proposición 3.2.1:

Corolario 3.2.2 Dado $B \in \mathcal{B}_X$ conexo por caminos, se tiene que

$$\frac{1}{2}\phi_d(B) \leq \kappa(A) \leq 2\phi_d(B).$$

siendo κ la MNC de Kuratowski (3.1.2). Además, estas desigualdades son las mejores posibles en espacios de Banach de dimensión infinita.

Nótese que la hipótesis de conexión por caminos en el corolario anterior es imprescindible. Sea B el conjunto del Ejemplo 1.1.2, recordemos:

$$B := \left\{ (x, \sin(x^{-1})) : x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \right\} \cup \left\{ (0, y) : y \in [-1, 1] \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Entonces, se tiene que $\phi_d(B) = 1$ mientras que $\kappa(B) = 0$.

Nota 3.2.2 Según el Ejemplo 3.2.1, se tiene que la aplicación

$$B \in \mathcal{B}_X \longmapsto \phi_d(\text{Conv}(B)),$$

no es, en general, una MNC: si tomamos $X := L^1$, como acabamos de probar en dicho ejemplo, $1 = \phi_d(B_{L^1}) = \phi_d(B_{L^1} \cup \mathcal{D}) < \max\{\phi_d(B_{L^1}), \phi_d(\mathcal{D})\} = 2$, siendo B_{L^1} la bola unidad cerrada de L^1 y \mathcal{D} el conjunto de las funciones de densidad. Por lo tanto la aplicación anterior no posee la semi-aditividad indicada en la Definición 3.1.1 de MNC.

3.3 La MNC Φ . Una cota superior para las MNC definidas en $(X, \|\cdot\|)$

Mantenemos la notación usada en secciones anteriores: \mathcal{B}_X son los conjuntos acotados de X , mientras que $\mathcal{W}_X^{\|\cdot\|}$ (resp. \mathcal{W}_X^σ) denotará la clase de los conjuntos precompactos del espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ (resp. de (X, σ)).

Como ha quedado patente en la Nota 3.2.2 el GND ϕ_d (Definición 1.1.4) no es, en general, una MNC en $(X, \|\cdot\|)$ ya que no se verifica la semi-aditividad que deben cumplir las MNC según la Definición 3.1.1. En esta sección nos ocuparemos de la siguiente cuestión: ¿es posible definir una MNC en términos del GND ϕ_d ? La respuesta, como probaremos más adelante, es afirmativa. Más aún, mostraremos que dicha MNC basada en el GND ϕ_d acota superiormente a cualquier MNC definida en $(X, \|\cdot\|)$ y además, esta cota es la mejor posible en espacios de Banach de dimensión infinita.

Dada una MNC v definida en los conjuntos acotados de (X, σ) , y por lo tanto, $v(B) = 0$ si y sólo si $B \in \mathcal{W}_X^\sigma$, en [16] se prueba que

$$v(B) \leq v(B_X)\beta(B), \tag{3.10}$$

para cualquier $B \in \mathcal{B}_X$ siendo β la MNC de De Blasi (Definición 3.1.4). Como mostraremos en el siguiente ejemplo, la desigualdad (3.10) deja de ser cierta si v es una MNC definida en los conjuntos acotados de $(X, \|\cdot\|)$.

■ **Ejemplo 3.3.1** En el espacio L^1 dotado de su norma habitual, consideremos el conjunto $R := \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ de las funciones de Rademacher (Ejemplo 1.3.1), recordemos

$$r_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) \text{ } k \text{ par} \\ 0 & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ } k = 1, \dots, 2^n \\ 1 & \text{si } x \in \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) \text{ } k \text{ impar} \end{cases},$$

para cada entero positivo n y cada $x \in I$. Es un hecho bien conocido que $(r_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión débilmente nula (cf. [6]). Así pues, según el teorema de Eberlein-Šmulian (cf. [6], [34], [36]) tenemos que $R \in \mathcal{W}_X^\sigma$ y por lo tanto $\beta(R) = 0$.

Por otro lado, en [11, Th. 5.2, p. 185] se prueba que $\chi(R) = 1$, de donde se sigue que

$$1 = \chi(R) > \chi(B_{L^1})\beta(R) = 0.$$

■

Ahora, definiremos la MNC basada en el GND ϕ_d que hemos comentado al inicio de esta sección:

Definición 3.3.1 Se define el grado de no-densificación convexo, GNDC, como la aplicación $\Phi : \mathcal{B}_X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\Phi(B) := \sup \left\{ \phi_d(\text{Conv}(C)) : C \subseteq \bar{B} \right\},$$

para cada $B \in \mathcal{B}_X$, siendo \bar{B} la clausura de B en $(X, \|\cdot\|)$ y $\text{Conv}(C)$ la envoltura convexa de C .

Es claro que el GNDC Φ está bien definido, ya que si B es acotado también lo es \bar{B} y $\text{Conv}(B)$ (cf. [45, Lem. B, p. 60]). De hecho, si $\|x\| \leq M$ para algún $M > 0$ y cualquier $x \in \text{Conv}(B)$, dado $C \subset \bar{B}$ y una curva $\gamma : I \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$ con $\gamma(I) \subset \text{Conv}(C)$ se tiene que

$$\|x - \gamma(t)\| \leq \|x\| + \|\gamma(t)\| \leq 2M \quad \forall t \in I,$$

es decir, que $\phi_d(\text{Conv}(C)) \leq 2M$ y por lo tanto el GNDC Φ está bien definido.

En el siguiente ejemplo probaremos que, en general, el GNDC Φ (definición 3.3.1) y el GND ϕ_d (Definición 1.1.4) son aplicaciones distintas.

■ **Ejemplo 3.3.2** Se tiene que $\Phi(B_{L^1}) = 2$, siendo L^1 el espacio de las funciones definidas en I Lebesgue integrables, con su norma habitual (Ejemplo 1.3.1). En efecto, dado cualquier conjunto $C \subset B_{L^1}$, si $\gamma : I \longrightarrow (L^1, \|\cdot\|)$ es una curva con $\gamma(I) \subset \text{Conv}(C)$ siempre se cumple que

$$\|x - \gamma(t)\| \leq \|x\| + \|\gamma(t)\| \leq 2 \quad \forall x \in \text{Conv}(C), \forall t \in I,$$

de donde deducimos que $\Phi(B_{L^1}) \leq 2$.

Por otro lado, en el Ejemplo 3.2.1 hemos probado que el conjunto de las funciones de densidad $\mathcal{D} \subset B_{L^1}$ verifica que $\phi_d(\mathcal{D}) = 2$, y así pues tenemos que $\Phi(B_{L^1}) = 2$, gracias a la propia definición del GNDC Φ . Finalmente, teniendo en cuenta el Teorema 1.1.3, llegamos a $\phi_d(B_{L^1}) = 1 < 2 = \Phi(B_{L^1})$. ■

Antes de probar que, efectivamente, Φ es una MNC necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.3.1 Sean $A, B \in \mathcal{B}_X$. Entonces, el GND ϕ_d verifica la desigualdad

$$\phi_d(\text{Conv}(A \cup B)) \leq \max \left\{ \phi_d(\text{Conv}(A)), \phi_d(\text{Conv}(B)) \right\}.$$

Demostración. Si ponemos $\alpha_A := \phi_d(\text{Conv}(A))$ y $\alpha_B := \phi_d(\text{Conv}(B))$ (estos números están bien definidos porque A y B son conjuntos no vacíos y acotados), tenemos que probar la desigualdad

$$\phi_d(\text{Conv}(A \cup B)) \leq \max \left\{ \alpha_A, \alpha_B \right\} := \alpha. \quad (3.11)$$

Dado $\varepsilon > 0$, según la propia definición de ϕ_d , existen dos curvas $\gamma_A, \gamma_B : I \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$, con $\gamma_A(I) \subset \text{Conv}(A)$ y $\gamma_B(I) \subset \text{Conv}(B)$ tales que

$$\begin{aligned} \text{Conv}(A) &\subset \gamma_A(I) + (\alpha_A + \varepsilon)B_X, \\ \text{Conv}(B) &\subset \gamma_B(I) + (\alpha_B + \varepsilon)B_X. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ahora bien, puesto que $\text{Conv}(A) \cup \text{Conv}(B) \subset \text{Conv}(A \cup B)$, tenemos la inclusión $\gamma_A(I) \cup \gamma_B(I) \subset \text{Conv}(A \cup B)$, y por lo tanto, $\text{Conv}(\gamma_A(I) \cup \gamma_B(I)) \subset \text{Conv}(A \cup B)$. Como $\text{Conv}(\gamma_A(I) \cup \gamma_B(I))$ es un subconjunto convexo y compacto de $(X, \|\cdot\|)$, el teorema de Hahn-Mazurkiewicz (cf. [66], [73]) garantiza la existencia de una curva $\omega : I \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$ tal que $\omega(I) = \text{Conv}(\gamma_A(I) \cup \gamma_B(I))$.

A continuación probaremos que la curva ω del párrafo anterior es una curva α -densa en $\text{Conv}(A \cup B)$: sea $x \in \text{Conv}(A \cup B)$ cualquiera, pongamos,

$$x := \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i,$$

donde $\lambda_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ y $c_1, \dots, c_r \in A$, $c_{r+1}, \dots, c_m \in B$ para cierto $1 < r < m$. Este es el caso más general que se puede dar en la elección de x , si todos los c_i pertenecen sólo a A o sólo a B la prueba es idéntica. Así pues, sean $t_1, \dots, t_m \in I$ tales que

$$\begin{aligned} \|c_i - \gamma_A(t_i)\| &\leq \alpha_A + \varepsilon & \forall i = 1, \dots, r, \\ \|c_i - \gamma_B(t_i)\| &\leq \alpha_B + \varepsilon & \forall i = r+1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La elección de $t_1, \dots, t_m \in I$ verificando (3.13) es posible gracias a (3.12). Sea

$$\eta := \sum_{i=1}^r \lambda_i \gamma_A(t_i) + \sum_{i=r+1}^m \lambda_i \gamma_B(t_i) \in \text{Conv}(\gamma_A(I) \cup \gamma_B(I)),$$

y $t \in I$ tal que $\omega(t) = \eta$. Entonces, gracias a (3.13), tenemos que

$$\begin{aligned} \|x - \omega(t)\| &\leq \sum_{i=1}^r \lambda_i \|c_i - \gamma_A(t_i)\| + \sum_{i=r+1}^m \lambda_i \|c_i - \gamma_B(t_i)\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_A + \sum_{i=r+1}^m \lambda_i \alpha_B + \varepsilon \leq \alpha \sum_{i=1}^m \lambda_i + \varepsilon = \alpha + \varepsilon, \end{aligned}$$

y por lo tanto, ω es una curva $(\alpha + \varepsilon)$ -densa en $\text{Conv}(A \cup B)$, y puesto que ε es arbitrario, se verifica la desigualdad (3.11) y el lema queda probado. □

Teorema 3.3.1 El GNDC Φ es una MNC.

Demostración. Hay que probar que la aplicación Φ cumple las cinco propiedades de la Definición 3.1.1.

Regularidad: Si $B \in \mathcal{W}_X^{\|\cdot\|}$, entonces \bar{B} es compacto y por lo tanto dado cualquier $C \subset \bar{B}$, según el Teorema 1.1.1, es $\phi_d(\text{Conv}(C)) = 0$ de donde se deduce que $\Phi(B) = 0$. Recíprocamente, si $\Phi(B) = 0$, en particular, será $\phi_d(\text{Conv}(B)) = 0$ y una llamada al Teorema 1.1.1 nos garantiza que $\text{Conv}(B) \in \mathcal{W}_X^{\|\cdot\|}$, y puesto que $B \subseteq \text{Conv}(B)$, se tiene que $B \in \mathcal{W}_X^{\|\cdot\|}$.

Invarianza bajo clausura: Esta propiedad se tiene de forma trivial por la propia definición de Φ .

Semi-aditividad: Hay que probar que

$$\Phi(A \cup B) = \max \{ \Phi(A), \Phi(B) \}. \quad (3.14)$$

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Entonces, por las propiedades del supremo, existe $C_\varepsilon \subset \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (esta última igualdad es cierta en cualquier espacio topológico, cf. [73]) tal que

$$\Phi(A \cup B) \leq \phi_d(\text{Conv}(C_\varepsilon)) + \varepsilon. \quad (3.15)$$

Por otro lado, si ponemos $A_\varepsilon := \bar{A} \cap C_\varepsilon$, $B_\varepsilon := \bar{B} \cap C_\varepsilon$, puesto que $C_\varepsilon = A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$, según el Lema 3.3.1, tenemos que

$$\phi_d(\text{Conv}(C_\varepsilon)) \leq \max \{ \phi_d(\text{Conv}(A_\varepsilon)), \phi_d(\text{Conv}(B_\varepsilon)) \} \leq \max \{ \Phi(A), \Phi(B) \}, \quad (3.16)$$

y uniendo (3.15) y (3.16) deducimos que

$$\Phi(A \cup B) \leq \max \{ \Phi(A), \Phi(B) \} + \varepsilon. \quad (3.17)$$

Como ε es arbitrario, debe ser $\Phi(A \cup B) \leq \max\{\Phi(A), \Phi(B)\}$. Supongamos ahora que

$$\Phi(A \cup B) < \max\{\Phi(A), \Phi(B)\}. \quad (3.18)$$

Antes de continuar, notemos que si $F, G \in \mathcal{B}_X$ y $F \subset G$ es inmediato comprobar, a partir de la propia definición del GNDC Φ , que $\Phi(F) \leq \Phi(G)$. Teniendo esto en cuenta, si $\max\{\Phi(A), \Phi(B)\} = \Phi(A)$ (el otro caso se prueba de la misma forma), entonces, según (3.18)

$$\Phi(A) \leq \Phi(A \cup B) < \max\{\Phi(A), \Phi(B)\} = \Phi(A),$$

lo cual es una contradicción, y por lo tanto, la desigualdad (3.18) no es cierta. Queda probada entonces la semi-aditividad del GNDC Φ .

Semi-homogeneidad: Sea s un número distinto de cero (si $s = 0$ el resultado es trivial), $B \in \mathcal{B}_X$, $\alpha := \phi_d(\text{Conv}(B))$, y $\varepsilon > 0$. Entonces, existe una curva $\gamma: I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ que es $(\alpha + \frac{\varepsilon}{|s|})$ -densa en $\text{Conv}(B)$.

Definiendo la curva $\gamma_s(t) := s\gamma(t)$ para cada $t \in I$, es claro que $\gamma_s(I) \subset |s|\text{Conv}(B)$. Por otro lado, dado $x \in |s|\text{Conv}(B)$, puesto que $\frac{1}{|s|}x \in \text{Conv}(B)$ y γ es una curva $(\alpha + \frac{\varepsilon}{|s|})$ -densa en $\text{Conv}(B)$, existe $t \in I$, tal que

$$\left\| \frac{1}{|s|}x - \gamma(t) \right\| \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{|s|},$$

y multiplicando la desigualdad de arriba por $|s|$ tenemos que

$$\left\| x - |s|\gamma(t) \right\| \leq |s|\alpha + \varepsilon.$$

Así pues, tenemos que $\phi_d(s\text{Conv}(B)) \leq |s|\alpha$, ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario. Ahora bien, si fuese $\phi_d(s\text{Conv}(B)) < |s|\alpha$, tomando $\phi_d(s\text{Conv}(B)) < r < |s|\alpha$ y una curva $\gamma_r: I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ r -densa en $|s|\text{Conv}(B)$, dado $|s|x \in |s|\text{Conv}(B)$, existe $t \in I$ tal que

$$\left\| |s|x - \gamma_r(t) \right\| \leq r,$$

y dividiendo por $|s|$ tenemos que

$$\left\| x - \frac{1}{|s|}\gamma_r(t) \right\| \leq \frac{r}{|s|},$$

lo que significa que la curva $\frac{1}{|s|}\gamma_r$ es $\frac{r}{|s|}$ -densa en $\text{Conv}(B)$, y por lo tanto,

$$\phi_d(\text{Conv}(B)) \leq \frac{r}{|s|} < \alpha = \phi_d(\text{Conv}(B)),$$

lo cual no puede ser por la elección de r , y así pues, $\phi_d(s\text{Conv}(B)) = |s|\phi_d(\text{Conv}(B))$.

Por otro lado,

$$|s|\Phi(B) = |s|\sup\{\phi_d(\text{Conv}(A)) : A \subseteq \bar{B}\} = \sup\{\phi_d(s\text{Conv}(A)) : A \subseteq \bar{B}\},$$

y puesto que $s\text{Conv}(A) = \text{Conv}(sA)$ y $s\bar{B} = \overline{sB}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sup\{\phi_d(s\text{Conv}(A)) : A \subseteq \bar{B}\} &= \sup\{\phi_d(\text{Conv}(sA)) : sA \subseteq s\bar{B}\} = \\ &= \sup\{\phi_d(s\text{Conv}(A)) : sA \subseteq \overline{sB}\} = \sup\{\phi_d(s\text{Conv}(A)) : sA \subseteq \overline{sB}\} = \Phi(sB), \end{aligned}$$

y por lo tanto, $|s|\Phi(B) = \Phi(sB)$ y la semi-homogeneidad de Φ queda probada.

Invarianza bajo traslaciones: Esta propiedad se tiene de forma inmediata. Basta tener en cuenta que si γ es una curva α -densa en $\text{Conv}(B)$ para $B \in \mathcal{B}_X$ dado, entonces $x + \gamma$ es una curva α -densa en $x + \text{Conv}(B)$ cualquiera que sea el vector $x \in X$. Recíprocamente, si γ es una curva α -densa en $x + \text{Conv}(B)$, entonces $-x + \gamma$ es una curva α -densa en $\text{Conv}(B)$ para cualquier $x \in X$.

□

Como hemos comentado al inicio de esta sección, nuestro objetivo es definir una MNC en términos del GND ϕ_d (Definición 1.1.4), cosa que ya hemos hecho con el GNDC Φ (Definición 3.3.1), y además, probar que dicha MNC acota superiormente a cualquier otra MNC definida en los conjuntos acotados de $(X, \|\cdot\|)$. Probaremos esto último en el Corolario 3.22, el cual es una consecuencia del siguiente resultado:

Teorema 3.3.2 Dada una MNC $\mu : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}_+$, se verifica que

$$\mu(B) \leq \mu(B_X)\phi_d(B),$$

para cualquier $B \in \mathcal{B}_X$.

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}_X$ cualquiera, y pongamos $\alpha := \phi_d(B)$. El número α está bien definido porque B es acotado. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe una curva $\gamma : I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ tal que

$$B \subset \gamma(I) + (\alpha + \varepsilon)B_X, \quad (3.19)$$

y así pues, gracias a la semi-aditividad de μ , tenemos que

$$\mu(A) \leq \mu(\gamma(I) + (\alpha + \varepsilon)B_X). \quad (3.20)$$

Ahora bien, puesto que $\gamma(I)$ es compacto, existe $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \gamma(I)$ tal que

$$\gamma(I) \subset \{y_1, \dots, y_n\} + \varepsilon B_X, \quad (3.21)$$

y así pues, según (3.20) y (3.21) y teniendo presente las propiedades de las MNCs

$$\mu(B) \leq (\alpha + \varepsilon)\mu(B_X),$$

y de la arbitrariedad de ε se sigue el resultado.

□

Gracias a las propiedades de las MNCs, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.3.1 Sea $\mu : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}_+$ una MNC. Entonces, para cada $B \in \mathcal{B}_X$ se tiene que:

$$\mu(B) \leq \mu(B_X)\Phi(B). \quad (3.22)$$

Además, esta desigualdad es la mejor posible en espacios de Banach de dimensión infinita.

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}_X$ cualquiera. Dado cualquier $A \subseteq \bar{B}$, puesto que $\mu(A) \leq \mu(\text{Conv}(A))$ gracias a la semi-aditividad de μ , según el teorema anterior tenemos que

$$\mu(B) \leq \mu(\text{Conv}(A)) \leq \mu(B_X)\phi_d(\text{Conv}(A)),$$

y por lo tanto, gracias a las desigualdades de arriba, las propiedades de μ y la propia definición del GNDC Φ (Definición 3.3.1), concluimos que

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(\bar{B}) = \sup \left\{ \mu(C) : C \subseteq \bar{B} \right\} \leq \sup \left\{ \mu(\text{Conv}(C)) : C \subseteq \bar{B} \right\} \leq \\ &\leq \mu(B_X) \sup \left\{ \phi_d(\text{Conv}(C)) : C \subseteq \bar{B} \right\} = \mu(B_X)\Phi(B), \end{aligned}$$

y esto prueba la desigualdad (3.22) del enunciado.

Por otro lado, sea c_0 el espacio de Banach de las sucesiones convergentes a cero con la norma del supremo, y $B := \{e_i : i \geq 1\}$ la base estándar de Schauder de dicho espacio, es decir, e_i es la sucesión $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ donde el 1 está en la posición i (cf. [6], [23], [34]). Como $\|e_i - e_j\| = 1$ siempre que $i \neq j$ y la distancia de cualquier conjunto infinito de B a cualquier vector de c_0 no puede ser menor

que uno, tenemos que $\chi(B) = 1$ siendo χ la MNC de Hausdorff (Definición 3.1.3). Ahora bien, puesto que $\phi_d(B_{c_0}) = 1$ (Ejemplo 1.3.2), debe ser

$$\Phi(B) \geq 1. \quad (3.23)$$

Probaremos a continuación que $\Phi(B) \leq 1$. Sea $C \subset B = \bar{B}$ y γ una curva cualquiera en c_0 con $\gamma(I) \subset \text{Conv}(C)$. Tomemos $x \in \text{Conv}(C)$ y $z \in \gamma(I)$, pongamos

$$x := \sum_{i=k_1}^n \lambda_i e_i, \quad z := \sum_{j=k_2}^m \lambda'_j e_j,$$

donde $\lambda_i \geq 0$ para cada $i = k_1, \dots, n$, $\lambda'_j \geq 0$ para cada $j = k_2, \dots, m$ y $\sum_{i=k_1}^n \lambda_i = \sum_{j=k_2}^m \lambda'_j = 1$. Puesto que $|\lambda_i - \lambda'_j| \leq 1$ para cualesquiera i, j , se tiene que $\|x - z\| \leq 1$. Esto implica que $\phi_d(\text{Conv}(C)) \leq 1$, y puesto que el conjunto $C \subset \bar{B} = B$ es arbitrario, debe ser

$$\Phi(B) \leq 1, \quad (3.24)$$

y de (3.23) y (3.24) llegamos a que $\Phi(B) = 1$.

También se puede dar el caso en el que la desigualdad (3.22) del enunciado sea estricta. Como hemos probado en el Ejemplo 3.3.2, se verifican las siguientes desigualdades

$$1 = \chi(B_{L^1}) < \chi(B_{L^1})\Phi(B_{L^1}) = 2,$$

siendo L^1 el espacio de las funciones Lebesgue integrables (Ejemplo 1.3.1) y χ la MNC de Hausdorff (Definición 3.1.3). □

3.4 Curvas totalmente λ -densas

Al igual que hemos hecho en la Sección 3.2 con la MNC de Hausdorff χ (Definición 3.1.3) y el GND ϕ_d (Definición 1.1.4), en esta sección estudiaremos algunas relaciones entre la MNC de De Blasi (Definición 3.1.4) y una nueva clase de curvas que llamaremos totalmente λ -densas (Definición 3.4.2). Antes de probar tales relaciones, necesitamos la siguiente definición. Recordemos que \mathcal{N}_0^σ denota la clase de los entornos básicos, débiles, convexos y equilibrados del vector nulo de X (Sección 1.3).

Definición 3.4.1 Dado $\lambda > 0$ definimos

$$\mathcal{N}_0^\sigma(\lambda) := \left\{ V \in \mathcal{N}_0^\sigma : \lambda_V = \lambda \right\},$$

siendo λ_V el orden esférico de V (Definición 1.3.1). Es decir, $\mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$ es la clase de todos los entornos débiles, básicos y equilibrados del cero de orden esférico λ .

Nótese que la clase $\mathcal{N}_0^\sigma(\lambda) \neq \emptyset$ para cualquier $\lambda > 0$, ya que el vector nulo siempre pertenece a dicha clase. Se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.4.1 Dado $\lambda > 0$, se verifica que

$$\bigcap_{V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)} V = \lambda B_X.$$

Demostración. Para simplificar la notación, fijado $\lambda > 0$, escribiremos $\mathcal{V}(\lambda) := \bigcap_{V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)} V$.

Por la propia definición de orden esférico (Definición 1.3.1), puesto que $\lambda B_X \subset V$ cualquiera que sea $V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$, tenemos que:

$$\lambda B_X \subset \mathcal{V}(\lambda).$$

Por otro lado, sea $x \in \mathcal{V}(\lambda)$. Si x es el vector nulo, entonces $x \in \lambda B_X$, si x no es el vector nulo, cualquiera que sea $x^* \in X^*$ de norma uno, tenemos que $|x^*(x)| \leq \lambda$. De hecho, si tomamos $V_{x^*} := \lambda \{x^*\}^\circ \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$

tenemos que $x \in V_{x^*}$ y por lo tanto $|x^*(x)| \leq \lambda$. Ahora bien, según el Teorema de Hahn-Banach (cf. [64]) existe $y^* \in X^*$ de norma uno tal que $|y^*(x)| = \|x\|$, y en consecuencia,

$$\|x\| = |y^*(x)| \leq \lambda,$$

es decir, que $x \in \lambda B_X$. Así pues, $\mathcal{V}(\lambda) \subset \lambda B_X$ y esto termina la prueba. □

A continuación vamos a definir el concepto de curva totalmente λ -densa, el cual será crucial en esta sección:

Definición 3.4.2 Sea $B \subset X$ y $\lambda > 0$. Diremos que una curva $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ es totalmente λ -densa en B si es V -densa en B para cualquier $V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$. Es decir, γ es totalmente λ -densa en B si

$$B \subset \gamma(I) + \bigcap_{V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)} V.$$

Dado $B \in \mathcal{B}_X$ y $\lambda > 0$, notaremos por $\Gamma_{\lambda, B, \sigma}$ la clase de todas las curvas totalmente λ -densas en B , esto es,

$$\Gamma_{\lambda, B, \sigma} := \left\{ \gamma: I \rightarrow (X, \sigma) : \gamma \text{ es } V\text{-densa en } B, \forall V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda) \right\}.$$

Si $B \in \mathcal{B}_X$, se tiene $\Gamma_{\lambda, B, \sigma} \neq \emptyset$ para cualquier $\lambda \geq \text{Diam}(B)$: dado $x_0 \in B$ basta considerar la curva $\gamma(t) := x_0$ para cada $t \in I$, y es inmediato comprobar que $\gamma \in \Gamma_{\lambda, B, \sigma}$.

Nota 3.4.1 Según el Lema 3.4.1 dado $B \in \mathcal{B}_X$ y una curva $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ con $\gamma(I) \subset B$, tenemos que $\gamma \in \Gamma_{\lambda, B, \sigma}$ si, y sólo si,

$$B \subset \gamma(I) + \lambda B_X,$$

Entonces, la inclusión de arriba es la misma que si γ fuese una curva λ -densa en $B \subset (X, \|\cdot\|)$ (Definición 1.1.2). Pero hay una diferencia esencial que debemos tener muy presente: dados $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$, una curva α -densa es una aplicación continua de I en $(X, \|\cdot\|)$, mientras que una curva totalmente λ -densa es una aplicación continua I en (X, σ) . Es decir, en el primer caso la continuidad de la curva se exige para la topología de la norma de X , mientras que en el segundo la continuidad se exige para la topología débil de X .

Algunos ejemplos, evidentes, de curvas totalmente λ -densas son: la curva constante e igual al vector nulo de X es una curva totalmente 1-densa en B_X de X . Si $B \subset (X, \sigma)$ es un continuo de Peano, la curva cuya imagen es el propio B es una curva totalmente λ -densa en B para cualquier $\lambda > 0$. A continuación mostramos un ejemplo no trivial de una curva totalmente λ -densa, para cierto $\lambda > 0$.

■ **Ejemplo 3.4.1** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert separable, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en X . Denotemos por $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de X , esto es, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (símbolo de Kronecker) para cada $i, j \in \mathbb{N}$.

Para cada entero positivo k , definamos la aplicación $g_k: I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ de la forma siguiente:

$$g_k(t) := \begin{cases} 2te_{k+1}, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1-l)e_{k+n} + le_{k+n+1}, & \text{si } t = (1-l)\frac{n}{n+1} + l\frac{n+1}{n+2}, \text{ con } 0 \leq l \leq 1, n \in \mathbb{N} \\ \theta, & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

para cada $t \in I$, siendo θ el vector nulo de X . Sea $\gamma: J := [1, 2] \rightarrow X$ (el hecho de tomar el intervalo $[1, 2]$

en lugar de I es irrelevante, tomamos este intervalo para simplificar la escritura) la aplicación dada por

$$\gamma(t) := \begin{cases} g_n(t + \frac{1}{n} - 2) & \text{si } 2 - \frac{1}{n} \leq t \leq 2 - \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \\ \theta & \text{si } t = 2 \end{cases}, \quad \forall t \in [1, 2].$$

Es claro que $\|\gamma(t)\| \leq 1$ para cada $t \in J$, y por lo tanto, $\gamma(J) \subset B_X$, siendo esta inclusión estricta ya que $\gamma(t) \neq e_1$ para cada $t \in J$ (esto es inmediato a partir de la definición de las aplicaciones g_k). En [17, Exam. 1.2, pág. 72] se prueba que:

(i) $\gamma: J \rightarrow (X, \sigma)$ es una curva.

(ii) $\gamma: J \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ no es continua en el conjunto $\{2\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

Por otro lado, fijado $\lambda_0 > 0$ cualquiera, sea $e_0 := \lambda_0 e_1$. Entonces, para cada $t \in J$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|\gamma(t) - e_0\|^2 &= \langle \gamma(t) - e_0, \gamma(t) - e_0 \rangle = \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle + \lambda_0^2 \langle e_1, e_1 \rangle = \\ &= \|\gamma(t)\|^2 + \lambda_0^2 > 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sea el conjunto $K_0 := \gamma(J) \cup \{e_0\}$. Para ver que $\gamma \in \Gamma_{\lambda_0, K_0, \sigma}$, dado $x \in K_0$, distinguimos dos casos:

Caso 1: $x \in \gamma(J)$. En este caso, tomando $t \in J$ tal que $\gamma(t) = x$, tenemos que $\|x - \gamma(t)\| = 0$, y hemos terminado.

Caso 2: $x = e_0$. Según (3.25) se tiene que

$$\min \left\{ \|\gamma(t) - e_0\|^2 : t \in J \right\} = \lambda_0^2,$$

ya que $\gamma(2) = \theta$.

Por lo tanto, de los casos 1 y 2 anteriores concluimos que γ es una curva totalmente λ_0 -densa en K_0 , pues $K_0 \subset \gamma(J) + \lambda_0 B_X$. ■

El siguiente resultado nos proporciona una caracterización de las curvas totalmente λ -densas en espacios de Banach separables:

Proposición 3.4.1 Supongamos que X es separable, y sean $B \in \mathcal{B}_X$ y $\lambda > 0$. Entonces, dada una curva $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$, se tiene que $\gamma \in \Gamma_{\lambda, B, \sigma}$ si, y sólo si, dada cualquier sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ densa en B , existe una sucesión $(t_n)_{n \geq 1} \subset I$ verificando

$$|x^*(x_n - \gamma(t_n))| \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para cualquier $x^* \in X^*$ de norma uno.

Demostración. La condición necesaria es clara por la propia definición de curva totalmente λ -densa (Definición 3.4.2), así que probaremos la condición suficiente.

Sean $x \in B$ y $V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$, pongamos $V := \lambda \{x^*\}^\circ$ para algún $x^* \in X^*$ de norma uno. Puesto que X es separable también lo es el conjunto B , así pues, sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión densa en B . Tomemos una subsucesión de $(x_n)_{n \geq 1}$, que notaremos igual, de forma que

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0, \quad (3.26)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Por hipótesis, existe una sucesión $(t_n)_{n \geq 1} \subset I$ tal que:

$$|x^*(x_n - \gamma(t_n))| \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.27)$$

Por otro lado, gracias a la compacidad de I , existe una subsucesión de $(t_n)_{n \geq 1} \subset I$, que notaremos igual, tal que $t_n \rightarrow t$ para algún $t \in I$. Teniendo en cuenta que $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ es continua, se tiene que

$$|x^*(\gamma(t_n) - \gamma(t))| \rightarrow 0, \quad (3.28)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Según (3.26), (3.27) y (3.28), debe ser

$$\begin{aligned} |x^*(x - \gamma(t))| &\leq |x^*(x - x_n)| + |x^*(x_n - \gamma(t_n))| + |x^*(\gamma(t_n) - \gamma(t))| \leq \\ &\leq \|x - x_n\| + \lambda + |x^*(\gamma(t_n) - \gamma(t))| \rightarrow \lambda, \end{aligned}$$

y puesto que $V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$ es arbitrario, $\gamma \in \Gamma_{\lambda, B, \sigma}$.

□

Nuestro siguiente objetivo será relacionar la MNC de De Blasi β (Definición 3.1.4) con las curvas totalmente λ -densas.

Teorema 3.4.1 Dado $B \in \mathcal{B}_X$ y $\lambda > 0$ tales que $\Gamma_{\lambda,B,\sigma} \neq \emptyset$, se tiene que $\beta(B) \leq \lambda$. Además, esta desigualdad es la mejor posible en espacios de Banach de dimensión infinita.

Demostración. Sean $B \in \mathcal{B}_X$ y $\lambda > 0$ tales que $\Gamma_{\lambda,B,\sigma} \neq \emptyset$. Entonces, gracias al Lema 3.4.1, tenemos que

$$B \subset \gamma(I) + \lambda B_X,$$

para alguna curva $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$. Así pues, por la propia definición de la MNC β , debe ser $\beta(B) \leq \lambda$.

Por otro lado, si para cualquier $\lambda > 0$ se tiene que $\Gamma_{\lambda,B,\sigma} \neq \emptyset$, entonces B debe ser separable. En efecto, tomando una sucesión $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de números positivos con $\lambda_n \rightarrow 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ una curva $\gamma_n: I \rightarrow (X, \sigma)$ totalmente λ_n -densa en B , es claro que $\cup_{n \geq 1} \gamma_n(I)$ es un conjunto denso y separable en B .

Entonces, según lo expuesto en el párrafo anterior, si B es un conjunto σ -compacto y no separable (pensemos, por ejemplo, en la bola unidad cerrada de un espacio de Banach reflexivo y no separable), tenemos que

$$\inf \{ \lambda > 0 : \Gamma_{\lambda,B,\sigma} \neq \emptyset \} > 0 = \beta(B),$$

y por lo tanto, la desigualdad del enunciado es la mejor posible en espacios de Banach de dimensión infinita.

□

Como hemos probado en el Teorema 1.3.2 del Capítulo 1 si X no es reflexivo y $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ es una curva V -densa en B_X , para cierto $V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$ con $0 < \lambda < 1$, existe $V' \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda')$, con $0 < \lambda < \lambda' < 1$, tal que γ no es V' -densa. En el siguiente corolario probaremos que si X no es reflexivo, dado $0 < \lambda < 1$ y una curva $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ V -densa en B_X , con $V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$, existe $W \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$ tal que γ no es W -densa en B_X .

Corolario 3.4.1 Supongamos que X no es reflexivo, y sea $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ una curva V -densa en B_X , para cierto $V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$ con $0 < \lambda < 1$. Entonces, existe $W \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$ tal que γ no es W -densa en B_X .

Demostración. En primer lugar, notemos que dado $V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$ con $0 < \lambda < 1$, existe una curva V -densa en B_X (Teorema 1.3.1). Así pues, fijados $\lambda > 0$ y $V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$, sea $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ una curva V -densa en B_X .

Por otro lado, puesto que X no es reflexivo, tenemos que $\beta(B_X) = 1$ (Ejemplo 3.1.2) siendo β la MNC de De Blasi (Definición 3.1.4), gracias al teorema anterior debe ser $\Gamma_{\lambda,B_X,\sigma} = \emptyset$ para cualquier $0 < \lambda < 1$. Así pues, según la propia definición de la clase $\Gamma_{\lambda,B_X,\sigma}$ (Definición 3.4.1), existe $W \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$ de forma que γ no es una curva W -densa en B_X y esto concluye la prueba.

□

Para concluir esta sección, notemos que el Teorema 3.4.1 nos proporciona una caracterización de la reflexividad de los espacios de Banach separables:

Corolario 3.4.2 Si X es separable, entonces X es reflexivo si, y sólo si, existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\Gamma_{\lambda,B_X,\sigma} \neq \emptyset$.

Demostración. Si X es reflexivo, B_X es σ -compacto, y al ser X separable tenemos que (B_X, σ) es metrizable (cf. [6], [34], [64]), así que gracias al teorema de Hahn-Mazurkiewicz (cf. [66], [73]) existe una curva $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ con $\gamma(I) = B_X$, y en consecuencia $\Gamma_{\lambda,B_X,\sigma} \neq \emptyset$ para cualquier $\lambda > 0$.

Recíprocamente, si existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\Gamma_{\lambda,B_X,\sigma} \neq \emptyset$, gracias al Teorema 3.4.1, debe ser $\beta(B_X) = 0$, es decir, que X es reflexivo ya que B_X es σ -compacto.

□

3.5 La MNC Ψ . Una nueva MNC en (X, σ) .

Dado $B \subset X$, en esta sección \bar{B} denotará la clausura de B en (X, σ) . Si en la Sección 3.3 hemos definido una MNC en términos del GND ϕ_d (Definición 1.1.4), en esta sección nos proponemos definir una MNC en términos de la densificación débil, y más concretamente, en términos de las curvas totalmente λ -densas (definición 3.4.2).

Antes de mostrar una MNC basadas en las curvas totalmente λ -densas, necesitamos definir la siguiente aplicación:

Definición 3.5.1 Se define el grado no-densificación débil total, σ -GNDT, como la aplicación $\psi_\sigma : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\psi_\sigma(B) := \inf \left\{ \lambda > 0 : \Gamma_{\lambda, B, \sigma} \neq \emptyset \right\},$$

para cada $B \in \mathcal{B}_X$, siendo $\Gamma_{\lambda, B, \sigma}$ la clase de las curvas totalmente λ -densas en B (Definición 3.4.2).

Nótese que ψ_σ está bien definida, ya que si $B \in \mathcal{B}_X$ entonces fijado $x_0 \in B$ tenemos que la curva $\gamma(t) := x_0$ es totalmente λ -densa en B , para cualquier $0 < \lambda \leq \text{Diam}(B)$. Otra observación que podemos hacer al σ -GNDT ψ_σ es que, gracias al Teorema 3.4.1, se cumple la desigualdad

$$\beta(B) \leq \psi_\sigma(B),$$

para cualquier $B \in \mathcal{B}_X$, siendo β la MNC de De Blasi (Definición 3.1.4).

■ **Ejemplo 3.5.1** Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, se tiene que

$$\psi_\sigma(B_X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \text{ no es reflexivo} \\ 0 & \text{si } X \text{ es reflexivo y separable} \end{cases}.$$

Probaremos el resultado de arriba en la siguiente proposición (Proposición 3.5.1). Es decir, si X no es reflexivo tenemos que $\psi_\sigma(B_X) = 1 = \phi_d(B_X)$, mientras que si X es reflexivo y separable, $\psi_\sigma(B_X) = 0$, el mismo valor que toma ϕ_d en la bola unidad cerrada de un espacio de Banach de dimensión finita (véase el Teorema 1.1.3).

De manera un poco menos formal, se podría decir que el σ -GNDT ψ_σ *actúa* en espacios de Banach de dimensión infinita, reflexivos y separables, de la misma forma que el GND ϕ_d en espacios de Banach de dimensión finita. No obstante, y como ya hemos señalado en la Nota 3.4.1, las curvas totalmente λ -densas y las curvas α -densas son esencialmente distintas. Queda evidenciada así, una vez más, la importancia de la topología con la que dotemos al espacio X a la hora de trabajar con los distintos tipos de curva que hemos definido en esta memoria. ■

Al igual que ocurre con el GND ϕ_d (Definición 1.1.4), el σ -GNDT ψ_σ (Definición 3.5.1) no es una aplicación semi-aditiva: tomando $X := L^1$ y el conjunto de las funciones de densidad del Ejemplo 3.2.1 $\mathcal{D} \subset B_{L^1}$, razonando de la misma forma que en dicho ejemplo y teniendo presente el ejemplo anterior, se tiene que $1 = \psi_\sigma(B_{L^1}) < 2 = \psi_\sigma(\mathcal{D})$. Así pues, el σ -GNDT ψ_σ no puede ser una MNC. No obstante, en el caso de que X sea separable, usaremos la aplicación ψ_σ para definir una MNC en (X, σ) . Probaremos esto más adelante.

En el siguiente resultado, mostraremos algunas propiedades del σ -GNDT ψ_σ . Recordemos que estamos notando por \mathcal{W}_X^σ la clase de los conjuntos precompactos de (X, σ) .

Proposición 3.5.1 Supongamos que X es separable. Dados $A, B \in \mathcal{B}_X$, se verifica que:

1. $\psi_\sigma(\overline{\text{Conv}}(B)) = 0$ si, y sólo si, $B \in \mathcal{W}_X^\sigma$.
2. Para cualquier $r > 0$ se tiene que

$$\psi_\sigma(rB_X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ es reflexivo} \\ r & \text{si } X \text{ no es reflexivo} \end{cases}.$$

3. $\psi_\sigma(\overline{\text{Conv}}(A \cup B)) \leq \max \left\{ \psi_\sigma(\overline{\text{Conv}}(A)), \psi_\sigma(\overline{\text{Conv}}(B)) \right\}$.

Demostración. (1) Sea $B \in \mathcal{B}_X$ cualquiera. Si $\psi_\sigma(\overline{\text{Conv}}(B)) = 0$, tenemos que $\overline{\text{Conv}}(B) = \gamma(I)$ para cierta curva $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ y entonces $\overline{\text{Conv}}(B)$ es σ -compacto. Consecuentemente, $B \in \mathcal{W}_X^\sigma$.

Recíprocamente, si $B \in \mathcal{W}_X^\sigma$, entonces gracias al Teorema de Krein (cf. [67]), $\text{Conv}(B) \in \mathcal{W}_X^\sigma$. Ahora bien, como X es separable y $\overline{\text{Conv}}(B)$ es σ -compacto, tenemos (cf. [64]) que $\overline{\text{Conv}}(B)$ es metrizable. Así pues, según el teorema de Hahn-Mazurkiewicz (cf. [66], [73]), el espacio métrico $(\overline{\text{Conv}}(B), \sigma)$ es la imagen σ -continua de I , es decir, $\psi_\sigma(\overline{\text{Conv}}(B)) = 0$.

(2) Si X es reflexivo y separable, teniendo presente el apartado 1, debe ser $\psi_\sigma(rB_X) = 0$, ya que X es reflexivo si (y sólo si) B_X es σ -compacto (cf. [34]).

Supongamos ahora que X no es reflexivo. Sea θ el vector nulo de X , y definamos $\gamma: I \rightarrow (X, \sigma)$ como $\gamma(t) := \theta$ para todo $t \in I$. Entonces, es claro que γ es una curva totalmente r -densa en rB_X , y por lo tanto, $\psi_\sigma(rB_X) \leq r$. Si fuese $\psi_\sigma(rB_X) < r$, entonces, por las propiedades de la MNC de De Blasi β (Definición 3.1.4) y el Teorema 3.4.1, tendríamos que

$$r = \beta(rB_X) \leq \psi_\sigma(rB_X) < r,$$

lo cual es contradictorio. Así pues, $\psi_\sigma(rB_X) = r$.

(3) Omitimos la prueba de esta propiedad porque que es totalmente análoga a la prueba del Lema 3.3.1. □

Definición 3.5.2 Se define el grado de no-densificación convexo débil, σ -GNDC, como la aplicación $\Psi: \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\Psi(B) := \sup \left\{ \psi_\sigma(\overline{\text{Conv}}(C)) : C \subseteq \bar{B} \right\},$$

para cada $B \in \mathcal{B}_X$.

Nótese que Ψ está bien definida. De hecho, si $B \in \mathcal{B}_X$, entonces $\overline{\text{Conv}}(C) \in \mathcal{B}_X$ para cualquier $C \subset B$ no vacío, y por lo tanto $\psi_\sigma(\overline{\text{Conv}}(C))$ está bien definido (esto ya lo probamos justo después de la Definición 3.5.1).

Por otro lado, el σ -GNDT ψ_σ y el σ -GNDC Ψ en general son aplicaciones distintas:

■ **Ejemplo 3.5.2** En el espacio L^1 , sea \mathcal{D} el conjunto de las funciones de densidad del Ejemplo 3.2.1. Como ya se ha comentado tras el Ejemplo 3.5.1, $\psi_\sigma(\mathcal{D}) = 2$ y por lo tanto, gracias a la Proposición 3.5.1 se tiene que

$$1 = \psi_\sigma(B_{L^1}) < 2 = \psi_\sigma(\mathcal{D}) \leq \Psi(B_{L^1}).$$

Ya estamos en condiciones de enunciar el resultado principal de esta sección:

Teorema 3.5.1 Si X es separable, el σ -GNDC Ψ es una MNC en (X, σ) .

Demostración. Totalmente análoga a la prueba del Teorema 3.3.1, teniendo en cuenta la Proposición 3.5.1. □

Como hemos notado en la Sección 3.3, desigualdad (3.10), puesto que la MNC de De Blasi β (Definición 3.1.4) acota superiormente a cualquier MNC definida en los conjuntos acotados de (X, σ) , gracias al Teorema 3.4.1 tenemos que Ψ también acota superiormente a cualquier otra MNC definida en los acotados de (X, σ) si X es separable. Formalmente:

Corolario 3.5.1 Si X es separable, y $\nu: \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una MNC en (X, σ) , entonces

$$\nu(B) \leq \nu(B_X)\Psi(B), \tag{3.29}$$

para cada $B \in \mathcal{B}_X$. Además, si X es de dimensión infinita esta desigualdad es la mejor posible.

Demostración. Si X es reflexivo, el resultado se tiene de forma trivial gracias a la Proposición 3.5.1, así que vamos a suponer que X no es reflexivo.

Dada cualquier MNC en (X, σ) , $v : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}_+$ gracias a [16, Th. 4] y al Teorema 3.4.1 tenemos que

$$\begin{aligned} v(B) &\leq v(B_X)\beta(B) = v(B_X) \sup \left\{ \beta(\overline{\text{Conv}}(C)) : C \subseteq \bar{B} \right\} \leq \\ &\leq v(B_X) \sup \left\{ \psi_\sigma(\overline{\text{Conv}}(C)) : C \subseteq \bar{B} \right\} = v(B_X)\Psi(B), \end{aligned}$$

para cualquier $B \in \mathcal{B}_X$. Queda probada entonces la desigualdad (3.29) del enunciado.

Que la desigualdad (3.29) es la mejor posible en espacios de Banach de dimensión infinita, ya lo hemos probado en resultados anteriores: si $B \in \mathcal{W}_X^\sigma$ tenemos una igualdad (Proposición 3.5.1), mientras que si $B := B_{L^1}$ la desigualdad es estricta (Ejemplo 3.5.2).

□

Otra consecuencia interesante del Teorema 3.5.1 es la siguiente:

Corolario 3.5.2 Si X es separable, se verifica que

$$\beta(B) \leq \Psi(B) \leq 2\beta(B), \quad (3.30)$$

para cada $B \in \mathcal{B}_X$, siendo β la MNC de De Blasi (Definición 3.1.4). Además, si X es de dimensión infinita esta desigualdad es la mejor posible.

Demostración. Vamos a suponer que X no es reflexivo, ya que en otro caso el resultado se tiene de forma trivial: $\beta(B) = 0$ por la propia definición de β y $\Psi(B) = 0$ si tenemos en cuenta la definición de Ψ (Definición 3.5.2) y la Proposición 3.5.1. Sea $B \in \mathcal{B}_X$ cualquiera.

Por un lado, gracias al Teorema 3.4.1, tenemos que

$$\beta(B) \leq \Psi(B), \quad (3.31)$$

y queda probada la primera desigualdad de (3.30).

Por otro lado, gracias a [16, Th. 4], se verifica que

$$\Psi(B) \leq \Psi(B_X)\beta(B). \quad (3.32)$$

Ahora bien, gracias a la desigualdad triangular, tenemos que si γ es una curva cualquiera en (X, σ) con $\gamma(I) \subset B_X$, entonces dado $x \in B_X$

$$\|x - \gamma(t)\| \leq \|x\| + \|\gamma(t)\| \leq 2 \quad \forall t \in I,$$

y por lo tanto, según la desigualdad de arriba y (3.32), debe ser $\Psi(B) \leq 2\beta(B_X) = 2$, y las desigualdades (3.30) del enunciado quedan probadas.

Que las desigualdades son las mejores posibles en espacios de Banach de dimensión infinita, es fácil con lo que ya hemos probado a lo largo de este capítulo: puesto que $\psi_\sigma(\mathcal{D}) = 2$ siendo \mathcal{D} el conjunto de las funciones de densidad de L^1 (la prueba es la misma que la del Ejemplo 3.2.1) y $\Psi(B_{L^1}) \leq 2$, debe ser $\Psi(B_{L^1}) = 2$. Entonces, tenemos que

$$1 = \beta(B_{L^1}) < 2 = \Psi(B_{L^1}) = 2\beta(B_{L^1}).$$

Además, siguiendo la prueba del Corolario 3.3.1, encontramos que $\Psi(B_{c_0}) = 1$, y por lo tanto se tiene que

$$1 = \beta(B_{c_0}) = \Psi(B_{c_0}) < 2\beta(B_{c_0}).$$

□

Para terminar este capítulo, mostramos algunas desigualdades entre las distintas MNC estudiadas en estas notas.

Proposición 3.5.2 Si X es separable, se verifican las siguientes desigualdades

$$\beta(B) \leq \Psi(B) \leq \Psi(B_X)\beta(B) \leq \Psi(B_X)\Phi(B) \leq 2\Psi(B_X)\chi(B) \leq 2\Psi(B_X)\Phi(B),$$

para cada $B \in \mathcal{B}_X$ siendo β la MNC de De Blasi (Definición 3.1.4), Ψ el σ -GNDC, Φ el GNDC (Definición 3.3.1) y χ la MNC de Hausdorff (Definición 3.1.3). Además, estas desigualdades son las mejores posibles en espacios de Banach de dimensión infinita.

Demostración. Todas las desigualdades han sido probadas a lo largo de este capítulo, salvo la desigualdad $\beta(B) \leq \Phi(B)$. Pero esto es sencillo: basta tener presente la desigualdad $\beta(B) \leq \phi_d(B)$, la cual es evidente a partir de las definiciones de β y ϕ_d , y la definición del GNDC Φ .

□



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

4. Punto fijo y densificación



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

4.1 Los teoremas de punto fijo de Banach, Schauder y Darbo-Sadovskii

En las siguientes secciones revisaremos los teoremas de punto fijo de Banach (Teorema 4.1.1), de Schauder (Teorema 4.1.4) y de Darbo-Sadovskii (Teorema 4.1.6). Sin duda alguna, podríamos decir que tales teoremas son de los más importantes en la Teoría de Punto Fijo. Además, probaremos nuevos resultados sobre punto fijo basados en el GND ϕ_d (Definición 1.1.4).

Recordemos que \mathcal{B}_X denota la clase de los conjuntos no vacíos y acotados de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, y B_X su bola unidad cerrada. Asimismo, puesto que el concepto de punto fijo lo usaremos con mucha frecuencia:

Definición 4.1.1 Sea $T : C \subset X \rightarrow X$ una aplicación cualquiera. Un vector $x \in C$ se dice que es un punto fijo de T si $T(x) = x$. Notaremos por $\text{Fix}(T)$ el conjunto (posiblemente vacío) de puntos fijos de T .

Algunos tipos de aplicaciones, muy conocidas, que usaremos en este capítulo son las siguientes:

Definición 4.1.2 Sea $T : C \subset X \rightarrow X$ una aplicación. Se dice que:

1. T es lipschitziana, o L -lipschitziana, si existe $L > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in C.$$

2. T es una k -contracción si es k -lipschitziana con $k \in (0, 1)$.
3. T es contractiva si $\|T(x) - T(y)\| < \|x - y\|$ para cada $x, y \in C$ con $x \neq y$.
4. T es no-expansiva si es L -lipschitziana con $L := 1$.

De la definición anterior, se deducen las siguientes implicaciones:

$$T \text{ es una } k\text{-contracción} \Rightarrow T \text{ es contractiva} \Rightarrow T \text{ es no-expansiva} \Rightarrow T \text{ es lipschitziana}$$

Pero ninguna de tales implicaciones es recíproca en general, cf. [1], [11], [42], [44].

4.1.1 El teorema de punto fijo de Banach

En lo que sigue, los exponentes de las aplicaciones se entenderán para la composición, y no como exponente algebraico. También debemos mencionar que la mayoría de los resultados sobre punto fijo que mostraremos en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, son igualmente válidos para un espacio métrico completo cualquiera (E, d) .

De todos los resultados sobre punto fijo que existen actualmente, uno de los más importantes e influyentes es, sin lugar a dudas, el teorema de punto fijo de Banach, probado por el célebre matemático polaco en 1922 (cf. [1], [11]):

Teorema 4.1.1 — Punto fijo de Banach. Sea $T : C \subset X \rightarrow C$ una k -contracción, para algún $k \in (0, 1)$. Entonces, existe un único $x_0 \in \text{Fix}(T)$ y además, fijado $x_1 \in X$, la sucesión $(T^n(x_1))_{n \geq 1}$ converge a x_0 . De hecho, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica la siguiente desigualdad

$$\|T^n(x_1) - x_0\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - T(x_1)\|.$$

Nota 4.1.1 Algunos autores llaman al resultado anterior principio de contracción de Banach (cf. [42]). No obstante, en estas notas nos referiremos al mismo como Teorema de punto fijo de Banach, para seguir la misma terminología de otros resultados de punto fijo que veremos más adelante.

Como podemos comprobar en el siguiente ejemplo, el Teorema 4.1.1 no es válido para aplicaciones contractivas.

■ **Ejemplo 4.1.1** Sea $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de las funciones continuas definidas en I , dotado de la norma del supremo. Consideremos el conjunto siguiente:

$$C := \left\{ f \in \mathcal{C}(I) : 0 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1, \forall x \in I \right\}.$$

Es claro que C es acotado, convexo y cerrado. También es inmediato probar que la aplicación $T : C \rightarrow C$ dada por $T(f)(x) := xf(x)$ para cada $f \in C$ y $x \in I$ es una contracción sin ningún punto fijo en C . ■

No obstante, si C es compacto tenemos el siguiente resultado (cf. [42, Th. 2.2, p. 12]):

Teorema 4.1.2 Sea $T : C \subset X \rightarrow C$ contractiva, con C compacto. Entonces, fijado $x_1 \in X$, la sucesión $(T^n(x_1))_{n \geq 1}$ converge al único punto fijo de T .

Debemos notar que el teorema anterior no es cierto si asumimos que C es σ -compacto (es decir, débil compacto) en lugar de compacto:

■ **Ejemplo 4.1.2** Sea el conjunto siguiente

$$C := \left\{ f : I \rightarrow I : f \in L^1, \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \right\},$$

siendo L^1 el espacio de las funciones Lebesgue integrables (Ejemplo 1.3.1). Es claro que C es un conjunto convexo y cerrado. Además, C es un *segmento* de L^1 , y por lo tanto σ -compacto (cf. [23, Th. 13.6, p. 140]).

Por otro lado, en [21] se define una aplicación $T : C \rightarrow C$ contractiva sin ningún punto fijo. No mostramos aquí tal aplicación T , pero diremos que está relacionada con la aplicación que mostraremos en el Ejemplo 4.2.3. ■

Así pues, en el caso que el conjunto $C \subset X$ sea compacto, la hipótesis de que T sea una k -contracción, para algún $k \in (0, 1)$, se puede hacer menos restrictiva asumiendo que T sea contractiva. Ahora bien, si C además de compacto es convexo la continuidad de T (que es una condición mucho menos restrictiva que ser contractiva) es condición suficiente para que $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Veremos esto con más detalle en la siguiente sección, concretamente en el Teorema de punto fijo de Schauder (Teorema 4.1.4). Más aún, si T es no-expansiva en el Teorema 4.1.5 mostraremos una sucesión basada en curvas α -densas convergente a un punto fijo de T , siendo dicha sucesión igualmente convergente en el caso de que T sea una k -contracción o contractiva, pues según la Definición 4.1.2 T sería, en particular, una aplicación no-expansiva.

4.1.2 El teorema de punto fijo de Schauder

El teorema de punto fijo de Banach (Teorema 4.1.1) admite un par de observaciones que pensamos pueden ser interesantes. La primera, es que dicho teorema, además de establecer la existencia y unicidad del punto fijo de las k -contracciones, para $k \in (0, 1)$, proporciona una sucesión que converge al punto fijo de T , incluso muestra una cota superior del error de aproximación. La segunda observación que podemos hacer es que la propiedad de ser una k -contracción, para algún $k \in (0, 1)$, es una propiedad muy restrictiva para una aplicación. En esta sección estudiaremos algunos resultados de punto fijo en los que la propiedad de ser una k -contracción, bajo ciertas condiciones, se puede cambiar por otras propiedades menos restrictivas.

En el caso particular de que $X := \mathbb{R}^n$ tenemos el siguiente resultado (cf. [11, Th. 1.7, p. 9]), probado por Brouwer en 1912:

Teorema 4.1.3 — Punto fijo de Brouwer. Sea $T : C \rightarrow C$ continua, con $C \subset \mathbb{R}^n$ no vacío, convexo y cerrado. Entonces, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

A diferencia del Teorema de punto fijo de Banach (Teorema 4.1.1) el teorema anterior no ofrece, a priori, información sobre el cálculo de los puntos fijos de la aplicación T , mientras que la única condición impuesta a T es que sea continua, condición mucho más débil que ser una k -contracción para algún $k \in (0, 1)$. Por otro lado, en dimensión finita los conjuntos acotados y cerrados son compactos (Teorema de Heine-Borel, cf. [73]), y así pues, es de esperar que el teorema anterior no sea válido en dimensión infinita, incluso cuando C es un conjunto débil compacto. Mostraremos esto en el siguiente ejemplo, debido a Kakutani (cf. [11, Prop. 2.3, p. 11]):

■ **Ejemplo 4.1.3** Sea $\ell_2(\mathbb{Z})$ el espacio de las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de cuadrado integrable, con su norma habitual, y $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ la base estándar de $\ell_2(\mathbb{Z})$, es decir, $e_n := (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ con el 1 en la n -ésima posición, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Definimos la aplicación $U : \ell_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z})$ como

$$U(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e_{n+1} \quad \forall x := (\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

Entonces, no es difícil comprobar que la aplicación $T : B_{\ell_2(\mathbb{Z})} \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z})$ dada por

$$T(x) := (1 - \|x\|)e_0 + U(x), \quad \forall x \in B_{\ell_2(\mathbb{Z})},$$

es una aplicación continua, con $T(B_{\ell_2(\mathbb{Z})}) \subset B_{\ell_2(\mathbb{Z})}$, y además, T no tiene ningún punto fijo. ■

No obstante, el Teorema de punto fijo de Brouwer fue generalizado a espacios de Banach de dimensión infinita por Schauder en 1930 (cf. [1], [11], [42]):

Teorema 4.1.4 — Punto fijo de Schauder. Sea $T : C \rightarrow C$ continua, con $C \subset X$ no vacío, convexo y compacto. Entonces, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Nota 4.1.2 El teorema anterior es válido si en lugar de asumir que el conjunto C es compacto, asumimos que $T(C)$ es precompacto (cf. [11]), pero este hecho es irrelevante para nuestros propósitos.

Al igual que ocurre con el Teorema de punto fijo de Brouwer (Teorema 4.1.3), el teorema anterior no ofrece, a priori, información sobre el cálculo de los puntos fijos de T . No obstante (cf. [1, Th. 2.1, p. 12], [42, Th. 3.1, p. 28]), en el caso particular de que $T : C \rightarrow C$ sea no-expansiva, con C convexo y compacto, fijado $x_1 \in C$ definamos para cada entero $n > 1$ la aplicación $T_n : C \rightarrow C$ como

$$T_n(x) := \left(1 - \frac{1}{n}\right)T(x) + \frac{1}{n}T(x_1) \quad \forall x \in C.$$

Es claro que T_n está bien definida y que es una $(1 - \frac{1}{n})$ -contracción. Entonces, según el Teorema de punto fijo de Banach (Teorema 4.1.1), para cada entero $n > 1$, existe un único $x_n \in \text{Fix}(T_n)$. Gracias a la compacidad de C , existe una subsucesión de $(x_n)_{n \geq 1}$ convergente a cierto $x_0 \in C$. Es fácil probar que x_0 es un punto fijo de T .

Nota 4.1.3 Si $C \in \mathcal{B}_X$ es convexo y cerrado, y $T : C \rightarrow C$ es una aplicación no-expansiva, la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ de puntos fijos de las aplicaciones T_n del párrafo anterior se denomina *sucesión de puntos fijos aproximados*. Entonces, en este caso, tenemos que

$$\inf \left\{ \|T(x) - x\| : x \in C \right\} = 0. \quad (4.1)$$

ya que si, para cada entero $n > 1$, $x_n \in \text{Fix}(T_n)$ se verifica que $\|T(x_n) - x_n\| = \frac{1}{n}\|T(x_n) - T(x_1)\| \rightarrow 0$.

Así pues, si $C \in \mathcal{B}_X$ es convexo y compacto, y $T : C \rightarrow C$ es no-expansiva, según lo expuesto en la nota anterior, podemos encontrar una sucesión convergente a un punto fijo de T . Ahora bien, a esta sucesión le podemos hacer un par de observaciones: la primera, es que dicha sucesión realmente es una subsucesión de una cierta sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$. La segunda, es que la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ está formada por los puntos fijos de las aplicaciones T_n antes definidas, es decir, para hallar cada término de la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ debemos hallar previamente el punto fijo de la correspondiente aplicación T_n . En definitiva, el coste computacional del cálculo de la sucesión convergente a un punto fijo de T es elevado.

4.1.3 Iteraciones

Dada una aplicación $T : C \subset X \rightarrow C$ con $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$, bajo ciertas condiciones se puede mostrar, explícitamente, una sucesión en C que converge a algún $x_0 \in \text{Fix}(T)$. Generalmente, dichas sucesiones se definen de forma recurrente y se les llama *iteraciones*. Por ejemplo, si T es una k -contracción para algún $k \in (0, 1)$, fijando cualquier $x_1 \in C$ la sucesión

$$x_{n+1} := T^n(x_1) \quad \forall n \geq 1, \quad (4.2)$$

es la bien conocida iteración de Picard y converge al único punto fijo de T , según el Teorema de punto fijo de Banach (Teorema 4.1.1). Otra iteración muy conocida es la denominada *iteración de Mann* dada por

$$x_{n+1} := (1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n T(x_n) \quad \forall n \geq 1, \quad (4.3)$$

donde $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset (0, 1)$ y $x_1 \in C$ son prefijados. Si T es continua y la sucesión (4.3) converge a $x_0 \in C$, entonces $x_0 \in \text{Fix}(T)$ (cf. [27, Lem. 2.1]).

En esta sección, mostraremos una sucesión basada en curvas α -densas que converge a un punto fijo de T si C es compacto y T es no-expansiva.

Lema 4.1.1 Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones de números positivos tales que $\sum_{n \geq 1} b_n < +\infty$ y $a_{n+1} \leq a_n + b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, el límite $\lim_n a_n$ existe y es finito.

La prueba del lema anterior se puede consultar en [71, Lem. 1]. Y ahora, el resultado principal de esta sección:

Teorema 4.1.5 Sea $C \subset X$ no vacío, compacto y convexo, y $T : C \rightarrow C$ no-expansiva. Entonces $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$, y fijados $\lambda \in (0, 1)$, $x_1 \in C$ y una sucesión de números positivos $(\alpha_n)_{n \geq 1}$, tal que $\sum_{n \geq 1} \alpha_n < +\infty$, existe para cada $n \in \mathbb{N}$ una curva $\gamma_n : I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$, α_n -densa en C de forma que la sucesión dada por

$$x_{n+1} := \lambda T(y_n) + (1 - \lambda)T(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4.4)$$

converge a $x_0 \in \text{Fix}(T)$, siendo $y_n \in \gamma_n(I)$ tal que $\|x_n - y_n\| \leq \alpha_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $x_1 \in C$, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ y $\lambda \in (0, 1)$ como en el enunciado. Puesto que C es convexo y compacto, es densificable (Teorema 1.1.1), y por lo tanto para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una curva α_n -densa en C , pongamos $\gamma_n : I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$. Sea, como en el enunciado, la sucesión

$$x_{n+1} := \lambda T(y_n) + (1 - \lambda)T(x_n) \in C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

siendo $y_n \in \gamma_n(I)$ tal que

$$\|x_n - y_n\| \leq \alpha_n, \quad (4.5)$$

para cada n . Por un lado, gracias a (4.5) y al hecho de que T es no-expansiva, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_n \|x_{n+1} - T(x_n)\| &= \lim_n \|\lambda T(y_n) + (1 - \lambda)T(x_n) - \lambda T(x_n) - (1 - \lambda)T(x_n)\| = \\ &= \lambda \lim_n \|T(y_n) - T(x_n)\| \leq \lambda \lim_n \|y_n - x_n\| \leq \lambda \lim_n \alpha_n = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ahora bien, como C es compacto existe una subsucesión de $(x_n)_{n \geq 1}$, que notaremos por $(x_{n_k})_{k \geq 1}$, convergente a cierto $x_0 \in C$, y teniendo en cuenta (4.6) y que T es continua

$$\|x_0 - T(x_0)\| \leq \|x_0 - x_{n_{k+1}}\| + \|x_{n_{k+1}} - T(x_{n_k})\| + \|T(x_{n_k}) - T(x_0)\| \rightarrow 0,$$

cuando $k \rightarrow \infty$. Así pues, $x_0 \in \text{Fix}(T)$.

Por otro lado, puesto que T es no-expansiva se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_0\| &= \|\lambda T(y_n) + (1 - \lambda)T(x_n) - \lambda T(x_0) - (1 - \lambda)T(x_0)\| \leq \\ &\leq \lambda \|T(y_n) - T(x_0)\| + (1 - \lambda) \|T(x_n) - T(x_0)\| \leq \\ &\leq \lambda \|y_n - x_n\| + \lambda \|x_n - x_0\| + (1 - \lambda) \|x_n - x_0\| \leq \lambda \alpha_n + \|x_n - x_0\|. \end{aligned}$$

Entonces, tomando $a_n := \|x_n - x_0\|$ y $b_n := \lambda \alpha_n$, gracias al Lema 4.1.1, concluimos que existe (y es finito) $\lim_n \|x_n - x_0\|$, y puesto que $\lim_k \|x_{n_{k+1}} - x_0\| = 0$, debe ser $\lim_n \|x_n - x_0\| = 0$ y esto concluye la prueba. □

Nota 4.1.4 En el teorema anterior, la sucesión $(x_{n+1})_{n \geq 1}$ definida en (4.4), por supuesto, depende de la sucesión $(y_n)_{n \geq 1}$. También es claro que la sucesión $(y_n)_{n \geq 1}$ no tiene porqué ser única puesto que para cada n , la curva α_n -densa en C , γ_n , no tiene porqué ser única. No obstante, si $(y'_n)_{n \geq 1}$ es otra sucesión verificando las condiciones del enunciado, la sucesión $x'_{n+1} := \lambda T(y'_n) + (1 - \lambda)T(x'_n)$ converge, según se ha probado en el teorema anterior, a algún punto fijo de T . En definitiva, para cualquier elección de

$(y_n)_{n \geq 1}$, verificando las condiciones del enunciado del teorema anterior, la sucesión $(x_{n+1})_{n \geq 1}$ dada en (4.4) converge a algún punto fijo de T .

Nótese que, puesto que C es compacto, la sucesión dada en (4.4) tiene una subsucesión convergente y que dicha subsucesión converge, precisamente, gracias a su continuidad de la aplicación T , a un punto fijo de la misma. La hipótesis de que T sea no-expansiva realmente es para probar que la sucesión dada en (4.4) converge a un punto fijo de T . Así pues, del teorema anterior se deduce el Teorema de punto fijo de Schauder:

Corolario 4.1.1 Sea $C \in \mathcal{B}_X$ compacto y convexo, y $T : C \rightarrow C$ continua. Entonces, la sucesión dada en (4.4) posee una subsucesión convergente a un punto fijo de T .

Para terminar este apartado, mostramos un ejemplo para ilustrar la convergencia de la sucesión dada en el Teorema 4.1.5. Antes, necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.1.2 Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ no vacío y convexo, y $T : C \rightarrow C$, pongamos $T := (T_1, \dots, T_n)$, tal que $\frac{\partial T_i}{\partial x_j}$ es continua para cada $i, j = 1, \dots, n$. Notaremos por $\|\cdot\|_A$ la norma matricial $\|M\|_A := \max\{\sum_{j=1}^n |m_{ij}| : i = 1, \dots, n\}$ para cada matriz $M := (m_{ij})_{i,j=1}^n$, y por $JT(x, y)$ la matriz jacobiana de T en (x, y) . Supongamos que existe $L > 0$ tal que $\|JT(x, y)\|_A \leq L$ para cada $x, y \in C$. Entonces,

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C.$$

siendo $\|\cdot\|$ la norma euclídea de \mathbb{R}^n . Es decir, se tiene que T es una aplicación L -lipschitziana.

Demostración. Sean $x, y \in C$, y pongamos $f(t) := T(x + t(y - x))$ para cada $t \in I$. Entonces, f está bien definida puesto que C es convexo y además $f'(t) = JT(x, y) \cdot (x - y)$ para cada $t \in I$.

Por otro lado, puesto que

$$T(x) - T(y) = f(0) - f(1) = \int_0^1 f'(t) dt,$$

gracias a las propiedades de la integral y de la norma matricial $\|\cdot\|_A$ tenemos que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \int_0^1 \|JT(x, y) \cdot (x - y)\| dt \leq \int_0^1 \|JT(x, y)\|_A \|x - y\| dt \leq L\|x - y\|,$$

y esto concluye la prueba. □

■ **Ejemplo 4.1.4** Sea $T : I^2 \rightarrow I^2$ la aplicación definida como

$$T(x, y) := \left(\frac{1}{3.001}(1 + y - \sin(x + y)), \frac{1}{3.001}(1 + x + \cos(x - y)) \right),$$

para cada $x, y \in I$. Es claro que T está bien definida y que las derivadas parciales de sus componentes son continuas. Además, es inmediato probar que $\|JT(x, y)\| \leq \frac{3}{3.001}$ para cada $x, y \in I$. Así pues, según el Lema 4.1.2, tenemos que T es no-expansiva. De hecho, T es una $\frac{3}{3.001}$ -contracción. El único punto fijo de T es

$$x_0 := (0.2924565413, 0.7321956943).$$

Sea $\lambda := \frac{1}{2}$, $x_1 := (0, 0)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, γ_n la curva $\frac{1}{n^4}$ -densa de los cosenos del Ejemplo 1.1.1. En la Tabla 4.1 podemos ver algunas aproximaciones de x_0 mediante las sucesión $(\frac{1}{2}(T(y_n) + T(x_n)))_{n \geq 1}$ del Teorema 4.1.5, la sucesión de Mann (4.3) dada por $(\frac{1}{2}(x_n + T(x_n)))_{n \geq 1}$ y la sucesión de Picard (4.2) $(T^n(x_1))_{n \geq 1}$. Los errores en cada aproximación se han notado por $\varepsilon_n^{(1)}$ para la sucesión Teorema 4.1.5, $\varepsilon_n^{(2)}$ para la sucesión de Mann y $\varepsilon_n^{(3)}$ para la sucesión de Picard, para los valores de n indicados en dicha tabla. ■

n	$\varepsilon_n^{(1)}$	$\varepsilon_n^{(2)}$	$\varepsilon_n^{(3)}$
5	0.000403982	0.03229680	0.002689262
6	0.001140763	0.01740925	0.001326610
7	0.000393239	0.00948969	0.000419443
8	0.000372037	0.00515060	0.000423879
9	0.000221313	0.00275304	0.000221181
10	0.000293204	0.00142147	0.000285272

Tabla 4.1: Comparación de la convergencia a x_0 , punto fijo de T , de las sucesiones $(\frac{1}{2}(T(y_n) + T(x_n)))_{n \geq 1}$ del Teorema 4.1.5, de Mann $(\frac{1}{2}(x_n + T(x_n)))_{n \geq 1}$ y de Picard $(T^n(x_1))_{n \geq 1}$.

4.1.4 El teorema de punto fijo de Darbo-Sadovskii

En el apartado anterior hemos revisado el Teorema de punto fijo de Schauder (Teorema 4.1.4), y en este apartado haremos lo mismo con otro conocido teorema de punto fijo basado en MNCs: el Teorema de punto fijo de Darbo-Sadovskii (Teorema 4.1.6). Dicho resultado es muy importante dentro de la Teoría de Punto Fijo, no sólo por sus muchas aplicaciones sino porque además generaliza los teoremas de punto fijo de Banach (Teorema 4.1.1) y Schauder (Teorema 4.1.4).

Nota 4.1.5 Aunque, en lo que sigue, no lo indicaremos explícitamente siempre vamos a suponer que todas las MNCs con las que vamos a trabajar están definidas en la clase \mathcal{B}_X de los conjuntos acotados y no vacíos del espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$.

Empezamos recordando la siguiente definición (cf. [11]):

Definición 4.1.3 Sea μ una MNC, $C \in \mathcal{B}_X$ y $T : C \subset X \rightarrow X$ continua. Se dice que T es (k, μ) -contractiva si existe $k > 0$ tal que

$$\mu(T(B)) \leq k\mu(B),$$

para cada $B \subset C$ no vacío, y que T es μ -condensante si

$$\mu(T(B)) < \mu(B),$$

para cada $B \subset C$ no vacío y no precompacto.

De la definición anterior, resulta evidente que si $T : C \subset X \rightarrow X$ es una aplicación (k, μ) -contractiva para algún $k \in (0, 1)$, entonces T es, en particular, una aplicación μ -condensante. No obstante, la clase de aplicaciones (k, μ) -contractivas, para $k \in (0, 1)$, está estrictamente contenida en la clase de aplicaciones μ -condensantes. Probaremos este hecho en el siguiente ejemplo (véase también la Nota 4.1.7).

■ **Ejemplo 4.1.5** Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función estrictamente decreciente con $f(0) = 1$, $T : B_X \rightarrow B_X$ la aplicación dada por $T(x) := f(\|x\|)x$, para cada $x \in B_X$, y κ la MNC de Kuratowski (Definición 3.1.2). Entonces, en [11, Exam. 6, p. 40] se prueba que T no puede ser una aplicación (k, κ) -contractiva para ningún $k \in (0, 1)$ y sin embargo resulta ser una aplicación κ -condensante. ■

Nota 4.1.6 En adelante, cuando indiquemos que una MNC μ definida en \mathcal{B}_X es invariante mediante el paso a la envoltura convexa, significará que $\mu(B) = \mu(\text{Conv}(B))$ para cada $B \in \mathcal{B}_X$. Por ejemplo, las MNCs de Hausdorff χ (Definición 3.1.3) y de Kuratowski κ (Definición 3.1.2) poseen esta propiedad (cf. [11]).

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.1.6 — Punto fijo de Darbo-Sadovskii. Sea μ una MNC invariante mediante el paso a la envoltura convexa, $C \in \mathcal{B}_X$ convexo y cerrado y $T : C \rightarrow C$ una aplicación μ -condensante. Entonces, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Antes de continuar, debemos mencionar que en el teorema anterior la hipótesis de que la aplicación T sea μ -condensante no se puede hacer menos restrictiva, en el sentido de que si μ es una MNC tal que $\mu(T(B)) \leq \mu(B)$ para cada $B \subset C$ no vacío, es decir, T es una aplicación $(1, \mu)$ -contractiva, el teorema anterior deja de ser válido:

■ **Ejemplo 4.1.6** ([11, Exam. 7, p. 41]) Sea ℓ_2 el espacio de las sucesiones reales de cuadrado sumable, con su norma habitual. Consideremos $T : B_{\ell_2} \rightarrow B_{\ell_2}$ la aplicación dada por

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) := \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \right),$$

para cada $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in B_{\ell_2}$. La continuidad de la aplicación T se sigue de la continuidad de la norma.

Es claro que podemos escribir $T := D + S$ siendo $D(x) := (\sqrt{1 - \|x\|^2}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ y S la isometría definida como $S(x) := (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, para cada $x := (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in B_{\ell_2}$. Nótese que dada cualquier sucesión $(\xi_n)_{n \geq 1} \subset B_{\ell_2}$, puesto que la sucesión $(\sqrt{1 - \|\xi_n\|^2})_{n \geq 1} \subset I$ posee una subsucesión convergente se deduce que $D(B_{\ell_2})$ es un subconjunto compacto de B_{ℓ_2} . Así pues, D transforma conjuntos acotados en conjuntos precompactos.

Por otro lado, la MNC de Kuratowski κ (Definición 3.1.2) cumple la desigualdad siguiente (cf. [11, Prop. 2.3, p. 21])

$$\kappa(A_1 + A_2) \leq \kappa(A_1) + \kappa(A_2),$$

para cualesquiera que sean los conjuntos A_1 y A_2 acotados y no vacíos de un espacio de Banach. Entonces, dado cualquier $B \subset B_{\ell_2}$ no precompacto, teniendo presente la desigualdad de arriba y las propiedades de las aplicaciones S y D , concluimos que

$$\kappa(T(B)) = \kappa(D(B) + S(B)) \leq \kappa(D(B)) + \kappa(S(B)) = \kappa(S(B)) = \kappa(B),$$

Sin embargo, es fácil comprobar que T no tiene ningún punto fijo en B_{ℓ_2} . ■

Nota 4.1.7 El Teorema 4.1.6 fue probado en 1955 por Darbo [28] para aplicaciones (k, μ) -contractivas, con $k \in (0, 1)$, y en 1967 por Sadovskii [65] para aplicaciones μ -condensantes. Aunque a primera vista, y según el Ejemplo 4.1.5, la prueba de Sadovskii puede parecer una ligera generalización de la prueba dada por Darbo, lo cierto es que la realidad es bien distinta. En [11, pp. 41-43] se prueba que la clase formada por las aplicaciones (k, κ) -contractivas (siendo κ la MNC de Kuratowski, Definición 3.1.2), con $k \in (0, 1)$, es de primera categoría (en el sentido de Baire) dentro de la clase formada por las aplicaciones κ -condensantes.

Ahora un lema que usaremos más adelante, sobre las propiedades del GND ϕ_d (Definición 1.1.4).

Lema 4.1.3 Sea $B \in \mathfrak{B}_X$. Entonces, se verifica que

1. $\phi_d(\text{Conv}(B)) \leq \phi_d(B)$, y esta desigualdad puede ser estricta.
2. $\phi_d(\bar{B}) \leq \phi_d(B)$.

Demostración. Sea $\gamma : I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ una curva α -densa en B , para algún $\alpha > \phi_d(B)$. La existencia de curvas α -densas en B , para $\alpha > \phi_d(B)$, está garantizada gracias a que B es un conjunto acotado. Entonces, dado cualquier $x \in B$ existe $t \in I$ tal que

$$\|x - \gamma(t)\| \leq \alpha. \quad (4.7)$$

Por otro lado, según el teorema Hahn-Mazurkiewicz (cf. [66], [73]) existe una curva $\omega : I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ tal que $\omega(I) = \text{Conv}(\gamma(I))$. Sea $x \in \text{Conv}(B)$, pongamos $x := \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ donde $x_i \in B$, $\lambda_i \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Según (4.7) existen $t_1, \dots, t_n \in I$ tales que

$$\|x_i - \gamma(t_i)\| \leq \alpha \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

Así pues, tomando $t \in I$ tal que $\omega(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(t_i)$, gracias a (4.8) tenemos que

$$\|x - \omega(t)\| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \|x_i - \gamma(t_i)\| \leq \alpha,$$

y por lo tanto ω es una curva α -densa en $\text{Conv}(B)$, de donde deducimos que $\phi_d(\text{Conv}(B)) \leq \alpha$ y puesto que $\alpha > \phi_d(B)$ es arbitrario, se sigue que $\phi_d(\text{Conv}(B)) \leq \phi_d(B)$. Nótese, que para $B := \{x, y\}$ con $x \neq y$, entonces $\phi_d(\text{Conv}(B)) = 0 < \|x - y\| = \phi_d(B)$, mientras que si B es convexo la desigualdad $\phi_d(\text{Conv}(B)) \leq \phi_d(B)$ es una igualdad.

Ahora, probaremos la desigualdad 2 del enunciado. Como $B \subset \bar{B}$ tenemos que $\gamma(I) \subset \bar{B}$. Además, dado $\varepsilon > 0$, puesto que $\bar{x} \in \bar{B}$ podemos tomar $x \in B$ tal que $\|\bar{x} - x\| \leq \varepsilon$. Tomando $t \in I$ verificando (4.7) tenemos que

$$\|\bar{x} - \gamma(t)\| \leq \|\bar{x} - x\| + \|x - \gamma(t)\| \leq \varepsilon + \alpha,$$

y de la arbitrariedad de ε , se sigue que $\phi_d(\bar{B}) \leq \alpha$ y por lo tanto $\phi_d(\bar{B}) \leq \phi_d(B)$ puesto que $\alpha > \phi_d(B)$ es arbitrario. □

Por otro lado, recordando que $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, sea Δ la siguiente clase de funciones:

$$\Delta := \left\{ h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ : h \text{ es monótona creciente y } \lim_n h^n(s) = 0, \forall s \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Nótese que la condición de continuidad no es requerida. Es claro que, para $0 < k < 1$, la función $h(s) := ks$ para cada $s \in \mathbb{R}_+$ pertenece a la clase Δ . También se puede comprobar, usando el teorema del valor medio, que las funciones $\ln(1 + s)$ y $\arctan(s)$ definidas para cada $s \in \mathbb{R}_+$ pertenecen a la clase Δ .

De la definición de la clase Δ , es claro que $h(s) < s$ para cualquier $s > 0$. De hecho, si fuese $h(s) \geq s$ para algún $s > 0$, entonces se debería cumplir que $h^n(s) \geq s$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto, teniendo presente las propiedades de h , debe ser $s = 0$ que es contradictorio porque estamos suponiendo que $s > 0$. Entonces, si μ es una MNC invariante mediante el paso a la envoltura convexa y $T : C \longrightarrow C$, con $C \in \mathcal{B}_X$ convexo, una aplicación continua verificando que $\mu(T(B)) \leq h(\mu(B))$ para cada $B \subset C$ no vacío y alguna $h \in \Delta$, según la observación anterior, tenemos que T es en particular una aplicación μ -condensante, ya que para cualquier $B \subset C$ no vacío y no precompacto tenemos que $\mu(T(B)) \leq h(\mu(B)) < \mu(B)$.

Así pues, gracias a las observaciones anteriores, tenemos la siguiente generalización del teorema de punto fijo de Darbo-Sadovskii (Teorema 4.1.6) probada en [3]:

Teorema 4.1.7 — Punto fijo de Darbo-Sadovskii generalizado. Sea μ una MNC invariante mediante el paso a la envoltura convexa, $C \in \mathcal{B}_X$ convexo y cerrado, $h \in \Delta$, y $T : C \longrightarrow C$ una aplicación continua tal que

$$\mu(T(B)) \leq h(\mu(B)),$$

para cada $B \subset C$ no vacío. Entonces, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

En el siguiente resultado probaremos que el Teorema 4.1.7 es válido si reemplazamos la MNC μ (invariante mediante el paso a la envoltura convexa) por el GND ϕ_d (Definición 1.1.4).

Teorema 4.1.8 Sean $C \in \mathcal{B}_X$ convexo y cerrado, $T : C \longrightarrow C$ continua y supongamos que existe $h \in \Delta$ tal que

$$\phi_d(T(B)) \leq h(\phi_d(B)), \tag{4.9}$$

para cualquier $B \subset C$ no vacío y convexo. Entonces, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Demostración. En primer lugar, notemos que al ser B un conjunto acotado, $\phi_d(B) \leq \text{Diam}(B)$. Del mismo todo, puesto que $T(C) \subset C$ tenemos que $T(C)$ también es acotado y por lo tanto $\phi_d(T(B)) \leq \text{Diam}(T(C))$.

Pongamos $B_0 := C$ y para cada entero positivo n , sea $B_n := \overline{\text{Conv}(T(B_{n-1}))}$. Entonces, gracias al Lema 3.3.1, la desigualdad (4.9) y las propiedades de h tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_d(B_n) &= \phi_d\left(\overline{\text{Conv}(T(B_{n-1}))}\right) \leq \phi_d(T(B_{n-1})) \leq h(\phi_d(B_{n-1})) = \\ &= h\left(\phi_d\left(\overline{\text{Conv}(T(B_{n-2}))}\right)\right) \leq h^2(\phi_d(B_{n-2})) \leq \dots \leq h^n(\phi_d(C)), \end{aligned} \tag{4.10}$$

para cada $n \geq 1$. Ahora bien, teniendo en cuenta (4.10) y el Teorema 3.3.2, si μ es una MNC cualquiera tenemos que

$$\lim_n \mu(B_n) \leq \mu(B_X) \lim_n \phi_d(B_n) = 0.$$

Así pues, según el teorema generalizado de las intersecciones de Cantor (cf. [11, p. 19]), puesto que $(B_n)_{n \geq 0}$ es una sucesión decreciente de conjuntos acotados de X , concluimos que $K := \bigcap_{n \geq 0} B_n$ es no vacío y compacto.

Por otro lado, es claro que K es convexo y $T(K) \subset K$. Entonces, según el teorema de punto fijo de Schauder (Teorema 4.1.4) $T : K \rightarrow K$ tiene algún punto fijo y esto concluye la prueba. □

Veamos un ejemplo donde se cumplen las condiciones del teorema anterior.

■ **Ejemplo 4.1.7** Sea ℓ_2 el espacio de las sucesiones de cuadrado sumable, con su norma habitual. Fijado $0 < \beta < 1/2$ sea $T : B_{\ell_2} \rightarrow B_{\ell_2}$ la aplicación dada por

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) := (\sqrt{1 - \|x\|^2}, \beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n, \dots)$$

para cada $x := (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in B_{\ell_2}$. La continuidad de T se sigue de la continuidad de la norma. Además, dado cualquier $x \in B_{\ell_2}$ con $\|x\| = 1$ tenemos que

$$\|T(x) - T(\theta)\|^2 = \|(1, \beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n, \dots)\|^2 = 1 + \beta^2 > 1 = \|x - \theta\|^2$$

siendo θ el vector nulo de ℓ_2 . Entonces, encontramos que T no puede ser una k -contracción para ningún $0 < k < 1$.

Por otro lado, la MNC de Hausdorff χ (Definición 3.1.3) cumple la desigualdad siguiente (cf. [11, Prop. 2.3, p. 21])

$$\chi(A_1 + A_2) \leq \chi(A_1) + \chi(A_2),$$

para cualesquiera que sean los conjuntos A_1 y A_2 acotados y no vacíos de un espacio de Banach. Entonces, procediendo igual que en el Ejemplo 4.1.6 tenemos que

$$\chi(T(B)) \leq \beta \chi(B) \tag{4.11}$$

para cada $B \subset B_{\ell_2}$ no vacío. Así pues, gracias a la desigualdad (4.11) y la Proposición 3.2.1 llegamos a que

$$\phi_d(T(B)) \leq 2\chi(T(B)) \leq 2\beta\chi(B) \leq 2\beta\phi_d(B)$$

y puesto que la función $h(s) := 2\beta s$ para cada $s \geq 0$ pertenece a la clase Δ , se verifican las condiciones del teorema anterior y $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. ■

Para terminar esta sección, mostramos una consecuencia del Teorema anterior:

Corolario 4.1.2 Sean $C \in \mathcal{B}_X$ convexo y cerrado, $T : C \rightarrow C$ continua y supongamos que existe $h \in \Delta$ tal que

$$\phi_d(T(B)) \leq h(\chi(B)), \tag{4.12}$$

para cualquier $B \subset C$ no vacío y convexo, siendo χ la MNC de Hausdorff (Definición 3.1.3). Entonces, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $B \subset C$ no vacío y convexo. Gracias a la Proposición 3.2.1 tenemos que

$$\chi(B) \leq \phi_d(B), \tag{4.13}$$

y teniendo presente las desigualdades (4.12) y (4.13), y las propiedades de h

$$\phi_d(T(B)) \leq h(\chi(B)) \leq h(\phi_d(B)),$$

y una llamada al Teorema 4.1.8 termina la prueba. □

4.1.5 Ecuaciones integrales de Volterra

Mantenemos la notación usada en secciones anteriores, $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ y

$$\Delta := \left\{ h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ : h \text{ es monótona creciente y } \lim_n h^n(s) = 0, \forall s \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

El teorema de punto fijo de Darbo-Sadovskii (Teorema 4.1.6), además de la generalización dada en el Teorema 4.1.7, admite otras generalizaciones como la siguiente (cf. [2, Th. 2.1]).

Teorema 4.1.9 Sea $C \in \mathcal{B}_X$ convexo y $T : C \longrightarrow C$ continua. Supongamos que existe $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ Lebesgue integrable con $\int_0^\varepsilon \varphi(u) du > 0$ para cada $\varepsilon > 0$, una MNC μ invariante mediante el paso a la envoltura convexa (véase la Nota 4.1.6) y una función $h \in \Delta$ tales que

$$\int_0^{\mu(T(B))} \varphi(u) du \leq h \left(\int_0^{\mu(B)} \varphi(u) du \right),$$

para cada $B \subset C$ no vacío. Entonces $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Nótese que para $\varphi(u) := 1$ para cada $u \in \mathbb{R}_+$, el teorema anterior es, precisamente, el Teorema 4.1.7. Así pues, efectivamente, estamos ante otra generalización del teorema de punto fijo de Darbo-Sadovskii (Teorema 4.1.6).

En esta sección veremos que el teorema anterior permanece válido si en lugar de usar una MNC μ , invariante mediante el paso a la envoltura convexa, usamos el GND ϕ_d (Definición 1.1.4). En otras palabras, encontramos otro resultado de punto fijo basado en MNCs que permanece válido para el GND ϕ_d el cual, recordemos, no es una MNC (véase la Nota 3.2.2). Además, como aplicación de dicho resultado, estudiaremos condiciones suficientes para establecer la existencia de soluciones de ciertas ecuaciones integrales.

Teorema 4.1.10 Sea $C \in \mathcal{B}_X$ convexo y $T : C \longrightarrow C$ continua. Supongamos que existe $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ Lebesgue integrable con $\int_0^\varepsilon \varphi(u) du > 0$ para cada $\varepsilon > 0$, y una función $h \in \Delta$ tales que

$$\int_0^{\phi_d(T(B))} \varphi(u) du \leq h \left(\int_0^{\phi_d(B)} \varphi(u) du \right),$$

para cada $B \subset C$ no vacío y convexo. Entonces $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Omitimos la prueba del teorema anterior puesto que es totalmente análoga a la prueba del Teorema 4.1.8, teniendo en cuenta las propiedades de la integral de Lebesgue. Nótese que si $\varphi(u) := 1$ para cada $u \in \mathbb{R}_+$ tenemos, precisamente, el Teorema 4.1.8. Así pues, el Teorema 4.1.10 es, efectivamente, una generalización del Teorema 4.1.8.

Por otro lado, consideremos la ecuación integral de Volterra siguiente

$$(EIV) \quad x(t) = g(t, x(t)) + \int_0^{p(t)} f(t, s, x(s)) ds,$$

donde $g : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $p : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ y $f : I \times I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones conocidas, cumpliendo ciertas propiedades que veremos más abajo. Como en otras secciones, $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ denotará el espacio de Banach de las funciones $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas con la norma del supremo. Para probar la existencia de soluciones de la ecuación (EIV), vamos a usar las siguientes hipótesis.

(C1) Las funciones g , p y f son funciones continuas, p no idénticamente nula.

(C2) Existen dos funciones φ , como en el Teorema 4.1.10, y $h \in \Delta$ tales que

$$\int_0^{2|g(t, x(t)) - g(t, y(t))|} \varphi(u) du \leq h \left(\int_0^{|x(t) - y(t)|} \varphi(u) du \right) \quad \forall t \in I, \quad (4.14)$$

para cada $x, y \in \mathcal{C}(I)$.

(C3) La desigualdad

$$h \left(\int_0^r \varphi(u) du \right) + q_r \leq \int_0^r \varphi(u) du, \quad (4.15)$$

tiene alguna solución $r_0 > 0$, siendo

$$q_r := \sup \left\{ \int_0^{|g(t,0)| + \int_0^{p(t)} |f(t,s,x(s))| ds} \varphi \left(u + |g(t,x(t)) - g(t,0)| \right) du : x \in rB_{\mathcal{C}(I)}, t \in I \right\}.$$

Proposición 4.1.1 Si se verifican las condiciones (C1)-(C3), entonces la ecuación (EIV) tiene alguna solución $x \in \mathcal{C}(I)$.

Demostración. Sea $T : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ la aplicación dada por

$$T(x)(t) := g(t,x(t)) + \int_0^{p(t)} f(t,s,x(s)) ds \quad \forall t \in I,$$

para cada $x \in \mathcal{C}(I)$. De la condición (C1) se deduce que T está bien definida, es decir, $T(x) \in \mathcal{C}(I)$ para cualquier $x \in \mathcal{C}(I)$. Además, T es continua. De hecho, dado $\varepsilon > 0$, si $x, y \in \mathcal{C}(I)$ puesto que g y f son uniformemente continuas en los compactos $I \times M$ e $I \times I \times M$ respectivamente, siendo $M := [\min\{-\|x\|_\infty, -\|y\|_\infty\}, \max\{\|x\|_\infty, \|y\|_\infty\}]$, tenemos que

$$\begin{aligned} |T(x)(t) - T(y)(t)| &\leq |g(t,x(t)) - g(t,y(t))| + \int_0^{p(t)} |f(t,s,x(s)) - f(t,s,y(s))| ds \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^{p(t)} \frac{\varepsilon}{2 \max\{p(t) : t \in I\}} ds \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.16)$$

siempre que $\|x - y\|_\infty \leq \delta$, para cierto $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$. Entonces, si $\|x - y\|_\infty \leq \delta$ gracias a (4.16) tenemos que $|T(x)(t) - T(y)(t)| \leq \varepsilon$ y puesto que $t \in I$ es arbitrario, $\|T(x) - T(y)\|_\infty \leq \varepsilon$. Así pues, T es continua.

Dado $r > 0$ y $x \in rB_X$, gracias a la condición (C2) tenemos para cualquier $t \in I$ que

$$\begin{aligned} \int_0^{|T(x)(t)|} \varphi(u) du &\leq \int_0^{|g(t,x(t)) - g(t,0)| + |g(t,0)| + \int_0^{p(t)} |f(t,s,x(s))| ds} \varphi(u) du = \\ &= \int_0^{|g(t,x(t)) - g(t,0)|} \varphi(u) du + \int_{|g(t,x(t)) - g(t,0)|}^{|g(t,x(t)) - g(t,0)| + |g(t,0)| + \int_0^{p(t)} |f(t,s,x(s))| ds} \varphi(u) du \leq \\ &\leq \int_0^{2|g(t,x(t)) - g(t,0)|} \varphi(u) du + \int_{|g(t,x(t)) - g(t,0)|}^{|g(t,x(t)) - g(t,0)| + |g(t,0)| + \int_0^{p(t)} |f(t,s,x(s))| ds} \varphi(u) du \leq \\ &\leq h \left(\int_0^{|x(t)|} \varphi(u) du \right) + \int_0^{|g(t,0)| + \int_0^{p(t)} |f(t,s,x(s))| ds} \varphi \left(u + |g(t,x(t)) - g(t,0)| \right) du \leq \\ &\leq h \left(\int_0^r \varphi(u) du \right) + q_r \end{aligned} \quad (4.17)$$

y puesto que $t \in I$ es arbitrario, según (4.17) debe ser

$$\int_0^{\|T(x)\|_\infty} \varphi(u) du \leq h \left(\int_0^r \varphi(u) du \right) + q_r. \quad (4.18)$$

Así pues, tomando $r_0 > 0$ solución de la desigualdad dada en (C3) y teniendo presente (4.18) concluimos que

$$\int_0^{\|T(x)\|_\infty} \varphi(u) du \leq \int_0^{r_0} \varphi(u) du, \quad (4.19)$$

y gracias a (4.19) y las propiedades de φ , debe ser $\|T(x)\|_\infty \leq r_0$. Por lo tanto, $T(r_0 B_{\mathcal{C}(I)}) \subset r_0 B_{\mathcal{C}(I)}$.

No es difícil comprobar, usando el Teorema de Arzelá-Ascoli (cf. [47]), que la aplicación $S : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ dada por

$$S(x)(t) := \int_0^{p(t)} f(t,s,x(s)) ds \quad \forall t \in I,$$

para cada $x \in \mathcal{C}(I)$ es compacta (cf. [11, Exam. 3, p. 13]), esto es, S transforma conjuntos acotados en conjuntos precompactos. Además, si definimos $G : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ como $G(x)(t) := g(t, x(t))$, para cada $x \in \mathcal{C}(I)$ y $t \in I$, tenemos que G es continua y $T(x)(t) = G(x)(t) + S(x)(t)$, para cada $x \in \mathcal{C}(I)$ y $t \in I$.

Por otro lado, sea $B \subset r_0 B_{\mathcal{C}(I)}$ no vacío y convexo. Dado $\alpha > \phi_d(B)$ tomemos $\gamma : I \rightarrow (\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ una curva α -densa en B , pongamos $\tau \in I \mapsto \gamma_\tau(t) \in B$ para cada $\tau \in I$. Entonces, dada $x \in r_0 B_X$ existe $\tau \in I$ tal que

$$\|x - \gamma_\tau\|_\infty \leq \alpha. \quad (4.20)$$

Definamos la curva $\Gamma : I \rightarrow \mathcal{C}(I)$ como

$$\Gamma_\tau(t) := G(\gamma_\tau)(t) = g(t, \gamma_\tau(t)) \quad \forall t \in I,$$

para cada $\tau \in I$. Es claro que Γ es una curva en $\mathcal{C}(I)$ y además $\Gamma(I) \subset G(\gamma(I)) \subset G(B)$. Más aún, teniendo presente la condición (C2), dada $x \in B$ gracias a (4.20) existe $\tau \in I$, tal que

$$\int_0^{2|g(t, x(t)) - \Gamma_\tau(t)|} \varphi(u) du \leq h \left(\int_0^{|x(t) - \gamma_\tau(t)|} \varphi(u) du \right) \leq h \left(\int_0^\alpha \varphi(u) du \right),$$

y puesto que $\alpha > \phi_d(B)$ es arbitrario, llegamos a la desigualdad siguiente

$$\int_0^{\phi_d(2G(B))} \varphi(u) du \leq h \left(\int_0^{\phi_d(B)} \varphi(u) du \right). \quad (4.21)$$

Una propiedad de la MNC χ de Hausdorff (Definición 3.1.3) que usaremos más adelante es la siguiente desigualdad (cf. [11, Prop. 2.3, p. 21])

$$\chi(A_1 + A_2) \leq \chi(A_1) + \chi(A_2), \quad (4.22)$$

para cualesquiera que sean los conjuntos A_1 y A_2 acotados y no vacíos de un espacio de Banach.

Finalmente, teniendo en cuenta la Proposición 3.2.1, que $S(B)$ es precompacto y las desigualdades (4.21) y (4.22) concluimos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\phi_d(T(B))} \varphi(u) du &\leq \int_0^{2\chi(G(B)+S(B))} \varphi(u) du \leq \int_0^{2\chi(G(B))+2\chi(S(B))} \varphi(u) du = \\ &= \int_0^{2\chi(G(B))} \varphi(u) du \leq \int_0^{2\phi_d(G(B))} \varphi(u) du = \int_0^{\phi_d(2G(B))} \varphi(u) du \leq \\ &\leq h \left(\int_0^{\phi_d(B)} \varphi(u) du \right). \end{aligned}$$

Nótese que hemos usado que $\phi_d(sA) = |s| \phi_d(A)$ para cada $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}(I)}$ y cada número s (véase la prueba del Teorema 3.3.1). Así pues, la aplicación T cumple las condiciones del Teorema 4.1.10 y por lo tanto $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$, es decir, la ecuación (EIV) tiene solución $x \in \mathcal{C}(I)$.

□

Terminamos esta sección con un ejemplo en el que se puede aplicar el resultado anterior.

■ **Ejemplo 4.1.8** Sea la ecuación

$$(EIV) \quad x(t) = \frac{1}{4} e^{-t} \arctan(|x(t)|) + \frac{1}{2} \int_0^{1+t^2} \frac{e^{-x^2(t)} (1 + s \cos(t^3 x(t)))}{1 + ts^2} ds \quad \forall t \in I.$$

Usando la notación de la proposición anterior, tenemos que $g(t, \xi) := \frac{1}{4} e^{-t} \arctan(\xi)$, $f(s, t, \xi) := \frac{e^{-\xi^2} (1 + s \cos(t^3 \xi))}{2(1 + ts^2)}$ y $p(t) := 1 + t^2$ para cada $s, t \in I$, $\xi \in \mathbb{R}$. Vamos a tomar $\varphi(u) := 2$, para cada $u \in \mathbb{R}_+$.

Entonces, la condición (C1) de la Proposición 4.1.1 se cumple trivialmente. También, dadas $x, y \in \mathcal{C}(I)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2|g(t,x(t))-g(t,y(t))|} \varphi(u) du &= e^{-t} |\arctan(|x(t)|) - \arctan(|y(t)|)| \leq \\ &\leq |\arctan(|x(t)|) - \arctan(|y(t)|)| \quad \forall t \in I, \end{aligned} \quad (4.23)$$

y gracias a la identidad trigonométrica $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan(\frac{a-b}{1+ab})$ para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $ab \neq -1$, de la desigualdad (4.23) se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^{2|g(t,x(t))-g(t,y(t))|} \varphi(u) du &\leq \arctan(|x(t) - y(t)|) \leq \arctan(2|x(t) - y(t)|) = \\ &= h\left(\int_0^{|x(t)-y(t)|} \varphi(u) du\right), \end{aligned}$$

para cada $t \in I$, siendo $h(s) := \arctan(s) \in \Delta$. Así pues, se verifica la condición (C2) de la Proposición 4.1.1. Por otro lado, dado $r > 0$ y $x \in \mathcal{C}(I)$ para cada $t \in I$ tenemos que

$$\int_0^{|g(t,0)| + \int_0^{p(t)} |f(t,s,x(s))| ds} \varphi\left(u + |g(t,x(t)) - g(t,0)|\right) du \leq 2(1+t^2) \leq 4,$$

y por lo tanto la desigualdad

$$h\left(\int_0^r \varphi(u) du\right) + q_r \leq \arctan(2r) + 4 \leq \int_0^r \varphi(u) du = 2r,$$

donde q_r viene dado en la condición (C3) de la proposición anterior, siempre tiene solución. De hecho, cualquier $r_0 \geq (\frac{\pi}{2} + 4)/2$ es solución de dicha desigualdad. Así pues, se cumplen las condiciones (C1)-(C3) de la Proposición 4.1.1 y en consecuencia la ecuación (EIV) tiene alguna solución $x \in \mathcal{C}(I)$. ■

4.2 Otros resultados de punto fijo

En esta sección nos proponemos extender los conceptos de aplicación no-expansiva y k -contracción, para $k \in (0, 1)$. Además, mostraremos algunos resultados de punto fijo para estas nuevas clases de aplicaciones.

4.2.1 Aplicaciones ϕ_d -no-expansivas y ϕ_d -contractivas

El concepto de aplicación no-expansiva ha sido generalizado de muchas formas, obteniéndose además resultados de punto fijo para dichas aplicaciones, como se puede comprobar en [41], [69], [72] y sus referencias, por citar algunos artículos. En esta sección nos proponemos establecer y estudiar una nueva generalización del concepto de aplicación no-expansiva. También mostraremos una nueva generalización del concepto de k -contracción, para $k \in (0, 1)$. Como en secciones anteriores, ϕ_d denotará el GND dado en la Definición 1.1.4, recordemos

$$\phi_d(B) := \inf \left\{ \alpha > 0 : \Gamma_{\alpha,B} \neq \emptyset \right\}, \quad \forall B \in \mathcal{B}_E.$$

siendo $\Gamma_{\alpha,B}$ la clase de todas las curvas α -densas en B .

Proposición 4.2.1 Sean $C \in \mathcal{B}_X$ y $T : C \rightarrow C$ no-expansiva. Entonces, se tiene que

$$\phi_d(T(B)) \leq \phi_d(B), \quad (4.24)$$

para cualquier $B \subset C$ no vacío y convexo.

Demostración. Sean $C \in \mathcal{B}_X$ y T como en el enunciado. Dado cualquier $B \subset C$ no vacío, como B es acotado y T es no-expansiva, entonces $\text{Diam}(T(B)) \leq \text{Diam}(B)$ y por lo tanto $T(B)$ también es acotado. Así pues, tenemos garantizada la existencia de curvas α -densas en B y en $T(B)$.

Sea $B \subset C$ no vacío y convexo, y γ una curva α -densa en B para un $\alpha > \phi_d(B)$ cualquiera. Para dado $T(x) \in T(B)$ puesto que $x \in B$ y γ es una curva α -densa en B , existe $t \in I$ tal que

$$\|x - \gamma(t)\| \leq \alpha. \quad (4.25)$$

Teniendo presente que T es no-expansiva y la desigualdad (4.25), llegamos a

$$\|T(x) - T(\gamma(t))\| \leq \|x - \gamma(t)\| \leq \alpha,$$

y por lo tanto $\phi_d(T(B)) \leq \alpha$, ya que $T \circ \gamma : I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ es una curva α -densa en $T(B)$. Puesto que $\alpha > \phi_d(B)$ es cualquiera, se tiene que $\phi_d(T(B)) \leq \phi_d(B)$. Así pues, queda probada la desigualdad (4.24) del enunciado. □

Entonces, según el resultado anterior, si $C \in \mathcal{B}_X$ y $T : C \rightarrow C$ es no-expansiva se verifica que $\phi_d(T(B)) \leq \phi_d(B)$ para cualquier $B \subset C$ no vacío y convexo. Este hecho nos induce a dar la siguiente definición:

Definición 4.2.1 Sea $C \in \mathcal{B}_X$ y $T : C \rightarrow C$. Diremos que T es una aplicación ϕ_d -no-expansiva si es continua y además

$$\phi_d(T(B)) \leq \phi_d(B),$$

para cada $B \subset C$ no vacío y convexo.

Por supuesto, si C es compacto entonces cualquier aplicación $T : C \rightarrow C$ continua es ϕ_d -no-expansiva ya que, en este caso, según el Teorema 1.1.1 se verifica que $\phi_d(T(B)) = 0$ para cualquier $B \subset C$ no vacío y convexo.

Aunque hemos probado en la Proposición 4.2.1 que cualquier aplicación no-expansiva es una aplicación ϕ_d -no-expansiva, la clase de las aplicaciones ϕ_d -no-expansivas es más amplia que la clase de las aplicaciones no-expansivas. Probaremos esto en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 4.2.1** Sea $(\ell_2, \|\cdot\|)$ el espacio de las sucesiones de cuadrado sumable, con su norma habitual, y $T : B_{\ell_2} \rightarrow B_{\ell_2}$ la aplicación dada por

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) := \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{2}x_n, \dots \right),$$

para cada $x \in B_{\ell_2}$. De la continuidad de la norma se sigue la continuidad de T .

Entonces, T no es no-expansiva: dado cualquier $x \in B_{\ell_2}$ con $\|x\| = 1$ tenemos que

$$\|T(x) - T(\theta)\| = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1 = \|x - \theta\|.$$

siendo θ el vector nulo de ℓ_2 .

Por otro lado, dado cualquier $B \subset B_{\ell_2}$ no vacío y convexo, procediendo igual que en el Ejemplo 4.1.7 tenemos que

$$\chi(T(B)) \leq \frac{1}{2}\chi(B), \quad (4.26)$$

siendo χ la MNC de Hausdorff (Definición 3.1.3).

Finalmente, gracias a la Proposición 3.2.1 y a la desigualdad (4.26) concluimos que

$$\phi_d(T(B)) \leq 2\chi(T(B)) \leq \chi(B) \leq \phi_d(B),$$

y por lo tanto T es una aplicación ϕ_d -no-expansiva. ■

Razonando como en el ejemplo anterior, si $T : C \rightarrow C$, con $C \in \mathcal{B}_X$, es una aplicación (k, χ) -contractiva (Definición 4.1.3) para algún $0 < k \leq 1/2$ encontramos que T es, en particular, una aplicación ϕ_d -no-expansiva.

Nota 4.2.1 Si en la Definición 4.2.1 cambiamos el GND ϕ_d por una MNC μ y no exigimos la convexidad a los subconjuntos $B \subset C$, tenemos que $T : C \rightarrow C$ es una aplicación $(1, \mu)$ -contractiva (Definición 4.1.3). No obstante, puesto que ϕ_d no es una MNC (véase la Nota 3.2.2), ambos conceptos son esencialmente distintos. Este hecho quedará evidenciado en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 4.2.2** Sea $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de las funciones $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, con la norma del supremo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ pongamos $f_n(0) = f_n(1) = g_n(0) = g_n(1) = 0$,

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t = 1/10^n \\ 1 & \text{si } t = 2/10^n \\ 0 & \text{si } t = 3/10^n \end{cases}, \quad g_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t = 4/10^n \\ 1 & \text{si } t = 5/10^n \\ 0 & \text{si } t = 6/10^n \\ -1 & \text{si } t = 7/10^n \\ 0 & \text{si } t = 8/10^n \end{cases},$$

y mediante interpolación lineal, definimos las funciones $f_n(t)$ y $g_n(t)$ para cada $t \in I$.

Sea θ la función idénticamente nula, y $C := \overline{\text{Conv}}(\{\theta, f_1, g_1, f_2, g_2, \dots\})$. Entonces, en [74] se define una isometría $T : C \rightarrow C$ verificando que

$$\chi\left(T\left(\{f_1, f_2, \dots\}\right)\right) = 1 > \frac{1}{2} = \chi\left(\{f_1, f_2, \dots\}\right),$$

y por lo tanto T no puede ser una aplicación (k, μ) -contractiva, para ningún $0 < k < 2$. Ahora bien, puesto que T es una isometría, en particular, es una aplicación no-expansiva y por lo tanto, según la Proposición 4.2.1, tenemos que T es una aplicación ϕ_d -no-expansiva. ■

Debemos notar, que si $T : C \rightarrow C$ es no-expansiva no tenemos la garantía de que $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ incluso cuando C es convexo, cerrado y σ -compacto:

■ **Ejemplo 4.2.3** Este ejemplo se debe a Alspach [8] y es, históricamente, el primer ejemplo de una aplicación no-expansiva definida sobre un conjunto convexo y σ -compacto que no tiene ningún fijo. Sea el conjunto

$$C := \left\{f \in L^1 : \int_0^1 f(x)dx = 1, 0 \leq f(x) \leq 2, \text{ para casi todo } x \in I\right\}.$$

Es claro que C es convexo y cerrado, y además es uniformemente integrable (por tratarse de un segmento en L^1) y por lo tanto débil compacto (cf. [23, Th. 13.6, p. 140]). Definamos $T : C \rightarrow C$ como

$$T(f)(x) := \begin{cases} \min\{2f(2x), 2\} & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \max\{2f(2x-1), 0\} & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

para cada $f \in C$. Entonces, T es una isometría sin ningún punto fijo. ■

Así pues, no cualquier aplicación $T : C \rightarrow C$ no-expansiva, con $C \in \mathcal{B}_X$ cerrado (o incluso σ -compacto) y convexo tiene algún punto fijo. En consecuencia, según la Proposición 4.2.1, no cualquier aplicación $T : C \rightarrow C$, con C como antes, ϕ_d -no-expansiva tiene algún punto fijo. No obstante, si T es una k -contracción para algún $k \in (0, 1)$, sí es cierto (Teorema 4.1.1) que $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Este hecho nos lleva a generalizar el concepto de k -contracción:

Definición 4.2.2 Sea $C \in \mathcal{B}_X$ y $T : C \rightarrow C$. Diremos que T es una aplicación ϕ_d -contractiva si es continua y además

$$\phi_d(T(B)) < \phi_d(B),$$

para cada $B \subset C$ no vacío, no precompacto y convexo.

Razonando del mismo modo que en la prueba de la Proposición 4.2.1, no es difícil comprobar que cualquier k -contracción, para cierto $0 < k < 1$, es una aplicación ϕ_d -contractiva. Pero, el recíproco no es cierto en general como veremos en el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo 4.2.4** Sea $(\ell_1, \|\cdot\|)$ el espacio de las sucesiones de valor absoluto sumable, con su norma habitual. Definamos $T : B_{\ell_1} \longrightarrow B_{\ell_1}$ como

$$T(x) := \left(1 - \|x\|, \frac{\|x\|}{2}, \dots, \frac{\|x\|}{2^n} \dots\right),$$

para cada $x := (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_1$. La continuidad de T se sigue de la continuidad de la norma. Además, dado cualquier $x \in \ell_1$ con $\|x\| = 1$ tenemos que

$$\|T(x) - T(\theta)\| = 2 > 1 = \|x - \theta\|,$$

siendo θ el vector nulo de ℓ_2 . Por lo tanto, T no puede ser una k -contracción, para ningún $0 < k < 2$.

Por otro lado, dado cualquier $B \subset B_{\ell_1}$ no vacío y convexo, tenemos que $T(B)$ es conexo por caminos puesto que T es continua. También es claro que $T(B)$ es precompacto ya que cualquier sucesión en $T(B)$ posee una subsucesión convergente, y por lo tanto (Teorema 1.1.1) $T(B)$ es densificable. Así pues, T es una aplicación ϕ_d -contractiva, ya que $\phi_d(T(B)) = 0 < \phi_d(B)$. ■

Nota 4.2.2 Razonando como en el ejemplo anterior, se puede probar que cualquier aplicación continua $T : C \longrightarrow C$, con $C \in \mathcal{B}_X$, compacta (es decir, T transforma conjuntos acotados en conjuntos precompactos) es una aplicación ϕ_d -contractiva (Definición 4.2.2), y en consecuencia, también será ϕ_d -no-expansiva (Definición 4.2.1). No obstante, en general, una aplicación compacta no es no-expansiva o una k -contracción, para algún $k \in (0, 1)$, quedando de esta forma establecido que las aplicaciones ϕ_d -no-expansivas o ϕ_d -contractivas constituyen una clase de aplicaciones más general que las aplicaciones no-expansivas o las aplicaciones que son una k -contracción, para algún $k \in (0, 1)$.

Una ligera modificación en el Ejemplo 4.2.1 nos proporciona otro caso de aplicación ϕ_d -contractiva que no es contractiva:

■ **Ejemplo 4.2.5** Fijado $0 < \beta < 1/2$ sea $T : B_{\ell_2} \longrightarrow B_{\ell_2}$ la aplicación del Ejemplo 4.1.7. Entonces, como probamos en dicho ejemplo encontramos que T no es contractiva, y sin embargo

$$\phi_d(T(B)) \leq 2\beta\phi_d(B) < \phi_d(B),$$

para cada $B \subset B_{\ell_2}$ convexo y no precompacto. Así pues, T es una aplicación ϕ_d -contractiva. ■

Una vez probado que la clase de las aplicaciones ϕ_d -contractivas es una clase más general que la clase de las k -contracciones, para $0 < k < 1$, veremos un nuevo resultado sobre punto fijo.

Teorema 4.2.1 Sea $C \in \mathcal{B}_X$ convexo y cerrado, y $T : C \longrightarrow C$ una aplicación ϕ_d -contractiva. Entonces, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Demostración. Fijado $x_0 \in C$, definimos

$$\Sigma := \left\{ K \subset C : K \text{ es cerrado y convexo, } x_0 \in K, T(K) \subset K \right\},$$

y

$$B := \bigcap_{K \in \Sigma} K, \quad D := \overline{\text{Conv}}(T(B) \cup \{x_0\}).$$

Puesto que $C \in \Sigma$, $\Sigma \neq \emptyset$ y como $x_0 \in B$, también se tiene que $D \neq \emptyset$. Además, es inmediato probar que $D = B$: puesto que $x_0 \in B$ y $T(B) \subset B$, tenemos que $D \subset B$ y esto nos lleva a que $T(D) \subset T(B) \subset D$, es decir, que $D \in \Sigma$ y en consecuencia $B \subset D$.

Por otro lado, si B no fuese compacto, teniendo en cuenta los lemas 3.3.1 y 4.1.3, y que T es ϕ_d -contractiva se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_d(B) &= \phi_d\left(\overline{\text{Conv}}(T(B) \cup \{x_0\})\right) \leq \phi_d\left(\text{Conv}(T(B) \cup \{x_0\})\right) \leq \\ &\leq \max\left\{\phi_d\left(\text{Conv}(T(B))\right), \phi_d\left(\{x_0\}\right)\right\} = \phi_d\left(\text{Conv}(T(B))\right) \leq \phi_d(T(B)) < \phi_d(B), \end{aligned}$$

lo cual no es posible y por lo tanto debe ser $\phi_d(B) = 0$. Entonces, según el Teorema 1.1.1 B es precompacto y puesto que es cerrado, tenemos que B es compacto. Finalmente, como $T(B) \subset B$ una llamada al Teorema de punto fijo de Schauder (Teorema 4.1.4) termina la prueba. \square

Nota 4.2.3 El resultado anterior es, en formas, muy similar al Teorema de punto fijo de Darbo-Sadovskii (Teorema 4.1.6). Pero debemos tener presente que el GND ϕ_d no es una MNC como ya se probó en el Capítulo 3 (véase la Nota 3.2.2).

El Teorema 4.1.2 establece que si $T : C \rightarrow C$, con $C \in \mathcal{B}_X$ convexo y compacto, es una aplicación contractiva, recordemos, $\|T(x) - T(y)\| < \|x - y\|$ para cada $x, y \in C$, con $x \neq y$, entonces, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Ahora bien, en el Teorema 4.2.1 la condición de compacidad sobre el conjunto C no es necesaria. Este hecho indica que los conceptos de aplicación contractiva y ϕ_d -contractiva (Definición 4.2.2) son distintos. Y, efectivamente, así es, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 4.2.6** Sea $T : C \rightarrow C$ como en el Ejemplo 4.1.1, recordemos

$$C := \left\{ f \in \mathcal{C}(I) : 0 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1, \forall x \in I \right\},$$

siendo $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de las funciones $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, con la norma del supremo y $T(f)(x) := xf(x)$ para cada $f \in C$ y $x \in I$. Entonces, tenemos que T es una aplicación contractiva sin ningún punto fijo.

Por otro lado, en el Ejemplo 3.2.2 probamos que $\phi_d(C) = 1$. Razonando igual que en dicho ejemplo, encontramos que $\phi_d(T(C)) = 1$ y por lo tanto T no es una aplicación ϕ_d -contractiva. Para terminar, observemos que en el Ejemplo 4.2.5 hemos mostrado una aplicación ϕ_d -contractiva que no es contractiva. ■

Resumimos la relación existente entre los distintos tipos de aplicaciones analizadas en este capítulo de la siguiente forma: dada una aplicación $T : C \rightarrow C$ continua, con $C \in \mathcal{B}_X$, se tienen las siguientes implicaciones

$$\begin{array}{ll} T \text{ es compacta} & \implies T \text{ es } \phi_d\text{-contractiva.} \\ T \text{ es } \phi_d\text{-contractiva} & \implies T \text{ es } \phi_d\text{-no-expansiva.} \\ T \text{ es no-expansiva} & \implies T \text{ es } \phi_d\text{-no-expansiva.} \\ T \text{ es una } k\text{-contracción, para algún } k \in (0, 1) & \implies T \text{ es } \phi_d\text{-contractiva.} \end{array}$$

y, en general, ninguna de tales implicaciones es recíproca. Además, los conceptos de aplicación contractiva y ϕ_d -contractiva son esencialmente distintos. Simbólicamente:

$$T \text{ es contractiva} \not\iff T \text{ es } \phi_d\text{-contractiva.}$$

Por otro lado, según la Nota 4.1.3, si $C \in \mathcal{B}_X$ es convexo y cerrado y $T : C \rightarrow C$ es no-expansiva, entonces T tiene una sucesión de puntos fijos aproximados y en consecuencia

$$\inf \left\{ \|x - T(x)\| : x \in C \right\} = 0.$$

Esta propiedad también la tienen las aplicaciones ϕ_d -no-expansivas:

Proposición 4.2.2 Sea $C \in \mathcal{B}_X$ convexo y cerrado y $T : C \rightarrow C$ ϕ_d -no-expansiva. Entonces, T tiene una sucesión de puntos fijos aproximados.

Demostración. Fijado $x_1 \in C$ para cada entero positivo $n \geq 2$ definamos la aplicación $T_n : C \rightarrow C$ como

$$T_n(x) := \left(1 - \frac{1}{n}\right)T(x) + \frac{1}{n}T(x_1) \quad \forall x \in C,$$

Sea $B \subset C$ no vacío y convexo y pongamos $\alpha := \phi_d(B)$. Gracias a que B es acotado, α está bien definido. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe una curva $\gamma : I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ que es $(\alpha + \varepsilon)$ -densa en B .

Para cada $n \geq 2$, la aplicación $\tilde{\gamma}_n : I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ dada por

$$\tilde{\gamma}_n(t) := \left(1 - \frac{1}{n}\right)\gamma(t) + \frac{1}{n}T(x_1) \quad \forall t \in I,$$

es una curva y además $\tilde{\gamma}_n(I) \subset T_n(B)$. En las siguientes líneas probaremos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\gamma}_n$ es una curva $(1 - \frac{1}{n})(\alpha + \varepsilon)$ -densa en $T_n(B)$.

Sea $T_n(x) \in T_n(B)$ cualquiera. Como γ es una curva $(\alpha + \varepsilon)$ -densa en B , existe $t \in I$ tal que

$$\|x - \gamma(t)\| \leq \alpha + \varepsilon. \quad (4.27)$$

Entonces, teniendo presente la desigualdad (4.27) llegamos a

$$\|T_n(x) - \tilde{\gamma}(t)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|T(x) - \gamma(t)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) (\alpha + \varepsilon),$$

y por lo tanto, $\tilde{\gamma}$ es una curva $(1 - \frac{1}{n})(\alpha + \varepsilon)$ -densa en $T_n(B)$. En consecuencia, y puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $\phi_d(T_n(B)) \leq (1 - \frac{1}{n})\alpha = (1 - \frac{1}{n})\phi_d(B) < \phi_d(B)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Así pues, para cada $n \geq 2$, tenemos que T_n es ϕ_d -contractiva (Definición 4.2.2) y gracias al Teorema 4.2.1 existe $x_n \in \text{Fix}(T_n)$. Finalmente, tenemos que

$$\|x_n - T(x_n)\| = \frac{1}{n} \|T(x_n) - T(x_1)\| \quad \forall n \geq 2,$$

y esto termina la prueba puesto que, según la desigualdad de arriba

$$\|x_n - T(x_n)\| \rightarrow 0.$$

□

4.2.2 El problema de Cauchy

En esta sección notaremos por $(\mathcal{C}(J, X), \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de Banach de las aplicaciones $x: J \rightarrow X$ continuas con la norma del supremo, siendo $J := [0, a] \subset I$, con $0 < a \leq 1$. Además, dado $B \subset X$ notaremos por $\mathcal{C}(J, B) := \{x \in \mathcal{C}(J, X) : x(J) \subset B\}$.

Dada $f: I \times X \rightarrow X$ y $x_0 \in X$, recordemos que el *problema de Cauchy* consiste en hallar $x \in \mathcal{C}(J, X)$, para cierto intervalo $J := [0, a] \subset I$, de forma que

$$(PC) \quad x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in J, \quad x(0) = x_0.$$

El problema (PC) lo podemos escribir de la forma siguiente

$$(PC) \quad x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) \quad \forall t \in J,$$

que será la expresión con la que vamos a trabajar en esta sección. En el caso particular de que $X := \mathbb{R}^n$ un conocido teorema de Peano [62] garantiza la existencia de soluciones del problema (PC) si f es continua. Una de las claves de la prueba de dicho teorema es el hecho de que los conjuntos acotados de \mathbb{R}^n son precompactos. Puesto que en espacios de Banach de dimensión infinita la acotación no implica la precompactidad, es de esperar que dicho teorema de Peano no sea cierto en tales espacios. Y así es:

■ **Ejemplo 4.2.7** ([31, Exam. 2.1, p. 18]) Sea $X := c_0$ el espacio de Banach de las sucesiones $x := (x_n)_{n \geq 1}$ con límite cero dotado de la norma del supremo $\|x\| := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Si $(e_n)_{n \geq 1}$ es la base estándar de c_0 , esto es, $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ donde el 1 ocupa el i -ésimo lugar para cada $i \in \mathbb{N}$, dado $x \in c_0$ tenemos que

$$x = \sum_{n \geq 1} x_n e_n.$$

Consideremos el siguiente problema de Cauchy:

$$x'(t) := 2 \sum_{n \geq 1} \sqrt{|x_n(t)|} e_n \quad \text{para cada } t \in I, \quad x(0) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} e_n.$$

Si $x \in \mathcal{C}(J, B)$ es una solución del problema anterior, para algún intervalo $J := [0, a] \subset I$, entonces para cada $t \in J$ tenemos que

$$x'_n(t) = 2\sqrt{|x_n(t)|} \quad \text{y} \quad x_n(0) = \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así pues, encontramos que $x_n(t) = (t + \frac{1}{n})^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in J$, y por lo tanto

$$\lim_n x_n(t) = t^2 > 0,$$

para cada $t \in J$ con $t > 0$, que es contradictorio con el hecho de que $x \in c_0$. Así pues, este problema de Cauchy no tiene solución. ■

Sí es cierto que si f es compacta y continua, entonces el problema (PC) tiene solución (cf. [11, Th. 2.8, p. 15]), y en consecuencia el Teorema de Peano permanece válido en espacios de Banach de dimensión infinita bajo estas condiciones. No obstante, existen muchos resultados que establecen condiciones suficientes para que el problema (PC) tenga solución. Tales resultados, por lo general, se establecen mediante el uso de las MNCs, cf. [13, Th. 5], [11, Th. 5.10, p. 43] y sus referencias. En esta sección, como aplicación del Teorema 4.2.1, veremos que el problema (PC) tiene solución cuando la aplicación f verifica ciertas condiciones, sin usar ninguna MNC. Como es de esperar, algunas condiciones sobre la aplicación f son necesarias. Veremos tales condiciones en las siguientes líneas.

Supongamos que existen unos números r, M, L positivos tales que para cualquier intervalo $J := [0, a] \subset I$ se cumplen las siguientes condiciones:

(C1) Para cada $x \in \mathcal{C}(J, B)$, siendo $B := \bar{B}(x_0, r)$, se verifica que

$$\|f(t, x(t))\| \leq M \quad \text{para casi todo } t \in J.$$

(C2) f es continua y para cualquier $W \subset \mathcal{C}(J, B)$ no vacío y convexo

$$\phi_d\left(\left\{f_x : x \in W\right\}\right) \leq L\phi_d(W),$$

siendo, para cada $x \in W$, $f_x \in \mathcal{C}(J, X)$ la aplicación continua definida como $f_x(t) := f(t, x(t))$ para cada $t \in J$, y ϕ_d el GND (Definición 1.1.4).

Nota 4.2.4 La condición (C2) anterior, como veremos después de la prueba del siguiente teorema, es una generalización del concepto de aplicación lipschitziana.

Ahora podemos enunciar y probar el resultado principal de esta sección:

Teorema 4.2.2 Supongamos que se cumplen las condiciones (C1) y (C2). Entonces, para cada

$$0 < \rho < \min\left\{1, \frac{r}{M}, \frac{1}{L}\right\},$$

el problema (PC) tiene alguna solución $x \in \mathcal{C}(J, B)$, siendo $J := [0, \rho]$.

Demostración. En primer lugar, nótese que el conjunto $V := \mathcal{C}(J, B)$ es convexo y cerrado. Sea $T : V \rightarrow \mathcal{C}(J, X)$ la aplicación dada por

$$T(x)(t) := x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in J,$$

para cada $x \in V$. Entonces si $(x_n)_{n \geq 1} \subset V$ y $x_n \rightarrow x$, para algún $x \in V$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|T(x_n)(t) - T(x)(t)\| &\leq \int_0^t \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| ds \leq \\ &\leq \rho \sup\left\{\|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| : s \in J\right\}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

y en consecuencia, puesto que $t \in J$ es arbitrario

$$\|T(x_n) - T(x)\|_\infty \leq \rho \sup\left\{\|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| : s \in J\right\}. \quad (4.29)$$

Para probar que T es continua, según la desigualdad (4.29), bastará mostrar que

$$\sup\left\{\|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| : s \in J\right\} \rightarrow 0, \quad (4.30)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Si (4.30) no fuese cierto, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ y una sucesión $(s_n)_{n \geq 1} \subset J$ tales que

$$\lim_n \|f(s_n, x_n(s_n)) - f(s_n, x(s_n))\| \geq \varepsilon_0. \quad (4.31)$$

Pero puesto que el intervalo J es compacto, existe una subsucesión de $(s_n)_{n \geq 1}$ (que notaremos igual) y $s_0 \in J$ tal que $s_n \rightarrow s_0$. Así pues,

$$\|x_n(s_n) - x(s_0)\| \leq \|x_n(s_n) - x(s_n)\| + \|x(s_n) - x(s_0)\| \leq \|x_n - x\|_\infty + \|x(s_n) - x(s_0)\| \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. En consecuencia, $f(s_n, x_n(s_n))$ y $f(s_n, x(s_n))$ convergen a $f(s_0, x(s_0))$, contradiciendo (4.31) y tenemos por lo tanto (4.30).

Así pues, T es continua. Nótese además que dada $x \in V$, según (C1) se tiene que

$$\|T(x)(t) - x_0\| \leq \int_0^t \|f(s, x(s))\| ds \leq M\rho < r \quad \forall t \in J,$$

es decir, que $T(x) \in V$, y por lo tanto, tenemos que $T : V \rightarrow V$ es una aplicación continua. Entonces, la existencia de alguna solución del problema (PC) es equivalente a la existencia de algún punto fijo de T .

Por otro lado, sea $W \subset V$ no vacío, convexo y no precompacto, y notemos $\alpha := \phi_d(W)$. Puesto que W es acotado, tenemos que α está bien definido. Según la condición (C2), dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\gamma : I \rightarrow \mathcal{C}(J, X)$ una curva $(L\alpha + \varepsilon)$ -densa en $\{f_x : x \in W\}$, pongamos $\tau \in I \mapsto \gamma_\tau \in \{f_x : x \in W\}$. Así pues, dada $x \in W$ existe $\tau \in I$ tal que:

$$\|f_x - \gamma_\tau\|_\infty \leq L\alpha + \varepsilon. \quad (4.32)$$

Definamos $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathcal{C}(J, X)$ como

$$\tilde{\gamma}_\tau(t) := x_0 + \int_0^t \gamma_\tau(s) ds \quad \forall t \in J,$$

para cada $\tau \in I$. Es claro que $\tilde{\gamma}$ es una curva y además $\tilde{\gamma}(I) \subset T(W)$. Más aún, gracias a (4.32), dado cualquier $T(x) \in T(W)$ existe $\tau \in I$ tal que

$$\|T(x)(t) - \tilde{\gamma}_\tau(t)\| \leq \int_0^t \|f(s, x(s)) - \gamma_\tau(s)\| ds \leq \rho(L\alpha + \varepsilon), \quad (4.33)$$

y como $t \in J$ es arbitrario, deducimos que $\tilde{\gamma}$ es $\rho(L\alpha + \varepsilon)$ -densa en $T(W)$. Puesto que ε es arbitrario, concluimos que $\phi_d(T(W)) \leq \rho L\alpha < \alpha$.

Finalmente, una llamada al Teorema 4.2.1 concluye la prueba ya que la aplicación T es ϕ_d -contractiva y por lo tanto $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. □

En el caso particular que la aplicación f del problema (PC) sea lipschitziana en $\bar{B}(x_0, r)$ respecto a su segunda variable, esto es, existe $L > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \bar{B}(x_0, r),$$

para cada $t \in I$ entonces, se cumplen las condiciones (C1) y (C2). Vamos a probar que se cumple la condición (C2). Dado cualquier $W \subset \mathcal{C}(J, B)$ convexo no precompacto y $J = [0, a] \subset I$, si γ es una curva α -densa en W , la aplicación

$$\tau \in I \mapsto \tilde{\gamma}_\tau(s) := f_{\gamma_\tau} := f(s, \gamma_\tau(s)),$$

es continua y además verifica que si $x \in W$ es cualquiera entonces

$$\|f_x(t) - \tilde{\gamma}_\tau(t)\| = \|f(t, x(t)) - f(t, \gamma_\tau(t))\| \leq L\|x(t) - \gamma_\tau(t)\| \leq L\|x - \gamma_\tau\|_\infty \leq L\alpha,$$

siendo $\tau \in I$ es tal que $\|x - \gamma_\tau\|_\infty \leq \alpha$. Así pues $\|f_x - \tilde{\gamma}\|_\infty \leq L\alpha$ y la condición (C2) se cumple.

Por otro lado, si $X := \mathbb{R}^n$, un conocido resultado (cf. [42, p. 14, Exam. 2.2]) establece que si f es continua y lipschitziana respecto a su segunda variable entonces el (PC) tiene una única solución. El mismo resultado se tiene si X es un espacio de Banach cualquiera (cf. [31, Chap. 1, p. 4]). Entonces, con lo probado en el párrafo anterior, tenemos la siguiente consecuencia del Teorema 4.2.2:

Corolario 4.2.1 Si f es continua en $\bar{B}(x_0, r)$ y lipschitziana respecto a su segunda variable, entonces el problema (PC) tiene solución.

Nota 4.2.5 Si f es continua y compacta la condición (C2) se tiene de forma trivial puesto que para cualquier $W \subset \mathcal{C}(J, \bar{B}(x_0, r))$ no vacío y convexo, según el Teorema 1.1.1

$$\phi_d\left(\left\{f_x : x \in W\right\}\right) = 0.$$

y tenemos el conocido teorema de Peano que hemos nombrado al principio de esta sección.

Terminamos esta sección con un ejemplo.

■ **Ejemplo 4.2.8** Sea, como en el Ejemplo 4.2.7, c_0 el espacio de las sucesiones convergentes a cero con la norma del supremo $\|\cdot\|$, y $(e_n)_{n \geq 1}$ la base estándar de dicho espacio. La norma del supremo del espacio $\mathcal{C}(I, c_0)$ la notaremos por $\|\cdot\|_\infty$. Consideremos el problema de Cauchy siguiente

$$x'(t) := \sum_{n \geq 1} \phi_n(t) \ln(1 + |x_n(t)|) e_n \quad \text{para cada } t \in I, \quad x(0) := (0, 0, \dots, 0, \dots),$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $\phi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y además

$$L := \sup \left\{ \max \left\{ |\phi_n(t)| : t \in I \right\} : n \in \mathbb{N} \right\} < +\infty.$$

Entonces, dado cualquier $t \in I$ y $x \in \mathcal{C}(I, B_{c_0})$, tenemos que

$$|\phi_n(t) \ln(1 + |x_n(t)|)| \leq L \ln(2),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, y la condición (C1) del Teorema 4.2.2 se cumple. Usaremos más adelante las desigualdades siguientes

$$\ln(1 + |a|) - \ln(1 + |b|) \leq \ln(1 + |a - b|), \quad \ln(1 + |a|) \leq |a|, \quad (4.34)$$

para cada $a, b \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, dado cualquier $W \subset \mathcal{C}(I, B_{c_0})$ no vacío y convexo, sea $\gamma : I \rightarrow \mathcal{C}(I, X)$ una curva α -densa cualquiera en W , para cierto $\alpha > \phi_d(W)$, pongamos $\tau \in I \mapsto \gamma_\tau := (\gamma_{n,\tau})_{n \geq 1} \in W$ para cada $\tau \in I$. La existencia de tal curva está garantizada puesto que W es un conjunto acotado. Definamos, para cada $\tau \in I$, la aplicación

$$\Gamma_\tau(t) := \left(\phi_n(t) \ln(1 + |\gamma_{n,\tau}(t)|) \right)_{n \geq 1} \quad \forall t \in I,$$

que, claramente, es una curva en el conjunto $\{(\phi_n(t) \ln(1 + |x_n(t)|))_{n \geq 1} : x \in W\}$. Puesto que γ es una curva α -densa en W , dado $x \in W$ existe $\tau \in I$ tal que

$$\|x - \gamma_\tau\|_\infty = \sup \left\{ \max \left\{ |x_n(t) - \gamma_{n,\tau}(t)| : n \in \mathbb{N} \right\} : t \in I \right\} \leq \alpha, \quad (4.35)$$

y teniendo en cuenta (4.34) y (4.35), para cada $t \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \|\Gamma_\tau(t) - (\phi_n(t) \ln(1 + |x_n(t)|))_{n \geq 1}\| = \\ & = \sup \left\{ \left| \phi_n(t) \ln(1 + |\gamma_{n,\tau}(t)|) - \phi_n(t) \ln(1 + |x_n(t)|) \right| : n \in \mathbb{N} \right\} \leq \\ & \leq L \sup \left\{ \left| \ln(1 + |\gamma_{n,\tau}(t)|) - \ln(1 + |x_n(t)|) \right| : n \in \mathbb{N} \right\} \leq L\alpha, \end{aligned}$$

y por lo tanto, Γ es una curva $L\alpha$ -densa en $\{(\phi_n(t) \ln(1 + |x_n(t)|))_{n \geq 1} : x \in W\}$. Gracias a la arbitrariedad de α concluimos que

$$\phi_d\left(\left\{(\phi_n(t) \ln(1 + |x_n(t)|))_{n \geq 1} : x \in W\right\}\right) \leq L\alpha$$

y se cumple entonces la condición (C2) del Teorema 4.2.2. Así pues, tenemos que el problema de Cauchy de arriba tiene alguna solución $x \in \mathcal{C}(J, c_0)$, siendo $J := [0, \min\{1, 1/L \ln(2)\}]$. ■

4.2.3 Estructura ϕ_d -normal

Como es habitual, diremos que un conjunto $B \in \mathcal{B}_X$ es un *conjunto no-trivial* si $\text{Diam}(B) > 0$. Puesto que este término, junto con la propiedad de ser convexo y cerrado, lo emplearemos con mucha frecuencia a partir de ahora, vamos a introducir la siguiente notación:

$$\tilde{\mathcal{B}}_X := \left\{ B \in \mathcal{B}_X : B \text{ es convexo y cerrado, } \text{Diam}(B) > 0 \right\}.$$

Se recuerda también que $x_0 \in B \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ es un punto no-diametral de B (cf. [42], [11]) si:

$$\sup \left\{ \|x_0 - y\| : y \in B \right\} < \text{Diam}(B). \quad (4.36)$$

Hablando de manera menos formal, la condición (4.36) nos dice que un punto $x_0 \in B$, con $B \in \tilde{\mathcal{B}}_X$, es no-diametral si B está contenido en la bola de centro x_0 y radio $r := \sup \{ \|x_0 - y\| : y \in B \} > 0$. En tal caso, se dice que B tiene *estructura normal*. Visto de otra forma, tal conjunto B no tiene estructura normal si cualquier $x_0 \in B$ es un punto diametral, es decir, si

$$\sup \left\{ \|x_0 - y\| : y \in B \right\} = \text{Diam}(B). \quad (4.37)$$

Para trabajar de forma más cómoda con los conceptos de arriba, se tiene la siguiente definición (cf. [11], [49], [68]):

Definición 4.2.3 Dado $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ se define el radio de Chebyshev de C como el número siguiente

$$r(C) := \inf \left\{ \sup \left\{ \|x - y\| : x \in C \right\} : y \in C \right\}.$$

Es evidente que $r(C)$ está bien definido, y además $r(C) \leq \text{Diam}(C)$ para cualquier $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$.

El concepto de estructura normal fue introducido en 1948 por M. S. Brodskiĭ y D. P. Milman [20] para estudiar ciertos problemas de punto fijo relativos a isometrías. Formalizamos el concepto de estructura normal en la siguiente definición:

Definición 4.2.4 Dado $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ se dice que C tiene estructura normal si para cualquier $B \subset C \cap \tilde{\mathcal{B}}_X$, se cumple que $r(B) < \text{Diam}(B)$ o, equivalentemente, existe $x_0 \in B$ no-diametral. Si cada $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ tiene estructura normal, se dice que X tiene estructura normal.

En [20] se muestra la siguiente caracterización de la estructura normal, la cuál es muy usada:

Proposición 4.2.3 Un conjunto $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ tiene estructura normal si, y sólo si, no tiene ninguna sucesión diametral, esto es, una sucesión $(x_n)_{n \geq 1} \subset C$ no constante tal que

$$\lim_n \text{dist}(x_{n+1}, \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_n\})) = \text{Diam}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}),$$

siendo $\text{dist}(x, A) := \inf \{ \|x - y\| : y \in A \}$ la distancia del vector x al conjunto A .

Cualquier conjunto $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ compacto tiene estructura normal ya que en otro caso, gracias a la Proposición 4.2.3, sería posible construir una sucesión sin ninguna subsucesión convergente (cf. [60, Prop.1, p. 3]). A continuación veremos algunos ejemplos menos triviales.

■ **Ejemplo 4.2.9** Se recuerda que un espacio de Banach es uniformemente convexo (cf. [23, p. 114]) si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

En particular, cualquier espacio de Hilbert, los espacios L^p y ℓ_p dotados de sus normas habituales, con $1 < p < +\infty$, son uniformemente convexos (cf. [11], [23]). Entonces, los espacios uniformemente convexos tienen estructura normal (cf. [11, Th. VI.2.2, p. 114]). ■

■ **Ejemplo 4.2.10** (cf. [68, Exam. 4.3, p. 204]) Sea $(\ell_2, \|\cdot\|)$ el espacio de Banach de las sucesiones de cuadrado sumable, con la norma

$$\|x\| := \max \left\{ \frac{1}{2} \|x\|_2, \|x\|_\infty \right\},$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma habitual de ℓ_2 y $\|\cdot\|_\infty$ es la norma del supremo. Sea el conjunto

$$C := \left\{ x := (x_n)_{n \geq 1} \in \ell_2 : x_n \geq 0, \forall n \geq 1, \|x\|_2 \leq 1 \right\}.$$

Entonces, es inmediato verificar que $\text{Diam}(C) \leq 1$. Además, si x_0 es el vector nulo de ℓ_2 e $y_0 := (1, 0, \dots, 0, \dots)$ tenemos que

$$\text{Diam}(C) = \sup \left\{ \|x - y\| : x, y \in C \right\} \geq \|x_0 - y_0\| = 1$$

y por lo tanto $\text{Diam}(C) = 1$.

Por otro lado, sea $x \in C$ cualquiera, pongamos $x := (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $x_k < \varepsilon$, si $y := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ con el 1 en la k -ésima posición, tenemos que

$$\|x - y\| \geq 1 - \varepsilon,$$

y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ llegamos a que x es un punto diametral. Puesto que x es arbitrario, concluimos que C no tiene estructura normal. ■

El ejemplo anterior se debe a R. C. James, y es de especial importancia ya que prueba que la compacidad débil, e incluso la reflexividad de un espacio, no es condición suficiente para garantizar que dicho espacio tenga estructura normal.

Como hemos comentado anteriormente el concepto de estructura normal fue introducido por M. S. Brodskii y D. P. Milman [20]. No obstante, fue en 1965 cuando W. A. Kirk demostró el siguiente resultado en [48], todo un *clásico* en la literatura del punto fijo:

Teorema 4.2.3 — Teorema de Kirk. Sea $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ σ -compacto y $T : C \rightarrow C$ no-expansiva. Si C tiene estructura normal, entonces $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Así pues, según el teorema anterior, un espacio de Banach reflexivo $(X, \|\cdot\|)$ con estructura normal tiene la *propiedad débil del punto fijo*, σ -PPF, es decir, dado cualquier $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ σ -compacto y $T : C \rightarrow C$ no-expansiva, entonces $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Este resultado pone de manifiesto la importancia del Teorema de Kirk dentro de la Teoría de Punto Fijo.

Por otro lado, el principal objetivo de esta sección será intentar generalizar el concepto de estructura normal en términos del GND ϕ_d (Definición 1.1.4). Para ello, damos la siguiente definición:

Definición 4.2.5 Dado $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ diremos que C tiene estructura ϕ_d -normal si dado cualquier $B \subset C \cap \tilde{\mathcal{B}}_X$, se tiene que $\phi_d(B) < \text{Diam}(B)$. Si cada $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ tiene estructura ϕ_d -normal, diremos que X tiene estructura ϕ_d -normal.

Veamos algunos ejemplos de conjuntos con estructura ϕ_d -normal.

■ **Ejemplo 4.2.11** Sea $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ compacto. Entonces C tiene estructura ϕ_d -normal, ya que en este caso cualquier $B \subset C \cap \tilde{\mathcal{B}}_X$ sería densificable (Teorema 1.1.1), y por lo tanto

$$\phi_d(B) = 0 < \text{Diam}(B).$$

■ **Ejemplo 4.2.12** Cualquier conjunto $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ con estructura normal tiene estructura ϕ_d -normal. En efecto: sea $B \subset C \cap \tilde{\mathcal{B}}_X$ cualquiera, y $x_0 \in B$ tal que

$$r := \sup \left\{ \|x_0 - x\| : x \in B \right\} < \text{Diam}(B).$$

Entonces, la curva dada por $\gamma(t) := x_0$ para cada $t \in I$, es una curva r -densa en B gracias a la desigualdad de arriba. Así pues, $\phi_d(B) \leq r < \text{Diam}(B)$ y por lo tanto C tiene estructura ϕ_d -normal. ■

Se tiene la siguiente caracterización del concepto de estructura ϕ_d -normal.

Proposición 4.2.4 Sea $C \subset \tilde{\mathcal{B}}_X$. Entonces, C tiene estructura ϕ_d -normal si, y sólo si, dado cualquier $B \subset C \cap \tilde{\mathcal{B}}_X$ existe $\{x_1, \dots, x_n\} \subset B$ tal que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(x_i, d), \quad (4.38)$$

para algún $0 < d < \text{Diam}(B)$, siendo $\bar{B}(x_i, d)$ la bola cerrada centrada en x_i y radio d para cada $i = 1, \dots, n$.

Demostración. Supongamos que $C \subset \tilde{\mathcal{B}}_X$ tiene estructura ϕ_d -normal, y sea $B \subset C \cap \tilde{\mathcal{B}}_X$. Por la propia definición de $\phi_d(B)$ (Definición 1.1.4), dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\gamma: I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ la cual es $(\phi_d(B) + \frac{\varepsilon}{2})$ -densa en B . Así pues, tenemos que

$$B \subset \gamma(I) + \left(\phi_d(B) + \frac{\varepsilon}{2}\right)B_X. \quad (4.39)$$

Por otro lado, puesto que $\gamma(I)$ es compacto existe $\{y_1, \dots, y_m\} \subset \gamma(I)$ tal que

$$\gamma(I) \subset \left\{y_1, \dots, y_m\right\} + \frac{\varepsilon}{2}B_X, \quad (4.40)$$

y uniendo (4.39) y (4.40) llegamos a

$$B \subset \bigcup_{i=1}^m \bar{B}(y_i, \phi_d(B) + \varepsilon),$$

y como ε es arbitrario, tenemos la inclusión siguiente

$$B \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(x_i, \phi_d(B)),$$

para cierto conjunto $\{x_1, \dots, x_n\} \subset B$. Puesto que $\phi_d(B) < \text{Diam}(B)$, ya que C tiene estructura ϕ_d -normal, gracias a la inclusión de arriba tenemos la condición (4.38).

Recíprocamente, supongamos que dado cualquier $B \subset C \cap \tilde{\mathcal{B}}_X$ existe $\{x_1, \dots, x_n\} \subset B$ y un número $0 < d < \text{Diam}(B)$ verificando (4.38). Entonces, si $\gamma: I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ es una poligonal uniendo los vectores $\{x_1, \dots, x_n\}$, encontramos que γ es una curva d -densa en B (de nuevo, gracias a (4.38)), y en consecuencia $\phi_d(B) \leq d < \text{Diam}(B)$. Así pues, C tiene estructura ϕ_d -normal. □

Como hemos probado en el Ejemplo 4.2.12, cualquier conjunto con estructura normal, tiene estructura ϕ_d -normal. Además, esta implicación resulta obvia según la proposición anterior y la definición de estructura normal (Definición 4.2.4). Consecuentemente, cualquier espacio de Banach con estructura normal tiene estructura ϕ_d -normal. No obstante, al terminar de escribir esta memoria, no sabemos si el concepto de estructura ϕ_d -normal generaliza el concepto de estructura normal. Así pues, proponemos el siguiente problema:

Problema 1: ¿Es, realmente, el concepto de estructura ϕ_d -normal una generalización del concepto de estructura normal?

Veamos ahora algunos ejemplos de espacios de Banach que no tienen estructura ϕ_d -normal.

■ **Ejemplo 4.2.13** El espacio $\mathcal{C}(I)$ no tiene estructura ϕ_d -normal. En el Ejemplo 3.2.2 probamos que si $C := \{f \in \mathcal{C}(I) : 0 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1\}$ tenemos que

$$\phi_d(C) = 1.$$

Vamos a ver que $\text{Diam}(C) = 1$. En efecto, dada cualquier función $f \in C$, por la continuidad de dicha función, para cualquier $0 < \varepsilon < 1$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq \varepsilon$ para cada $0 \leq x \leq \delta$. Tomando $g \in C$ tal que $g(x) = 1$ para cada $\delta/2 \leq x \leq 1$, tenemos que $\|f - g\|_\infty \geq 1 - \varepsilon$ y esto prueba que $\text{Diam}(C) = 1$. ■

■ **Ejemplo 4.2.14** El espacio L^1 no tiene estructura ϕ_d -normal, ya que en el Ejemplo 3.2.1 probamos que

$$\text{Diam}(\mathcal{D}) \geq \phi_d(\mathcal{D}) = 2 \geq \text{Diam}(\mathcal{D}),$$

siendo \mathcal{D} el conjunto de las funciones de densidad de L^1 . Más aún, existe un subespacio reflexivo de L^1 que no tiene estructura ϕ_d -normal. Veremos estos en las siguientes líneas. Recordemos que χ denota la MNC de Hausdorff (Definición 3.1.3).

Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, r_n la correspondiente función de Rademacher definida en el Ejemplo 1.3.1, y consideremos $C := \overline{\text{Conv}}(\{r_n : n \in \mathbb{N}\})$. En [11, Th. X.5.2, p. 183] se prueba que $\chi(C) = 1$, y según la Proposición 3.2.1 $\phi_d(C) \geq \chi(C) = 1$. No es difícil comprobar que $\text{Diam}(C) = 1$, y por lo tanto C no tiene estructura ϕ_d -normal. Finalmente, gracias a las desigualdades de Khinchine el subespacio cerrado de L^1 generado por C es isomorfo a ℓ_2 (cf. [23, Cor. 9.2, p.90]) y por lo tanto es reflexivo. ■

Antes de continuar, es conveniente notar que el ejemplo anterior nos proporciona una condición necesaria para que un conjunto tenga estructura ϕ_d -normal.

Proposición 4.2.5 Sea $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$. Si $\chi(C) = \text{Diam}(C)$, siendo χ MNC de Hausdorff (Definición 3.1.3), entonces C no tiene estructura ϕ_d -normal.

Demostración. Sabemos que siempre se tiene la desigualdad $\phi_d(C) \leq \text{Diam}(C)$, y según la Proposición 3.2.1 $\chi(C) \leq \phi_d(C)$. Entonces, si $\chi(C) = \text{Diam}(C)$ encontramos que $\phi_d(C) = \text{Diam}(C)$ y por lo tanto C no tiene estructura ϕ_d -normal. □

Una consecuencia interesante del resultado anterior es la siguiente:

Corolario 4.2.2 Sea $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$ σ -compacto y $T : C \rightarrow C$ no-expansiva. Si C tiene estructura ϕ_d -normal, entonces $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Demostración. Consideremos la siguiente clase:

$$\mathcal{C} := \left\{ B \subset C : B \text{ es cerrado y convexo y } T(B) \subset B \right\}.$$

Entonces, $\mathcal{C} \neq \emptyset$ ya que $C \in \mathcal{C}$. Usando el hecho de que C es σ -compacto y el Lema de Zorn, es fácil probar que \mathcal{C} tiene un elemento minimal (cf. [11], [42]), es decir, existe $K \subset C$ cerrado y convexo tal que $T(K) \subset K$ y si $K_0 \subset K$ es convexo, cerrado y $T(K_0) \subset K_0$ entonces $K_0 = K$. Además, se tiene que (cf. [42, Property 11.8, p. 125]).

$$\chi(K) = \text{Diam}(K), \tag{4.41}$$

siendo χ la MNC de Hausdorff (Definición 3.1.3).

Por otro lado, si K tuviese más de un punto, esto es, $K \subset C \cap \tilde{\mathcal{B}}_X$, puesto que C tiene estructura ϕ_d -normal, teniendo presente la Proposición 3.2.1 y la igualdad (4.41) llegamos a la contradicción siguiente

$$\text{Diam}(K) = \chi(K) \leq \phi_d(K) < \text{Diam}(K).$$

Así pues, K está formado por un único vector el cual, por supuesto, es un punto fijo de T . □

A la vista del resultado anterior, pensamos que es interesante plantear el siguiente problema:

Problema 2: Sea $C \in \tilde{\mathcal{B}}_X$, con estructura ϕ_d -normal, σ -compacto y $T : C \rightarrow C$ una aplicación ϕ_d -no-expansiva. ¿Se puede afirmar, bajo estas condiciones, que $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$?

Nótese que una respuesta afirmativa al Problema 1 o al Problema 2 sería una generalización del famoso teorema de punto fijo de Kirk (Teorema 4.2.3).

Índices y referencias



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Índice de figuras	85
Índice de tablas	87
Bibliografía	89
Índice alfabético	93
Índice de Símbolos	95

Índice de figuras

1	Curva de Hilbert	II
1.1	Gráfica de la curva de los cosenos para $n = 2$	2
1.2	Gráfica de la curva de los cosenos para $n = 3$	3
1.3	Gráficas de las superficies de Rastrigin y Ackley	6
1.4	Gráficas de la superficie $f(x,y)$ y de la curva $f(\gamma_4(t))$	7
1.5	Gráficas de la superficie de Rastrigin y de la curva $R(\gamma_{11}(t))$	11
1.6	Gráfica de los polinomios de Chebyshev	13
1.7	Gráfica de la curva de Chebyshev para $n := 2$	14
1.8	Gráfica de la curva de Chebyshev para $n := 3$	14
1.9	Gráfica de algunas funciones $P(\gamma_m(t))$	15
1.10	Gráfica de algunas funciones de Rademacher	18

Índice de tablas

1.1	Aproximación del mínimo de las funciones test de Rastrigin y Ackley	6
1.2	Aproximación del mínimo de la función $f(x,y)$	7
1.3	Aproximación de algunas raíces de $P(x,y,z)$	15
1.4	Aproximación de algunas raíces de $P(x_1, \dots, x_8)$	15
1.5	Aproximación de algunas raíces de $f(x,y)$ en un entorno del $(0,0)$	16
4.1	Aproximaciones del punto fijo de $T(x,y)$	63

Bibliografía

- [1] R. P. Agarwal, M. J. Meehan and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, U.K. 2004.
- [2] A. Aghajani and M. Aliaskari *Generalization of Darbo's fixed point theorem and application*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 2 (2011) No. 2, 86-95.
- [3] A. Aghajani, J. Banaś and N. Sabzali, *Some generalizations of Darbo fixed point theorem and applications*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 20, No. 2 (2013), 345-358.
- [4] R. Akerkar, *Nonlinear Functional Analysis*, Narosa Publishing House, 1999 Delhi.
- [5] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina and B. N. Sadovskii, *Measure of noncompactness and condensing operators*, Birkhäuser Verlag Basel, 1992.
- [6] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach Spaces Theory*, Springer, New York 2006.
- [7] C. D. Aliprantis and K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [8] D. E. Alspach, *A fixed point free nonexpansive map*, American Mathematical Society, Vol. 82, No. 3 (1981), 423-424.
- [9] A. Ambrosetti, *Un Teorema di esistenza per le equazioni differenziali negli spazi di Banach*, Rend. Sem. Mat. Padova Vol. 39 (1967), 349-361.
- [10] J. Apell, *Measures of noncompactness, condensing operators and fixed points: An application-oriented survey*, Fixed Point Theory, Vol. 6, No. 2 (2005), 157-229.
- [11] J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez Benavides and G. López Acedo, *Measures of noncompactness in metric fixed point theory*, Birkhäuser Verlag, Basel 1997.
- [12] G. Bachman and L. Narici, *Functional Analysis*, Dover Publications INC., New York 2000.
- [13] J. Banaś, *On measures of noncompactness in Banach spaces*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 21, No. 1 (1980), 131-143.
- [14] J. Banaś, J. Caballero, B. López and K. Sadarangani, *Solutions of a functional integral equation in $BC(\mathbb{R}_+)$* , International Mathematical Forum Vol. 1, No. 24 (2006), 1181-1194.

- [15] J. Banaś and M. Mursaleen, *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations*, Springer, 2014.
- [16] J. Banaś and J. Rivero, *On measures of weak noncompactness*, Ann. Mat. Pura Appl., Vol. 151 (1988), 213-224.
- [17] B. Basit and A. J. Pryde, *Strong Continuity of Semigroup Homomorphisms*, Studia Mathematica, Vol. 132, No. 1 (1999), 71-78.
- [18] T. G. Bhaskar and V. Lakshmikantham, *Fixed point theorems in partially ordered partial metric spaces and applications*, Nonlinear Analysis 65 (2006), 1379-1393.
- [19] I. V. Bogachev, *Measure Theory*, Vol. 1 y 2, Springer-Verlag 2007.
- [20] M. S. Brodskiĭ and D. P. Milman, *On the center of a convex set*, Dokl. Akad. Nauk., SSSR 59 (1948), 837-840.
- [21] J. Burns, C. Lennard and J. Sivek, *A contractive fixed point free mapping on a weakly compact convex set*, Studia Mathematica Vol. 223 No. 3 (2014), 275-283
- [22] W. L. Bynum, *Normal structure coefficients for Banach spaces*, Pacific J. Math. Vol. 86 (1980), 427-436.
- [23] N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Spaces Theory*, Cambridge University Press, New York (2005).
- [24] J. Cea, *Optimization. Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, Bombay, 1978.
- [25] Y. Cherruault, *Resolution of industrial problems by a simple and universal new method*, Kybernetes Vol. 38 No. 5 (2009), 698-703.
- [26] Y. Cherruault and G. Mora, *Optimisation Globale. Théorie des Courbes α -denses*, Economica, Paris, 2005.
- [27] C. E. Chidume and S. A. Mutangadura, *An example of the Mann iteration method for Lipschitz pseudo-contractions*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 129, No. 8 (2001), 2359-23636.
- [28] G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 24 (1955), 84-92.
- [29] F. S. De Blasi, *On a Property of the Unit Sphere in a Banach space*, Colloq. Math. 65 (1977), 333-343.
- [30] C. De Vito, *Functional Analysis*, Academic Press, New York 1978.
- [31] K. Deimling, *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York 1977.
- [32] O. Devolder, F. Glineur, and Y. Nesterov, *Solving Infinite-dimensional Optimization Problems by Polynomial Approximation*, Recent Advances in Optimization and its Applications in Engineering (2010), 31-40.
- [33] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, P.W.N., Warszawa, 1982.
- [34] J. A. Facenda, *Geometría de Espacios de Banach*, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, Sevilla 1998.
- [35] K. Falconer, *Fractal Geometry*, Wiley & Sons, West Sussex, 2003.
- [36] K. Floret, *Weakly Compact Sets*, Springer, Lectures held at S.U.N.Y., Buffalo, 1978.
- [37] L. Fox and I. B. Parker, *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*, Oxford Mathematical Handbooks, Belfast, 1968.
- [38] D. K. Ganguly and D. Bandyopadhyay, *Approximation of fixed points in Banach space by iteration processes using infinite matrices*, Soochow journal of mathematics, Vol. 22, No. 3 (1996), 395-403.

- [39] G. García and G. Mora, *The Degree of Convex Nondensifiability in Banach Spaces*, Journal of Convex Analysis, Vol. 22 No. 3 (2015), 871-888.
- [40] G. García, G. Mora and D. A. Redtwitz, *Box-counting dimension computed by α -dense curves*, enviado a la revista *Complex Geometry, Patterns, and Scaling in Nature and Society* para su revisión, y en caso de ser aceptado, publicación. ID. Fractals-D-15-00115.
- [41] J. García-Falset, E. Llorens-Fuster and T. Suzuki, *Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 375 (2011), 185-195.
- [42] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed points theory*, Cambridge University Press, 2002.
- [43] I. Gohberg, L. S. Gol'denshtein and A. S. Markus, *Investigation on some properties of bounded linear operators in connection with their q -norms*, Ucen. Zap. Kishinevsk, Un-ta 29 (1957), 29-36.
- [44] C. A. Hernández Linares and M. A. Japón Pineda, *Fixed Point Property Under Renormings in Non-Reflexive Banach Spaces: Some techniques and examples*, LAP Lambert Academic Publishing AG and Co KG, Colne (Germany) 2012.
- [45] R. B. Holmes, *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, New York 1975.
- [46] L. Karlovitz, *Existence of a fixed point for nonexpansive map in a space without normal structure*, Pacific J. Math. Vol. 66 (1976), 153-159.
- [47] J. L. Kelly, *General Topology*, Springer, 1975.
- [48] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distance*, Amer. Math. Monthly, Vol. 72 (1965), 1004-1006.
- [49] W. A. Kirk and B. Sims, *Uniform normal structure and related notions*, Journal of Nonlinear Convex Analysis, Vol. 2, No. 1 (2001), 129-138.
- [50] M. A. Kłopotek, S.T. Wierzchon and K. Trojanowski, *Intelligent Information Processing and Web Mining: Proceedings of the International IIS: IIPWM'05 Conference held in Gdansk (Poland)*, Springer-Verlag 2005.
- [51] I. Kubiacyk and S. Szufła, *Kneser's theorem for weak solutions of ordinary differential equations in Banach spaces*, Publ. Inst. Math. (Beograd), Vol. 46 (1982), 99-103.
- [52] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fund. Math. 15 (1930), 301-309.
- [53] M. Maimos, B. O. Konfe, S. Koussoube and B. Some, *Alienor Method for Nonlinear Multi-Objective Optimization*, Applied Mathematics, Vol. 2 (2011), 217-224.
- [54] G. Mora, *Minimizing Multivariable Functions by Minimization-Preserving Operators*, Mediterr. J. Math, Vol. 2 (2005), 315-325.
- [55] G. Mora, *The Peano curves as limit of α -dense curves*, RACSAM (Mathematical Analysis) , Vol. 99 (2005), 23-28.
- [56] G. Mora, *Some density properties of the closed unit ball of L_1* , Topology and its Applications, Vol. 156 (2009), 2246-2256.
- [57] G. Mora and Y. Cherruault, *Characterization and Generation of α -Dense Curves*, Computers Math. Applic. Vol. 33, No. 9 (1997), 83-91.
- [58] G. Mora and Y. Cherruault, *An Approximation Method for the Optimization of Continuous Functions of n Variables by Densifying their Domains*, Kybernetes, Vol. 28, No. 2 (1999), 164-180.
- [59] G. Mora and J. A. Mira, *Alpha-Dense Curves in Infinite Dimensional Spaces*, Inter. Journal of Pure and Appl. Math., Vol. 5, No. 4 (2003), 437-449.
- [60] J. O. Oaleru, *A Generalization of a Fixed Point Theorem of Kirk*, Inter. J. of Math. and Computer Science, Vol. 1, No. 4, 2006.

- [61] D. O'Regan, *Operator equations in Banach spaces relative to the weak topology*, Arch. Math. Birkhäuser Verlag 71 (1998), 123-136.
- [62] G. Peano, *Démonstration de la intégrabilité des équations différentielles ordinaires*, Math. Ann. Vol. 37 (1890), 127-129.
- [63] V. S. Pugachev and I. N. Sinityn, *Lectures on Functional Analysis and Applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore 1999.
- [64] W. Rudin, *Análisis Funcional*, Editorial Reverté, Barcelona, 2002.
- [65] B. N. Sadovskii, *On a fixed point principle*, Funkt. Anal. Vol 4 No. 2 (1967), 74-76.
- [66] H. Sagan, *Space Filling Curves*, Springer-Verlag, New York 1994.
- [67] H. H. Schaefer, *Espacios Vectoriales Topológicos*, Editorial Teide, Barcelona 1974.
- [68] R. C. Sine, *Fixed Points and Nonexpansive Mappings*, American Math. Society, Vol. 18, USA 1983.
- [69] T. Suzuki, *Fixed point theorems and convergence for some generalized nonexpansive mappings*, J. Amth. Anal. Appl., Vol 340 (2008), 1088-1095.
- [70] S. Swabik and Y. Guoju, *Topics in Banach Space Integration*, Series in Real Analysis, vol. 10, World Scientific Publishing, 2005.
- [71] K. K. Tan and H. K. Xu, *Approximating solutions of non expansive mappings by the Ishikawa iteration process*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 178 (1993), 301-308.
- [72] M. R. Tasković, *Characterization of reflexive Banach spaces with normal structure*, Mathematica Moravica, Vol. 6 (2002), 97-102,
- [73] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications Inc., New York, 1970.
- [74] A. Wiśnicki, *An example of a nonexpansive mapping which is not 1-ball-contractive*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Lublin-Polonia, Vol. LIX, Sec. A (2005), 141-146.
- [75] C. S. Wong, *Close-to-normal structure and its applications* J. of Functional Analysis, Vol. 16 (1982), 353-358.
- [76] E. Zeidler, *Nonlinear Analysis and its Applications III. Variational Methods and Optimization*, Springer-Verlag, New York 1985.

Índice alfabético

A

Aplicación

(k, μ) -contractiva, 63
 μ -condensante, 63
 ϕ_d -contractiva, 72
 ϕ_d -no-expansiva, 71
 k -contracción, 58
compacta, 72
contractiva, 58
lipschitziana, 58
no-expansiva, 58

B

Base

de Schauder, 26
estándar de Schauder, 48
monótona, 29
ortonormal, 50

C

Conjunto

π -densificable, 32
 σ -densificable, 17
de funciones de densidad, 22
de nivel r , 9
de raíces de una función, 11
densificable, 2
equicontinuo, 43

factible de soluciones, 8
no-trivial, 78

Continuo de Peano, 2

Curva

α -densa, 2
de Chebyshev, 14
de los cosenos, 2
definición, 2
totalmente λ -densa, 50
V-densa, 17

D

Distancia

de Hausdorff, 2
de un vector a un conjunto, 79

Dual topológico, 16

E

Ecuación integral de Volterra, 67

Error de aproximación del mínimo global f de orden γ_α , 7

Espacio

con estructura ϕ_d -normal, 80
con estructura normal, 79

Estructura

ϕ_d -normal, 80
normal, 79

F

Función

- η -estocásticamente independiente (η -e.i.), 4
- asociada a f de orden γ_α , 7
- de Ackley, 5
- de densidad, 22
- de Heaviside, 9
- de Rademacher, 18
- de Rastrigin, 5

G

Grado de

- no-densificación convexo (GNDC) Φ , 45
- no-densificación convexo débil (σ -GNDC) Ψ , 54
- no-densificación (GND) ϕ_d , 4
- no-densificación débil (σ -GND) ϕ_σ , 20
- no-densificación débil total (σ -GNDC) ψ_σ , 53

I

Iteración

- de Mann, 60
- de Picard, 60

L

Lema de Zorn, 82

M

Módulo de continuidad, 7

Minimizador

- global, 8
- local, 8
- propio, 9

MNC (Medida de no-compacidad)

- de De Blasi, 40
- de Hausdorff, 40
- de Kuratowski, 40
- definición, 40
- interior de Hausdorff, 42

O

Operador que preserva los optimizadores (O.P.O.), 9

Orden esférico, 16

P

Polinomios

- de Chebyshev, 13

de varias variables, 11

Problema

- de Cauchy, 74
- de optimización, 5, 21

Programa de Helly, 23

Propiedad débil del punto fijo (σ -PPF), 80

Punto

- diametral, 78
- fijo, 58
- no-diametral, 78

R

Radio de Chebyshev, 78

Recubrimiento de un conjunto, 41

S

Símbolo de Kronecker, 26

Sistema de Haar, 26

Sucesión

- de puntos fijos aproximados, 60
- diametral, 79

T

Teorema

- de Eberlein-Šmulian, 45
- de Hahn-Banach, 50
- de Hahn-Mazurkiewicz, 32
- de Heine-Borel, 59
- de James, 19
- de Kirk, 80
- de Krein, 53
- de las intersecciones de Cantor, 65
- de Peano, 74
- de Weierstrass, 5
- Punto fijo de Banach, 58
- Punto fijo de Brouwer, 59
- Punto fijo de Darbo-Sadovskii, 63
- Punto fijo de Darbo-Sadovskii generalizado, 65
- Punto fijo de Schauder, 60

U

Uniformemente

- continua (función), 68
- convexo (espacio), 79
- integrable (familia de medidas), 42

V

Variación

- acotada, 34
- total, 34

Índice de Símbolos

Conjuntos numéricos

I	Intervalo unidad $[0,1]$.
\mathbb{N}	Conjunto de los números enteros positivos.
\mathbb{Z}	Conjunto de los números enteros.
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
\mathbb{R}_+	Conjunto de los números reales no negativos.
$\mathcal{L}(F, K)$	Raíces reales de la función F en el conjunto K .

Espacios

(E, d)	Espacio métrico.
$(X, \ \cdot\)$	Espacio de Banach dotado de la norma $\ \cdot\ $.
(X, σ)	Espacio de Banach dotado de la topología débil σ .
X^*	Dual topológico del espacio de Banach $(X, \ \cdot\)$.
L^p	Espacio de las funciones de potencia p -ésima integrable, $1 \leq p < \infty$.
L^∞	Espacio de las funciones esencialmente acotadas.
ℓ_p	Espacio de las sucesiones de potencia p -ésima sumable, $1 \leq p < \infty$.
$\ell_2(\mathbb{Z})$	Espacio de las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de cuadrado sumable.
c_0	Espacio de las sucesiones convergentes a cero.
$\mathcal{C}(I)$	Espacio de las funciones $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuas.
$\mathcal{C}(J, X)$	Espacio de las aplicaciones $x : J \rightarrow (X, \ \cdot\)$ continuas, J un intervalo $[0, a] \subset I$.
$\mathcal{C}^*(I)$	Espacio de las funciones acotadas con, a lo sumo, un número finito de discontinuidades.
BV	Espacio de las funciones $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada.
$\mathbb{P}[n, v]$	Espacio de los polinomios en n variables y grado v .

Conjuntos y clases

$B(x, r)$	Bola centrada en x y radio r .
$\bar{B}(x, r)$	Bola cerrada centrada en x y radio r .

B_X	Bola unidad cerrada.
\mathcal{B}_E	Clase de los conjuntos no vacíos y acotados del espacio métrico (E, d) .
\mathcal{B}_X	Clase de los conjuntos no vacíos y acotados del espacio de Banach $(X, \ \cdot\)$.
$\mathcal{W}_X^{\ \cdot\ }$	Clase de los conjuntos precompactos de $(X, \ \cdot\)$.
\mathcal{W}_X^σ	Clase de los conjuntos precompactos de (X, σ) .
\mathcal{N}_0^σ	Clase de los entornos básicos, débiles, convexos y equilibrados del vector nulo de X .
\mathcal{N}_0^π	Clase de los entornos básicos, débiles, convexos y equilibrados del vector nulo de $X_1 \times \dots \times X_n$ de la topología producto del espacio $(X_1, \sigma_1) \times \dots \times (X_n, \sigma_n)$.
$\mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$	Clase de los entornos de \mathcal{N}_0^σ de orden esférico λ .
$\Gamma_{\alpha, B}$	Clase de las curvas α -densas en B .
$\Gamma_{\lambda, B}$	Clase de las curvas V -densas en B , con $V \in \mathcal{N}_0^\sigma(\lambda)$.
$\Gamma_{\lambda, B, \sigma}$	Clase de las curvas totalmente λ -densas en B .
$\text{Fix}(T)$	Conjunto de puntos fijos de la aplicación T .
$\mathcal{C}(J, B)$	Conjunto de las aplicaciones $x \in \mathcal{C}(J, X)$ con $x(J) \subset B$, $B \subset X$.
Δ	Clase de las funciones $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ monótonas crecientes con $\lim_n h^n(s) = 0$.

Grados relacionados con la densificación

ϕ_d	Grado de no-densificación, GND (Definición 1.1.4).
ϕ_σ	Grado de no-densificación débil, σ -GND (Definición 1.3.3).
ψ_σ	Grado de no-densificación débil total, σ -GNDDT (Definición 3.5.1).

Medidas de no-compacidad (MNC)

κ	MNC de Kuratowski, Definición 3.1.2.
χ	MNC de Hausdorff, Definición 3.1.3.
β	MNC de De Blasi definida en (X, σ) , Definición 3.1.4.
Φ	Grado de no-densificación convexo, GNDC, MNC basada en el GND ϕ_d .
Ψ	Grado de no-densificación convexo débil, σ -GNDC, MNC definida en (X, σ) basada en σ -GNDDT ψ_σ .

Otros símbolos

\bar{A}	Clausura del conjunto A .
$\text{Conv}(A)$	Envoltura convexa del conjunto A .
$\overline{\text{Conv}}(A)$	Clausura de la envoltura convexa del conjunto A .
$\text{Diam}(A)$	Diámetro del conjunto A .
σ	Topología débil del espacio de Banach $(X, \ \cdot\)$.
π	Topología débil del espacio producto $(X_1, \sigma_1) \times \dots \times (X_n, \sigma_n)$.
$\omega(f; \varepsilon)$	Módulo de continuidad de la función f de orden ε .
$V_I(f)$	Variación total de la función f en I .
Λ_1	Medida de Lebesgue en \mathbb{R} .
$F_{\gamma\alpha}$	Función asociada a f de orden $\gamma\alpha$.
$\text{dist}(x, A)$	Distancia del vector x al conjunto A .

