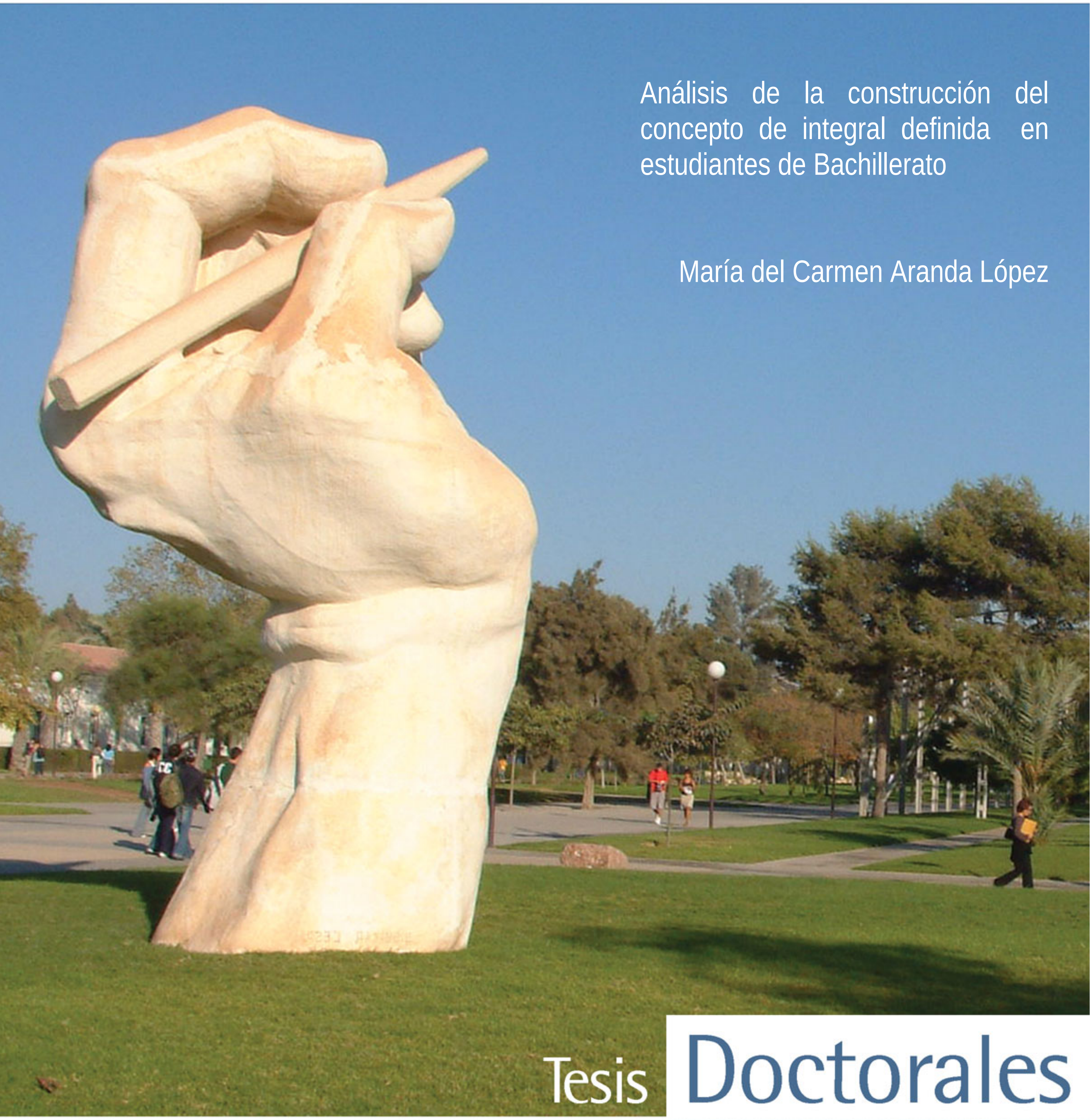
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Análisis de la construcción del concepto de integral definida en estudiantes de Bachillerato

María del Carmen Aranda López

Tesis Doctorales

UNIVERSIDAD de ALICANTE

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

DEPARTAMENTO DE INNOVACIÓN Y FORMACIÓN DIDÁCTICA

ANÁLISIS DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

TESIS DOCTORAL

MARIA DEL CARMEN ARANDA LÓPEZ

ALICANTE, DICIEMBRE 2015

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

ANÁLISIS DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Memoria que presenta María del Carmen Aranda López
para optar al grado de doctora

Fdo: Dª. María del Carmen Aranda López

Trabajo realizado bajo la dirección de la
Dra. María Luz Callejo de la Vega

Fdo: Dra. María Luz Callejo de la Vega

Alicante, Octubre 2015

AGRADECIMIENTOS

Muchas personas me han apoyado a lo largo del camino, casi siempre grato y alguna vez difícil, que me ha conducido a la elaboración de esta memoria. A todas ellas quiero expresar mi gratitud.

A la directora de este trabajo, la Dra. María Luz Callejo de la Vega, con quien tanto he aprendido, que siempre me ha ayudado y animado. Ha sido un placer trabajar bajo su dirección.

A los miembros del área de Didáctica de la Matemática del Departamento de Innovación y Formación Didáctica de la Universidad de Alicante, en particular a la Dra. Ceneida Fernández, y de forma especial al Dr. Salvador Llinares y a la Dra. Julia Valls que siempre me han prestado toda su colaboración. También a la Dra. Gloria Sánchez-Matamoros de la Universidad de Sevilla.

A todas las personas que han participado en los seminarios, cuyas aportaciones han contribuido a mejorar este trabajo.

A la Dra. Anabel Roig, cuya tesis me ha sido tan útil, y al Dr. Joan Pons, por su generosidad.

A los alumnos participantes en esta investigación que, en un curso tan complicado como es 2º de Bachillerato, me permitieron llevar a cabo el experimento de enseñanza.

A Saoro y Maisse, que hicieron el montaje técnico para la grabación del experimento de enseñanza, y a Eduardo que me cedió algunas sesiones de clase.

A mi familia y mis amigos.

A Laura y Fernando

A mis padres

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN………………………………………………………………….. 1

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN……...……………..……. 5

1.1. Desarrollo histórico de la noción de integral……..…………….……………… 6

1.2. La integral en el currículo de Bachillerato…………………………………... 16

1.2.1. La integral en los libros de texto y en las pruebas de acceso a la Universidad……………………………………………………………….. 18

1.3. Características del aprendizaje del concepto de integral…………………….. 26

1.3.1. La integral como límite de las sumas de Darboux……………………... 27

1.3.1.1. La integral como cálculo del área bajo una curva…………… 32

1.3.2. Concepciones del concepto de integral….…………………...………… 32

1.3.3. Función integral……………………………………………………….... 34

1.4. Características de cómo se llega a comprender la integral…………………… 37

1.5. Propuestas didácticas………………………………………..……………….. 40

1.5.1. La integral definida como área de la superficie bajo una curva………. 40

1.5.2. Uso de múltiples representaciones…………………………………... 43

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO……………………………………..……… 47

2.1. La abstracción reflexiva como mecanismo de construcción cognitiva……………………………………………………………………… 48

2.1.1. El mecanismo reflexión sobre la relación actividad-efecto como elaboración de la abstracción reflexiva……………………………… 51

2.1.1.1. Fases del proceso de abstracción reflexiva: fase de participación y fase de anticipación………………………… 55

2.1.1.2. Trayectorias hipotéticas de aprendizaje………..………….. 58

2.2. Experimentos de enseñanza constructivista……..…………….………….…... 60

2.3. Teoría de Duval sobre los registros semióticos……………………………… 63

2.4. Preguntas de investigación..……….…………...……………………………… 67

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN…………………………… 69

3.1. Participantes y contexto.………..…………………………………………… 70

3.2. Diseño del experimento de enseñanza.…………………………..……… 70

3.2.1. Fase 1. Diseño y planificación………..……………………….….…. 70

3.2.1.1. Construcción del concepto de integral como límite...........… 76

3.2.1.2. Significado de la expresión de las sumas de Darboux y del error de la aproximación……………..…………….....…….. 78

3.2.1.3. Construcción de la Función integral……………………….. 84

3.2.2. Fase 2. Experimentación en el aula……………………………..…... 90

3.2.3. Fase 3. Análisis retrospectivo…………………………………..…… 90

3.3. Instrumentos de recogida de datos…………………………………………… 90

3.4. Análisis de datos………..……………………………………………………. 91

3.4.1. Primera fase………………………………………………………… 92

3.4.2. Segunda fase………..……………………………………………... 94

3.4.3. Tercera fase……………………………………………………….. 96

CAPÍTULO 4. RESULTADOS……………………..………………...…….. 99

4.1. Perfiles en relación con la construcción de la aproximación al área bajo una curva…..………………………………………………………………… 100

4.1.1. Perfil 1: Dos formas de aproximación al área y coordinación entre ellas……………………………………………………………….. 100

4.1.2. Perfil 2: Dos formas de aproximación al área sin evidencias de coordinación entre ellas…………………...…………………………… 104

4.1.3. Perfil 3. Sin evidencias de aproximación al área……………………… 110

4.2. Perfiles en relación al significado de la expresión de las sumas de Darboux…………………………………………………………………… 113

4.2.1. Perfil 1: Coordinación entre representaciones para expresar el error…………………………………….…….……………………... 115

4.2.2. Perfil 2: Coordinación entre representaciones para expresar las sumas superiores e inferiores…...……….………..……………………..……..… 122

4.2.3. Perfil 3: Sin evidencias de utilización del lenguaje analítico….…….. 127

4.3. Perfiles en relación con la construcción del concepto de integral definida y de Función integral……………………………………………………… 129

4.3.1. Perfil 1. Relación entre área e integral definida y una primera aproximación al concepto de función integral……………………….. 129

4.3.2. Perfil 2. Algunas constataciones de la relación entre área e integral definida………………………………………………………… 139

4.4. Perfiles globales en el proceso de construcción del concepto de integral definida…………………………………………………………………….. 149

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN……………………………… 155

5.1. Distintas aproximaciones a la construcción del concepto de integral definida y de Función integral………………………………………………………… 156

5.1.1. Momento de proyección………………………….….…………....... 156

5.1.2. Momento de reflexión…………………………………………….…. 158

5.1.3. Momento de anticipación local……………………………………… 162

5.2. Contexto de construcción del conocimiento: el experimento de enseñanza…. 163

5.3. Implicaciones para la enseñanza…………………………………………... 167

REFERENCIAS……………………...…………………………………………. 171

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

La comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes es un objetivo fundamental para que avancen en su conocimiento de las matemáticas y para enfrentarse con solvencia a estudios posteriores. Por este motivo, las investigaciones sobre la construcción conceptual tienen gran interés en Educación Matemática.

En esta investigación nos ocupamos de la construcción del concepto de integral definida en estudiantes de Bachillerato (17-18 años), en la enseñanza secundaria postobligatoria. El concepto de integral definida es un concepto del Análisis Matemático y este trabajo se sitúa en el campo del Pensamiento Matemático Avanzado.

En la normativa educativa en vigor cuando se elaboró este trabajo, y concretamente en el decreto que regulaba el currículo del Bachillerato en la Comunidad Valenciana (DOCV de 11 de julio de 2008), se indicaba que en el tratamiento didáctico se debe equilibrar la importancia de los conceptos y los procedimientos, y que el aprendizaje de las Matemáticas se debe entender como el proceso de asimilación de los conceptos necesarios para enfrentarse con éxito a los problemas que plantea la ciencia y la técnica. En este sentido, el concepto de integral juega un papel fundamental en sí mismo para resolver dichos problemas, y también para avanzar con éxito en los estudios universitarios. Por tanto, está plenamente justificado el interés de los investigadores en Educación Matemática en los procesos de aprendizaje del concepto de integral definida.

El objetivo de esta investigación es analizar el proceso de construcción del concepto de integral definida desde el marco de la abstracción reflexiva, en estudiantes de Bachillerato (16-18 años) que participaron en un experimento de enseñanza constructivista.

Esta tesis doctoral está dividida en cinco capítulos. En el primero tratamos la problemática de la investigación. El capítulo empieza con una síntesis histórica de la noción de integral definida. A continuación describimos la presencia de la integral en el currículo, en algunos libros de texto y en las pruebas de acceso a la universidad. Continuamos revisando las investigaciones sobre características del aprendizaje del concepto de integral y de cómo se llega a comprender este concepto. Por último, presentamos algunas propuestas didácticas.

En el segundo capítulo se describe el marco teórico que contempla tres aspectos: el mecanismo para la construcción conceptual denominado *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, basado en la *abstracción reflexiva* de Piaget, a partir del cual se describen las fases en la construcción de un concepto; los experimentos de enseñanza constructivista y, por último, la teoría de Duval sobre los registros semióticos.

En el tercer capítulo describimos el diseño de la investigación. En primer lugar, presentamos los participantes y el contexto en que se realizó este trabajo. En segundo lugar caracterizamos el experimento de enseñanza y sus tres fases: diseño y planificación, experimentación en el aula y análisis retrospectivo. En el diseño se detallan tres aspectos del experimento de enseñanza: la construcción del concepto de integral definida como límite, el significado de la expresión de las sumas de Darboux y del error de la aproximación y, por último, la construcción de la función integral, especificando la trayectoria hipotética de aprendizaje. En tercer lugar presentamos los datos de la investigación que son el registro de las acciones que efectuaron los alumnos con los *applets* para resolver las tareas propuestas, las declaraciones orales de las parejas o tríos mientras realizaban las tareas y sus hojas de respuesta, es decir, lo que los estudiantes hacían, decían y escribían como conclusión de su proceso. Por último, se expone el análisis de los datos en tres fases: transcripción de las interacciones verbales y de las acciones de los estudiantes; identificación de las acciones realizadas (*experimentar, relacionar, inferir, coordinar y extender*), que se contemplan en la trayectoria hipotética de aprendizaje en términos del mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto* y, por último, la descripción de la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes.

En el cuarto capítulo exponemos los resultados en cuatro apartados. En los tres primeros se presenta los perfiles de los estudiantes en relación con la construcción de la aproximación al área bajo una curva, el significado de la expresión de las sumas de Darboux y la función integral. En el último presentamos los perfiles globales en el proceso de construcción del concepto de integral definida. Estos perfiles se caracterizan por: (a) estar en distintos momentos de la fase de anticipación: *proyección*, *reflexión* o *anticipación local*; y (b) por las acciones en que se apoya su trayectoria de aprendizaje: *experimentar, relacionar, inferir, coordinar* o *extender*.

En el último capítulo, se expone en primer lugar las conclusiones y la discusión de los resultados obtenidos, reflexionando sobre los saltos cognitivos que permiten a los estudiantes pasar de un momento a otro de la fase de participación de la *abstracción reflexiva* en la construcción del concepto de integral definida. Por último, exponemos algunas reflexiones sobre el contexto de construcción del conocimiento, el experimento de enseñanza, y algunas implicaciones para la enseñanza.

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

Los conceptos matemáticos, y en particular, los conceptos del Análisis Matemático, ocupan un lugar central en los cursos de Bachillerato de tipo científico (16-18 años). No obstante, resultan difíciles para los estudiantes y muchas veces no se les presta la atención ni el tiempo necesario para que los estudiantes puedan llegar a tener una comprensión suficiente de los mismos.

Hay muchas investigaciones que se ocupan de la comprensión de los conceptos del Análisis Matemático, de las dificultades que tienen los estudiantes y de cómo superarlas. Esta investigación se centra en el primer concepto del Análisis que aparece históricamente, el de integral definida, si bien con frecuencia en los currículos de Bachillerato se aborda al final, después del cálculo de primitivas, y como una aplicación del mismo.

En este capítulo abordaremos en primer lugar el desarrollo histórico de la noción de integral; en segundo lugar, describiremos brevemente el tratamiento de la integral en el Bachillerato, tanto en el currículo como en algunos libros de texto y en las pruebas de acceso a la Universidad; en tercer lugar, nos ocuparemos de las características del aprendizaje del concepto de integral; en cuarto lugar expondremos algunas características de cómo llegan los estudiantes a comprender el concepto de integral; el capítulo concluye con algunas propuestas didácticas para el aprendizaje de este concepto.

1.1. DESARROLLO HISTÓRICO DE LA NOCIÓN DE INTEGRAL

Los orígenes del Análisis Matemático en general, y el de la integral, en particular, están ligados al cálculo de áreas. “El primer concepto básico del Análisis Matemático es el de integral” (Courant y Robbins, 2002; p. 440) y ha estado muy ligado al problema del cálculo del área de una superficie (Guzmán, 2010), que ha sido uno de los problemas fundamentales a lo largo de la historia de las matemáticas. En estos orígenes podemos identificar cuatro etapas. En la primera etapa (siglo V a.C. hasta la primera mitad del siglo XV) los científicos estuvieron preocupados en buscar justificaciones y un mayor nivel de abstracción en el cálculo de áreas a través de métodos infinitesimales desde un enfoque geométrico, lo que supuso un salto en las matemáticas respecto a épocas anteriores. En la segunda etapa (segunda mitad del siglo XV hasta 1820), se modificaron las bases del cálculo infinitesimal con un enfoque algebraico y se plantearon varios problemas que dieron lugar a la creación del Análisis Matemático por Newton y Leibnitz. Es en la tercera etapa (1821 hasta finales del siglo XIX) cuando el Análisis Matemático en general, y la integral en particular, quedaron perfectamente fundamentados una vez establecido claramente el concepto de límite. En esta etapa el cálculo se hace riguroso desde un enfoque aritmético. La cuarta etapa corresponde a las matemáticas contemporáneas que en los últimos años, con el Análisis no estándar, vuelve a considerar las cantidades infinitesimales como alternativa a los ε-δ de la definición métrica de límite de Weierstrass.

- **Primera etapa (siglo V a C. hasta la primera mitad del siglo XV)**

En esta etapa distintos matemáticos crearon y utilizaron métodos que les permitieron calcular el área de distintas figuras así como demostrar proposiciones sobre áreas y volúmenes de éstas.

Pitágoras (584-504 a.C.) dio el primer paso para definir la noción de área y Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) creó el método de "exhausción" para calcular áreas de figuras curvilíneas, inscribiendo y circunscribiendo polígonos y aumentando el número de lados para aproximar cada vez más las figuras. Eudoxo demostró, entre otros resultados, que "las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios, que los volúmenes de dos esferas son entre sí como los cubos de sus radios" (Boyer, 1949). Euclides se basó en el método de exhausción para calcular área y volúmenes, y según Kline (2012), su trabajo "es más perfecto que el de Newton y Leibnitz" (p. 121).

Arquímedes (287-212 a.C.), se dedicó a la geometría, entre otros campos, a lo largo de toda su vida, y concretamente a la demostración de proposiciones respecto a áreas y volúmenes de figuras limitadas por líneas o superficies curvas, como la parábola, el círculo, la esfera y el cilindro, espirales, y otras figuras. Calculó con más exactitud el valor de π, usando el método creado por Eudoxo, aproximando el área del círculo por defecto con polígonos inscritos y por exceso con polígonos circunscritos. También calculó el área de un segmento parabólico (Figura 1.1) por este método y por métodos mecánicos y demostró que el área del segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área del triángulo que tiene la misma base y la misma altura mediante el método de exhausción, inscribiendo y circunscribiendo figuras formadas por triángulos y trapecios, y utilizando las sumas parciales de los términos de una progresión geométrica indefinida de razón ¼. Aunque no habla de la suma infinita, demuestra por doble reducción al absurdo que la suma no puede ser mayor ni menor que 4/3 (Boyer, 1987; Kline, 2012; Vera, 1970; González, 2008).

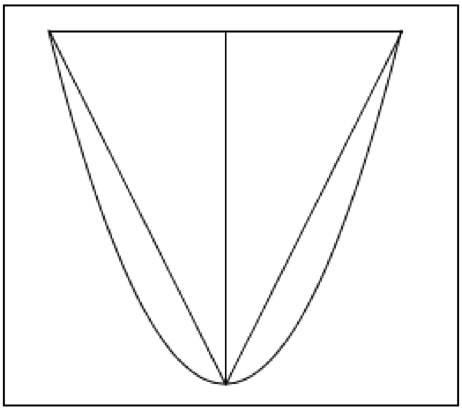


Figura 1.1. Segmento parabólico y triángulo inscrito.

- **Segunda etapa (segunda mitad del siglo XV hasta 1820)**

Esta etapa se inicia en el Renacimiento, recuperándose gran parte de la matemática griega, pero se buscaron nuevos métodos para calcular áreas, volúmenes, centros de gravedad y longitudes de curvas

Fue Kepler (1571-1630) quién inició los trabajos del cálculo de áreas y volúmenes modificando el método de exhausción, al afirmar que "cualquier figura o cuerpo se representa en la forma de una figura de un conjunto de partes infinitamente pequeñas" (Ríbnikov, 1991; p. 170). Kepler identificó las áreas y volúmenes curvilíneos con la suma de un número infinito de elementos infinitesimales: una línea y un área infinitesimal eran lo mismo y un sólido estaba constituido de un número indefinido de fragmentos planos. Sus métodos de cálculo no fueron rigurosos.

Por su parte, Cavalieri (1598-1647), discípulo de Galileo, intentó crear un algoritmo para los infinitesimales. Estableció así los indivisibles, considerando una línea como compuesta de un conjunto de puntos, una figura plana como compuesta de infinitas rectas paralelas y equidistantes, y un volumen como compuesto por un número indefinido de superficies planas paralelas. Este tipo de razonamiento puede producir errores como "homogeneizar dimensiones" y atribuir al volumen las propiedades del área o a un área las propiedades de la línea que delimita la superficie, es decir, transferir las propiedades de las figuras componentes a la figura resultante. Artigue (1995) afirma que la percepción de superficies como apilamiento de segmentos o de volúmenes como apilamiento de superficies, está presente aún en las representaciones mentales y la cultura matemática informal de los estudiantes, y cita a Schneider (1991) que "probó que este hecho puede explicar algunos errores frecuentes y persistentes en el cálculo de áreas y volúmenes, así como algunas dificultades en la comprensión del proceso moderno de integración" (p. 9).

Sin embargo, el gran desarrollo del Análisis Matemático se inició en el siglo XVII y este se debió a la necesidad de dar respuesta a los siguientes problemas (Kline, 2012):

- Obtener velocidades y aceleraciones en función del tiempo y a la inversa, dada la aceleración, obtener la velocidad y la distancia.

- Obtener la tangente a una curva, planteado como un problema de Geometría, pero también para diseñar lentes, y para el estudio del movimiento.

- Obtener el valor máximo o mínimo de una función, para maximizar el disparo de proyectiles y para el estudio del movimiento de los planetas, por ejemplo en relación a la distancia al sol.

- Obtener longitudes de curvas en relación a la Astronomía, la distancia recorrida por un planeta en un período dado, el área de la superficie cerrada por una curva (cuadraturas), volúmenes cerrados por superficies (curvaturas), centros de gravedad, y la atracción gravitatoria.

La creación de la Geometría Analítica por Fermat (1601-1665) y Descartes (1596-1650) tuvo un papel decisivo en el desarrollo de las técnicas de Análisis Matemático del siglo XVII, ya que sustituyeron las complejas construcciones geométricas por operaciones algebraicas (González, 2008). Fermat usó el mismo método para obtener las tangentes y el máximo de una función y se dio cuenta de que el problema del cambio relativo de una función respecto a la variable independiente era el mismo que el de obtener las tangentes. Por su parte, Torricelli (1608-1647) observó que en algunos casos el problema del cambio relativo era "esencialmente el inverso del problema del área" (Kline, 2012; p. 470). También Fermat conocía esta relación para algunos casos, pero ninguno de estos matemáticos la vio como algo general ni valoró su importancia. Se puede considerar a Torricelli y a Fermat, a quien Laplace considera el descubridor del cálculo diferencial (Boyer, 1987), como los predecesores del cálculo moderno (Kline, 1980). Gregory (1638-1675) y Barrow (1630-1677) establecieron la relación inversa entre cálculo de áreas y de tangentes desde el punto de vista geométrico, pero sin un método general aplicable a cualquier función. Barrow estableció el Teorema Fundamental del Cálculo en el que se establece la relación inversa entre lo que hoy llamamos derivadas e integrales (Kindt, 2011).

Los científicos del siglo XVII vieron que los problemas del cambio relativo de una función con respecto a una variable, el de la tangente y el de la obtención de máximos y mínimos, son el mismo problema, con lo que los tres primeros problemas planteados se reducían a uno sólo, y que los problemas a resolver eran:

1. El problema de las tangentes: la determinación de las tangentes a una curva, o sea, el problema fundamental del cálculo diferencial.

2. El problema de las cuadraturas o del cálculo del área: determinar el área cerrada por una curva, o sea, el problema fundamental del cálculo integral.

Y además constataron que estos problemas eran inversos.

Fueron Newton (1642–1727) y Leibnitz (1646–1716), de manera independiente, quienes dieron respuesta a estas cuestiones, creando los conceptos de derivada para resolver el problema de las tangentes y de integral para el de las cuadraturas, reconociendo claramente la íntima conexión entre los dos problemas planteados (Dunham, 2005), es decir, que ambos conceptos eran inversos, coronando así esta etapa (Kline, 2012). Además introdujeron la notación algebraica, con símbolos cómodos y precisos, eliminando la improvisación de la notación, y además nuevas técnicas y algoritmos de cálculo con los que superar las limitaciones de los métodos geométricos, ampliando el campo de aplicación a otras disciplinas como la Física. Con ellos se culminó el proceso de algebrización del cálculo que se desarrolló a lo largo del siglo XVII. El cálculo de Leibniz y Newton es un cálculo de variables, no es un cálculo de funciones (Kleiner, 2001).

Newton generalizó y estableció métodos ya maduros, mostrando las relaciones entre los problemas planteados, realizando progresos en el cálculo razonando analíticamente, aunque seguía pensando que la Geometría era necesaria para una demostración rigurosa. Demostró que si el área bajo una curva viene dada por la fórmula $z = ax^m$ (Figura 1.2), donde m es entero o fraccionario, entonces la ecuación de la curva es $y = max^{m-1}$ y recíprocamente, que dada la curva de ecuación *y*, el área viene dada por la fórmula *z*. De esta manera no sólo dio un método general para obtener el cambio relativo de una variable respecto a otra (*z* con respecto a *x* en este caso), sino que mostró que el área puede obtenerse invirtiendo el proceso de obtener un cambio relativo. También estableció la regla de que si el valor de *y* es la suma de términos, entonces el área es la suma de las área que resultan de cada uno de los términos (Kline, 2012).

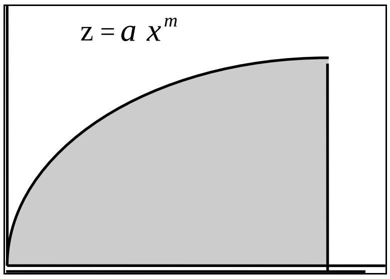


Figura 1.2. Área de la superficie bajo una curva

Newton publicó en 1672 su *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*, en él, siguiendo el pensamiento más dinámico de Galileo frente al más antiguo de los indivisibles estáticos de Cavalieri, dio una visión más nueva del método de los infinitesimales, en la que considera sus variables como generadas por el movimientos continuos de puntos, rectas y planos, y los movimientos cambiando con el tiempo, e indicó que este método podía aplicarse “no sólo al trazado de tangentes a cualquier curva, sea geométrica o mecánica… sino también para resolver cualquier clase de problemas sobre curvaturas, áreas, longitudes o centros de gravedad, etc.” (citado en Rey y Babini, Vol. II, 1997; p. 82 citando el *Methodus*). Resolvió los problemas de áreas y volúmenes pensando enteramente en términos de cambios relativos. Newton supuso que todas las magnitudes geométricas eran engendradas por movimientos de velocidades diferentes, mientras el tiempo fluye constante y uniformemente, creando “método de fluxiones”. Llamó "fluyentes" a las cantidades variables respecto al tiempo, y "fluxiones" a la velocidad de cambio de esas variables respecto al tiempo (Kline, 2012).

Newton utilizó los incrementos infinitamente pequeños en *x* y en *y* para determinar la “fluxión” o derivada. Cuando el autor quería hallar la razón entre dos variaciones de *x* y *xn*, llamó *o* a un incremento de la variable *x* y *(x+o)n–xn* al incremento correspondiente a *xn*. Una vez obtenida la razón de dichos incrementos

Newton dejaba “desvanecerse” a *o* con lo que obtenía la razón buscada. Aquí *o* es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño.

Utilizando el cálculo de fluxiones, Newton resolvió problemas geométricos como el problema de las tangentes, máximos y mínimos (anulando la fluxión), curvatura, puntos de inflexión y otros. Derivó funciones implícitas y también resolvió en varios casos el cálculo del fluyente, dada la fluxión e incluyó una breve tabla de integrales, obtuvo áreas y longitudes de algunas curvas (Kline, 2012) y estableció más claramente el problema fundamental del cálculo: dada un relación entre dos fluyentes, obtener la relación entre sus fluxiones y al revés. En una obra posterior, *Tractatus de Quadratura Curvarum*, escrito en 1676, creó el método de la razón última y primera, cambiando el infinitesimal o cantidad infinitamente pequeña por los incrementos *evanescentes,* considerando las fluxiones la “última razón” o cociente de los incrementos evanescentes:

> *Las fluxiones son, hasta la aproximación que queramos, como los incrementos de las fluyentes generados en tiempos iguales y tan pequeños como sea posible y, para hablar con precisión, están en la razón primera de los incrementos emergentes; aunque pueden expresarse mediante líneas cualesquiera que sean proporcionales a ellos.* (Kline, 2012; p. 480)

Leibnitz (1646-1716), un poco más tarde que Newton e independientemente de él, elaboró su cálculo diferencial e integral que tuvo mucha más influencia y creó la notación que hoy todavía utilizamos como el símbolo $\int$ para la integral, y *dx* para indicar la variable de integración. Publicó sus artículos de cálculo a partir de 1684, aunque algunas de sus ideas aparecieron en notas hechas desde 1673 en adelante. En 1714 escribió *Historia et Origo Calculi Differentialis*, donde mostró una panorámica del desarrollo de sus ideas y dio nombre a este campo de las Matemáticas. A diferencia de Newton, pensaba en términos de sumación, aunque ésta se calculara mediante antidiferenciación. Trató directamente con los incrementos infinitamente pequeños en *x* e *y*, es decir en diferenciales, y determinó la relación entre ellos. Barrow y Newton obtuvieron áreas por antiderivación, pero Leibnitz fue el primero en expresar que “la integración como proceso de sumación es el inverso de la diferenciación” (Kline, 2012; p. 485).

Para Leibnitz, una curva era un polígono de infinitos lados, cada uno de longitud infinitesimal. Una curva de estas características llevaba asociada una secuencia infinita de puntos (x_i, y_i). La diferencia entre dos valores sucesivos de x es el diferencial de x y lo representó por dx, e igualmente para la y, dando lugar a su característico triángulo con lados infinitesimales dx, dy, ds (Figura 1.3).

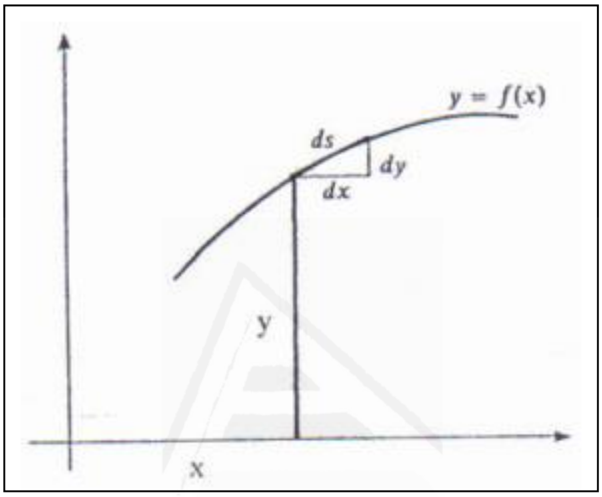


Figura 1.3. Triángulo característico de Leibnitz

El símbolo $\int$ es una S alargada, indicando que es una suma. Dio reglas generales como $dx^n = nx^{n-1}$ y $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, y también para la diferencial de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones, y para las potencias y raíces, pero sin demostración.

Para obtener el área bajo una curva (Figura 1.4) tomó la suma de los infinitos rectángulos de base dx y altura y. Como el área de cada rectángulo es ydx, el área buscada sería la suma de infinitos rectángulos y consideró que se pueden despreciar todos los triángulos (que faltan), ya que “son infinitamente pequeños comparados con los rectángulos (anteriores)… por tanto en mi cálculo represento el área de la figura como $\int ydx$ …” (Citado en Kline 2012; p. 498). Calculó la longitud del arco:

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ y el volumen del sólido de revolución al girar la curva alrededor del eje x: $V = \pi \int y^2\, dx$.

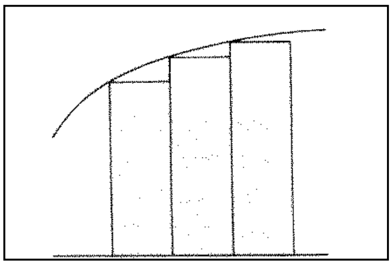


Figura 1.4. Aproximación al área bajo una curva mediante rectángulos

Euler (1707-1783) introdujo las funciones como elemento central del Cálculo, pasando así las derivadas y las integrales a ser conceptos del Cálculo, y no una abstracción de las nociones de tangentes, velocidades instantáneas o áreas bajo curvas.

- **Tercera etapa (1821 hasta finales del siglo XIX)**

En esta etapa se fundamentó el Cálculo Diferencial e Integral. Esta fundamentación se inició cuando Cauchy (1789–1857) publicó en 1821 su *Cours d'Analyse de l'École Polytecnique*, continuó con Bolzano (1781–1848) y culminó con la definición formal del concepto de límite de Weierstrass (1815–1897).

Cauchy (1789-1857) tomó como conceptos fundamentales del Cálculo el de función y el de límite, y recuperó el punto de vista geométrico para la integral como área, superando lo que se había considerado en el siglo XVIII, la integral como antiderivación, volviendo al método de exhausción y definiendo la integral en términos de límite de sumas integrales, que ahora llamamos de Riemann. En su obra *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* (1823), Cauchy dió la primera definición precisa de integral y propuso la notación actual, $\int_a^b f(x)dx$, en lugar de la creada por Fourier, $\int_a^b f(x)dx \begin{bmatrix} x = a \\ x = b \end{bmatrix}$. En sus trabajos de fundamentos del Cálculo Integral Cauchy formalizó muchas de las propiedades actualmente conocidas y las expresó con la nueva notación. Al desligar la integral de la antiderivada, necesitaba demostrar la relación con ésta, y lo hizo utilizando el teorema del valor medio (Boyer, 1987). Riemann (1826-1866) estableció un concepto de integral más general que el de Cauchy, incluyendo funciones que admiten infinitas discontinuidades siempre que estén acotadas, y caracterizó y formalizó las funciones Riemann-integrables:

> *Una función es Riemann-integrable si, y solamente si, la medida del conjunto de sus puntos de discontinuidad es nula.*

En el año 1872 Meray (1835-1897), Weierstrass (1815–1897), Heine (1821-1881), Cantor (1845-1918) y Dedekind (1831-1916) publicaron importantes contribuciones a la aritmetización del análisis con investigaciones en torno a las funciones y los números (Boyer, 1987).

En esta etapa Lebesgue (1875-1941) estableció en 1902 la *Teoría de la Medida*, considerada la moderna teoría de la integración, generalizando la idea de medida e integral a espacios n-dimensionales. Introdujo el concepto de función medible y definió la integral para el caso unidimensional. Una función integrable para Lebesgue no necesitaba ser continua excepto en un conjunto de medida nula, y puede extenderse a funciones no acotadas. Con esta integral se generalizaban viejos resultados, e incluso se podía plantear sobre dominios más generales como espacios de funciones. Según Lebesgue:

> *La diferencia entre su integral* [la de Lebesgue] *y la de Riemann estaba en que los integradores anteriores sumaban indivisibles, grandes o pequeños, según iban apareciendo en orden de izquierda a derecha, mientras que él prefería agrupar indivisibles de tamaños parecidos antes de sumarlos. Es decir, que sustituía las sumas de Riemann por las de Lebesgue y a continuación hacía tender a cero los* Δy_i (Boyer, 1987; p. 759).

En la actualidad, con el desarrollo del Análisis no estándar, se está volviendo a considerar las cantidades infinitesimales como alternativa a los ε-δ de la definición métrica de límite de Weierstrass, con la que "*eliminó los infinitesimales utilizados por Cauchy y sus predecesores durante dos centurias (dos milenios si consideramos las contribuciones de los griegos)*" (Kleiner, 2001; p. 165). Las demostraciones con este

Análisis son más cortas y directas que con ε-δ, pero se necesita la lógica matemática moderna (Courant y Robbins, 2002).

Riemann en 1854 generalizó la integral de Cauchy a funciones *f*(x) definidas y acotadas en el intervalo $[a, b]$ (Kline, 2012). Introdujo lo que conocemos como partición de un intervalo, una serie de valores de x:

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

que determinan un conjunto de subintervalos de amplitud:

$$h_1 = x_1 - a;\ h_2 = x_2 - x_1\,; \ldots; h_n = b - x_{n-1}$$

y escoge un valor de cada subintervalo:

$$\alpha_1 \epsilon [a, x_1],\ \alpha_2 \epsilon [x_1, x_2\,], \ldots,\ \alpha_n \epsilon [x_{n-1}, b\,]$$

para finalmente introducir la suma que conocemos como suma de Riemann:

$$S = \ h_1 \cdot f(\alpha_1) + h_2 \cdot f(\alpha_2) + \cdots + h_n \cdot f(\alpha_n)$$

Si la suma S tiene como límite un valor fijo A independiente de h_i y de α_i, entonces diremos que *f(x)* es integrable Riemann y el valor de la integral será el valor fijo A. Para caracterizar las funciones integrables Riemann, introdujo la noción de norma de la partición d: $\Delta(d)$ y afirmó que una función es integrable según Riemann, si y solo si

$$\lim_{d \to 0} \Delta(d) = 0$$

Darboux (1842-1917) demostró que la condición era necesaria y suficiente y también que una función acotada será integrable sobre [a,b] si y solo si se cumplía la condición de integrabilidad dada por Riemann (Kline, 2012).

1.2. LA INTEGRAL EN EL CURRÍCULO DE BACHILLERATO

El sistema educativo español actual se divide en cuatro etapas: Educación Infantil (de 0 a 6 años), Educación Primaria (de 6 a 12 años), Educación Secundaria Obligatoria (de 12 a l6 años) y Bachillerato (de 16 a 18 años). Nuestro estudio se desarrolla en la etapa de Bachillerato. En el Real Decreto 147/2007 que desarrolla en parte la Ley Orgánica 2/2006 de Educación se establece la estructura del Bachillerato y sus enseñanzas mínimas. Esta etapa es postobligatoria, y su currículum en la Comunidad Valenciana se establece el *Decret 102/2008 de 11 de juliol*. El Bachillerato consta de tres modalidades: a) Modalidad de Ciencias y Tecnología, b) Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales y c) Modalidad Artística. La integral aparece por primera vez en el segundo curso de la modalidad a) en Matemáticas II y de la modalidad b) en la rama de Ciencias Sociales, en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, al final del bloque de Análisis.

El Decreto fija los objetivos de las materias, los contenidos y los criterios de evaluación. En la introducción de la modalidad a) de Ciencias y Tecnología, señala que:

> *… el tratamiento didáctico debe equilibrar la importancia otorgada a los conceptos y a los procedimientos…. El aprendizaje de las Matemáticas debe ser entendido como el proceso de asimilación de los elementos conceptuales necesarios para enunciar, resolver e interpretar los problemas que plantea el estudio de los fenómenos propios de la ciencia y de la técnica.* (DOCV Núm. 5806; p. 71476)

En cuanto a los contenidos, para Matemáticas II son:

> *Primitiva de una función. Cálculo de integrales indefinidas inmediatas por cambio de variable o por otros métodos sencillos. Integración de funciones racionales.*
>
> *Integrales definidas. Regla de Barrow. Cálculo de áreas de regiones planas.* (DOCV Núm. 5806; p. 71480)

Y el criterio de evaluación:

> *Aplicar el cálculo de límites, derivadas e integrales al estudio de fenómenos geométricos, naturales y tecnológicos, así como a la resolución de problemas de optimización y medida de áreas de regiones limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables”.* (DOGV Núm. 5806; pág. 71481)

Respecto a las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II**,** los contenidos son:

> *La integral: introducción al concepto de integral definida.* (DOCV Núm. 5806; pág. 71481)

Y el criterio de evaluación no aparece de forma explícita.

1.2.1. La integral en los libros de texto y en la prueba de acceso a la Universidad

En la práctica diaria de la enseñanza, aparte de la legislación, influye de forma importante los libros de texto que se utilizan y, en el caso del 2º curso de Bachillerato donde hemos centrado nuestra investigación, el contenido de las pruebas de acceso a la universidad (PAU). Al ser este curso previo a la Universidad y el hecho de que el acceso a la misma depende de la nota que obtienen los estudiantes en la prueba, la formación que reciben los estudiantes está basada en gran parte en prepararlos para esta prueba, de ahí la necesidad de analizar cómo aparecen las cuestiones relacionadas con la integral en la misma.

Para analizar el significado institucional de la integral en las PAU y en los libros de texto más usados en 2º curso de Bachillerato en Matemáticas II, nos hemos apoyado en los estudios realizados por Contreras y Ordóñez (2006), Contreras, Ordóñez y Wilhemi (2010) y Ordóñez y Contreras (2003, 2010), en el periodo 1999-2008 en las universidades andaluzas, al considerar que los resultados obtenidos por estos autores podrían ser extrapolables a otras comunidades. El objetivo del análisis realizado por estos autores fue establecer si los libros de texto más usados en 2º curso de Bachillerato en Matemáticas II y las pruebas de acceso a la Universidad, tenían algún tipo de restricción institucional respecto al objeto integral definida y cómo influían las posibles restricciones en los significados implementados en el aula y en los significados personales de los alumnos.

Los autores obtuvieron como resultado de sus investigaciones que la integral se utilizaba desde cinco sentidos distintos que llamaron *configuraciones epistémicas* (CE). De estas configuraciones epistémicas 4 fueron producto del análisis realizado a las PAU de 9 cursos académicos (4 CE) (Tabla 1.1.) y 1 del análisis de los libros de texto de cinco editoriales, y descritas según las situaciones en las que se utilizaban, el lenguaje con el que se describían, proposiciones y procedimientos en que se formalizaban y el tipo de argumento que se utilizaba:

- *Geométrica* (CE-geo): En un contexto geométrico y estático, como el cálculo de áreas y volúmenes, intramatemático.
- *Resultado de un proceso de cambio* (CE-RPC): La integral modeliza el cambio total, en contextos no matemáticos.

En estas dos CE los lenguajes usados son el gráfico, el algebraico y el numérico.

- *Inversa de la derivada* (CE-invder): Contexto matemático y lenguajes gráfico y algebraico.
- *Aproximación al límite* (CE- aproxlim): Contexto matemático y lenguajes gráfico y numérico.
- *Algebraica* (CE-alg): Presente en los libros de texto analizados, consiste en las reglas de integración y la regla de Barrow.

Tabla 1.1. Configuraciones epistémicas asociadas a la integral definida (Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010)

	Configuraciones			
Entidades	CE-geo	CE-RPC	CE-invderiv	CE-aproxlim
Situaciones	Situaciones intramatemáticas: cálculo de áreas y volúmenes.	Situaciones extramatemáticas: modelización.	Situaciones intramatemáticas ligadas a la relación que existe entre la función derivada y la propia función.	Situaciones intramatemáticas: cálculo de áreas por procedimientos de paso al límite.
Lenguaje	Gráfico, algebraico y numérico.	Gráfico, algebraico y numérico.	Gráfico y algebraico	Gráfico y numérico
Definiciones	Integral como área de la región entre la gráfica de una función en un intervalo cerrado y el eje de abscisas.	Variación de una magnitud en el tiempo. La integral modeliza el cambio total.	Inversión integral derivada.	Número real acotado para toda pareja de sumas inferior y superior asociadas a una partición del intervalo $[a, b]$.
Proposiciones	Regla de Barrow. Métodos de integración.	Regla de Barrow. Métodos de integración.	Teorema fundamental del cálculo integral.	Límite de las sumas inferiores y el de las superiores coincide y es el área.
Procedimientos	Cálculo de puntos de corte. Representación gráfica de la función. Cálculo de las integrales definidas. Valor absoluto. Asignación de un valor al área o volumen.	Modelizar la situación a través de la integral definida. Cálculo de integrales y aplicación de la regla de Barrow. Interpretación del resultado.	Extraer propiedades de la función y de su primitiva identificándolas como función y derivada.	Dada una función o figura, realizar una partición y calcular una aproximación de su área, realizar mejores aproximaciones e identificar el área con el límite.
Argumentos	Retórica y heurística.	Retórica y heurística.	Retóricas.	Heurísticas

Una vez establecidos los tipos de configuraciones epistémicas, los autores analizaron la incidencia de éstas en las PAU y en los cinco libros de texto. En relación a las PAU encontraron que la integral definida aparece en el 77% de las pruebas analizadas, y que en el 32% de los casos la configuración epistémica necesaria para resolver la cuestión es la algebraica, que no aparece la configuración epistémica aproximación al límite ni resultado de un proceso de cambio. Además en la mayoría de casos, se trata de un uso directo, es decir, la tarea a realizar explícitamente se relaciona con la configuración, pidiendo por ejemplo el cálculo de una integral definida. En las pruebas en las que no aparece la configuración epistémica escolar, la algebraica, aparece la geométrica en el 94% de los casos y la inversa de la derivada en el 6%, lo que supone un sesgo muy importante a favor de la configuración epistémica geométrica. Además en el 84% de los casos se trata de la aplicación directa de ésta (Tabla 1.2).

Tabla 1.2. Configuraciones epistémicas en las PAU (adaptado de Contreras, Ordóñez, y Wilhelmi, 2010)

No hay Integral Definida		28
Integral Definida	CE-alg	29
	CE-geo	59(+4*)
	CE- invderivad	4
*CE-geo aparece en otros cuatro casos, pues está compartida en cuatro ejercicios		120

En relación a los libros de texto, la configuración epistémica *aproximación al límite* (CE- aproxlim) (Tabla 1.3) aparece en la mayoría de ellos como introducción a la integral definida si bien no se pone en práctica en los ejercicios de dichos manuales. Por su parte, la configuración epistémico *resultado de un proceso de cambio* (CE-RPC) aparece únicamente como aplicación sin justificar y de forma casi anecdótica. Sólo en un texto se trabaja esta última configuración epistémica, pero sin justificación alguna.

Tabla 1.3. Distribución de las configuraciones epistémicas en los libros de texto (Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010)

EDITORIAL	CE-GEO	CE-RPC	CE- INVDERIV	CE-APROXLIM
Oxford	Presencia total	Ausencia definición	Ausencia situación	Presencia total
Mc-GrawHill	Presencia total	Ausencia situación y definición	Presencia total	Ausencia procedimiento y argumentación
Edelvives	Presencia total	Ausencia total	Presencia situación y definición	Ausencia procedimiento y argumentación
Santillana	Presencia total	Ausencia definición	Presencia situación, definición y procedimiento	Ausencia situación y procedimiento
Anaya	Presencia total	Presencia total	Ausencia procedimiento	Ausencia proposición

En los ejercicios sobre la integral propuestos en los libros de texto (Tabla 1.4) considerados globalmente, el 76% corresponde a la configuración epistémica *geométrica* (CE-geo), el 10 % a la *inversa de la derivada* (CE-invderiv), el 1% a la *aproximación al límite* (CE-aproxlim), sólo 2 ejercicios en uno de los textos, un 2% al *resultado de un proceso de cambio* (CE-RPC) y un 11% a la configuración epistémica *algebraica* (CE-alg).

Tabla 1.4. Distribución de las configuraciones epistémicas en ejercicios propuestos en los libros de texto (adaptada de Contreras, Ordóñez, y Wilhelmi, 2010)

	Oxford	Mc Graw-Hill	Edelvives	Santillana	Anaya
CE- geo	25	6	51	15	47
CE- invderiv	—	2	7	1	10
CE-aproxlim	—	—	2	—	—
CE-RPC	2	—	—	—	2
CE-alg	2	—	8	4	6

Según los autores, los estudiantes llegan a la universidad conociendo sólo una de las cuatro configuraciones epistémicas, la geométrica, con una visión estática de la integral y habiendo trabajado uno solo de los sistemas de representación semiótica, el algebraico. De este modo, no se cumple que "*aprehender un objeto matemático significa saber coordinar los distintos sistemas de representación semióticos*" (Duval, 2000), y dado que los estudiantes no los conocen tampoco pueden coordinarlos. De ahí que propongan que la geometría plana elemental juegue un papel importante en la introducción y desarrollo de la integral definida, que se realicen cálculos aproximados y numéricos para superar conflictos semióticos y que el análisis no se base únicamente en métodos analíticos (Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010).

El estudio realizado en la comunidad andaluza ha sido completado por Porres (2011). El autor, siguiendo los criterios utilizados por Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010), analizó en su tesis doctoral distintos aspectos sobre la integral de Darboux de once manuales de Matemáticas aplicada a las Ciencias Sociales II, correspondientes al 2º curso de Bachillerato, de la Comunidad de Castilla y León. Como resultado de este análisis estableció una nueva configuración epistémica asociada a la integral de Darboux, *CE-extremos*, que se refiere a la toma de los extremos superior (respectivamente inferior) de las sumas inferiores (respectivamente superiores) de Darboux.

Respecto a las categorías sobre *integral definida* (aproximación a la integral definida, como área por rectángulos –sumas inferiores y superiores–, aproximación a la integral definida por trapecios, Integral de Darboux e Integral de Riemann) Porres (2011) considera que sólo dos textos dan un tratamiento aceptable, porque hacen una introducción histórica, enlazan con el cálculo de áreas de figuras conocidas, utilizan representaciones gráficas, las definiciones y justificaciones son suficientes y correctas, utilizan la tecnología y, por último, los ejercicios son adecuados para el campo de las ciencias sociales. Por otra parte, apunta que sólo uno de ellos expresa correctamente la integral de Riemann y que tres de los textos no aproximan la integral definida mediante áreas de rectángulos.

Porres (2011) considera también que la mayoría de los textos no dan un tratamiento aceptable a la integral definida por diversas razones: no incluyen los números ni las aproximaciones en relación con el cálculo de áreas; no enlazan con el cálculo de áreas de cursos anteriores ni explicitan la necesidad del cálculo integral para calcular áreas de superficies delimitadas por curvas de determinado tipo; confunden la integral de Riemann con la de Darboux; no detallan suficientemente la sucesión de particiones ni los diámetros de las mismas; no definen la integral inferior como el extremo superior de la sumas inferiores ni la integral superior como el extremo inferior de las sumas superiores. Por otra parte, muchos ignoran el Teorema Fundamental del Cálculo, y los que lo tratan lo demuestran sin el necesario rigor, tienen escasas representaciones gráficas, la motivación histórica es pobre cuando existe y las nuevas tecnologías tienen escasa presencia en los textos. Respecto a las representaciones gráficas, Porres (2011) considera que sólo tres textos dan un buen tratamiento a las categorías que este autor identifica sobre éstas (gráficas de las sumas inferiores y superiores, gráficas de los rectángulos intermedios, representación gráfica de la función área, interpretación geométrica del teorema del valor medio de la integral definida y gráficas de especial interés en la resolución de los problemas), y en dos de ellos es muy deficiente. Tres de los textos no desarrollan la integral definida y, por tanto, no realizan los gráficos de las sumas. La representación gráfica de la función área no se encuentra en dos de los manuales y la interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo integral sólo la incluyen 3 editoriales. La quinta categoría, gráficas de especial interés en la resolución de los problemas, sólo se incluye en 4 de los textos, y las sumas intermedias sólo en uno.

Entre los libros de texto analizados por Porres (2011) se encuentra uno que se utiliza en centros de la Comunidad Valenciana, el de la editorial Marfil cuyos autores son del Grupo Eureka (Botella, Cascón, Martín, Millán, Moltó, Pérez y Salinas, 2001). Porres indica que en la unidad didáctica en que se trata la integral definida, "los conceptos teóricos brillan por su ausencia, ejercicios y problemas resueltos y propuestos no existen y se descuida la notación al escribir $\int_a^b f$ en lugar de $\int_a^b f(x)\,dx$" (Anexo A, pp. 27-28). Este libro se utiliza en el centro donde se ha realizado la investigación, por ello nos vamos a detener en exponer las características de este manual.

Este libro se apoya más en la actividad del estudiante que en las exposiciones del profesor o del libro de texto. Los objetivos que se proponen los autores son: introducir a los estudiantes en el tema, que comprendan, con ayuda del profesor, los conceptos y las estrategias necesarias, que consoliden lo aprendido y puedan ser capaces de resolver otro tipo de actividades, semejantes o no a las que han hecho, y que formalicen los conceptos y las estrategias aprendidas.

La secuencia es la siguiente: cálculo de áreas del círculo por el método de exhausción; cálculo aproximado de áreas de superficies que representan situaciones de la vida real; estimación del área bajo curvas introduciendo de manera informal la partición de un intervalo, los rectángulos superiores e inferiores y los trapecios para aproximar el área; resolución de problemas de la vida real; definición de la integral definida como límite de las sumas superiores inferiores para una función positiva; propiedades de la integral y la función integral.

En las tareas seleccionadas en este texto aparecen todas las configuraciones epistémicas descritas por Contreras, Ordóñez, y Wilhelmi, (2010):

- Geométrica: Por ejemplo en la tarea ‘Área bajo la parábola’, en la que se pide calcular el área de la región comprendida entre la gráfica de la curva $y=x^2$ y las rectas $x=0$ y $x=5$, primero aproximando mediante rectángulos de base 1, después de base 0.5 y por último preguntan cuándo se obtendría el valor exacto del área. El enunciado utiliza representaciones geométricas y analítico-algebraicas y para resolverlo es necesario el lenguaje analítico-numérico En este problema también aparece la CE-aproximación al límite.

- Resultado de proceso de cambio: Hay varias tareas en las que se pide el cambio total en situaciones no matemáticas y se pide una estimación de dicho valor y después un cálculo, exacto o aproximado, dependiendo del tipo de gráfico (diagrama de barras, función definida a trozos cuyos trozos son segmentos de recta y curvas). Por ejemplo, el cálculo de la distancia recorrida por una atracción de feria a partir de la gráfica de la función velocidad/tiempo, la cantidad anual de lluvia a partir de la gráfica de precipitaciones mensuales (Figura 1.5), o el agua consumida a partir de la gráfica consumo instantáneo/tiempo (Figura 1.6). En este última se pide la aproximación mediante trapecios y rectángulos. También aparece el problema ‘Rotura del acelerador’ (Turégano, 1994) (Figura 1.7).

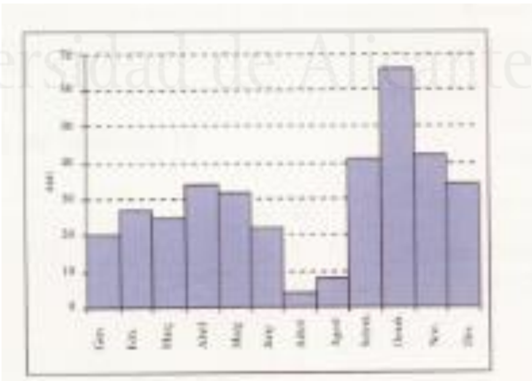


Figura 1.5. Gráfica del problema ‘Precipitaciones’ (Botella et al., 2000; p.59)

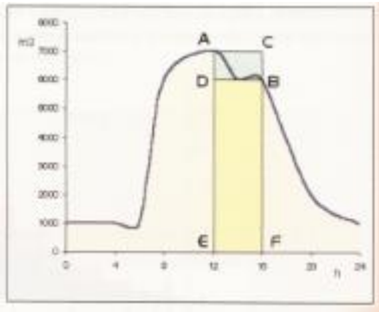


Figura 1.6. Gráfica del problema ‘Agua en la ciudad’ (Botella et al., 2000; p.61)

ROTURA DE ACELERADOR.

Un profesor de Matemáticas va a dar clase a su Instituto en coche (recorre todos los días 30 Km desde su casa al centro). Uno de esos días, mientras iba de camino, notó que el coche empezó a fallarle, sin saber bien por qué (después se enteraría que se había roto el cable del acelerador), hasta que de pronto se quedó sin propulsión a unos 260 m en línea recta de su Instituto. A partir de ese momento (t=0), y en los próximos t segundos, su velocidad v en metros por segundo viene dada por

$$v\ (t) = 20 - 0'05t^2$$

Dibuja la gráfica en papel milimetrado. ¿Qué distancia crees que recorrió hasta detenerse? ¿Llegó al Instituto?

Figura 1.7. Problema ‘Rotura del acelerador’ (Botella et al., 2000; p.62)

- Inversa de la derivada: Varios ejercicios, entre ellos el que pide dibujar, aproximadamente, la gráfica de la función *F* que da el valor del área bajo cada una de las gráficas desde 2 hasta *x*, para valores de *x* entre 2 y 5 (Figura 1.8).

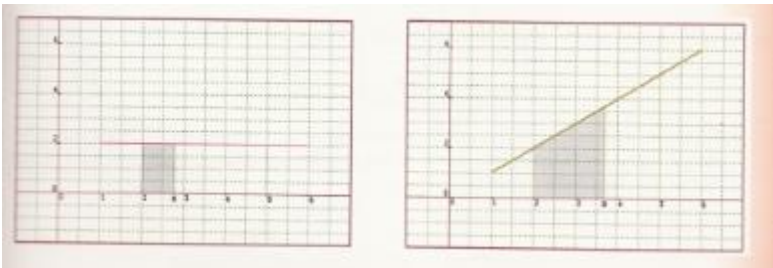


Figura 1.8. Gráficas de ‘Función integral I’ (Botella et al., 2000; p.65)

- Aproximación al límite: También aparece en varios ejercicios, como el que se ha citado antes y otros en que se pide de forma explícita el límite.

Por tanto, consideramos que la propuesta didáctica de este libro de texto es adecuada para dar respuesta a la problemática de la integral definida basada en la actividad de los alumnos, en la comprensión conceptual y en las cinco configuraciones epistémicas caracterizadas por Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) y nos hemos basado en ella para diseñar la secuencia de tareas de nuestro experimento de enseñanza.

1.3. CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE INTEGRAL

Las primeras investigaciones sobre conceptos del Análisis Matemático se centraron en el estudio del límite y de las funciones. Posteriormente los estudios se focalizaron en las integrales y las derivadas (Artigue, 1991). Recientemente se han llevado a cabo múltiples investigaciones sobre el aprendizaje de estos conceptos usando tecnologías (Robert y Speer, 2001).

En cuanto a la noción de integral González-Martín (2015) indica que en el panorama internacional los primeros trabajos fijaron su atención en los errores y dificultades de los estudiantes y mostraron que, aunque los estudiantes sabían realizar cálculos y responder a cuestiones estándar, tenían lagunas en la comprensión de los conceptos y en las formas de razonar. Posteriormente los focos de atención se fueron ampliando progresivamente, reflejando la evolución de líneas de investigación en Didáctica de la Matemática. Este autor distingue dos tipos de trabajos, aquellos que tiene un enfoque esencialmente cognitivo, y los que adoptan enfoques epistemológicos e institucionales. Los primeros se han centrado en los estudiantes y han utilizado enfoques provenientes o adaptados de la psicología, basados en la construcción de modelos de comprensión/aprendizaje, y aportan una visión de los procesos de aprendizaje y de las dificultades. Los segundos van más allá de los estudiantes y han considerado otros aspectos como los de tipo epistemológico, por ejemplo la noción de obstáculo epistemológico, o socioculturales como las interacciones en la dinámica de la clase, o antropológicos, como la forma en que los contenidos relativos a la integración se presentan en la institución escolar.

En cuanto a los trabajos realizados en nuestro país (Camacho-Machín y Moreno, 2015), la mayoría de las investigaciones versan sobre la integral definida y han abordado aspectos de desarrollo cognitivo como la imagen del concepto, usando marcos teóricos como el del Pensamiento Matemático Avanzado (Tall y Vinner, 1981), los registros de representación semiótica (Duval, 1993) y la teoría APOE con la descomposición genética de la integral y los niveles de desarrollo del esquema. También se ha prestado atención al uso de recursos tecnológicos.

En esta sección presentamos algunos de los resultados de las características del aprendizaje del concepto de integral, agrupados en tres apartados: en primer lugar la integral como límite de las sumas de Darboux, en segundo lugar las concepciones del concepto de integral, y finalmente la función integral. En la siguiente sección abordaremos cómo llegan los estudiantes a este conocimiento.

1.3.1. La integral como límite de las sumas de Darboux.

Las investigaciones sobre la integral definida (Orton, 1983; Sealey, 2014), muestran algunas características del aprendizaje de los estudiantes. Orton (1983), en su estudio sobre la comprensión de la integración y diferenciación de los estudiantes de Bachillerato y Universidad (16 a 22 años), puso de manifiesto que una de las dificultades de los estudiantes para comprender la integral definida como límite de una suma era que no habían comprendido adecuadamente el proceso de límite. Aunque los estudiantes mostraron ciertas competencias para calcular límites de sucesiones de números o de expresiones funcionales simples, solo unos pocos fueron capaces de expresar que el área exacta bajo un arco de parábola se podía obtener como el límite de la suma de “tiras rectangulares”. Los estudiantes calculaban el área bajo la curva aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, pero no sabían por qué este teorema resuelve el problema del cálculo del área o porqué el área bajo la curva está representada por la integral definida.

Para mostrar las dificultades que tienen los estudiantes con el concepto de límite, Sierpinska (1985, 1987) utilizó el Teorema Fundamental del Cálculo (considerando la función área *A(x)* desde un punto fijo a otro variable x). Dicho teorema afirma que

A'(x)=f(x)). En la Figura 1.9 se ve que el área desde *x* hasta *x+h* es *A(x+h) – A(x*) y está muy próxima a *f(x)·h* cuando *h* es pequeño, es decir, la tasa de variación media de la función *A(x)* tiende a *f(x)* cuando *h* tiende a cero. Sierpinska constató que es en este momento, al pasar de la aproximación al límite, cuando aparece el obstáculo cognitivo señalado por Schneider (1993), es decir, los estudiantes creen que las bases son cero y que el área desaparece.

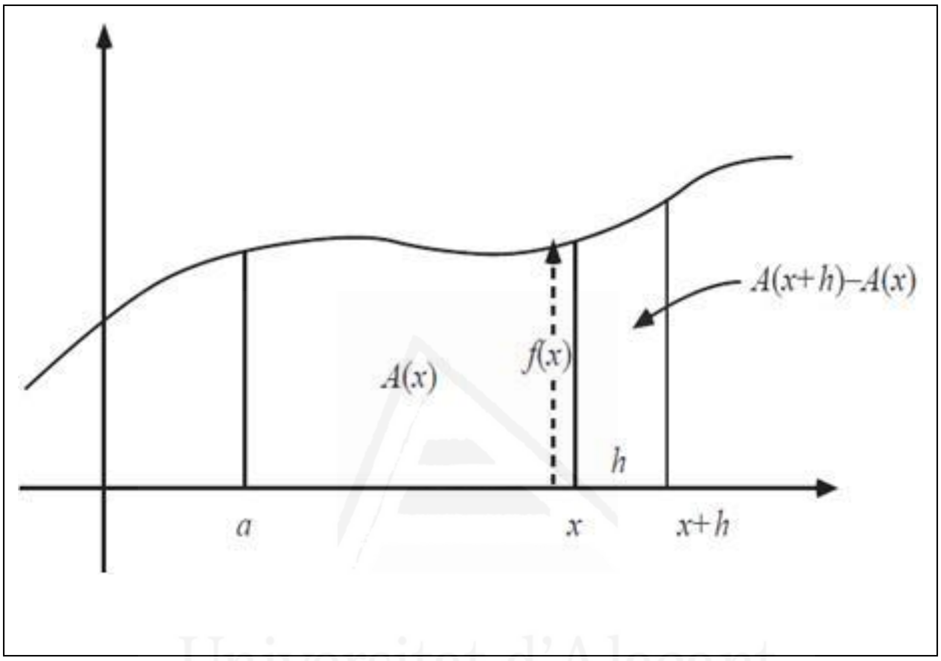


Figura 1.9. Área bajo la curva (tomado de Tall, 1996; p. 318)

Cornu (1991) afirma que todos los aspectos cognitivos del concepto de límite no se pueden aprender partiendo de su definición matemática, y uno de esos aspectos es la noción de aproximación. Esta noción aparece en la concepción dinámica de límite Blázquez y Ortega (2002) definen la concepción dinámica del límite de una función en un punto como "*aproximación óptima*":

> *Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se debiera escribir* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$*, si cuando "x" se acerca al número "a" más que cualquier aproximación, sus imágenes "f(x)" se acercan a "L" más que cualquier otra aproximación fijada.*

Cottrill y otros (1996) indican que la concepción dinámica del límite de una función en el infinito, entendida como los valores en el rango que van aproximándose al valor límite mientras los valores en el dominio tienden a infinito, es relativamente complicada para los estudiantes y señalan que, para adquirir una idea formal de límite, éste se debe visualizar, y para ello el estudiante debe ser capaz de relacionar lo que sucede en el dominio con lo que sucede en el rango. En este sentido, destacan que la dificultad de los estudiantes en construir la definición formal del límite y, en particular, el desarrollo de una concepción métrica del límite, "*cuando 'x →a' en valor absoluto se aproxima a 0, 'f(x) – L' en valor absoluto se aproxima a 0",* es resultado de una comprensión insuficiente de la concepción dinámica del límite.

La comprensión métrica en términos de desigualdades se apoya en que el estudiante sea capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango en distintos sistemas de representación; dicha comprensión empieza con la construcción de la concepción dinámica y el modo de representación numérico o algebraico-numérico apoya esta aproximación (Pons, 2014, Pons, Valls y Llinares 2011; Valls, Pons y Llinares, 2011). Los resultados de la investigación señalan que lo que determina la tematización del esquema de límite (teoría APOS) es el hecho de que estos estudiantes pueden establecer vínculos entre los diferentes elementos matemáticos de este concepto (García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2010; Pons, Valls y Llinares, 2013).

Por su parte Sealey (2014) puso de manifiesto que estudiantes universitarios tuvieron dificultades en interpretar el significado del producto en la expresión de las sumas de Riemann, en situaciones de la vida a real. Esta autora, basándose en la idea de *abstracción reflexiva* de Piaget y en la descomposición matemática de la expresión algebraica de la Integral de Riemann, descompuso esta expresión en 4 capas o niveles, más una preliminar, correspondientes a las componentes matemáticas que intervienen en el cálculo de la integral de Riemann en la forma $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$, donde x_i representa cualquier valor de x en el iésimo subintervalo $\Delta x = (b - a)/n$, a es el extremo izquierdo del intervalo, y b es el extremo derecho del intervalo.

Las cuatro capas son: producto, suma, límite, y función, a las que añade una capa preliminar que denomina de orientación:

- Capa de orientación: Los estudiantes dan sentido a las variables y las cantidades dadas. Puede incluir hacer un gráfico y, a menudo incluye también la organización de los datos. Esto no ocurre necesariamente al principio de la actividad, sino que los estudiantes vuelven a este nivel a lo largo de la actividad.

- Capa del producto: se compone de la multiplicación de dos cantidades, $f(x_i)$ y Δx, donde $f(x_i)$ puede ser conceptualizada como una velocidad y Δx como una diferencia. Por ejemplo, si $f(x_i)$ representa la velocidad de un objeto, y Δx representa el tiempo transcurrido, entonces el producto $f(x_i)\cdot \Delta x$ representaría una aproximación para la distancia recorrida en un intervalo dado.

- La capa de la suma incluye la suma de $i = 1$ hasta $i = n$, que nos da la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$. En el ejemplo anterior, donde $f(x_i)$ representa la velocidad de un objeto, y Δx representa el tiempo transcurrido, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ representa la aproximación a la distancia total recorrida desde *a* hasta *b*, donde *a* y *b* son los extremos del intervalo.

- La tercera capa incluye el límite cuando *n* tiende a infinito en las dos capas anteriores, que nos da la integral de Riemann.

- La cuarta capa permite considerar la integral definida como una función donde la entrada es el límite superior (es decir, el extremo derecho) del intervalo en el que se integra la función, y la salida es el valor numérico de la integral definida.

Su investigación mostró que los estudiantes tienen más dificultades en la capa del producto, ya que es difícil que coordinen los factores del producto ($f(xi)$, Δx) así como la cantidad que resulta de la multiplicación y, en cambio, en contra de lo que se podía esperar, no tuvieron dificultades en interpretar el significado de la suma y del límite, aunque en su estudio no se pidió a los estudiantes que dieran el valor exacto del límite, solamente aproximaciones.

A pesar de las dificultades planteadas, Sealey (2006, 2014) afirma que es imprescindible que los estudiantes comprendan las sumas de Riemann y las integrales definidas por tres razones: (1) en muchas aplicaciones al mundo real aparecen funciones elementales que no tienen primitiva y, por tanto, no se puede aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para calcular la integral y son necesarias sumas de Riemann; (2) otros métodos de aproximación de integrales como las sumas trapezoidales, la regla del punto medio o el método de Simpson están basados en la estructura de las sumas de Riemann; y (3) porque incluso cuando las funciones tienen primitiva, es necesario que comprendan la estructura de la suma de Riemann, ya que construir una integral definida apropiada requiere saber qué integrar, y la comprensión de las sumas de Riemann proporcionará al estudiante las herramientas que necesita.

Por su parte Kouropatov y Dreyfus (2014) han identificado tres modos de aproximación a la medida de objetos geométricos, como primer paso para construir la idea de la función de acumulación, o función integral:

> *Aproximación general: El tamaño de un objeto dado se puede aproximar sustituyendo el objeto dado por objetos conocidos (cuyo tamaño se puede encontrar con la ayuda de constructos previos).*
>
> *Aproximación refinada: La aproximación se puede hacer más precisa disminuyendo el tamaño de los objetos con los que se sustituye y aumentando su número.*
>
> *Aproximación al límite: El tamaño de un objeto dado se puede determinar con tanta precisión como se quiera mediante un refinamiento "continuado" (p. 537).*

1.3.1.1. La integral como cálculo del área bajo una curva

La introducción del concepto de integral definida como cálculo del área bajo una curva presenta algunas dificultades. Schneider (1993) indica que cuando se visualiza el área de la superficie bajo una curva como la suma de las áreas aproximadas de rectángulos, se presentan dificultades cognitivas debido a que algunos estudiantes piensan que si los rectángulos que representan las sumas inferiores tienen alguna base, por pequeña que sea, no llenan la superficie bajo la curva, y cuando se reducen a segmentos, su base es cero y no pueden sumarse. Por su parte Calvo (1997) y González-Martín y Camacho (2004, 2005) advierten del riesgo de que los estudiantes identifiquen el cálculo de una integral definida con el área de la superficie bajo una curva en un intervalo; esta identificación no siempre es correcta, como en los casos en que la función tome valores negativos. Asimismo Turégano (1998) señala que la denominación "área bajo una curva" no es adecuada para la integral cuando la función toma valores negativos.

1.3.2. Concepciones del concepto de integral

Las imágenes que se forman los estudiantes del concepto de integral también les crea dificultades. Bezuidenhout y Olivier (2000) señalan que la identificación de la integral con un área genera una imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981) que no se corresponde con la definición del mismo. Esta imagen puede estar generada por los ejemplos que ilustran la integral mediante el cálculo del área de la superficie bajo una curva en un intervalo. Estos ejemplos suelen reunir las siguientes características (Calvo, 1997): son curvas continuas, están definidas en un intervalo positivo y la superficie se aproxima mediante un número pequeño de rectángulos. Además no se pone de relieve cuáles de estos elementos son esenciales y cuáles superfluos.

Según Turégano (1998) los estudiantes, después de una etapa de aprendizaje, suelen formarse tres imágenes del concepto de integral: *primitiva*, *operativa* y *descriptiva*, las dos primeras son incompletas y la tercera es adecuada. Con la idea primitiva de integral el estudiante sólo asocia la integral con la fórmula del área de un rectángulo *(b-a)·h*, lo que le permite calcular el área de "figuras raras"; con la imagen operativa construye una imagen mental de integral incompleta, como sinónimo de área sin tener en cuenta el signo de la función; con la imagen *descriptiva* el estudiante es capaz de describir de forma precisa la integral definida y sus propiedades con todos los subconceptos necesarios y en diferentes registros semióticos, y los procedimientos de cálculo, efectuando el paso al límite tanto geométricamente como de forma numérica.

Llorens y Santonja (1997) señalan algunas de las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la integral definida que son debidas a una concepción puramente algorítmica. Por ejemplo, los estudiantes identifican el concepto de integral con el cálculo de primitivas y aplican de manera indiscriminada la Regla de Barrow incluso cuando ésta no puede aplicarse y sin ninguna relación con procesos de convergencia. Una evidencia de ello es que en las respuestas a un cuestionario sólo un 23 % de 198 estudiantes universitarios dijo que $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = -2$ era falso, el resto afirmó que era correcto o no contestó.

Por su parte, Mundy (1987) indicó que los estudiantes no relacionan el concepto de integral definida con el de área y no tienen una comprensión visual de la integral de funciones positivas como área bajo una curva. Una evidencia de este hecho se pone de manifiesto en el caso anterior, en el que además de tratarse de una función discontinua en x=0, es positiva, por lo que el área, en caso de ser un número finito, tendría que ser positiva. Otra manifestación de ello es que, aunque los estudiantes fueron capaces de calcular el área de polígonos como triángulos, cuadrados o trapecios, cuando se les pide $\int_{-3}^{3} |x+2|\, dx$, cuya gráfica determina dos trapecios rectángulos con el eje OX, en su estudio un 95% respondió de forma incorrecta. Es decir, los estudiantes prefirieron el contexto algebraico-formal frente al visual-geométrico.

Otra dificultad que señalan Llorens y Santonja (1997) es que la integral definida se define de un modo excesivamente formalista, usando términos y símbolos que los estudiantes tienen mucho problema en entender: sumatorios, particiones, etc., quedando enmascarado el problema de la convergencia. Así por ejemplo la regla de Barrow o el Teorema Fundamental del Cálculo, se presentan como una interpretación geométrica de la integral sin haber revisado previamente la noción de área. De esta manera los estudiantes tienen una *imagen* del concepto (Vinner, 1991) muy desconectada del concepto de integral definida, equivalente al cálculo de primitivas y a la aplicación de la regla de Barrow, frente a la integral como respuesta al problema del área.

Para salvar la dificultad que genera en los estudiantes introducir la integral como un límite, algunas propuestas curriculares sugieren emplear secuencias de tipo procedimental como la siguiente: (1) Cálculo de primitivas; (2) Métodos de integración; (3) Integral definida y regla de Barrow; (4) Aplicaciones de la integración: cálculo de áreas y de volúmenes. Estas propuestas van en detrimento de la comprensión del concepto y a su vez generan dificultades como se ha puesto de manifiesto en distintas investigaciones (Calvo, 1997; Ferrini-Mundy y Guardad, 1992; Llorens y Santonja, 1997; Mundy, 1987; Muñoz, 2007; Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996).

1.3.3. Función integral

La construcción de la función integral es un paso importante para entender las relaciones entre las integrales definidas e indefinidas (primitivas), es necesaria para el Teorema Fundamental del Cálculo y para la comprensión de muchas ideas relacionadas que son necesarias para otras ideas avanzadas del cálculo (Kouropatov y Dreyfus, 2014; Thompson y Silverman, 2008).

El paso de la integral definida a la función integral supone un salto cualitativo importante. Según Thompson y Silverman (2008):

> *…una integral definida es a una función integral como 4 es a x^2. No se puede enseñar la idea de función si los estudiantes han calculado los valores sólo de una. De forma similar, no pensaríamos que podríamos enseñar la idea de función integral habiendo calculado solo integrales definidas específicas.* (p. 46).

En este sentido, Kouropatov y Dreyfus (2014), propusieron a estudiantes de Bachillerato una introducción al concepto de integral basada en la idea de acumulación. Para ello establecen una secuencia que comprende cuatro etapas que van desde la aproximación de objetos geométricos hasta el teorema fundamental del cálculo. En esta jerarquía, la función integral, que ellos llaman función de acumulación, ocupa el tercer lugar:

1. *El conocimiento sobre el concepto de aproximación en el contexto de objetos geométricos dados; estos son concretos, e independientes de los conocimientos previos acerca de las funciones. Por lo tanto se espera que los estudiantes traten con ellos de una manera intuitiva*.

2. *El conocimiento del concepto de valor de acumulación en el contexto de objetos estáticos analíticos dados o situaciones, más abstractos y formales que los anteriores.*

3. *El conocimiento sobre el concepto de función de acumulación, que sería una versión dinámica de los objetos de la etapa 2, y en la que se espera que los estudiantes se enfrenten a ellos basándose en el conocimiento de la etapa 2.*

4. *El conocimiento acerca de la tasa de cambio de la función de acumulación, y por lo tanto una interacción integración-diferenciación. En esta etapa más abstracta, los alumnos tienen que basarse en el conocimiento de la etapa 3, así como sus construcciones anteriores de razón de cambio* (pp. 536-537).

Si en el primer estadio se espera que los estudiantes aproximen de una forma intuitiva en el contexto de objetos geométricos, "*en la etapa 2 se espera que los alumnos construyan conocimiento sobre la integral definida (es decir, el valor de acumulación), en la etapa 3 de la integral definida con límite superior variable (es decir, la función de acumulación), y en la etapa 4 del Teorema Fundamental del Cálculo* [TFC] *(es decir, la razón instantánea de cambio de la función de acumulación)*" (p. 537).

En la tercera etapa, la construcción de la función integral, que da el valor del área cuando *x*, el límite superior, varía, se puede ver como "*un proceso de cambio y cómo la objetivación de este proceso puede ser representado por una gráfica del proceso, o expresado por sus propiedades*" (p. 543). Por ello, los estudiantes tienen que conocer, aunque sea de forma intuitiva:

Que un cambio del punto de extremo superior de la acumulación provoca dos cambios:

- *un cambio en el valor de la función dada,*
- *un cambio en el intervalo en el que la función dada se acumula.*

Ambos cambios provocan un cambio del valor de acumulación.

Cómo el cambio del valor de acumulación depende de las propiedades de la función dada (p. 544).

La estructura jerárquica de esta etapa, que denominan "Elementos para la función de acumulación" es la siguiente:

- *Covariación Compleja: Al considerar la acumulación, el valor de la acumulación depende de la función que se acumula y de dónde acaba la acumulación (extremo superior).*

- *El significado de la función de acumulación: Para una función de acumulación dada f, si cambiamos el extremo superior, cambia el valor de la acumulación''.*

- *Propiedad de la función de acumulación: Las propiedades de la función de acumulación se derivan de las propiedades de la función dada.* (p. 544).

Por tanto, consideran para comprender la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es necesario considerar simultáneamente tres objetos matemáticos:

$$x,\ f(t) \text{ y } F(x), \text{con } x \in [a, b] \text{ y } t \in [a, x]$$

y comprender cómo varía *f* en función de *t* y cómo varía *F* en función de *x*, es decir, la variación del área cuando *x* recorre el intervalo $[a, b]$ (Thompson, 1994; Thompson y Silverman, 2008). Para ello es necesario el razonamiento covariacional, definido por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, (2002) como *''las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades variables mientras se atiende a las formas en que cambian unas en relación a otras ''* (p. 354). En el caso de la función integral, hay que considerar las tres variables implicadas y cómo cambian unas en relación a las otras. Los estudiantes no suelen tener este tipo de razonamiento suficientemente desarrollado, por lo que hay que apoyar a los estudiantes en la construcción de nuevos conocimientos (Kouropatov y Dreyfus, 2014).

Kouropatov y Dreyfus (2014) obtuvieron que la secuencia de actividades diseñada a partir de la estructura de los elementos para el concepto de integración, permitió a la mayoría de los estudiantes preuniversitarios participantes construir el concepto de integral sobre la base de la idea de acumulación. Y que hay evidencias de "*la construcción (a veces en parte) y la consolidación parcial de los conceptos de aproximación, valor de acumulación y la función de acumulación*" (p. 547), conceptos que consideran anidados, la aproximación anidada en el valor de acumulación (integral definida), y este en el de función de acumulación (función integral). Incorporan en una noción "*la integral definida como la acumulación que incluye la aproximación en un intervalo fijo, y la integral indefinida como la acumulación que toma en cuenta la naturaleza "en movimiento" del extremo derecho del intervalo. Sobre esta base, tenemos razones para creer que los estudiantes están listos para el próximo y último* [para el nivel de Bachillerato] *proceso de construcción, el del TFC*" (p. 547).

1.4. CARACTERÍSTICAS DE COMO SE LLEGA A COMPRENDER LA INTEGRAL

En esta sección presentamos los resultados de algunas investigaciones que han caracterizado niveles de desarrollo del esquema de la integral definida. Algunas parten de una descomposición genética (Teoría APOS, Dubinsky, 1991) entendida como la descripción detallada de las construcciones mentales que se espera que un individuo realice al formar su esquema de una noción matemática concreta, y otras caracterizan estos niveles a través de elementos matemáticos y de las relaciones lógicas que se pueden establecer entre ellos.

Boigues (2010a, 2010b) y Boigues, LLinares y Estruch (2010) para determinar el grado de desarrollo del esquema de integral definida en los niveles *intra, inter y trans* (Piaget y García, 1989) de estudiantes de primer curso de ingeniería, consideraron tres esquemas en su propuesta de descomposición genética de la integral definida: el de partición de un intervalo [a,b], el de sumas de Riemann para una función continua *f(x)* en un intervalo real [a,b] y con una partición, y el de la integral definida como el límite de una sucesión de sumas de Riemann. Basándose en el tipo de relaciones entre los elementos matemáticos que incluye la integral definida (esquema de partición, esquema de sumas de Riemann para una función continua y el esquema de integral definida como el límite de una sucesión de sumas de Riemann) caracterizaron los niveles de desarrollo del esquema de integral definida de la siguiente forma:

> Nivel INTRA: el estudiante es capaz de "*usar la idea de sucesión o de límite de una sucesión para intentar resolver los problemas propuestos de la integral definida, siendo capaz de identificar la suma de Riemann a nivel gráfico y analítico pero teniendo ciertas dificultades para construir la sucesión de sumas de Riemann y aplicar la idea de límite a la sucesión de sumas de Riemann y así asignarles el valor del área bajo la curva*" (Boigues et al., 2010; p. 274).
>
> Nivel INTER: el estudiante empieza a "*establecer algún tipo de relación entre la sucesión de sumas de Riemann y el área bajo la curva de la función, habiendo manifestaciones de la construcción de la idea de integral definida como área bajo la curva de la función a partir de la idea de límite de una sucesión de sumas de Riemann*" (Boigues et al., 2010; p. 274).
>
> Nivel TRANS: los estudiantes "*fueron capaces de construir todos los elementos del esquema de suma de Riemann*" y establecer dos relaciones:
>
> – *relacionar analítica y gráficamente la idea de partición de un intervalo cualquiera*
>
> – *relacionar analítica y gráficamente la obtención de la suma de las áreas de los rectángulos para un intervalo y una partición cualquiera" (Boigues et al., 2010; p. 275).*

Los estudiantes de este nivel, al resolver las tareas manifiestan la vinculación entre el área bajo la curva y el límite de una sucesión de sumas de Riemann, o su aproximación a través de una sucesión de sumas de Riemann.

Así pues, sus resultados muestran que, aunque los estudiantes podían manejar la idea de sumas de Riemann, tenían dificultades para relacionar el límite de una sucesión de sumas de Riemann y la idea de área bajo una curva. Y aunque los estudiantes fueron capaces de construir un objeto sobre la integral definida, con distintos niveles de desarrollo, tenían dificultades para coordinar la idea de sucesión y de límite de una sucesión en el caso de las sumas de Riemann.

Aldana (2011, 2013) y González y Aldana (2010) caracterizaron los niveles de desarrollo del esquema de integral definida en estudiantes de 3º de la Licenciatura de Matemáticas a partir de las relaciones entre los elementos matemáticos, las relaciones lógicas que se establecen entre estos elementos y los sistemas de representación gráfico, analítico-numérico y analítico-algebraico. Los elementos matemáticos que consideraron fueron:

(a) el área como aproximación y como límite de una suma,

(b) la integral definida,

(c) las propiedades de la integral definida, y

(d) los Teoremas fundamentales y del valor medio.

Los tipos de relaciones lógicas establecidas entre los elementos matemáticos fueron los siguientes:

(a) conjunción lógica ($A \wedge B$),

(b) condicional ($A \rightarrow B$) o contraria de la condicional ($\neg A \rightarrow \neg B$).

Los autores encontraron que la mayoría de estudiantes no tenían encapsulada como objeto la suma de Riemann, porque aunque recordaban su definición y su formulación algebraica, no sabían cómo utilizarlas y no manejaban los diferentes sistemas de representación ni los coordinaban. Casi todos los estudiantes se encontraban cómodos con el registro algebraico, algunos mostraron un cierto manejo del gráfico, pero muy pocos se desenvolvían en el registro analítico. En consecuencia, la mayoría de los estudiantes (10 de 11) se encontraban en el nivel Intra e Inter y sólo 1 en el nivel Intra. Entre las causas que señalan los autores estaba la falta de recursos para formular y calcular límites de sucesiones por sí mismos, la gran dificultad que tenían con las particiones, pues confundían los límites de la longitud de la partición con el número de subintervalos, debido a la falta de coordinación entre los registros gráfico y algebraico.

1.5. PROPUESTAS DIDÁCTICAS

Para ayudar a los estudiantes a construir el concepto de integral definida, diversos autores aportan propuestas en las que se sitúa a este concepto en un lugar central, dejando de ser una mera aplicación del cálculo de primitivas. Para ello parten de la integral definida como el área bajo una curva para posteriormente ir ampliando y completando su definición.

1.5.1. La integral definida como área de la superficie bajo una curva

Algunos autores (Courant y Robbins, 2002; Guzmán, 1997; Turégano, 1998) consideran que en la secuencia de enseñanza del concepto de integral debe primar su génesis histórica que responde al problema del cálculo del área bajo una curva, al estar más en consonancia con las ideas y el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Este cálculo se puede realizar utilizando la integral de Riemann o de Darboux (aproximación de la superficie mediante rectángulos) o de Lebesgue (determinar un rectángulo cuya área sea igual a la de la superficie).

Cuando se introduce la integral mediante el cálculo del área bajo una curva, se plantea la cuestión de cuándo una región del plano es medible y qué función área se debe definir que permita medirla. En esta línea Guzmán (1997) señala:

> *La noción de integral proviene directamente de la intención de calcular algo tan visual como el área de una cierta figura. Ya Arquímedes realizó unas cuantas proezas en el siglo III a. de C. calculando de hecho integrales muy interesantes* (p. 238).

Este autor propone una secuencia didáctica en la que, siguiendo a Arquímedes, se empieza con el cálculo del área del círculo y el método de 'agotamiento' o exhausción usando como herramienta tecnológica el programa de cálculo simbólico *Derive*. De esta manera aproxima el área bajo una gráfica mediante rectángulos cuya altura es un punto arbitrario del intervalo, haciendo que la longitud de los subintervalos (base de los rectángulos) tienda a cero. Posteriormente propone explorar visualmente, con lápiz y papel, las propiedades de la integral y demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo y la regla de Barrow.

Asimismo Courant y Robbins (2002) proponen calcular el área del círculo bajo un segmento de parábola por "agotamiento", es decir, rellenando la superficie con polígonos siguiendo una secuencia parecida a la que propone Guzmán, sin necesidad de definir la noción de medida:

> *Siguiendo a Arquímedes y a los grandes matemáticos hasta el tiempo de Gauss, podemos tomar la actitud "ingenua" de que las áreas limitadas por líneas curvas son entidades dadas intuitivamente y de que la cuestión no es definirlas sino calcularlas* (p.439).

Por su parte, Azcárate, Casadevall, Casellas y Bosch (1996) plantean introducir el concepto de integral definida y de derivada de forma independiente, lo que evitaría que los alumnos consideraran la integración como operación inversa de la derivación. Incluso sugieren que se introduzca la integral antes que la derivada. Proponen que se introduzca el concepto de integral a partir del cálculo del área bajo una curva mediante sucesivas aproximaciones, para que construyan la integral definida como un número que da la medida de una superficie. Para reducir el formalismo y los cálculos tediosos sugieren el uso de la tecnología. Además aconsejan hacer un estudio inductivo, considerando casos particulares, para llegar a obtener el Teorema Fundamental del Cálculo.

Debido a las imágenes del concepto de integral que se forman los estudiantes Turégano (1998) sugiere introducir la integral a partir de su definición geométrica, primando su génesis histórica a través de la resolución de los problemas que han estado en el origen del concepto. Por otra parte propone iniciar los conceptos del Cálculo infinitesimal a partir de la integral definida, antes de la derivada y del límite, e introducir el concepto de límite a partir de la integral definida. Y esta autora añade:

> *La integral es una continuación de la idea de área que los estudiantes conocen desde los primeros días de la escuela y, como decía Lebesgue: ¿No entenderían los estudiantes más fácilmente que, al pasar de la geometría al análisis, nada ha cambiado sino el lenguaje, que era más geométrico antes pero más analítico después?* (p. 236).

Llorens y Santonja (1997) indican que se explicite las imágenes de los conceptos (Vinner, 1991). Esa explicitación puede significar muchas veces, visualización. Para ello hay que partir del área, pasando de las áreas de los rectángulos a las de los trapecios mixtilíneos, usando la tecnología para visualizar las sumas de Riemann y al mismo tiempo calcularlas, introduciendo así la integral como la suma de las áreas de los infinitos rectángulos. Como el proceso puede ser engorroso, el Teorema fundamental del Cálculo y la Regla de Barrow pueden ayudar a calcular integrales definidas cuando la primitiva se pueda calcular. Hay que prestar atención a "la suma de infinitos rectángulos", pues aquí aparece el problema de la convergencia.

> *Insistamos en que, con este esquema, el cálculo de primitivas es algo secundario, subsidiario de la regla de Barrow y esta, a su vez, lo es del concepto de integral que, en definitiva, se ha presentado como una posible solución al problema del área.* (Llorens y Santonja, 1997; p. 74).

Así pues, algunas propuestas coinciden en volver a recorrer la secuencia histórica de construcción del concepto, partiendo del área de polígonos y usando el método de exhausción con ayuda de la tecnología para poder realizar los cálculos de una forma ágil y visualizando cómo las figuras van rellenando el área para tratar el problema de la convergencia.

1.5.2. Uso de múltiples representaciones

Las investigaciones muestran que cuando se propone a los estudiantes tareas de Análisis Matemático, tienen una fuerte tendencia a pensar analíticamente más que visualmente (Eisenberg y Dreyfus, 1991), lo que dificulta su comprensión de los conceptos, ya que la comprensión en matemáticas tiene que ver con la habilidad para usar el pensamiento visual y el analítico (Zazkis, Dubisnky y Dautermann, 1996). Por otra parte los estudiantes no relacionan las aproximaciones gráficas y analíticas de los conceptos (Ferrini-Mundy y Graham, 1994) y tienen reticencia a utilizar métodos gráficos (Dreyfus y Eisenberg, 1986; Dreyfus 1991). Por ejemplo, cuando se quiere calcular el área de la superficie bajo una curva que representa gráficamente una función, mediante las sumas de Riemann, en algunos casos los estudiantes no son capaces de interpretar la relación entre el signo asociado y el valor de la integral, así como el proceso de aproximación al área mediante las aproximaciones numéricas (área de rectángulos pequeños) (Camacho, Santos y Depool, 2013).

La importancia de usar múltiples representaciones se pone de manifiesto en un estudio de Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006) sobre el desarrollo del esquema de derivada, donde señalan que "*la manera en que un estudiante pasa de un nivel de desarrollo del esquema de derivada al siguiente viene caracterizado por la forma en la que realiza la síntesis de los modos de representación*" (p. 96). Por ello, algunos estudios (Artigue, 1991; Duval, 2006; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Tall, Smith y Piez, 2008) han indicado la necesidad de usar múltiples representaciones (geométricas, numéricas y algebraicas) para favorecer la comprensión del concepto de integral, así como enfatizar las conexiones entre ellas para desarrollar una comprensión más profunda del mismo.

Para favorecer que los estudiantes construyan el concepto de integral, usando y relacionando distintos registros semióticos, y que superen la tendencia a usar principalmente el registro analítico, algunos autores proponen el uso de las tecnologías como instrumentos de mediación semiótica. Esto permite introducir conceptos y relaciones matemáticos, gracias a su potencialidad para presentar simultáneamente varias representaciones de un mismo concepto y para favorecer la interacción y el dinamismo (Blume y Heid, 2008; Heid y Blume, 2008; Lagrange y Artigue, 2009;

Maschietto, 2008; Tall, Smith y Piez, 2008). Además, se libera así a los estudiantes de realizar manipulaciones algebraicas y cálculos tediosos y que presten más atención a la identificación de representaciones equivalentes del mismo concepto. Ferrara, Pratt y Robutti (2006) sugieren usar la tecnología para tratar la integral, primero a nivel numérico y gráfico, como sumas de rectángulos de base cada vez más pequeña, y después a nivel simbólico. Pero advierten que el uso de herramientas computacionales, por sí mismas, no resuelve los problemas de enseñanza del Análisis, pues es necesario un contexto coherente de enseñanza/aprendizaje.

Por otra parte, Swidan y Yerushalmy (2014) señalan que el uso de tecnología representando gráficamente los conceptos del Análisis Matemático y dando dinamismo a las imágenes, puede ser *"parte constitutiva del pensamiento más que una mera ayuda o simplificador para llevar a cabo la tarea matemática"* (p. 530). Esto implica un cambio en el papel del profesor y de los estudiantes: *"El papel de los estudiantes es objetivar el conocimiento histórico-cultural depositado en el artefacto a través de una actividad mediada y reflejada. El papel del profesor es fomentar la evolución del significado a través de la actividad con el artefacto y mediar los significados personales que surgen a través de la actividad, con el fin de hacerlos reconocibles como significados matemáticos"* (p. 530).

Las investigaciones sobre propuestas didácticas que introducen el concepto de integral presentando simultáneamente múltiples representaciones equivalentes de este concepto, usando calculadoras gráficas, programas de cálculo simbólico u hojas de cálculo, han arrojado resultados importantes. Berry y Nyman (2003) investigaron sobre la relación entre el gráfico de la derivada de una función y el de la función. Sus resultados manifestaron que al comienzo de la actividad los estudiantes mostraban una visión algebraica del Análisis y tuvieron dificultad para relacionar las gráficas de una función derivada y la función original, pero el uso de la tecnología permitió desarrollar una mejor comprensión de la aproximación gráfica al Análisis Matemático. Hong y Thomas (1997) mostraron que el manejo simultáneo de representaciones numéricas, gráficas y algebraicas de la integral proporciona un entorno favorable para construir una red de ideas relacionadas sobre la integración.

Camacho y Depool (2003a, 2003b, 2003c) y Camacho, Depool y Santos-Trigo, (2010) programaron actividades con las utilidades que ofrece el asistente matemático *Derive*, lo que permitió que los estudiantes progresaran en el uso de representaciones gráficas y numéricas del concepto de integral definida. Sin embargo, aunque encontraron alumnos que manejaban varias representaciones semióticas, la gran mayoría tendía a moverse en un único sistema de representación. Estos autores señalan que:

> *Para que los estudiantes alcancen una comprensión clara de los conceptos de área e integral definida, es necesario que sean capaces de identificar, examinar, conectar y relacionar las diferentes representaciones del concepto de integral definida. La discusión de las diferentes representaciones puede permitir a los alumnos acceder y utilizar los conocimientos básicos que faciliten la comprensión de los diferentes significados asociados a este concepto* (Camacho, Santos y Depool, 2013; p. 53).

En nuestra investigación hemos utilizado un programa de geometría dinámica, *Geogebra*, para elaborar *applets* en que se usan representaciones gráficas, analítico-algebraicas y analítico-numéricas, para favorecer que los estudiantes trabajen con distintos sistemas de representación y puedan hacer las conexiones necesarias para la construcción del concepto de integral definida. Aranda y Callejo (2010a) mostraron en el contexto del aprendizaje de la dependencia lineal que el trabajo en este entorno puede "*favorecer las generalizaciones necesaria para desarrollar los procesos de abstracción reflexiva*…" (p. 129).

La información recibida en las secciones que componen este capítulo nos han llevado a diseñar y a poner en práctica un experimento de enseñanza que ayude a los estudiantes de 2º de Bachillerato a salvar las dificultades descritas y la coordinación de los registros de representación de los elementos matemáticos que forman la integral definida. En este experimento de enseñanza se plantea una secuencia didáctica que recorre el proceso histórico de construcción del concepto de la integral definida, partiendo del área de polígonos y usando el método de exhausción con ayuda de la tecnología para poder realizar los cálculos de una forma ágil y visualizar las figuras que van rellenando el área para tratar el problema de la convergencia.

El objetivo que nos hemos planteado en esta investigación es:

> Analizar el proceso de construcción del concepto de integral definida desde el marco de la abstracción reflexiva, en estudiantes de Bachillerato (16-18 años) que participaron en un experimento de enseñanza constructivista.

Este concepto se introduce partiendo del problema del cálculo del área bajo una curva, utilizando distintos sistemas de representación, y antes que el cálculo de primitivas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo describimos la aproximación teórica que usamos para formular las cuestiones de investigación y que justifican el diseño del experimento de enseñanza y el análisis de cómo construyen estudiantes de Bachillerato el concepto de integral definida. La perspectiva adoptada es una caracterización de la idea de *abstracción reflexiva* de Piaget, el mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto* (Simon, Tzur, Heinz, y Kinzel, (2004). Por otra parte, atendemos a la consideración de Duval (2006) de que construir el significado de los objetos matemáticos implica la capacidad de transformación de las representaciones y la coordinación interna entre ellas.

El capítulo se divide en tres secciones. En la primera presentamos la *abstracción reflexiva* como mecanismo de construcción cognitiva. En la segunda los experimentos de enseñanza constructivista. Y en la tercera la teoría de Duval sobre los registros semióticos.

2.1. LA ABSTRACCIÓN REFLEXIVA COMO MECANISMO DE CONSTRUCCIÓN COGNITIVA

La *abstracción reflexiva* es uno de los tres tipos de abstracción que Piaget (1970/1986) caracterizó en su epistemología genética para explicar el aprendizaje y la elaboración de nuevas estructuras cognitivas, es decir, para la construcción de conocimiento. Este autor distinguió entre abstracción *empírica*, *pseudo-empírica* y *reflexiva*. Mientras que la *abstracción empírica* abstrae cualidades observables y por tanto reconocibles antes de su abstracción, la *reflexiva* se da sobre acciones u operaciones realizadas por el individuo sobre objetos mentales. El individuo, primero, tiene que construir objetos mentales a partir de sus acciones, para después abstraer de ellos ciertas características de forma que el resultado de esta generalización es una nueva estructura elaborada a partir de elementos de nivel inferior. Por tanto, mediante la *abstracción reflexiva* el individuo construye nuevo conocimiento, una nueva estructura a partir de objetos mentales abstraídos por este.

La *abstracción reflexiva* se apoya en la abstracción *empírica* y *pseudo-empírica*, debido a que la abstracción *reflexiva* surge cuando se abstraen propiedades comunes de varios objetos y se realizan acciones sobre ellos mediante la interiorización y coordinación de las acciones, así como la creación de nuevos objetos (Dubinsky, 1991). No obstante, Piaget (1977/2001) diferencia la *abstracción empírica y la reflexiva* ya que en la *empírica* se generalizan las cualidades físicas de los objetos y la cualidad abstraída es una cualidad observable, y por tanto reconocible antes de la abstracción, mientras que la *abstracción reflexiva* se da sobre acciones u operaciones realizadas por el individuo sobre objetos mentales. Primero, el individuo abstrae determinadas características de las acciones y como consecuencia de esta generalización emerge una nueva estructura elaborada a partir de elementos de nivel inferior. Es decir, ambas reflexiones se diferencian en que mientras la *empírica* es inductiva, la *reflexiva* es constructiva ya que su resultado es una estructura nueva, un nuevo conocimiento que no existía previamente.

Piaget (1977/2001) afirma que la *abstracción reflexiva* es “reflexiva” en dos sentidos complementarios:

> *Primero, se transpone a un plano superior lo que se toma de un plano inferior (por ejemplo, al conceptualizar una acción). Llamamos a dicha transferencia o proyección un 'réfléchissement'. Segundo, se debe por tanto reconstruir en el nuevo nivel B lo que se ha tomado del nivel previo A, o establecer una relación entre los elementos extraídos de A y aquellos todavía situados en B. Esta reorganización que es forzada por la proyección será llamada reflexión (réflexion) en el sentido estricto* (p. 30).

Según Piaget la *abstracción reflexiva* se da en dos etapas: la etapa de proyección y la etapa de reflexión

- Etapa de proyección: Se "crean" nuevos elementos a partir de las estructuras cognitivas de que disponen los estudiantes. Ciertas características de las actividades cognitivas de los estudiantes (esquemas, acciones, operaciones, estructuras cognitivas...) se "aíslan" y se usan para otros objetivos (nuevas adaptaciones). De esta forma lo que se consideran acciones en un determinado nivel pasan a ser objetos en el nivel superior (las acciones en un nivel llegan a ser los objetos de reflexión en el siguiente).

- Etapa de reflexión: Nivel superior en que se produce una reorganización de las relaciones entre las acciones de tal manera que se modifican las estructuras de conocimiento previas.

Por otra parte, Piaget (1970/1986), en su epistemología genética, elabora una teoría del desarrollo del conocimiento humano describiendo un modelo general de desarrollo. Para Piaget el conocimiento de los individuos consiste en estructuras cognitivas que estos aplican a su entorno. Cuando una estructura funciona para aquello que el individuo la ha requerido sin que vea necesario modificarla, se produce una *asimilación* del entorno en la estructura. Pero si no funciona como el individuo esperaba, no se produce la *asimilación*, sino una perturbación, que tiene como resultado la modificación de la estructura para mantener o restablecer el equilibrio con su entorno, una *acomodación* de la estructura al entorno. Esta perturbación o *conflicto cognitivo* es la base para el aprendizaje, para el *cambio conceptual*, el salto desde el conocimiento actual a un nuevo "concepto", un nuevo conocimiento.

Es decir, la nueva información que llega a un individuo es *asimilada* en función de lo que previamente había adquirido. A veces necesita una *acomodación* de lo aprendido transformando los esquemas del pensamiento en función de las nuevas circunstancias. Por tanto, se entiende que el aprendizaje es un proceso en el que el individuo construye conceptos nuevos mediante una reorganización de sus estructuras, y no asimilando nuevos conceptos más poderosos.

Un momento clave en el proceso de construcción de los objetos es cuando el estudiante es consciente de la nueva estructura (Dörfler, 2002), lo que caracteriza el proceso de construcción del estudiante. Así, el estudiante en algún momento deja de considerar algo como un objeto en sí mismo y lo trata y usa como si fuera un todo integrado (Dörfler, 2002). Piaget denomina este salto objetivización o tematización de un esquema. Como señalan Piaget y García (1989):

> *Las nociones matemáticas abstractas han sido en muchos casos primero usadas de manera instrumental, sin dar pie a algún tipo de reflexión en relación con su significado general o incluso algún tipo de consciencia explícita del hecho de que están siendo usadas. Esta consciencia llega únicamente después de un proceso que puede ser más o menos largo, al final del cual la noción particular usada llega a ser un objeto de reflexión, que finalmente se constituye como un concepto fundamental. Este cambio de uso o aplicación implícita a uso consecuente y conceptualizado constituye lo que ha llegado a ser conocido con el término de tematización.* (p. 105).

Dado que las acciones que realizan los individuos sobre los objetos mentales no pueden ser observadas directamente, los investigadores tienen que realizar inferencias a partir de los datos observables que realizan los estudiantes en el proceso de la *abstracción reflexiva*. Es el estudiante quien construye el conocimiento cuando genera los datos observables al interactuar con el mundo de las experiencias (Ellis, 2007a, 2007b).

Para intentar hacer operativa la idea de *abstracción reflexiva* e intentar explicar cómo funciona, Simon y sus colegas, (2004) proponen un mecanismo de construcción al que denominan *Reflexión sobre la relación actividad-efecto* ya que según los autores la abstracción reflexiva no explica suficientemente el proceso de construcción de nuevo conocimiento por parte del estudiante.

2.1.1. El mecanismo reflexión sobre la relación actividad-efecto como elaboración de la abstracción reflexiva

El *mecanismo reflexión sobre la relación actividad-efecto* fue elaborado por Simon y colaboradores (Simon et al., 2004; Simon y Tzur, 2004; Tzur y Simon, 2004) para hacer operativo el constructo de *abstracción reflexiva* para el desarrollo de nuevos conceptos matemáticos, partiendo de los conocimientos disponibles de los estudiantes, y diseñando una *trayectoria hipotética de aprendizaje* (Simon, 1995). Así se analizan y diseñan tareas que permitirán a los estudiantes fijarse *objetivos* e iniciar *actividades* dirigidas a conseguir dichos *objetivos*, que serán la base del aprendizaje, el proceso en el que los estudiantes construirán nuevas estructuras matemáticas (Simon y Tzur, 2004).

Dicho mecanismo trata de describir la construcción de un nuevo concepto, pues intenta hacer operativa la "transposición a un plano superior" y la "reconstrucción" a las que hace referencia Piaget para explicar el proceso de abstracción. Por ello, ofrece "lentes teóricas" con el fin de analizar los conocimientos disponibles de los estudiantes y cómo los utilizan para construir nuevos conceptos (Tzur, Hagevik y Watson, 2004).

> *Siguiendo a Piaget, atribuimos el desarrollo de nuevas concepciones al proceso que incluye la actividad de los estudiantes dirigida por el objetivo y el proceso natural de reflexión* (Simon el al., 2004, p.318).

Para ello Simon y sus colegas (2004) asumen tres principios del constructivismo:

1. Las matemáticas se crean a través de la actividad humana. Los individuos no tienen acceso a matemáticas independientes de su forma de conocer, sino que crean el conocimiento a partir de sus percepciones y experiencias.

2. Lo que los individuos conocen limita y favorece al mismo tiempo lo que pueden asimilar, percibir y comprender. Los conocimientos disponibles de los individuos condicionan el conocimiento que pueden construir a través de sus percepciones y experiencias.
3. Aprender matemáticas es un proceso de transformación de las formas de conocer y actuar del individuo.

En este marco teórico se entiende que el desarrollo de nuevos conceptos es un proceso que incluye la *actividad* de los estudiantes dirigida por su *objetivo* y el proceso natural de reflexión. Los estudiantes se fijan los *objetivos*, que están en función de sus *conocimientos disponibles*, distintos a veces del objetivo del profesor y relacionados con la tarea que éste ha propuesto. Dichos *objetivos* no son necesariamente conscientes, pero aun así, son un elemento regulador, estructuran lo que observan los estudiantes, las comparaciones que hacen y las relaciones que abstraen. Mientras participan en estas *actividades*, los estudiantes prestan atención a los *resultados* de dichas actividades dirigidas por su *objetivo*, distinguiendo entre positivos y negativos según se acerquen o se alejen del *objetivo*. Al valerse de su *secuencia de actividades*, hacen *ajustes dirigidos por su objetivo* sobre la base de los resultados que notan. Estos ajustes son los *efectos* de las actividades. Cada ajuste para llegar al objetivo se guarda como una *unidad de experiencia* y se etiqueta con respecto a si estaba asociado a un resultado positivo o negativo (Figura 2.1).

Las concepciones asimilatorias de los estudiantes permiten y limitan lo que el sistema mental puede reconocer y las *actividades* que pueden activarse para conseguir un *objetivo*.

> *Es necesario conocer los conocimientos de los estudiantes para determinar objetivos de aprendizaje apropiados y anticipar las interpretaciones que pueden hacer de las tareas propuestas, objetivos que se pueden fijar y secuencia de actividades a las que pueden dedicarse para trabajar por su objetivo* (Simon et al., 2004; p. 321).

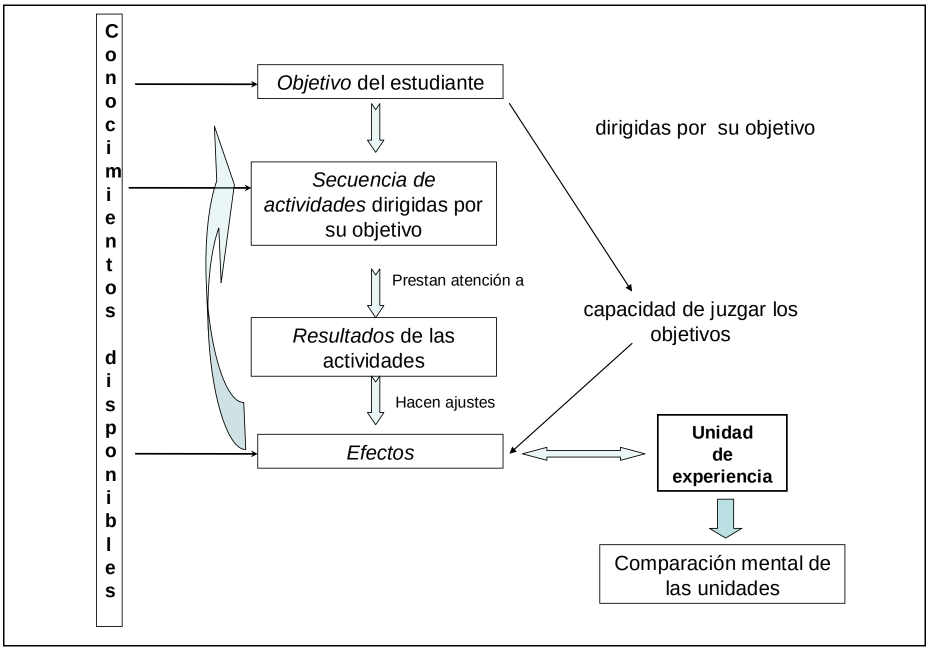


Figura 2.1. Mecanismo reflexión sobre la relación actividad-efecto

Simon y sus colegas (2004) y Tzur (2007) precisan los términos usados en el mecanismo. Entienden por a*ctividad* los procesos mentales generados por las acciones de los estudiantes, sean éstas observables o no, normalmente asociados a una actividad física. La *actividad* incorpora un conjunto de los *conocimientos disponibles* de los estudiantes, está relacionada con sus *objetivos* y está gobernada por sus *concepciones asimilatorias*. Es la base para abstraer las nuevas relaciones actividad-efecto, la materia prima para la construcción de un nuevo concepto.

> *Tanto si las acciones de los estudiantes se pueden observar como si no, se refiere a los procesos mentales que generan tales acciones y normalmente consisten en una secuencia coordinada de acciones mentales. Un observador sólo puede inferir la actividad mental sobre la base de las acciones y/o el lenguaje* (Tzur, 2007; p. 276).

Con el termino *acción* se muestra que es el estudiante quien construye nuevos conocimientos en su interacción con el mundo de las experiencias, de forma activa y adaptándose al entorno (Ellis, 2007a, 2007b). La s*ecuencia de actividades* crea un conjunto de acciones usadas en un intento de alcanzar el *objetivo*. El o*bjetivo* de los estudiantes es el *estado deseado por el que los estudiantes inician una actividad* (Tzur, 2007, p. 276). Puede ser implícito y en ocasiones distinto al objetivo del profesor de que aprendan un nuevo concepto. Simon et al. (2004) y Tzur (1999, 2007) entienden por *efecto* el resultado de la *actividad,* en relación al *objetivo* que los estudiantes querían conseguir cuando la iniciaron, distinguiendo si les acerca o aleja de dicho objetivo.

Tzur (2007) indica que el mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto* consiste en dos tipos de comparación:

- entre el *objetivo* del estudiante y los *efectos* de su *actividad*, lo que le lleva a clasificar registros de la *relación actividad-efecto, y*
- entre situaciones en las que se recurre a tales registros *actividad-efecto*, lo que les conduce a abstraer la *relación actividad-efecto* como una regularidad anticipada, razonada.

Esta regularidad incluye una reorganización de las estructuras del estudiante para integrarlas en una nueva estructura que se convierte así en un nuevo objeto de conocimiento. La abstracción se produce al identificar regularidades en la *relación actividad-efecto*, es decir, en la segunda comparación que lleva a cabo el estudiante, regularidad que es la base para un nuevo concepto o estructura más avanzado que aquellos que tenía cuando inició el proceso. Ser consciente de esta regularidad implica hacer una "reconstrucción" a un nuevo nivel procedente de los anteriores, regularidad que se distancia de la situación y es consecuencia de las observaciones del estudiante a partir del objetivo que se fijó. Este proceso puede darse en una o dos iteraciones de la secuencia de actividades o a lo largo de varias experiencias repetidas, y en este último caso la regularidad se abstrae mediante la reflexión sobre la secuencia de actividades y sus efectos cuando realizan una serie de tareas del mismo tipo (Simon et al. 2004).

Así pues, la construcción de un concepto matemático es un proceso en el que se pueden distinguir distintos momentos o fases, desde que empieza a emerger la regularidad hasta que dicho concepto está consolidado en la mente del estudiante.

2.1.1.1. Fases del proceso de abstracción reflexiva: fase de participación y fase de anticipación

La *anticipación* es una noción clave en el proceso de abstracción desde la perspectiva constructivista (Piaget, 1967/1977). Piaget indica que un *"carácter notable de la acomodación intelectual es el de su capacidad de anticipación"* (p. 169). Así, las estructuras cognitivas que el individuo ha construido le permiten anticipar el resultado de sus acciones. Tzur y Simon (2004) usan esta noción para caracterizar dos fases en el proceso de abstracción: la *fase de participación* y la *fase de anticipación*:

- *Fase de participación*. Los estudiantes forman una *anticipación* provisional por la que la *relación actividad-efecto* está disponible para ellos sólo cuando son estimulados por la tarea que les llevó a formarla. Por tanto esta anticipación está ligada al contexto dado por la situación que la produjo por lo que el estudiante no es capaz de reconocerla por sí mismo en un contexto diferente. Por tanto, la fase *de participación* es el proceso donde el alumno abstrae una regularidad en la relación entre la actividad realizada y el efecto producido.
- *Fase de anticipación*. El estudiante ha añadido una *relación e*ntre la nueva *relación actividad-efecto* formada *y un* rango de situaciones que no fue abstraída en la fase *de participación* y que le permite recurrir al nuevo concepto en contextos diferentes de aquél en que fue construido. Por tanto, esta fase se refiere al uso de la regularidad abstraída en situaciones distintas a aquellas en que se llevó a cabo la *abstracción.*

La *tr*ansición entre ambas fases es vista como una aplicación del mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, al ampliar el rango de aplicación de la regularidad abstraída a un rango más amplio de situaciones. Cuando un estudiante ha abstraído la regularidad en la *relación actividad-efecto* puede anticipar los efectos de su actividad sin necesidad de realizarla.

Según Tzur (2007), la distinción entre fases en la formación de un nuevo concepto es útil para evaluar los conocimientos de los estudiantes en entornos de aula. Este autor utiliza *relación actividad-efecto* y *concepto* indistintamente:

> *Un concepto matemático es considerado como una particular relación-anticipación que los aprendices forman entre una actividad y sus efectos* (Tzur, 2007; p. 277).

Roig (2008), en su tesis sobre el proceso de abstracción matemática con una muestra amplia de estudiantes de secundaria, identificó tres momentos en la fase de participación: *proyección*, *reflexión* y *anticipación local*. En el de *proyección* los alumnos construyen un conjunto de registros o unidades de experiencia, apoyándose en las acciones cognitivas: relacionar, comparar, buscar, building-with y clasificar registros. En el de *reflexión* abstraen la regularidad a partir de la información procedente del conjunto de registros mediante la coordinación, reorganización y construcción. Por último, en la de *anticipación local* aplican la regularidad identificada (la concepción matemática que organiza la situación) a nuevos casos particulares, verbalizando, extendiendo y generalizando (Figura 2.2).

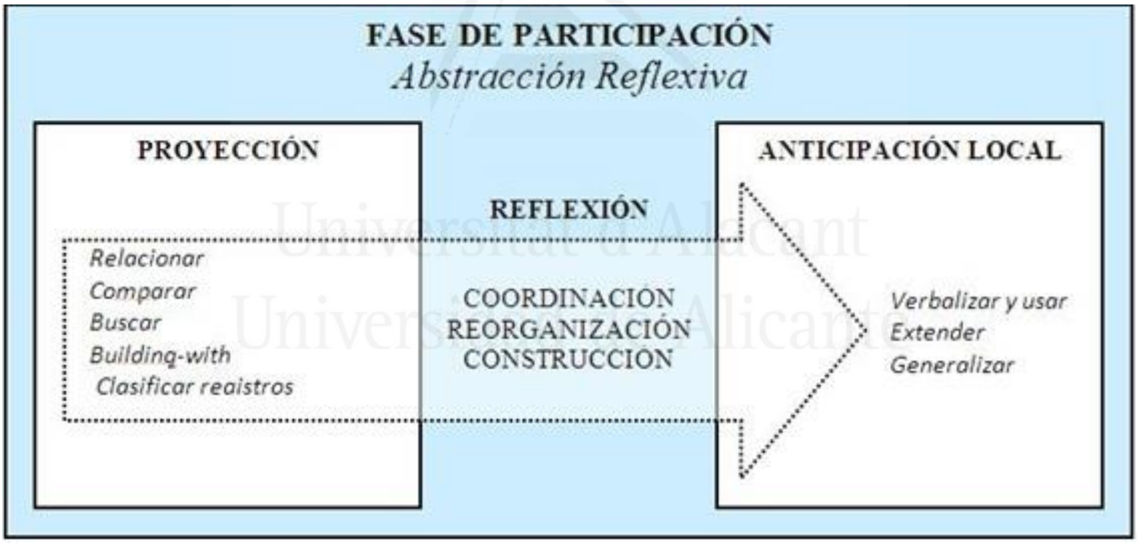


Figura 2.2. Fase de participación: de la proyección a la anticipación local (Roig, 2008; p. 231)

Roig considera, en términos del mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto,* que "*las acciones propias de la fase de proyección están anidadas en la coordinación de información que caracteriza la reflexión*" (2008, p. 228), pues se produce en forma paralela a la generación de casos particulares.

La fase de anticipación se caracteriza por el uso de una estructura que el individuo ha construido previamente. Roig (2008) considera que la consolidación de dicha estructura matemática se lleva a cabo mediante una progresiva familiarización mientras se resuelven distintas situaciones problemáticas en las que dicha estructura está implicada. Así, las acciones de los diferentes momentos de la fase de participación constituyen un ciclo en el proceso de consolidación de la estructura que conduce a la fase de anticipación (Figura 2.3).

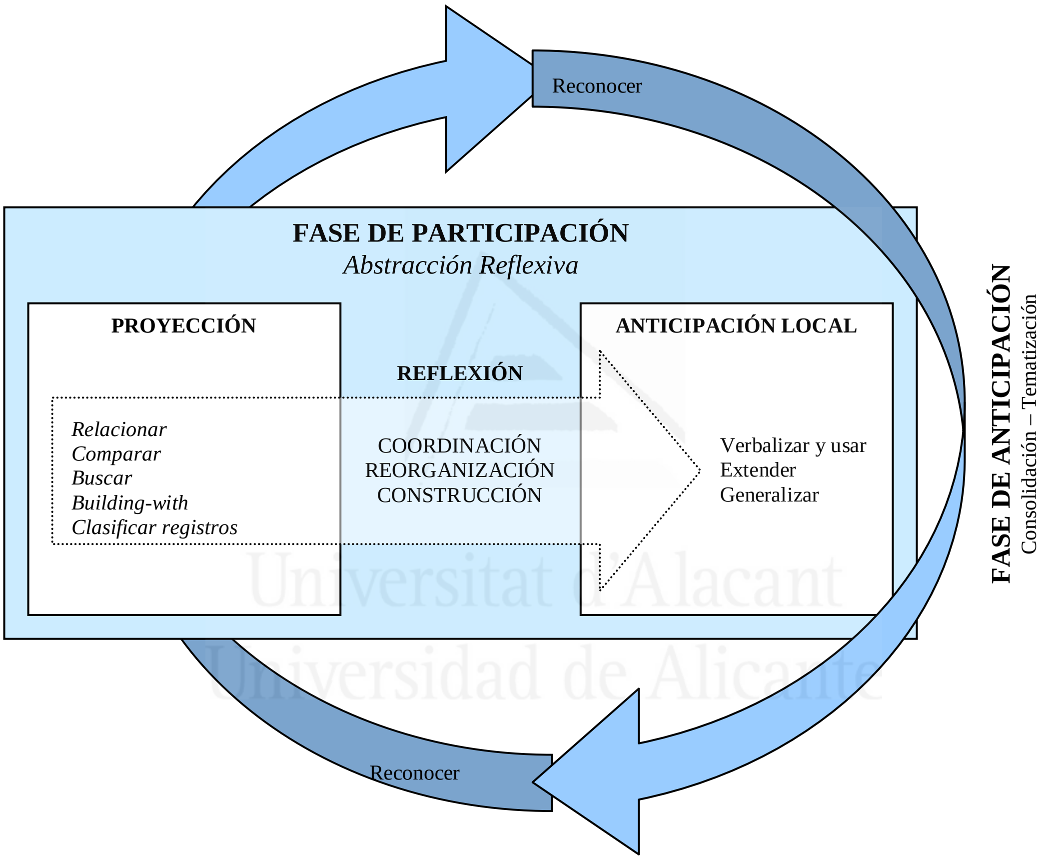


Figura 2.3. De la fase de participación a la fase de anticipación (Roig, 2008; p. 233)

Desde la caracterización del proceso de abstracción que proporciona el mecanismo cognitivo de la *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, Simon y Tzur (2004) han elaborado la idea de *trayectoria hipotética de aprendizaje*.

2.1.1.2. Trayectoria hipotética de aprendizaje

Una trayectoria hipotética de aprendizaje es un modelo teórico para el diseño de instrucción matemática. Consta de tres componentes: un objetivo de aprendizaje, un conjunto de tareas y una hipótesis sobre el proceso de aprendizaje. Este constructo puede aplicarse a unidades de instrucción de distinta duración, por ejemplo al aprendizaje de un concepto en un período extenso de tiempo (Simon, 2014). Una trayectoria hipotética de aprendizaje forma parte de un *ciclo de enseñanza* de las matemáticas que conecta la evaluación del conocimiento del estudiante, el conocimiento del profesor y la *trayectoria hipotética de aprendizaje* (Simon, 1995).

Simon y Tzur (2004) elaboran la idea de t*rayectoria hipotética de aprendizaje* (THA) a partir del marco que proporciona el mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, que explica la relación entre el aprendizaje conceptual y las tareas matemáticas. Para Simon (1995) y Simon y Tzur (2004, p.101) el uso más importante de la THA es enseñar conceptos cuyo aprendizaje es generalmente problemático, en nuestro caso el integral definida, cuyas dificultades de aprendizaje se han puesto de manifiesto en el capítulo 1.

Para generar una THA es necesario, en primer lugar, conocer los conceptos previos de los estudiantes y en segundo lugar, tener presente:

- Los objetivos de aprendizaje, basados en el conocimiento de los conceptos matemáticos disponibles de los estudiantes.
- Las tareas matemáticas usadas para fomentar el aprendizaje.
- Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje en el contexto de un conjunto particular de tareas de aprendizaje.

Los dos últimos puntos son interdependientes, y no se han de producir necesariamente en este orden, puesto que se seleccionan las tareas a partir de las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje están basadas en las tareas a realizar. Y es aquí donde, según estos autores, entra en juego el mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto*: seleccionar aquellas tareas que desde las *actividades* disponibles para los estudiantes sean la base para el aprendizaje pretendido. Para ello:

- Se diseña un borrador del proceso de aprendizaje guiados por el mecanismo *reflexión sobre las relaciones actividad-efecto*
- Se diseñan las tareas que probablemente harán que los estudiantes se fijen un *objetivo*, y mediante sus *actividades* disponibles lleguen a *abstraer reflexivamente* el concepto pretendido. Para Simon y Tzur (2004):

  > *…, la selección de tareas no se deja a la intuición o ensayo y error. Más bien, el mecanismo ofrece un marco para pensar sobre cómo las tareas pueden fomentar el proceso de aprendizaje* (p. 101).

- Se analiza el propósito de cada tarea buscando qué *actividades* pueden poner en marcha los estudiantes, cuál puede ser el *efecto* relevante de su *actividad*, y qué *relación actividad-efecto* abstraerán. Para identificar un *efecto* como parte del proceso de aprendizaje, Simon y Tzur (2004) utilizan dos criterios: que los estudiantes pueden prestar atención al *efecto* y el que el *efecto* contribuya al aprendizaje pretendido.

Tzur (1999) identifica tres tipos de tareas que conducen al estudiante a la construcción de un nuevo concepto: tareas iniciales, de reflexión y de anticipación. Las *tareas iniciales* se usan para promover la creación y reconocimiento de ciertas experiencias, las *tareas reflexivas* se usan para dirigir la atención del estudiante a la relación actividad-efecto, y las *tareas de anticipación* para provocar la abstracción de regularidades. De esta forma, se trata de tareas dirigidas a producir un progreso en las distintas fases del proceso de abstracción. Esta caracterización surgió a partir del desarrollo de experimentos de enseñanza llevados a cabo en la investigación.

Más tarde se ha estado ampliando el ámbito de aplicación de la distinción teórica de las fases a cuestiones de evaluación. Desde esta perspectiva Tzur (2007) sugiere que en un contexto de evaluación también es necesario realizar una distinción de las tareas en términos del tipo de anticipación que se pretende evaluar, ya que las tareas dirigidas no permiten distinguir entre una comprensión propia de la fase de participación y una comprensión propia de la fase de anticipación. Para poder discernir entre ambas, es necesario proponer tareas abiertas en las que se eliminen los *prompts* (sugerencias o indicaciones dadas en la tarea) que puedan orientar al estudiante en la resolución, es decir, las indicaciones que ayuden a dirigir la atención del estudiante.

Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje son útiles para investigar cuando se usan en el contexto de *experimentos de enseñanza* (Steffe y Thompson, 2000). Se han elaborado trayectorias hipotéticas de aprendizaje para diferentes conceptos, como por ejemplo la construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica (Aranda y Callejo, 2010a, 2010b).

2.2. EXPERIMENTOS DE ENSEÑANZA CONSTRUCTIVISTA

La tradición de los "experimentos de enseñanza" en la educación matemática tiene su origen en investigaciones llevadas a cabo en la antigua Unión Soviética (Kilpatrick y Wirszup, 1969-1975). Posteriormente, otros "experimentos de enseñanza constructivista" se han llevado a cabo con el objetivo de investigar el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes (Steffe y Thompson, 2000). Tiene gran importancia en estas investigaciones la dimensión psicológica y social de aprendizaje y las teorías locales que están detrás del diseño e implementación de estos experimentos. Estos experimentos de enseñanza comparten algunos aspectos con los "ciclos de enseñanza de las matemáticas" (Mathematics Teaching Cycle) descritos por Simon (1995) que tienen en cuenta el conocimiento del profesor, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y la evaluación del conocimiento del estudiante (Figura 2.4).

Para Simon, Saldanha, McClintock, Akar, Watanabe y Zembat (2010) un experimento de enseñanza consta de una secuencia de tareas cuidadosamente diseñadas con el objetivo de fomentar una actividad en el sujeto cuyo resultado da un nuevo concepto. El análisis de la actividad del estudiante en el contexto de la secuencia de tareas, informa cómo se desarrollan los procesos de aprendizaje del estudiante. Si se dispone de amplia información y se contrasta, se podría conocer cómo se articulan los mecanismos de aprendizaje. En definitiva, un gran conjunto de dichos informes permitiría un análisis transversal de los informes destinado a la articulación de mecanismos de aprendizaje.

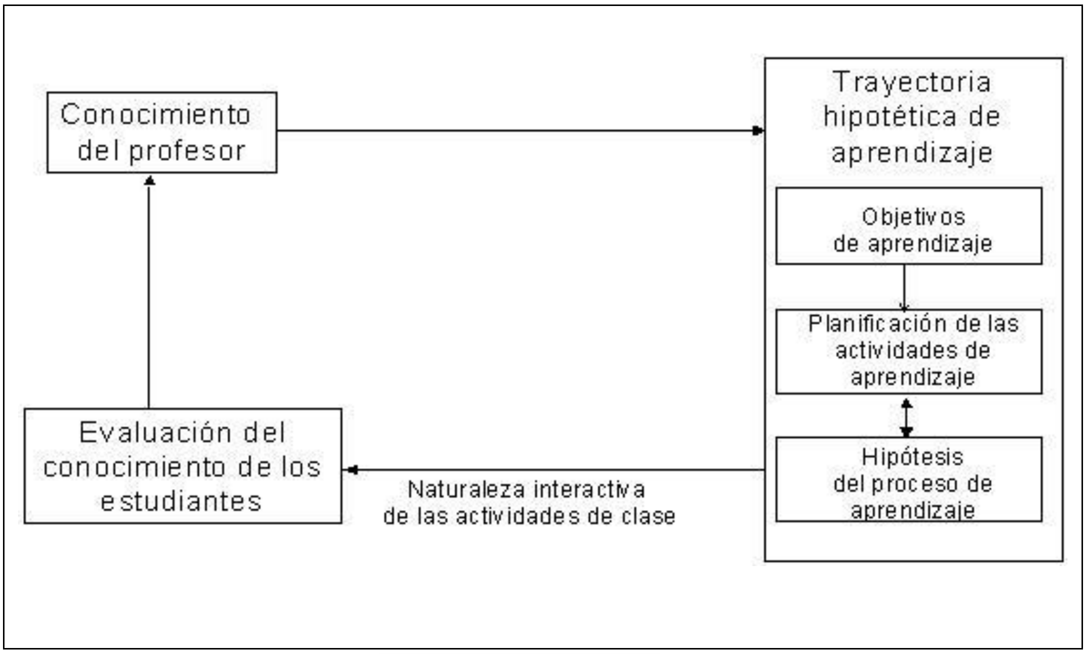


Figura 2.4. Ciclo de enseñanza de las matemáticas (Simon, 1995; p. 136)

Para Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, y Schaublel. (2003), el diseño de experimentos tiene una vertiente pragmática (formas particulares de ingeniería didáctica) y una orientación teórica a partir del estudio del aprendizaje llevado a cabo durante el experimento: el desarrollo de teorías específicas para dicho aprendizaje y los medios para fomentarlo.

El objetivo de aprendizaje, las actividades de aprendizaje y el aprendizaje de los estudiantes conforman las *trayectorias hipotéticas de aprendizaje*, una parte fundamental del ciclo de aprendizaje de las matemáticas (Simon, 1995). Además de los conocimientos del profesor de matemáticas y sus hipótesis sobre la comprensión de los estudiantes, entran en juego diversas áreas del conocimiento del profesor que incluyen las teorías del profesor sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; el conocimiento del aprendizaje con respecto al área concreta de contenido (que procede de la literatura de investigación o de la propia experiencia del profesor con los alumnos); y el conocimiento de las representaciones matemáticas, los materiales y las actividades. El ciclo de aprendizaje de las matemáticas retrata la relación de estas áreas de conocimiento para el diseño de la instrucción (Simon, 1995, p. 133). En este tipo de investigación "*el objetivo no es ofrecer una secuencia instruccional que 'funcione', sino una teoría empíricamente fundamentada sobre cómo piensan los investigadores que un cierto conjunto de* *actividades instruccionales podrían funcionar*" (Gravemeijer, 2004, p. 111), tal como ocurre en otras teorías como la investigación-acción.

Un *experimento de enseñanza* contempla un "ciclo de investigación" en tres fases (Gravemeijer, 2004; Simon, 1995):

Fase 1: Diseño y planificación de la instrucción que comprende:

- La definición de los objetivos de aprendizaje que definen las metas a alcanzar.
- Las tareas propuestas.
- Una trayectoria hipotética de aprendizaje o predicción de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes pueden evolucionar cuando resuelven las tareas propuestas.

Fase 2: Experimentación en el aula o en un entorno virtual de las tareas diseñadas.

En esta fase los estudiantes efectúan las tareas diseñadas en la fase anterior, con la forma de trabajo que se haya diseñado: trabajo individual, por parejas, grupos, con o sin tecnología, etc. y se recogen los datos para su análisis posterior de acuerdo con el modelo de aprendizaje que ha servido para el diseño de la experiencia, la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Fase 3: Análisis retrospectivo.

En esta fase, se observa y analiza la experiencia, desde el punto de vista teórico, que fundamenta la trayectoria hipotética de aprendizaje. Para hacerlo es necesario tener un marco teórico provisional sobre la enseñanza y el aprendizaje, antes de llevar a cabo la experimentación, en el que se hayan explicitado los constructos teóricos que permitirán dotar de significado lo que suceda en el aula. El objetivo en este momento es analizar si la actividad cognitiva y social que han llevado a cabo los estudiantes se corresponde o no con la que se los había previsto en la primera fase. Después de analizar e interpretar la actuación de los estudiantes, los investigadores pueden modificar las tareas propuestas, diseñar otras nuevas y/o a cambiar la trayectoria hipotética de aprendizaje que se había hecho al principio de la experiencia. Por consiguiente, hay aquí dos resultados:

- Una secuencia de actividades y formas de llevarla a cabo corregida
- Un nuevo conocimiento sobre cómo parece funcionar la instrucción (diSessa y Cobb, 2004; Wood y Berry, 2003).

De esta forma se completa el experimento de enseñanza, que aportará nuevo conocimiento que puede mejorar la secuencia de actividades propuesta para que los estudiantes puedan alcanzar los objetivos de aprendizaje, así como la forma en que los estudiantes alcanzan estos objetivos.

El diseño del experimento de enseñanza realizado para el caso de la integral definida y que tiene en cuenta estas premisas será descrito en el capítulo siguiente.

Para construir el significado de los objetos matemáticos es necesario que los estudiantes posean la capacidad de representarlos a través de distintos registros semióticos (gráficos, analítico-numéricos y analítico-algebraicos), cambiar de registros de representación y tener la coordinación interna entre representaciones, de ahí, que en este estudio nos hayamos hecho eco de la teoría de Duval sobre los registros semióticos.

2.3. TEORÍA DE DUVAL SOBRE LOS REGISTROS SEMIÓTICOS

Duval (1993) define “representaciones semióticas”, distinguiéndolas de las “representaciones mentales”. Las mentales se refieren al conjunto de imágenes y más generalmente a las concepciones que tiene un individuo sobre un objeto, una situación y sobre lo que les está asociado. Las semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias restricciones de significado y de funcionamiento. Entre las representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes se encuentran las figuras geométricas, los enunciados en lenguaje natural, las fórmulas algebraicas o gráficas.

El desarrollo de las representaciones mentales depende de una interiorización de las representaciones semióticas, ya que sólo estas permiten realizar algunas funciones cognitivas esenciales, como el tratamiento. Duval (1993) afirma que en la actividad matemática es esencial tanto poder movilizar varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, lengua natural, etc.) en el transcurso de una misma gestión, como poder escoger un registro en lugar de otro, y que para no confundir un objeto matemático con sus representaciones parece incluso una condición necesaria recurrir a varios registros, y también para poder reconocerlo en cada una de las representaciones. Así la coordinación de varios registros de representación semiótica se muestra como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos: es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones.

Para caracterizar la clase de fenómenos que se dan en cualquier proceso de aprendizaje Duval (1993, 1995, 1996, 2000, 2006) ha creado la noción "registro de representación". Duval (2000) señala que "no hay conocimiento sin representación" (p. 58) y que al hablar de "representaciones" es preciso considerar cuatro aspectos:

- *El sistema por el cual se produce la representación*. En el caso de los objetos matemáticos son sistemas de signos, sistemas semióticos, y el contenido de la representación de un objeto cambia de acuerdo con el sistema de representación utilizado para su producción. El pensamiento humano necesita movilizar distintos sistemas de representación de producción y coordinarlos.

- *La relación entre la representación y el objeto representado*. Hay dos clases de sistemas de representación de producción: por una parte aparatos físicos y organizaciones neurónicas (imágenes físicas y mentales) y por otra sistemas semióticos (palabras, símbolos, dibujos). En este caso la relación es sólo de notación.

- *La posibilidad de un acceso al objeto representado, aparte de la representación semiótica*. Hay dos tipos de representaciones: las que son una evocación de lo que ha sido realmente percibido, o podría serlo, y sus representaciones y las que lo son de objetos que no pueden ser percibidos, como los objetos matemáticos.

- *La razón por la que el uso de la representación es necesario*. Principalmente para comunicación o para procesamiento (cálculo o expansión discursiva, anamorfosis, etc.).

Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación ha de permitir tres actividades cognitivas inherentes a toda representación:

- *Formación de una representación identificable como una representación de un registro dado, lo que supone una selección de rasgos de datos en el contenido por representar.*

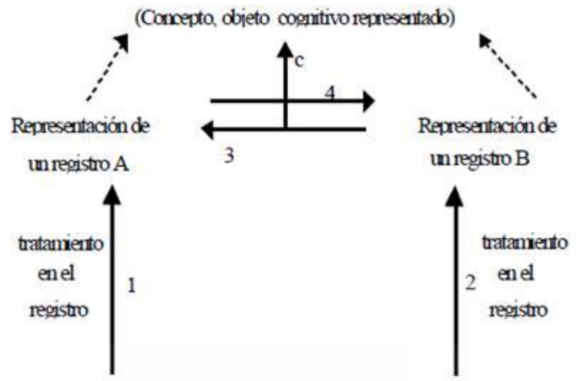
- *El tratamiento de una representación, o transformación de la representación en el mismo registro donde ha sido formada, de acuerdo con la reglas de dicho registro.*

- *La conversión de una representación, o transformación de la representación producida en un registro en otra representación en otro registro, conservando todo o sólo una parte del significado de la representación inicial.*

Estas dos actividades cognitivas, *tratamiento* y *conversión*, son diferentes e independientes.

Como cada representación es parcial respecto a lo que representa, Duval (1993) considera que se debe considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones para la formación del concepto y que la adquisición del concepto por parte del individuo tendrá lugar cuando haya una coordinación sin contradicciones entre las diferentes representaciones del objeto matemático.

Duval (1993) señala que en la fase de aprendizaje la *conversión* juega un papel esencial para la conceptualización, pero que en la enseñanza tradicional sólo se tiene en cuenta las dos primeras actividades cognitivas, *formación* de una representación y *tratamiento*. Así, ya que la conceptualización implica una coordinación de registros, no se puede limitar la enseñanza de matemáticas a la automatización de tratamientos o a la comprensión de nociones, sino que se debe apostar por el trabajo con los diferentes registros de representación puestos en juego en estos tratamientos y conversiones. Ver los conceptos en múltiples registros y desde múltiples perspectivas de estos registros, posibilita que los estudiantes organicen mejor sus conocimiento y se considera una condición necesaria para el aprendizaje (Robert y Speer, 2001). González-Martín (2005) refleja en el siguiente esquema la caracterización de un sistema de representación. (Figura 2.5).



Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las conversiones por cambio de registro. La flecha *C* corresponde a lo que se denomina *comprensión integradora de una representación*: supone una coordinación entre dos registros. Las flechas discontinuas corresponden a la clásica distinción entre representante y representado. Naturalmente, este esquema considera el caso más simple de la coordinación entre dos registros.

Figura 2.5. Tipos de transformaciones internas y externas de un registro (González-Martin, 2005; p. 49)

Los objetos matemáticos no pueden ser identificados con ninguna de sus representaciones, y el contenido de la representación cambia cuando se cambia de sistema semiótico, mientras el objeto permanece invariante. Muchos estudiantes no pueden discriminar entre el contenido de la representación y el objeto representado, considerando que el objeto cambia con la representación, lo que es un motivo para la no comprensión (Duval, 2000). En este sentido hay que plantear a los estudiantes varios tipos de tareas: para la aprehensión de las representaciones semióticas, para el aprendizaje de los tratamientos propios de un registro, para la conversión entre registros y para la producción de representaciones complejas.

Richard (2004) plantea la legitimización del razonamiento matemático en la expresión escrita considerando conjuntamente el lenguaje verbal, las notaciones algebraicas y otros registros de representación semiótica como las generadas por calculadoras gráficas y los programas de geometría dinámica, que permiten la interacción y la representación del movimiento. Se basa en la integración del razonamiento en la actividad cognitiva que se lleva a cabo al realizar tareas coordinando registros de representación complementarios en entornos multi-registro. Así, cuando los estudiantes pasan de un enunciado a un dibujo, de un dibujo a un texto, la coordinación entre los registros es una actividad cognitiva que lleva al mismo objeto. También señala los beneficios estructurales y funcionales de los registros gráficos en la formación de pasos de razonamiento, forzando la coordinación de registros sin necesidad de movilizar la notación asociada a los procesos subyacentes a las cuestiones planteadas.

Para explorar las conexiones y relaciones entre los conceptos relacionados con el estudio de la integral definida, los estudiantes necesitan hacer la transición, en términos de significado, entre las distintas representaciones del concepto (Santos, 2000).

Desde el marco teórico especificado, *el mecanismo reflexión sobre la relación actividad-efecto* (Simon et al., 2004) y l*as trayectorias hipotéticas de aprendizaje* (Simon y Tzur, 2004) y la *Teoría de Duval de los Registros semióticos* estamos en condiciones de formular las preguntas de la investigación que queremos acometer.

2.4. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Teniendo en cuenta el objetivo de la investigación planteado en la identificación de la problemática, este trabajo pretende aportar información, en el marco de las fases del proceso de abstracción reflexiva, de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y de la teoría de Duval sobre los registros semióticos, sobre cómo construyen estudiantes de Bachillerato el concepto de integral definida en el contexto de un experimento de enseñanza constructivista utilizando *applets*. En particular nos hemos planteado, las siguientes cuestiones de investigación:

- ¿Cómo construyen estudiantes de Bachillerato la aproximación del área de la superficie bajo una curva?
- ¿Cómo estudiantes de Bachillerato construyen el significado de las sumas de Darboux?

- ¿Cómo construyen estudiantes de Bachillerato el concepto de función integral?

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se describen los participantes de la investigación, el diseño del experimento de enseñanza, los instrumentos de recogida de datos, su aplicación y el proceso de análisis seguido.

3.1. PARTICIPANTES Y CONTEXTO

Los participantes en esta investigación fueron 15 estudiantes de 2º de Bachillerato (17-18 años). El rendimiento académico de estos estudiantes era muy alto o medio-alto (4), medio (5) y bajo o muy bajo (6). Entendemos por rendimiento académico la calificación final obtenida en la asignatura Matemáticas I de 1er curso de Bachillerato, correspondiente a la modalidad del Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud.

Los estudiantes participaron en el experimento de enseñanza sobre la construcción del concepto de integral definida. Trabajaron por parejas que formó la profesora con el criterio de que los estudiantes tuvieran un nivel de rendimiento académico similar. Se trabajó con parejas en lugar de con estudiantes individuales con el objetivo, entre otros, de que los estudiantes discutiesen sobre las tareas y sus soluciones, de modo que pudiésemos observar mejor el proceso de construcción del conocimiento. Realizaron su trabajo utilizando una guía didáctica que minimizaba el papel de la profesora.

Habían estudiado en primer curso el concepto de límite de una función en un punto con un enfoque procedimental y en 2º curso el concepto de derivada usando *applets* diseñados *ad hoc*.

3.2. DISEÑO DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

El experimento de enseñanza se ha diseñado para favorecer el desarrollo del concepto de integral definida (Aranda y Callejo, 2010c; 2011b), y se ha fundamentado en el mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto* elaborado por Simon y colegas (Simon et al., 2004; Simon y Tzur, 2004; Tzur y Simon, 2004) para hacer operativo el constructo de *abstracción reflexiva* de Piaget el cual, a su vez, favorece el desarrollo del concepto objeto de aprendizaje, partiendo de los conocimientos disponibles de los estudiantes.

En esta sección, en primer lugar presentamos de forma general las tres fases del experimento de enseñanza. A continuación, describimos de forma detallada, en tres partes, la hipótesis del proceso de aprendizaje y la secuencia de tareas.

3.2.1. Fase 1. Diseño y planificación

En el diseño y planificación del experimento de enseñanza se especifican los objetivos de aprendizaje de los estudiantes, la secuencia de tareas que se les proponen y una hipótesis del proceso de aprendizaje.

- *Objetivo de aprendizaje*

El objetivo general de aprendizaje del experimento de enseñanza (Simon, 1995) es construir, por parte de los estudiantes, el concepto de integral definida.

- *Secuencia de tareas*

La secuencia didáctica plantea el estudio de la integral definida a partir del cálculo del área de una superficie bajo una curva (Turégano, 1998) y se articula de la siguiente manera:

- Aproximación del área de superficies bajo una curva (un cuadrante de círculo y de la región determinada por una parábola, el eje X y dos rectas verticales), cuando la función es positiva, y mediante suma de áreas de rectángulos.
- Diferencia entre área bajo una curva en un intervalo e integral definida de la función definida por la curva en dicho intervalo: Definición de la integral definida.
- Propiedades de la integral.
- Introducción de la función integral, del teorema fundamental del Cálculo y la regla de Barrow.

Para abordar la secuencia didáctica se diseñan once tareas (Tabla 3.1) con sus correspondientes guías de trabajo (Anexo I). Las guías de trabajo dan orientaciones y plantean cuestiones. Para facilitar el trabajo de los estudiantes se diseñan distintos tipos de *applets*: unos aproximan el área de superficies mediante rectángulos que recubren la superficie por exceso y por defecto; otros visualizan la acumulación de diferencias de las sumas superiores e inferiores; en ambos casos el usuario determina el número de rectángulos, que corresponde al número de subintervalos de la partición. Finalmente otros *applets* permiten relacionar una función y su función integral en casos sencillos; el usuario puede modificar la pendiente los parámetros de la ecuación de una recta y los extremos de un intervalo.

La investigación se centra en las seis tareas sombreadas en la Tabla 3.1:

- Área del cuadrante
- Parábola: Área bajo un arco de parábola.
- Parábola: Error de la aproximación
- Área e integral
- Función integral I
- Función integral II

Tabla 3.1. Tareas del experimento de enseñanza

Tareas	Tópico matemático	Contexto
Integral definida como área		
Cálculo exacto del área bajo una función	• Cálculo exacto del área bajo una función: funciones rectilíneas.	Lápiz y papel y/o *Applet*
Cálculo aproximado del área bajo una función mediante particiones: • Área del cuadrante • Parábola: Área bajo un arco de parábola. • Parábola: Error de la aproximación		*Applet* Hoja de cálculo
Definición de integral: lím de S_n = lim I_n, • Área como límite • Error tiende a cero • Relación entre *n* y longitud del intervalo	• lím de S_n = lim I_n, • Área como límite: integral • notación	Explicación de la profesora
	• Cálculo exacto del área de x^2 en [0.5], Límite	Lápiz y papel
Diferencia entre área e integral. Propiedades de la integral		
Área e integral	• Área/Integral • Integral cuando $f(x)\leq 0$, y cuando tiene valores positivos y negativos.	*Applet*
Propiedades de la integral	P1. Respecto al intervalo • $\int_a^b f \ = \int_a^c f + \int_c^b f$ P2 y P3. Linealidad: • $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ • $\int_a^b kf = k\int_a^b f$ • P4. Monotonía $f\leq g \rightarrow \int_a^b f dx \leq \int_a^b g\, dx$	*Applet* *Applet* *Applet*
Función integral, Teorema fundamental y regla de Barrow		
Función integral I	• Función integral , rectas	*Applet*
Función integral II	• Función área: rectas, Cálculo geométrico.	Lápiz y papel
Función integral III	• Función área: rectas, parábolas. Cálculo geométrico.	*Applet*
Teorema fundamental	• Teorema Fundamental	*Applet*
	• Demostración	
Regla de Barrow	• Regla de Barrow	Lápiz y papel

Nuestro experimento empieza abordando el problema del cálculo del área de la superficie bajo una gráfica a través de casos particulares: el área bajo una recta, del cuadrante de un círculo y la de la superficie bajo un segmento parabólico, mediante rectángulos inscritos y circunscritos, con ayuda de *applets* en los que los estudiantes pueden variar las bases de los rectángulos. A continuación se pide aproximaciones a las áreas anteriores con un error menor que unos valores dados, introduciendo así la idea de límite de manera intuitiva y gráfica, a partir de representaciones geométricas y numéricas. Después, se busca un método de resolución del problema planteado, el cálculo del área bajo una gráfica, a partir de funciones continuas cualesquiera.

El experimento continúa con la definición formal de integral definida, considerando la integral como un número asociado a una función, el límite de las sumas superiores e inferiores. En estos momentos seguimos considerando funciones continuas y, por tanto, integrables, pero sin las restricciones que habíamos impuesto hasta ahora a las funciones, que sean positivas, y a los intervalos de integración, que el extremo inferior sea menor que el superior, y tratamos la integral como un número que hay que calcular, desligándolo del área, tal y como indican Courant y Robbins (2002):

> *Una vez formalizado, la formulación analítica del proceso de límite hará posible descartar las suposiciones restrictivas* $f(x) \geq 0$, $a < b$ *y finalmente eliminar el concepto intuitivo de área* (p. 441).

Tras definir la integral como un límite y, por tanto, desvincularla del área, estudiamos sus propiedades, abordamos el teorema fundamental del cálculo integral para llegar por fin a la regla de Barrow que se demuestra. En todo el proceso usamos el lenguaje geométrico, analítico-numérico y analítico-algebraico. Así, al definir la integral definida como límite, se realizan tareas con el apoyo de *applets* de Geogebra, usando los lenguajes geométrico y analítico-numérico, para establecer la diferencia entre el área y la integral y comprobar las propiedades de la integral definida. Las tareas de este bloque se apoyan en nueve *applets*, en las que se trata la diferencia entre área e integral, las propiedades de la integral, la función integral y el Teorema Fundamental del Cálculo integral. Por último se demuestra la regla de Barrow analíticamente con lápiz y papel (Guzmán, 1997).

- *Hipótesis del proceso de aprendizaje*

La Figura 3.1 muestra la trayectoria hipotética de aprendizaje del concepto de integral definida. En ella se muestran los dos momentos de la *fase de participación* (*proyección y anticipación local*), la reflexión que conduce de un momento a otro (Roig, 2008), y las acciones cognitivas correspondientes: *experimentar*, *relacionar*, *inferir*, *coordinar* y *extender*.

Nuestra hipótesis es que los estudiantes, después de familiarizarse con los *applets* experimentarán realizando con el mismo, por ejemplo, aumentar o disminuir con el deslizador el valor de *n* (número de subintervalos de la partición). Así podrán observar el efecto de estas variaciones sobre las representaciones geométricas y analítico-numéricas que aparecen en pantalla. La realización de este tipo de acciones con el *applet* origina el contexto para generar distintos registros de la *relación actividad-efecto*. Esto permitirá, por una parte, *relacionar* entre si valores numéricos, valores numéricos con representaciones geométricas, o representaciones geométricas entre si. Se espera que la *reflexión* sobre la relación actividad-efecto dé lugar a hacer distintas *inferencias* que pueden llevar a su vez a establecer *coordinaciones*, por ejemplo de las concepciones dinámica y métrica del límite en el caso particular de las sucesiones de Darboux. Finalmente, tras el proceso de reflexión, los estudiantes pueden llegar a aplicar las regularidades observadas a nuevos casos particulares, sin necesidad de experimentar porque sus reflexiones se apoyan en los significados construidos (anticipación local), lo que permitirá *extender* los significados inicialmente construidos.

A continuación, exponemos con más detalle el diseño y planificación del experimento de enseñanza en tres apartados. Dentro del experimento de enseñanza hemos seleccionada tres aspectos de la construcción del concepto de integral definida que hemos considerado relevantes:

- Construcción del concepto de integral como límite.
    - Tarea: Área del cuadrante
- Significado de la expresión de las sumas de Darboux y del error de aproximación
    - Tarea: Parábola: Área bajo un arco de parábola.
    - Tarea: Parábola: Error de la aproximación
- Construcción de la Función integral
    - Tarea: Área e integral
    - Tarea: Función integral I
    - Tarea: Función integral II

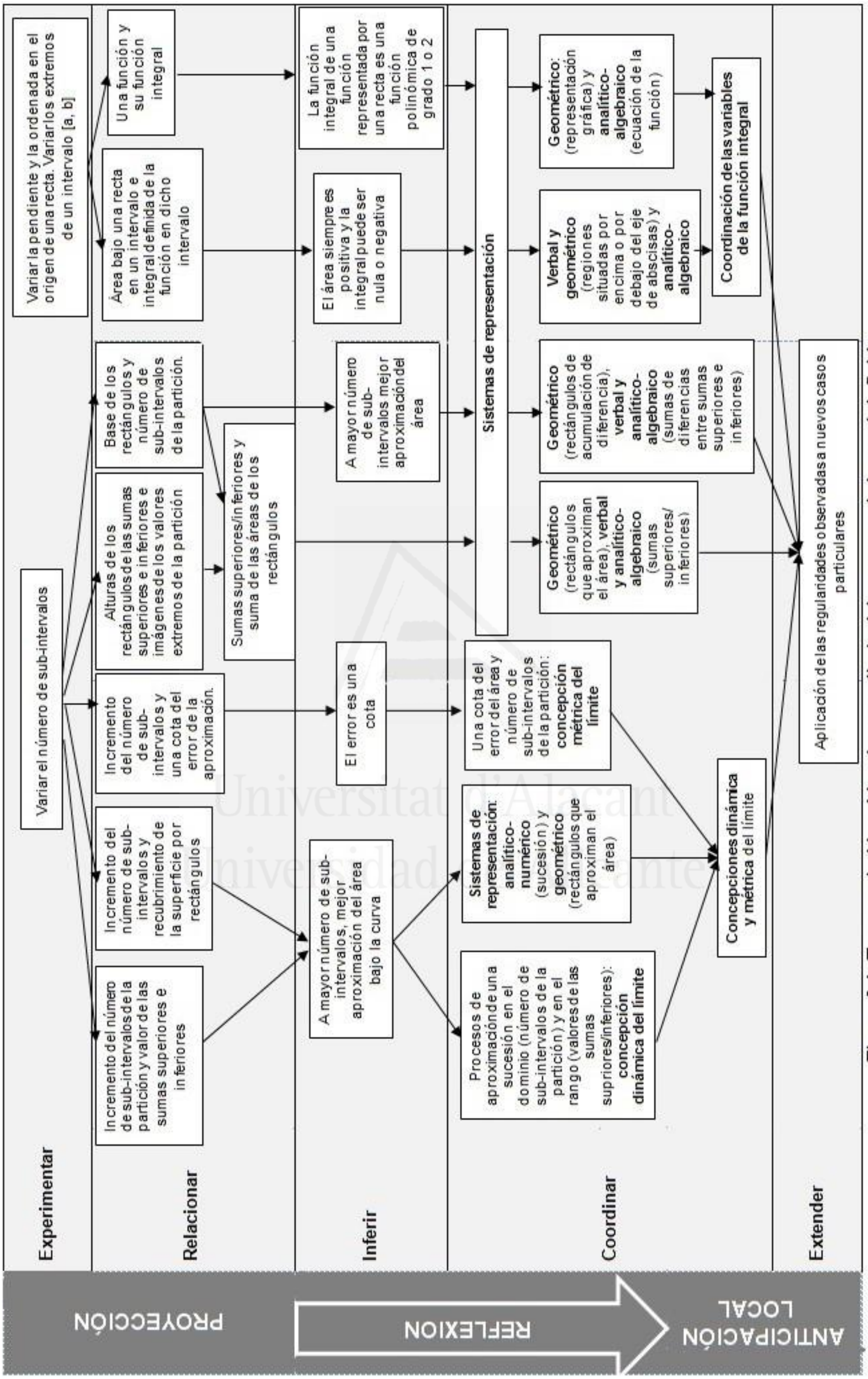


Figura 3.1. Trayectoria hipotética de aprendizaje del concepto de integral definida

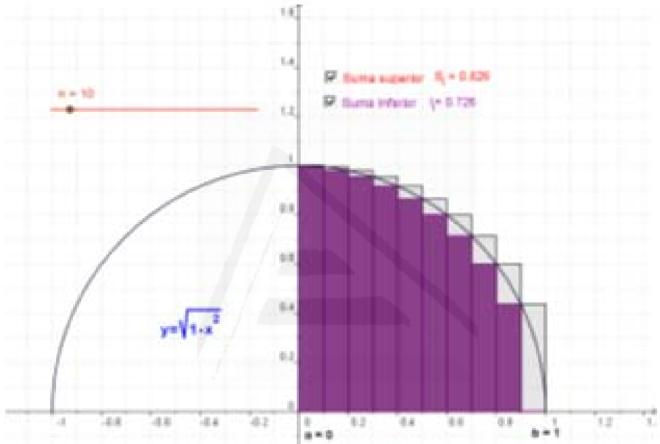
3.2.1.1. Construcción del concepto de integral como límite

Para construir el concepto de integral como límite se propone a los estudiantes una tarea donde se pide aproximar el valor al área bajo la curva y=$\sqrt{1-x^2}$ en el intervalo [0, 1] siguiendo unas indicaciones y contando con el apoyo de un *applet* (Figura 3.2).

Tarea: Área del cuadrante. Cálculo aproximado del área mediante particiones

Cuando queremos calcular el área bajo una función no rectilínea, es decir bajo una curva, tenemos que recurrir a aproximaciones. Recuerda cómo calculamos el valor de π aproximando el área del círculo mediante polígonos inscritos y circunscritos en el círculo, aumentando el número de lados y hallando el límite.

Ahora vamos a calcular de nuevo el valor de π, hallando el área del cuadrante de un círculo, usando la función $y = \sqrt{1-x^2}$, y aproximando mediante rectángulos.



I. Cambia el valor de **n** utilizando el deslizador, y observa:
   a. El número de subintervalos en que se divide el intervalo.
      Para un valor de **n** dado, ¿cuántos subintervalos hay?
   b. La longitud de estos subintervalos.
      Para un valor de **n** dado, ¿cuál es la longitud de los subintervalos?

II. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas inferiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de **n** para aproximar el área hasta el valor anterior?
    Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de **n**?

V. Si se aumenta el valor de n, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?

Figura 3.2. Tarea: 'Área del cuadrante' y guía de trabajo de la tarea

El objetivo de la tarea es que los estudiantes generen un conjunto de registros de la relación entre una acción (modificar el número de sub-intervalos de la partición) y el efecto producido (a mayor número de intervalos de la partición mejor aproximación del área). Los estudiantes disponen de una guía y pueden apoyarse en un *applet* que les permite variar el número de sub-intervalos de la partición, todos de la misma longitud, mediante un deslizador, dando valores enteros desde 0 hasta 100. En la pantalla aparecen los rectángulos que recubren la superficie por exceso y por defecto, y el valor de las sumas superiores e inferiores (Figura 3.2).

Las cuestiones que se plantean son las siguientes (ver Figura 3.2):

- familiarizarse con el *applet* (cuestión I).
- identificar el efecto que produce aumentar el número *n* de subintervalos de la partición y el valor de las sumas superiores e inferiores (cuestiones II y III).
- calcular el valor de *n* para aproximar el área con un error menor que un número dado (cuestión IV)
- relacionar el valor de *n* con las aproximaciones y el error de éstas (cuestión V).

En la tarea propuesta se pone de manifiesto la *hipótesis sobre el proceso de aprendizaje* de la aproximación al área de la superficie bajo una curva que se muestra en la Figura 3.3. Tras la familiarización de los estudiantes con el applet (cuestión I) y *experimentar* aumentando el valor de *n*, es decir, el número de subintervalos de la partición, y observar lo que ocurre con los valores de *las sumas inferiores y superiores* (cuestiones II y III), se espera que esto conduzca a los estudiantes a *relacionar* el incremento del número de sub-intervalos con el valor de las sumas superiores e inferiores, con el recubrimiento del cuadrante de círculo por rectángulos y con una cota del error de aproximación. Esto les puede llevar a *inferir* que al aumentar el valor de *n* se obtiene una mejor aproximación del área del cuadrante de círculo y que el error se mantiene por debajo de un valor dado al aumentar el valor de *n*. Esto les debe llevar a *coordinar* los procesos de aproximación en el dominio y en el rango y a *coordinar* los sistemas de representación analítico-numéricos y geométricos. De la cuestión IV, en la que se pide el valor del área con un error menor que dos valores dados, se espera que establezcan las *coordinaciones* necesarias para construir la concepción métrica del límite. Por último de la cuestión V se espera que los estudiantes lleguen a *coordinar* las concepciones métrica y dinámica del límite.

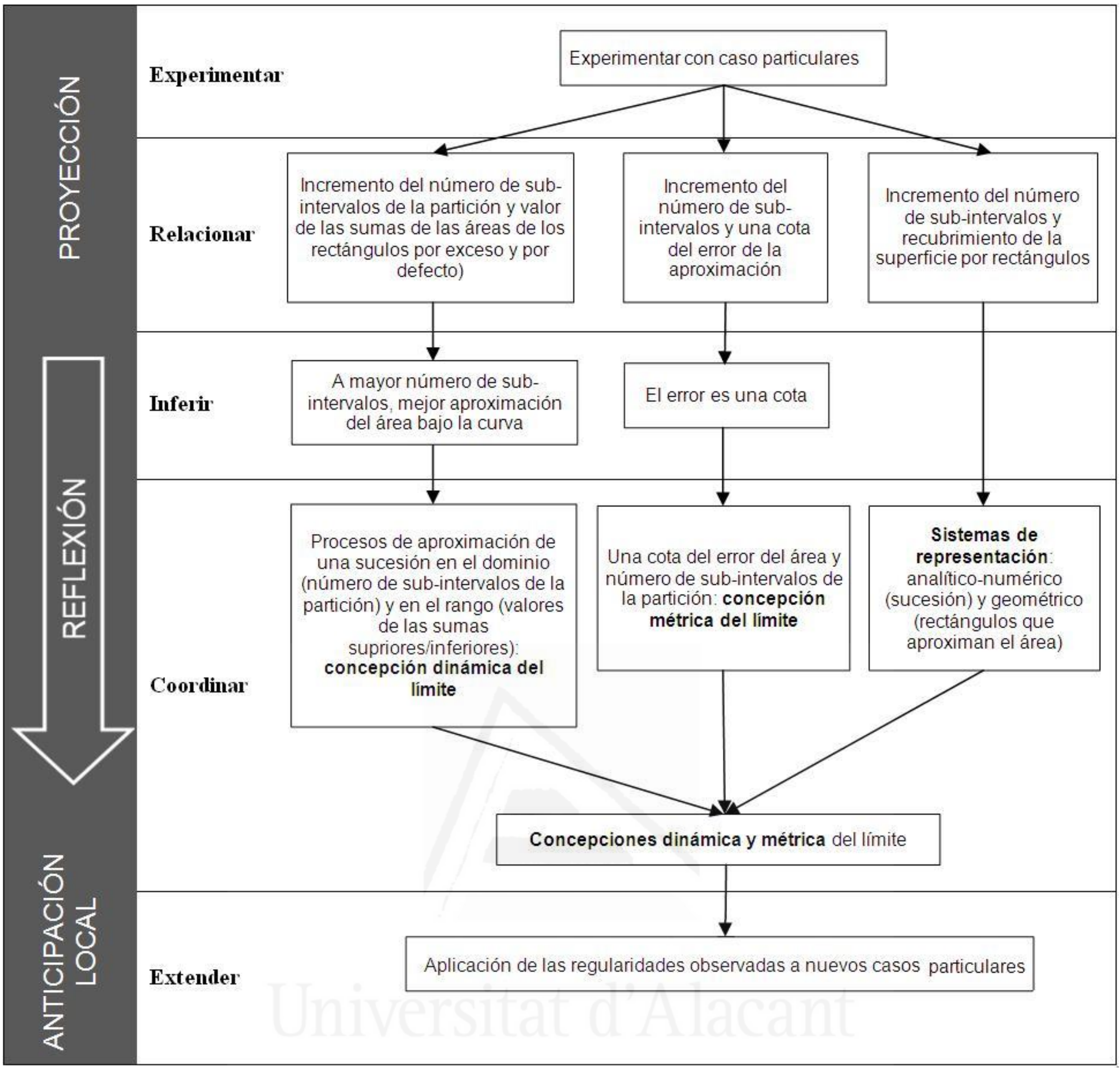


Figura 3.3. Momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva para la construcción de la aproximación al área bajo una curva

3.2.1.2. Significado de la expresión de las sumas de Darboux y del error de aproximación

Para favorecer la coordinación entre sistemas de representación para la expresión de las sumas de Darboux y del error de la aproximación se proponen dos tareas. El objetivo de estas tareas es que los estudiantes generen un conjunto de registros de experiencia de la relación entre una *acción* (modificar el número de sub-intervalos de la partición) y el *efecto* producido (variación de la base y la altura de los rectángulos que recubren la superficie bajo una parábola). Los estudiantes disponían de una guía para cada tarea y podían apoyarse en un *applet* que les permite variar el número de sub-intervalos de la partición, todos de la misma longitud, mediante un deslizador, dando valores enteros desde 0 hasta 100.

La primera Tarea: “Parábola”, tiene como objetivo dar significado a la expresión, en lenguaje analítico, de las sumas de Darboux para aproximar el área bajo un segmento parabólico, f(x) = x^2, en el intervalo [0, 1] (Figura 3.4).

Tarea: Parábola.

I. Mueve el deslizador y observa lo que ocurre con el número de puntos de la **partición**, el número de subintervalos y la longitud del subintervalo.

a. ¿Qué representa **n**?
¿Qué relación hay entre **n** y el número de puntos de la **partición**?
b. ¿Qué relación hay entre **n** y la longitud de los subintervalos?
c. Escribe los valores de los extremos del intervalo de la **partición** para:

n=1: a_0= ; a_1=
n=2: a_0= ; a_1= ; a_2=
n=3:
n=4:
...
n=10:

d. Busca una fórmula general para cualquier valor de **n**:
1. De la longitud del subintervalo : **Δx=**
2. De los valores de los extremos del intervalo de la **partición**:
a_0=
a_1=
a_2=
....
a_n=

II. Observa las **sumas superiores** e **inferiores** de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos:
a. En las **sumas inferiores**:
b. En las **sumas superiores**:
c. Escribe una fórmula para las **sumas superiores**, S_i y otra para las **sumas inferiores**, I_i, relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la **partición**.

Figura 3.4. Guía de trabajo de la tarea ‘Parábola’ y guía de trabajo de la tarea

Hemos utilizado la integral de Darboux porque es más simple de usar que la integral de Riemann, ya que solo consideramos dos sumas para cada partición, sin embargo para la integral de Riemann consideramos una infinidad de sumas para cada partición, pues se puede tomar como altura de cada rectángulo la imagen un punto cualquiera del sub-intervalo de la base.

En el caso de la integral de Darboux, si queremos hallar el área bajo una función acotada en un intervalo, dividimos el intervalo en sub-intervalos y formamos dos rectángulos para cada sub-intervalo, uno que tiene como altura el supremo de la función en cada sub-intervalo y otro que tiene como altura el ínfimo de la función en cada sub-intervalo (si la función es continua se puede pensar en el máximo y el mínimo en vez del supremo y el ínfimo), si logramos hacer coincidir la suma de los rectángulos de altura igual al supremo de la función en cada sub-intervalo, con la suma de los rectángulos de altura igual al ínfimo de la función en cada sub-intervalo (haciendo cada vez sub-divisiones del intervalo), obtenemos la integral. En nuestro caso, como las funciones utilizadas en el experimento son monótonas, las alturas de los rectángulos inferiores y superiores coinciden con las imágenes de los extremos de los intervalos de la partición.

Si una función es acotada, es integrable Riemann si y solo si es integrable Darboux. Y una condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ sea integrable Darboux en $[a, b]$ es que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un δ tal que para toda partición P de $[a ,b]$ cuyo diámetro sea menor que δ, se verifica que *Suma superior(f, P) – Suma inferior(f, P)* < ε.

En el *applet* en el que se apoya esta primera tarea, junto a la gráfica de la parábola $f(x) = x^2$ en el intervalo [0, 1], hay casillas de control para exponer/ocultar objetos (valor de la longitud de cada sub-intervalo, rectángulos correspondientes a las sumas superiores y/o inferiores, valor máximo de la función en cada sub-intervalo, valor de la suma superior e inferior y la diferencia entre ambas), así como un deslizador con el que se puede cambiar el número de puntos de la partición y por tanto el número de sub-intervalos, el número de rectángulos y sus dimensiones (Figura 3.5).

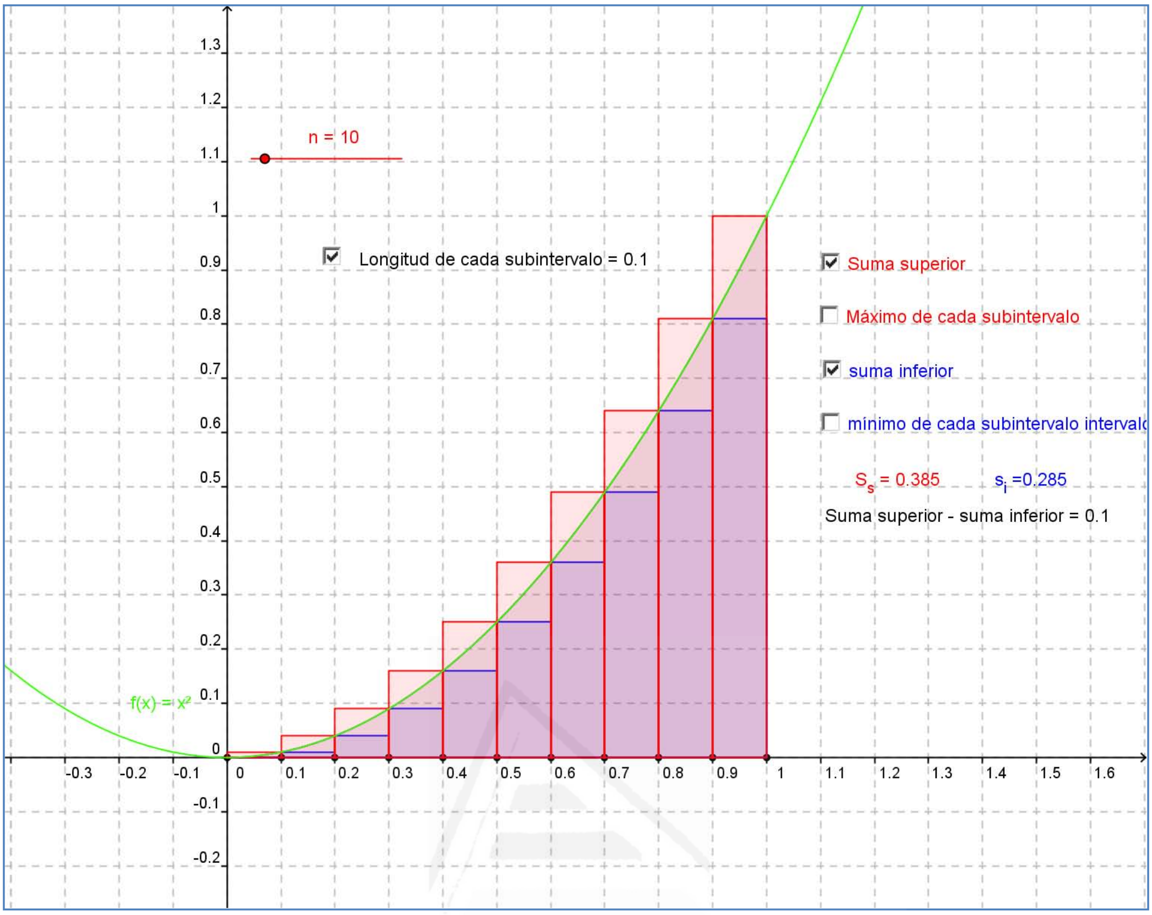


Figura 3.5. *Applet* de la Tarea 'Parábola'

En la segunda tarea "error en la aproximación del área bajo un segmento de parábola" (Figura 3.6) los estudiantes, apoyándose en la tarea anterior, deben determinar un valor de *n* (número de sub-intervalos), que permitiese calcular el área bajo un segmento parabólico, $f(x) = x^2$, en el intervalo [0, 5] con un error tan pequeño como se quiera.

Tarea: Parábola: Error de la aproximación

Mueve el deslizador **n** y observa cómo varían los rectángulos superiores e inferiores y el rectángulo rojo de la derecha:

I. Trata de identificar alguna relación. ¿Ocurre lo mismo que en el ejercicio anterior respecto a las diferencias S_i-I_i?

II. Busca una fórmula para el área del rectángulo de la derecha dependiendo del valor de n. Para ello necesitas saber la base y la altura del rectángulo.

1. ¿La altura depende de **n**? Altura=
2. ¿La base depende de **n**? Calcula la base del rectángulo para:
    a. **n=10**, Base=
    b. **n=20**, Base=
    c. **n= 50**, Base=
    d. ....
    e. **n** , Base=

b. Obtén una fórmula para las diferencias entre las **sumas superiores** e **inferiores** dependiendo del valor de n.

c. Identifica la relación entre el área del rectángulo amarillo y el **error máximo** cometido al aproximar el área.

d. Si error máximo es 0,1 ¿cuántos intervalos tienes que coger?

¿y si es 0,01?

e. ¿Podrías encontrar un procedimiento para determinar un valor de **n** que permita calcular el área con un error menor que un número tan pequeño como se quiera?

Figura 3.6. Guía de trabajo de la tarea 'Parábola: Error de la aproximación'

El *applet* en el que se apoya la segunda tarea se diferencia del anterior en que no hay casillas de control y a la derecha aparece el rectángulo de acumulación de las diferencias entre las sumas superiores e inferiores (Figura 3.7).

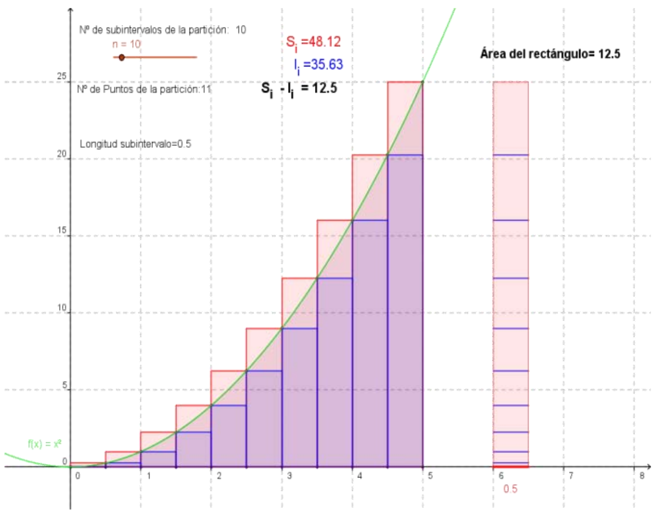


Figura 3.7. *Applet* 'Parábola: Error de la aproximación'

La hipótesis sobre el proceso de aprendizaje del significado de la expresión de las sumas de Darboux y del error de aproximación es la siguiente: Al *experimentar* aumentando el valor de *n*, es decir, el número de sub-intervalos de la partición, y observar lo que ocurre con la longitud de la base de los rectángulos (cuestión I, Parábola), con las alturas de los rectángulos de las sumas superiores e inferiores y las imágenes de los valores extremos de los sub-intervalo (cuestión II, Parábola), *relacionarán* el valor de las sumas superiores e inferiores con las sumas de las áreas de los rectángulos por exceso y por defecto y podrán *inferir* que cuando aumenta el número de sub-intervalos, el error de la aproximación es menor (cuestión I, Parábola: Error de la aproximación). Esto les ayudará a *coordinar* distintos sistemas de representación: el geométrico, el verbal y el analítico-algebraico, por una parte, en las sumas superiores e inferiores (cuestión II, Parábola; rectángulos que aproximan el área y fórmula que da el valor de las sumas superiores e inferiores en función de *n* y de los puntos de la partición); por otra parte, de la diferencia entre las sumas superiores e inferiores (cuestión II, Parábola: Error de la aproximación; pequeños rectángulos de las diferencias entre las superficies de los rectángulos por exceso y por defecto y fórmulas de estas diferencias). Esto les permitirá identificar el valor de *n* para que el error de aproximación sea menor que un valor dado. Por último podrán extender las *coordinaciones* entre estos elementos a nuevos casos particulares (Figura 3.8).

Después de estas tareas, la profesora presenta la fórmula general de las sumas superiores e inferiores en el caso de la parábola $f(x) = x^2$ y el cálculo del límite, y hace observar que el límite calculado es el mismo valor que habían obtenido antes en las tareas del *applet* 'Parábola: Error de la aproximación' usando el lenguaje geométrico y analítico-numérico y que se obtiene el área exacta, relacionando el lenguaje algebraico con el geométrico y el analítico-numérico. Al finalizar este bloque se hace notar a los estudiantes que este método de cálculo del área es laborioso y poco potente, y se hace necesario obtener un método general.

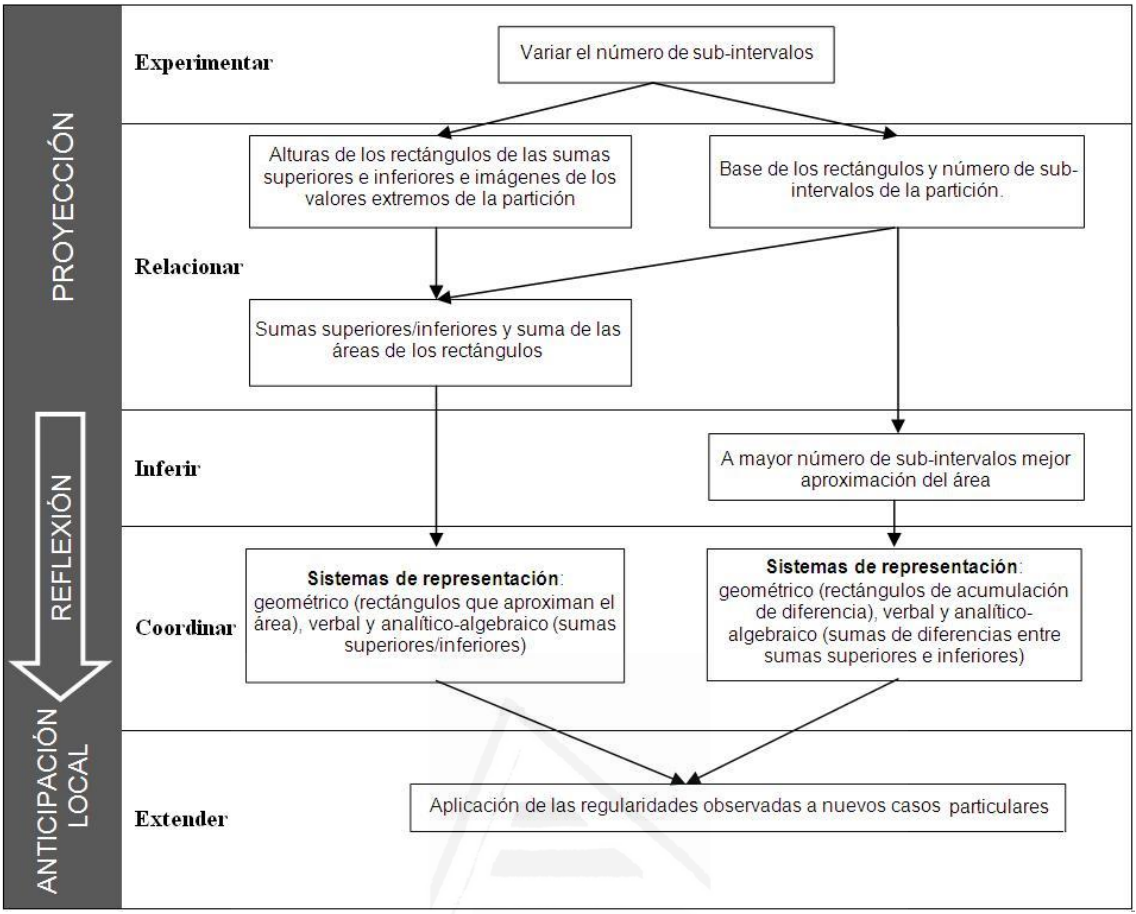


Figura 3.8. Momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva para la coordinación de sistemas de representación

3.2.1.3. Construcción de la función integral

Para completar la construcción del concepto de integral definida, se propone a los estudiantes tres tareas: Integral y área, Función integral I y Función integral II.

El objetivo de la primera tarea, 'Integral y área' (Figura 3.9), es que los estudiantes generen un conjunto de registros de experiencia de la relación entre una *acción* (variar el valor de la pendiente y la ordenada en el origen en una recta, variar los extremos del intervalo) y el *efecto* producido (la integral no siempre es igual al área). Los estudiantes disponían de una guía de trabajo.

Tarea: Integral y área

Vamos a calcular las áreas de regiones que no están situadas siempre por encima del eje X, es decir delimitadas por funciones no siempre positivas. También calcularemos las integrales de dichas funciones en esos intervalos.

En éstos casos, ¿será igual el área a la integral?, ¿Podrá ser cero la integral aunque delimite una región de área no nula?

I. Para **m**=0, **n**=-2 entre **a**=0 y **b**=4

a. Calcula $\int_0^4 -2\,dx$

b. Calcula por métodos geométricos el área sombreada.

Qué relación tiene el área sombreada con $\int_0^4 -2\,dx$

c. Expresa el área sombreada usando $\int_0^4 -2\,dx$

II. Da otros valores a **m** y **n**, **a** y **b**, para que toda la región sombreada quede por debajo del eje X.

a. Calcula el área de dichas regiones.

b. Expresa dichas áreas usando integrales

c. Escribe tus conclusiones respecto a cómo se calculan las áreas de regiones situadas por debajo del eje X usando integrales.

III. ¿Y si la región está situada en parte por encima del eje X y en parte por debajo, es decir la integral es negativa en un trozo y positiva en otro?

Prueba con **m**=1, **n**=0, entre **a**=-2 y **b**=2

a. ¿Cuál es el valor de $\int_{-2}^{2} x\,dx$

b. Y el valor del área encerrada entre las rectas x=-2, x=2, el eje OX y la recta y=x.

c. Calcula $\int_{-2}^{3} x\,dx$

d. Calcula el área de la región determinada por las rectas x=-2, x=3 , el eje OX y la recta y=x.

e. Expresa dicha área mediante integrales y valores absolutos.

Figura 3.9. Guía de trabajo de la tarea 'Integral y área'

Las cuestiones que se plantean en esta primera tarea son las siguientes: Calcular la integral de $f(x) = -2$ en el intervalo [0, 2], el área del rectángulo por métodos geométricos, establecer la relación entre ambos y expresar el área usando la integral (cuestión I), calcular el área de otras regiones situadas por debajo del eje X y relacionarlas con el valor de las integrales (cuestión II) y calcular el área de regiones situadas en parte por encima y en parte por debajo del eje X y relacionarlas con el valor de las integrales (cuestión III).

Para realizar la tarea los estudiantes se apoyan en un *applet* que les permite variar los parámetros, mediante deslizadores en el caso de la pendiente y la ordenada en el origen, y moviendo los puntos en el caso de los extremos del intervalo. En la pantalla aparece el valor de la integral (Figura 3. 10).

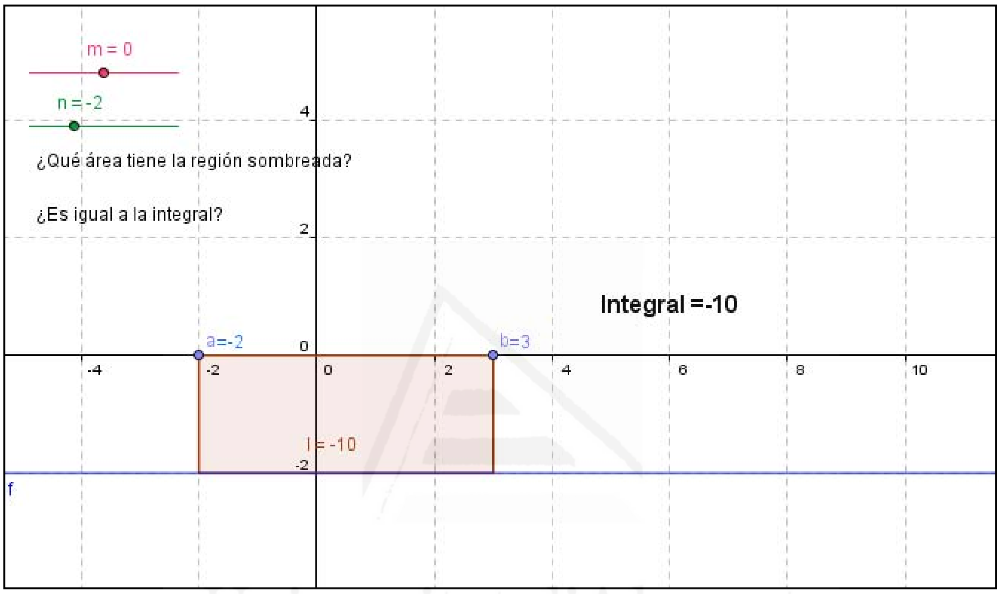


Figura 3.10. *Applet* 'Integral y área'

El objetivo de la segunda tarea, 'Función integral I' (Figura 3.11) que se apoya en un *applet* (Figura 3.12), es que los estudiantes generen un conjunto de registros de experiencia de la relación entre una función y su función integral al modificar el valor de los parámetros de una función lineal o afín (pendiente y ordenada en el origen) mediante deslizadores. Los estudiantes disponen de una guía de trabajo.

En la tarea primero se pide a los estudiantes que escriban la función integral para $a = 0$ y $t = 2$ para el caso de rectángulos (*m=0*), de triángulos (*n=0*) y de trapecios, a partir de las fórmulas de las áreas de los polígonos, dado que conocen las fórmulas de las áreas de estos polígonos; después una fórmula para cualquier valor de *t* (cuestión I); más tarde que comprueben la validez de las fórmulas variando *t* y sustituyendo en ellas (cuestión II). Una vez obtenidas estas funciones se les pide que modifiquen el valor de *a*, extremo inferior del intervalo y observen los que ocurre (cuestión III).

Función Integral I. Rectas

Cuando **a**=0 y **t**=2, cambiando el valor de **m** y **n** en los deslizadores justifica que el área del cuadrilátero es la que se indica,

- en el caso de rectángulos (**m**=0)
- en el caso de triángulos (**n**=0)
- en el caso de trapecios (**m**≠0 y **n**≠0)

I. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?
   Por ejemplo:
   - Si **m**=0, **n**=2
   - Si **m**=2, **n**=0
   - Si **m**=1, **n**=2

II. Comprueba la validez de las fórmulas cambiando el valor de t y sustituyendo en las fórmulas obtenidas.

III. ¿Qué ocurre si para un valor de **m** y **n** dados, manteniendo fijo t, cambiamos el valor de **a**?

Figura 3.11. Guía de trabajo de la tarea ‘Función Integral I’

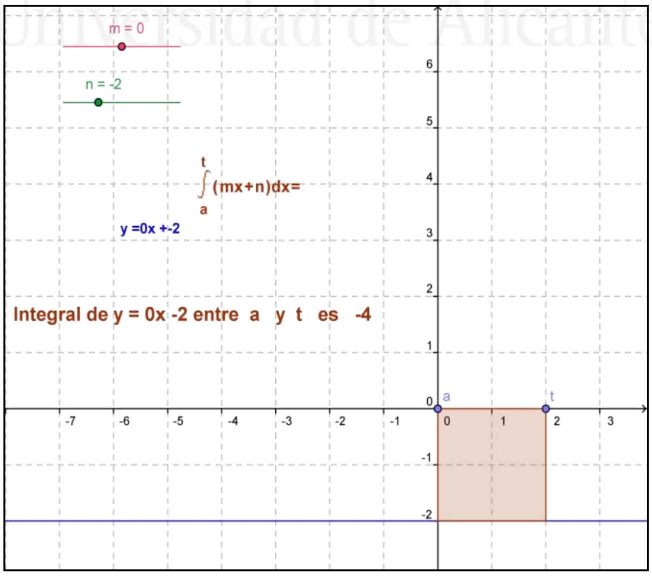


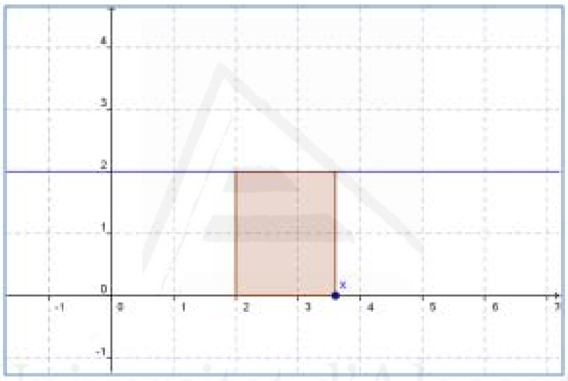
Figura 3.12. *Applet* ‘Función integral I’

El objetivo de la tercera tarea, ‘Función integral II’ (Figura 3.13), es que los estudiantes generen un conjunto de registros de la relación entre una función y su función integral. Para ello se les propone un ejercicio de lápiz y papel para dibujar, aproximadamente, las gráficas de las funciones que representen el área bajo dos segmentos de rectas, en intervalos en los que la función es positiva, y fijado el valor inicial del intervalo de integración.

Tarea: Función integral II.

Dibuja, aproximadamente, las gráficas de la funciones F_I y F_{II} que nos ofrezcan el valor del área bajo cada una de las gráficas siguientes desde 2 hasta x (para valores comprendidos entre 2 y 5)

I.



II.

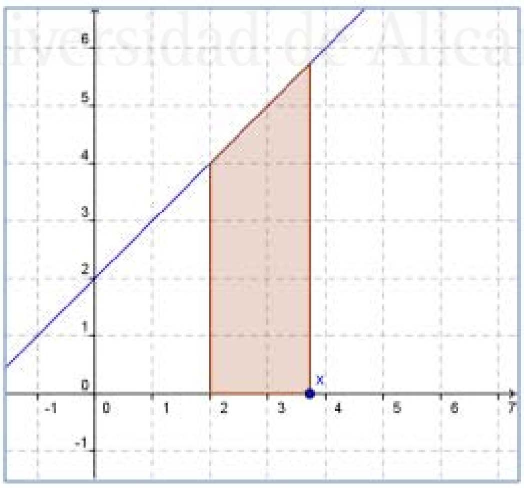


Figura 3.13. Tarea “Función integral II”

Por otra parte, tras familiarizarse con el *applet* (cuestión I de la tarea 'función Integra I') y *experimentar* variando el valor los parámetros *m*, pendiente de la recta, *n*, ordenada en el origen, y los extremos del intervalo de integración, los estudiantes *relacionarán* una función y su función integral (cuestiones II, III y IV de tarea 'Función Integral I') e *inferirán* que la función integral de una función representada por una recta es una función polinómica de grado 1 ó 2 (tarea 'Función integral II') *coordinando* las representaciones geométricas (gráficas) y analítico-algebraicas (ecuaciones de las funciones) de una función y su función integral y aplicando las regularidades a nuevas situaciones (Figura 3.14).

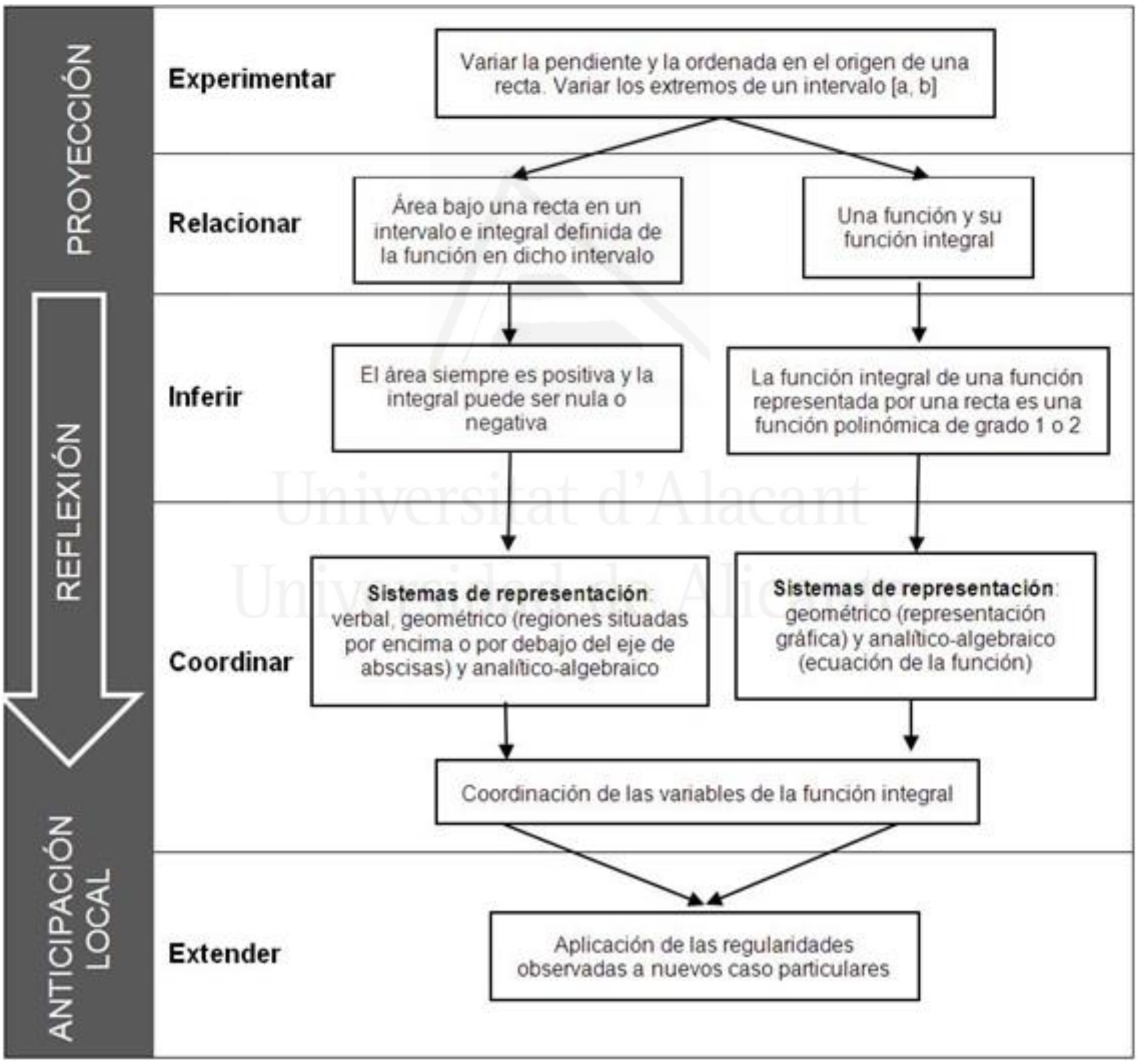


Figura 3.14. Momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva para la construcción de la función integral

3.2.2. Fase 2. Experimentación en el aula

El experimento se llevó a cabo en 8 sesiones de 1 hora durante tres semanas. Al empezar cada sesión se proponía una tarea y los estudiantes iban trabajando a su ritmo, de forma que el tiempo que empleaban para realizarlas era distinto en cada pareja. A veces a alguna pareja no le dio tiempo a completarlas. Como ya se ha indicado, los estudiantes usaron las guías de trabajo y se ayudaron de los *applets* diseñados ad hoc, también utilizaron, ocasionalmente, una hoja de cálculo o la calculadora, y lápiz y papel. Los estudiantes escribieron sus respuestas, y anotaron sus conclusiones en las guías de trabajo.

El papel de la profesora fue de hacer de guía durante las sesiones, aclarar dudas y moderar una puesta en común de la sesión anterior al principio de cada sesión. Los estudiantes trabajaron por parejas (6 parejas) o tríos (1 trío) de similar nivel de rendimiento académico.

En el capítulo de resultados se expone la forma en que los estudiantes abordaron las tareas propuestas y el grado de consecución de los objetivos.

3.2.3. Fase 3. Análisis retrospectivo

El análisis retrospectivo se apoya en los referentes teóricos que fundamentan la trayectoria hipotética de aprendizaje: las acciones cognitivas de los estudiantes en los momentos de la fase de participación. De esta manera se pueden describir las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes. En el capítulo de resultados se exponen distintas trayectorias de aprendizaje de los estudiantes. Este análisis permitirá refinar el experimento de enseñanza.

3.3. INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS

Los datos de la investigación son: (1) el registro de las acciones que efectuaron los alumnos con los *applets* para resolver las tareas propuestas, (2) las declaraciones orales de las parejas o tríos mientras realizaban las tareas y (3) sus hojas de respuesta; es decir, lo que los estudiantes hacían, lo que decían y lo que escribían como conclusión de su proceso. Los dos primeros tipos de datos fueron registrados en archivos digitales obtenidos con el programa *CamStudio* (http://camstudio.es/, Codes, Sierra y Raboso, 2007).

Como ya se ha dicho, las tareas del experimento de enseñanza que se han utilizado para la investigación han sido: (1) Área del cuadrante, (2) Parábola, (3) Parábola: error de la aproximación, (4) Área e integral, (5) Función integral I y (6) Función integral II.

Las celdas sombreadas de la Tabla 3.2 indican los datos de los que hemos podido disponer y que nos permiten responder a las preguntas de investigación.

Tabla 3.2. Datos usados en la investigación

Parejas/trío Tareas de la investigación	P 1: I-G	P2: A-J	P3: AL-AV-V	P4: L-M	P5: A-L	P6: K-MA	P7: N-J
Área del cuadrante							
Parábola							
Parábola: error de la aproximación							
Área e integral							
Función integral I							
Función integral II							

3.4. ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de los datos se realizó en tres fases:

- En primer lugar se revisaron los registros y se identificaron los segmentos que eran de interés para la investigación y se hizo la transcripción de la comunicación oral de las sesiones, que fueron ilustradas con las capturas de las pantallas del ordenador y se indicaron las acciones realizadas con los applet (Anexos II a XV), completando con las respuestas escritas a las tareas (Anexos XVI a XX).
- En segundo lugar se identificaron las comunicaciones orales y registros de interacciones con los *applet* que mostraban las *acciones* producidas como

consecuencia de la reflexión sobre la relación actividad-efecto, según se ha especificado en la hipótesis sobre el proceso de aprendizaje.

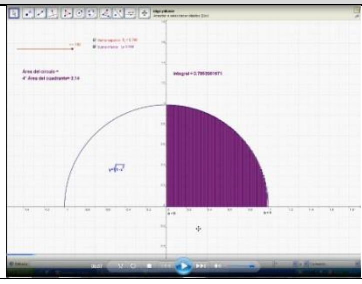
- En tercer lugar se describió la trayectoria de aprendizaje de las parejas o tríos de los estudiantes en términos del mecanismo reflexión sobre la relación actividad-efecto, señalando los “saltos cognitivos” que se producen al pasar de un momento a otro dentro de la fase de participación.

La comparación de las distintas trayectorias de aprendizaje descritas nos permitió identificar distintos perfiles en la construcción de la idea de integral definida que describiremos en la sección de resultados. A continuación, mostramos ejemplos de análisis de cada una de las fases.

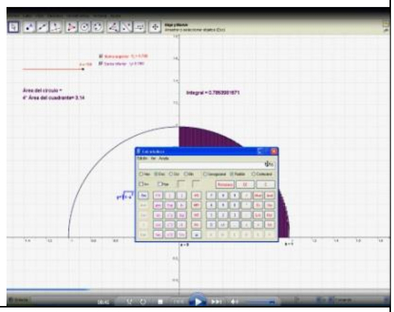
3.4.1. Primera fase

En esta fase se hicieron las transcripciones de las interacciones verbales entre las parejas. Por ejemplo, en la Tabla 3.3 se muestra la interacción de la pareja 4, compuesta por los estudiantes L y M, mientras resolvían la cuestión IV de la tarea ‘Área del cuadrante’. En la primera columna se indica el tiempo trascurrido desde el inicio de la tarea, en la segunda el número de la intervención, en la tercera el intercambio oral y en la última las acciones con el *applet* (Figura 3.2).

Tabla 3.3. Ejemplo de transcripción del trabajo de la pareja L- M de la tarea ‘Área del cuadrante’, sesiones 3 y 4

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior? Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de n?				
5:06	34	L	Vale, otra. [Lee]. Si se pide el valor del área con un error menor de 0.1, ¿cuál sería el valor del área?	
	35	M	Si se pide el valor del área …	Pantalla: N=100, S_i=0,790, S_i=0.780 I=0.7853981671
	36	L	Del intervalo.	

	37	M	Con un error menor de 0.1 ¿cuál sería el valor del área?	
5:30	38	M	Sería la mitad de la diferencia, la media, la media entre la suma superior y la suma inferior.	[5:40]; Señalan en la pantalla Suma superior y suma inferior, que valen 0.790 y 0.780
	39	L	Está claro.	
	40	M	[Lee] si se pide el valor …	
5:43	41	L	Pero tiene que dar el valor.	
	42	M	¿Cuál sería el valor del área?	
	43	¿	Pues nos sale que sería 0.785.	
	44	M	[texto de la pregunta]¿Cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior? Pues n=100.	
	45	L	..	
	46	M	No, n igual a 100.	
	47	L	Ah, 100 son los cuadrados.	
6:07	48	M	Rectangulitos, 100 son los rectangulitos.	
	49	L	¿Y si el error máximo fuera de 0.02?	
6:00	50	M	Pues no podemos.	Sigue la misma pantalla: N=100, S_i=0.790, S_i=0.80 I=0.7853981671
	51	L	Sí.	
	52	M	Aquí cuánto error tenemos, 0.02.	
	53	L	¡Ah no!	
	54	M	0.02 es decir, …	
	55	L	Sí porque tenemos 3.	
	56	M	Sí también podemos porque el error aquí es de 0.00039…	
	57	L	Pero ahí, … 0.00…	
6:37	58	M	Porque nosotros tenemos hasta aquí ¿no? … este es el número que nos da. El error que nos dan, o sea aquí si aquí hay 39, el error es 0.00039, o sea tenemos un error de 0.0004?	Señala I=0.7853981671 …
6:51	59	L	Vale, y entonces ¿cuál sería el valor del área? 0.85..	
	60	M	0.785. O sea... a ver… es que te dice… nos tienes que dar… es que no se puede hacer de otra manera. Sale 78, 92 da 80 y ahí…, claro, no es que si queremos un error de 0.1	Mueve n hasta n=73 S_i=0.792, S_i=0.778
	61	L	No tiene que ser tan… aproximado.	
	62		De 0.1 y sabemos que es 0.785 tiene que ser 0 coma …	
			68	
			68 ,o, no 0.7 nos tiene que dar la media, para que nos de 0.7 la media…	Vuelven a poner n=10 Cambian de sitio el deslizador (están jugando?)
	63	L	¿A dónde vas? Más, un poco más.	
7:44	64	M	Tiene que haber una diferencia de 100.	
	65	L	¿De 100? Ah, claro, sí,..	
	66	M	Entonces sí ¿no? Aquí y con n=10 … y nos sale eh…	Mueve n hasta n=16,..n=10 S_i=0.826, S_i=0.726. Abren al calculadora del ordenador:
	67	L	0.75	

	68	M	La calculadora esta es triunfal, 726 más …	
	69	L	0.75	
	70		Más 0.826 es igual a… partido por 2 …	
	71	L	0.75 ¿no? Hala.	
	72	M	Igual a 0.776 [calculadora ordenador]	(0.726+0.826)=1.552; 1.552/2=0.776
	73		Ah claro, porque no he contado el 6.	Vuelven a n=100
	74	L	Pero entonces el error es no menor que una décima.	
	75	M	¿No?	

3.4.2. Segunda fase

En esta fase se identificaron las comunicaciones orales y registros de interacciones con el *applet* que mostraban acciones cognitivas de los estudiantes. Por ejemplo, en la columna de la derecha de la Tabla 3.5 se muestra las acciones cognitivas realizadas por la pareja 4, L-M, al resolver la cuestión II de la tarea 'Área del cuadrante' (Figura 3.2). En este caso los estudiantes *coordinaron* dos modos de representación: analítico-numérico y geométrico, pues observaron que al mover el deslizador aumentando desde 1 hasta 100, número de subintervalos de la partición, aumentaba también el valor de las sumas inferiores, y que el recubrimiento del cuadrante de círculo por rectángulos se aproximaba más a la superficie del cuadrante.

Tabla 3.5 Ejemplo de coordinación entre modos de representación analítico-numérico y geométrico de la pareja L-M al resolver la cuestión II de la tarea “Área del cuadrante”

II. Deja sólo marcada la casilla de las sumas inferiores. Da a *n* el valor 1 y ve aumentando *n*. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.		
Interacciones con el *applet*	**Comunicaciones orales**	**Acciones**
Marcan las sumas inferiores. Van moviendo el deslizador para aumentar el número de sub-intervalos, desde 1 hasta 100. Luego llevan n a 1 y van aumentando y disminuyendo, como si jugaran.	[12] L: Cuando aumentan los intervalos la suma se aproxima a 1… [13] M: A uno no, a eso. [14] L: Porque aquí no puede llegar a infinito. Ah, vale. [15] M: No, nunca es 1 porque sería el cuadrado. [16] L: Ah, vale, que la suma se aproxima a 0,78. [17] M: Se aproxima a $\pi/4$. Sí, a $\pi/4$ ¿Cuánto es $\pi/4$?	*Coordinan* dos modos de representación: analítico-numérico (valores de la sucesión de las sumas inferiores) y geométrico (recubrimiento de la superficie del cuadrante de círculo con rectángulos)
Abren la calculadora del ordenador. Calculan $\pi/4=0.7853$	[19] M: Olé, se aproxima a $\pi/4$.	
Escriben: La suma inferior se aproxima a $\pi/4$		

En la Tabla 3.6 se muestra las coordinaciones realizadas por la pareja K-MA al resolver la cuestión III de la tarea ‘área del cuadrante’. Los estudiantes *coordinaron* el error de las aproximaciones mediante las sumas superiores y las sumas inferiores así como la monotonía de las sucesiones de estas sumas.

Tabla 3.6. Protocolo de la pareja K-MA resolviendo la cuestión III de la tarea ‘Área del cuadrante’

III. Deja sólo marcada la casilla de las sumas superiores. Da a *n* el valor 1 y ve aumentando *n*. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.		
Interacciones con el *applet*	**Comunicaciones orales**	**Acciones**
Dejan marcada la casilla de las sumas superiores. Aumentan *n* de 1 a 100.	[29] MA: Y con la siguiente [se refieren a esta tarea] pasa lo mismo, sólo que ésta es con la… [30] K: Sólo que va disminuyendo… va disminuyendo ésta.	

Parten de *n*=1 Marcan también sumas inferiores Mueven el deslizador *n*= 4, 6, ...100. Aplican el zoom para ampliar.	[31] MA: Ah mira, en ésta lo que pasa… ponlo… un poco más… aumenta en un poco. Mira… aquí en éstos, los de dentro, la esquina que está tocando el arco en la de la derecha… [32] K: Aquí hay un error hacia menos y aquí hay un error hacia más.	*Coordinan* el error de ambas aproximaciones
n=1, *n*=13	[33] MA: Esta se va acercando desde arriba, sabes, o sea, empieza desde un valor y va disminuyendo... [34] K: Eso digo, que aquí va aumentando [se refiere a las sumas inferiores] y aquí disminuyendo [se refiere a las sumas superiores].	*Coordinan* la monotonía de las sucesiones de las sumas superiores e inferiores
n=100 Disminuyen el valor de *n* y luego vuelven al valor *n*=100.	[35] MA: Aquí aumenta hasta $\pi/4$, claro. [36] MA: Pongo que aquí se aproxima aumentando.	

3.4.3. Tercera fase

En esta tercera fase se describió la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes en términos del mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, mostrando los saltos cognitivos que se producen al pasar del momento de proyección al de reflexión y de este al de anticipación local. Los rectángulos sombreados de la figura 3.15 muestran la trayectoria de aprendizaje de la pareja K-MA en relación a la trayectoria hipotética de aprendizaje de la parte de la construcción de la integral como límite. Esta pareja K-MA *experimentó* con el *applet*, *relacionó* el incremento del número de sub-intervalos de la partición con el valor de las sumas superiores e inferiores y el recubrimiento de la superficie por rectángulos, llegando a *inferir* que a mayor número de sub-intervalos, hay una mejor aproximación del área bajo la curva. Esto le permitió *coordinar* los procesos de aproximación de una sucesión en el dominio y en el rango (concepción dinámica del límite) y la representación numérica (valores de la sucesión de las sumas inferiores/superiores) con la representación geométrica (superficie del cuadrante de círculo).

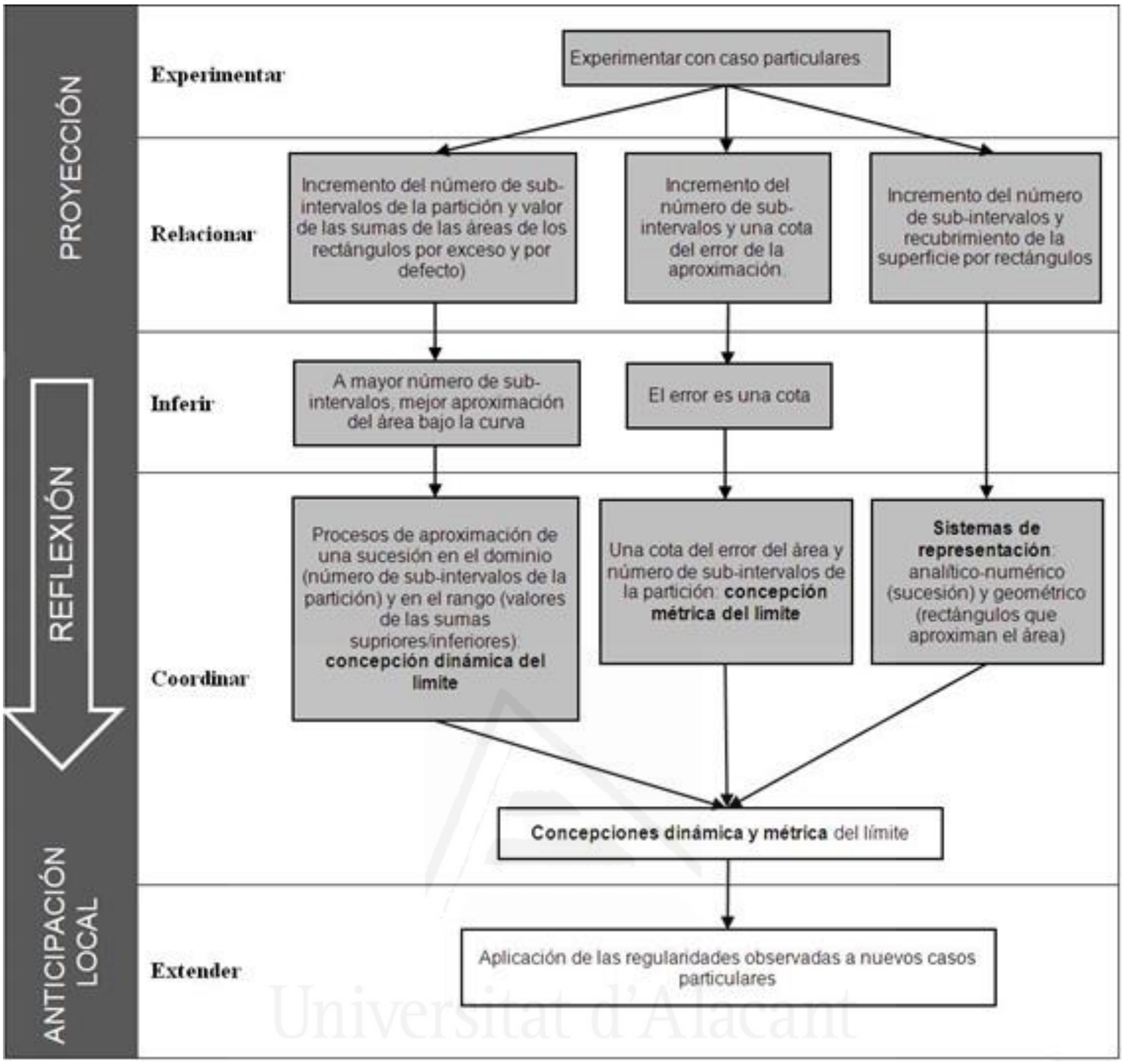


Figura 3.15. Trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de la pareja K-MA en la construcción del concepto de integral como límite

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

En este capítulo mostramos los resultados a partir de la trayectoria hipotética de aprendizaje, identificando distintos perfiles de estudiantes según el grado de construcción del concepto de integral definida, e identificando los saltos cognitivos que permiten pasar de un momento a otro dentro de la fase de participación de la abstracción reflexiva.

Los resultados se presentan para cada uno de los tres aspectos del concepto de integral definida que hemos considerado relevantes (Tabla 3.2.). En el primer apartado identificamos tres perfiles en relación a la aproximación al área de la superficie bajo una curva, según el grado de construcción del límite de las sucesiones de las sumas superiores e inferiores. En el segundo, el significado de la expresión de las sumas de Darboux, también identificamos tres perfiles. Y por último, en relación a la construcción de la función integral identificamos dos perfiles. Finalizamos el capítulo exponiendo los perfiles globales en la construcción del concepto de integral definida.

4.1. PERFILES EN RELACIÓN CON LA CONSTRUCCIÓN DE LA APROXIMACIÓN AL ÁREA BAJO UNA CURVA

Hemos identificado tres perfiles de estudiantes en relación con la construcción de la aproximación al área de la superficie bajo una curva (Aranda y Callejo, 2015):

Perfil 1, estudiantes que muestran evidencias de construir la aproximación mediante la coordinación entre dos concepciones del límite: la métrica y la dinámica y son capaces de aplicar las regularidades observadas a nuevas situaciones (momento de anticipación local).

Perfil 2, estudiantes que muestran evidencias de construir la aproximación mediante la concepción dinámica y métrica del límite, pero no de conexión entre ambas concepciones (momento de reflexión).

Perfil 3, estudiantes que no dan evidencias de construir una aproximación al área de la superficie bajo una curva como límite de una sucesión (momento de proyección).

4.1.1. Perfil 1: Dos formas de aproximación al área y coordinación entre ellas

Los estudiantes de este perfil relacionaron los valores numéricos de la sucesión creciente (decreciente) de las sumas inferiores (superiores) con el límite de esta sucesión (valor del área bajo la curva) al coordinar la representación numérica (valores de la sucesión de las sumas inferiores/superiores) con la representación geométrica (superficie del cuadrante de círculo), lo que puso de manifiesto la concepción dinámica del límite. Por ejemplo, la pareja L-M al ir aumentado hasta 100 el valor inicial de n, $n=1$, y disminuyéndolo de nuevo hasta 1, observó que las sumas inferiores se aproximan a $\pi/4$ (Tabla 4.1).

Tabla 4.1. Protocolo de la pareja L-M resolviendo la cuestión II de la tarea 'Área del cuadrante'

<table>
<tr><td colspan="2">II. Deja sólo marcada la casilla de las sumas inferiores. Da a n el valor 1 y ve aumentando n. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.</td></tr>
<tr><th>Interacciones con el applet</th><th>Comunicaciones orales</th></tr>
<tr><td>Marcan las sumas inferiores.

Van moviendo el deslizador para aumentar el número de sub-intervalos, desde 1 hasta 100. Luego llevan n a 1 y van aumentando y disminuyendo, como si jugaran</td><td>[12] L: Cuando aumentan los intervalos la suma se aproxima a 1…
[13] M: A uno no, a eso.
[14] L: Porque aquí no puede llegar a infinito. Ah, vale.
[15] M: No, nunca es 1 porque sería el cuadrado.
[16] L: Ah, vale, que la suma se aproxima a 0,78.
[17] M: Se aproxima a π/4. Sí, a π/4 ¿Cuánto es π/4?</td></tr>
<tr><td>Abren la calculadora del ordenador.
Calculan π/4=0.7853</td><td>[19] M: Olé, se aproxima a π/4.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Escriben: La suma inferior se aproxima a π/4</td></tr>
</table>

El que la pareja L-M se diese cuenta de que "*cuando aumentan los intervalos la suma se aproxima a […] π/4*", que es el área de un cuadrante de círculo de radio 1, pone de manifiesto que ha coordinado las aproximaciones de la variable x (variación de la amplitud del intervalo) con los valores de las sumas de las áreas (rango). Estos estudiantes coordinaron los modos de representación analítico-numérico (valores de la sucesión de las sumas inferiores) y geométrico (recubrimiento de la superficie del cuadrante de círculo con rectángulos) al observar que al mover el deslizador aumentando desde 1 hasta 100, número de sub-intervalos de la partición, aumentaba el valor de las sumas inferiores y que el recubrimiento del cuadrante de círculo por rectángulos se aproximaba más a la superficie del cuadrante.

Una evidencia de que esta pareja tiene una concepción dinámica de límite es el hecho de que repitiera el procedimiento para las sumas superiores y constatara, por un lado, que la sucesión de las sumas superiores es decreciente y se aproxima siempre por arriba a π/4 cuando dijo: "*… su área se aproxima por arriba cada vez más a π/4.* […]. *O sea de más a menos. Siempre superiormente",* y por otro que las dos sucesiones convergen, pues refiriéndose a la sucesión de las sumas superiores dijo: *"Pero igualmente* *se está aproximando a π/4”.* Entendemos que con “igualmente” se refiere al caso de las sumas inferiores (Tabla 4.2).

Tabla 4.2. Protocolo de la pareja L-M resolviendo la cuestión III de la tarea ‘Área del cuadrante’

III. Deja sólo marcada la casilla de las sumas superiores. Da a n el valor 1 y ve aumentando n. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.	
Interacciones con el *applet*	**Comunicaciones orales**
Marcan la casilla de las sumas superiores. Aumentan con el deslizador el número de sub-intervalos desde 1 hasta 100.	[25] M: … su área se aproxima por arriba cada vez más a π/4. [26] L: Pero su área se aproxima por arriba. [27] M: O sea de más a menos. Siempre superiormente. [28] L: Pero igualmente se está aproximando a π/4.
Dejan el deslizador en n=100 y marcan también la casilla de la suma inferior.	[32] L: Mira, éste da 0.79 [se refiere a la suma superior] y éste da 0.78 [se refiere a la suma inferior] [33] M: La integral da 0.785 que es la mitad.
Escriben: La suma se aproxima a π/4.	

Los estudiantes de este perfil relacionaron el incremento del número de sub-intervalos de una partición del intervalo [0,1] y el valor de la suma de las áreas de los rectángulos que recubren un cuadrante de círculo (sumas inferiores) (*momento de proyección*), lo que les llevó a *inferir* que a mayor número de sub-intervalos, mejor aproximación del área bajo la curva y a *coordinar* los procesos de aproximación de una sucesión en el dominio (número de sub-intervalos de una partición del intervalo [0,1]) y en el rango (valores de las sumas inferiores) (*momento de reflexión*) que pone de manifiesto la concepción dinámica del límite.

Una segunda característica de los estudiantes de este perfil es que afirmaron que a partir de un determinado valor de n la diferencia entre el valor de las sumas superiores/inferiores y el límite es menor que un valor dado de antemano, lo que pone de manifiesto la concepción métrica del límite. Por ejemplo, la pareja L-M, cuando se le pidió que calculara el valor del área con un error menor que 0.1 y el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior, observó que para n=100 y para n=10 se cumplía la condición pedida (error menor que 0.1) y se dio cuenta de que "*... le podríamos poner más cuadritos, rectángulos de esos y seguiría siendo menor de una décima*", esto es, que el error es una cota. A pesar de haber encontrado valores de *n* para los que el error es menor que una décima, continuaron buscando valores más pequeños de *n* hasta encontrar el valor *n*=3, lo que les llevó a decir: *"A partir de n=3, con que sea más de n=3 ya lo tienes bien"* (Tabla 4.3). Esta idea la reafirmaron cuando la profesora les pidió que calcularan el valor de *n* para un error máximo de 0.02. Para ello buscaron (objetivo de los estudiantes) si había una relación entre las cotas del error y el valor de *n*, y constataron de forma experimental que si *n* era el doble del caso anterior (*n*=6) entonces el error era la quinta parte, lo que justificaron con una relación numérica entre los valores del error en el caso anterior (0.1) y en este caso: $0.02 = \frac{0.1}{5}$.

Tabla 4.3. Protocolo de la pareja L-M resolviendo la primera parte de la cuestión IV de la tarea 'Área del cuadrante'

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de *n* para aproximar el área hasta el valor anterior?	
Interacciones con el *applet*	Comunicaciones orales
Ponen el deslizador en *n*=73 y observan que I_i=0.778 y S_i=0.792. Para *n*=100, I_i=0.780 y S_i=0.790	[62] L: De 0.1 [se refieren a la cota del error] … y sabemos que es 0.785 [la media de la suma para *n*=100] tiene que ser 0 coma … 68 … 68 ,o, no 0.7 nos tiene que dar la media, para que nos de 0.7 la media…
…	…
Mueven *n*=16, *n*=10 y observan el valor de las sumas para *n*=10: S_i=0.826, I_i=0.726.	[80] L: Pero en realidad les podríamos poner más cuadraditos, rectángulos de esos y seguiría siendo menor de una décima.
Abren la calculadora del ordenador y calculan (0.826+0.726)/2=0.776.	[81] M: Es que, a ver, menor de una décima quiere decir que tiene que ser 0….0.685 ó 0.885 y nos ha dado 0.7, ahora estamos… [82] L: … bueno.
Ponen *n*=7, *n*=5, *n*=1, *n*=2 y van señalando los valores de S_i y I_i	[83] M: Vale, ah pues vamos a poner 5. Mira aquí la diferencia aún sigue siendo…aún está en 0.7. *n*=4 la diferencia… es que mira si cogemos *n*, *n*=1 no se puede coger, *n*=1 seguro que no. Esta y sumamos 0.933…
…	…

N=100, *n*=3 Calculan: (0.896+0.563)/2=1.459/2=0.7295	[97] M: A ver con *n*=3. Tenemos que [la suma superior] es 0.896. A partir de *n*=3 el error es menor que una décima. [98] L: Pero pongo un intervalo. [99] M: A partir de *n*=3, con que sea más de *n*=3 ya lo tienes bien.

La tercera característica del perfil 1 se corresponde con el establecimiento por parte de los estudiantes de la conexión entre la concepción métrica (cota del error de la aproximación) y la concepción dinámica del límite (idea de aproximación), al darse cuenta de que a medida que las sumas superiores/inferiores se aproximan al valor del límite, el error disminuye. Una evidencia de ello es la respuesta que dio la pareja L-M cuando se le preguntó qué ocurriría con las aproximaciones y con el error de esta aproximación, si se aumenta el valor de *n* (cuestión V) pues, sin necesidad de experimentar con el *applet*, dijo: "*Las aproximaciones cada vez van aumentando poco a poco… y el error se reduce porque se aproxima cada vez más a la integral*". La no utilización del recurso tecnológico se puede interpretar como que apoyaron sus reflexiones sobre los significados construidos, por tanto se encuentran en el momento de anticipación local.

La trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de este perfil que acabamos de describir, se muestra en la Figura 4.1.

4.1.2. Perfil 2: Dos formas de aproximación al área sin evidencias de coordinación entre ellas

Los estudiantes de este perfil relacionaron los valores numéricos de la sucesión creciente (decreciente) de las sumas inferiores (superiores) con el límite de esta sucesión, coordinando la aproximación de la variable *x* (variando la amplitud del intervalo) con los valores de las sumas de las áreas, lo que pone de manifiesto la concepción dinámica del límite.

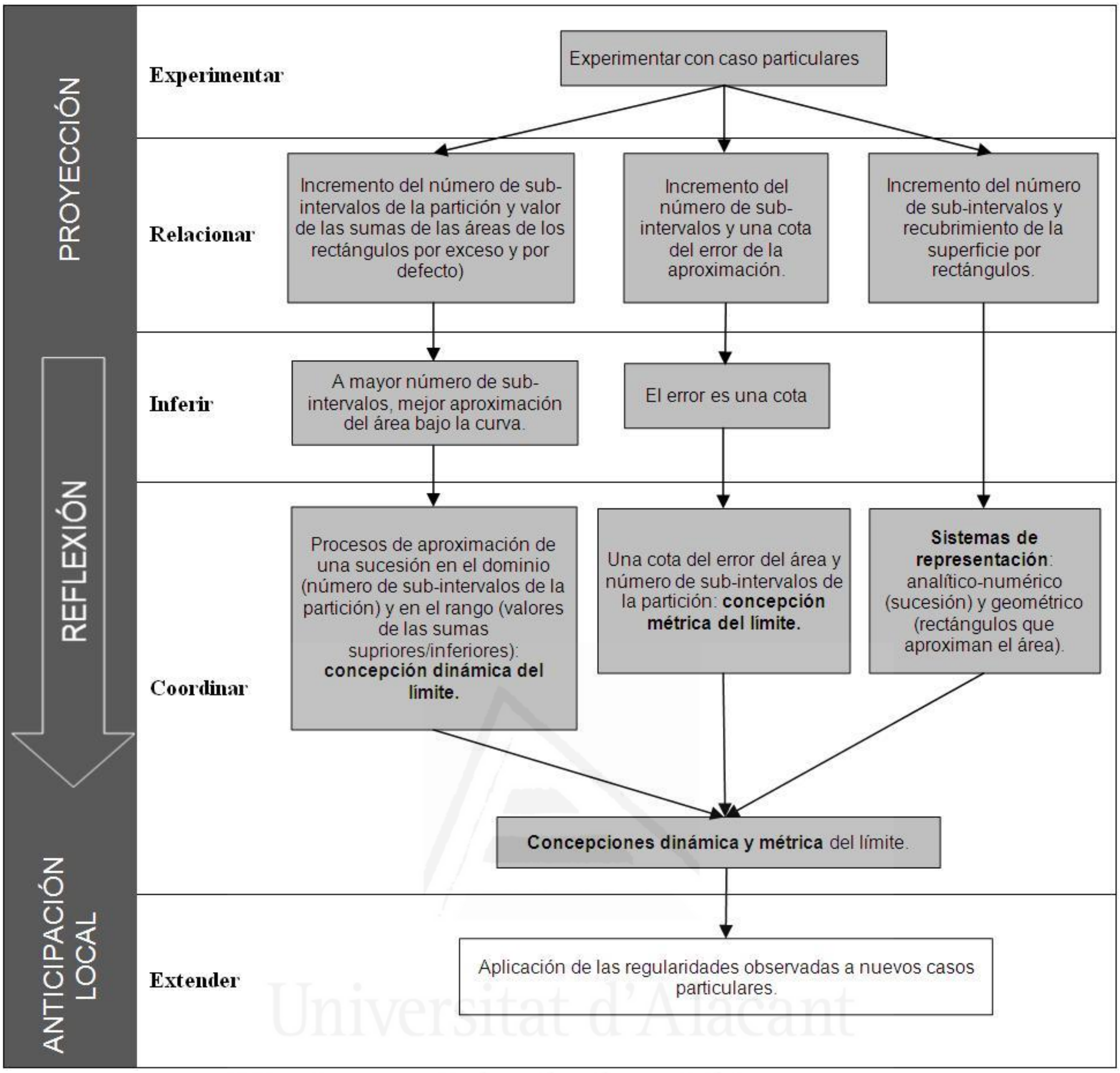


Figura 4.1. Trayectoria de aprendizaje de los estudiantes del perfil 1 en la construcción del concepto de integral como límite

Esta coordinación se pone de manifiesto cuando los estudiantes hacen manifestaciones relacionando la representación numérica (valores de la sucesión de las sumas inferiores/superiores) con la representación geométrica (superficie del cuadrante de círculo). Por ejemplo la pareja K-MA, al ir disminuyendo y aumentando los valores de *n* observó el comportamiento de las sumas inferiores pues afirmó que *"la suma va aumentando a… cuanto mayor es n y cada vez acercándose más al área… al área del cuadrante*" (Tabla 4.4), lo que pone de manifiesto que ha coordinado los procesos de aproximación de la sucesión de las sumas inferiores en el dominio (número de sub-intervalos) y en el rango (superficie que cubren los rectángulos) apoyándose en los modos de representación analítico-numérico (valores de la sucesión de las sumas inferiores) y geométrico (recubrimiento de la superficie del cuadrante de círculo con rectángulos).

Tabla 4.4. Protocolo de la pareja K-MA resolviendo la cuestión II de la tarea 'Área del cuadrante'

<table>
<tr><td colspan="2">II. Deja sólo marcada la casilla de las sumas inferiores. Da a n el valor 1 y ve aumentando n. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.</td></tr>
<tr><th>Interacciones con el applet</th><th>Comunicaciones orales</th></tr>
<tr><td>Van moviendo el deslizador: n=6, 2, 1, 95, 56
Dejan marcada la casilla de las sumas inferiores</td><td>[16] MA: La suma de los... de los rectángulos, cuando más aumenta n se acerca más al área real de este trozo, de… o sea del sector circular.</td></tr>
<tr><td>Obtienen una aproximación con la calculadora del valor del área del cuadrante de círculo (π/4).</td><td>[26] K: Pues eso que la suma va aumentando a… cuanto mayor es n y cada vez acercándose más al área… al área del cuadrante, ¿no?</td></tr>
</table>

Otra evidencia de la concepción dinámica del límite es el hecho de que estos estudiantes se dieran cuenta de que al aumentar con el deslizador el valor de *n* dejando marcada no solo la casilla de las sumas superiores como indicaba la tarea, sino también la de las inferiores constataran, por un lado, la variación del error de ambas aproximaciones: "*Aquí hay un error hacia menos* [se refiere a las sumas inferiores] *y aquí hay un error hacia más* [se refiere a las sumas superiores]". Por otro lado se dieron cuenta de que una sucesión "*se va acercando desde arriba [...] empieza desde un valor y va disminuyendo*" y que las dos sucesiones se van aproximando al valor del área del cuadrante, una aumentando y otra disminuyendo: "*aquí va aumentando* [se refieren a las sumas inferiores] *y aquí disminuyendo* [se refieren a las sumas superiores]" (Tabla 4.5). Esta manera de actuar muestra que relacionan la monotonía de las sucesiones de sumas superiores e inferiores con la aproximación al límite de ambas sucesiones.

Tabla 4.5. Protocolo de la pareja K-MA resolviendo la cuestión III de la tarea 'Área del cuadrante'

III. Deja sólo marcada la casilla de las sumas superiores. Da a *n* el valor 1 y ve aumentando *n*. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.	
Interacciones con el *applet*	Comunicaciones orales
Dejan marcada la casilla de las sumas superiores. Aumentan *n* de 1 a 100.	[29] MA: Y con la siguiente [se refieren a esta tarea] pasa lo mismo, sólo que ésta es con la… [30] K: Sólo que va disminuyendo… va disminuyendo ésta.
Parten de *n*=1 Marcan también sumas inferiores Mueven el deslizador *n*= 4, 6, ...100. Aplican el zoom para ampliar.	[31] MA: Ah mira, en ésta lo que pasa… ponlo… un poco más… aumenta en un poco. Mira… aquí en éstos, los de dentro, la esquina que está tocando el arco en la de la derecha… [32] K: Aquí hay un error hacia menos y aquí hay un error hacia más.
n=1, *n*=13	[33] MA: Esta se va acercando desde arriba, sabes, o sea, empieza desde un valor y va disminuyendo... [34] K: Eso digo, que aquí va aumentando [se refiere a las sumas inferiores] y aquí disminuyendo [se refiere a las sumas superiores].
n=100 Disminuyen el valor de *n* y luego vuelven al valor *n*=100.	[35] MA: Aquí aumenta hasta π/4, claro. [36] MA: Pongo que aquí se aproxima aumentando.

Estos estudiantes relacionaron el incremento del número de sub-intervalos de una partición del intervalo [0,1] y el valor de la suma de las áreas de los rectángulos que recubren un cuadrante de círculo (sumas inferiores y superiores) (*fase de proyección*). Esto les llevó a *inferir* que a mayor número de sub-intervalos, mejor aproximación del área bajo la curva y a *coordinar* los procesos de aproximación de una sucesión en el dominio (número de sub-intervalos de una partición del intervalo [0,1]) y en el rango (valores de las sumas inferiores) (reflexión), lo que pone de manifiesto la concepción dinámica del límite. Sin embargo, a diferencia del ejemplo de la pareja del perfil 1, la pareja K-MA no hizo una estimación aproximada del valor del límite a partir de los valores de las sumas superiores e inferiores, ya que no usó sus conocimientos sobre el cálculo del área de un círculo.

Una segunda característica de los estudiantes de este perfil es que mostraron indicios de la concepción métrica del límite, ya que pusieron de manifiesto que el incremento del número de sub-intervalos de una partición del intervalo [0,1] produce una mejor aproximación del valor del área y por tanto, que al encontrar un valor de *n* para el que se obtiene la aproximación buscada, esta aproximación se conserva para los valores mayores que *n*. Por ejemplo, la pareja K-MA, cuando se le pidió el valor de *n* para obtener una aproximación del área menor de una décima (Tabla 4.6) utilizó una aproximación del área obtenida en la tarea anterior (0.78). Con el *applet* comprobó que para n=5 no se obtenía la aproximación buscada (I_i=0.659 y S_i=0.859), pero sí para n=6 (I_i=0.682 y S_i=0.849). La afirmación: *"Pues a partir de n=6 ¿no?"* muestra la coordinación entre una cota del error (0.1) y el número de sub-intervalos de la partición, es decir, que a partir de un valor dado de *n*, en este caso n=6, el error de aproximación es menor que 0.1, lo que pone de manifiesto la concepción métrica del límite, pero sin indicar cuál podría ser la aproximación óptima.

Tabla 4.6. Protocolo de la pareja K-MA resolviendo la cuestión IV de la tarea 'Área del cuadrante'

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de *n* para aproximar el área hasta el valor anterior?	
Interacciones con el *applet*	**Comunicaciones orales**
n=100 Señalan en la imagen S_i=0,790 I_i=0,780 Mueven el deslizador a n=47, n=28, n=30, n=100	[44] MA: Tiene que acercarse a esto [se refieren a 0.78] con menos de una décima de diferencia. [45] K: O sea, más de 0.68 y menos de 0.88,
Mueven el deslizador n=1, 7, 6; Señalan que para n=6: S_i=0.849; I_i=0.682 Para n=5 ; Si=0.859, I_i=0.659	[46] K: Pues a partir de n=6 ¿no?

En los estudiantes de este perfil no encontramos evidencias de la conexión entre la concepción métrica (cota del error de aproximación) y la concepción dinámica del límite (idea de aproximación), pues no verbalizaron el hecho de que a medida que las sumas superiores/inferiores se aproximan al valor del límite (área de la superficie) el error disminuye, ya que en sus respuestas se limitaron a encontrar un valor de *n* que cumplía la condición pedida, sin indicar cuál podría ser la aproximación óptima. Estos estudiantes no llegaron a expresar la vinculación entre las aproximaciones de las sumas superiores/inferiores con el valor del límite y la disminución del error y la existencia de una cota. Este comportamiento indica que los estudiantes de este perfil se encuentran en el momento de reflexión, pues establecieron las coordinaciones necesarias para construir las concepciones dinámica y métrica del límite, pero no la conexión entre estas a través de explicitar la idea de cota del error. Además no apoyaron sus reflexiones sobre los significados construidos, pues necesitaron utilizar el recurso tecnológico para responder a las cuestiones propuestas, lo que indica la necesidad de establecer más actividad para ver el efecto.

La trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de este perfil se muestra en la Figura 4.2.

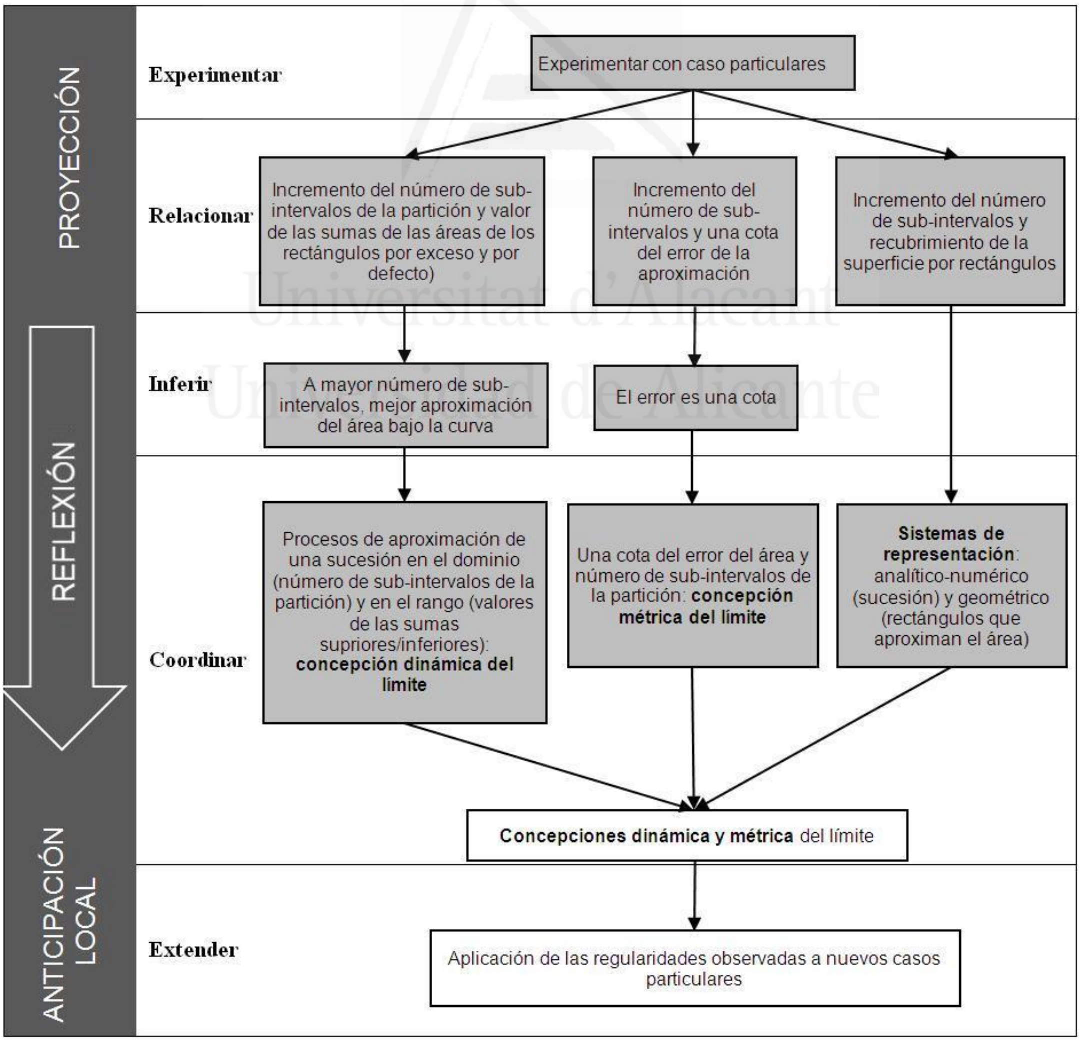


Figura 4.2. Trayectoria de aprendizaje de los estudiantes del perfil 2 en la construcción del concepto de integral como límite

4.1.3. Perfil 3. Sin evidencias de aproximación al área

Los estudiantes de este perfil experimentaron con el *applet* para responder a las cuestiones que se les plantearon y construyeron algunas unidades de experiencia (actividad y efecto) (*momento de proyección*) que no fueron suficientes para construir la aproximación al área bajo una curva con la idea intuitiva de límite. Por ejemplo la pareja A-J al ir aumentando el valor de *n* observó que "*cada vez hay más subintervalos*" y que el valor de las sumas inferiores *"aumenta pero cada vez más lentamente"* (Tabla 4.7) reconociendo la monotonía de la sucesión de las sumas inferiores y que este crecimiento no es lineal, aunque no lo explicitara de esta manera.

Tabla 4.7. Protocolo de la pareja A-J resolviendo la cuestión II de la tarea 'Área del cuadrante'

II. Deja sólo marcada la casilla de las sumas inferiores. Da a *n* el valor 1 y ve aumentando *n*. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.	
Interacciones con el *applet*	Comunicaciones orales
n=10. Mueven el deslizador, *n*=1, van aumentando *n* hasta 100 lentamente, parándose un instante en algunos valores(*n*=32). *n*=1, y van aumentando de nuevo hasta *n*=100 *n*=94 y de nuevo *n*= 100.	[5] A: Cuando aumenta, cada vez hay más subdivisiones.
n= 98, 99 y 100	[6] J: Aumenta pero cada vez más lento.

Luego observó el efecto que producía la acción de aumentar el valor de *n* en las sumas superiores: "*la suma superior va disminuyendo cada vez más lentamente*" (Tabla 4.8). Pero estos registros de experiencia tampoco les llevaron a afirmar que a mayor valor de *n*, mejor aproximación del área bajo la curva, y que ambas sucesiones convergen al mismo valor, por tanto no hay evidencias de la concepción dinámica del límite. La utilización de esta relación es la que nosotros consideramos como evidencia de la objetivación de la relación.

Tabla 4.8. Protocolo de la pareja A-J resolviendo la cuestión III de la tarea 'Área del cuadrante'

III. Deja sólo marcada la casilla de las sumas superiores. Da a n el valor 1 y ve aumentando *n*. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.	
Interacciones con el *applet*	Comunicaciones orales
Dejan marcada sólo la casilla de la suma superior. Aumentan *n* poco a poco hasta llegar a *n*=100, *n*=97, *n*=100	[22] J: Podemos comprobar que la suma superior va disminuyendo cada vez más lentamente, hasta llegar a suma superior *n*=100, que queda suma superior, S_i=0.790. Empieza de 1 y baja a 0.790. La progresión cada vez que *n* aumenta, la disminución es más lenta debido al número de intervalos que hay.

Una segunda característica de este perfil es que los estudiantes tuvieron dificultades para entender que el error es una cota. Por ejemplo la pareja A-J, cuando se le pidió el valor del área con un error menor que 0.1 necesitó que la profesora (P) les aclarara lo que se pedía (Tabla 4.9).

Tabla 4.9. Protocolo de la pareja L-M resolviendo la cuestión IVa de la tarea 'Área del cuadrante'

IV. a. Si se pide el valor del área con un error menor que 0.1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de *n* para aproximar el área hasta el valor anterior?	
Interacciones con el *applet*	Comunicaciones orales
Marcaron la suma superior e inferior y aumentaron *n* poco a poco, desde *n*=1 hasta *n*=10.	[56] P: Entonces, por ejemplo aquí la suma inferior, voy a marcar las dos. La superior me da 0.793 y la inferior me da 0.776 ¿Me podríais dar una aproximación al área? [57] A: Pues, sumas las dos y la mitad ¿no? [58] P: Por ejemplo… [59] J: O restando la superior y la inferior, también. [60] P: Si restas la superior y la inferior, ¿qué es lo que obtienes? Obtienes el error máximo. [61] A: El margen de error. [62] J: El error máximo. … [65] P: Vosotros tenéis que llegar a un valor de *n* en el que esa diferencia sea inferior a 0.1. [66] A: *n*=100 [67] J: En *n*=100, que si son casi calcados. [68] P: En *n*=100 la diferencia es mucho menor.

	[69] A: 0.1. En *n* igual a… claro. Se pide el valor del área con un error menor que 0.1. ¿Menor? menor no puede ser, tiene que ser igual a 0.1 … [94] A: Pues ya está. El error máximo es el de la suma superior y el error mínimo el de la suma inferior, porque la diferencia de la suma superior y de la suma inferior es de 1 décima.

Sin embargo, cuando a estos estudiantes se les pidió el valor del área con un error menor que 0.02 se apoyaron en que para *n*=100 el error era menor que 0.1 y relacionaron los valores 0.02 y 0.1. (Tabla 4.10). Parece que se dieron cuenta de que si el error era menor (0.02) el valor de *n* debía aumentar (registro de experiencia) y pensaron que la relación era de proporcionalidad inversa pues dijeron: *"Si el error máximo fuera 0.02, para que sea cinco veces más grande que 100, o sea 500. ¿Cuál sería el valor del área y de n? Lo que no sé es si está bien. Pero mira, si tenemos 0.02 y lo multiplicamos por 5, nos da 0.1, que 0.1 era 100"*, pero no dio muestra de comprensión de la concepción métrica del límite. (Tabla 4.10). Por tanto solo identificamos algunos registros de experiencia que ubica a los estudiantes de este perfil en el momento de *proyección*.

Tabla 4.10. Protocolo de la pareja A-J resolviendo la cuestión IV. b de la tarea 'Área del cuadrante'

IV. b. Y si el error máximo fuera 0.02, ¿cuál sería el valor del área y de *n*?	
Interacciones con el *applet*	Comunicaciones orales
n=1; van aumentando hasta *n*=45 y después hasta 100. De nuevo a *n*=1 y a 100. Quitan marcas de la suma inferior y la superior y las vuelven a poner. *n*=43, *n*=98 Amplían mucho la imagen, sólo se ve un trozo. Vuelven al zoom normal.	[108] A: Si el error máximo fuera 0,02, para que sea cinco veces más grande que 100, o sea 500. ¿Cuál sería el valor del área y de *n*? Lo que no sé es si está bien. Pero mira, si tenemos 0,02 y lo multiplicamos por 5, nos da 0,1, que 0.1 era 100, lo que pasa es que aquí era error menor y aquí es error máximo que es la diferencia que yo no he acabado de pillar. Pero el valor del área sería… *n* igual a quinientos… el valor del área sería inferior a quinientos ¿no?, no, superior a quinientos y *n* sería quinientos

La trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de este perfil se muestra en la Figura 4.3.

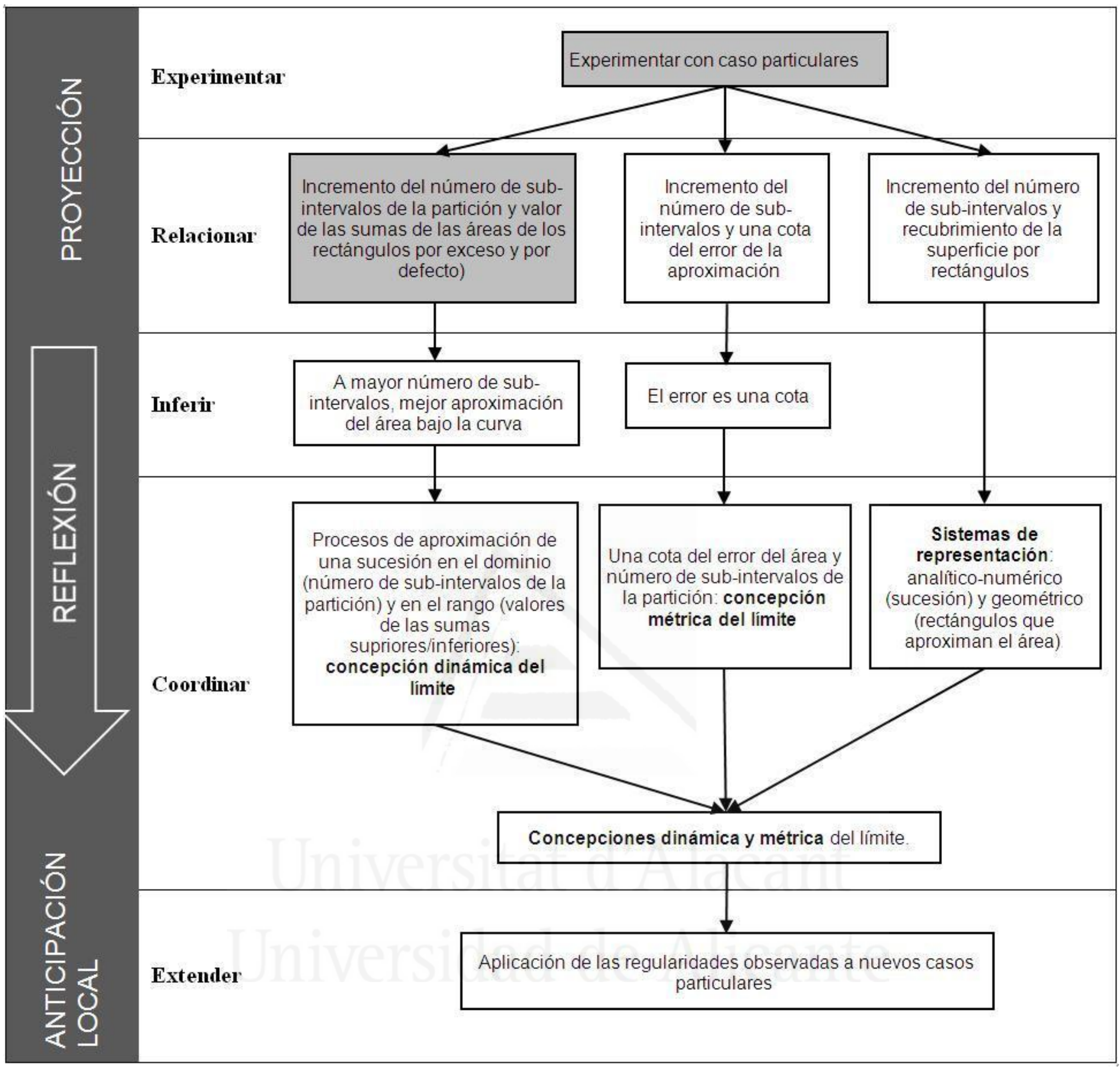


Figura 4.3. Trayectoria de aprendizaje de los estudiantes del perfil 3 en la construcción del concepto de integral como límite

4.2. PERFILES EN RELACIÓN AL SIGNIFICADO DE LA EXPRESIÓN DE LAS SUMAS DE DARBOUX

Después de estudiar la aproximación al área bajo un arco de circunferencia, se pidió a los estudiantes que obtuvieran la fórmula general de las sumas superiores e inferiores del área bajo una parábola en el intervalo [0, 1] mediante particiones apoyados en el *applet* de la Figura 3.7 y en una hoja de cálculo donde se registraban los valores (Figura 4.4). Asimismo se les pidió que expresasen mediante una fórmula la acumulación de diferencias de sumas superiores e inferiores del área bajo una parábola en el intervalo [0, 5] (Figura 3.8). Se identificaron tres perfiles:

- Perfil 1: Coordinación entre representaciones de la acumulación de diferencias de sumas superiores e inferiores (momento de anticipación local).
- Perfil 2: Coordinación entre representaciones para las sumas superiores e inferiores pero no entre representaciones de la acumulación de diferencias (momento de reflexión).
- Perfil 3: Sin apenas evidencias de coordinación entre representaciones (momento de proyección).

II. Observa las sumas superiores e inferiores de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos:
  a. En las sumas inferiores.
  b. En las sumas superiores.

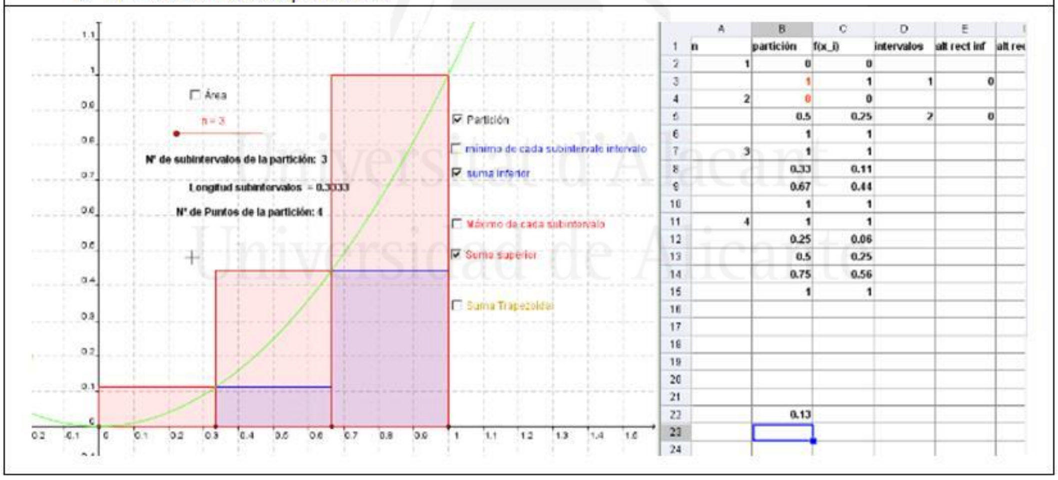


Figura 4.4. Imagen de la ventana gráfica y de la hoja de cálculo de la resolución de la pareja L-M de la Tarea ‘Parábola’[1]

[1] En la hoja de cálculo: La columna C da las imágenes de x_i para distintas particiones. La columna D indica el número de intervalos de cada partición. La columna F indica las alturas de los rectángulos de las sumas inferiores. La columna G indica las alturas de las rectángulos de las sumas superiores.

4.2.1. Perfil 1: Coordinación entre representaciones para expresar el error

Los estudiantes de este perfil fueron capaces, en primer lugar, de expresar verbal y analíticamente de forma correcta la base y la altura de los rectángulos que recubren la superficie, tanto de las sumas superiores como de las inferiores, coordinando representaciones geométricas, verbales y analítico-algebraicas, aunque no sustituyeron el valor de la función en la expresión algebraica. Sin embargo no fueron capaces de utilizarlo para expresar verbalmente las sumas superiores e inferiores. Además, se dieron cuenta de que el extremo del sub-intervalo donde había que calcular el valor de la función para identificar la altura del rectángulo dependía de que la función fuese creciente o decreciente en dicho sub-intervalo.

Por otra parte coordinaron las representaciones geométricas, verbales y analítico-algebraicas para expresar la acumulación de diferencias de las sumas superiores e inferiores y lo aplicaron para estimar el error de las aproximaciones. Un ejemplo de este perfil es la pareja L-M.

Por ejemplo los estudiantes de la pareja L-M, con la vista gráfica y la hoja de cálculo para *n*= *3*, marcaron las sumas superiores e inferiores, señalaron con el puntero del ratón el segundo sub-intervalo y la imagen del extremo inferior, 0.3 (Figura 4.4).

A partir de la observación de la gráfica del *applet* y de la tabla de valores de la hoja de cálculo (Figura 4.4), relacionaron la altura de los rectángulos de las sumas superiores e inferiores con las imágenes de los valores extremos de los sub-intervalos de la partición como muestra el siguiente intercambio:

> [2] M: En las sumas inferiores… la altura es la mínima *f(x)*.
>
> …
>
> [4] M: Y en las superiores la máxima imagen.
>
> …
>
> [7] L: ¿Pero no tendría que tener una relación con *n*?
>
> …
>
> [18] M: Del extremo izquierdo. Ah, tenemos que poner que es la imagen del extremo izquierdo [del sub-intervalo para las sumas inferiores].

A continuación la profesora les preguntó si la altura siempre es la imagen del extremo izquierdo en las sumas inferiores, y si pasaba lo mismo en la tarea anterior, donde se aproximaba el área bajo un cuadrante de circunferencia, y su respuesta mostró que se habían dado cuenta de que el extremo del sub-intervalo que había que tomar dependía de que la función fuese creciente o decreciente, pues respondieron:

> [28] M: Vale, no, porque siempre es creciente.
>
> …
>
> [33] L: Pero entonces la imagen de qué.
>
> …
>
> [35] L: Del primer valor de la partición
>
> [36] M: A ver, las sumas, las sumas, la altura, la altura que es *h*, de la partición i, que no sé cuál es, es igual a la imagen de, la imagen… eh… *1/n* por *i-1*

Y expresaron de forma analítica la altura de un rectángulo del sub-intervalo *i* en el caso de la parábola, sin sustituir el valor de la función, de la siguiente manera:

En las sumas inferiores:

$$H_i = f\left(\frac{1}{n}(i-1)\right)$$

En las sumas superiores:

$$H_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Por tanto, en este caso constamos coordinación entre las representaciones geométricas, verbales y analítico-algebraicas, pues hay conversión entre estas representaciones.

En segundo lugar los estudiantes de este perfil, cuando se les pidió que expresaran la fórmula de las sumas superiores e inferiores, manifiestan una falta de coordinación entre las representaciones geométrica y verbal. Por ejemplo la pareja L-M, para escribir una fórmula para las sumas superiores primero identificó la base de los rectángulos: *"la base es 1/n, ¿no?"*, sin embargo no la utilizó correctamente para expresar verbalmente las sumas superiores, pues consideró que las bases de los rectángulos eran 1/n, 2/n, 3/n, 4/n… (Tabla 4.11):

> [129] M: *1/n* la longitud por *f* de *i* de *1/n* más *2/n* por *f* de *2/n*, más *3/n* por la imagen de *3/n*, más *4/n*…

Esto denota una falta de conversión entre la representación geométrica de los rectángulos de las sumas superiores y la expresión verbal del área de los mismos.

Por otra parte un componente de la pareja, M, expresó que le parecía difícil la tarea pedida *"esto es más complicado ya, porque tienes que sumar todos"* y no sabía cómo expresar *"la suma para todos"*:

> [138] M: Ya, pero no sabemos lo que es *n*, hay que poner las sumas para todos.

También M hizo referencia a la expresión analítica de la parábola como función cuadrática cuando dijo: *"tiene que haber un cuadrado"*. Pero, como antes, esta pareja no llegó a sustituir la expresión analítica de la parábola para obtener el valor de las alturas de los rectángulos. Además tuvo una discusión sobre si había que poner o no el doble del valor de la función. Los diálogos en la pareja muestran dos dificultades: cómo expresar la generalidad, es decir la "suma de todos" y la interpretación de los valores de la tabla de la hoja de cálculo (Tabla 4.11).

Tabla 4.11. Diálogo de la pareja L-M resolviendo la cuestión .V de la tarea 'Parábola'

V. Escribe una fórmula para las sumas superiores, S_i y otra para las sumas inferiores, I_i, relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la partición.	
Interacciones con el *applet*	Comunicaciones orales
Empiezan en *n*=7. Después mueven *n*=1, 8, 2.	[114] M: A ver, el área es igual… a la base por la altura… entonces las sumas inferiores que son más fáciles… no, las superiores que son más fáciles [115] L: La base es *1/n* ¿no?
	…
	[119] M: … Esto es más complicado ya, porque tienes que sumar todos… eso tiene que haber un cuadrado por aquí o algo raro, seguro, lo cual no es muy bueno. Eso es más complicado ya, tiene que ser una sucesión.
	…
	[129] M: *1/n* la longitud por *f* de *i* de *1/n* más *2/n* por *f* de *2/n*, más *3/n* por la imagen de *3/n*, más *4/n*… [130] L: Ya está Mario.

	[131] M: Pero es que te dice de todos. [132] L: Pero es que no vas a llegar hasta el infinito. .. [134] M: *4/n* y esto es así hasta el infinito. Y ahora ¿cómo lo ponemos? [135] L: … vale. Pues lo dejas así. [136] M: Sí pero yo no sé cuánto es *n*. [137] L: De cada… ah… eh. Pero en cada caso será… si n es igual a 4 pues en esa caso la suma. [138] M: Ya, pero no sabemos lo que es *n*, hay que poner las sumas para todos. [139] L: Claro, pues para todos, pues si te pide la suma superior cuando n es igual a 5 pues sustituyes *n* por 5, si *n* es igual a 6, como va a servir para todos, pues pones *n* y ya está. Me explico muy mal, ¿verdad?
	…
Mueven el deslizador: n=9, 2, y lo dejan en 4. Después señalan en la hoja de cálculo las celdas C2 a C5 (imágenes de xi para distintas particiones) y desplazan para ver las columnas D, E, F, G: D indica el número de intervalos de cada partición; F indica las alturas de los rectángulos de las sumas inferiores; G indica las alturas de las rectángulos de las sumas superiores	[150] M: Porque esto, esto no es el doble que esto [se refiere a que la imagen de 2/4 no es el doble de la de 1/4 porque señalan las celdas C2 a C5] [151] A: Claro que no, eso es la mitad. [152] M: Esto sí que es el doble [se refiere al extremo del segundo sub-intervalo respecto del extremo del primero], pero esto no es el doble porque es una parábola. … [158] M: Mira, *f*, altura del rectángulo… … [160] M: … Esto no es el doble. Esto claramente no es el doble. [161] L: Pero tampoco es el doble que esto. Esto no es el doble que esto. [162] M: Pues eso es lo que te digo, que no es el doble. No, no es el doble… Sí, sí que es el doble lo que viene siendo… [163] L: *2/n* y *1/n* ¿No?

Para responder a la cuestión pedida, expresar con una fórmula las sumas superiores, estos estudiantes escribieron un sumatorio que traducía la expresión verbal en la que, como hemos visto, confundían la medida de la base de los rectángulos con el valor de la abscisa del extremo derecho de la base. Además hicieron un tratamiento incorrecto de la suma de productos pues la transformaron en una potencia:

$$S_i = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{3}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{4}{n} f\left(\frac{4}{n}\right) \ldots$$
$$S_i = \left(\frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

Por tanto, aunque inicialmente los estudiantes de este perfil habían identificado los elementos que intervienen en la suma (base y altura de los rectángulos), no fueron capaces de expresar correctamente las sumas inferiores de forman verbal y analítica, pues no tuvieron en cuenta que la base de los rectángulos es constante en función del número de sub-intervalos de la partición. Luego se observa que no hay conversión entre la aproximación geométrica del área de los rectángulos y su expresión verbal, aunque si la hubo entre la verbal (errónea) y la analítico-algebraica en función de *n*, número de sub-intervalos. En términos de Duval estos alumnos tienen dificultad tanto con la *conversión* de representaciones (geométrica a verbal) como en el *tratamiento* de una expresión analítico-algebraica.

En tercer lugar en los estudiantes de este perfil se observa conversión entre la representación geométrica y analítico-algebraica de la acumulación de diferencias, pues supieron interpretar correctamente el significado del área del rectángulo que representa la acumulación de las diferencias de las sumas superiores e inferiores. Por ejemplo la pareja L-M expresó verbalmente: *"n es el número de rectángulos y S_i-I_i es el área del rectángulo"* (Tabla 4.12).

Tabla 4.12. Diálogo de la pareja L-M resolviendo la cuestión I de la tarea 'Parábola: error de la aproximación'

I. Mueve el deslizador y observa cómo varían los rectángulos superiores e inferiores y el rectángulo de la derecha. Trata de identificar alguna relación. ¿Ocurre lo mismo que en el ejercicio anterior respecto a las diferencias S_i-I_i?	
Interacciones con los *applets*	Escriben
Mueven el deslizador (*n*=1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 7, 1, 2).	*n* es el número de rectángulos y S_i-I_i es el área del rectángulo [de acumulación de diferencias]

Los estudiantes de este perfil se dieron cuenta de que la base del rectángulo de acumulación de diferencias variaba en función del número de sub-intervalos de la partición mientras que la altura se mantendría constante. Por ejemplo la pareja L-M expresó: "*La altura es constante y la base… la base en 1 es 5, la base en 10 es 0.5 entonces estamos dividiendo 5 entre 10…5 entre n"* (Tabla 4.13).

Tabla 4.13. Diálogo de la pareja L-M resolviendo la cuestión II. a de la tarea 'Parábola: error de la aproximación'

II. a. Busca una fórmula para el área del rectángulo rojo de la derecha dependiendo del valor de *n*. Para ello necesitas saber la base y la altura del rectángulo	
Interacciones con los *applets*	Comunicaciones orales
Mueven el deslizador desde *n*=10 hasta *n*=21, señalan el último rectángulo de la suma superior (el de la derecha) y el de la acumulación de diferencias.	[173] M: Es como éste lo que pasa que con más rayitas.
…	…
Mueven el deslizador desde 1 hasta 13 y luego desde 13 a 2, 4, 1, 10.	[185] M: La base, esta es la base y ésta es la altura. La altura es constante y la base… la base en 1 es 5, la base en 10 es 0.5 entonces estamos dividiendo 5 entre 10… 5 entre n. Porque 10… 5 entre 10 es 0.5.

Por último obtuvo la fórmula para expresar las diferencias entre las sumas superiores e inferiores en el intervalo [0, 5]: $S_i\text{-}I_i=25 \cdot 5/n$ (Tabla 4.14).

Tabla 4.14. Diálogo de la pareja L-M resolviendo cuestión II. b de la tarea 'Parábola: error de la aproximación'

II. b. Obtén una fórmula para las diferencias entre las sumas superiores e inferiores dependiendo del valor de *n*.	
Interacciones con los *applets*	Comunicaciones orales
Deslizador *n*=9, 12, 11, 9	[195] M: La diferencia es el área de este rectángulo. Si te fijas, si tu coges todo esto [se refieren a la diferencia de las suma superior e inferior en cada su-intervalo] y lo juntas te sale esto que es … [196] L: Ya, pero eso es lo que tienes aquí. … [199] M: Claro ve, la diferencia es el área del rectángulo. ¿Cómo será la diferencia [se refiere a $S_i\text{-}I_i$]? Pues como el área del rectángulo.
Escriben: $S_i\text{-}I_i=25 \cdot 5/n$	

Y aplicaron esta fórmula y un resultado que obtuvieron en una tarea anterior (el error máximo que se comete es la mitad de la diferencia S_i-I_i,) para calcular el error máximo cometido en la aproximación del área y para encontrar un procedimiento para determinar un valor de *n* que permita calcular el área con un error menor que un número tan pequeño como se quiera (tarea 'Parábola: error de la aproximación', cuestiones II. c, II. d y II. e), sin necesidad de apoyarse en el recurso tecnológico, lo que es una evidencia de una *anticipación local*.

La trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de este perfil se muestra en la Figura 4.5.

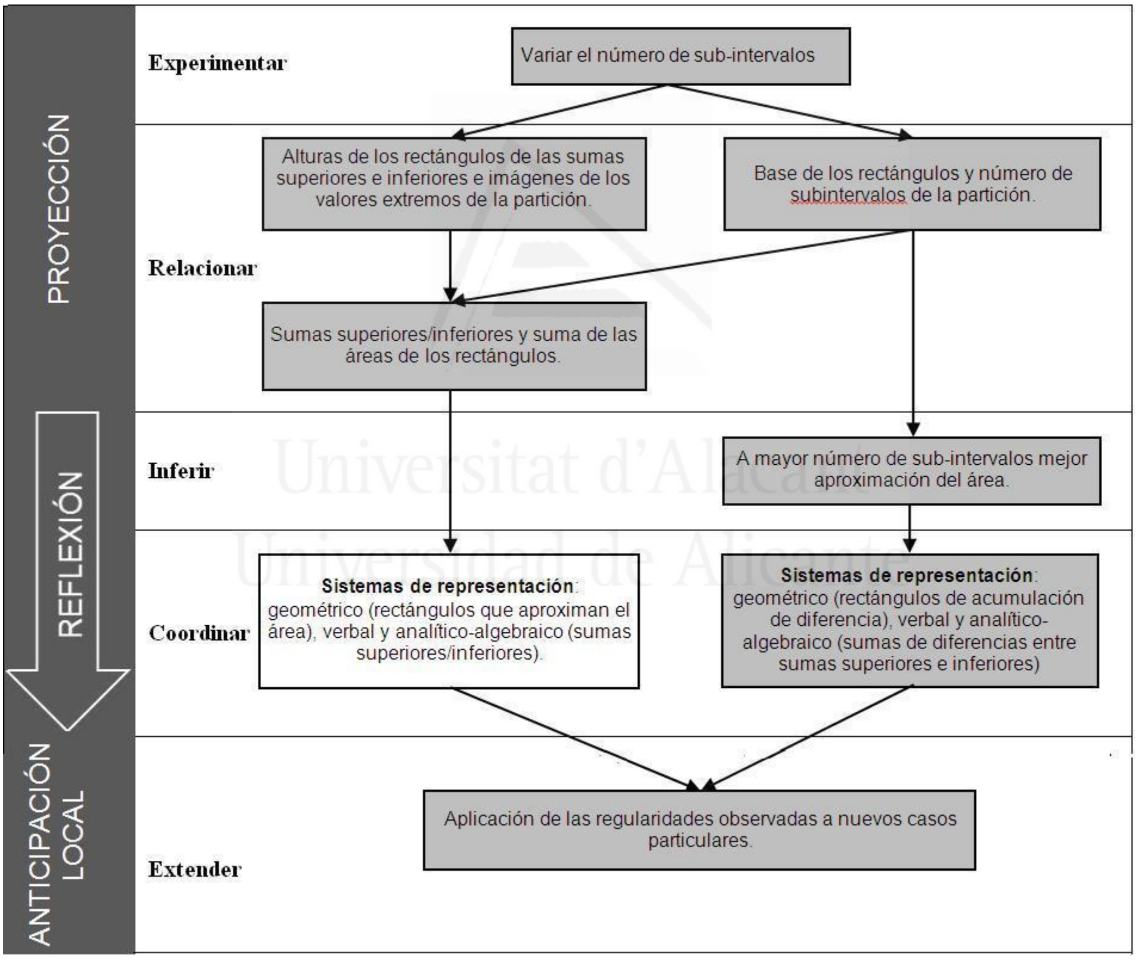


Figura 4.5. Trayectoria de aprendizaje de los estudiantes del perfil 1 para el significado de la expresión de las sumas de Darboux

4.2.2. Perfil 2: Coordinación entre representaciones para expresar las sumas superiores e inferiores

Los estudiantes de este perfil fueron capaces de expresar verbal y analíticamente de forma correcta las sumas superiores y las inferiores, pues coordinaron las representaciones geométricas, verbales y analítico-algebraicas. Por otra parte, cuando se les pidió expresar mediante una fórmula la acumulación de diferencias aplicaron la fórmula de las sumas superiores e inferiores, en lugar de una más sencilla sugerida por la representación del *applet*. Un ejemplo de este perfil es la pareja K-MA.

En primer lugar, para expresar las sumas superiores e inferiores la pareja K-MA trató de identificar la base y altura de los rectángulos. Dieron a n el valor 10 y el *applet* mostraba la parábola con los puntos máximos en cada sub-intervalo y la hoja de cálculo con los valores de los extremos de los sub-intervalos de las particiones para n=1, 2, 3 y 4; a continuación activó las sumas inferiores y superiores y fue señalando con el cursor diferentes segmentos como el de extremos los puntos: (0.2, 0) y (0.2, f(0.2)) (Figura 4.6).

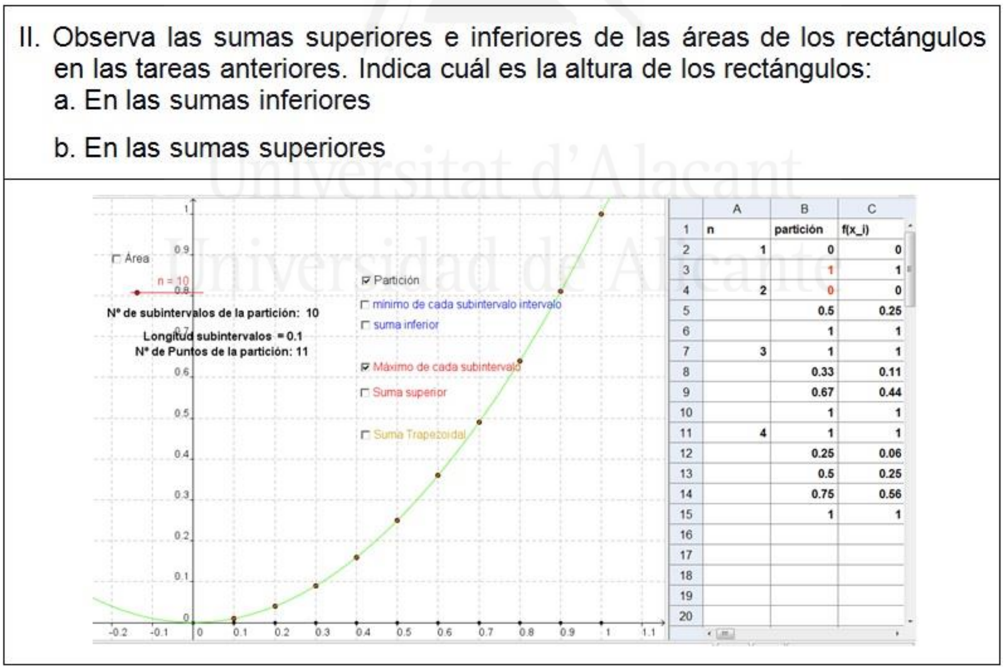


Figura 4.6. Imagen de la ventana gráfica y de la hoja de cálculo de la resolución de la pareja K-MA de la Tarea 'Parábola'

Y aunque en la vista gráfica no tenían los rectángulos de las sumas superiores e inferiores, identificaron sin dificultad los puntos de los extremos de los sub-intervalos que debían tomar para obtener la altura de los rectángulos, según se tratara de las sumas inferiores o superiores como muestra el siguiente diálogo entre ellos:

> [2] K: La altura, la altura es… *f* de…. pues para *a1 f* de *a1*, para *a2*, *f* de *a2*.
>
> [3] MA: Estamos con las inferiores siempre.
>
> [4] K: No, en las inferiores, justo, en las inferiores es para a_n la altura es… imagen de a_n, para *a6* la altura es imagen de *a6*, pero para *a7*, o sea para las exteriores, la altura para la exterior del segmento *a6* es la imagen de *a7*. Así queda ya…
>
> …
>
> [15] K: Aquí he puesto *f* de… porque si quieres calcular la misma pero en la exterior, no es la imagen de esto la altura, es la imagen de la siguiente.
>
> …
>
> [17] K: Más 1 ¿o no?, si pero más 1 no de más uno de eso, sino más 1 de... el más 1 de abajo, quiero decir, no sé si has entendido, … [quiere decir a_{n+1}]
>
> …
>
> [24] MA: Y tienes este rectángulo, el punto es $a_n + 1/n$

Las dos últimas intervenciones del diálogo anterior muestran que estos estudiantes tenían clara la idea de cuál era la altura de los rectángulos en las sumas superiores e inferiores, relacionándolo con los valores de los extremos de los intervalos de la partición y la ecuación de la función, lo que muestra coordinación entre representaciones geométricas y verbales, sin embargo no supieron luego traducirlo en lenguaje analítico-algebraico (falta de coordinación de representación verbal con analítico-algebraica) (Figura 4.7). Por tanto fueron capaces de realizar la *conversión* del lenguaje geométrico al verbal pero no del verbal al analítico-algebraico, lo que muestra una falta de dominio del lenguaje algebraico.

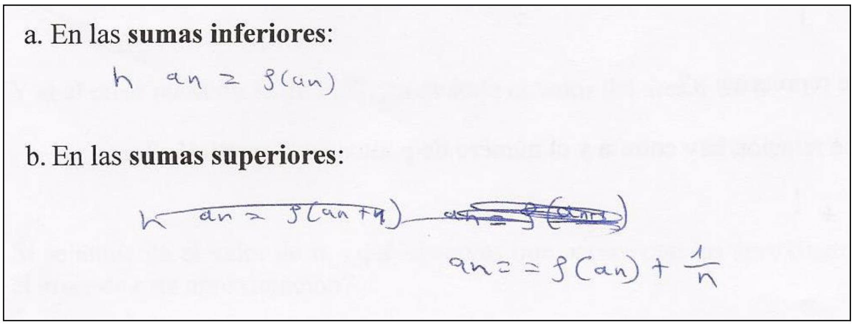
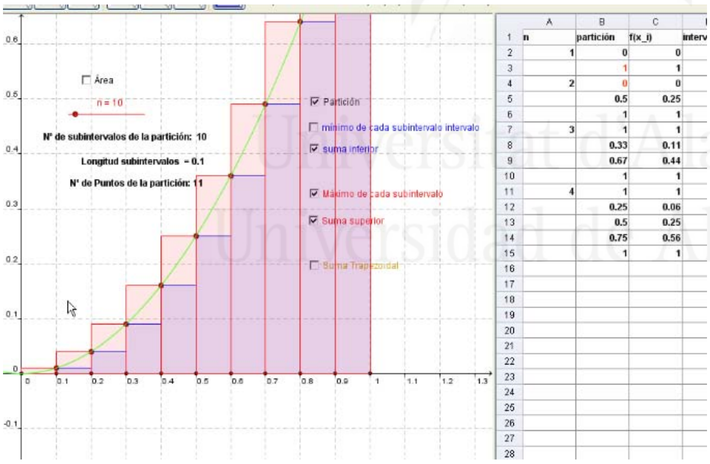


Figura 4.7. Respuesta de la pareja K-MA a la cuestión II de la tarea 'Parábola'

En segundo lugar, en su primer intento de escribir la fórmula para las sumas inferiores con *n* intervalos confundieron la medida de la base del rectángulo, *1/n*, con el valor del extremo del intervalo, a_i. La intervención de la profesora dando sugerencias e indicaciones (*prompts*) les hizo reflexionar sobre el significado del valor de a_i y se dieron cuenta de que "*la base* [de los rectángulos] *siempre es 1/n*" (Tabla 4.15), corrigiendo el error cometido en el apartado anterior.

Para tratar de escribir la fórmula que expresa las sumas inferiores se apoyaron en la imagen que muestra el *applet* correspondiente al valor n=10 con los rectángulos de las sumas superiores e inferiores e identificaron los valores de la base y la altura de los rectángulos (Tabla 4.15).

Tabla 4.15. Diálogos de la pareja K-MA y la profesora al resolver la cuestión II. c de la tarea 'Parábola'

<table>
<tr><td colspan="2">II. c. Escribe una fórmula para las sumas superiores, S_i y otra para las sumas inferiores, I_i, relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la partición.</td></tr>
<tr><th>Interacciones con los applets</th><th>Comunicaciones orales</th></tr>
<tr><td>Tienen n=10, y marcadas sumas inferiores, máximo de cada sub-intervalo y sumas superiores.

</td><td>[46] P: Sí, tienes que sumar las áreas de los rectángulos.
[47] K: Sí, por eso digo …
[48] P: ¿Y cuál es el área de cada rectángulo?
[49] K: a_n.
[50] P: a_n es un punto.
…
[53] MA: La base siempre es 1/n.</td></tr>
<tr><td>Quitan las marcas de máximo de cada sub-intervalo y suma superior y marcan mínimo de cada sub-intervalo.</td><td>[62] K: Cogemos a_3, la altura es $f(a_3)$. Sería 1/n por $f(a_n)$.
…
[94] MA:[el último de la suma inferior] tiene la altura del penúltimo [se refiere a a_{n-1}]</td></tr>
</table>

Necesitaron pedir ayuda a la profesora para escribir correctamente las fórmulas. La profesora les sugirió que lo hicieran con sumatorios y les explicó los distintos elementos que intervienen y fueron capaces de escribir las fórmulas generales correctamente:

“Inferiores:

$$\frac{1}{n}f(a_0)+\frac{1}{n}f(a_1)+\frac{1}{n}f(a_2)+\cdots+\frac{1}{n}f(a_{n-1})$$

$$S_{\acute{A}reas}=\frac{1}{n}\big(f(a_0)+f(a_1)+\cdots+f(a_{n-1})\big)$$

$$Inferiores=\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1}{n}f(a_i)\,; \qquad Superiores=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{n}f(a_i)$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \qquad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Se ha producido pues una coordinación de la representación geométrica en un caso particular (*n*=10) y la analítico-algebraica para el caso general (conversión entre representaciones). Estos estudiantes fueron capaces tanto de hacer correctamente la conversión de la representación verbal a la analítico-algebraica como el tratamiento de la misma, contando con la ayuda de la profesora.

En tercer lugar, cuando se les pidió expresar mediante una fórmula la acumulación de diferencias hicieron una inferencia:

> *“Cuando variamos n (al aumentarlo) aumento el número de sub*-intervalos en *la gráfica y el número de rectángulos. En el rectángulo rojo, al variar n divide el rectángulo en más rectángulos y disminuye la base”*

Y además para el caso de *n*=5, sin necesidad de realizar ninguna acción escribieron:

“altura=f(5)=25. No, h=cte”
“base 5/n”

Por tanto se constata una coordinación entre las representaciones geométricas y analítico-algebraicas.

Pero expresaron el área del rectángulo de la acumulación de diferencias no como producto de la base por la altura, sino utilizando las fórmulas de las sumas superiores e inferiores, en lugar del producto de la base por la altura de este rectángulo representado en la vista gráfica del *applet* y que era más sencilla. Lo que les llevó mucho tiempo (14 minutos y 17 segundos):

$$S_i - I_i = -\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{5}{n}\left(f\left(\frac{s_i}{n}\right)\right) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{5}{n}\left(f\left(\frac{s_i}{n}\right)\right)$$

Por tanto no hay evidencias de coordinación entre la relación entre las diferencias entre las sumas superiores e inferiores y el área del rectángulo de la acumulación de diferencias.

La trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de este perfil se muestra en la Figura 4.8.

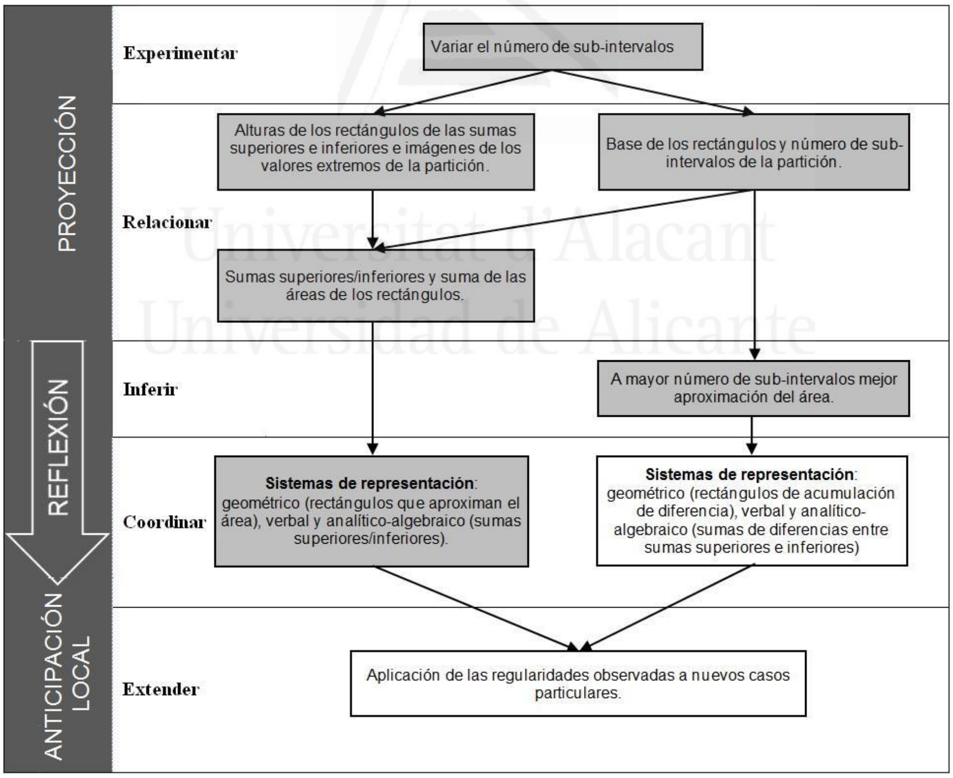


Figura 4.8. Trayectoria de aprendizaje de los estudiantes del perfil 2 para el significado de la expresión de las sumas de Darboux

4.2.3. Perfil 3: Sin evidencias de utilización del lenguaje analítico-algebraico

Los estudiantes de este perfil no mostraron evidencias de expresar las sumas de Darboux en ningún sistema de representación, pues no manifiestan ninguna coordinación entre representaciones. Los estudiantes no fueron capaces de expresar en lenguaje analítico-algebraico las alturas de los rectángulos, relacionándolos con los valores de los extremos de los intervalos de la partición, y no llegaron a expresar en lenguaje natural las sumas inferiores y superiores. Un ejemplo de este perfil es la pareja A-J.

En primer lugar los estudiantes de este perfil experimentaron dando valores a *n*, número de sub-intervalos, y constataron que *"la altura es la imagen del punto"*, pero no supieron relacionar la altura del rectángulo en un sub-intervalo distinto del primero o del último (Tabla 4.16). Respondieron de forma genérica, sin concretar de qué punto se trataba:

a. "La imagen de los puntos"
b. "La altura es la imagen del siguiente punto"

Tabla 4.16. Diálogo de la pareja A-J resolviendo la cuestión II de la tarea 'Parábola'

II. Observa las sumas superiores e inferiores de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos: a. En las sumas inferiores b. En las sumas superiores	
Interacciones con los *applets*	Comunicaciones orales
n=2. Tienen marcadas sumas inferiores. Quitan sumas inferiores y ponen sumas superiores. Varían *n*, aumentando y disminuyendo.	[62] A: La imagen… la altura es la imagen de los puntos. Y en las sumas superiores… Cambia a sumas superiores. [63] J: El último cuadrado es altura 1 siempre.
n=3	[64] A: Dale a *n*=3. [65] A: La altura es la misma.
Quitan suma superior y ponen suma inferior. Aumentan *n* y luego disminuyen.	[66] J: No, porque en la suma inferior la altura del último cuadrado es siempre cero, la altura del primer cuadrado aquí siempre es cero y en la superior siempre es 1, la final.

Quitan suma inferior y ponen suma superior.	[67] A: Pero la altura aquí del punto… La altura es la imagen del punto. [68] J: Del punto según la fórmula de x^2 ¿no? [69] A: La altura es la imagen del siguiente punto. La altura de cero es la imagen de…

En segundo lugar, cuando se les pidió una fórmula de las sumas superiores e inferiores respondieron verbalmente indicando las bases y las alturas de los rectángulos, pero no supieron expresarlo algebraicamente:

> *"Sumas inferiores: la base del sub-intervalo será la misma para un* n *determinado. La altura será siempre la imagen del punto de la izquierda.*
> *Sumas superiores: La base del sub-intervalo será la misma para un* n *determinado. La altura será la imagen del punto de la derecha."*

Por tanto los estudiantes de este perfil muestran solo evidencias de coordinación de representación geométrica y verbal para identificar la base y la altura de cada uno de los rectángulos de las sumas superiores e inferiores. La trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de este perfil se muestra en la Figura 4.9.

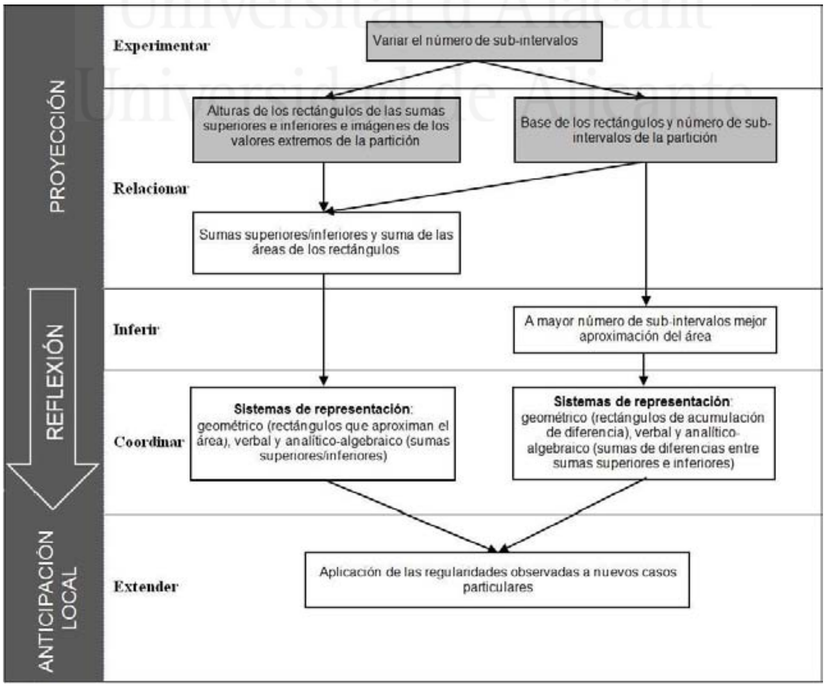


Figura 4.9. Trayectoria de aprendizaje de los estudiantes del perfil 2 para el significado de la expresión de las sumas de Darboux

4.3. PERFILES EN RELACIÓN CON LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA Y DE FUNCIÓN INTEGRAL

Después de aproximar el área de una superficie, de estimar el error de aproximación y de expresar en distintos sistemas de representación tanto las sumas superiores e inferiores como el error de aproximación, en el experimento de enseñanza se definió la integral definida y la función integral. Para ello se trabajó con los estudiantes las semejanzas y diferencias entre el cálculo del área bajo una curva en un intervalo fijo [a,b] y la integral definida de la función representada por esta curva en dicho intervalo; asimismo se definió la función integral utilizando distintos sistemas de representación.

En relación con la construcción del concepto de integral definida y de función integral hemos identificado dos perfiles de estudiantes:

Perfil 1: Los estudiantes distinguen entre el valor del área y la integral definida más allá de los casos particulares, relacionan una función (constante, lineal o afín) y la función integral y expresan esta relación gráfica o analíticamente (momento de reflexión).

Perfil 2: Los estudiantes hacen sólo algunas constataciones sobre la relación entre el área y la integral apoyadas en los casos particulares y son capaces de obtener la fórmula del área bajo una recta, pero no de relacionar una función y su función integral (momento de proyección).

4.3.1. Perfil 1. Relación entre área e integral definida y una primera aproximación al concepto de función integral

Los estudiantes del primer perfil son capaces de relacionar el valor del área bajo una curva en un intervalo y la integral definida de la función representada por la curva en dicho intervalo y una función y su función integral. Más específicamente estos estudiantes son capaces de:

- desvincular la idea del cálculo del área bajo una curva en un intervalo [a, b], siendo *a* y *b* constantes, de la idea de integral definida de la función representada por dicha curva en dicho intervalo, y de expresar la relación entre los valores del área bajo una curva en un intervalo y la integral definida de la función representada por la curva en dicho intervalo de forma verbal y de forma analítica;

- expresar verbal y analíticamente la relación entre los valores del área bajo la curva en un intervalo [a, b] y el valor de la integral definida de la función representada por la curva entre *a* y *b*;
- relacionar una función (constante o afín) definida en un intervalo [a, t], siendo *a* constante y *t* variable, $t \geq a$ y su función integral *F(t)* en casos particulares;
- representar gráficamente la función integral de una función constante y afín y, en algunos casos, de obtener su expresión analítica.

Las parejas L-M y K-MA son ejemplos de este perfil.

En primer lugar los estudiantes de este perfil desvinculan la idea del cálculo del área de regiones bajo curvas en un intervalo [a, b] delimitadas por funciones no siempre positivas, y el valor de las integrales definidas de las funciones representadas por estas curvas en esos intervalos.

El hecho de que la pareja L-M, sin necesidad de experimentar con el *applet*, se diera cuenta de que cuando la superficie está por debajo del eje de abscisas, "*el área ha de ser positiva y la integral negativa", y de que la integral puede ser cero aunque delimite una región de área no nula, si el área de la parte positiva es igual al área de la parte negativa*", son evidencias de que desvinculan la idea del cálculo del área de superficies de la integral definida de la función representada por dicha curva y de que saben expresar esta relación de forma verbal.

En segundo lugar los estudiantes de este perfil son capaces de expresar verbal y analíticamente la relación entre los valores del área bajo la curva en un intervalo [a, b] y el valor de la integral definida de la función representada por la curva entre *a* y *b*. Una evidencia de ello es que respondieron sin dificultad a las cuestiones de las tareas 'Área e integral' cuestión I (Figura 4.10) y cuestión II donde las superficies están por debajo del eje de abscisas.

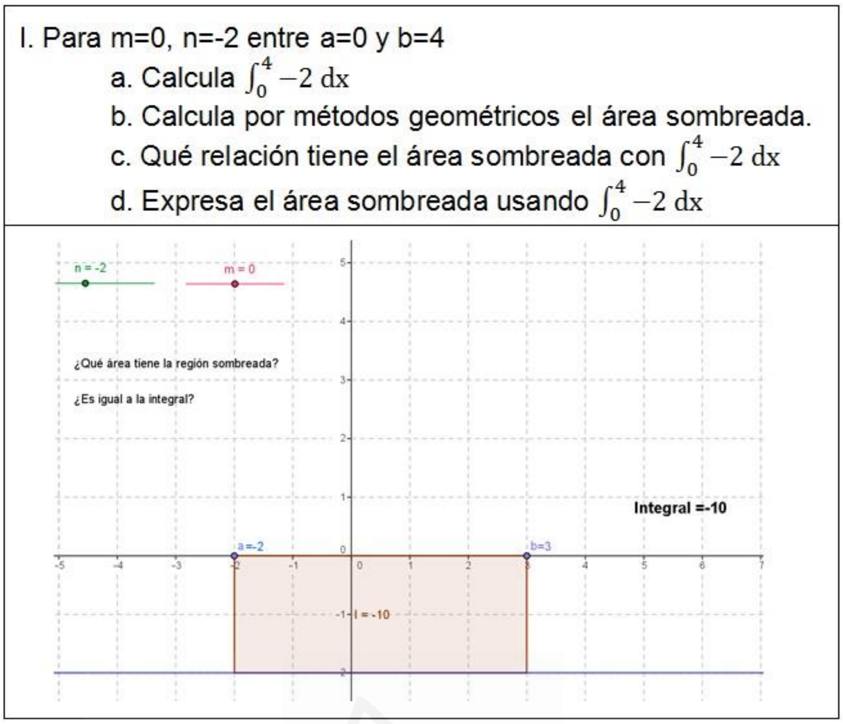


Figura 4.10. Vista gráfica y cuestiones iniciales de la Tarea ‘Área e integral’

Estos estudiantes dijeron que la relación del área sombreada con $\int_0^4 -2\,dx$ *“es la misma, solo cambia el signo”* y expresaron el área sombreada de la siguiente manera (Figura 4.11):

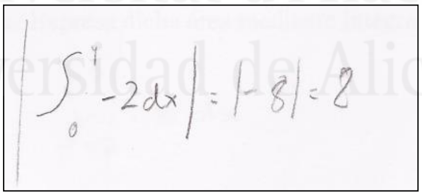


Figura 4.11. Respuesta escrita de la pareja L-M a la cuestión I.a de la tarea ‘Área e integral’

Llegando a la conclusión de que en estos casos en que la función es constante *“El área es el valor absoluto de la integral”*.

En cuanto a los casos en que la función es lineal (Tarea ’’Área e integral, cuestión III, Figura 4.12), tardaron en responder un poco más que en los casos anteriores, pero llegaron a descomponer la superficie en regiones que estuviesen por encima o por debajo del eje de abscisas.

III. ¿Y si la región está situada en parte por encima del eje X y en parte por debajo, es decir la integral es negativa en un trozo y positiva en otro?

Prueba con **m**=1, **n**=0, entre **a**=-2 y **b**=2

a. ¿Cuál es el valor de $\int_{-2}^{2} \mathrm{x}\,\mathrm{dx}$?

b. ¿Y el valor del área encerrada entre las rectas x=-2, x=2, el eje OX y la recta y=x?

c. Calcula $\int_{-2}^{3} \mathrm{x}\,\mathrm{dx}$

d. Calcula el área de la región determinada por las rectas x=-2, x=2, el eje OX y la recta y=x

e. Expresa dicha área mediante integrales y valores absolutos.

Figura 4.12. Cuestión III de la tarea 'Área e integral'

La pareja L-M, sin necesidad de manipular el *applet*, escribió las respuestas a las tres primeras cuestiones (cuestión III de la tarea 'Área e integral') (Figura 4.13).

a. ¿Cuál es el valor de $\int_{-2}^{2} x\,dx$ $= 0$

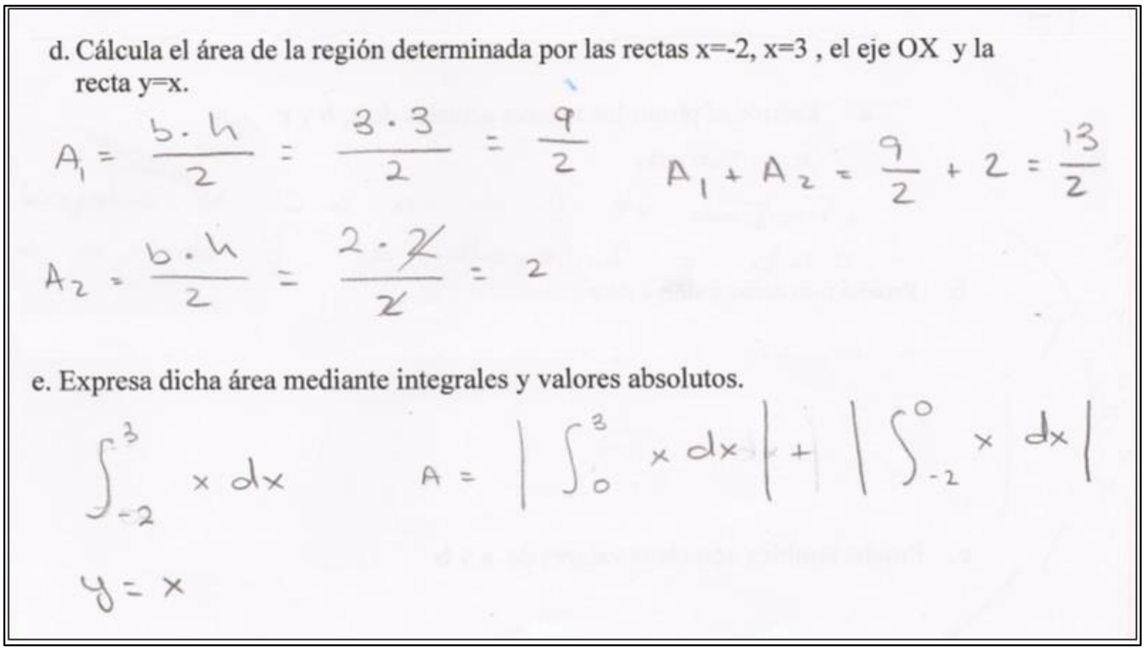
b. Y el valor del área encerrada entre las rectas x=-2, x=2 , el eje OX y la recta y=x

$$A = \frac{b \cdot h}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = 2 \cdot 2 = 4$$

c. Calcula $\int_{-2}^{3} x\,dx$ $= \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$

Figura 4.13. Respuesta escrita de la pareja L-M a las cuestiones III. a, b y c de la tarea 'Área e integral'

Después cambiaron el valor de los parámetros y respondieron al resto de cuestiones calculando las áreas de los triángulos (Figura 4.14).



d. Cálcula el área de la región determinada por las rectas x=-2, x=3 , el eje OX y la recta y=x.

$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} \qquad A_1 + A_2 = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$

$$A_2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 2$$

e. Expresa dicha área mediante integrales y valores absolutos.

$$\int_{-2}^{3} x \, dx \qquad A = \left| \int_0^3 x \, dx \right| + \left| \int_{-2}^{0} x \, dx \right|$$

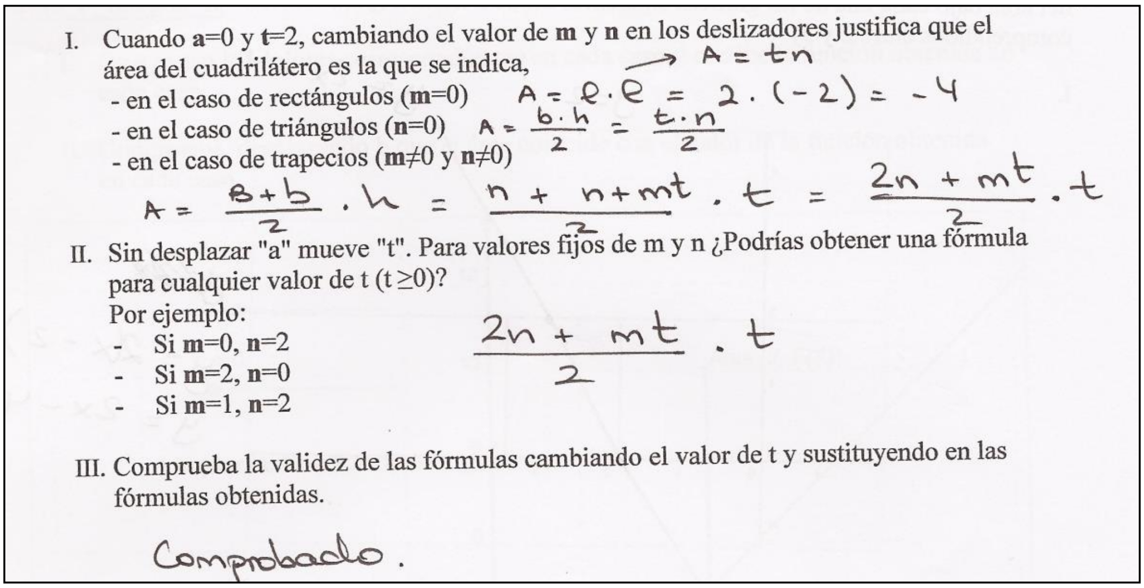
$$y = x$$

Figura 4.14. Respuesta escrita de la pareja L-M a las cuestiones III. d y e de la tarea 'Área e integral'

Estas afirmaciones ponen de manifiesto la coordinación de la expresión de la relación entre el área bajo una curva y la integral definida en lenguaje verbal y analítico.

Estas evidencias muestran que esta pareja es capaz de desvincular la idea del cálculo del área bajo una curva en un intervalo de la idea de integral definida de la función representada por dicha curva en dicho intervalo, y de expresar la relación entre los valores del área bajo una curva en un intervalo y la integral definida de la función representada por la curva en dicho intervalo de forma verbal y de forma analítica.

En tercer lugar los estudiantes de este perfil son capaces de relacionar una función (constante o afín) definida en un intervalo [a, t], siendo a constante y t variable, $t \geq a$ y la función $F(t)$ que expresa el área bajo una recta en el intervalo, cuando la superficie está por encima del eje de abscisas.



I. Cuando **a**=0 y **t**=2, cambiando el valor de **m** y **n** en los deslizadores justifica que el área del cuadrilátero es la que se indica, → $A = tn$

- en el caso de rectángulos (**m**=0) $A = l \cdot l = 2 \cdot (-2) = -4$
- en el caso de triángulos (**n**=0) $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{t \cdot n}{2}$
- en el caso de trapecios (**m**≠0 y **n**≠0)

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{n + n+mt}{2} \cdot t = \frac{2n+mt}{2} \cdot t$$

II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?

Por ejemplo:

- Si **m**=0, **n**=2
- Si **m**=2, **n**=0
- Si **m**=1, **n**=2

$$\frac{2n + mt}{2} \cdot t$$

III. Comprueba la validez de las fórmulas cambiando el valor de t y sustituyendo en las fórmulas obtenidas.

Comprobado.

Figura 4.15. Respuestas de L-M a las cuestiones I, II y III, de la tarea ‘Función Integral I’

La forma en que la pareja L-M expresó el área de los cuadriláteros (Tarea 11.I, Figura 4.15), es una evidencia de que sabían establecer una relación funcional entre el extremo *t* variable de un intervalo y el área bajo la recta de ecuación $f(x) = mx + n$ en el intervalo [0, t] y expresarla analíticamente en función de la variable *t*, y de los parámetros *m* y *n*, pendiente y ordenada en el origen de una recta respectivamente. Para encontrar estas fórmulas estos estudiantes no necesitaron apoyarse en casos particulares ni en el *applet*, por tanto no necesitaron experimentar, habiendo superado la *fase de proyección*. Este comportamiento, donde los estudiantes buscan y establecen una relación funcional entre el extremo *t* variable de un intervalo [0, t] y el valor del área bajo una recta en este intervalo, podemos considerarlo como una primera aproximación al concepto de función integral.

Sin embargo estos estudiantes no fueron capaces de expresar esta relación cuando se cambia el valor del extremo *a* del intervalo (Tarea ‘Función integral I’, cuestión IV) y la superficie es un trapecio, porque no supieron identificar su base (vertical en la representación geométrica), que confundieron con su altura *t-a* (horizontal en la representación geométrica) y escribieron una fórmula que no era correcta (Figura 4.16).

$$\frac{2n + m(t-a)}{2} (t-a)$$

Figura 4.16. Respuesta escrita de la pareja L-M a la cuestión IV de la tarea Función Integral I

En cuarto lugar los estudiantes de este perfil fueron capaces de representar gráficamente o analíticamente la función integral de una función constante y afín.

Una evidencia de representar gráficamente la función integral la encontramos en la pareja L-M y una evidencia de representarla analíticamente en la pareja K-MA.

La pareja L-M, cuando se le pidió que dibujara la gráfica de la función que dé el valor del área bajo una recta representada gráficamente (función constante) en el intervalo [2, 5], comenzó apoyándose en un resultado obtenido anteriormente (el área bajo una recta de ecuación $f(x) = mx + n$ en el intervalo [0, t] es *(2n+mt)t/2*), sustituyendo los parámetros *n* y *m* por sus valores (*n*=2, *m*=0), cambiando *t* por *x*; así obtuvieron *f(x) = 2x*, pero comprobaron dando valores que la expresión no era correcta y tantearon cuál debía ser la expresión analítica, como muestra el siguiente diálogo:

[255] L: 4-2, sería x-2, 2 por x-2

[256] M: ¿Por qué es menos?

[257] L: Pero es que si la *x* fuera 4, el área de esto sería 4-2, 2, por 2 [se están refiriendo a la base, 4-2, por altura, 2], 4.

[258] M: Ah, es que pone desde 2, entonces si pone desde 2, empezaría aquí.

[259] L: x-2.

[260] M: Claro, menos 2. Pero por menos 2 detrás, 2 por -2.

[261] L: ¿Pero no es 2 por x-2? Es que no es lo mismo 2x-2 que 2 por x-2.

Y siguieron discutiendo cuál era la forma correcta. Al final hicieron la comprobación a partir del área, viendo el valor del área según los valores de *x*:

[274] M: Entonces llegaría aquí. En 2 sería cero, en 3 habría subido al 2 ¿no? En 3 habría subido hasta aquí y sería 2 por 1.

[275] L. ¿La tengo que dibujar?

[276] M: Sí, tiene que pasar de ahí y tiene que llegar hasta ahí.

Luego, volviendo a hacer referencia a la representación gráfica y a los puntos que habían obtenido, llegaron a representar gráfica y analíticamente la función pedida (Figura 4.17).

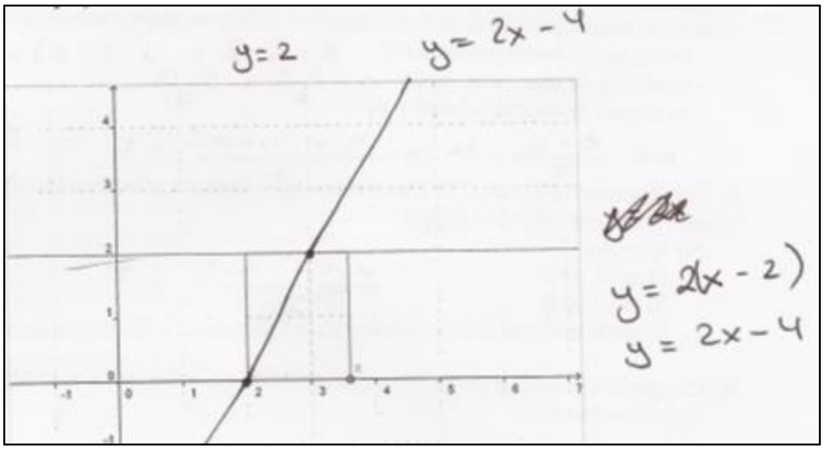


Figura 4.17. Respuesta escrita de la pareja L-M a la tarea 'Función Integral II' (función constante)

Estos estudiantes manejaron en este caso distintas representaciones de la función integral: analítica (como conjetura y refinamiento de la misma), tabular (dando valores para comprobar la conjetura) y gráfica (como respuesta a la cuestión planteada), lo que les ayudó a dar la respuesta correcta. Por tanto, cuando los estudiantes establecen la relación entre la función integral y el concepto de integral definida, hay evidencias de coordinación de distintas formas de representación de una función.

Pero no hemos encontrado evidencias de que infieran que siempre la función integral de una función constante es una función lineal o afín, dependiendo de que el extremo *a* del intervalo [a, x] sea 0 o distinto de 0, lo que habría sido una segunda manifestación de la construcción del concepto de función integral.

Sin embargo, en el caso en que se pedía expresar el área bajo una recta que representa una función afín $f(x) = x + 2$ en el intervalo [2, x], la pareja L-M afirmó que la función que da el valor del área bajo una recta representada gráficamente (correspondiente a una función afín) *"tiene que dar una parábola [...] porque de grado 1 tiene que pasar a grado 2"*. Esta afirmación, que luego comprobaron dando valores pero sin hacer referencia al crecimiento de la función o a puntos singulares como el vértice, es una evidencia de una coordinación entre parejas de funciones, que manifiesta como estos estudiantes van construyendo progresivamente el concepto de función integral. Esto se muestra en el siguiente diálogo donde un miembro de la pareja, M, lleva la iniciativa y el otro, L, le cuestiona:

[322] M: A ver, tiene que dar una parábola.

[323] L: ¿Por qué?

[324] M: Porque de grado 1 tiene que pasar a grado 2.

[325] L: Vale, entonces.

[326] M: Pero vamos a hacerlo, a ver, aquí es cero.

[327] L: ¿Que aquí qué?

[328] M: En ese valor ¿cuánto vale el área?

[329] L: ¿En 2? No entiendo lo que me estás diciendo. A ver, si x=3, el área de esto es 9.

Siguieron dando valores y dibujaron la parábola, aproximadamente, y con errores en el gráfico (Figura 4.18), pero no supieron expresar la ecuación de la parábola.

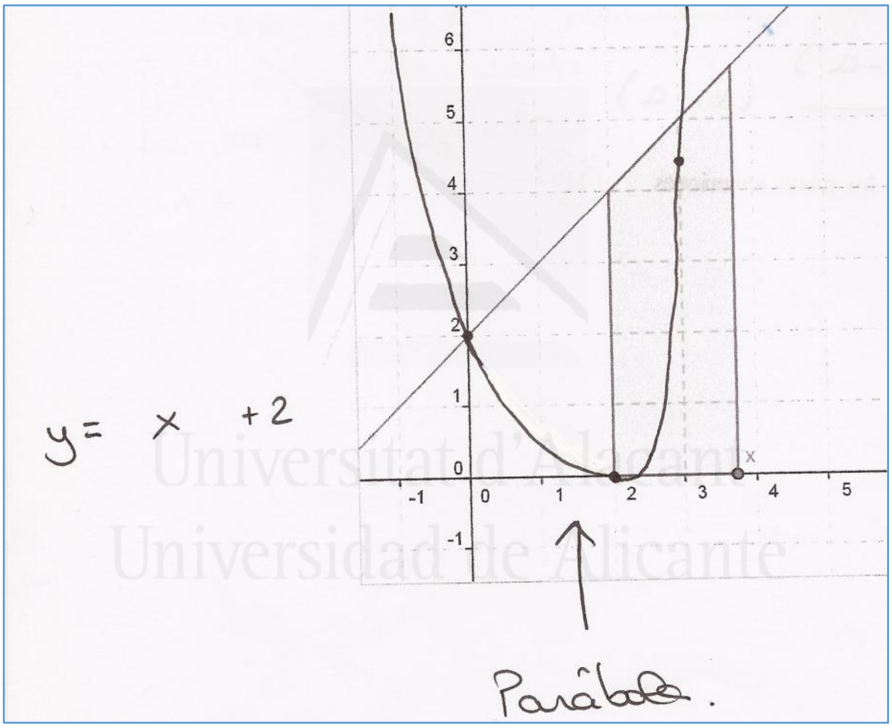


Figura 4.18. Respuesta escrita de la pareja L-M a la tarea ‘Función Integral II’ (función afín)

Estos estudiantes han manejado en este apartado dos tipos de representaciones de la función integral: tabular (dando valores para comprobar la conjetura) y gráfica (representando la parábola que pasa por los puntos), pero no la analítica. Esto podría explicarse porque no se apoyaron en el resultado obtenido en el bloque II de esta tarea, como hizo en el caso de la función constante.

En cambio otra pareja de este perfil K-MA, sí se apoyó en el resultado obtenido en la tarea anterior (figura 4.16) y dio la solución mediante la expresión analítica de la parábola, sin hacer la representación gráfica (Figura 4.19).

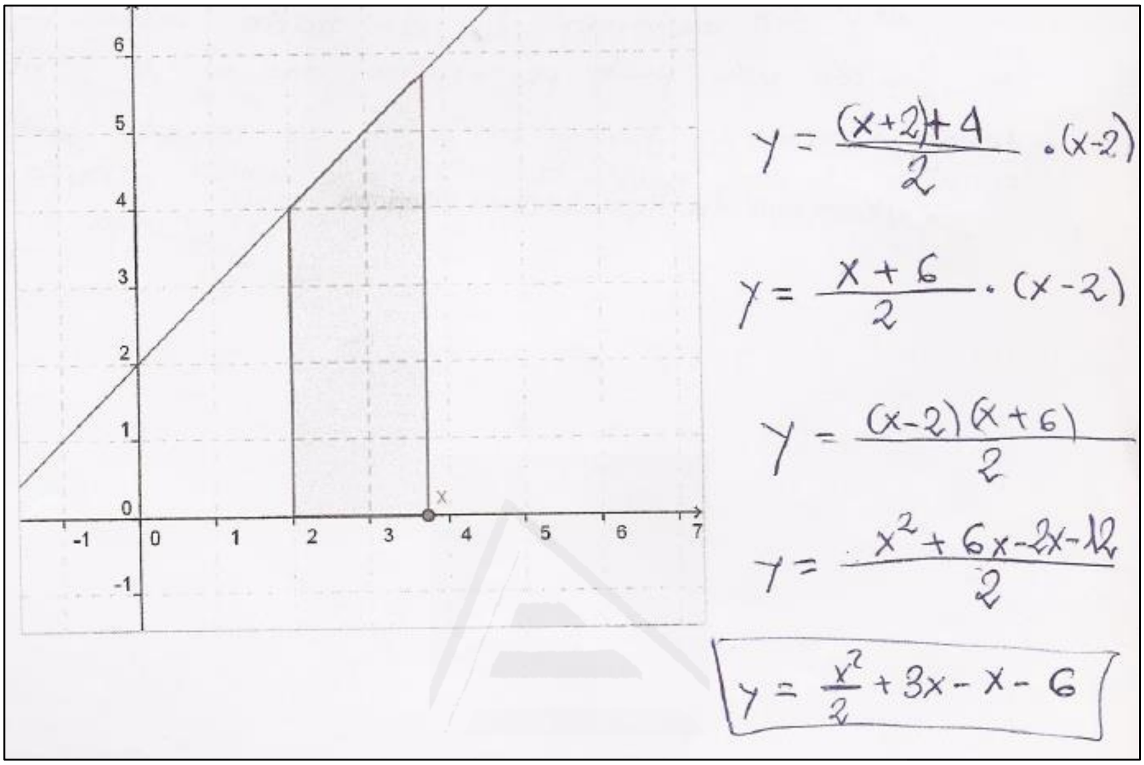


Figura 4.19. Respuesta escrita de la pareja K-MA a la tarea 'Función Integral II' (función afín)

Podemos decir que los estudiantes de este perfil, a medida que han ido resolviendo las tareas han ido construyendo progresivamente el concepto de función integral y llegaron a ser capaces de relacionar una función *f(x)* (constante o afín) definida en un intervalo [a, x], siendo *a* constante y *x* variable, $x \geq a \geq 0$ y su función integral *F(x)* para valores positivos de la función. Un indicador de esta construcción es que los estudiantes establecen relaciones entre sistemas de representación: analítico, gráfico y tabular. Algunos estudiantes de este perfil fueron capaces de representar gráficamente la función integral de una función afín y otros de obtener su expresión analítica.

La trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de este perfil se muestra en la Figura 4.20.

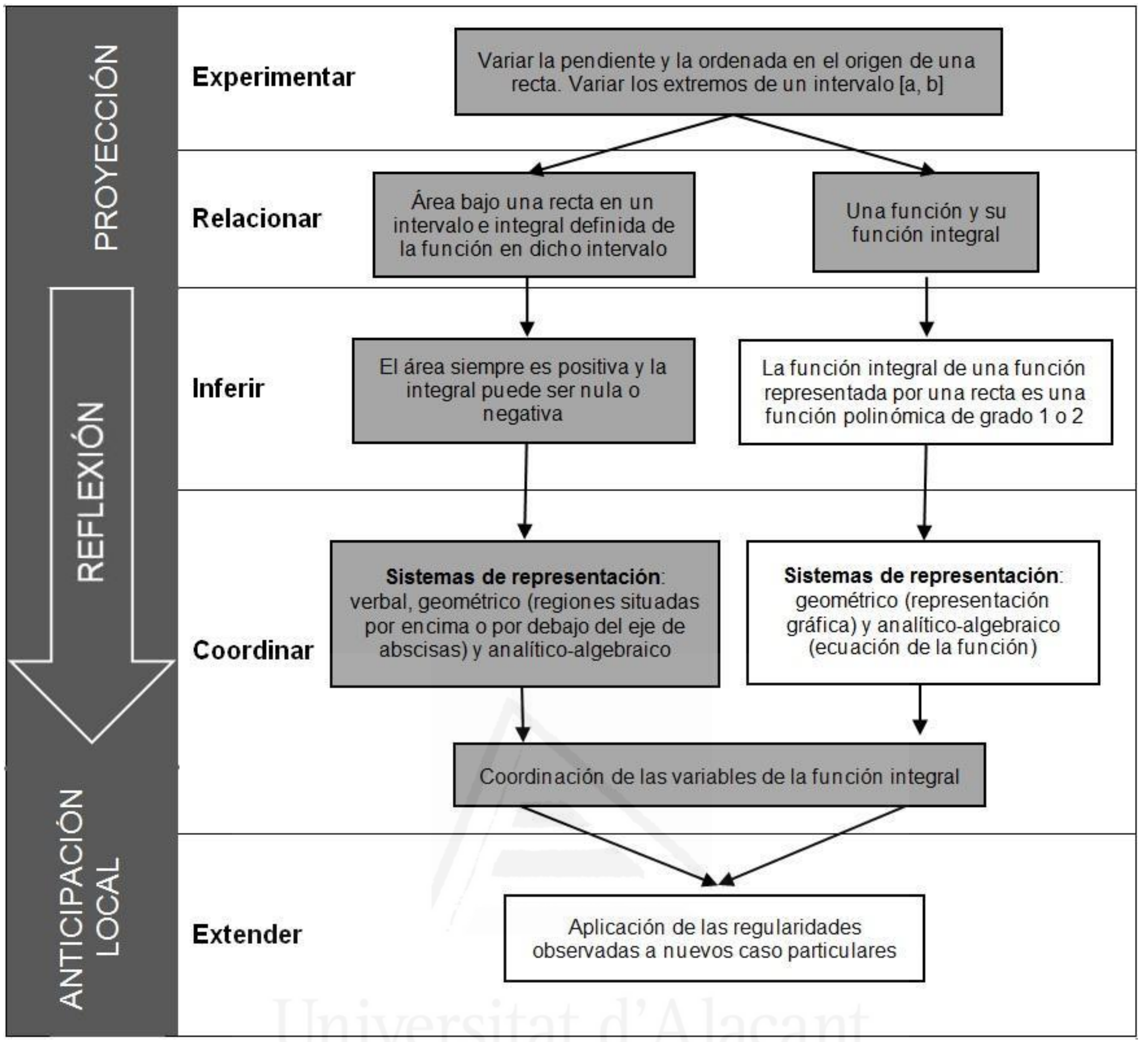


Figura 4.20. Trayectoria de aprendizaje de los estudiantes del perfil 1 en la construcción de la función integral

4.3.2. Perfil 2. Algunas constataciones de la relación entre área e integral definida

Los estudiantes de este perfil hicieron sólo algunas constataciones sobre la relación entre el área y la integral, apoyadas en los casos particulares que se les proponían en las tareas, y no fueron capaces de expresar analíticamente la relación entre los valores del área bajo la curva en el intervalo [a, b] y el valor de la integral definida de la función representada por la curva entre *a* y *b*. Fueron capaces de obtener la fórmula del área bajo una recta en un intervalo [a, t], siendo *a* constante y *t* variable, $t \geq a$, pero no de relacionar una función (constante o afín) definida en un intervalo [a, t] y su función integral *F(t)*. La Pareja A-L es un ejemplo de estudiantes de este perfil.

En primer lugar los estudiantes de este perfil hicieron constataciones sobre la relación entre el valor del área de regiones bajo curvas en un intervalo [a, t] que no están situadas siempre por encima del eje X, es decir delimitadas por funciones no siempre positivas sólo en casos particulares, cuando las regiones están situadas por debajo del eje de abscisas. Esta relación la expresaron de forma verbal, pero no supieron hacerlo de forma analítico-algebraica.

El hecho de que la pareja A-L, se dé cuenta de que cuando la superficie está por debajo del eje de abscisas:

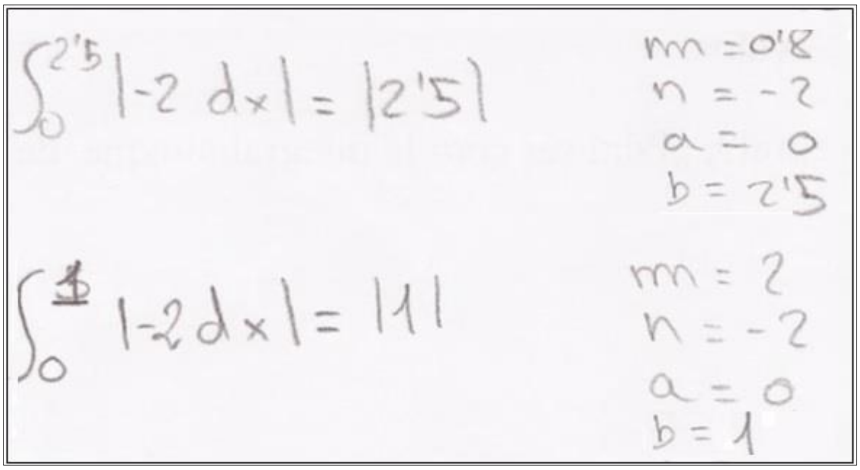
“La integral definida en valor absoluto es igual a el área sombreada”

es una evidencia de que sabe establecer la relación entre el valor del área y de la integral en casos particulares. Pero tuvo dificultad para expresar la relación entre los valores del área y de la integral en lenguaje analítico, pues no supieron expresar analíticamente el valor absoluto de la integral (Figura 4.21).

$$\int_0^4 |-2 \; dx| = |+8|$$

Figura 4.21.Respuesta escrita de la pareja A-L a la cuestión I.a de la tarea ‘Área e integral’

En el caso de que una parte de la superficie esté por encima y otra parte por debajo del eje de abscisas, los estudiantes tienen dificultades para representar la situación que se le pide y una vez que lo consiguen contando con la orientación de la profesora, calcularon por separado las áreas del triángulo que está por encima del eje de abscisas y del que está por debajo, pero no supieron expresar la relación entre el área y la integral analíticamente (Figura 4.22).



$\int_0^{2'5} |-2\, dx| = |2'5|$

$m = 0'8$
$n = -2$
$a = 0$
$b = 2'5$

$\int_0^{1} |-2\, dx| = |1|$

$m = 2$
$n = -2$
$a = 0$
$b = 1$

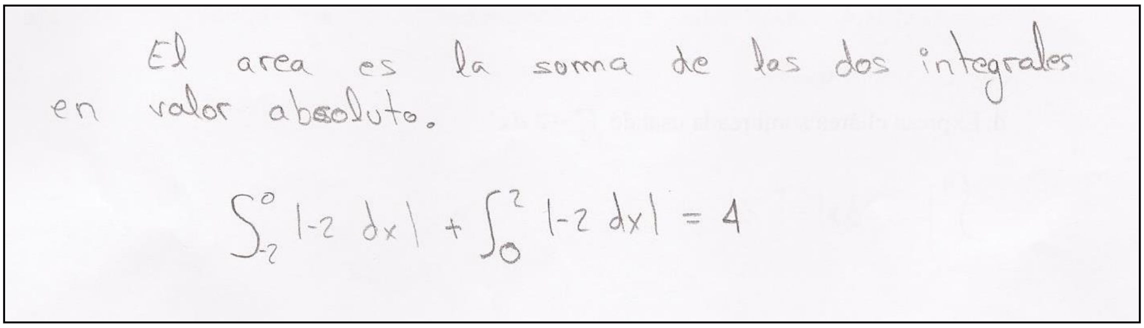
Figura 4.22. Respuesta escrita de la pareja A-L a cuestión II.b de la tarea ‘Área e integral’

Cuando se les pidió “Escribe tus conclusiones respecto a cómo se calculan las áreas de regiones situadas por debajo del eje X usando integrales”, las expresaron de la siguiente forma:

“Igual que una integral pero en valor absoluto”

Mostrando una coordinación entre el valor del área y la integral expresada en lenguaje verbal, cuando la región está por debajo del eje de abscisas.

En cuanto al caso en que la función que deben representar no es constante, de nuevo dieron respuestas correctas de forma verbal pero no de forma analítica, pues además de no manejar bien el valor absoluto no escribieron correctamente la ecuación de la función (m=0.8, n=-2) ni el intervalo (a=0, b=5) (Figura 4.23).



El area es la soma de las dos integrales en valor absoluto.

$\int_{-2}^{0} |-2\, dx| + \int_0^2 |-2\, dx| = 4$

Figura 4.23. Respuesta escrita de la pareja A-L a cuestión II.b de la tarea ‘Área e integral’

Necesitaron sugerencias e indicaciones de la profesora (*prompts*) que dirigieran su atención. Su diálogo con la profesora (P en el diálogo) indica que tienen dificultad para interpretar el significado de la expresión analítica porque no dominan los elementos mencionados en la tarea (parámetros):

[102] L: Supongo que será por separado las rectas. Aquí dice calcula el área entre la región que determinan las rectas. ¿Qué son, 2 rectas?

[103] P: Verticales, las rectas x=-2 y x=3. Son dos rectas verticales. O sea que lo tenéis bien. Vale ¿cuál sería?

[104] A: Es que no he entendido muy bien eso.

[105] P: ¿El área no es igual que la integral? ¿La integral da -7,5? ¿Pero vosotros pensáis que el área es igual que la integral?

[106] A: No

[107] P: No. Aquí para ayudaros tenéis la integral desde "a" hasta "c" y de "c" hasta "b". ¿Eso os ayudará a calcular el área? ¿Cuál será el área?

[108] A, L: Sí.

[109] A: El área sería la suma de las dos integrales.

[110] P: Mientras que la integral es -7,5. Eso es lo que… ¿vale?

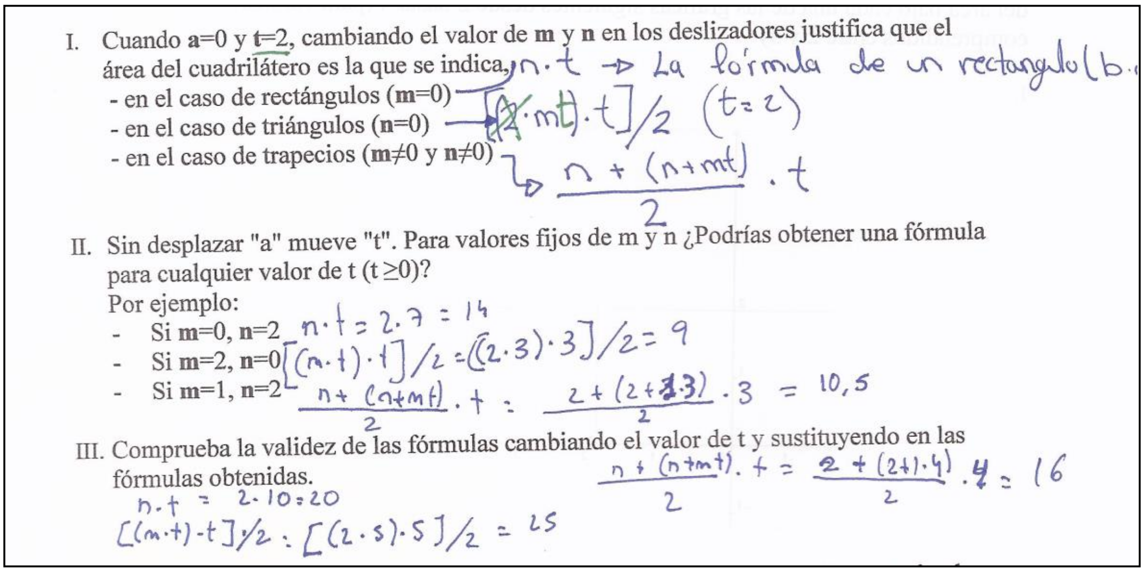
[111] L: ¡Ah! Y arriba también. Aquí también habrá que poner lo mismo.

En su respuesta escrita, subdividieron bien los intervalos, aunque la función no era la que se indica, pero sumaron los valores absolutos de las integrales definidas entre -2 y 2, y entre 2 y 3 (Figura 4.24).

$$A = \int_{-2}^{2} |-2\,dx| + \int_{2}^{3} |-2\,dx| = 8'5$$

Figura 4.24. Respuesta escrita de la pareja A-L a cuestión III.c de la tarea 'Área e integral'

En segundo lugar fueron capaces de obtener la fórmula del área bajo una recta en un intervalo [a, t], siendo a constante y *t* variable, $t \geq a$, pero no de relacionar una función (constante o afín) definida en un intervalo [a, t] y su función integral *F(t)* (Figura 4.25).



I. Cuando **a**=0 y **t**=2, cambiando el valor de **m** y **n** en los deslizadores justifica que el área del cuadrilátero es la que se indica, $n \cdot t$ → La fórmula de un rectangulo (b·
- en el caso de rectángulos (**m**=0)
- en el caso de triángulos (**n**=0) → $[(\cancel{x} \cdot mt) \cdot t]/2$ $(t=2)$
- en el caso de trapecios (**m**≠0 y **n**≠0) → $\frac{n + (n+mt)}{2} \cdot t$

II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?

Por ejemplo:
- Si **m**=0, **n**=2 $n \cdot t = 2 \cdot 7 = 14$
- Si **m**=2, **n**=0 $[(m \cdot t) \cdot t]/2 = ((2 \cdot 3) \cdot 3]/2 = 9$
- Si **m**=1, **n**=2 $\frac{n + (n+mt)}{2} \cdot t = \frac{2 + (2+1 \cdot 3)}{2} \cdot 3 = 10{,}5$

III. Comprueba la validez de las fórmulas cambiando el valor de t y sustituyendo en las fórmulas obtenidas.

$\frac{n + (n+mt)}{2} \cdot t = \frac{2 + (2+1 \cdot 4)}{2} \cdot 4 = 16$

$n \cdot t = 2 \cdot 10 = 20$

$[(m \cdot t) \cdot t]/2 = [(2 \cdot 5) \cdot 5]/2 = 25$

Figura 4.25. Respuestas escritas de V-AV-AJ a las cuestiones I, II y III de la tarea 'Función integral I'

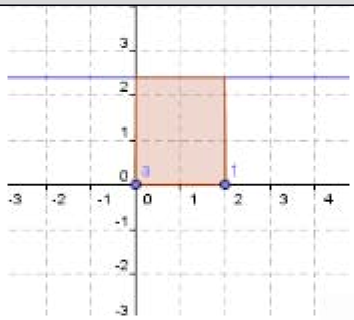
Esta pareja, como la anterior, también respondió a la primera cuestión de manera general (bloque I, Figura 4.25), pues a pesar de que sólo se les pedía que justificasen el área de un cuadrilátero dado, buscaron fórmulas para expresar el área en función de los parámetros *m* y *n* de la recta de ecuación *f(x)=mx + n*, y de *t*. En consecuencia también fue capaz de establecer una relación funcional entre *t* y el área bajo la recta de ecuación *f(x)=mx+n* en el intervalo [0, t], considerando *t* variable, pero necesitaron más tiempo y necesitaron aclaraciones de la profesora. Visualizaron las figuras con ayuda del *applet*.

Este comportamiento, donde los estudiantes buscan y establecen una relación funcional entre el extremo *t* variable de un intervalo [0, t] y el valor del área bajo una recta en este intervalo, podemos considerarlo como una primera aproximación al concepto de función integral.

Las dificultades que tuvieron en manejar el lenguaje analítico, les hizo que emplearan mucho tiempo en resolver estas cuestiones y no llegaran a resolver la tarea siguiente, no pudiendo avanzar en la construcción del concepto de función integral.

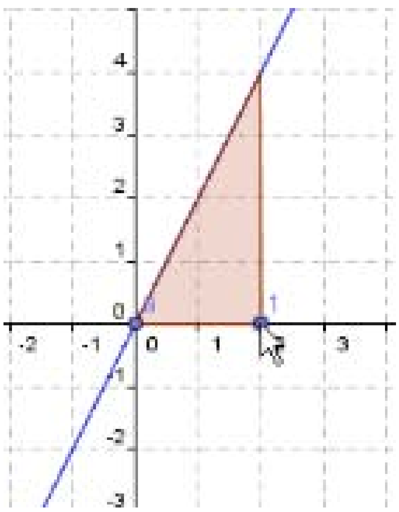
En el caso del rectángulo usaron la fórmula del área del rectángulo (Tabla 4.17).

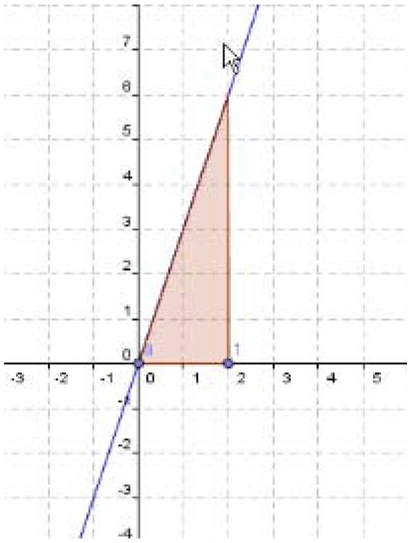
Tabla 4.17. Diálogo de la pareja V-AV resolviendo la cuestión I de la tarea ‘Función integral I’

<table>
<tr><td colspan="2">I. Cuando a=0 y t=2, cambiando el valor de m y n en los deslizadores justifica que el área del cuadrilátero es la que se indica,
- en el caso de rectángulos (m=0)
- en el caso de triángulos (n=0)
- en el caso de trapecios (m≠0 y n≠0)</td></tr>
<tr><th>Interacciones con los applets</th><th>Comunicaciones orales</th></tr>
<tr><td>
Ponen m=0, n=2,4, a=0, t=2,</td><td>[128] V: Sí, es un rectángulo. Rectángulo es base por altura.
…
[131] AV: Ya está, n·t</td></tr>
</table>

En el caso de los triángulos (*n*=0) tuvieron dificultad porque trabajaron a la vez con un valor particular de *t* (*t*=2) para calcular la altura (f(2)=3·2, f(2)=2m) y sin darle valor (*t*, para la base), como se manifiesta en sus diálogos y también en la solución escrita a la tarea (Tabla 4.18).

Tabla 4.18. Diálogo de la pareja V-AV resolviendo la cuestión I de la tarea ‘Función integral I’

<table>
<tr><th>Interacciones con los applets</th><th>Comunicaciones orales</th></tr>
<tr><td>m= 2, n=0, a=0, t=2
</td><td>[137] AV: Si n=0, m=2 y =2x+0, I=4, $m^{2\cdot}t$. Vamos a corroborarlo con el 3.</td></tr>
</table>

Ponen m=3, n=0. (triángulo de base el segmento 0-2) 	[138] AV: 6, m2, $m^2 \cdot t$ partido… [139] V: No es m^2, es *m* por 2, sería… [140] AV: m2 digo, o sea sería 2m. [141] V: *m* por 2. [142] AV: Por *t* partido 2, partido 3, no partido 2, es la fórmula del triángulo. [143] V: Es *m* por 2. [144] AV: Claro, 2 por *m* por *t* partido 2. [145] V: El 2 se va con el 2 y es *m* por *t*. [146] AV: Y *m* por *t*, 3 por 2. [147] V: El 2 se va con el 2, y es *m* por *t*. [148] AV: Es que mira, 2m, porque *m* es 3 y este lado da 6. Entonces 2 por *m* por *t* porque es la base, partido 2. [149] AV: Y en el primero también sería.

Luego escriben, como respuesta a la tarea I, lo que se muestra en la Figura 4.26.

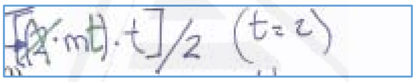


Figura 4.26. Respuestas escritas de V-AV a las cuestiones I, de la tarea 'Función integral' para el caso de triángulos

La profesora (P) les hizo notar (*prompts*) la forma en que estaban considerando *t* y al final trabajaron con *t* como variable en los dos casos, tal como se muestra en el diálogo:

[151] P: Pero falta la base.

[152] AV: La base es *t*.

…

[160] P: Lo que no tiene sentido aquí es el 2. El 2 es sólo cuando *t* vale 2… ¿Aquí le estás dando a la *t* un valor o estás trabajando con t en general? Aquí *t* vale 2.

[161] A: Claro.

[162] P: Si lo haces en general, tienes que poner *t* en los dos sitios, y si lo haces para el 2 tienes que poner el 2 en los dos sitios.

…

[165] AV: Pero en este caso sería 2 por t porque ya sería 4 la base y no es 4.

[166] V: Porque es $t = 2$, pones $t = 2$.

[167] P: ¿Pero esto es para un valor determinado de *t* o es para *t* en general?

[168] AV: No, en general

[169] P: Entonces, dado un valor de *t* cualquiera ¿cuál es su imagen?

[170] AV: Yo que sé.

[171] P: La recta, ¿cuál es en este caso?

[172] AV: La recta ¿ésta?

[173] P: La que tú estás considerando aquí

[174] AV: Si *t* es 2, la imagen es 6 porque es $m \cdot t$

[175] P: $m \cdot t$. Eso es lo que quiero decirte, es $m \cdot t$

[176] V: Entonces, si ponemos t=2.

[177] P: Si *t* es 2, aquí lo estamos haciendo para cualquier *t*

[178] AV: Si *t*=2, sería 2 por m por 2 partido 2.

[179] P: Exactamente, porque ha de ser… o lo hacéis para el 2 o lo hacéis para la *t*, pero…

[180] V: Sería m el área.

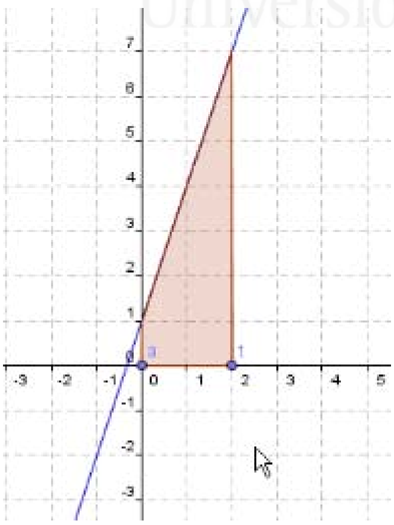
[181] AJ: …

[182] V: Pon *t*=2 y entonces… bueno que al final es m por 2.

Esta pareja tuvo pues dificultades usando el lenguaje analítico.

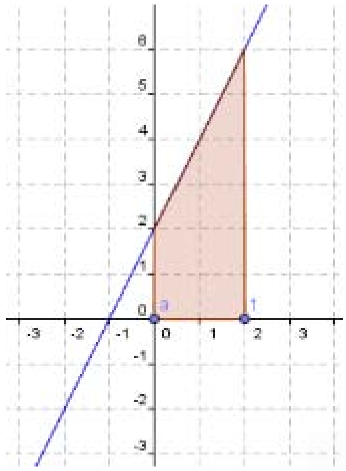
Para el caso del trapecio ($m \neq 0$ y $n \neq 0$) (Tabla 4.19), la profesora explicó en la pizarra el ejercicio, con m=2 y n=2 y recordó la fórmula del área de un trapecio.

Tabla 4.19. Diálogo de la pareja V-AV resolviendo la cuestión I de la tarea 'Función integral I'

Interacciones con los *applets*	Comunicaciones orales
Ponen m=3, n= 1. Trapecio. 	[186] AV: A ver, la imagen de *t* [187] V: La 1, 3

y ellos continuaron trabajando con los valores que usó la profesora (Tabla 4.20).

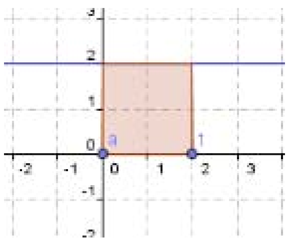
Tabla 4.20. Diálogo de la pareja V-AV resolviendo la cuestión I de la tarea ‘Función integral I’

<table>
<tr><th>Interacciones con los applets</th><th>Comunicaciones orales</th></tr>
<tr><td>m=1.9, n=2
m=2, n=2

</td><td>[188] AV: Área trapecio= base mayor + base menor por altura partido 2</td></tr>
</table>

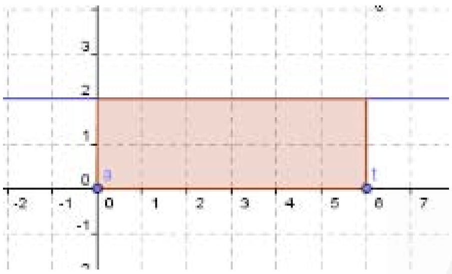
Luego comentaron lo que dijo la profesora y obtuvieron la expresión de la fórmula para valores generales (Figura 4.26).

En la cuestión II (Figura 4.25), donde se pedía las fórmulas que ya habían obtenido, las volvieron a buscar apoyándose en el *applet*.

Tabla 4.21. Diálogo de la pareja V-AV resolviendo la cuestión II de la tarea ‘Función integral I’

<table>
<tr><td colspan="2">II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?
Por ejemplo:
- Si m=0, n=2
- Si m=2, n=0
- Si m=1, n=2</td></tr>
<tr><th>Interacciones con los applets</th><th>Comunicaciones orales</th></tr>
<tr><td>Ponen m=0, n=2

</td><td>[208] AV: Por ejemplo, damos esos valores, entonces si dice valores fijos de a, movemos t que sería, la imagen de a por t, o sería t por n. Para que t sea mayor o igual que 0 a no ser que movamos la …

[209] AJ: Mueve la m.</td></tr>
</table>

Varían los valores de *m*, *t* y *n*: Aumentan y disminuyen *m* y lo dejan en *m*=0 Mueven *t* y lo dejan en 7 Tienen *n*= -4, disminuyen *n* hasta -4,3 y luego lo dejan en -4.	[211] AJ: Pues será *n·t* otra vez. [212] AV: Pero *nt* en el intervalo de *n*>0 porque dice para *n* mayor...entonces desde *n* mayor que 0 [dicen n pero se refieren a *t*] … [214] AV: Pues sería *n*·7, igual a 2·7 igual a 14.
Aumentan a *n*=2, *m*=0; I=14, 05;	[215] AJ: Es para cualquier valor, que lo puedes mover.
m=2, *n*=0, *t*=6; *t*=6,..; I=49,33. Acercan y alejan con el ZOOM 	[216] AV: Pues sería *t*... Claro, sería *t*. [217] AJ: ¿*t* qué es ahora? Porque eso sería ponerlo ahí. Si por ejemplo es 3,
t =3	[218] AV: *t* por *m*, o sea *m* por *t*, por *t* partido 2. Es igual a 2 por 3 por 2, no, 2 por 3 por 3, igual a 6 por 3, 18, partido 2, 9.
Ponen *m*=1, *n*=2	[221] AV: *m* es 1 y *n* [es] 2 (es el último caso propuesto) [222] AV: *m*+*n*+*m* por *t*. 2+ *t* por *m*, o sea, sería 3 (están escribiendo en la hoja de tareas)

Posteriormente comprobaron la validez de las fórmulas en casos particulares usando el *applet*, que manejaron sin dificultad (cuestión III).

Cuando se les preguntó:

IV. ¿Qué ocurre si para un valor de **m** y **n** dados, manteniendo fijo t, cambiamos el valor de **a**?

Manipularon el *applet* dando valores desde -10 hasta 3, y dejaron *t* en 0, pero no supieron responder.

La tarea 'Función integral II' no la hicieron por falta de tiempo.

La trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de este perfil se muestra en la Figura 4.27.

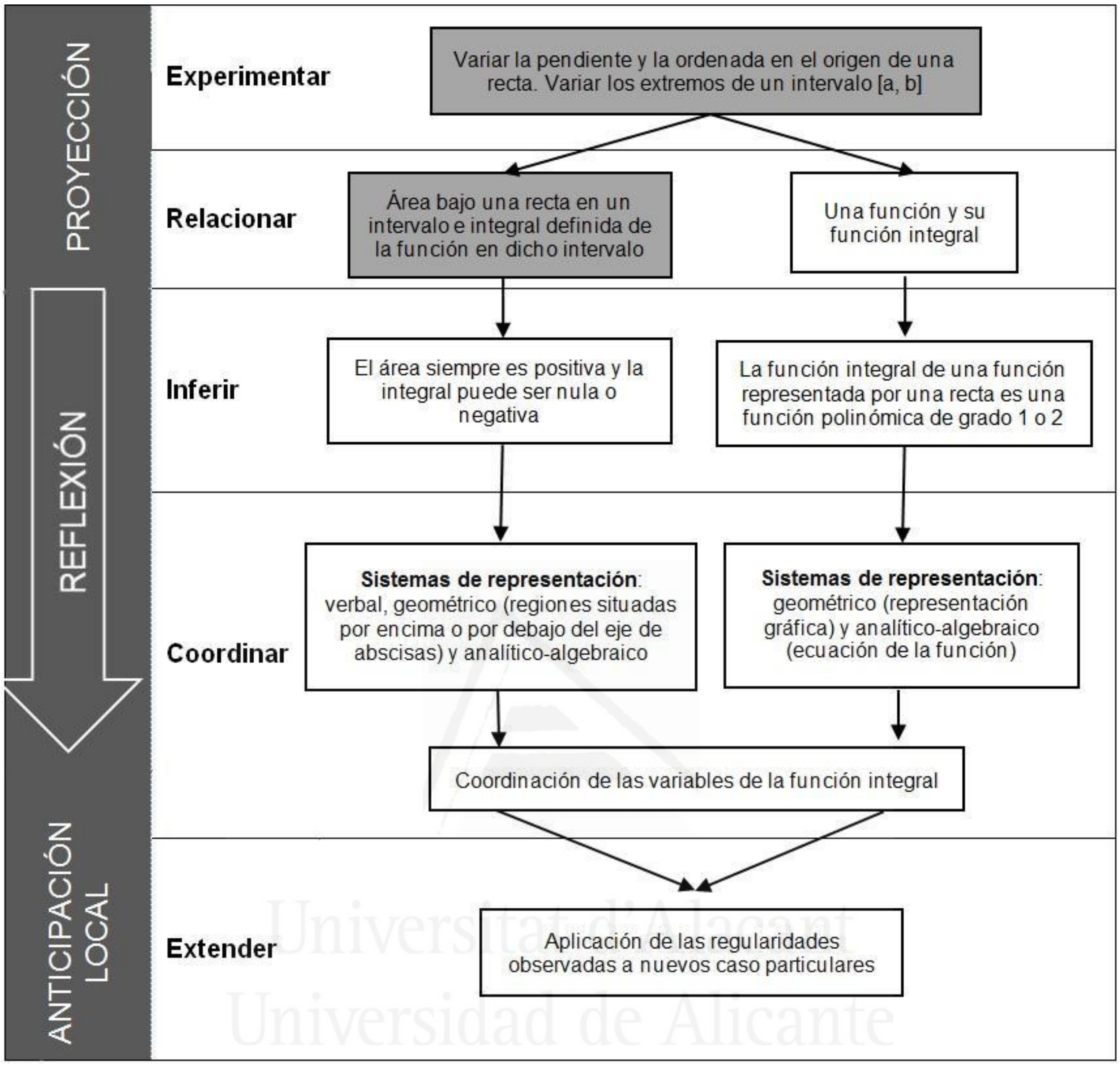


Figura 4.27. Trayectoria de aprendizaje de los estudiantes del perfil 2 en relación a la construcción de la función integral

4.4. PERFILES GLOBALES EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

En este apartado presentamos tres perfiles globales en el proceso de construcción del concepto de integral definida (Tabla 4.22). Estos perfiles se caracterizan por: (a) estar en distintos momentos de la fase de anticipación: *proyección*, *reflexión* o *anticipación local*; y (b) por las acciones en que se apoya su trayectoria de aprendizaje: *experimentar*, *relacionar*, *inferir*, *coordinar* o *extender*. El perfil A se encuentra en el momento de *proyección*, el perfil B en el de *reflexión* y el perfil C en el de *anticipación local*

El perfil A se encuentra en el momento de *proyección* y se caracteriza por llegar a explicitar unidades de experiencia que reflejan la *relación actividad-efecto* necesaria para la construcción del concepto de integral definida, pero no suficiente. La trayectoria de los estudiantes de este perfil se apoya en las acciones de *experimentar* y de *relacionar*. Por ejemplo, la experimentación variando el número de sub-intervalos de la partición conduce a relacionar el número de sub-intervalos de la partición con los valores de las sumas superiores o inferiores; las unidades de experiencia son constataciones de la relación entre el incremento o disminución del número de sub-intervalos de la partición y la variación de las sumas superiores e inferiores. Esta misma experimentación puede llevar a relacionar el número de sub-intervalos de la partición con los valores de las bases y las alturas de los rectángulos que aproximan el área, y que ayudan a dar significado a los elementos matemáticos que intervienen en el cálculo de la integral como límite de una suma de productos; las unidades de experiencia son la relación entre las dimensiones de los rectángulos que aproximan la superficie y los factores del producto de las sumas de la integral de Darboux.

En el caso de la función integral, estas unidades de experiencia surgen de experimentar variando los parámetros de una recta y de relacionar el extremo *t* variable de un intervalo [0, t] y el valor del área bajo dicha recta en este intervalo. Las unidades de experiencia son la relación entre el extremo *t* variable de un intervalo [0, t] y el valor del área bajo una recta en este intervalo.

Estas unidades de experiencia no son suficientes para: (a) aproximar el área bajo una curva utilizando la idea intuitiva de límite, (b) dar significado a la expresión de las sumas de Darboux o (c) construir la idea de función integral.

Tabla 4.22. Perfiles globales en el proceso de construcción del concepto de integral definida

Perfiles/ Acciones	**Perfil A Proyección**	**Perfil B Reflexión**	**Perfil C Anticipación local**
Experimentar	Con casos particulares	Con casos particulares	Con casos particulares
Relacionar	Incremento del número de sub-intervalos de la partición y valor de las sumas superiores e inferiores Alturas de los rectángulos de las sumas superiores e inferiores e imágenes de los valores extremos de la partición Base de los rectángulos y número de sub-intervalos de la partición Área bajo una recta en un intervalo e integral definida de la función en dicho intervalo .	Incremento del número de sub-intervalos de la partición y valor de las sumas superiores e inferiores Incremento del número de sub-intervalos y una cota del error de la aproximación Incremento del número de sub-intervalos y recubrimiento de la superficie por rectángulos. Sumas superiores/inferiores y suma de las áreas de los rectángulos. Área bajo una recta en un intervalo e integral definida de la función en dicho intervalo.	Incremento del número de sub-intervalos de la partición y valor de las sumas superiores e inferiores Incremento del número de sub-intervalos y una cota del error de la aproximación Incremento del número de sub-intervalos y recubrimiento de la superficie por rectángulos. Sumas superiores/inferiores y suma de las áreas de los rectángulos. Área bajo una recta en un intervalo e integral definida de la función en dicho intervalo Una función y su función integral.
Inferir		A mayor número de sub-intervalos mejor aproximación del área bajo la curva El error es una cota	A mayor número de sub-intervalos mejor aproximación del área bajo la curva El error es una cota El área siempre es positiva y la integral puede ser nula o negativa
Coordinar		Procesos de aproximación de una sucesión en el dominio (número de sub-intervalos de la partición) y en el rango (valores de las sumas supriores/inferiores): **concepción dinámica del límite** Una cota del error del área y número de sub-intervalos de la partición: **concepción métrica del límite** **Sistemas de representación**: geométrico , verbal y analítico-algebraico	Procesos de aproximación de una sucesión en el dominio (número de sub-intervalos de la partición) y en el rango (valores de las sumas supriores/inferiores): **concepción dinámica del límite** Una cota del error del área y número de sub-intervalos de la partición: **concepción métrica del límite** **Concepciones dinámica y métrica** del límite **Sistemas de representación**: geométrico , verbal y analítico-algebraico
Extender			Aplicación de las regularidades observadas a nuevos casos particulares

El perfil B se encuentra en el momento de *reflexión* y se caracteriza por explicitar unidades de experiencia que reflejan la *relación actividad-efecto* y por abstraer regularidades de estas unidades de experiencia. La trayectoria de los estudiantes de este perfil se apoya en las acciones de *experimentar, relacionar, inferir* y *coordinar*. Por ejemplo, la experimentación variando el número de sub-intervalos de la partición conduce a relacionar el número de sub-intervalos de la partición con los valores de las sumas superiores o inferiores, a realizar inferencias y a coordinar los procesos de aproximación de las sucesiones de sumas inferiores y superiores en el dominio y en el rango (concepción dinámica del límite), relacionando las representaciones geométricas y analítico-numéricas. En el momento de *reflexión* los estudiantes: (a) muestran evidencias de construir la aproximación del área bajo una curva mediante la concepción dinámica y métrica del límite, pero no de conexión entre ambas concepciones; (b) coordinan representaciones geométrica y analítico-algebraica para las sumas superiores e inferiores, pero no entre representaciones de la acumulación de diferencias; y (c) distinguen entre el valor del área y la integral definida más allá de los casos particulares, además relacionan la variable x, $x \in [a, b]$, una función (constante, lineal o afín) $f(t)$, $t \in [a, x]$ y la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)$, y expresan esta relación gráfica o analíticamente.

El perfil C se encuentra en el momento de *anticipación local* y se caracteriza por aplicar las regularidades observadas a nuevas situaciones apoyándose en los significados construidos. La trayectoria de los estudiantes de este perfil se apoya en las acciones de *experimentar, relacionar*, *inferir*, *coordinar* y *extender.* Por ejemplo, los estudiantes de este perfil son capaces de anticipar algunos resultados sin necesidad de partir de la experimentación. En el momento de *anticipación local* los estudiantes: (a) muestran evidencias de construir la aproximación mediante la coordinación entre dos concepciones del límite: la métrica y la dinámica; (b) coordinan las representaciones geométrica y analítico-algebraica de la acumulación de diferencias de sumas superiores e inferiores; y (c) establecen relaciones entre una función y su función integral. Estos estudiantes son capaces de aplicar las regularidades observadas a nuevos casos particulares, sin necesidad de experimentar.

Este estudio nos ha permitido identificar distintos perfiles de estudiantes relativos a la manera en la que construyen los significados de la integral definida. De esta manera hemos dado respuesta a las preguntas de investigación sobre cómo estudiantes de Bachillerato construyen la aproximación al área de la superficie bajo una curva, el significado de las sumas de Darboux y el concepto de función integral. Asimismo estos perfiles muestran distintas trayectorias de aprendizaje que pueden dar luz sobre los saltos cognitivos que deben producirse para pasar de un momento a otro de la fase de participación. Este aspecto lo trataremos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

En este trabajo hemos analizado cómo estudiantes de bachillerato que han participado en un experimento de enseñanza constructivista, construyen el concepto de integral definida. El experimento de enseñanza se ha diseñado según una trayectoria hipotética de aprendizaje y se ha utilizado *applets* para facilitar la construcción de significados. El objetivo de esta investigación ha sido:

- Analizar el proceso de construcción del concepto de integral definida desde el marco de la abstracción reflexiva, en estudiantes de Bachillerato (16-18 años) que participaron en un experimento de enseñanza constructivista.

Este concepto se introdujo partiendo del problema del cálculo del área bajo una curva, utilizando distintos sistemas de representación, y antes que el cálculo de primitivas.

Y las preguntas de investigación fueron las siguientes:

- ¿Cómo construyen estudiantes de Bachillerato la aproximación del área de la superficie bajo una curva?
- ¿Cómo estudiantes de Bachillerato construyen el significado de las sumas de Darboux?

- ¿Cómo construyen estudiantes de Bachillerato el concepto de función integral?

Los resultados de esta investigación nos han permitido identificar tres perfiles de estudiantes relativos a la manera en la que construyen los significados de la integral definida. Estos perfiles muestran distintos momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva: *proyección*, *reflexión* y *anticipación local*, y diferentes trayectorias de aprendizaje.

En primer lugar discutimos los resultados obtenidos en relación a las diferentes aproximaciones a la construcción del concepto de integral definida y de función integral y del significado de las sumas de Darboux. En segundo lugar presentamos una reflexión sobre el contexto de aprendizaje, el experimento de enseñanza. Por último indicamos las implicaciones para la enseñanza.

5.1. DISTINTAS APROXIMACIONES A LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA Y DE FUNCIÓN INTEGRAL

En este apartado discutimos las características de los perfiles de estudiantes que se encuentran en distintos momentos de la fase de participación, dentro del proceso de abstracción reflexiva, que hemos presentado en el capítulo anterior, y los saltos cognitivos que deben producirse para pasar de un momento a otro de la fase de participación (Aranda y Callejo, 2015).

5.1.1. Momento de proyección

En todos los perfiles identificados, la acción de experimentar moviendo el deslizador del *applet*, variando el número de subintervalos de la partición o los parámetros de una recta llevó a los estudiantes a explicitar unidades de experiencia que reflejan la *relación actividad-efecto* necesarios para la construcción del concepto de integral definida, pero que no son suficientes. Los estudiantes que se quedan en este nivel están en el momento de *proyección*.

Estas unidades de experiencia surgen, en el caso de la aproximación del área bajo una curva, de relacionar el número de subintervalos de la partición con el valor de las sumas superiores o inferiores, e implica ver estas sucesiones no como una lista de números, sino como una función de variable natural (McDonald, Mathews y Strobel, 2000). Por ejemplo, una pareja que se encontraba en el momento de *proyección*, hizo la siguiente afirmación: "*al aumentar el valor de n las sumas inferiores/superiores va aumentando/disminuyendo cada vez más lentamente*", poniendo así en relación n con S_n o I_n y haciendo notar que esta función es monótona y no lineal. Pero estos estudiantes no vincularon explícitamente estas sucesiones con las aproximaciones al valor del área y con el error cometido en la aproximación. Esta forma de proceder puede ser considerada una característica del momento de proyección, pues construyen algunos registros de experiencia, pero no llegan a hacer inferencias como, por ejemplo, que a mayor número de subintervalos mejor aproximación del área, o que el error es una cota. Como consecuencia no llegan a construir los significados del límite para aproximar el área de la superficie bajo la curva. Podríamos caracterizar esta forma de aproximar, en términos de Kouropatov y Dreyfus (2014) como "*aproximación refinada*" pues se dan cuenta de que la aproximación puede ser más precisa incrementando el número de rectángulos que aproximan la superficie y disminuyendo su tamaño.

En el caso de la construcción del significado de las sumas de Darboux, estas unidades de experiencia surgen de relacionar el número de subintervalos de la partición con el valor de las bases y las alturas de los rectángulos que aproximan el área, lo que ayuda a dar significado a las operaciones matemáticas que intervienen en el cálculo de la integral de Darboux como límite de una suma de productos (Sealey, 2014). Por ejemplo una pareja que se encontraba en el momento de *proyección*, fue capaz de identificar, por una parte, que todos los rectángulos tenían la misma base y relacionó la medida de la base con el número de subintervalos de la partición, y, por otra, que la altura de los rectángulos de las sumas inferiores (superiores) era el valor de la función en el extremo izquierdo (derecho) del subintervalo, y lo expresó en lenguaje verbal. Sin embargo no llegó a expresar el área de los rectángulos como producto de estas dos cantidades y, como consecuencia, tampoco llegó a expresar analíticamente las sumas de Darboux en un caso particular, ya que no fue capaz de expresar cada uno de los sumandos (que es un producto) en relación con el número de subintervalos y de la función que representa la curva.

En el caso de la función integral, estas unidades de experiencia surgen de relacionar el extremo *t* variable de un intervalo [0, t] y el valor del área bajo una recta en este intervalo. Pero los estudiantes no fueron capaces de ver la covariación compleja (Sealey, 2006; Thompson y Silverman, 2008) de las tres cantidades que varían simultáneamente y que intervienen en el concepto de función integral: la variable x, $x \in$ [a, b], una función *f(t), t* ∈ [a, x] y la función integral F(x) $= \int_a^x f(t)$.

El salto cognitivo del momento de proyección al de reflexión se produce cuando los estudiantes coordinan el efecto del incremento del número de subintervalos de la partición con el esquema visual que muestra, por una parte, como las sumas superiores e inferiores convergen, pues los rectángulos cada vez aproximan mejor la superficie bajo la curva (Czarnocha, Loch, Prabhu y Vidakovic, 2001) y, por otra, como la base del rectángulo que aproxima la acumulación de diferencias entre las sumas superiores e inferiores, S_i-I_i, se hace cada vez más pequeña. También cuando los estudiantes identifican los sumandos (productos de la base por la altura de los rectángulos) de la sumas de Darboux o de Riemann, que es la segunda capa que considera Sealey (2014) cuando caracteriza la comprensión de las sumas de Riemann y la integral definida. Por último, este salto se produce cuando los estudiantes son capaces de relacionar la variación de los valores de *x* con los de *F(x)* en casos sencillos, por ejemplo cuando *f* es una función constante, lineal o afín.

5.1.2. Momento de reflexión

Hemos identificado un perfil de estudiantes que se encuentra en el momento de reflexión caracterizado por abstraer regularidades de los registros de experiencia de la relación actividad-efecto. Por ejemplo, en el caso de la aproximación del área bajo una curva, una pareja que se encontraba en el momento de reflexión, al responder a lo que ocurre con las sumas inferiores cuando los valores de *n* van aumentando dijo:

K: La suma de los... de los rectángulos, cuando más aumenta *n* se acerca más al área real de este trozo, de… o sea del sector circular.

MA: Pues eso, que la suma va aumentando a… cuanto mayor es *n* y cada vez acercándose más al área… al área del cuadrante, ¿no?

La coordinación de ambos esquemas es la referencia al efecto que produce el incremento de *n* sobre los rectángulos que casi recubren la superficie y sobre el valor del área. Estos estudiantes emplearon el verbo “acercarse”, propio de la concepción dinámica del límite, con relación a los rectángulos y al área. De la misma manera otra pareja, al mencionar lo que ocurre con las sumas superiores al aumentar los valores de *n* dijo:

M: Pero su área se aproxima por arriba.

L: O sea, de más a menos. Siempre superiormente.

M: Pero igualmente se está aproximando a π/4.

Estas expresiones hacen referencia al esquema numérico de la convergencia de las sucesiones de las sumas superiores e inferiores (*“igualmente se está aproximando a π/4”*), pues en el contexto del diálogo el adverbio “igualmente” se refiere a las sumas inferiores y al esquema visual del recubrimiento de la superficie por rectángulos, pues los estudiantes utilizan deícticos espaciales como “por arriba” (*“su área se aproxima por arriba*”). Estos estudiantes emplearon el verbo “aproximar”, propio de la concepción dinámica del límite, tanto cuando se referían a la aproximación numérica como a la geométrica.

En este momento de la fase de participación los estudiantes llegan a coordinar los procesos de aproximación de las sucesiones de sumas inferiores y superiores en el dominio y en el rango (concepción dinámica del límite), relacionando las representaciones geométricas y analítico-numéricas.

La coordinación entre los dos esquemas también se pone de relieve al relacionar el número de subintervalos de la partición y el error cometido en la aproximación, que se traduce en constatar que la acción de aumentar el valor de *n* produce como efecto una mejor aproximación del valor del área y, por tanto, que al encontrar un valor de *n* para el que se obtiene la aproximación buscada, esta aproximación se conserva para los valores de *n* mayores que éste. Esto implica relacionar una cota del error del área y el número de subintervalos de la partición (concepción métrica del límite). Esto se puso en evidencia en una de las parejas con expresiones como: “*le podríamos poner más cuadraditos, rectángulos de esos y [el error] seguiría siendo menor que una décima*”. Además esta pareja se planteó sus propios objetivos como buscar experimentalmente el menor valor de *n* para la aproximación del área buscada o relacionar la cota del error con el valor de *n* para la aproximación pedida.

Por su parte, otra pareja que se encuentra en la fase de reflexión, aunque no expresó claramente la idea de que el error es una cota, se dio cuenta de que a partir de un valor dado de *n* se mantenía la aproximación pues dijo: "*pues a partir de n=6*". Estos estudiantes no se plantearon sus propias preguntas y se limitaron a responder a lo que se les pedía. Podríamos caracterizar esta forma de aproximar, como "aproximación límite" (Kouropatov y Dreyfus, 2014), pues los estudiantes se dan cuenta de que se puede determinar el tamaño de los rectángulos para hacer la aproximación tan fina como se quiera.

El siguiente salto se produce dentro del momento de reflexión, cuando los estudiantes son capaces de coordinar los significados de las dos concepciones del límite, la dinámica y la métrica, constatando la relación entre el aumento del valor de n, las aproximaciones y el error de esta aproximación. Este salto lo constatamos en los estudiantes que sin necesidad de experimentar con el *applet*, afirmaron:

> *Las aproximaciones cada vez van aumentando poco a poco… y el error se reduce porque se aproxima cada vez más a la integral.*

Estas expresiones verbales de la convergencia de las sucesiones de las sumas inferiores y superiores son un paso previo a la asignación de significado a la expresión analítica de las sumas de Darboux y la definición de la integral como límite.

En cuanto al significado de la expresión de las sumas de Darboux, una pareja que se encuentra en la fase de *reflexión* es capaz de expresar analíticamente estas sumas, y se apoyó en ellas para expresar la suma de la acumulación de diferencias. Sin embargo no relaciona esta última expresión con la representación geométrica del rectángulo de acumulación de diferencias que mostraba el *applet* y que reduce estas sumas a un producto. Esto puede indicar una cierta tendencia hacia el *tratamiento* de las representaciones analítico-algebraicas más que a la *conversión* entre representaciones geométricas y analítico-algebraicas (Duval, 2006); en este caso esta conversión implicaría hacer la interpretación geométrica de la suma de la acumulación de diferencias, conectando la representación analítica de esta suma con un rectángulo subdividido en otros rectángulos, como mostraba el *applet*. Esto muestra que la ayuda proporcionada por el *applet* mostrando varios modos de representación interactivos y dinámicos (significantes) no es suficiente, sino que precisa de la asignación de significados por parte de los estudiantes. Esta tendencia al predominio de las representaciones analítico-algebraicas sobre las geométricas en el análisis matemático, ha sido puesta de manifiesto en diversos trabajos (Berry y Nyman, 2003; Eisenberg,y Dreyfus, 1991), así como la necesidad de usar varios sistemas de representación (Artigue, 1991; Duval, 2006; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Tall, Smith y Piez, 2008).

En cuanto a la construcción del concepto de función integral, el manejo de distintas representaciones (tabular, algebraica y geométrica), ayuda a los estudiantes que se encuentran en el momento de reflexión a identificar la función que representa el área bajo una recta en el intervalo [a, x] en casos sencillos, haciendo conjeturas y comprobaciones. Una conjetura que comprobó una de las parejas fue que la función integral correspondiente a una función afín *"tiene que dar una parábola* […] *porque de grado 1 tiene que pasar a grado 2"*. Esto confirma los resultados de Berry y Nyman (2003) que indican que el uso de la tecnología con estudiantes universitarios usando distintos sistemas de representación, permite a los estudiantes desarrollar una mejor comprensión de la aproximación gráfica al Análisis Matemático, superando la visión algorítmica y analítica. Estos autores señalan la importancia del uso de representaciones geométricas para la comprensión de los conceptos básicos del Análisis Matemático. Hong y Thomas (1997) mostraron que el manejo simultáneo de representaciones numéricas, gráficas y algebraicas de la integral usando programas de cálculo simbólico, proporcionó un entorno favorable para construir una red de ideas relacionadas. Aranda y Callejo (2011a) mostraron que tras el uso de tecnología que relacionaba simultáneamente distintos registros de representación, los estudiantes "*fueron capaces de relacionar distintas ideas usando argumentos variados para asociar la gráfica de una función con la de una de sus primitivas* […]. *Por otra parte las soluciones aportadas se apoyaron más en el pensamiento visual que en el analítico*" (p. 247).

El salto del momento de reflexión al de anticipación local se produce cuando los estudiantes son capaces de aplicar las regularidades observadas a nuevas situaciones. Hemos considerado que la no utilización del recurso tecnológico para responder a alguna de las cuestiones, se podía interpretar como que apoyaron sus reflexiones sobre los significados construidos, pero sería necesario proponer nuevas tareas para confirmar que estos estudiantes habían llegado a este momento de la fase de participación.

5.1.3. Momento de anticipación local

Hemos identificado perfiles de estudiantes que se encuentran en el momento de anticipación local. Por ejemplo, con relación a la aproximación al área bajo una curva, los estudiantes no necesitan experimentar con el *applet* cuando se le preguntó qué ocurriría con las aproximaciones o con el error de aproximación si se aumenta el valor de *n*, o para determinar el valor de *n* que permita calcular el área con un error menor que un valor dado.

Los resultados obtenidos muestran distintos momentos en la construcción del significado de la integral definida. Estos resultados nos han permitido identificar los saltos cognitivos que son necesarios para que los estudiantes avancen en la construcción del concepto de integral definida. En la parte izquierda de la Figura 5.1 se muestra las acciones cognitivas que caracterizan cada momento, y en la parte derecha los saltos cognitivos para pasar de un momento a otro de la fase de participación.

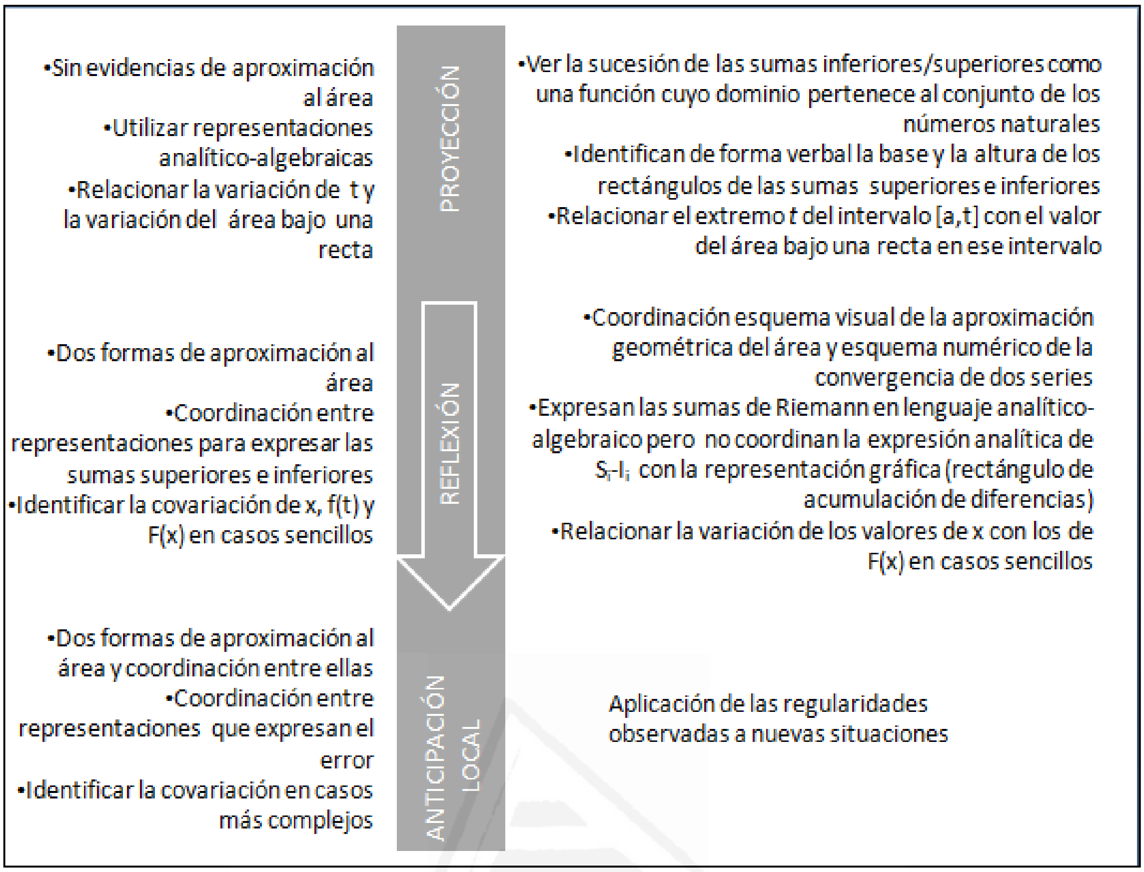


Figura 5.1. Momentos de la fase de participación para la integral definida

5.2. CONTEXTO DE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO: EL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

La secuencia del experimento de enseñanza se ha apoyado en los resultados de algunas investigaciones sobre la integral definida (Azcárate, Casadevall, Casellas y Bosch, 1996; Turégano, 1998; Llorens y Santonja, 1997), que proponen introducirla a partir del cálculo del área bajo una curva, primando así su génesis histórica a través de la resolución de los problemas que han estado en el origen de este concepto. Hemos utilizado las sumas de Darboux y se ha presentado la integral definida de forma independiente a la de derivada y previamente al concepto de primitiva; el estudio de esta última no forma parte del experimento de enseñanza.

La selección de tareas se ha apoyado en la propuesta de un libro de texto (Botella el al., 2000). Estas tareas se han presentado con guías que minimizaban el papel de la profesora y donde se daban indicaciones para usar la tecnología (*applets* diseñados *ad hoc* y hojas de cálculo).

En el experimento se introdujo el concepto de integral definida como límite para el cálculo del área bajo una curva. Los participantes habían trabajado previamente el concepto de límite con lápiz y papel, pero no sabíamos en qué medida lo habían construido. La manera en que se enfrentaron a la tarea de calcular el área bajo un arco de circunferencia (Tarea: 'Área del cuadrante'), parece indicar que el problema de aproximar el área bajo una curva no fue para ellos un mero ejercicio de aplicación de los conocimientos previos sobre el límite. El experimento de enseñanza les ayudó a trabajar el concepto de aproximación en el contexto de objetos geométricos: como ya se ha indicado, los estudiantes que se situaron en el momento de *proyección* fueron capaces de hacer una "aproximación refinada" (Kouropatov y Dreyfus, 2014), pues se dieron cuenta de que la aproximación al valor del área puede ser más precisa disminuyendo la base de los rectángulos, y los que se situaron en el momento de *reflexión* se dieron cuenta de que se puede determinar el tamaño de los rectángulos para hacer la aproximación tan fina como se quiera, lo que Kouropatov y Dreyfus (2014) denominan como "aproximación límite". Algunos de los estudiantes llegaron a construir las concepciones dinámica y métrica del límite, e incluso llegaron a coordinar ambas.

Consideramos que la forma de presentar las tareas: invitando a la experimentación y a la reflexión sobre los resultados de la misma, visualizando simultáneamente representaciones geométricas y analíticas, e interaccionando verbalmente las parejas de estudiantes facilitó la comprensión conceptual; este resultado está confirmado por otras investigaciones (Aranda y Callejo, 2010a; Berry y Nyman, 2003; Camacho, Santos y Depool, 2014: Hong y Thomas, 1997). En cuanto a la interacción entre los estudiantes, Camacho, Santos-Trigo y Depool (2013) indican que para acceder y utilizar los conocimientos básicos que facilitan la comprensión de los diferentes significados asociados al concepto de integral, es importante la discusión entre los estudiantes de las diferentes representaciones.

En el experimento de enseñanza se constató que la actividad de los alumnos en contextos tecnológicos diseñados *ad hoc*, donde se integran diferentes tipos de representaciones interrelacionadas, ayuda a avanzar en la construcción del concepto de integral definida. La interacción y el dinamismo facilitaron a los estudiantes las acciones de relacionar, inferir, coordinar y extender, lo que permitió la coordinación interna entre las representaciones analíticas y geométricas de este concepto (Duval, 2006). Por otra parte, algunas investigaciones que reúnen el uso de lápiz y papel y los entornos tecnológicos señalan que *"el valor epistémico de técnicas de lápiz y papel parece jugar un papel no sólo complementario, sino esencial"* (Kieran y Drijvers, 2006, p. 258). Por ello, consideramos que la combinación e integración de ambos tipos de técnicas, tal como se ha hecho en el experimento de enseñanza, ha enriquecido su valor epistémico.

Las investigaciones realizadas con *applets* de características semejantes a los que hemos utilizado en el experimento de enseñanza indican que "*se ha hecho un considerable esfuerzo por explotar el potencial de la tecnología para ofrecer múltiples representaciones relacionadas. Algunos resultados sugieren que la relación de representaciones en la pantalla puede facilitar que se construyan las conexiones mentales. Sin embargo, poco se comprende de este proceso* (…). *Necesitamos saber más sobre las formas en que los alumnos hacen estas conexiones*" (Ferrara et al., 2006, p. 255). En este sentido, nuestra investigación confirma que el uso simultáneo de representaciones geométricas y analíticas, dinámicas e interactivas puede ayudar a avanzar en la construcción del concepto de integral definida, pero que la tecnología no es la determinante del proceso de aprendizaje, sino la actividad cognitiva de los estudiantes, como la doble discriminación (Duval, 2006) en la medida en que toman conciencia y reflexionan sobre la actividad matemática que llevan a cabo (Heid y Blume, 2008).

Nuestro trabajo corrobora la afirmación de Duval, referente a que "*la yuxtaposición de dos representaciones de un mismo objeto en dos registros diferentes no puede resolver el problema cognitivo del reconocimiento del mismo objeto representado, porque las diferencias de contenido de las representaciones varían independientemente de los objetos representados*" (2006, p. 159). Duval lo explica por la necesidad de la doble discriminación para convertir una u otra de estas dos representaciones. Por una parte, señala que es preciso *"ser capaz de ver diferencias entre dos representaciones que parecen globalmente semejantes"*; por otra, *"ser capaz de distinguir en las representaciones de un registro las características del significante que son matemáticamente pertinentes, para relacionarlas con una representación en otro* *registro, y las características significativas en un registro que no lo son para la conversión en el otro registro*” (2006, p. 160).

En nuestra investigación hemos encontrado evidencias de que algunos estudiantes tenían dificultad para identificar el mismo significado en dos representaciones diferentes. Por ejemplo la pareja K-MA, cuando se le pidió una fórmula para expresar las diferencias entre las sumas superiores e inferiores, no se apoyó en la imagen del applet (Figura 3.7) que representaba estas diferencias mediante un rectángulo de base la longitud de los subintervalos y de altura constante, sino en la representación analítica de las sumas de Darboux, que en este caso no les permitió obtener la fórmula buscada.

En cuanto a las hojas de cálculo, se introdujeron con el objetivo de registrar las sucesiones de valores de las distintas aproximaciones del área bajo la curva y vieran como se generaban dichos valores. Esto ralentizó las tareas en que se usaron las hojas, sin embargo consideramos que es importante el uso de esta herramienta para que los estudiantes reflexionen sobre estos datos, facilitando que establezcan las relaciones necesarias para la avanzar en la construcción del concepto de integral definida.

Una visión retrospectiva del experimento de enseñanza, observando y analizando la experiencia desde el punto de vista teórico que fundamenta la trayectoria hipotética de aprendizaje, nos ha permitido comprobar si la actividad cognitiva y social que han llevado a cabo los estudiantes se corresponde o no con la que habíamos previsto en la fase de diseño y planificación. En este sentido la actividad cognitiva de los estudiantes del perfil C se corresponde con la prevista, la de los estudiantes del perfil B solo se corresponden parcialmente y la de los del perfil A queda lejos de la actividad cognitiva deseada.

Después de analizar e interpretar la actuación de los estudiantes, constatamos los límites del experimento de enseñanza. Por ejemplo, vemos conveniente añadir algunas tareas como calcular el área de superficies bajo curvas de las cuales los estudiantes no conocen la fórmula para calcularlas (en el experimento se propuso el área de un cuadrante de círculo). También nos parece importante trabajar con aplicaciones de la integral definida a situaciones de la vida real porque ello da sentido a los componentes matemáticos de las sumas de Riemann o Darboux, como las que plantea Sealey (2014) en distintos contextos; estas tareas estaban previstas en el diseño original, pero no se llegaron a aplicar por el ritmo de trabajo de los estudiantes. Estos problemas ayudan a entender el significado de los componentes matemáticos de las sumas de Darboux o de Riemann (producto, sumatorio, límite y función), ya que se busca una aproximación; al mismo tiempo muestran la importancia de introducir estas sumas, ya que algunos problemas no se pueden resolver calculando la función primitiva.

Por otra parte nuestro estudio nos ha permitido ratificar la trayectoria hipotética de aprendizaje que se había hecho al principio de la experiencia.

De esta forma hemos obtenido:

- Una secuencia de actividades y formas de llevarla a cabo corregida.
- Un nuevo conocimiento sobre cómo parece funcionar la instrucción (diSessa y Cobb, 2004; Wood y Berry, 2003).

5.3. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

El experimento de enseñanza que se ha presentado en este trabajo difiere de la clase tradicional en varios aspectos: (1) el punto de partida es la actividad de los estudiantes y no la exposición del profesor; (2) esta actividad está conducida por una guía de trabajo y el papel del profesor es hacer de guía de los estudiantes y objetivar sus conocimientos; (3) se favorece los intercambios verbales entre los estudiantes trabajando en parejas; (4) los estudiantes pueden apoyarse en *applets* que presentan simultáneamente representaciones analíticas y geométricas dinámicas e interactivas. Consideramos que esta forma de proceder es adecuada para construir aprendizajes complejos, como los conceptos del Análisis Matemático.

Los resultados obtenidos en esta investigación han puesto de manifiesto que se puede diseñar entornos adecuados que permitan a los estudiantes un avance conceptual, partiendo de su propia actividad y reflexionando sobre ella, siendo así protagonistas de su propio aprendizaje y no meros receptores de las enseñanzas que les transmite el profesor. Para ello se ha contado con la ayuda de tecnologías que ayudan a la experimentación y pueden mostrar simultáneamente distintos modos de representación que sean a la vez interactivos y dinámicos. Estos entornos ayudan a la comprensión conceptual, más allá del aprendizaje de procedimientos para resolver ejercicios o problemas rutinarios, y fomentan acciones cognitivas como experimentar, relacionar, inferir, coordinar y extender.

Para poder lograr todo lo anterior es preciso hacer un diseño cuidadoso, apoyado en la literatura, con una trayectoria hipotética de aprendizaje bien pensada y una secuencia de tareas que estén al alcance de los estudiantes, que les motiven para el trabajo y que les permitan el avance conceptual pretendido. Por ello hace falta fomentar y apoyar el desarrollo de trayectorias de aprendizaje sobre tópicos concretos (Clements y Sarama, 2004) que describan la forma en que los estudiantes efectúan transiciones o saltos cognitivos desde sus conocimientos hacia conocimientos más complejos.

Por otra parte "*una enseñanza de las matemáticas eficaz utiliza evidencias del pensamiento del estudiante para evaluar el progreso en la comprensión matemática y para adecuar continuamente la enseñanza en formas que apoyen y extiendan el aprendizaje"* (NCTM, 2015; p. 45). Estas evidencias del pensamiento del estudiante son registros de lo que hace, lo que dice o lo que escribe; pueden ser evidencias de un proceso o del resultado de un proceso. En este sentido, cuando los estudiantes trabajan en grupo, como en nuestro experimento, verbalizando su pensamiento y discutiendo sus ideas, el profesor puede observar mejor el proceso de construcción del conocimiento de los estudiantes.

Es cierto que la gestión por parte del profesor del trabajo en grupo de los estudiantes es más compleja que la del trabajo individual, pues se producen más interacciones en la clase. Consideramos dos aspectos que pueden favorecer un trabajo en grupo eficaz, y que hemos tenido en cuenta en el diseño del experimento de enseñanza: la elaboración de guías de trabajo y los criterios para la formación de los grupos. La elaboración de una guía orienta el trabajo de los estudiantes; esta guía puede proponer acciones como experimentar, conjeturar, comprobar, justificar o elaborar conclusiones, que exige el trabajo conjunto, la verbalización de ideas y la discusión, y que muestran su grado de comprensión y sus habilidades matemáticas. En cuanto a la constitución de los grupos, si los componentes tienen un nivel académico similar, cada grupo puede trabajar a su propio ritmo, y mientras unos grupos pueden avanzar más rápidamente en la resolución de las tareas, otros necesitarán más tiempo. De esta manera los estudiantes son más autónomos y además, los grupos más avanzados pueden compartir sus conocimientos con el resto de sus compañeros en las puestas en común.

El papel del profesor orientando la actividad del alumno implica, por un lado, hacer aclaraciones, resolver dudas o hacer sugerencias cuando los estudiantes lo requieran durante su trabajo; por otro lado objetivar el conocimiento (Swidan y Yerushalmy, 2014). Cuando el profesor orienta el trabajo de los estudiantes, trata de desarrollar en ellos una mayor autonomía en su aprendizaje; en este sentido se tropieza a veces con la demanda de aquellos estudiantes que necesitan la "sanción del profesor" sobre su trabajo, porque no tienen suficiente seguridad en sus propias conclusiones. Dotar a los estudiantes de mayor autonomía en su aprendizaje es un objetivo importante.

Además, el profesor ha de tener en cuenta que en una situación de clase hay que adaptar el diseño original a las circunstancias y el ritmo de los estudiantes. En nuestro caso, algunas tareas del experimento de enseñanza no se pudieron realizar porque los estudiantes usaron más tiempo del previsto para realizar otras. También resolvieron algunas tareas de forma distinta a la que se había previsto.

Por otra parte, el diseño de entornos de aprendizaje que se apoyan en tecnologías que ayudan a la experimentación, contribuye a que los estudiantes perciban las matemáticas como una ciencia experimental, frente a la idea de una ciencia "terminada", de la que sólo ven el producto final. Las tecnologías son también instrumentos de mediación semiótica gracias a su potencialidad para presentar simultáneamente varias representaciones de un mismo concepto y para favorecer la interacción y el dinamismo (Blume y Heid, 2008; Heid y Blume, 2008; Lagrange y Artigue, 2009; Maschietto, 2008; Tall, Smith y Piez, 2008), de forma que los estudiantes sean capaces de identificar, examinar, conectar y relacionar las diferentes representaciones del concepto (Camacho, Santos y Depool, 2013).

Finalmente un entorno de aprendizaje con las características descritas, contribuye a que los estudiantes desarrollen distintos tipos de competencias: experimentar, relacionar, inferir, conjeturar y justificar les permite mejorar su *competencia matemática*;

darles la oportunidad de comunicar sus ideas, tanto de forma oral como escrita, fomenta la *competencia lingüística*; el uso de la tecnología contribuye al desarrollo de la *competencia digital*; por último fomentar un aprendizaje autónomo desarrolla la competencia de *aprender a aprender*.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Aldana, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE"*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Aldana, E. (2013). La comprensión matemática desde la teoría "APOS": el caso de la integral definida de Riemann. *Actas del VII CIBEM* (pp. 1882-1889). Uruguay: Congreso Iberoamericano de Educación Matemática

Recuperado el 10 de junio de 2015 de:

http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/107.pdf el 24/06/2015

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2010a). Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: Un estudio de casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(2), 129-158.

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2010b). Diseño de una trayectoria de aprendizaje para la construcción del concepto de dependencia lineal. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 199-210). Lleida: SEIEM.

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2010c). Un experimento de enseñanza para la construcción del concepto de integral definida usando un programa de geometría dinámica. En J.L.

Galán, G. Aguilera y P. Rodríguez (Eds.), *Proceedings of TIME 2010*. Málaga: Universidad de Málaga.

Recuperado el 10 de junio de 2015 de: http://www.time2010.uma.es/Proceedings/

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2011a). Aproximación al concepto de función primitiva: un experimento de enseñanza con applets de geometría dinámica. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, (pp. 247-255). Ciudad Real: SEIEM.

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2011b). Usando *applets* para construir el concepto de integral definida. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *58*, pp. 65-75.

Aranda, C y Callejo, M.L. (2015). Perfiles de estudiantes en la comprensión del área de la superficie bajo una curva. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds..), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 123-131). Alicante: SEIEM

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,

Artigue, M. (1995), The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education. En Y. M. Pottier (Ed.), *Proceedings of the 1995 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 7-22). Ontario: University of Western Ontario.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E. y Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis.

Berry, J. S., y Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 481-497.

Bezuidenhout, J. y Olivier, A. (2000). Student's conceptions of the integral. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 73-80). Hiroshima, Japan: Hiroshima University.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas 30*, pp. 67–83.

Blume, G. W. y Heid, M. K. (2008). The role of research theory in the integration of technology in mathematics teaching and learning. En M. K. Heid y G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics. Research Syntheses* (Vol. 2, pp. 449-464). Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics-IAP.

Boigues, F. J. (2010a). Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería. En A. Contreras y L. Ordoñez (Eds.), *Jornadas de investigación en Análisis Matemático* (pp. 42-61). Baeza: SEIEM.

Boigues, F. J. (2010b). *El desarrollo de un esquema sobre la integral definida en universitarios de ingeniería y medio ambiente*. Tesis Doctoral, Universidad de Alicante.

Boigues, F. J., Llinares, S. y Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(3), pp.129–158.

Botella, L. M., Cascón, B., Martín, C., Millán, L. M., Moltó, C., Pérez, C. y Salinas, E (2001). *Matemàtiques 2*. Alcoi: Marfil (versión en castellano, 2000).

Boyer, C. B. (1949). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover.

Boyer, C. B. (1987). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Calvo, C. (1997). *Bases para una propuesta didáctica sobre integrales*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona.

Camacho, M. y Depool, R. (2003a). Modelo de competencia para el campo conceptual de la integral definida. *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática*, Vol. 5, pp. 71-104.

Camacho, M. y Depool, R. (2003b). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el programa de cálculo simbólico (CAS) Derive. *Educación Matemática. 15*(3), 119-140.

Camacho, M. y Depool, R. (2003c). Using Derive to understand the concept of definite integral. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 5*, 1-16.

Camacho, M., Depool, R. y Santos-Trigo, M. (2010): Students' use of Derive software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 35-67.

Camacho-Machín, M y Moreno, M. (2015). Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de integral. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M.T. González y M. Moreno (Coords.), *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 121-135). La Laguna: Universidad de La Laguna.

Camacho, M., Santos, M. y Depool, R. (2013) La resolución de problemas, tecnología y comprensión del concepto de integral definida. Una investigación con estudiantes de ingeniería. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 63*, pp. 50-68.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 352–378.

Clements, D.H. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning 6*(2), 81-89.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

Codes, M., Sierra, M. y Raboso, M. (2007). Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 261-271). Tenerife: SEIEM

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción de la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (1), 65-84.

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhemi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 367-384.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153 – 166). Dordrecht: Kluver.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning whit a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167–192.

Courant, R. y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas?* México D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. y Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 297-304). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

diSessa, A. y Cobb, P. (2004). Ontological innovations and the role of theory in design experiments. *The Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 77-103.

Dörfler, W. (2002). Formation of mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning, 4* (4), 337–350.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1986). On visual versus analytical thinking in mathematics. *Proceedings of the 10th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153-158). London, UK: University of London, Institute of Education.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D.Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dunham, W. (2005). *The Calculus Gallery. Masterpieces from Newton to Lebesgue.* Princeton : Princeton University Press.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM de Strasbourg, pp. 37- 65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Neuchatel: Peter Lang.

Duval, R (1996). Quel cognitive retenir en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349–382.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education, *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 55-69), Hiroshima, Japan: PME.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 9* (1), 143-168.

Eisenberg, T. y Dreyfus, D. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 25-37). Washington D. C.: Mathematical Association of America.

Ellis, A. B. (2007a). A taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262.

Ellis, A. B. (2007b). Connections between generalizing and justifying: student's reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194-229.

Ferrara, F., Pratt, D. y Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-274). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Ferrini-Mundy, J. y Graham, K. (1994). Research in Calculus learning: understanding of limits, derivatives, and integrals. En J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results, MAA Notes Number 33* (pp. 31-45). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ferrini-Mundy, J. y Gaudard, M. (1992). Preparation or pitfall in the study of college Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education 23*(1), 56-71.

García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International of Journal of Science and Mathematics Education 9*(5), 1023-1045.

González, P.M. (2008). *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral.* Tres Cantos: Nivola.

González, M. T. y Aldana, E. (2010). Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE. En A. Contreras y L. Ordoñez (Eds.), *Jornadas de investigación en didáctica del Análisis Matemático* (pp. 4-22). Baeza: SEIEM.

Recuperado el 7 de febrero de 2015 de:

http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

González-Martín, A.S. (2005). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

González-Martín, A. (2015). Panorama internacional de la investigación sobre la enseñanza-aprendizaje de las integrales. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M.T. González y M. Moreno (Coords.). *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 109-119). La Laguna: Universidad de La Laguna.

González-Martín, A.S. y Camacho, M, (2004). What is first-year mathematics student's actual knowledge about improper integrals? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(1), 73-89.

González- Martín, A.S. y Camacho, M. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las Ciencias, 23*(1), 81-96.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 105-128.

Guzmán, M. (1997-2010). *El rincón de la pizarra*. Madrid: Pirámide.

Heid, M.K. y Blume, G. W. (2008). Algebra and function development. En M. K. Heid y G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*. *Research Syntheses* (vol. 1, pp. 55-108). Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics-IAP.

Hong, Y. y Thomas, M. (1997). Using the computer to improve conceptual thinking in integration. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 81–88). Lahti, Finland: University of Helsinki.

Kieran, C. y Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: a study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*, 205–263.

Kilpatrick, J. y Wirszup, I. (Eds.) (1969-1975). *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*. XIV vols. Stanford: NCTM

Kindt, M. (2011). *Aportaciones de la historia de las matemáticas a la educación moderna.* Utrech: Freudenthal Institut-Universidad de Utrecht (Holanda).

Recuperado el 28 de julio de 2015 de:

http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/120/114

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 134–174.

Kline, M. (1980). *Mathematics: The Loss of Certainty*. New York: Oxford University Press.

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial.

Kouropatov, A. y Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM Mathematics Education, 46,* 533-548.

Lagrange, J. B. y Artigue, M. (2009). Student’s activities about functions at upper secondary level: A grid for designing a digital environment and analyzing uses. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33^{rd} Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 465-472). Greece: PME.

Llorens J.L., y Santonja, F.J., (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas, 5* (1/2), 13-22.

Maschietto, M. (2008). Graphic calculators and micro-straightness: analysis of a didactic engineering. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(3), 207-230.

McDonald, M. A., Mathews, D. M. y Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: a tale of two objects. En A.H. Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV, CBMS Issues in Mathematics Education* (vol. 8, pp. 77-102). Providence, RI: American Mathematical Society.

Mundy, J. (1987). Analysis of errors of first year calculus students. En A. Bell, B. Low y J. Kilpatrick (Eds.). *Proceedings of the 5^{th} International Congress on Mathematics Education* (pp. 170-172). Adelaida, Australia: ICME5.

Muñoz, G. (2007). Rediseño del cálculo integral escolar fundamentado en la predicción. En: C. Dolores, G. Martínez,, R. M. Farfán, C. Carrillo, C., I. López y C. Navarro, (2007). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 27-76). Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

NCTM (2015). *De los principios a la acción*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. En E. Castro (Coord.), *Investigación en Educación Matemática VII* (pp. 277-287). Granada: SEIEM.

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2010). La integral definida en las pruebas de acceso a la universidad (PAU): sesgos y restricciones en la enseñanza de este objeto en 2º de bachillerato. *Jornadas de investigación en Análisis Matemático. Publicación del grupo de Didáctica del Análisis Matemático de la SEIEM* (pp. 23-41). Baeza: SEIEM.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1-18.

Piaget, J. (1967/1977). *Biología y conocimiento*. Madrid: Siglo XXI Editores (Editado en 1967 por Éditions Gallimard).

Piaget, J. (1970/1986). *La epistemología genética*. Madrid: Editorial Debate. (Editado en 1970 por Presses Universitaires de France).

Piaget, J. (1977/2001). *Studies in reflecting abstraction*. Sussex: Psychology Press (Editado en 1977 por Presses Universitaires de France).

Piaget, J. y García, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. New York: Columbia University Press. (Publicación original de 1983).

Pons, J. B. (2014). *Análisis de la comprensión en Estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. Tesis doctoral. Universidad de Alicante

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2011). Coordination of aproximation in secondary school students' understanding of limit concept. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychoogy of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 393-400). Ankara, Turkey: PME.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435–445). Jaén: SEIEM.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2013). Características de la tematización del esquema de límite de una función. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 449–457). Bilbao: SEIEM.

Porres, M. (2011). *Integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1997). *Historia de la matemática*, Volumen II. Barcelona: Gedisa.

Ríbnikov, K. (1991). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Editorial Mir.

Richard, P. R. (2004). L'inférence figurale: un pas de raisonnement discursive-graphique, *Educational Studies in Mathematics, 57*, 229-263.

Robert, A. y Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis. En D. Holton (Eds.), *Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 283-299). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Roig. A. I. (2008). *Análisis de las fases del proceso de abstracción matemática en estudiantes de secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-89.

Santos, M. (2000). The use of representations as a vehicle to promote students' mathematical thinking in problem solving. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, *7* (3), 193-212.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" de surfaces et de solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *11* (2.3), 241- 294.

Schneider, M. (1993). A way to analyse several difficulties the pupils meet with in calculus. En M. Artigue y G. Ervynck (Eds.), *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7* (pp. 31-34). Québec, Canada.

Sealey, V. (2006). Student understanding of definite integrals, Riemann sums and area under a curve: What is necessary and sufficient? En S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz, y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 46-53). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *The Journal of Mathematical Behavior, 33*, 230-245.

Sierpinska, A. (1985), Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6* (1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(4), 371–87.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Simon, M., Saldanha L., McClintock, E., Akar, G.K., Watanabe, T. y Zembat, I.O. (2010). A developing approach to studying students' learning through their mathematical activity. *Cognition and Instruction*, *28*(1), 70-112.

Simon, M. A y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(5), 305-329.

Simon, M. (2014). Hypothetical learning trajectories in mathematics education. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272-275). London: Springer.

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly, y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Pubs.

Swidan, O. y Yerushalmy, M. (2014). Learning the indefinite integral in a dynamic and interactive technological environment. *ZDM*, *46*(4), 517-531.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. En A. J. Bishop y cols. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325) Dordrecht: Kluwer.

Tall, D., Smith, D. y Piez, C. (2008). Technology and calculus. En M. K. Heid y G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and Learning of Mathematics*. *Research Syntheses* (vol. 1, pp. 207-258). Charlotte, North Carolina: NCTM.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 152-169.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 275–298.

Thompson, P. W. y Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. En M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Recuperado el 1 de Julio de 2015 en:

http://pat-thompson.net/PDFversions/2008MAA Accum.pdf

Turégano, P. (1994). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo integral.* Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(2), 233-249.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 390-416.

Tzur, R. (2007). Fine grain assessment of students' mathematical understanding: participatory and anticipatory stages in learning a new mathematical conception. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 273-291.

Tzur, R., Hagevik, A. y Watson, M. E. (2004). Fostering mathematical meaning via scientific inquiry: A case study. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 345-352). Bergen: PME.

Tzur, R. y Simon, M. A. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2,* 287-304.

Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las ciencias, 29*(3), 325–338.

Vera, F. (1970). *Científicos griegos*. Madrid: Aguilar.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.

Wood, T. y Berry, B. (2003). Editorial: What does “design research” offer mathematics teacher education? *Journal of Mathematics Teacher Education, 6,* 195-1999.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 435-457.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

DEPARTAMENTO DE INNOVACIÓN Y FORMACIÓN DIDÁCTICA

ANÁLISIS DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

ANEXOS TESIS DOCTORAL

MARIA DEL CARMEN ARANDA LÓPEZ

ALICANTE, DICIEMBRE 2015

ÍNDICE

ÍNDICE

ANEXO I. Tareas del Experimento...…………………………………………….. 1

ANEXO II. Transcripción Tarea Área del cuadrante- Pareja A-J……………..…. 25

ANEXO III. Transcripción Tarea Área del cuadrante - Pareja K-MA ..….……. 35

ANEXO IV. Transcripción Tarea Área del cuadrante - Pareja L-M ……..………. 41

ANEXO V. Transcripción Tarea Parábola - Pareja A-J...………..……….……. 51

ANEXO VI. Transcripción Tarea Parábola - Pareja K-MA……..……….………. 57

ANEXO VII. Transcripción Tarea Parábola - Pareja L-M……………….………. 67

ANEXO VIII. Transcripción Tarea Parábola. Error de la Aproximación - Pareja K-MA …………..………….……………………………………………. 77

ANEXO IX. Transcripción Tarea Parábola. Error de la Aproximación- Pareja L-M……………………………………………………………………………. 83

ANEXO X. Transcripción Tarea Área e integral- Pareja A-L…..….……….……. 87

ANEXO XI. Transcripción Tarea Área e integral - Pareja K-MA……………..……. 95

ANEXO XII. Transcripción Tarea Área e integral - Pareja L-M..……………..……. 101

ANEXO XIII. Transcripción Tarea Función integral I - Trío AJ-AV-V…………. 109

ANEXO XIV. Transcripción Tarea Función integral I - Pareja L-M……………… 117

ANEXO XV. Transcripción Tarea Función integral II - Pareja L-M………..…... 121

ANEXO XVI. Respuesta escrita a las tareas - Pareja A-J……………….……….. 127

ANEXO XVII. Respuesta a las tareas - Pareja A-L...……………..……………… 131

ANEXO XVIII. Respuesta a las tareas - Pareja AJ-AV-V…...……………….…….. 135

ANEXO XIX. Respuesta a las tareas - Pareja K-MA……...………..…………..… 137

ANEXO XX. Respuesta a las tareas. - Pareja L-M…….....................................…… 147

ANEXO I

SESIÓN Nº:____________ FECHA:___________________ PAREJA Nº:_______

NOMBRES: __________________ y _______________________

Tarea 1. Áreas de polígonos con funciones. Archivo:T_1_áreas_pol_funciones

Indica las ecuaciones de las rectas que delimitan el rectángulo sombreado.

I. Si mantenemos **a=0** y **b=2**, y cambiamos los valores de **m** y **n** de la recta azul (utiliza los deslizadores) justifica que el área del polígono que aparece sombreado es la que se indica:

- en el caso de rectángulos (**m=0**)
- en el caso de triángulos (**n=0**)
- en el caso de trapecios (**m≠0 y n≠0**)

II. Para valores fijos de **m** y **n**, sin desplazar **a** mueve **b**, ¿podrías obtener una fórmula para hallar el valor del área sombreada para cualquier valor de **b**?

Por ejemplo:
a) **m=0**, **n=2**
b) **m=2**, **n=0**
c) **m=1**, **n=2**

III. Cambia el valor de **b** y comprueba la validez de las fórmulas que has encontrado.

IV. ¿Qué ocurre si para un valor de **m** y **n** dados, manteniendo fijo **b**, cambiamos el valor de **a**?

SESIÓN Nº:____________ FECHA:____________________ PAREJA Nº:_______

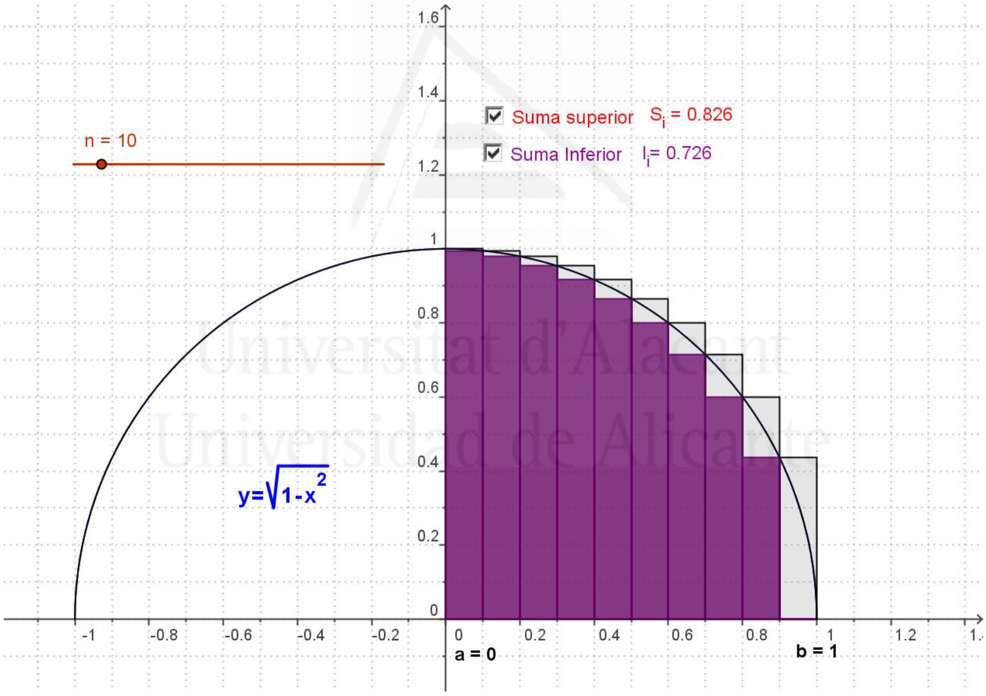
NOMBRES: ___________________ y ________________________

Tarea 2. Área del cuadrante. Cálculo aproximado del área mediante particiones

Archivos: T2_área_del_cuadrante.ggb y Tarea2.xls

Cuando queremos calcular el área bajo una función no rectilínea, es decir bajo una curva, tenemos que recurrir a aproximaciones. Recuerda cómo calculamos el valor de π aproximando el área del círculo mediante polígonos inscritos y circunscritos en el círculo, aumentando el número de lados y hallando el límite.

Ahora vamos a calcular de nuevo el valor de π, hallando el área del cuadrante de un círculo, usando la función $y = \sqrt{1 - x^2}$, y aproximando mediante rectángulos.



I. Cambia el valor de **n** utilizando el deslizador, y observa:
   a. El número de subintervalos en que se divide el intervalo.
      Para un valor de **n** dado, ¿cuántos subintervalos hay?

   b. La longitud de estos subintervalos.
      Para un valor de **n** dado, ¿cuál es la longitud de los subintervalos?

II. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas inferiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de **n** para aproximar el área hasta el valor anterior?

Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de **n**?

V. Si se aumenta el valor de **n**, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?

VI. Abre la hoja de cálculo Tarea2_cuadrante.xls y completa las celdas vacías para los valores de **n=3**, **n=4**, **n=5**.

VII. Comprueba en la hoja de cálculo Tarea2_cuadrante.xls los valores obtenidos en los apartados IV y V.

SESIÓN Nº:____________ FECHA:___________________ PAREJA Nº:_______

NOMBRES: __________________ y _______________________

Tarea 3. Parábola. Archivos: T3_partición_parábola[0,1] yTarea3_parábola.xls

I. Mueve el deslizador y observa lo que ocurre con el número de puntos de la **partición**, el número de subintervalos y la longitud del subintervalo.

a. ¿Qué representa **n**?

¿Qué relación hay entre **n** y el número de puntos de la **partición**?

b. ¿Qué relación hay entre **n** y la longitud de los subintervalos?

c. Escribe los valores de los extremos del intervalo de la **partición** para:

n=1: a_0= **; a_1=**

n=2: a_0= **; a_1=** **;a_2=**

n=3:

n=4:

...

n=10:

d. Busca una fórmula general para cualquier valor de **n**:

1. De la longitud del subintervalo : **Δx**=

2. De los valores de los extremos del intervalo de la **partición**:

$\mathbf{a_0}$=

$\mathbf{a_1}$=

$\mathbf{a_2}$=

....

$\mathbf{a_n}$=

II. Observa las **sumas superiores** e **inferiores** de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos:

a. En las **sumas inferiores**:

b. En las **sumas superiores**:

c. Escribe una fórmula para las **sumas superiores**, $\mathbf{S_i}$ y otra para las **sumas inferiores**, $\mathbf{I_i}$, relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la **partición**.

III. En la tarea anterior y con ayuda de la hoja de cálculo **Tarea3 parábola.xls**.

Marca en la **T3_partición_parábola[0,1]** la casilla correspondiente a la **suma inferior** y a los mínimos. En la **tabla**, o usando la **hoja de cálculo**, completa las columnas correspondientes a los rectángulos inferiores. Si lo haces con la hoja de cálculo no es necesario que copies aquí los datos, completa la hoja y después la imprimes.

n	**Δx= long Subi nt.**	**Parti-ción**	**f(x_i)**	**Intervalos**	**alt rect. Inf.**	**Área rect Inf**	**suma Inf I_i**	**alt rect. Sup.**	**suma Sup S_i**	**semi-suma (S_i+ I_i)/2**
1		x_0=								
		x_1=		[x_0, x_1]=						
2		x_0=								
		x_1=		[x_0, x_1]=						
		x_2=								
3		x_0=								
		x_1=								
		x_2=								
		x_3=								
4		x_0=								
		x_1=								
		x_2=								
		x_3=								
		x_4=								
5										
10										

IV. Desmarca la casilla de las **sumas inferiores** y marca el de las **sumas superiores** y los **máximos**. Completa las columnas correspondientes de la tabla.

V. Identifica la relación entre las longitudes de los **subintervalos** de la **partición** y las diferencias $\mathbf{S_i\text{-}I_i}$.

VI. ¿Puedes dar un explicación de lo que ocurre observando la gráfica?

SESIÓN Nº:____________ FECHA:___________________ PAREJA Nº:_______

NOMBRES: __________________ y _______________________

Tarea 4. Parábola: Error de la aproximación. **Archivo: T4_Parábola[0,5]**

Mueve el deslizador **n** y observa cómo varían los rectángulos superiores e inferiores y el rectángulo rojo de la derecha:

I. Trata de identificar alguna relación. ¿Ocurre lo mismo que en el ejercicio anterior respecto a las diferencias $\mathbf{S_i-I_i}$?

II. Busca una fórmula para el área del rectángulo rojo de la derecha dependiendo del valor de n. Para ello necesitas saber la base y la altura del rectángulo.

1. ¿La altura depende de **n**? Altura=

2. ¿La base depende de **n**? Calcula la base del rectángulo para:

   a. **n=10**, Base=

   b. **n=20**, Base=

   c. **n= 50**, Base=

   d. ....

   e. **n** , Base=

b. Obtén una fórmula para las diferencias entre las **sumas superiores** e **inferiores** dependiendo del valor de n.

c. Identifica la relación entre el área del rectángulo amarillo y el **error máximo** cometido al aproximar el área.

d. Si error máximo es 0,1 ¿cuántos intervalos tienes que coger?

¿y si es 0,01?

e. ¿Podrías encontrar un procedimiento para determinar un valor de **n** que permita calcular el área con un error menor que un número tan pequeño como se quiera?

SESIÓN Nº:_____________ FECHA:____________________ PAREJA Nº:________

NOMBRES: ____________________ y __________________________

I. **Fórmula para la suma de los cuadrados: Suma de cuadrados.**

Vamos a obtener la fórmula de las **sumas inferior**es y **superiores** de la función del ejercicio anterior para cualquier valor de **n**. Para ello necesitaras la fórmula de suma de los cuadrados:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \quad + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, o también: $\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)2n+1)}{6}$

ten en cuenta que :

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \quad + (n-1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots . + (n-1)^2 =$$

$$= \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \quad \text{o también:}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (i-1)^2 = \sum_{j=0}^{j=n-1} j^2 = \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

I. Obtén para el área bajo la parábola entre x=0 y x=5, las **sumas inferiores** (**I_n**) y las **sumas superiores** (**S_n**) con ayuda de las fórmulas anteriores.

a. Las **sumas inferiores**:

n=10; $\boldsymbol{I_{10}} =$

n=20; $\boldsymbol{I_{20}} =$

....

para **n;** $\boldsymbol{I_n} =$

b. Las **sumas superiores**:

n=10; $\boldsymbol{S_{10}} =$

n=20; $\boldsymbol{S_{20}} =$

....

para n; $\boldsymbol{S_n} =$

Habrás obtenido las siguientes fórmulas para las **sumas inferiores** y **superiores**

$$I_{n=} \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{5}{n} f(a_i) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{5}{n}\left(\frac{5i}{n}\right)^2 = \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{5^3}{n^3} \mathrm{i}^2 = \frac{5^3}{n^3} \sum_{i=0}^{i=n-1} \mathrm{i}^2 =$$

$$= \frac{5^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{5^3\,(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$S_{n=} \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{n}\left(\frac{5i}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{5^3}{n^3} i^2 = \frac{5^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{5^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{5^3\,(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Calcula:

a. $\lim_{n\to\infty} I_n$ =

b. $\lim_{n\to\infty} S_n$ =

Cuando, como en este caso, el límite de las sumas superiores e inferiores coincide, **la función es integrable** y

$$\int_0^5 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5^3}{3}$$

Que llamaremos **integral definida**[1] de f(x) entre 0 y 5. Por tanto el área determinada por la función con el eje OX entre x=0 y x=5 es:

$$\int_0^5 x^2 dx = \frac{5^3}{3}$$

Aunque éste es un proceso bastante laborioso para hallar áreas. Veremos si podemos obtener esta integral por otros métodos.

Hemos definido la integral a partir del área, pero ahora podemos considerar la integral como un número asociado a una función: **Integral = límite sumas inferiores= límite sumas superiores.**

[1] Observa que el símbolo de integral es una S alargada (S de suma=∑) y Δx se convierte en dx. Esta notación es de Leibnitz. La palabra integral se refiere a que es toda el área, o el área integral.

SESIÓN Nº:____________ FECHA:___________________ PAREJA Nº:_______

NOMBRES: __________________ y _______________________

Tarea 5. Área e integral. **Archivo:T9_integral y área.ggb**

Vamos a calcular las áreas de regiones que no están situadas siempre por encima del eje X, es decir delimitadas por funciones no siempre positivas. También calcularemos las integrales de dichas funciones en esos intervalos.

En éstos casos, ¿será igual el área a la integral?, ¿Podrá ser cero la integral aunque delimite una región de área no nula?

I. Para **m**=0, **n**=-2 entre **a**=0 y **b**=4

a. Calcula $\int_0^4 -2\,dx$

b. Calcula por métodos geométricos el área sombreada.

c. Qué relación tiene el área sombreada con $\int_0^4 -2\,dx$

d. Expresa el área sombreada usando $\int_0^4 -2\,dx$

II. Da otros valores a **m** y **n**, **a** y **b**, para que toda la región sombreada quede por debajo del eje X.

a. Calcula el área de dichas regiones.

b. Expresa dichas áreas usando integrales

c. Escribe tus conclusiones respecto a cómo se calculan las áreas de regiones situadas por debajo del eje X usando integrales.

III. ¿Y si la región está situada en parte por encima del eje X y en parte por debajo, es decir la integral es negativa en un trozo y positiva en otro?

Prueba con **m**=1, **n**=0, entre **a**=-2 y **b**=2

a. ¿Cuál es el valor de $\int_{-2}^{2} \boldsymbol{x d x}$

b. Y el valor del área encerrada entre las rectas x=-2, x=2 , el eje OX y la recta y=x.

c. Calcula $\int_{-2}^{3} \boldsymbol{x d x}$

d. Calcula el área de la región determinada por las rectas x=-2, x=3 , el eje OX y la recta y=x.

e. Expresa dicha área mediante integrales y valores absolutos.

Si la función es negativa en todo el intervalo de integración, el valor de la integral es negativo. Diremos en ese caso que el área es $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx.$

Si es negativa en unos intervalos y positiva en otros, el área es la suma de las áreas en cada intervalo, teniendo en cuenta el signo de la función, y por tanto de la integral, en cada caso .

SESIÓN Nº:____________ FECHA:____________________ PAREJA Nº:_______

NOMBRES: ___________________ y ________________________

Tarea 6. Propiedades de la integral

I. Con ayuda de **T_10_I_acb.ggb** podrás comprobar una propiedad de la integral.

a. Escribe la propiedad con los valores actuales de **a**, **b** y **c**

b. Prueba con otros valores de **c**

c. Prueba también con otros valores de **a** y **b**

d. Y con otras funciones, arrastrando la gráfica de la función y=f(x) o abriendo la vista algebraica y modificándola.

e. Escribe la propiedad que has comprobado.

II. Con ayuda de T_10_II_f+g busca la relación entre $\int_a^b \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right) \boldsymbol{dx}$ y las integrales $\int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx}$ y $\int_a^b \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx}$.

a. Escribe la propiedad observada.

b. Prueba con otros valores de **a** y **b**.

c. Prueba con otras funciones f y g.

d. Escribe la propiedad

III. ¿Qué propiedad puedes comprobar con ayuda de T_10_III_kf?

a. Escríbela

b. Prueba a cambiar **a** y **b.**

c. Cambia también **k**, ¿sigue siendo cierta la propiedad anterior?

d. Cambia también las funciones

e. Escribe la propiedad.

IV. Si **a**=**b** ¿qué vale $\int_{a}^{a} \boldsymbol{f(x)dx}$

V. Si **a**≥**b**, ¿Qué significa la integral? Puedes utilizar alguna de las escenas anteriores.

a. Por ejemplo y=x, **a**=4, **b**=0, ¿qué relación hay entre $\int_{4}^{0} xdx \;\; y \;\; \int_{0}^{4} xdx$?

b. Prueba con otros valores.

c. Escribe tus conclusiones.

VI. **T10_IV_fmenorg**

a. Escribe la propiedad.

b. Cambia los valores de **k** y observa.

c. Cambia los valores de **a** y **b** y observa el resultado de las integrales.

d. Cambia la función f(x) arrastrando en la gráfica cualquier dirección y observa.

e. Escribe la propiedad.

SESIÓN Nº:____________ FECHA:___________________ PAREJA Nº:_______

NOMBRES: __________________ y _______________________

Tarea 7. Función integral I. T_11_F_Integral_I_rectas Ej. 53 del libro de texto

I. Cuando **a**=0 y **t**=2, cambiando el valor de **m** y **n** en los deslizadores justifica que el área del cuadrilátero es la que se indica,
   - en el caso de rectángulos (**m**=0)
   - en el caso de triángulos (**n**=0)
   - en el caso de trapecios (**m**≠0 y **n**≠0)

II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?
   Por ejemplo:
   - Si **m**=0, **n**=2
   - Si **m**=2, **n**=0
   - Si **m**=1, **n**=2

III. Comprueba la validez de las fórmulas cambiando el valor de t y sustituyendo en las fórmulas obtenidas.

IV. ¿Qué ocurre si para un valor de **m** y **n** dados, manteniendo fijo t, cambiamos el valor de **a**?

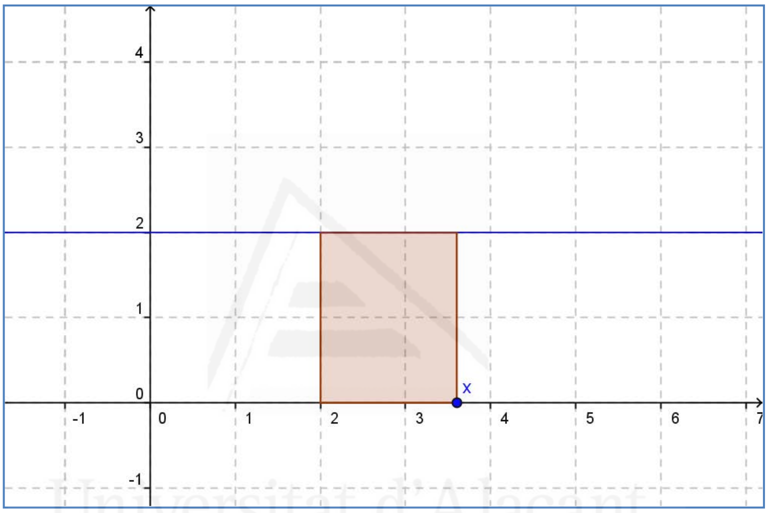
V. ¿Y con parábolas? Repite los pasos anteriores No la hicieron

SESIÓN Nº:____________ FECHA:___________________ PAREJA Nº:_______
NOMBRES: __________________ y _______________________

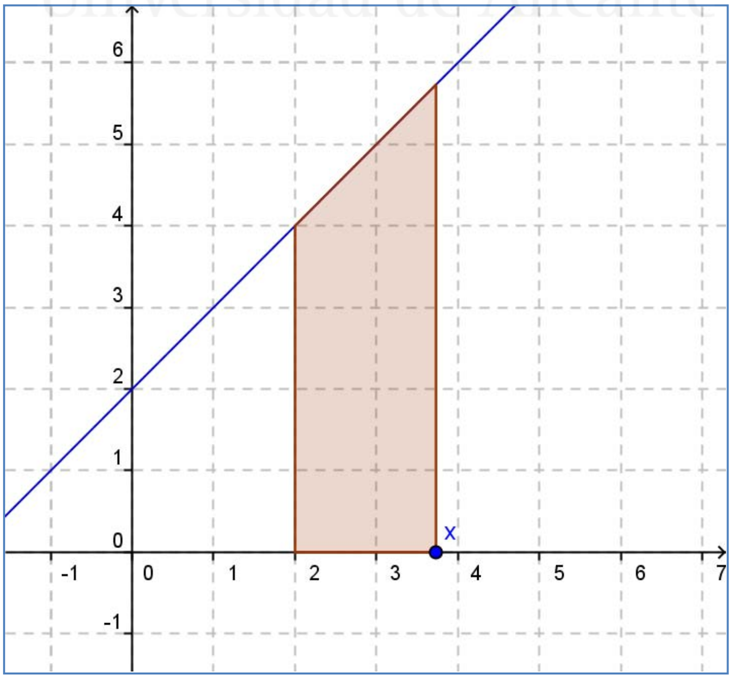
Tarea 8. Función integral II**.**

Dibuja, aproximadamente, las gráficas de la funciones F_I y F_{II} que nos ofrezcan el valor del área bajo cada una de las gráficas siguientes desde 2 hasta x (para valores comprendidos entre 2 y 5)

I.



II.



SESIÓN Nº:____________ FECHA:___________________ PAREJA Nº:_______

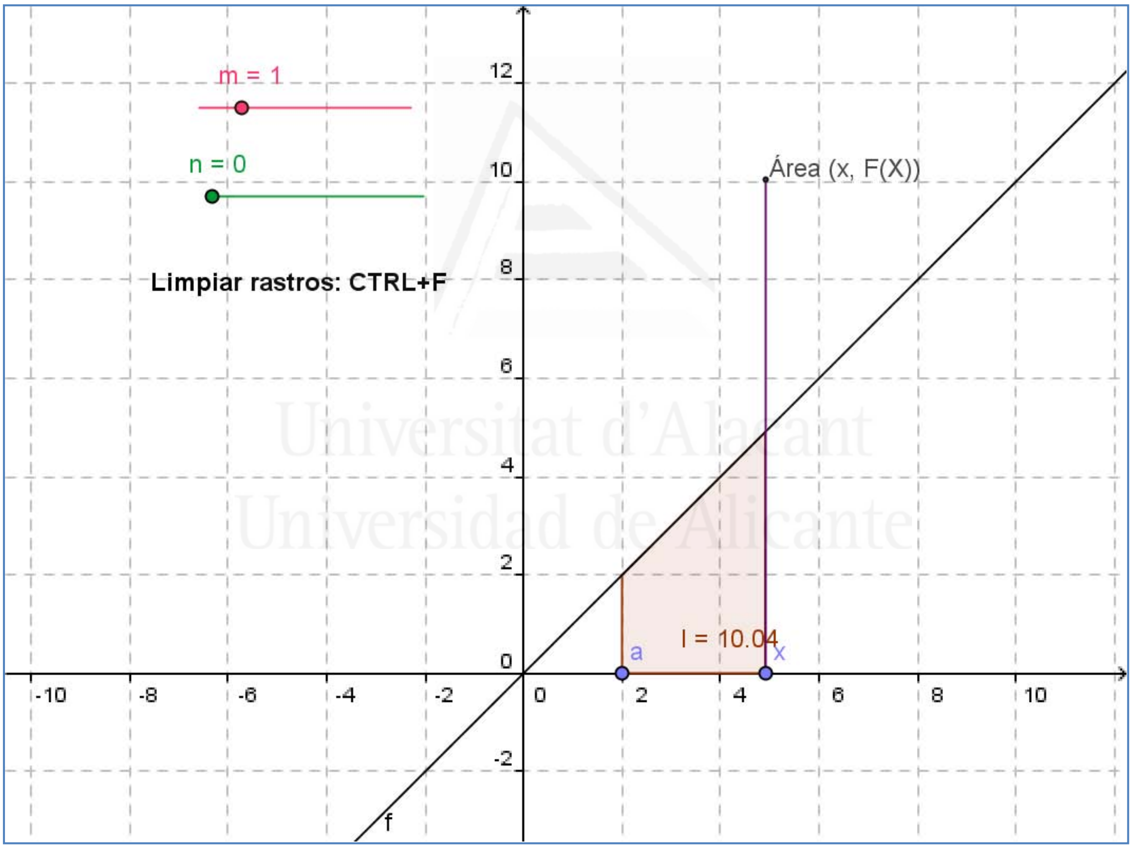
NOMBRES: __________________ y _______________________

Tarea 9. Función integral III. T_13_F_integral_II_rectas.

Comprueba los resultados del ejercicio anterior en la T13_F_integral_I y T13_F_Integral_II

I. Da a m y n los valores correspondientes en cada caso y escribe la función obtenida en cada caso

II. Comprueba, desplazando b que el área coincide con el valor de la función obtenida en cada caso.



III. ¿Eran correctos?

Si no lo eran, ¿podrías ahora hallar la integral de cualquier región limitada por el eje OX, las rectas verticales x=2, x=b y una recta y = mx+n con m≥0, n≥0?

IV. ¿Y de una región limitada por: el eje eje OX, dos rectas verticales x=a , x=t y una recta y = mx+n, con m,n, a y t positivos?

SESIÓN Nº:____________ FECHA:___________________ PAREJA Nº:_______

NOMBRES: __________________ y _______________________

Tarea 10. **T_15_I_TFC_h_posit y T_15_II_h_negat**

Dada la función f(x) continua, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, y podemos estudiar si es derivable y cuál es su derivada. Para ello estudiaremos el límite de las TVM$= \frac{F(x+h)-F(X)}{h}$ para valores de h>0 y h<0.

En las siguientes escenas:

I. T15_I (h>0) ; Para el valor de a y x dados, estudia $\boldsymbol{\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(X)}{h}}$
Escribe los resultados que vayas obteniendo para los distintos valores de h y el límite.

II. T15_II (h<0). Para el valor de a y x dados, estudia $\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x+h)-F(X)}{h}$
Escribe los resultados que vayas obteniendo para los distintos valores de h y el límite

III. ¿Existe $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(X)}{h}$?

IV: ¿Cuál es el valor de ese límite?

Acabas de descubrir el **Teorema Fundamental del cálculo integral. Escríbelo.**

Si f es continua, podemos demostrar la continuidad y derivabilidad de la función integral F(x)= $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ con lápiz y papel.

SESIÓN Nº:____________ FECHA:____________________ PAREJA Nº:_______

NOMBRES: ___________________ y ________________________

Tarea 11. Demostración Regla de Barrow**.**

Esto nos permite hallar áreas usando antiderivadas de la función, es decir funciones cuya derivada es la función cuya integral queremos calcular. A esas funciones se les llama primitivas.

Dada f(x), ¿existe una sola primitiva, es decir, una sola F(x) tal que F'(x)=f(x)?

Si encontramos dos de tales funciones, F(x) y G(x), como F'(x)=G'(x)→ F'(x)-G'(x)=0→ la diferencia entre F(x) y G(x) ha de ser constante, F(x)-G(x)=k → F(x)=G(x)+k ;

Como F(a)=$\int_a^a f\ dt$=0, F(a)=G(a)+k=0 →G(a)= -k, y F(x)=$\int_a^x f\ dt$=G(x)+K=G(x)-G(a)

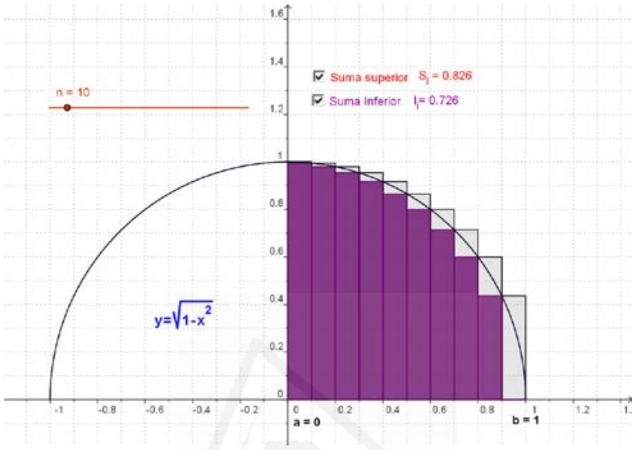
Regla de Barrow: Si G(x) es una primitiva de f(x), $\int_a^b f\ dt$=G(b)-G(a).

ANEXO II

Transcripción de la Tarea Área del cuadrante. Pareja 2. A-J

Cuando queremos calcular el área bajo una función no rectilínea, es decir bajo una curva, tenemos que recurrir a aproximaciones. Recuerda cómo calculamos el valor de π aproximando el área del círculo mediante polígonos inscritos y circunscritos en el círculo, aumentando el número de lados y hallando el límite.

Ahora vamos a calcular de nuevo el valor de π, hallando el área del cuadrante de un círculo, usando la función $y = \sqrt{1 - x^2}$, y aproximando mediante rectángulos.



I. Cambia el valor de **n** utilizando el deslizador, y observa:
   a. El número de sub-intervalos en que se divide el intervalo.
      Para un valor de **n** dado, ¿cuántos sub-intervalos hay?
   b. La longitud de estos sub-intervalos.
      Para un valor de **n** dado, ¿cuál es la longitud de los sub-intervalos?

II. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas inferiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

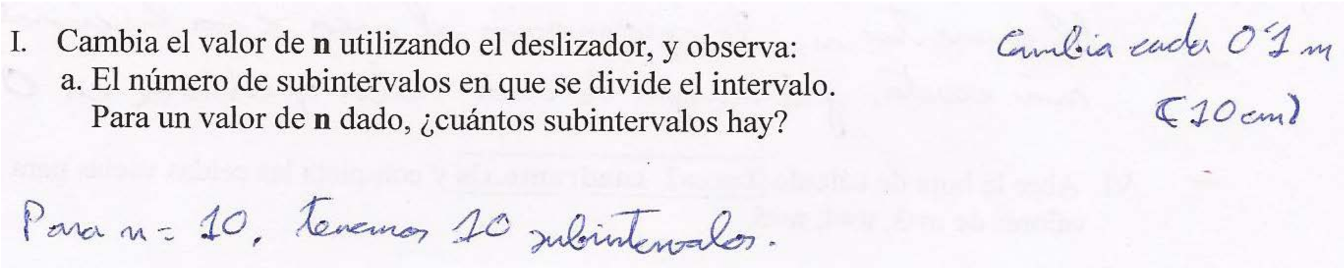
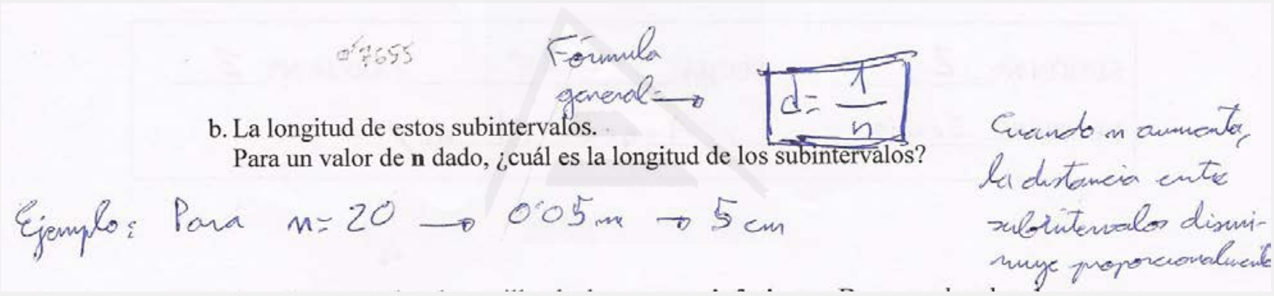
IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de **n** para aproximar el área hasta el valor anterior?
    Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de **n**?

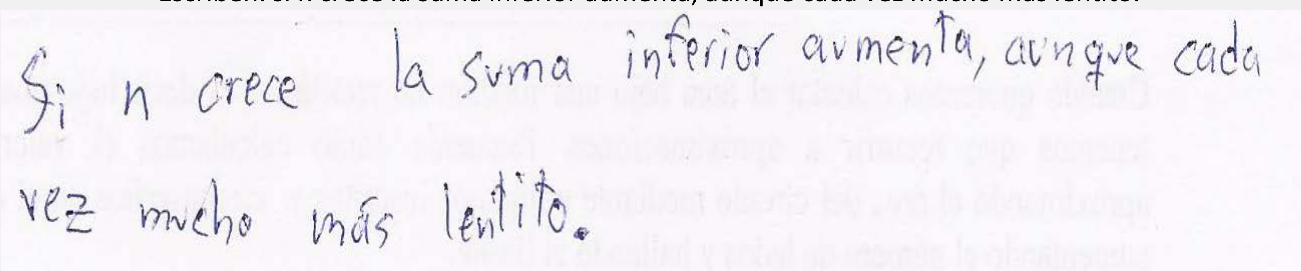
V. Si se aumenta el valor de **n**, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?

VI. Abre la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** y completa las celdas vacías para los valores de **n=3**, **n=4**, **n=5**.

VII. Comprueba en la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** los valores obtenidos en los apartados IV y V.

<table>
<tr><th colspan="3">Pareja 2</th><th>Dicen</th><th>Hacen</th></tr>
<tr><td colspan="5">2.I. Cambia el valor de n utilizando el deslizador, y observa:
a. El número de sub-intervalos en que se divide el intervalo.

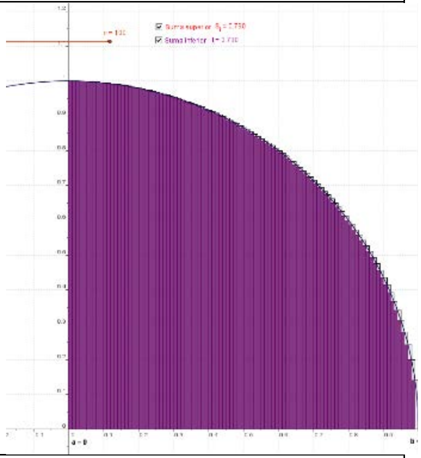
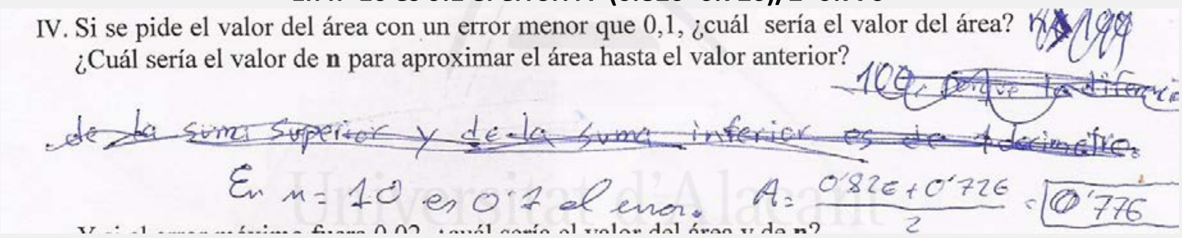
Para un valor de n dado, ¿cuántos su-intervalos hay?</td></tr>
<tr><td colspan="5">Escriben: para n=10 tenemos 10 sub-Intervalos. (nota al margen: Cambia cada 0,1m (10 cm))

I. Cambia el valor de n utilizando el deslizador, y observa:
a. El número de subintervalos en que se divide el intervalo.
Para un valor de n dado, ¿cuántos subintervalos hay?
Cambia cada 0'1 m (10 cm)
Para n = 10, tenemos 10 subintervalos.</td></tr>
<tr><td colspan="5">2. I. b. La longitud de estos sub-intervalos.
Para un valor de n dado, ¿cuál es la longitud de los sub-intervalos?</td></tr>
<tr><td colspan="5">Escriben:
Fórmula general: d=1/n; Ejemplos: para n=20, 0.05 m, 5 cm. Cuando n aumenta, la distancia entre sub-intervalos disminuye proporcionalmente

Fórmula general → $\boxed{d = \frac{1}{n}}$
b. La longitud de estos subintervalos.
Para un valor de n dado, ¿cuál es la longitud de los subintervalos?
Ejemplo: Para n = 20 → 0'05 m → 5 cm
Cuando n aumenta, la distancia entre subintervalos disminuye proporcionalmente</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">2. II. Deja sólo marcada la casilla de las sumas inferiores. Da a n el valor 1 y ve aumentando n. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.</td></tr>
<tr><td>16:43</td><td>1</td><td>A</td><td>[Lee] Deja sólo marcada la casilla de las sumas inferiores. Da a n el valor 1 y ve aumentando n. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.</td><td>Empiezan con el applet en n=10 y las casillas de Suma inferior y superior marcadas.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>J</td><td>Esto lo vas a escribir tú.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>A</td><td>¿Para qué, para que tenga mi letra?</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>J</td><td>Vale, es la suma superior ¿Qué suma es la que pide, la superior?</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>A</td><td>La inferior</td><td></td></tr>
</table>

Pareja 2			Dicen	Hacen
	4	J	Deja sólo marcada la casilla de las sumas inferiores. Hay que ver lo que pasa cuando este número aumenta o disminuye.	[17:30] Llevan el desliz. a n=1 y quitan la marca de la suma superior. Señalan con el puntero la suma inferior que tiene el valor 0.000356.
	5	A	Cuando aumenta cada vez hay más subdivisiones.	Van aumentando n hasta 100 lentamente, parándose un instante en algunos valores(n=32). Vuelven a n=1, y van aumentando de nuevo hasta n=100.
	6	J	Aumenta pero cada vez más lento.	Van a n=94 y de nuevo a 100. Otra vez a 98, 99 y a 100
	7	C	¿Cómo va eso?	
	8	A	Aquí, para un valor de n dado, que quiere decir, que pongamos un ejemplo o que pongamos una fórmula [están preguntando por el apartado anterior] …(no trascribo)	
	9	C	Una fórmula	
	10	A	Sí ¿no? Ves como era fórmula.	
17:44	11	J	Escribe	
	12	A	¿Qué hay que escribir?	
17:44	13	J	Conforme se aumenta n la suma inferior aumenta, pero cada vez más lento. [pausa] Pasa por aquí una cosa tan extraña.	
18:10	14	A	Claro que más lento, si las divisiones…	
	15	J	Mira, al principio empieza a subir tan rápido, pero después poco a poco va bajando, bajando, bajando… ¿Ves?	Llevan a n=2, luego 6, 7, 17,..100. Mueven rápido el deslizador hacia valores inferiores y de nuevo lo suben. Lo dejan en n=1
	16	J	Más lentito	
	17	A	Más lentito	
Escriben: si n crece la suma inferior aumenta, aunque cada vez mucho más lentito.  Si n crece la suma inferior aumenta, aunque cada vez mucho más lentito.				
	2. III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.			
18:37	18	J	[Lee] Deja sólo marcada la casilla de las sumas superiores	Quitan la marca de suma inferior y ponen suma superior

Pareja 2			Dicen	Hacen
	19	A	No, espérate. Vamos a sacar la fórmula [se refieren a la del apartado anterior]	
	20	J	Pero si no la hemos sacado antes Ángel. Ya hemos probado y no funciona.	
	21	A	Yo la sacaré ¡Tranquilo Muela [Jesús]! [canta Ángel]	
18:58	22	J	Por fin hablo yo sólo. Le he quitado el micro a Ángel. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Podemos comprobar que la suma superior va disminuyendo cada vez más lentamente, hasta llegar a suma superior n=100, que queda suma superior, S=0.790. Empieza de 1 y baja a 0.790. La progresión cada vez que n aumenta, la disminución es más lenta debido al número de intervalos que hay. Procedemos a escribirlo.	Aumentan y disminuyendo n Ponen n=1. Van aumentando poco a poco n hasta 100
	23	A	Ya tengo la fórmula	N=1, aumentan y disminuyen
	24	J	Pues explica cómo la has sacado.	
	25	A	La fórmula de b es igual a, d es igual a 1 partido n. Así de sencillo. Voy a comprobarlo con mi… con Mario. Perfecto, Jesús. Hemos certificado nuestro resultado con Mario y el resultado es correcto.	
	26	J	…hasta llegar al máximo. Ángel, pon n=100.	
	27	A	¿Qué n igual a 100?	
	28	J	Ahí, que pongas n=100	
	29	A	¡Iuuuuu!... ¡Son rayas negras!	Llevan n a 100[Cuando n=100]
20:42	30	J	Ya está. Siguiente pregunta	
	31	A	Pero pon aquí, la d de la distancia es igual a 1 partido el valor de n que quiera obtener.	
	32	J	Acabamos de encontrar la fórmula general, que es… la distancia es igual a 1 partido el número de n que tengas.	
Escriben: **Si n crece, la suma superior disminuye, aunque cada vez más lento, hasta llegar al máximo de n=100 que es S=0.790** Si n crece, la suma superior disminuye, aunque cada vez más lento, hasta llegar al máximo de n= 100 que es S=0'790.				
	2.IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior? Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de n?			
	33	J	Pregunta cuatro. Si se pide el valor del área con un error menor que 0.1, ¿cuál sería el valor del área?	N=1,; ponen n=76, n=100, n=88

Pareja 2			Dicen	Hacen
	34	J	Ángel, ésta.	
	35	A	Si se pide el valor del área con un error menor que 0.1, ¿cuál sería el valor del área? Cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior? ¿Qué? No entiendo la pregunta. I don't understand the question.	
22:23	36	J	Vamos a ver, piden… cuando la suma inferior y la superior coincidan.	
	37	A	[Relee la pregunta]	
22:36	38	J	Pero no llegan a coincidir por 0.1 la diferencia de 0.1 es aquí. Creo, vamos.	
	39	A	El valor del área sería…	
	40	J	[A la profesora] no entendemos esta pregunta, la 4	
	41	P	Sí. ¿Para qué sirven aquí las sumas superiores e inferiores? ¿Qué significan las sumas superiores e inferiores?	Aumentan la imagen con el zoom
	42	J	…	
	43	P	¿Qué significa, qué es la suma superior?	
	44	J	Yo he pensado que es cuando coincidan ¿y cuando se lleven una décima?	
23:14	5	P	Claro. Vamos a ampliar esto un poquito… para verlo mejor. ¿Vale? ¿Qué es la suma superior? Vamos a quitarle la suma inferior para verlo mejor. ¿Qué es la suma superior?	
	46	J	La suma de todos los…	
	47	A	De..	
	48	P	¿y qué nos daría la suma superior?	
23:30	49	A	Uno. Uno.	
	50	P	No, pero… Estamos intentando aproximar el área ¿no? La suma superior es más grande que el área,	
j	51	¿	Claro	
	52	P	Es una aproximación al área, pero mayor que el área. ¿De acuerdo, está claro eso? ¿y qué es la suma inferior? Esto ya lo habéis hecho. Marcar una, marcar la otra, ¿qué es la suma inferior?	
	53	J	Lo mismo pero…	
	54	A	Pero de abajo	
	55	J	…sumando por debajo del área, una aproximación pero por debajo del área, más pequeña.	
24:02	56	P	Muy bien. Entonces, por ejemplo aquí la suma inferior voy a marcar las dos. La superior me da 0.793 y la inferior me da 0.776. ¿Me podríais dar una aproximación al área?	N=60
	57	A	Pues, sumas las dos y la mitad ¿no?	
	58	P	Por ejemplo.	
	59	J	O restando la superior y la inferior, también.	
	60	P	Si restas la superior y la inferior, ¿qué es lo que obtienes? Obtienes el error máximo.	Quitan la marca de la suma inferior. La vuelven a poner

Pareja 2			Dicen	Hacen
	61	A	El margen de error.	
	62	J	El error máximo.	
24:30	63	P	¿No? Está entre las dos. Lo que dice Ángel es cierto, sumo y divido entre dos. Pero yo sé otro ejemplo y así sabría que el área es cero coma siete y algo, ¿no? Es decir, que si yo doy esta aproximación al área, cuál sería el error máximo?	
24:46	64	A	Pues la diferencia entre 0.776 y 0.793.	Señala el valor de las sumas en el applet
	65	P	Vosotros tenéis que llegar a un valor de n en el que esa diferencia sea inferior a 0.1	
	66	A	N=100	
	67	J	En n=100, que si son casi calcados.	
	68	P	En n=100 la diferencia es mucho menor.	
25:01	69	A	0.1. En n igual a cero…, claro. Se pide el valor del área con un error menor que 0.1. ¿Menor? menor no puede ser, tiene que ser igual a 0.1	
	70	A	… No puede ser menor tiene que ser may… tiene que ser igual.	
	71	J	Mira, vamos a … Déjame la calculadora	
	72	A	Tendría que ser n...superior a n=100	
25:30	73	J	Vamos a probar. N=100. 0.790 es la suma, o sea es la media ¿no? realmente.	Ponen n=100
	74	A	Sí. Se pide un valor del área con error menor que… ese valor del área sería superior a 100.	
	75	J	Oye, ¿estás seguro? Has dicho que es la suma de las dos sumas y luego dividir entre dos.	
	76	A	Sí	
	77	J	No puede ser, da una diferencia mucho más grande que 0.1	N=1 y van aumentando n hasta n=32
26:00	78	A	No, vamos a ver, eso no es la diferencia. Ahí estamos calculando el área exacta, el valor del área	n=100
	79	J	Y explica	
	80	A	… ya lo he explicado, n superior a 100. N tiene que ser más pequeño ¿se escribe así, no?	
	81	J	Mira, restando la inferior y la superior.	
	82	A	Se queda así ¿no?	
26:25	83	J	Restando la superior y la inferior.	
	84	A	Eso es el margen de error, que es esto. Ya está, eso es en el 100	
26:33	85	J	¿N ha de ser menor que 100 para que se cumpla eso?	
	86	A	No, ha de ser mayor que 100.	
	87	J	¿Y porqué pone menor que 100, te has equivocado?	
26:40	88	A	Te he preguntado si era así. N mayor… exacto, ahora sí. Para un valor de… claro, para que el error sea menor tendría, a 0.1 tendría que ser superior a 100. ¿Y cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior? 100, para ir hasta 0.1 sería 100, porque la diferencia…	

Pareja 2			Dicen	Hacen
27:17	89	J	Supuestamente, este margen de error ¿cuál es, el máximo?	
27:22	90	A	Ese es el error menor.	
	91	J	El error mínimo…	
	92	A	Bueno, pues el error mínimo	
	93	J	Que es el que está en las dos sumas.	
	94	A	Pues ya está. El error máximo es el de la suma superior y el error mínimo el de la suma inferior, porque la diferencia de la suma superior y de la suma inferior es de 1 decímetro.	
			Escriben: **En n=10 es 0.1 el error. A=(0.826+0.726)/2=0.776**  IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ~~K~~ ~~100~~ ¿Cuál sería el valor de **n** para aproximar el área hasta el valor anterior? ~~100, porque la diferencia de la suma superior y de la suma inferior es de 1 decímetro.~~ En n = 10 es 0'1 el error. A = $\frac{0'826+0'726}{2}$ = 0'776	
	2.IV. Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de n?			
28:05	95	A	[lee] Y si el error máximo fuera 0.02, ¿cuál sería el valor del área y de n?	
	92	J	Es sustituir directamente, a ver, ¿0.02 has dicho?	
	93	A	Si el error máximo fuera 0.02	
	94	J	Eso está… [quiere decir muy lejos] . El error máximo supuestamente es… eh… esta, ¿no?.	
	95	A	Sí	
	96	J	Está [quiere decir muy lejos] si n es igual a 45 ya, mira.	
28:26	97	A	No, pero 0.02 queremos. Mira, ahí es 0.7	
	98	J	Ah, bueno, es verdad. Aquí ya es ¿1?	
	99	A	Eh..	
	100	J	Más allá. Es [quiere decir muy lejos] de 100, porque mira… si hemos entendido bien la pregunta…	
29:00	101	A	A lo mejor hemos entendido mal lo del error menor y el error máximo. ¡Carmen! [llamando] Aguardando a la ayuda de Carmen.	Varían n
29:38	102	J	El error sale mucho más grande que ahí, porque cero coma, para que el error sea 0.02, la suma superior y la inferior tienen que ser calcadas.	

Pareja 2			Dicen	Hacen
29:58	103	A	Cero coma… Carmen [vuelve a llamar]	N=1, aumentan hasta 100
30:32	104	A	O sea, ¡tendría que ser cinco veces más grande![quizás ha oído algo]	
	105	J	¿Sí?	
	106	A	Sí, mira…	
	107	J	¿Cinco veces más grande que qué?	
	108	A	Si el error máximo fuera 0.02, para que, que, que o sea cinco veces más grande que 100, o sea 500. ¿Cuál sería el valor del área y de n? Lo que no sé es si está bien. Pero mira, si tenemos 0.02 y lo multiplicamos por 5, nos da 0.1, que 0.1 era 100, lo que pasa es que aquí era error menor y aquí es error máximo que es la diferencia que yo no he acabado de pillar. Pero el valor del área sería… n igual a quinien… el valor del área sería inferior a quinientos ¿no?, no, superior a quinientos y n sería quinientos.	
			Pausa grande ¿? Escuchan algo	
32:10	109	A	Nuestra teoría no es cierta, o la suya es falsa. No puede ser, se han equivocado. Ellos ponen n=6 y n=3. [Pausa] ¡Madre mía!	N=6
	110		[Pausa, parece que A se levanta porque J lo llama]	
33:10	111	J	Bueno, tú, Ángel,	
	112	A	Dime.	
	113	J	Vamos a hacer el 5 ya	
		A	Espera, pero es que yo quiero ver esto. Es que yo creo que es así, pero… mi duda es el error máximo y error éste, y error menor.	N=3
33:32	114	A	[Lee] El valor de n ¿qué observas que ocurre…?	
	115		Bueno yo lo voy a poner y si está mal, que nos enseñe. De los errores se aprende y más vale que sea un error mínimo que un error máximo. [ríe]. Sí, en 0.1 era ... 100	
34:10	116	J	La integral sale, mira, Ángel, Ángel, la integral esa, la de ahí arriba, ¿la ves?, sale de sumar las dos sumas y dividir entre 2.	N=100
34:34	117	A	Sí. .. es igual a 500. Y nos quedan tres preguntas, tío que rabia (se les ha avisado que tienen que acabar]	
25:02	118	J	Vamos a dejarlo ya porque ha dicho que hay que dejarlo	
	119	A	Sesión… pon eso para cerrar. Sesión 2 y media finalizada. Ángel y Jesús se despiden por hoy. ¡Tararara! [35:15]. Así que ve cortando.	Vídeo hasta 36:15. 1’ desfase
Sesión 3. Sólo Jesús, que rectifica lo que han escrito en la sesión anterior, tachándolo y escribiendo nuevas respuestas.				

Pareja 2			Dicen	Hacen
00:01-01:24	120	J	Jesús sólo, porque Ángel no ha venido. Para la pregunta 4 de la hoja 2, cuando se pide el valor del área con un error menor que 0.1, el área es justamente… 0.1 en n=10… por lo tanto calculamos el área en n=10 haciendo la suma superior, o sea, sumando la suma superior y la inferior y dividendo entre 2, ya que base por altura, no, borra eso … da exactamente 0.77 [da 0.776]	00:25 abre el applet. N=10; S= 0.826 I= 0.726 Señala con el puntero S e I
1:42-3:20	121	J	Y ahora si el error máximo fuera 0.02… sería para n igual a … [llevarse] 0.02…exactamente en n=50, la suma superior y la suma inferior se llevan 0.02… y el área sería exactamente igual, la suma superior y la suma inferior partido 2… El área en n=50 da 0.785. Ya hemos acabado el ejercicio 4, ahora pasamos al 5.	Lleva n hasta n=61, parándose un instante en algunos valores S=0.793 I=0.777 Mueve el deslizador hasta n=50 S=0.795; I=0.775
3:21	122	J	Hemos acabado el ejercicio 4, ahora vamos a por el ejercicio 5.	
	Escriben: **En n =50, A=(0.795+0.775)/2=0.785** ~~Si en 0,1 n=100, en 0,02 n=500, por tanto el valor~~ en n=50, A: $\frac{0'795+0'775}{2}=\boxed{0'785}$ ~~del área es n>500~~			
2.V. Si se aumenta el valor de **n**, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?				
3:28	123	J	Si se aumenta el valor de **n**, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?	Lleva el deslizador a n=51. Mueve n hasta n=66 rápido, y luego hasta n=1 [3:45]
3:36-5:10	124		Empezamos desde n=1, el cual la suma superior y la inferior, el error es enorme, pero poco a poco, el error se va acercando hasta que empieza a descender hasta que al final se llevan una diferencia en n=100, que no lo pongo porque me molesta esto [se refiere a que aparece Integral= 4*área del cuadrante, que por el zoom que tiene se superpone al valor de S e I], y ahora mismo se llevan una diferencia de 0.01… por lo tanto se puede decir… que la suma superior y la inferior, o lo que es lo mismo, su margen de error, va disminuyendo conforme aumentamos n hasta alcanzar un valor máximo de 0.01. La aproximación se hace más exacta y el margen de error se va haciendo mínimo	Va aumentando n hasta 100 [4:04] Luego n=97 y de nuevo a 100 Mueve hasta n=99, luego n=100 y desplaza la leyenda de Integral=4*… Mueve a n=1 y va aumentando poco a poco hasta 100.
Escriben: Al aumentar n, la aproximación al área se va haciendo más y más exacta y el margen de error acaba quedándose en 0.01. Al aumentar n, la aproximación al área se va haciendo más y más exacta, y el margen de error acaba quedándose en 0'01.				

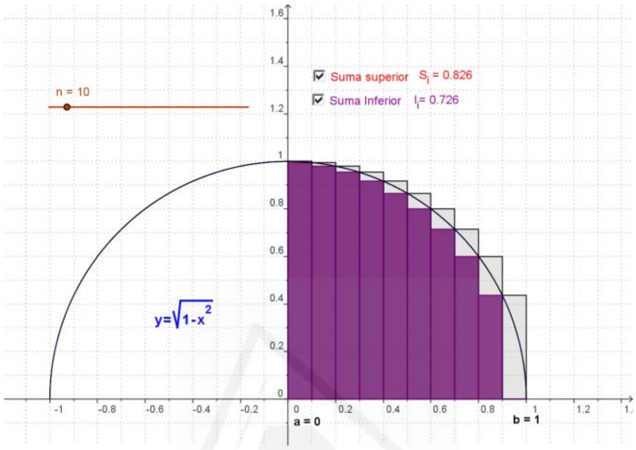
Al aumentar n, la aproximación al área π va hac
más exacta, y el margen de error acaba quedándose

ANEXO III

Transcripción de la tarea Área del cuadrante. Pareja 6. Pareja 6. K-MA

Cuando queremos calcular el área bajo una función no rectilínea, es decir bajo una curva, tenemos que recurrir a aproximaciones. Recuerda cómo calculamos el valor de π aproximando el área del círculo mediante polígonos inscritos y circunscritos en el círculo, aumentando el número de lados y hallando el límite.

Ahora vamos a calcular de nuevo el valor de π, hallando el área del cuadrante de un círculo, usando la función $y = \sqrt{1 - x^2}$, y aproximando mediante rectángulos.



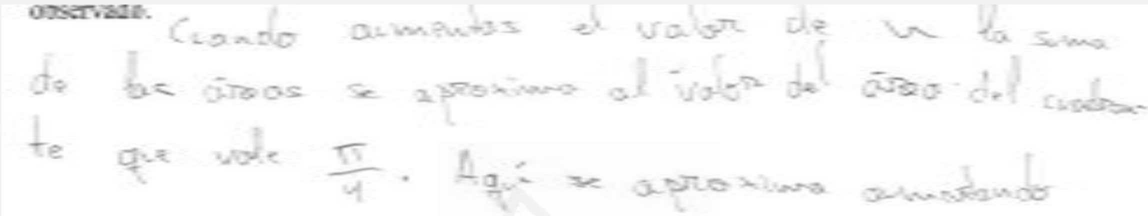
I. Cambia el valor de **n** utilizando el deslizador, y observa:
   a. El número de sub-intervalos en que se divide el intervalo.
      Para un valor de **n** dado, ¿cuántos sub-intervalos hay?
   b. La longitud de estos sub-intervalos.
      Para un valor de **n** dado, ¿cuál es la longitud de los sub-intervalos?

II. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas inferiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.
III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.
IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de **n** para aproximar el área hasta el valor anterior?
    Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de **n**?
V. Si se aumenta el valor de **n**, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?
VI. Abre la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** y completa las celdas vacías para los valores de **n=3**, **n=4**, **n=5**.
VII. Comprueba en la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** los valores obtenidos en los apartados IV y V.

Pareja 6			Dicen	Hacen
2.I. Cambia el valor de n utilizando el deslizador, y observa: a. El número de sub-intervalos en que se divide el intervalo. Para un valor de n dado, ¿cuántos sub-intervalos hay?				
24:03				
2. I. b. La longitud de estos sub-intervalos. Para un valor de n dado, ¿cuál es la longitud de los sub-intervalos?				
26:26				
Escriben: $\boxed{\frac{1}{n}} \rightarrow \boxed{n^{-1}}$				
2. II. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas inferiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.				
28:08	1	K	[Lee]Deja sólo marcada la casilla de las sumas inferiores… ¿qué es eso?	[28:08] Tienen n=4
	2	MA	Da a n el valor 1	N=1 y quitan la marca de las sumas superiores.
	3	K	[Lee] Da a n el valor 1… y ve aumentando n… ¿qué observas? El valor de esta suma…Espera, vamos a poner esto que no se ve muy bien… Ya está. Que ¿qué?	Mueven la imagen para centrar el gráfico.
	4	MA	A ver.	
28:35	5	K	No me entero muy bien, la verdad.	
	6	MA	Ve dándole valores a **n** ahora, mayores.	
28:42	7	K	El 2 ¿Y observa qué?	N=6, n=2, I_i=0.4333…
	8	MA	Y observa lo que ocurre con el valor de esta suma.	
	9	K	¿La suma de esto?	
	10	MA	Sí, la inferior.	N=1; I_i=0.000358
	11	K	¡Ah! La suma claro. Si das… 0. 333… ¡Ah mira! Si aumentas mucho, mucho, mucho	
	12	MA	A ver… auméntalo, auméntalo bastante. Espera… ¿cuánto…?	Llevan el deslizador a n=100. Aparece integral=4*Área del cuadrante
29:05	13	K	¡Ah, es la integral! Profe ¿eso es la integral? La suma… inferior de no se qué.	Llevan el deslizador a n=95 y otra vez a 100. Bajan de nuevo hasta 56 y luego de nuevo a 100
	14	C	Ya veremos lo que es la integral, no te preocupes.	
29:15	15	K	Mira, lo pone aquí [ríe]	
	16	MA	Pon, yo voy a poner que la suma de los... de los rectángulos, cuando más aumenta *n* se acerca más al área real de este trozo, de… o sea del sector circular	Levan el deslizador a n=62 y luego a n=4
29:45	17	K	Bueno. Sí, es verdad. [pausa] Profe, profe, profe [llamándola]	[30:25] n=100. Desplazan la imagen y juegan con el zoom.
30:23	18	K	Pero… no.	
	19	MA	¿Por? ¿Por qué no?	[31:02] Desplazan la leyenda "Área del círculo= 4*Área del cuadrante=3,14"
30:50	20	K	Es… el área de todo el círculo ¿cuánto es?	[31:07] Marcan suma superior y quitan la marca

Pareja 6			Dicen	Hacen
	21	MA	Sería π ¿La de todo el círculo dices?	[31:27]Abren la calculadora del ordenador y la cierran sin hacer nada
	22	K	π por r al cuadrado es decir π.	
	23	MA	No, o sea… Pero como r es uno se queda π.	[31:50] Llevan n=58, n=6
31:00	24	K	Por eso digo. Y π partido 4 ¿cuánto da?	n=100
	25	MA	Tiene que darte esto	N=6, n=19
31:03	26	K	Ah vale, sí, sí, entonces sí. Pues eso que la suma va aumentando a… a cuanto mayor es n y cada vez acercándose más al área… al área del… cuadrante. ¿no?	
	27	M	Pues ya está	
	28	K	A la siguiente	

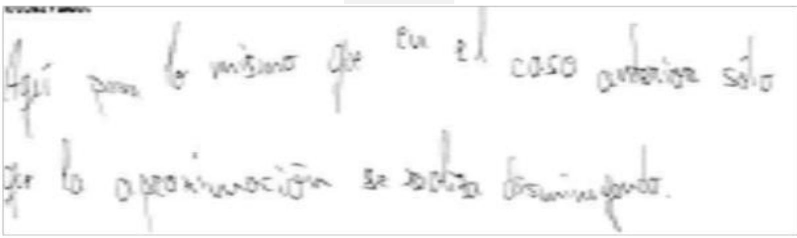
Escriben:


observado. Cuando aumentas el valor de n la suma de las áreas se aproxima al valor del área del cuadrante que vale $\frac{\pi}{4}$. Aquí se aproxima aumentando

2. III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

31:30	29	MA	Y con la siguiente pasa lo mismo, sólo que ésta es con la...	[32:20] Quitan sumas inferiores, marcan sumas superiores, y n=1.
	30	K	Sólo que va disminuyendo… va disminuyendo ésta.	Llevan el deslizador a n=100. Lo llevan a n=1
31:45	31	MA	Ah, mira en ésta lo que pasa… ponlo… un poco más… aumenta en un poco. Mira… aquí en estos los de dentro la esquina que está tocando el arco en la de la derecha …	Marcan también sumas inferiores
	32	K	Aquí hay un error hacia menos y aquí hay un error hacia más.	Llevan a n=4, n=6, n=100
32:02	33	MA	Ésta se va acercando desde arriba, sabes, o sea empieza desde un valor y va disminuyendo…	n=1, n=13
	34	K	Eso digo, que aquí va aumentando y aquí disminuyendo	N=100
	35	MA	Aquí aumenta hasta π/4, claro.	Disminuyen y aumentan n hasta n=100
32:22	36	MA	Pongo que aquí se aproxima aumentando.	N=9; S_i=0.830; I_i=0.719
	37	K	¡Que sueño!	
	38	MA	Y pongo que aquí pasa lo mismo que arriba pero disminuyendo	

Escriben:


Aquí pasa lo mismo que en el caso anterior sólo que la aproximación se hace disminuyendo.

Pareja 6			Dicen	Hacen
2.IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior? Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de n?				
32:56	39	K	A ver [Lee] si se pide el valor del área con un error menor de 0.1 ¿Cuál sería el valar del área? 3.14 ¿no? Con un valor menor de 0.1[pausa] 0.7 ¿no? Queremos el valor de esto con un error menor de 0.1. Tanto la suma por un lado como la suma por el otro… Si decimos 0.79 estamos diciéndolo bien porque en verdad sería 0.785. Si decimos 0.78 también bien… ¿cuál sería el valor de n ¡ah! para aproximar el área hasta el valor anterior? ¡Ah!	[34:01], Llevan el deslizador a n=100. Señalan con el puntero la leyenda: " Área del círculo= 4*Área del cuadrante=3.14"
	40	MA	¿Cuál es… el área que se…	[34:48] Señalan en la imagen Si=0.790, Ii=0.780
	41	K	30 ¿no, o qué?	[35:00]Mueven el deslizador hasta n=47, n=28 y luego n=30
34:30	42	MA	¿Cuál es el área que se aproxima en menos de una centésima, en menos de una décima al valor del área? …. Lo que salía aquí antes. Mira, lleva eso al máximo.	[35:30] N=100
	43	K	Espera, esto es 0.78	
	44	MA	Tiene que acercarse a esto con menos de una décima de diferencia.	
34:46	45	K	O sea, más de 0.68 o menos de 0.88	[35:47]Llevan a n=1, n=7, n=6. Si=0.859 Ii=0.652
	46		Pues a partir de n=6 ¿no?. Sí porque si doy a n [el valor] cinco ya me da 65 que eso ya…más de una décima. Sería 0.75 y en verdad 0.78 o sea que da a partir de n [igual a] 6 ¿no?	
	47	K	Profe, una cosa, n [igual a] 7 también	[35:53], n=5; S=0.859, I=0.659. Señalan la suma inferior con el puntero y ponen n=6
35:48	48	K	Espera, … área,.. cero seis… no cero siete, cero siete, cero siete cinco ocho. A ver, que me lía ¿Cuál sería el valor del área con un error menor de 0.01?	[36:54] n=7; S= 0.841 I=0.698
36:10	49	M	En verdad sería éste ¿no? No, espera, aquí hay …	[37:00]n=8; S=0.835; I=0.710 (un instante)
	50	K	Puedes decir 0.68 o 0.84 pero para tirar a la mitad sería 0.78. Sería esto más esto dividido entre 2 te da 0.76.	[37:04]n=6
	51	MA	0.68 más ¿cuánto? 0.84	
	52	K	Hombre … 9 … ¿Qué te ha dado?	
36:50	53	MA	Es que en verdad …	
	54	K	Pero es que no has puesto el 9, en verdad …	

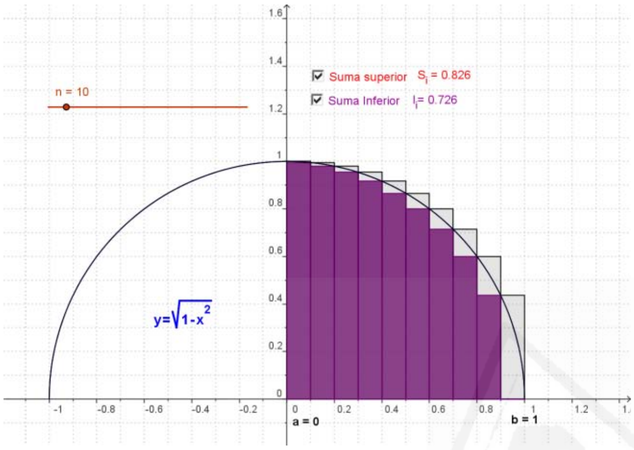
Pareja 6			Dicen	Hacen
36:55	55	MA	En verdad yo creo que sería ésta ¿no? Porque lo que pide… es que la diferencia entre ésta y ésta sea menor que una décima ¿no?	
37:08	56	K	La diferencia entre el que tú le das y el verdadero, y el verdadero es…	[37:46]n=8; luego n=6; luego n=7
	57	MA	Espera, espera.	
	58	K	El verdadero es éste	[37:29]n=100
	59	MA	Bueno	
	60	K	… [No entiendo lo que dicen]	
		MA	… “ “	
Escriben.				
n:10				
	2.IV. Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de n?			
			No lo hacen	
	2.VI. Abre la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** y completa las celdas vacías para los valores de **n=3**, **n=4**, **n=5**.			

ANEXO IV

Transcripción de la tarea Área del cuadrante. Pareja 4. L-M

Cuando queremos calcular el área bajo una función no rectilínea, es decir bajo una curva, tenemos que recurrir a aproximaciones. Recuerda cómo calculamos el valor de π aproximando el área del círculo mediante polígonos inscritos y circunscritos en el círculo, aumentando el número de lados y hallando el límite.

Ahora vamos a calcular de nuevo el valor de π, hallando el área del cuadrante de un círculo, usando la función $y = \sqrt{1 - x^2}$, y aproximando mediante rectángulos.

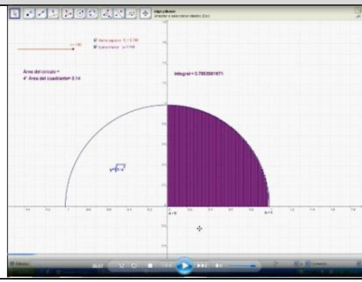


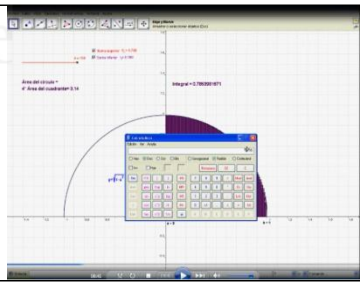
I. Cambia el valor de **n** utilizando el deslizador, y observa:
   a. El número de sub-intervalos en que se divide el intervalo.
      Para un valor de **n** dado, ¿cuántos sub-intervalos hay?
   b. La longitud de estos sub-intervalos.
      Para un valor de **n** dado, ¿cuál es la longitud de los sub-intervalos?

II. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas inferiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.
III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.
IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de **n** para aproximar el área hasta el valor anterior?
    Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de **n**?
V. Si se aumenta el valor de **n**, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?
VI. Abre la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** y completa las celdas vacías para los valores de **n=3**, **n=4**, **n=5**.
VII. Comprueba en la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** los valores obtenidos en los apartados IV y V.

Pareja 4			Dicen	Hacen
2.I. Cambia el valor de n utilizando el deslizador, y observa: a. El número de sub-intervalos en que se divide el intervalo. Para un valor de n dado, ¿cuántos sub-intervalos hay?				
00:00	1	M	Variamos n como nos indica el ejercicio...A más n más divisiones...igual a n.	Intentan variar n con una herramienta no adecuada.
	2	L	No, porque aquí hay un … Espera un momento, se considera intervalo lo que está …	
	3	M	Ahí, ¿cuántos intervalos hay?... Pues n…	
	4	L	Espera un momento, lo que se considera intervalo ¿es lo que está en lila?	
00:55	5	M	El intervalo, si, no, si, no... Profe ¿qué es el intervalo? ¡Ah! Si lo ha explicado antes, lo que va de un punto a otro, pero sí, igual a n, porque mira, si n es 1, va de aquí a aquí lo que pasa es que no cuenta pero sí, es un intervalo. Si n es 2 tú lo divides entre 2 intervalos, el que cuenta y el que no cuenta, si n es 3 lo divides en 3 intervalos.	
1:12	6	L	Aquí hay otro [no entiendo a qué se refiere].	
	7	M	No pero intervalos es sólo de las x, aquí no cuenta.	
	8	L	¿Cuántos intervalos hay?	
1:20	9	M	Hay n intervalos.	
Escriben: n intervalos				
2. I. b. La longitud de estos sub-intervalos. Para un valor de n dado, ¿cuál es la longitud de los sub-intervalos?				
1:36	10	L	A ver, [Lee] la longitud de estos sub-intervalos.	
	11	M	[repite] ¿Cuál es la longitud de los intervalos? Pues 1/n.	
	12	L	Un número que...	
	13	M	1/n. Si ponemos 10…	Mueve el deslizador a 10
	14	L	Pero y esto…	Creo que señala el último sub-intervalo, 0.9-1
	15	M	Es un ---intervalo, pero creo que no cuenta.	
Escriben: $\frac{1}{n}$ = longitud				
2. II. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas inferiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.				
2:00	1	L	[lee] Deja sólo marcada las sumas superiores.	
	2	M	Vale.	Quita la marca v
	3	L	Y ve aumentando n.	Lleva n a 1
	4	M	[Lee] Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado. Sí porque es 0.000356	

Pareja 4			Dicen	Hacen
2:24	5		¿Dónde está el 356? Que alguien me lo explique.	
	6	M	Aumenta, aumenta, aumenta …	Va aumentando n hasta n=100
	7	L	¿Qué quiere decir sumas inferiores?	
Pareja 4			Dicen	Hacen
	8	M	La suma de las cositas esas.	
	9	L	De la longitud de todas.	
	10	M	La suma de todas las áreas.	Va jugando con el deslizador moviéndolo hasta el 1,…
	11	L	Ah! Sí porque cada vez se… [no entiendo, creo que dice se aproxima a …] [Lee] escribe lo que has observado.	
	12	L	Cuando aumentan los intervalos… a 1 la suma se aproxima a 1…	
	13	M	A uno no, a eso.	Marca integral=0.7853
	14	L	Porque aquí no puede llegar a infinito. Ah, vale.	
3:05	15	M	No, nunca es 1 porque sería el cuadrado.	
	16	L	Ah, vale, que la suma se aproxima a 0,78.	
	17	M	Se aproxima a $\pi/4$.	Va moviendo el deslizador
		M	Sí, a $\pi/4$ ¿Cuánto es a $\pi/4$?	Abre la calculadora del ordenador
	18		Comentarios …	Calcula a $\pi/4$=0,7853
3:52	19		Olé! Se aproxima a $\pi/4$.	
Escriben: La suma inferior se aproxima a $\frac{\pi}{4}$				
2. III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.				
	20	L	[Lee] Deja sólo marcada la casilla de las sumas superiores.	
	21	M	Vale.	
	22	L	[Lee] Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.	
	23	M	Lo que ocurre, observa lo que ocurre… que sigue igual.	
4:00	24	L	Que se aproxima también a lo mismo.	Pantalla: Suma superior S_1=1. Llevan n al 11; S_{11}=0.823 y van aumentando hasta 100.
4:09	25	M	Pero es que… el… pero porqué, sube el palito de la izquierda, sube hasta que choca con el círculo y entonces tira a la derecha, no hace un cuadrado como este círculo sino que sube y cuando choca con el círculo tira a la derecha. Y entonces ocurre que su área se aproxima por arriba cada vez más a $\pi/4$.	Van aumentando n
4:33	26	L	Pero su área se aproxima por arriba.	
4:35	27	M	O sea de más a menos. Siempre superiormente.	

Pareja 4			Dicen	Hacen
	28	L	Pero igualmente se está aproximando a $\pi/4$.	
4:40	29	M	Siempre por arriba, vale.	Aumentan n hasta 100 y aparece en la pantalla: Área del círculo=4*área del cuadrante=3.14 Integral= 0.7853
	30	L	Suma superior, es eso, aproxima ...	
	31	M	Claro [no entiendo] la inferior… estaríamos buenos.	
4:55	32	L	Mira, este da 0.79 y este da 0.78.	Señalando S_i=0.790
	33	M	La integral da 0.785 que es la mitad. Si es que esto está mal. No funciona...Lo que mejor funciona es la calculadora esta [la del ordenador] científica.	Activa la casilla de suma inferior para n=100 Abren al calculadora del ordenador, la ponen en modo científico y en radianes
2.IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior? Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de n?				
5:06	34	L	Vale, otra. [Lee]. Si se pide el valor del área con un error menor de 0.1, ¿cuál sería el valor del área?	
	35	M	Si se pide el valor del área …	Pantalla: N=100, S_i=0,790, S_i=0.780 I=0.7853981671
	36	L	Del intervalo.	
	37	M	Con un error menor de 0.1 ¿cuál sería el valor del área?	
5:30	38	M	Sería la mitad de la diferencia, la media, la media entre la suma superior y la suma inferior.	[5:40]; Señalan en la pantalla Suma superior y suma inferior, que valen 0.790 y 0.780
	39	L	Está claro.	
	40	M	[Lee] si se pide el valor …	
5:43	41	L	Pero tiene que dar el valor.	
	42	M	¿Cuál sería el valor del área?	
	43	¿	Pues nos sale que sería 0.785.	
	44	M	[texto de la pregunta]¿Cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior? Pues n=100.	
	45	L	..	
	46	M	No, n igual a 100.	
	47	L	Ah, 100 son los cuadrados.	
6:07	48	M	Rectangulitos, 100 son los rectangulitos.	
	49	L	¿Y si el error máximo fuera de 0.02?	
6:00	50	M	Pues no podemos.	Sigue la misma pantalla: N=100, S_i=0.790, S_i=0.80 I=0.7853981671

Pareja 4			Dicen	Hacen
	51	L	Sí .	
	52	M	aquí cuánto error tenemos, 0.02.	
	53	L	¡Ah no!	
	54	M	0.02 es decir, …	
	55	L	Sí porque tenemos 3.	
	56	M	Sí también podemos porque el error aquí es de 0.00039…	
	57	L	Pero ahí, … 0.00…	
6:37	58	M	Porque nosotros tenemos hasta aquí ¿no? … este es el número que nos da. El error que nos dan, o sea aquí si aquí hay 39, el error es 0.00039, o sea tenemos un error de 0.0004?	Señala I=0.7853981671 …
6:51	59	L	Vale, y entonces ¿cuál sería el valor del área? 0.85..	
	60	M	0.785. O sea... a ver… es que te dice… nos tienes que dar… es que no se puede hacer de otra manera. Sale 78, 92 da 80 y ahí…, claro, no es que si queremos un error de 0.1	Mueve n hasta n=73 S_i=0.792, S_i=0.778
	61	L	No tiene que ser tan… aproximado.	
	62		De 0.1 y sabemos que es 0.785 tiene que ser 0 coma …	
			68	
			68 ,o, no 0.7 nos tiene que dar la media, para que nos de 0.7 la media…	Vuelven a poner n=10 Cambian de sitio el deslizador (están jugando?)
	63	L	¿A dónde vas? Más, un poco más.	
7:44	64	M	Tiene que haber una diferencia de 100.	
	65	L	¿De 100? Ah, claro, sí,..	
	66	M	Entonces sí ¿no? Aquí y con n=10 … y nos sale eh…	Mueve n hasta n=16,..n=10 S_i=0.826, S_i=0.726. Abren al calculadora del ordenador:
	67	L	0.75	
	68	M	La calculadora esta es triunfal, 726 más …	
	69	L	0.75	
	70		Más 0.826 es igual a… partido por 2 …	
	71	L	0.75 ¿no? Hala!	
	72	M	Igual a 0.776 [calculadora ordenador]	(0.726+0.826)=1.552; 1.552/2=0.776
	73		Ah claro, porque no he contado el 6.	Vuelven a n=100
	74	L	Pero entonces el error es no menor que una décima.	
	75	M	¿No?	
	76	L	Ah sí, vale ¿Y cómo le decimos que está hecho?	Sitúan el deslizador en n=8 y después a n=100
	77	M	Porque te escucha.	
	78	L	Ah vale. ¿Y es con n igual a qué?	

Pareja 4			Dicen	Hacen
8:53	79	M	A 10	Señalan Integral=0.7853981671
	80	L	Pero que en realidad les podríamos poner más cuadraditos, rectángulos de esos y seguiría siendo menor de una décima	
9:00	81	M	Es que a ver menor de una décima quiere decir que tiene que ser 0….0.685 ó 0.885 y nos ha dado 0.7, ahora estamos..	
	82	L	…bueno	
	83	M	Vale, ah pues vamos a poner 5. Mira aquí la diferencia aún sigue siendo…aún está en 0,7. n=4 la diferencia… es que mira si cogemos n, n=1 no se puede coger, n=1 seguro que no. Esta y sumamos 0.933…	Ponen n=7, n=5, n=1, n=2 y van señalando S_i y I_i
	84	L	Es que sería un intervalo	
	85	M	+, es la media	
	86	L	Ya pero es que me refiero es que hay muchos valores por los que el error va a ser menor de 0 coma…	
9:50	87	M	Mira éste es 13, éste sí que es mayor de 1. Vale. Este sí que es mayor que 1	n=2 Abren la calculadora del ordenador: 0.433+0.933= partido: 0.886 [se equivocan en la operación]
	88	L	¿pero lo has dividido entre 2?	
10:08	89	M	A ver ahora está en n=1, es =0.433+0.933 partido..	
	90	M	No, es que ahora lo he partido por lo otro. Qué asco de calculadora. +	
	91	L	¿por qué no lo pones así que es más fácil?	
10:40	92	M	+, porque no lo he pensado. Igual , partido 2 =, 0 coma… Mira, esta vale porque es menos de una... No, esta es mayor.	Repiten el cálculo, con la calculadora (para n=1) 0.933+ (0.433=1.366)/2=0.683
	93	L	No, tiene que ser mayor de 0.7. Ah, no..	
10:46	94	M	Si yo resto esto	
	95	L	menos esto da una décima, no, da una décima coma 02.	[Integral=0.785] menos esto [0.683] da más [da 0.102..]
	96	M	Claro, entonces no vale con 2.	
	97	M	A ver con n=3. Tenemos que es 0. 96…. Éste, a partir de n=3 el error es menor que una décima.	Mueven n hasta 100, y luego lo vuelven a 3. Con la calculadora,$[(S_3+I_3)/2]$: (0.896+0.563)/2=1.459/2=0.7295
11:20	98	L	Pero pongo un intervalo	
	99	M	A partir de que n=3, con que sea más de n=3 ya lo tienes bien.	
11:30	100	L	Ya pero pone ¿cuál sería el valor del área? ¿y cuál sería el valor de n? pero hay muchos valores de n, entonces ¿qué pongo?…	
	101	M	De n, pues de 3 a infinito	
	102	L	A partir de n=3	

Pareja 4			Dicen	Hacen
11:40	103	M	Claro. Y si te pide cuál sería el valor del área, pues sería 0.7295	
11:53	104	M	[lee] ¿Y si el error máximo fuera…? ¿Cuál sería el valor del área y de n? Error máximo de 2.	
	105	L	0.02	

Pareja 4			Dicen	Hacen
12:05	106	M	Entonces si tenemos la integral … tiene que dar ó 65 ó 805	N=100
12:22	107	M	Laura…	
	108	L	Lo siento, estoy (está hablando con los otros).	
		M	Fíjate que siempre que lo hacemos nos da un número inferior a la integral, eh por ejemplo aquí da siempre menor … Entonces si nos fijamos sólo en el error máximo por abajo tiene que dar 0.765398 o sea 7, 0 coma …	
	109	L	Pero bueno ¿de dónde has sacado ese número? Ah vale para que el error sea de..	
12:44	110	M	Restamos 2 al 8 y nos da un 6, entonces vamos a ver, lo ponemos en 90 a ver que da. No así a ojo no	Se refiere al valor exacto0.785 restándole o sumándole 0.02: 0.765 y 0.805
	111	L	Estás retransmitiendo todo bien.	
13:00	112	M	Ahora a 50, va. De, si yo hago 775795… nos da de media 80 y hemos dicho que tiene que ser 0.76	N=50; S=0.795, I=0.775
	113	L	No, 80 no.	
	114	M	0.7	
	115	L	85	
	116	M	Eso… ¿Cuánto tiene que ser?	
	117	L	0.02	
	118	M	0 coma 0. Sí pero es … 0.765	
13:30	119		A ver por aquí puede estar la solución. En 15. De 47 a 14	N=15; S=0914, I=0.747
	120	L	¿Saco la calculadora?	
13:37	121	M	No ¿para qué queremos la calculadora? Eso de cabeza	
13:48	122	M	6, no aún está más cerca. Aún la media no baja a 6… Vamos con 10… a ver que da… Con 10.	N=8, pero cambian sin hacer ningún cálculo a n=10
	123	L	Ahí es 10, la media, o sea 10 no 10,eso.	
	124	M	Era ¿cuánto daba? No es 1 la media. Mira, 726	CALC. ORD.: (0.726+0.826)/2=1.552/2=0.776
	125	L	0.75…	
	126	M	Espera, lo he hecho mal. A ver, 0.726+0.826=	
	127	L	Da 0. 78	
	128		calculadora…1.55/2=0.776. Y estamos buscando 0.765. Aún podemos bajar más, vamos al 5.	
14:22	129	L	Pero entonces nos va a dar igual que antes.	
		M	No, porque antes nos daba … 7… es verdad nos da igual que antes. No, tiene que dar 6 donde está el 2.	
	130	L	Pues si sigues bajando…	
Pag9-pag 10		M	A ver con el 4, 0’624+0’874 es igual, partido 2= 74, ¡no!	N=4; S=0.874, I=0.624 Calculadora Ord.: 0.874+0624=1.498 /2=0.749
	131	L	No, más pequeño...	
	132	M	A ver vamos a ir de 1 en 1 que esto sube exponencialmente.	N=7 y lo vuelven a bajar a n=4

Pareja 4			Dicen	Hacen
	133	L	La integral cuanto da 0.7 que? 785	
15:08	134	M	8539, …9, …9, …9 es importante.	
	135	L	Vale, [hace algo] coma 7…	
	136	M	…	
Pareja 4			**Dicen**	**Hacen**
	137	L	Tiene que ser a partir de ese número la media.	
15:29	138	M	Tiene que ser sí … vamos con 5.	N=5, S=0.859, I=0.682 (suma/2)=0.759
15:40	139	L	Tendrá que ser un número así… que no sea muy normal.	
15:45	140	M	Eso es psicología, no es matemáticas.	
	141	L	Sí, pero… Aunque el otro era n=3.	
15:50	142	L		
	143	M	¡Huy! ¡Uno más!	N=6; S=0.849,I=0.682 (suma/2)=0.7655
15:57	144	L	Te va a joder la estadística esto.	
	145	M	¡Toma! 2	
	146	L	Sí ese es mayor.	
16:20	147	M	¡Uy! Pues para 6, a partir de 6 que es el doble, o sea el doble… te hace que lo dividas entre 5 el error.	Supongo que quiere decir el doble de 3, el valor de n del apartado anterior.
	148	L	¿El doble..?	
	149	M	Pero fíjate que el doble hace que el error se divida entre 5.	[Quiere decir 0.1/5=0.02]
16:33	150	L	Y el área cuál es?	
	151	M	¡0.7655!	
Escriben: IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de **n** para aproximar el área hasta el valor anterior? A partir de n=11 A = 0'7775 doble Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de **n**? A partir de n=51 A = 0'785				
	2.V. Si se aumenta el valor de **n**, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?			
16:40	152	L	[lee] Si se aumenta el valor de n, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el valor de esta aproximación?	
16:45	153	M	Si aumentas el valor de n…[vuelve a leer]	
	154	L	¿Qué son las aproximaciones?	
16:59	155	M	Las aproximaciones, el numerito que nos da con la calculadora. Las aproximaciones cada vez van aumentando poco a poco… y el error se reduce porque se aproxima cada vez más a la integral.	
17:14	156	L	Pero eso en teoría no lo sabemos.	
	157	M	Sí porque lo dice aquí en… dice integral.	
	158	L	El error se reduce aproximándose a la integral.	

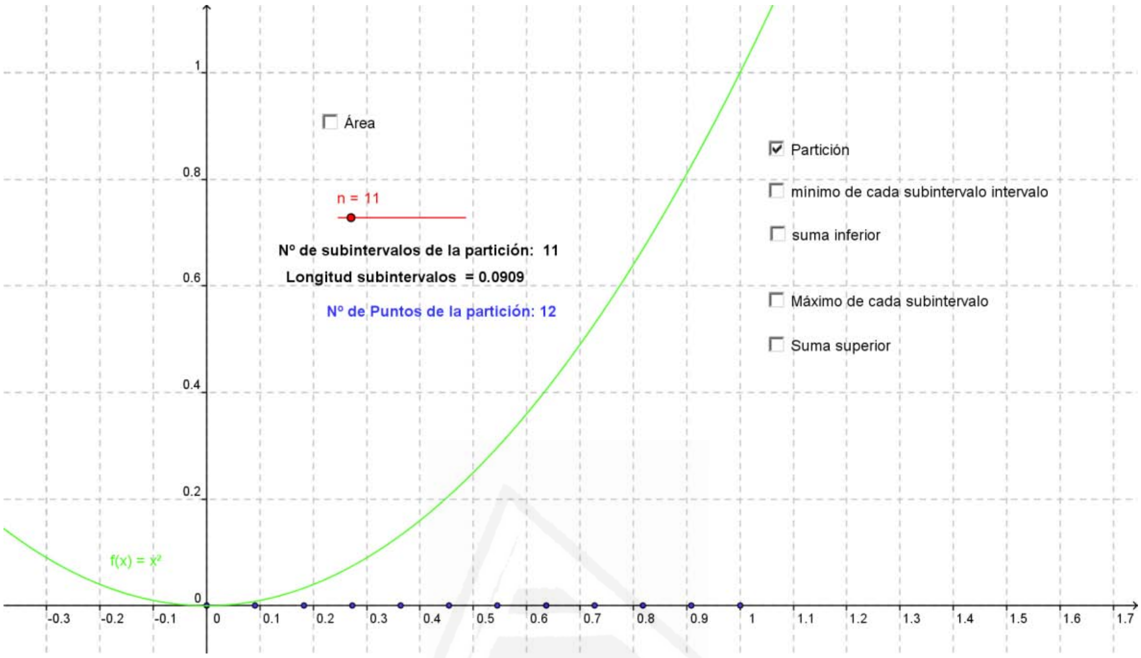
Pareja 4			Dicen	Hacen
	159	M	Sí. Trabaja, Álvaro, trabaja.	
Escriben:				

Van aumentando poco a poco y el error se reduce, aproximándose a la integral.

ANEXO V

Transcripción de la Tarea Parábola. Pareja 2. A-J

I. Mueve el deslizador y observa lo que ocurre con el número de puntos de la **partición**, el número de sub-intervalos y la longitud del sub-intervalo.



a. ¿Qué representa **n**?

¿Qué relación hay entre **n** y el número de puntos de la **partición**?
¿Qué relación hay entre **n** y la longitud de los sub-intervalos?

b. Escribe los valores de los extremos del intervalo de la **partición** para:

n=1: $\mathbf{a_0}$= **;** $\mathbf{a_1}$=
n=2: $\mathbf{a_0}$= **;** $\mathbf{a_1}$= **;**$\mathbf{a_2}$=
n=3:
n=4:
...
n=10:

c. Busca una fórmula general para cualquier valor de **n**:

1. De la longitud del sub-intervalo : $\mathbf{\Delta x}$=

2. De los valores de los extremos del intervalo de la **partición**:
$\mathbf{a_0}$=
$\mathbf{a_1}$=
$\mathbf{a_2}$=
....
$\mathbf{a_n}$=

II. Observa las **sumas superiores** e **inferiores** de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos:

a. En las **sumas inferiores**:

b. En las **sumas superiores**:

c. Escribe una fórmula para las **sumas superiores**, $\mathbf{S_i}$ y otra para las **sumas inferiores**, $\mathbf{I_i}$, relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la **partición**.

Pareja 2			Hacen	Dicen
I. Mueve el deslizador y observa lo que ocurre con el número de puntos de la **partición**, el número de sub-intervalos y la longitud del sub-intervalo. a. ¿Qué representa **n**? ¿Qué relación hay entre **n** y el número de puntos de la **partición**?				
1			El número de puntos aumenta y la longitud disminuye	Varían n
2	2:30	A	Relación entre n y el número de puntos. Como podemos observar superior en 1 al de n	Marcan área y suma superior
3		J	Número de puntos siempre es n+1	
	b. ¿Qué relación hay entre **n** y la longitud de los sub-intervalos?			
4		A	Creo que es 1 partido n. Comprobamos con la calculadora. Exacto esa era la respuesta. La longitud de los sub-intervalos era 1/n	Dan a n valores: n=1, 2, 3
c. Escribe los valores de los extremos del intervalo de la **partición** para: **n=1: a_0=** **; a_1=** **n=2: a_0=** **; a_1=** **;a_2=** **n=3:** **n=4:** **...** **n=10**				
	4:40			
II. Observa las **sumas superiores** e **inferiores** de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos: a. En las **sumas inferiores**: b. En las **sumas superiores**:				
5	11:50		[Leen]	N=1, marcado sólo partición
6				Abren y cierran la hoja de cálculo
7				Marcan suma inferior y suma superior. Aumentan y disminuyen n
8	13:00			N=6
9			….	
10	14:38	A	Las sumas superiores son estas	Señalan en el applet
11			Vamos a las inferiores	Dejan marcada sólo suma inferior
12	15:16	A	¿Cuál es la suma? ¿Uno? Cero	N=1
13		J	Para n=1 no hay nada	N=2
14		A	N=2	
15	15:20	J	Eso es la base por la altura de esto	
16		A	0.5 por… ¿qué altura es esa?	
17		J	Esto es 0.5 por…	Vídeo 15:43
18		A	Dale al mínimo de cada sub-intervalo a ver qué pone. Activa esa casilla	
19		J		Señala la altura es 0.25

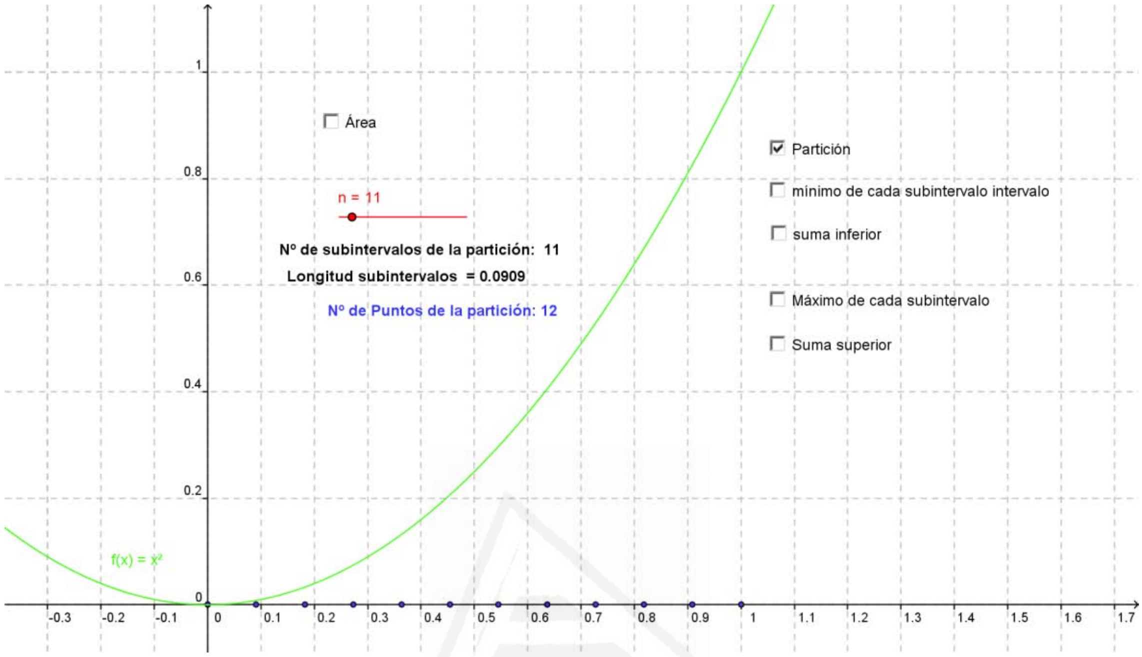
Pareja 2			Hacen	Dicen
20		A	0.24 por 0.5 igual… 0.125 [el área del rectángulo]	
21		J	Eso es el área, no la altura ¿eh? Te pone la altura	
22		A	Te pone las sumas inferiores	
23		J	Te pide la altura, no el área	
24		A	Ah!	
25		J	0.25 para n=2. ¿Pero no habría que sacar alguna fórmula?	
26		A	¿Y en n=3?	
27	16:37	J	Porque no podemos estar en uno y en otro	
28		A	En n=3 es… si es 3, 4, 10… Ahora hay dos particiones	Ponen n=3
29		A	¿Cómo nos comemos esto Jesús?	
30		L	Pregúntale a Carmen	Hacen zoom
31		A	…	
32	17:31	J	Carmen, nosotros no entendemos la pregunta	
33		P	Si estás haciendo las sumas inferiores en este caso. Vamos a marcar las áreas que quieres calcular	
34		A	¡Ah!	
35		P	Las sumas inferiores son las sumas de estos tres rectángulos. El primero es de altura cero, el segundo de altura no se qué y el tercero de altura… ¿Qué altura tienen?	
36		A	0,33 [es el área]	
37		P	¿Y de dónde sacas eso?	
38		A	…	
39		P	Sería la imagen de este punto	
40		A	Ah, sí	
41		P	Es decir, en este caso sería, en este rectángulo sería la imagen de este punto. ¿Por qué? ¿Qué clase de función es esta?	
42		J	Esta es una parábola ¿no?	
43		P	Sí, ¿y por qué en las sumas inferiores la imagen es la altura es la imagen del punto de la izquierda?	
44		J	Yo lo único que creo es que si el área del rectángulo es 0,33	
45	18:47	P	No, el área del rectángulo no es 0,3. El área que quiero calcular es 0,33	
46		J	¡Ah! Vale. Entonces la altura tiene que ser 1 por fuerza	
47		P	No, el área total. En este rectángulo por ejemplo, ¿cuál es la altura?	Van señalando
48		J	O coma algo	
49		P	¿Pero es la imagen de qué? Porque la altura es una imagen	
50		A	Del punto ese	
51		P	¿De qué punto, de éste o de éste?	
52		A	De ese	
53		P	Pues eso es lo que tienes que hacer. En el caso de las sumas inferiores la altura de los rectángulos es… la imagen de estos puntos. Mirad a ver qué puntos son esos.	
54	19:23	A	Las sumas inferiores… quitan área	
55		J	…	
56		A	Entonces esto que hemos puesto aquí n oes	
57		J	¿Te queda claro?	
58		A	Mmm	
59		J	Pues dile que no te queda claro	

Pareja 2			Dicen	Hacen
60		A	Mm . Lo que nos ha explicado está claro, lo que pasa es que la pregunta…	
61		J	Siempre igual	Varían n aumentando y disminuyendo
62		A	La imagen… la altura es la imagen de los puntos. Y en las sumas superiores… cambia a sumas superiores es…	Ponen n=2, quitan suma inferior y ponen suma superior
63		J	El último cuadrado es altura 1 siempre	
64	21:05	A	Dale a n=3	
65		A	La altura es la misma	Quitan suma superior y ponen suma inferior
66	21:18	J	No, porque en la suma inferior la altura del último cuadrado es siempre cero y en la superior es siempre 1 al final	Aumentan n y luego disminuyen
67	21:32	A	Pero la altura aquí del punto… la altura es la imagen del punto	Quitan suma inferior y ponen suma superior
68		J	Del punto según la fórmula de x^2 ¿no?	
69		A	La altura es la imagen del siguiente punto. La altura de cero es la imagen de…. Muy bien, nos queda una pregunta	
II.c. Escribe una fórmula para las **sumas superiores**, $\mathbf{S_i}$ y otra para las **sumas inferiores**, $\mathbf{I_i}$, relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la **partición**.				
70			[Leen]	N=10 con todo marcado y zoom ampliado
71		J	Esto ya no es tan fácil	
72		P	Tenéis que poner para la suma inferior la longitud del intervalo multiplicado por la imagen de ¿qué punto?	
73	00:10	J	Para las sumas inferiores el de la izquierda	
74		P	Es decir, si es el primer intervalo ¿qué será, el de a_0 o el de a_1?	
75		J	El de a_0	
76		P	¿Y a_0 no lo tenéis por ahí?	
77		J	Sí	
78		P	¿y a_1?	
79		J	Vale, explícalo [a Ángel]	
80	1:45	A	¡Ficha terminada! Déjame la tabla de valores a ver	
81	2:45		[Trabajan en la hoja de cálculo hasta el final de la sesión]	Abren hoja de cálculo. Quitan del applet las marcas de la suma superior y el máximo. Ponen n=1

ANEXO VI

Transcripción de la Tarea Parábola. Pareja 6. K-MA

I. Mueve el deslizador y observa lo que ocurre con el número de puntos de la **partición**, el número de sub-intervalos y la longitud del sub-intervalo.



a. ¿Qué representa **n**?

¿Qué relación hay entre **n** y el número de puntos de la **partición**?

b. ¿Qué relación hay entre **n** y la longitud de los sub-intervalos?

c. Escribe los valores de los extremos del intervalo de la **partición** para:

n=1: a_0= **; a_1=**
n=2: a_0= **; a_1=** **;a_2=**
n=3:
n=4:
...
n=10:

d. Busca una fórmula general para cualquier valor de **n**:

1. De la longitud del sub-intervalo : **Δx**=

2. De los valores de los extremos del intervalo de la **partición**:

a_0=

a_1=

a_2=

....

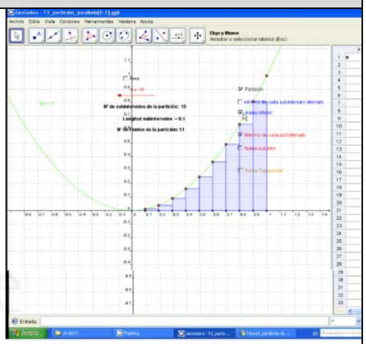
a_n=

II. Observa las **sumas superiores** e **inferiores** de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos:

a. En las **sumas inferiores**:

b. En las **sumas superiores**:

c. Escribe una fórmula para las **sumas superiores**, **S_i** y otra para las **sumas inferiores**, **I_i**, relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la **partición**.

Pareja 5			Dicen	Hacen
I. Mueve el deslizador y observa lo que ocurre con el número de puntos de la **partición**, el número de sub-intervalos y la longitud del sub-intervalo. a. ¿Qué representa **n**? ¿Qué relación hay entre **n** y el número de puntos de la **partición**?				
	9:00	K	[Lee] Mueve el deslizador y observa el número de..	
b. ¿Qué relación hay entre **n** y la longitud de los sub-intervalos?				
c. Escribe los valores de los extremos del intervalo de la **partición** para: **n=1: a_0=** **; a_1=** **n=2: a_0=** **; a_1=** **;a_2=** **n=3:** **n=4:** **…** **n=10**:				
II. Observa las **sumas superiores** e **inferiores** de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos: a. En las **sumas inferiores**: b. En las **sumas superiores**:				
1	17:17	K	[Lee: observa las sumas…]	
2		K	La altura, la altura es… f de…. pues para a_1 f de a_1, para a_2, f de a_2	[17:35 vídeo; corregido sería 17:20] marcan sumas inferiores y superiores, [18:51: corregido, 18:36]Desplazan la zona gráfica. Cursor en (0,0)
3		MA	Estamos con las inferiores siempre	Aumentan el zoom
4		K	No, en las inferiores, justo, en las inferiores es para a_n la altura es… imagen de a_n, para a_6 la altura es imagen de a_6, pero para a_7, o sea para las exteriores, la altura para la exterior del segmento a_6 es la imagen de a_7. Así queda ya… [Escriben: altura para a_n es igual a f de a_n, altura para a_n en las superiores es igual a f de a_n más 1 ¿o no?, si pero más 1 no de más uno de eso, sino más 1 de .. el más 1 de bajo, quiero decir, no sé si has entendido, … explicar [quiere decir a_{n+1}]	

Pareja 6			Dicen	Hacen
5	19:08	K	Profe ¿así? No sé si tiene sentido eso.	
		MA	A ver, las inferiores vale, eso sí que está bien, h = f de… ¿la a esta qué es?	
6		K	¿Cómo?	
7		MA	¿La a_n esta qué es?	
8		K	Esto, para el punto	
9		MA	Vale	
10	19:30	K	Por ejemplo, para n 10, eh… a de 6 sería, imagen, la altura sería imagen de a partido 6, a partido 6 sería uno, dos tres cuatro, cinco, seis, ¿éste cuenta?	[19:50;corregido 19:10] Señala el segmento (0'2,0) a (0'2, f(0'2)
11		MA	¿Cuál? Sí	
12		K	¿Éste cuenta, digo? Es uno dos, uno, dos.	
13		K	Es, ah, sí porque este es a0, sí, a6 sería este, la altura sería, justo, f de a_n.	
14	20:02	MA	Pero aquí…	
15		K	Aquí he puesto f de porque si quieres calcular la misma pero en la exterior, no es la imagen de esto la altura, es la imagen de la siguiente.	
16		MA	Pero más uno no, sería más 1/n, porque de aquí, aquí no hay 1,	
17		K	No, ya, no quería decir esto más uno sino a de n+1, o sea si es a6, a7	
18		MA	No es 6 y 7, es 0'6 y 0'7	
19		K	No, no digo de la diferencia entre 0'6 y 0'7, sino la diferencia entre a6 y a7. Quiero decir, a de 6 pues a de 6 más 1 es igual a de 7 ¿no lo entiendes?	
20		MA	O sea, lo entiendo,	
21		K	No te gusta como queda	
22		MA	Pero no sería exactamente así. Si tú estás en este punto…	
23		K	Sí, también tienes razón	
24		MA	Y tienes este rectángulo, el punto es $a_n + 1/n$	[21:29] Señalan los segmentos del 3r rectángulo superior (0'2, 0) a (0'2, f(0'3)) y luego (0'2, f(0'3)) a (0'3, f(0'3))
25	21:00	K	Que sí que sí, la de antes, está claro. Como más un intervalo estaba poniendo yo, así queda mejor.	
Escriben: para las sumas inferiores: $h \quad a_n = f(a_n)$ **Para las sumas superiores** $a_n = = f(a_n) + \frac{1}{n}$				
26		K	La última. [Lee] Escribe una fórmula para las sumas superiores relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la partición.	
27	21:28	MA	Una suma para todo eso	
28	21:52	MA	A ver para las inferiores… qué?	

Pareja 6			Dicen	Hacen
29		K	No, dime, dime	
30	22:17	K	¿Qué día es hoy? 11. Pareja, ¿qué pareja éramos? [Están poniendo los datos: fecha,…]	¿Estén escribiendo en la hoja de tareas?
31		MA	Pareja 6	
32	22:32	MA	Para las inferiores la altura era f de an, sí.	
33	23:11	K	an más, o sea por f de an	
34		MA	Espera, pero… Carmen	
35		K	a_1 por	
36		MA	[a la profesora] Esto último ¿quieres que te lo pongamos como una fórmula, como una suma de estas de…	
37		P	Como sepas	
38		MA	a_1 más lo otro más..	
39		K	Por ejemplo, estaría bien decir a_1 o sea a_0 por f de a_0, más a_1 por f de a_1, más a_2 por f de a_2, puntos suspensivos, a_n por f de a_n. Eso para las superiores.	
40	23:48	P	¿Es a_0? ¿Cómo que es a_0?	
41		K	No sé, es un punto	
42		P	Pero ¿cuál es la … a ver, la suma inferior	
43		K	Sí, la a_0 no contaría, para las inferiores	
44		P	Vamos a ver, Kevin, ¿a qué es igual la suma inferior? ¿cómo la calculas?	
45	23:57	MA	Con la suma de todos estos	
46		P	Sí… tienes que sumar las áreas de los rectángulos.	
47		K	Sí, por eso digo…	
48		P	¿Y cuál es el área de cada rectángulo?	
49		K	a_n	
50	24:06	P	¿pero cómo que a_n? an es un punto	
51		K	Sí	
52		P	Es la base	
53		MA	La base siempre es 1/n	
54		K	1/n por f de ..	
55		MA	F de a	
56		P	¿De qué a?	
57		K	F de a_n	
58		MA	F de este punto	
59		P	¿Pero si estás hablando de la inferior por ejemplo?	
60	24:24	K	Sí de la inferior sí	
61		P	Si la inferior… cogemos este, cogemos uno cualquiera	
62		K	Cogemos 0’3, a3, pues la altura es f de a3	
63		MA	La imagen de 0’3	
64		K	Sería 1/n por f de a_n	
65		P	Eso para todos	
66		K, MA	Sí	

Pareja 6			Dicen	Hacen
67		P	Para la suma inferior	
68		MA	Sólo para la inferior, y para la superior sería lo mismo, pero en lugar de la imagen de ese punto, la imagen de ese punto más 1/n	
69	24:49	P	La imagen de ese punto más 1/n	
70		MA	O sea más un intervalo de estos. ¿No lo ves aquí? En 0'1 la altura es la imagen del siguiente.	
71	25:00	P	Del siguiente. Entonces vosotros tenéis claro que es, la longitud del intervalo es la base y la altura es la imagen de este punto	
72		K	sí	
73		P	Si estamos marcando el primer intervalo, ¿qué punto es este de aquí?	
74		K	0	
75		P	0, ¿y es a…?	
76		MA	0	
77		P	0, sea, el primer rectángulo sería … poned ahí	
78		K	1/n por f de a_0	
79		P	Muy bien ¿Y el segundo?	
80	25:33	K	1/n por f de a1, 1/n partido f de a2, puntos suspensivos,	
81		P	¿y el último?	
82		K	1/n partido f de an	
83		P	¿Estás seguro de eso, que es f de a_n? A ver	
84		K	Ah no! … n-1	
85		P	Mira a ver	
86		MA	n-1. Exacto	
87		P	¿Vale? Es decir, tampoco tenemos que pretender…	
88		K	Pero profe, entonces…es que a_n	
89		P	Si marcamos por ejemplo aquí el área	
90	26:10	K	Es que hay un intervalo menos de puntos	
91		P	Hay un punto más que número de intervalos. Eso lo hemos visto en la sesión anterior, que si tenemos n sub-intervalos, hay n+1 puntos	
92		K	Sí, sí, está claro. Entonces, sólo podemos calcular intervalos hasta a_{n-1}, no sé cómo decir, que no podemos calcular, no hay punto de a_{10}, no hay intervalos de a_{10}, entre los inferiores	[26:23; correg, 26:20] Disminuyen el zoom y quitan las marcas de "máximo de cada subintervalo" y "suma superior". Marcan mínimo de cada subintervalo.
93	26:33	P	Si hay 10 intervalos, hay 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10. Lo que pasa es que el último para la suma inferior..	
94		MA	Tiene la altura del penúltimo	
95		K	El punto a_n no lo relacionamos con ningún área.	
96		P	En la suma inferior no. A lo mejor en la superior sí.	
97		K	Eso	
98	27:00	K	Del siguiente. Eso se quedaría algo así	
99		MA	Claro porque si cogemos esa altura estaríamos haciendo otro rectángulo que ya no interesa	

Pareja 6			Dicen	Hacen
100		P	Algo así, no. Exactamente así. Se podría poner un poco más mono	
101		MA	Sacando factor común	
102		P	Muy bien. Muy bien.	
103		MA	Se pondría suma de las áreas	
104		P	Se podría poner con un sumatorio pero eso ya es muy complicado	
105		K	Sí, el símbolo ese	
106		MA	La e esa del revés	
107	27:12	P	¿queréis que lo explique?	
108	27:14	MA	Si quieres	
109	27:46	K	¿Lo del sumatorio cómo es?	
110		MA	Es el símbolo	
111		K	Sí, sí, el símbolo sí, pero qué significa exactamente	
112		K	(A la profesora) el símbolo del sumatorio ¿qué significa exactamente?	
113	27:50	P	Sumar	
114		K	Quiero decir, nosotros sólo llegamos a n-1	
115		P	¿Y qué?	
116		K	¿Cómo se pone?	
117	28:00	P	¿Cómo se pondría eso? Bueno.	
118		K	Es que hoy lo hemos usado en química, pero…	
119		P	Tienes que sumar… El tema es qué ponemos ahí y ahí. 1/n , eso es igual para todos ¿no? Lo que va variando aquí es el subíndice este ¿no? Entonces podemos poner a sub"i" i" i" varía ¿desde dónde hasta dónde?	
120	28:33	K	Desde 0 hasta n-1	
121		P	Perfecto	
122		K	Es que así no lo habíamos usado	
123		MA	O sea aquí se pone, debajo del símbolo este se pone el primero y arriba el último	
124		K	En la fórmula se pone la variable y defines la variable debajo y arriba, ¿no?	
125		MA	Ah, pues vamos a hacerlo con el siguiente	
126		P	Muy bien	
127		K	Ya está	
128		MA	Ahora en la de las superiores	
129		K	Es verdad. Quita…	
130	29:07	MA	Es lo mismo, pero la imagen es la altura del siguiente	
131		K	Hasta llegar a n ¿no? Vamos a intentar hacerlo con la cosa esta	
132		MA	Vamos a intentar ponerlo primero sin eso, normal.	
133		K	Sería 1/n ¿no?	
134		MA	1/n	
135		K	por f de	
136		MA	a_{0+1}… a sub 0 + 1	
137		k	Vale, el 1 ese es .. el cero	

Pareja 6			Dicen	Hacen
138		MA	Ah, sí.	[29:48] Quitan suma inferior y ponen suma superior
139		K	Pero es que … eso a mí no me cuadra	
140		MA	¿El qué , lo de a sub 0 + 1/n	
141		K	Sí. Lo que estás haciendo es… tú estás diciendo, esto es la base y esto la altura	
142		MA	Sí	
143	30:00	K	La altura estamos diciendo, aquí… estamos diciendo que la altura es por ejemplo para…	
144		MA	Estamos en el punto 0, vale	
145		K	En el primero. Tú dices que es la base, 1/n,	
146		MA	Sí	
147		K	y luego f de a0 más 1/n. Entonces f(0) qué es? 0. Pero a_n es esto, y esto no es la altura.	[30:53] aumentan el zoom
148		MA	No, pero a ver, no estoy diciendo que sea...	
149		K	Ya, ya lo sé. Tal cual se ha quedado	
150		MA	No digo que se a la imagen de este más la imagen de este	
151		K	Sí, sí, ya lo sé.	
152		MA	La imagen de.. la imagen del siguiente es lo que quiero expresar	
153		K	Pero tal cual lo hemos puesto, yo creo que se ha quedado lo que te he dicho.	
154		Ma	no	
155		K	Ah, no, no, vale es	
156		MA	No, porque si tú pones 1 es como si estuvieses aquí y quisieras poner la imagen, la imagen de i..	
157	31:00	K	Justo, justo, porque has puesto la f dentro del paréntesis. Tienes razón.	
158	31:08	K	Exacto, sí, sí. Tienes razón. Tú dices el intervalo que el intervalo vale 0,1. Perfecto, tienes razón	
159		MA	Y luego la última,	
160		K	an..	
161		MA	Espera,	
162		K	Es que el 1	
163		MA	La última se quedaría…	
164		K	N, Tú puedes poner a..	[32:10]disminuyen el zoom y desplazan la zona gráfica
165	31:35	MA	Se queda en n-1, n-1	
166		K	Más 1/n	
167	31:43	MA	Y para poner esto aquí, pues …	
168		K	A ver	
169	31:56	MA	El simbolito este	
170		K	Y ponemos 1/n… Sí lo podemos poner perfectamente. No hace falta paréntesis, pero bueno. Sí esto es igual, hacemos f de a sub i más, sí, sí, f de a sub i más 1/n y luego aquí ponemos que la i va desde 0 hasta n-1	
171		MA	Espera, se puede poner f de … a_i más 1/n.	

Pareja 6			Dicen	Hacen
172		K	Claro	
173	32:48	MA	Y luego aquí	
174		K	Le ponemos lo mismo	
175		MA	0 igual n-1	
176	32:46	K, MA	Carmen, ¿así estaría bien, esta?	
177		MA	Esto ya profesional ¿eh?	
178		K	Madre mía	
179		MA	Con simbolito y todo	
180	33:23	K	¿Éste que hace?	No sé a qué se refiere
181		K	No, este no, este.	
182	33:36	MA	Carmen, a ver si está bien eso.	[34:17] Quitan suma superior y mínimo y marcan suma inferior.
183		P	No exactamente, porque…estáis hablando de la superior.	Lo quitan y ponen número de sub-intervalos
184		K	Sí	Lo quitan
185		P	Bueno, sí que está bien, pero os estáis liando un poco.	Ponen máximo y lo quitan (aparece y desaparece el punto (1, f(1))
186		k	Ya, pero así nos liamos menos	Lo vuelven a poner
187		P	Porque este punto ¿cuál es?	
188		MA	El a sub 0	
189		K	A sub 1	
190		P	A sub 1, poned a sub 1	
191		K	Ah, ya, ya…	
192		P	En lugar de a sub 0 más 1/n	
193		K	y quitamos el 1 partido	
194		MA	Entonces hacemos en vez de empezar desde el i sub 0, desde i igual a 1	
195	34:05	P	Hasta… Claro	
196		MA	Hos…	
197		K	Pon el igual si también , es igual o sea que	
198	34:18	MA	I igual	
199		K	n. Sí porque lo que haces es el cero más 1/n es el 1 y el n-1 más 1/n es el n	
200		MA	así	
201		K	No, ahí no. Ya está	
202		MA	Sí porque el primer punto es 1/n, el a sub 1	
203	34:40	K	Ya, pero esto es i, no es el punto, es el subíndice. El subíndice, empezamos con el subíndice 1	
204		MA	Ah, vale	
205		K	Y acabamos en el subíndice n	
206		MA	…	
207		K	No, n y ya está	[35:52] Marcan suma superior.
208		MA	A ver … Sí, tienes razón, n. 1/n por f	
209		K	De a_i. Lo único que hemos cambiado es… Aquí lo que estábamos haciendo es adelantarlo mediante la suma. Y aquí como el sumatorio… adelantamos…	Cierran el applet. Cierran la hoja de cálculo.
210	35:30	MA	Sí	

Escriben:

partición.

$a_i = \frac{i}{n}$

$$\frac{1}{n} \cdot f(a_0) + \frac{1}{n} f(a_1) + \frac{1}{n} f(a_2) + \ldots\ldots + \frac{1}{n} f(a_{n-1})$$

$\boxed{\text{inferiores}} \rightarrow$ $\sum \text{Areas} = \frac{1}{n}\left(f(a_0) + f(a_1) + \ldots\ldots + f(n-1) \right) =$

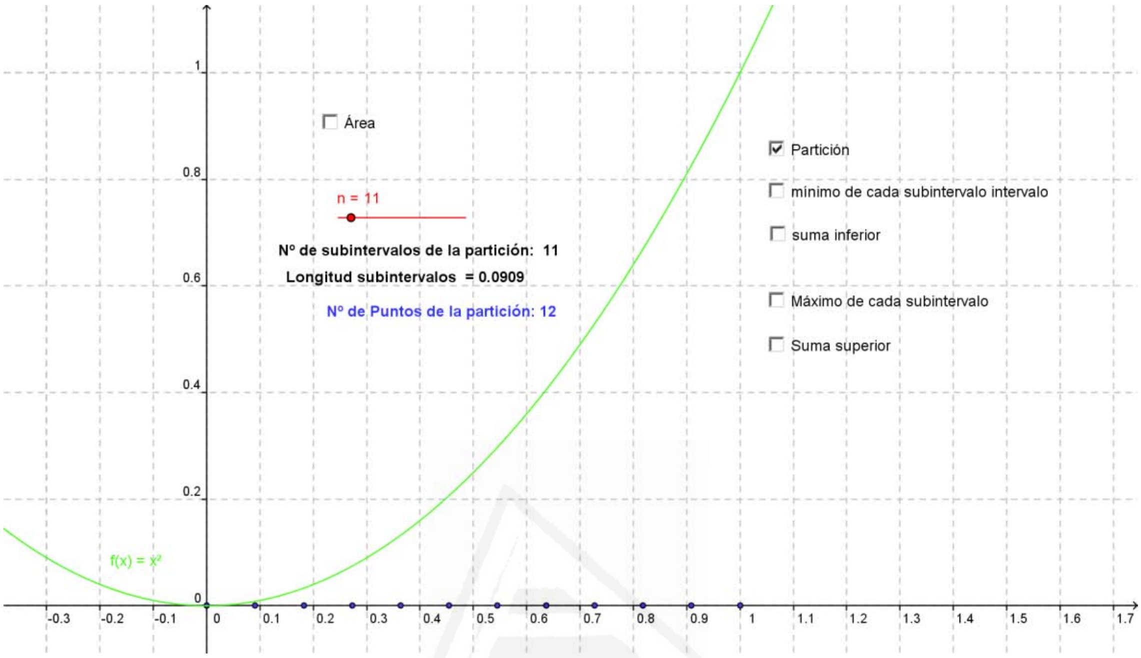
Inferiores ~~Superiores~~: $\sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1}{n} (f(a_i))$ / Superiores $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n} (f(a_i))$

$\rightarrow \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$ $\rightarrow \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$

ANEXO VII

Transcripción de la Tarea Parábola. Pareja 4. L-M

I. Mueve el deslizador y observa lo que ocurre con el número de puntos de la **partición**, el número de sub-intervalos y la longitud del sub-intervalo.



a. ¿Qué representa **n**?

¿Qué relación hay entre **n** y el número de puntos de la **partición**?
¿Qué relación hay entre **n** y la longitud de los sub-intervalos?

b. Escribe los valores de los extremos del intervalo de la **partición** para:

n=1: a_0= **; a_1=**
n=2: a_0= **; a_1=** **;a_2=**
n=3:
n=4:
...
n=10:

c. Busca una fórmula general para cualquier valor de **n**:

1. De la longitud del sub-intervalo : **Δx**=

2. De los valores de los extremos del intervalo de la **partición**:

a_0=

a_1=

a_2=

....

a_n=

II. Observa las **sumas superiores** e **inferiores** de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos:

a. En las **sumas inferiores**:

b. En las **sumas superiores**:

c. Escribe una fórmula para las **sumas superiores**, **S_i** y otra para las **sumas inferiores**, **I_i**, relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la **partición**.

Pareja 4			Dicen	Hacen
I. Mueve el deslizador y observa lo que ocurre con el número de puntos de la **partición**, el número de sub-intervalos y la longitud del sub-intervalo. a. ¿Qué representa **n**? ¿Qué relación hay entre **n** y el número de puntos de la **partición**?				
b. ¿Qué relación hay entre **n** y la longitud de los sub-intervalos?				
c. Escribe los valores de los extremos del intervalo de la **partición** para: **n=1: a_0=** **; a_1=** **n=2: a_0=** **; a_1=** **;a_2=** **n=3:** **n=4:** **...** **n=10**:				
II. Observa las **sumas superiores** e **inferiores** de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos: a. En las **sumas inferiores**: b. En las **sumas superiores**:				
II-1	8:28	L	[Lee]	
2		M	En las sumas inferiores… la altura es la mínima f(x)	
3		L	Ahora me explicas	
4		M	Y en las superiores la máxima imagen	
5	8:59	L	¿Cómo?	
6		M	A ver, la altura es la altura ¿no? Te preguntan en cada intervalo cuál es la altura. Siempre va a ser de los inferiores la mínima, o sea de aquí a aquí la mínima es ésta. La altura de los rectángulos inferiores es la mínima.	Señala con el ratón de 0.3 a 0.4, n=3 y la imagen de 0.3
7		L	¿Pero no tendría que tener una relación con n?	
8		M	¿Una relación con n? Si esto depende de la, de la fórmula, no de las particiones.	
9		L	Pero y si dice la mínima f(x) no podría ser un punto de por aquí, pero el cero es más bajo.	
10		P	¿Qué us passa?	
11	9:35	L	Que sería cero siempre	
12		M	No, pero en esta partición, pero en esta partición la mínima es ésta.	
13	9:45	P	Sí, pero… es tracta de relacionar per exemple esta, eh, en este que tens ací (el de la pag anterior) tu tens, el primer subinterval és eixe, no? Comença en 0 i acaba en 0.3	

Pareja 4			Dicen	Hacen
14		M	Sí.	
15		P	Quina és l'altura?	
16		M	De la inferior 0.	
17		P	0, i és la imatge de l'extrem inferior	
18	10:	M	De l'extrem esquerre. Ah, hem de posar que és la imatge de l'extrem esquerre. Però que això també està bé.	
19		P	Sempre és igual, en este cas?	
20	10:10	L	No, yo prefiero ponerlo así. La imagen …	
21		P	Sempre és igual en este cas? Sempre és de l'equerra o no sempre?	
22		M	En este cas sí, en aquesta part, en aquesta no.	
23		P	I perquè és aixina?	
24		M	Perque és una parábola.	
25		P	I es… en la circumferència era igual?	
26		M	I és… i és… i és… simètrica.	
27	10:31	P	Però nosaltres no estem considerant l'altre costat, només este.	
28		M	Val , no, perque sempre és creixent.	
29	10;34	P	En la circumferència passava igual, l'àrea del cercle?	
30		M	Eh… sempre era decreixent en el primer quadrant.	
31		P	Aleshores… podem saber sempre quin és el valor mínim,	
32	10:48	M	El de l'esquerra, sí, val.	
33		L	Pero entonces la imagen de qué.	
34		M	A ver [¿ lee?] la imagen de las sumas inferiores… pues del primero sería… de la partición o sea…	
35		L	Del primer valor de la partición	
36		M	A ver hay tres particiones ¿vale? De la primera partición sería $f(a_0)$, de la segunda $f(a_1)$ y de l tercera $f(a_2)$.	
37	11:12	L	¿Y como regla general? ¿Porque… y si n es igual a 5?	
38		M	De la partición, n es igual a f … no de la partición i	
39		L	A ver… escríbelo.	
40		M	A ver, las sumas, las sumas, la altura, la altura que es h, de la partición i, que no sé cuál es, es igual a la imagen de, la imagen… eh… 1/n por i-1	
41		L	Falta otro paréntesis	
42	12:04	M	A ver, la altura en el intervalo i en la partición i es igual a la imagen de 1/n que te da la longitud de cada intervalo por i, la longitud de cada intervalo por el intervalo que tú quieres, que sería, si por ejemplo tú quieres el 2, tú en vez de estar multiplicando, tú quieres la longitud de lo que ocupa una partición, por ejemplo porque es el extremo izquierdo ¿(aquí sería altura de i=f(i/n))?	
43	12:52	L	Vale	

Pareja 4			Dicen	Hacen
II.c. Escribe una fórmula para las **sumas superiores**, S_i y otra para las **sumas inferiores**, I_i, relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la **partición**.				
44		M	[Lee] Escribe una fórmula …	
45	13:06	L	Mira que eres, si no he entendido esto no voy a entender esto	
46		M	A ver, la altura es igual, la altura de las sumas inferiores de los azules es, o sea es este punto, o sea es este punto de este, este punto de este, este punto de este… vale. Entonces	
47	13:20	L	La imagen de ese punto	
48		M	La imagen de ese punto sí, entonces ya ponemos f y abrimos paréntesis, porque sabemos que es una imagen, vale. Este punto es el punto izqdo. ¿no? Esta es la partición, este es el intervalo 1?	
49		L	Sí	
50	13:38	M	¿Y estamos cogiendo a_0?	
51		L	Sí	
52		M	Vale. ¿Ésta es la partición 2?	
53		L	Sí	
54		M	¿Y estamos cogiendo a_1?	
55		L	Sí	
56	13:45	M	¿Ésta es la partición 3?	
57		L	Sí	
58		M	¿Y estamos cogiendo a_i?	
59		L	Sí	
60		M	Es uno menos del intervalo que queremos calcular. Vale. La distancia real de cada intervalo es 1/n. Y nosotros buscamos si estamos en el intervalo 2, buscamos la distancia de a_1. Y hemos dicho aquí que la distancia de a_1 es 1/n por 1 porque es 1 si queremos esta distancia es esto 1/n por 2. De ahí tenemos que la imagen de 1/n por la longitud de cada intervalo, por la partición que queremos menos 1 porque queremos el extremo izquierdo y abajo como queremos el extremo derecho, no la restamos 1.	
61		L	¿Pero menos 1 por qué? Si le restamos 1 será negativo siempre, eh, 0.7-1	
62		M	No, pero estamos en i, eso después lo multiplicas por lo que mida cada uno	
63	14:51	L	Ya, pero si lo multiplicas por un número negativo te va a dar negativo.	Mueve el deslizador a n=7
64		M	Es que el i es el número de la partición: la 1, la 2, la 3,…	

Pareja 4			Dicen	Hacen
65		L	Vale	
66	15	M	La 1, la 2, la 3, la 4, la 5, la 6… entonces si tú quieres el de la 6 tienes que conseguir el 5 que es ese punto, que multiplicado por lo que es 1/n… y si quieres el 6 ya no hace falta que lo restes porque ya directamente es éste. De ahí que la imagen de i/n por i-1 y la imagen de i/n	
67	15:25	Ál va ro	¿Cómo has hecho esto?	
68		M	Bien	
69		A	Que te calles que estoy hablando con Laura. ¿Cómo has hecho esto?	
70		L	Pues es eso… a ver. Busca la fórmula general, el primero siempre va a ser el 0 porque siempre…	
71		A	Ya	
72		L	El segundo siempre va a ser… explícaselo tú Mario. Es que yo lo he entendido pero no sé explicarlo.	
	15:53	M	Me ha dicho que me calle.	
		A	Ahora hablas	
	15:59	M	¿De qué vas?	
		A	¡va!	
73		M	A ver te da… si tú quieres… ¿cuántas particiones tienes aquí?	
74		A	[Cuenta] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,… el número de n tío.	
75		M	Tío, vamos a ver…	
76		A	Si tienes 7 tienes 8 particiones	
77		M	Calla, no, tienes 7: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Tienes 7, a ver si sabemos contar ¿vale?	
78		A	¿?	
79		M	Pon un 7	
80	16:16	A	Número de puntos=partición?	
81		L	Número de puntos no de particiones	
82		A	Tiene que haber 8 puntos y hay 7 trozos.	
83		M	Vale ¿y qué? Pero yo te estoy diciendo cuántos trozos hay y tú lo que quieres saber es el valor de la suma de los trozos.	
84		A	Como el pentagrama que tiene 4 líneas y 4 espacios	
85		M	Ya ves que putada	
86	16:33	A	Venga, a ver, sigue.	Ríen los 3
87		A	Porque hay 8 puntos pero 7…	
88		M	Porque un espacio se delimita por 2 puntos.	
89		K?	¡No me jodas Mario!	
90		M	Entonces se puede compartir un punto, puede estar en 2 espacios, pero siempre va a haber 1 punto de más.	
	16:49	¿	No tienes la carrera de matemáticas…	
		M	Ríe	
		L	Ese boli es mío	

Pareja 4			Dicen	Hacen
		¿	sí	
		L	Porque la ha aprendido.	
91	17:00	M	A ver, Álvaro, saca la longitud de un intervalo. Todos los intervalos son guales ¿no? Si tú tienes un boli y todos los bolis miden lo mismo, ¿cuánta distancia tienes en total? El número de bolis multiplicada por lo que mide un boli ¿no? El número de particiones multiplicado por la distancia de las particiones. ¿Cuál es la distancia, la longitud de cada partición?	
92		A	n. No, n+1, no 1/n.	
93		M	1/n. Lo multiplicas por las particiones que tengas	
94	17:29	A	Ah vale. Entonces 1/n por 2.	
95		M	¿En cuál estamos, en a_2? Sí.	
96		A	Ah, vale. O 1/n por 3, o 1/n por lo que sea.	
97		M	Sí	
98		A	Vale, vale, vale, entonces ¿el área? Es 1/n, ¿no,___ ¿por qué?	
99		M	¿a_n cuál es? ¿ n qué número es? El total de todos ¿no?	
100		A	Ah, sí, el total	
101	17:48	M	Si te dicen a_n qué número te preguntan?	
102		A		
103		M	No, el último.	
104		A	¡Ah!	
105		M	Y el último ¿cuál va a ser siempre?	
106		A	1	Mueven a n=1, luego n=8 y lo dejan en n=2
107		M	Y n/n ¿cuál va a ser siempre?	
108		A	1	
109		M	Ya está arreglado.	
110		A	¡Ah!	
111	18:15	L	¡Anda! [lee 3.II.c] Vale, una fórmula para las sumas relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la partición.	
112		M	A ver, el área es igual…	
113		L	… uno más fácil.	
114		M	A la base por la altura… entonces las sumas inferiores que son más fáciles… no las superiores que son más fáciles. Sumas superiores, vale, está bien, sub i es igual a la base, la base siempre es …. 1	
115		L	La base es 1/n ¿no?	
116		M	No, la base es 1… partido n… O sea la base total es 1 pero de cada intervalo 1/n	
117		L	¡Lo has acertado!	

Pareja 4			Dicen	Hacen
118		L	Vale y la altura es eso que me has explicado, ¡claro!	
119	18:54	M	¡Ostia! Esto es más complicado ya, porque tienes que sumar todos… eso tiene que haber un cuadrado por aquí o algo raro, seguro, lo cual no es muy bueno. Eso es más complicado ya, tiene que ser una sucesión.	
120	19:08	L	Ocúpate tú.	
121		M	A ver, 1/n, vamos a hacer los 2.	
122		L	Pero 1/n es de ¿la base?	
123		M	Es la base.	
124		L	La base pero de 1	
125	19:17	M	De este trozo.	
126		M	Claro y te pide de todos.	
127	19:20	M	Ya, pero ahora lo sumamos 20 veces y ya está.	
128		L	Vale.	
129		M	1/n la longitud por f de i de 1/n más 2/n por f de 2/n, + 3/n por la imagen de 3/n, más 4/n…	
130		L	Ya está Mario.	
131	19:55	M	Pero es que te dice de todos.	
132		L	Pero es que no vas a llegar hasta el infinito.	
133		P	Anem pensar en tancar.	
134		M	4/n y esto es así hasta el infinito. Y ahora ¿cómo lo ponemos?	
135	20:10	L	… vale. Pues lo dejas así.	
136		M	Sí pero yo no sécuánto es n.	
137		L	De cada… ah… eh. Pero en cada caso será … si n es igual a 4 pues en esa caso la suma..	
138		M	Ya, pero no sabemos lo que es n, hay que poner las sumas para todos.	
139		L	Claro, pues para todos, pues si te pide la suma superior cuando n es igual a 5 pues sustituyes n por 5, si n es igual a 6, como va a servir para todos, pues pones n y ya está. Me explico muy mal, ¿verdad?	
140		A	Sí Laura, te explicas muy mal.	
141		M	Pero es que entonces habría que… ¡Ah, ya sé, ya sé…! Ya verás cómo está mal.	
142		L	comentarios	
143	20:48	M	Com…	Mueven n=9, a n=2 y lo dejan en n=4
144		L	…	
145		M	…	
146	21:00	M	¡Toma ya! [ríen]	
147		L	No lo entiendo ni yo [ríe]	
148		M	Yo tampoco, pero es la única solución que veo. Vamos a probar.	
149		A	Solución poner… para que parezca que está bien.	
150		M	Porque esto, esto no es el doble que esto.	

Pareja 4			Dicen	Hacen
151		A	Claro que no, eso es la mitad.	
152		M	Esto sí que es el doble, pero esto no es el doble porque es una parábola.	
153		L	Bueno, lo comprobamos el próximo día que hoy…	
154		M	Vale. Pero quedan 5 minutos aún.	
155		L	Ha dicho..	
156		M	Da igual, quedan 5 minutos.	
157	21:37	L	Que ansia que tienes por dar matemáticas?	
158		M	Mira, aquí. Mira, f, altura del rectángulo… Vaya mierda que hay que completar esto. ¡Uy!	
159		L	…	
160		M	… Esto no es el doble. Esto claramente no es el doble.	Mueve el cursor al segundo rectángulo superior, 0.2-0.5
161	22:14	L	Pero tampoco es el doble que esto. Esto no es el doble que esto.	A $f(x_i)$. Tabla, celdas C2 a C5. Desplaza la hoja para poner las columnas D, E, F, G, H.
162	22:18	M	Pues eso es lo que te digo, que no es el doble. No, no es el doble… Sí, sí que es el doble lo que viene siendo…	Vuelven a la vista anterior.
163		L	2/n y 1/n ¿No?	
	22:31	M	Llama a Carmen, que venga por aquí.	
		L	Cierra. Pero es que está aquí. Ah, no es que aquí hay otro.	

ANEXO VIII

Transcripción de la Tarea Parábola. Error de la aproximación. Pareja 6. K-MA

Mueve el deslizador **n** y observa cómo varían los rectángulos superiores e inferiores y el rectángulo rojo de la derecha:

I. Trata de identificar alguna relación. ¿Ocurre lo mismo que en el ejercicio anterior respecto a las diferencias **S_i-I_i**?

II. Busca una fórmula para el área del rectángulo rojo de la derecha dependiendo del valor de n. Para ello necesitas saber la base y la altura del rectángulo.

1. ¿La altura depende de **n**? Altura=

2. ¿La base depende de **n**? Calcula la base del rectángulo para:

   a. **n=10**, Base=

   b. **n=20**, Base=

   c. **n= 50**, Base=

   d. ....

   e. **n** , Base=

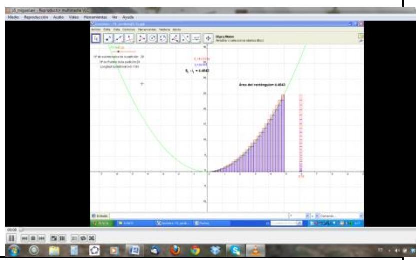
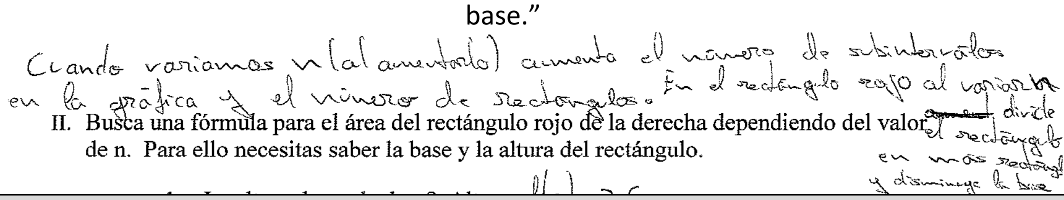
b. Obtén una fórmula para las diferencias entre las **sumas superiores** e **inferiores** dependiendo del valor de n.

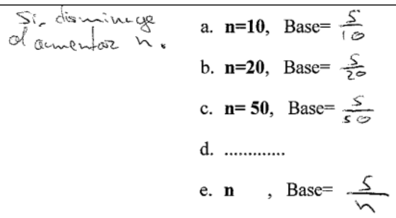
c. Identifica la relación entre el área del rectángulo amarillo y el **error máximo** cometido al aproximar el área.

d. Si error máximo es 0,1 ¿cuántos intervalos tienes que coger?

¿y si es 0,01?

e. ¿Podrías encontrar un procedimiento para determinar un valor de **n** que permita calcular el área con un error menor que un número tan pequeño como se quiera?

Pareja 6			Dicen	Hacen
Mueve el deslizador **n** y observa cómo varían los rectángulos superiores e inferiores y el rectángulo rojo de la derecha: I. Trata de identificar alguna relación. ¿Ocurre lo mismo que en el ejercicio anterior respecto a las diferencias S_i-I_i?				
211				N=28 
212	00:38	MA		Mueve a n=7, luego hasta 19, lo deja en n=14
213	00:49			Mueve a n=70, luego hasta 13
214	01:01			Señala con el puntero lo9ngitud del intervalo=0'3846
215	01:06			Mueve n hasta 15,3,6
216	01:20			N hasta 20, vuelve a 14
217	02:20			N=1, 5,3,1,3,2
218	02:51			N=1
219	02:59			N=3
220	03:47			N=1 y hasta n=46, n=1, n=2, n=4, n=1
221	03:56			N=3
222	05:41			De 3 a 13, a 1, a 5
223	07:00			A n=31, n=12, n=9, n=10
224	07:30			Aumenta poco a poco hasta n=35, luego baja poco a poco a 27,26,25,24,23,22,21,20 yo creo que buscaba el 20)
225	07:53			Aumenta a n=99 y baja a n=50
226				
227				
228	Escribe: "Cuando variamos n (al aumentarlo) aumenta el número de subintervalos en la gráfica y el número de rectángulos. En el rectángulo rojo al variar n divide el rectángulo en más rectángulos y disminuye la base."  Cuando variamos n (al aumentarlo) aumenta el número de subintervalos en la gráfica y el número de rectángulos. En el rectángulo rojo al variarla ~~aument~~ divide el rectángulo en más rectángulos y disminuye la base II. Busca una fórmula para el área del rectángulo rojo de la derecha dependiendo del valor de n. Para ello necesitas saber la base y la altura del rectángulo.				
II. Busca una fórmula para el área del rectángulo rojo de la derecha dependiendo del valor de n. Para ello necesitas saber la base y la altura del rectángulo. 1. ¿La altura depende de **n**? Altura=				
	Escriben: altura=f(5)=25. N0, h=cte			
II.2. ¿La base depende de n? Calcula la base del rectángulo para: n=10, base=….; n=20, base=….; n=50, base=…. ; n, base =…				

Pareja 6			Dicen	Hacen
	 Sí, disminuye al aumentar n. a. n=10, Base= $\frac{5}{10}$ b. n=20, Base= $\frac{5}{20}$ c. n= 50, Base= $\frac{5}{50}$ d. .... e. n , Base= $\frac{5}{n}$ Sí, disminuye al aumentar n:			
	4.II.2. Obtén una fórmula para las diferencias entre las sumas superiores e inferiores dependiendo del valor de n.			
229	08:50	MA	Carmen (Llama a la profesora)	
230	08:52			Mueve a n=1 y de nuevo a n=7
231	10:30		Carmen	
232	10:36	MA	El b este, de obtener la fórmula, ¿se refiere sólo a un intervalo de estos o a todos?	
233		P	A cualquiera	
234		MA	Solo a un intervalo	
235		P	De [0, 5], sí	
236		MA	Pero la fórmula sólo para dentro de un intervalo, no parael intervalo grande de 5	
237		P	A ver, si tienes… no, para todo el intervalo. Si tú tienes un valor cualquiera ¿no? Tienes unas sumas superiores unas sumas inferiores. Y lo que queremos es que la diferencia sea menor… que un valor determinado, porque queremos aproximar el área.	
238	11:13	MA	No, aquí no te dice nada de eso.	
239		P	No, ya pero en general	
240	11:17	MA	Sí	
241	11:20	P	Sí, las diferencias. Tu lo que tienes que ver es la diferencia entre por ejemplo S_5 e I_5	
242		MA	Ah, vale	
243	11:31	P	O, en este caso que vale 7, obtener un valor para esa fórmula, entre S_7 e I_7	
244	11:33	MA	Esto menos esto	
245		P	Exactamente, una fórmula ¿eh, Miguel Ángel?	
246	13:01	P		Explicación en la pizarra: partición; le damos a n el valor n=2, o empezamos por n=1: suma inferior, si n=21, la suma inferior es 0 ¿porqué? Adrián contesta.. N02, la suma inferior es 2 por f e, 1/n por f de … 1/2 $f(a_1)$+1/2$f(a_2)$.. N=10…
247	15:26			Con n=7 aumenta el zoom de la zona gráfica y luego lo disminuye.

Pareja 6			Dicen	Hacen
248				Sigue l explicación: I_{10}=..
249	15:42			Aumenta el zoom; no se ve la columna con las diferencias. Lleva n a 18, vuelve a n=1, y a n =4 (15:59)
250	17;38			Aumenta y reduce el zoom. Desplaza la zona gráfica para ver la columna de las diferencias (no se ve completa)
251	19:12			Desplaza la zona gráfica para ver completa la columna de las diferencias.
252	20:46	MA	Carmen, yo esto de la resta lo he puesto como eso que explicaste del sumatorio	
253	20:59	P	¿ y tú no encuentras una fórmula más fácil, Miguel Ángel?	
254		MA	Pues no, si tengo que sumar todo esto	
255		P	Pero tú estás buscando la diferencia	
256		MA	Sí	
257		P	¿Y tú no ves que ahí al lado hay una cosita dibujada? ¿Tú no ves? A ver..	
258	21:30	P	Vale, mira ¿cuál es la suma inferior en este caso?	N=1; pantalla I_i=0, S_i=125. Desplazamiento zona gráfica para ver completa la columna de diferencias y el área del rectángulo superior.
259		MA	Cero	
260		P	¿y la superior?	
261		MA	25	
262		P	¿y cuál es la diferencia en este caso?	
263		MA	Pues 25 por 5	
264	21:38	P	25x5, vale. ¿Por qué?	
265		MA	Porque es esta menos esta y en este caso no tiene área, es cero	
266		P	¿Y en este caso cuál sería?	
267		MA	Estas dos menos esta	
268		P	Estas dos ¿Qué dos?	
269		MA	Esta y esta la superior menos esta que es la suma inferior	
270	22:00	P	Mira lo que hay aquí. ¿eso no tendrá algo que ver?	
271	22:06	P	Esta de aquí no ves que es… sí… ¿no es igual que esta? ¿ y la de aquí n oes igual que esta?	
272		MA	sí	Ponen n=2
273		P	Además, si te acuerdas, tú fíjate en estos rectángulos que hay ahí dibujados. ¿Tienen algo que ver con la diferencia?	Señalan los rectángulos de la suma
274	22:30	MA	Pues la diferencia es la misma que en la gráfica.	
275		P	¿y eso por qué será?	Señalan los rectángulos de las sumas y de las diferencias

Pareja 6			Dicen	Hacen
276		MA	Porque está hecho para poner lo mismo…las mismas divisiones que hay en la gráfica.	
277		P	Pero, este rectángulo por ejemplo	Señalan el rectángulo de arriba de la columna de las diferencias.
278		MA	Este rectángulo, todo este sería esto de aquí	
279		P	Sí, pero este trozo ¿qué es?	
280	22:45	MA	Es la diferencia entre este… ¡Ah, claro!	
	23:07		Acaba el sonido	
Escribe: cias entre las **sumas superiores e inferiores** diferencia $= S_1 - I_1 = -\sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{s}{n}\left(d\left(\frac{si}{n}\right)\right) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{s}{n}\left(1\left(\frac{si}{n}\right)\right)$				
II.c. Identifica la relación entre el área del rectángulo rojo y el error máximo cometido al aproximar el área.				
	No lo hace			
II.d. Si error máximo es 0,1 ¿cuántos intervalos tienes que coger? ¿y si es 0,01?				
	No lo hace			
II.e. ¿Podrías encontrar un procedimiento para determinar un valor de **n** que permita calcular el área con un error menor que un número tan pequeño como se quiera?				
	No lo hace			

ANEXO IX

Transcripción de la Tarea Parábola. Error de la aproximación. Pareja 4. L-M.

Mueve el deslizador **n** y observa cómo varían los rectángulos superiores e inferiores y el rectángulo rojo de la derecha:

I. Trata de identificar alguna relación. ¿Ocurre lo mismo que en el ejercicio anterior respecto a las diferencias $\mathbf{S_i}$-$\mathbf{I_i}$?

II. Busca una fórmula para el área del rectángulo rojo de la derecha dependiendo del valor de n. Para ello necesitas saber la base y la altura del rectángulo.

1. ¿La altura depende de **n**? Altura=

2. ¿La base depende de **n**? Calcula la base del rectángulo para:

   a. **n=10**, Base=

   b. **n=20**, Base=

   c. **n= 50**, Base=

   d. ....

   e. **n** , Base=

b. Obtén una fórmula para las diferencias entre las **sumas superiores** e **inferiores** dependiendo del valor de n.

c. Identifica la relación entre el área del rectángulo amarillo y el **error máximo** cometido al aproximar el área.

d. Si error máximo es 0,1 ¿cuántos intervalos tienes que coger?

¿y si es 0,01?

e. ¿Podrías encontrar un procedimiento para determinar un valor de **n** que permita calcular el área con un error menor que un número tan pequeño como se quiera?

Pareja 4			Dicen	Hacen
Mueve el deslizador **n** y observa cómo varían los rectángulos superiores e inferiores y el rectángulo de la derecha: I. Trata de identificar alguna relación. ¿Ocurre lo mismo que en el ejercicio anterior respecto a las diferencias $\mathbf{S_i}$-$\mathbf{I_i}$?				
164		M	[Lee] Mueve el deslizador y observa cómo varían los rectángulos superiores e inferiores y el rectángulo rojo de la derecha.	
165	00:25	M	¿Cómo varía esto?	Desplaza la zona gráfica. Mueve el deslizador desde n=1 a 4, 5, 6, 9, 10, 7, 1, 2.
166		L	…	
167		M	Eso te marca la altura de los puntos.	
168		L	Pues si es n igual a 10 hay 10 intervalos…	
169	00:45	M	Llega hasta 100	
170		A	Si es 100, 100 intervalos.	
Escriben: n es el número de rectángulos y S_i-I_i es el área del rectángulo. Sí				
II. Busca una fórmula para el área del rectángulo rojo de la derecha dependiendo del valor de n. Para ello necesitas saber la base y la altura del rectángulo. 1. ¿La altura depende de **n**? Altura=				
171		M	Ya, ya. A ver 10, vamos a dejarlo en 10 que es bonito. ¿Qué pregunta? [Lee…] Área del rectángulo	Mueven hasta n=10.
172	01:20	L	El área del rectángulo.	
173	01:24	M	El área del rectángulo, espera, el área del rectángulo es… De este rectángulo es esta área, es el mismo, es como este lo que pasa que con más rayitas. Y ¿ocurre lo mismo? Sí, ocurre lo mismo... Es la misma función.	Va variando n desde 10 hasta 21. Señala el rectángulo superior de la derecha y el que da el error.
174		L	Pero no te está diciendo que compares, te está diciendo trata de identificar alguna relación ahí.	
175	02:02	M	Pues quitando el rectángulo nuevo lo demás es igual.	
176	02:09	L	¿n es el número del intervalo?	
177		M	Sí, es lo mismo	
178	2:24	L	Es el área	
179		M	Sí, es la suma de los …	
180		L	Y ocurre lo mismo si … y que pongo…	
181		M	…	
182		L	Sí, porque pa pensar no me da	
183	2:44	M	[Lee] Busca una fórmula para el área del rectángulo rojo de la derecha dependiendo del valor de n. Para ello necesitas saber la base y la altura del rectángulo. Pregunta este (marca el rectángulo del error) pero sin tener en cuenta las rayitas azules.	Marca el rectángulo del error.

Pareja 4			Dicen	Hacen
184	3:00	L	Pon un número más fácil	Ponen n=1
185		M	5, 1. La base, esta es la base y esta es la altura. La altura es constante y la base… la base en 1 es 5, la base en 10 es 0’5, entonces estamos dividiendo 10… entre 5 entre n. Porque 10… 5 entre 10 son 0’5.	Mueven a n=13 y señala el rectángulo rojo [el del error]
186		L	Entonces altura que es constante y la base…	Mueve n …hasta n=2… y 4 y vuelve a señalar el rectángulo. Vuelve a n=1 y … hasta 10.
187		M	1 partido … 5 partido n.	Vuelve a mover n
188	4:25		Vale	
Escriben: A= 25· 5/n= b·h; Altura= 25; No [depende de n], es una constante.				
II.2. ¿La base depende de n? Calcula la base del rectángulo para: n=10, base=….; n=20, base=….; n=50, base=…. ; n, base =…				
188	4:40		[lee] ¿La base depende de n? Calcula la base del rectángulo para n=10. Ese es el que está aquí… 0’5, para 20 sería 0,25, n=50… 1… pasa a n. Ese será como hemos hecho antes	Mueven n hasta 20 y luego a 50
Escriben: n=10, Base=0’5; n=20, Base=0’25; n=50, Base=0’1; … n, Base=5/n				
II.2. Obtén una fórmula para las diferencias entre las sumas superiores e inferiores dependiendo del valor de n.				
189	4:55	L	[Lee] Obtén una fórmula para las diferencias.	
190		M	La diferencia entre las sumas superiores y las inferiores dependiendo del valor de n. Fórmula para las diferencias. ¿Qué quiere decir para las diferencias?	
191	05:10	L	Para la resta, de la suma superior menos la inferior.	
192		M	Tenemos que hallar primero la fórmula, pero es que es como la fórmula de antes, que no sabemos sacar.	
193	5:28	L	Pon otro más	
194	5:43	M	La integral, ¿cómo es la integral?	Ponen n=13, n=10
195	5:54	M	La diferencia… la diferencia entre las 2 es… La diferencia es el área de este rectángulo. Si te fijas, si tú coges todo esto y lo desplazas así sólo te queda este libre.	Van moviendo n y lo dejan en n=9 (o n=8)
196	6:15	L	Ya, pero ¿para qué lo desplazas así?	
197		M	Para saber que la diferencia es sólo, o sea, sí, tú fíjate, si coges todos estos y los juntas te sale esto que es…	
198	6:28	L	Ya, pero eso es lo que tienes aquí.	
199		M	Claro ves, la diferencia es el área del rectángulo. ¿Cómo será la diferencia? Pues como el área del rectángulo.	
200		M	S de i menos de de i o I de i	Tienen n=8
Escriben: Si-Ii=25· 5/n				
II.c. Identifica la relación entre el área del rectángulo rojo y el error máximo cometido al aproximar el área.				
201		M	[Lee] Identifica la relación entre el área del rectángulo rojo, y el error máximo cometido al aproximar el área. La relación… la relación es que… si esta es la diferencia el error máximo es la mitad de eso ¿o no?	n=9, 12, 11 y lo dejan en 9

Pareja 4			Dicen	Hacen
202		L	¿Sí?	
203	7:26	M	Entonces es todo esto dividido entre 2.	
204	7:30	L	Pero pongo error =	
205		M	Sí. Y 125 por 5, o sea 25 por 5 son 125 y 125 entre 2 son… [calculadora] .	Calculadora ordenador
206		L	62,	
207		M	Sí, 62,5. Partido n ¿no?...	
208		M	Más arriba… ha hecho una raya.	
Escriben: $Error = \frac{25 \cdot \frac{5}{n}}{2} = \frac{\frac{125}{n}}{2} = \frac{62'5}{n}$				
II.d. Si error máximo es 0,1 ¿cuántos intervalos tienes que coger? ¿y si es 0,01?				
209	8:18	M	[Lee] Si error máximo es 0,1 ¿cuántos intervalos tienes que coger?	
210	8:24	L	Muchos	
211		M	Muchos, a ver... Para que sea 0’01 esto tiene que dar 0’02. ¡Ay, ay que no hay más!	Mueven a n=100
212	8:43	L	Pongo que tiene que ser un número mayor que n=0	
213		M	No, tenemos que sacar que aquí es una ecuación 0’02 tiene que ser igual a 62.5 partido n. Entonces la n pasa, el otro pasa, 62.5 partido 0.01, que vamos a ver que dice esto.	
214		L	0’01	
215		M	Pero el error máximo no era… claro porque este es el error. ¡Dios! Muchos… 6250	Divide en la calc. Del ord. 62,5 entre 0’02. Corrige y hace 62,5 entre 0,1=6250
216	9:27	L	Si el error máximo es de 0’1… esto entre 0’1	
217		M	No,… 0’1. Sí es entre 0’1 que da 625	
218		L	…	
Escriben, para 0’1: n=625 **Para n=0’01: n=6250**				
II.e. ¿Podrías encontrar un procedimiento para determinar un valor de **n** que permita calcular el área con un error menor que un número tan pequeño como se quiera?				
219		M	[Lee] ¿Podrías encontrar un procedimiento para determinar un valor de **n** que permita calcular el área con un error menor que un número tan pequeño como se quiera?	
220		M	Es la fórmula.	
221	10:00	L	No es esto	
222		M	Es esta fórmula	
223	10:09	L	Carmen, ya está.	
224		M	¿Hay más?	
225		L	No	
	10:18		Stop.	
Escriben: Error=62,5/n				

ANEXO X

Transcripción de la Tarea: Área e integral. Pareja 5. A-L

Vamos a calcular las áreas de regiones que no están situadas siempre por encima del eje X, es decir delimitadas por funciones no siempre positivas. También calcularemos las integrales de dichas funciones en esos intervalos.

En éstos casos, ¿será igual el área a la integral?, ¿Podrá ser cero la integral aunque delimite una región de área no nula?

I. Para **m**=0, **n**=-2 entre **a**=0 y **b**=4
   a. Calcula $\int_0^4 -2\,dx$

   b. Calcula por métodos geométricos el área sombreada.

   c. Qué relación tiene el área sombreada con $\int_0^4 -2\,dx$

   d. Expresa el área sombreada usando $\int_0^4 -2\,dx$

II. Da otros valores a **m** y **n**, **a** y **b**, para que toda la región sombreada quede por debajo del eje X.

   a. Calcula el área de dichas regiones.

   b. Expresa dichas áreas usando integrales

   c. Escribe tus conclusiones respecto a cómo se calculan las áreas de regiones situadas por debajo del eje X usando integrales.

III. ¿Y si la región está situada en parte por encima del eje X y en parte por debajo, es decir la integral es negativa en un trozo y positiva en otro?

   a. Prueba con **m**=1, **n**=0, entre **a**=-2 y **b**=2. ¿Cuál es el valor de $\int_{-2}^{2} \boldsymbol{x dx}$

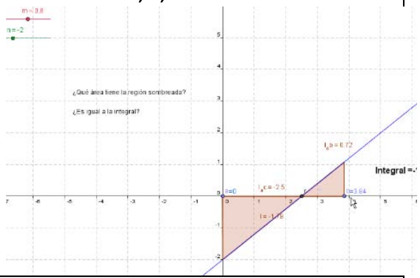
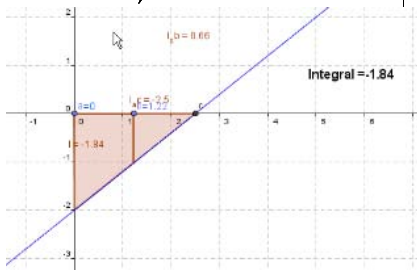
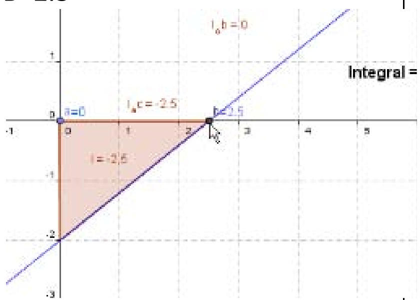
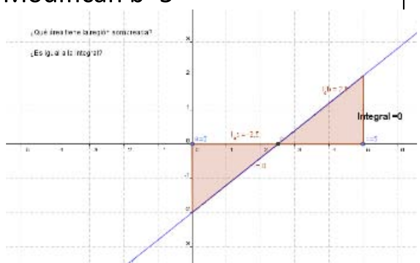
   b. Y el valor del área encerrada entre las rectas x=-2, x=2, el eje OX y la recta y=x.

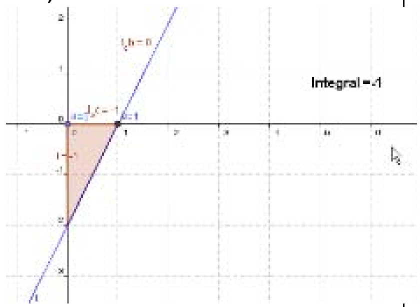
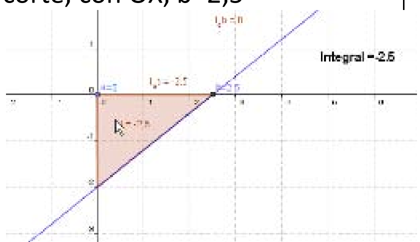
   c. Calcula $\int_{-2}^{3} \boldsymbol{x dx}$

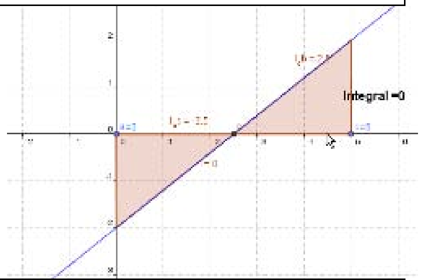
   d. Calcula el área de la región determinada por las rectas x=-2, x=3 , el eje OX y la recta y=x.

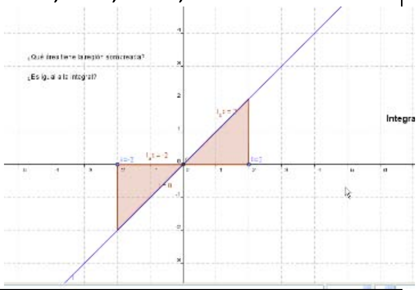
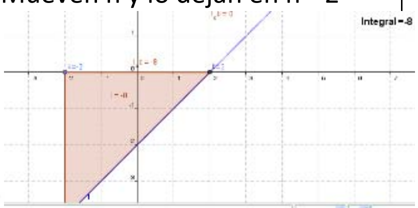
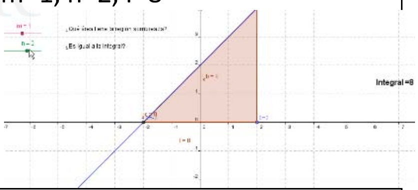
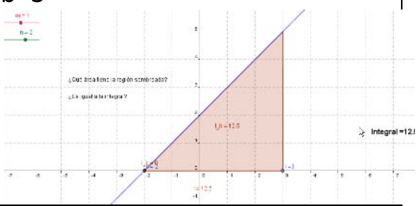
   e. Expresa dicha área mediante integrales y valores absolutos.

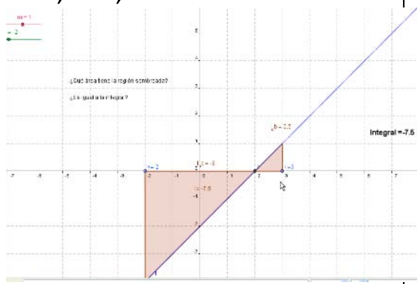
Pareja 5			Dicen	Hacen
I.a				
1		A	… -2	
2		L	…	
3		A	Entre 0 y 4 de -2. Será hasta aquí de -2 digo yo	
4		L	¿Eso significa que de -2?	
5		A		
6				
7		A	Sí. -2 es la función. Si fuera x^2 pues sería la parábola ¿sabes?	
8		A	Hay que poner si el área es igual a la integral.	
9		L	La integral es 8. Ah, no -8	
10	1:10	A	-8. Y el área es 8	
11		A	Para m=0 y n=-2	
12		L	Sí que son iguales, sólo que el área es positiva	
13		A	Pero no son iguales, no es lo mismo -8 que 8. No es lo mismo que te falten 2 que tener 2 de más	
14	2:15	A	Y entonces podrá ser cero la integral aunque…[no entiendo]	
I.b				
15		A	[Lee] Calcula por métodos geométrico el área sombreada. Área es igual a base por altura	
16		L	4	
I.c.				
17	2:49	A	[Lee] ¿Qué relación tiene el área sombreada con $\int_0^4 -2\ dx$? Que la integral es el área, supongo que será algo de eso	
18		L		
19		M		
20		L		
I.d.				
21	4:33	A	[Lee] Expresa el área sombreada usando…	
11		L	Pon…	
	II.a			
23	5:01	A	[Lee] da otros valores a m, n , a y b… toda la región quede sombreada por debajo del eje X. Toda la región queda sombreada por debajo del eje del X	
24		A	Carmen, ¿puedes venir? Pone aquí que le de otros valores a m y a n y todo eso…	
25		P	Dáselos	
26		A	Para que quede la x debajo. Pero ya está todo por debajo	
27		P	Sí, pero no tiene porqué ser siempre este valor	

Pareja 5			Dicen	Hacen
28		A	Es que no lo entendía	
29		P	Y también puedes darle a la a el valor 1, pero cambiar, y este valor que venga ahí. Moverlo. Mover la b y que venga ahí. ¿Vale?	A=0, b=4 Ponen m=0,8, n=-2 
30				Varían b= 1,22 
31		P	O que quede ahí para que sea más fácil	B=2.5 
32	6:53	A	[Lee] Calcula el área de dicha región	
33		A	El área sería 2,5	
34		L	Pero sería de 0 a 2,25	
35		A	2,5	
36		L	Vale	
37				
38	7:45	L	Alarga el b	
29		A	Ah el b?	
40	8;00	L	Sí, alárgalo y así hacemos la b-c	Modifican m aumentando y disminuyendo y lo vuelven a dejar en 0,8 Modifican b=5 
41		L	¿Y c? Ah, no	
42	8:20	A	Entre 0 y 5	

Pareja 5			Dicen	Hacen
	8:28	A	Eh, da cero	
43		L	Alárgalo…	
44		A	Es que hacerlo así es… esta menos… es la resta de las dos. Como son iguales da cero	
45		L	Pero si se pone…	
46		A	Tiene que quedar todo por debajo del eje X. Cambio esto un poco y ya está	Señalan c con el puntero Ponen b=2,5 [están buscando b=1]; m=2 Integral =1,29
47	9:46	L	¿Por qué has borrado éste?	b=1,  Integral=-1
48		A	Es que este hay que hacerlo como área es igual a base por altura	
49		L	De todas formas este bórralo que esto al final no lo hemos hecho	
50		L	Sí, estaba arriba	
51		L	Ah, que has copiado éste	
52		A	Porque aquí es usando integrales. Y aquí es el área normal. ¿Era base por altura partido por 2? O base más altura	
53		L	Base más altura, creo, pero no me hagas mucho caso	
54		A	1 más 2	
55	10:31	L	1 más -2… es que parece un +… Espérate que voy a preguntar por si acaso está mal	
56		A	Yo creo que es multiplicado	
57		L	[Ha preguntado] Es por	
58	11:47			Modifican m. Dejan m=0,8. Mueven b hasta el punto de corte, con OX, b=2,5 
II.c				
59	12:12	A	[Lee II.c] Escribe tus conclusiones respecto a cómo se calculan las áreas de regiones situadas por debajo del eje X usando integrales. El valor de la integral pero en valor absoluto…	
60	12:59	L	… pero usando es integrales… tabla	

Pareja 5			Dicen	Hacen
61		A	….	
62		L	Ah vale	
III				
63	13:06	A	[Lee III] ¿Y si la región está situada en parte por encima del eje X y en parte por debajo, es decir la integral es negativa en un trozo y positiva en otro?	
64		L	¿Por qué pones la suma?	
65		A	Sí, la suma de las dos integrales…	
66		L	En valor absoluto ¿o no?	
67		A	Están preguntando el área	
68	13:55	L	¿Por qué ahí la integral da cero? ¿No se supone que es la integral de esto más la integral de esto?	
69		A	La integral sería la integral de ésta, que es negativa, más ésta	
70		L	Pero ¿por qué se suma la integral? Directamente se suma ella sola	
71	14:06	A	Porque la integral de todo esto es la misma que hacer de este cachito más la integral de este cachito	
72		L	Ya, pero si haces la integral de este cachito más la integral de este cachito, el área no daría cero	
73		A	Porque el área es en valor absoluto	
74		L	Por eso	
75		A	Pero la integral esta de aquí es -2,5	
76		L	Pero si es en valor absoluto sería 2,5, y 2,5 sería 5	
77		A	El área es 5	
78		L	Entonces en ese caso el área no es igual que la integral	
79		A	Claro	
80	14:37	L	Entonces se rompen las cosa, porque siempre ha sido igual que la integral	
81		A	Pero siempre cuando está toda la función por debajo del eje X	
82		L	O por encima	
83		A	O toda por encima	
84		L	Vale	
		A	Entonces la integral sí que es igual al área. Pero cuando está un cacho por arriba y otro por abajo ya no. El área es la suma de las dos integrales	
85	14:59	L	Ahora sigue con esto	Modifican t de 0 a 5, a 2,5 y lo dejan igual
86		A	Sí hay que hacer	

Pareja 5			Dicen	Hacen
87		A	0, -2 y 2	
88		A		Como dice el ejercicio, ponen m=1, n=0, a=-2, b=2 
89		A	… el área	
90		A	O sea la integral	
III.b				
91			-2, 2, la integral… [Lee] Y el valor del área encerrada entre las rectas x=-2, x=2, el eje OX y la recta y=x. Pero aquí sólo hay una recta. ¿Y Carmen?	
92				
93	16:37	L	Pero se refiere a entre esta y esta	
94		A	El valor del área de x=-2 a x=2	Mueven n y lo dejan en n=-2 
95	17:20	A	Y cuando x=2 supongo que valor, valdrá lo mismo. Bueno no, no valdrá lo mismo, tienes razón	
96	17:55			m=1, n=2, I=8 
97	18:05	A	Calcula entre -2, 3 entre estas rectas supongo que será, porque no dice nada	
98		L	Será de la misma	b=3 
III.d				
99	18:45	A	[Lee] calcula el área de la región determinada por x=-2, x=3…	
100		L	Otra vez lo mismo, vamos	
101		A	Carmen ¿puedes venir un momento?	

Pareja 5			Dicen	Hacen
102		A	Supongo que será por separado las rectas, no junto. Aquí dice calcula el área de la región que determinan las rectas ¿Qué son, dos rectas?	
103		P	Verticales, las rectas x=-2 y x=2. Son dos rectas verticales. Y x=3 o sea que lo tenéis bien. Vale ¿cuál sería?	
104		A	Es que no he entendido muy bien eso	
105		P	¿El área es igual que la integral en este caso?¿ La integral da -7,5? ¿Pero vosotros pensáis que el área es igual que la integral?	M=1, n=2, b=3 
106		A	No	
107		P	No. Aquí para ayudaros tenéis la integral desde *a* hasta *c* y de *c* hasta *b*. ¿Eso os ayudará a calcular el área? ¿Cuál sería el área?	
108		A,L	Sí	
109		A	El área sería la suma de las dos integrales	
110		P	Mientras que la integral es -7,5. Eso es lo que… ¿vale?	
111		L	Ah, y arriba también. Aquí también habrá que poner lo mismo	
112		P	Aquí tenéis que poner que la integral de -2 a 2 ¿no? Y la integral de 2 a 3	
113			escriben	
114	21:30	A	[están escribiendo las respuestas] De -2 a 2	
115		L	[están escribiendo las respuestas] 16, era porque era 8 y 8	
116		L	Más 2 a 3, 8,5	
117		A	[están escribiendo las respuestas] De -2 a 3… 8,5 ¿pero hay que decir … porque ella ha dicho que decir esto y que en cambio el área da esto. ¿Hay que decirlo también? Que no es igual que la integral en este caso	
118		A	Como no lo pregunta. Ha dicho expresa dicha área usando las integrales y valores absolutos.	
III.e				
119		A	[Lee III.c]	
120		L	Igual tenías que haber calculado las áreas…Carmen ven porfa.	
			Fin de la clase	

ANEXO XI

Transcripción de la Tarea: Área e integral. Pareja 6. K-MA

Vamos a calcular las áreas de regiones que no están situadas siempre por encima del eje X, es decir delimitadas por funciones no siempre positivas. También calcularemos las integrales de dichas funciones en esos intervalos.

En éstos casos, ¿será igual el área a la integral?, ¿Podrá ser cero la integral aunque delimite una región de área no nula?

I. Para **m**=0, **n**=-2 entre **a**=0 y **b**=4
   a. Calcula $\int_0^4 -2\,dx$

   b. Calcula por métodos geométricos el área sombreada.

   c. Qué relación tiene el área sombreada con $\int_0^4 -2\,dx$

   d. Expresa el área sombreada usando $\int_0^4 -2\,dx$

II. Da otros valores a **m** y **n**, **a** y **b**, para que toda la región sombreada quede por debajo del eje X.

   a. Calcula el área de dichas regiones.

   b. Expresa dichas áreas usando integrales

   c. Escribe tus conclusiones respecto a cómo se calculan las áreas de regiones situadas por debajo del eje X usando integrales.

III. ¿Y si la región está situada en parte por encima del eje X y en parte por debajo, es decir la integral es negativa en un trozo y positiva en otro?

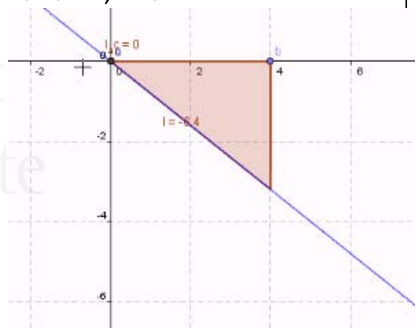
   a. Prueba con **m**=1, **n**=0, entre **a**=-2 y **b**=2. ¿Cuál es el valor de $\int_{-2}^{2} x\,dx$

   b. Y el valor del área encerrada entre las rectas x=-2, x=2 , el eje OX y la recta y=x.

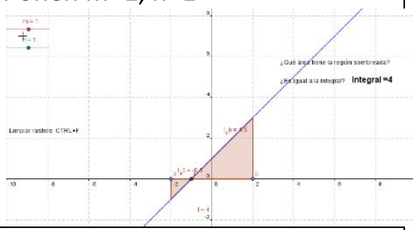
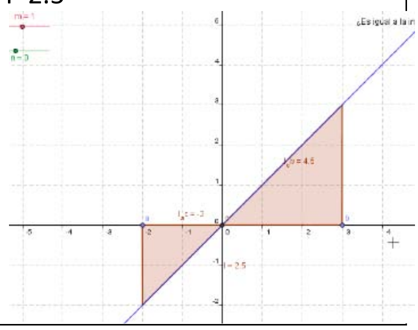
   c. Calcula $\int_{-2}^{3} x\,dx$

   d. Calcula el área de la región determinada por las rectas x=-2, x=3 , el eje OX y la recta y=x.

   e. Expresa dicha área mediante integrales y valores absolutos.

Pareja 6			Dicen	Hacen
Apartado I				
1	6:40	K	[Lee] Calcula por métodos geométricos el área sombreada	
2		MA	¡Ah, vale, esta es la integral, no el área. -8, 2 por… -2 por 4	
3		K	El área es 8 pero por métodos geométricos es a por b… el segmento ab por…	
4	7:34	MA	Vale, veo que lo estás haciendo tú solo	
5		K	Es que no lo tengo claro, como sería… como se ponga	
6	08:03	MA	Pues poniéndolo. No, espera, lo has hecho al revés, lo del valor absoluto va en la S [se refiere a la respuesta del apartado c] y aquí sería poner pues esta fórmula pero con lo del valor absoluto	
7		K	¿Así?	
8	08:25	MA	Sí	
9	08:30	K	Ché, pero esto son chorradas, las hago hasta yo.	
10		P	Por debajo del eje x… si ya está por debajo del eje X	
11	9:06	MA	La región sombreada. Espera, también esta está por debajo	M=-0,8, n=0, a=0, b=4; I=-6,4
12		K	Da 6,4. Tío, cógela más fácil	Varían m, lo dejan como estaba
13				M=-1,9, n=0, a=0, b=4; I=-15,2
14		K	La pone facilita	
15				Varían n, desplazando la recta verticalmente y luego varían m. Les da I=-16,4
16				Varían n; n=0 
17	9:21	MA	A ver, más fácil	
18		K	[A la profesora] ¿Ahí qué tenemos que hacer?	
19		P	Pues lo que dice ahí, le dais otros valores a m y n	
20	9:31	K	Pero es que eso…	
21		P	Es muy rápido, ¿no?	
22		K	Es lo mismo	
23		P	Sí, bueno, lo hacéis y ya está y…	
24		MA	Esto es como…	
25		P	No tiene porqué ser siempre un rectángulo, puede ser otra figura, un trapecio…	
26		K	Pero si ya lo sabemos	
27		P	Pues si lo sabéis pasad	
28		K	¿Has visto? Pasamos	
29		MA	¿Y qué hacemos tanto tiempo con esto?	

Pareja 6			Dicen	Hacen
30		P	Si lo tenéis claro id el resultado. No hace falta enrollarse	
II				
31		K	[Lee] escribe tus conclusiones respecto a cómo se calculan las áreas de regiones situadas por debajo del eje x usando integrales.	
32		K	Pues el valor absoluto de la integral. Ya está	
III				
33	10:13	K	[Lee] ¿Y si la región está situada en parte por encima del eje y en parte por debajo, es decir, la integral es negativa en un trozo y positiva en otro?	
34	10:17	MA	Pues lo mismo, coges el valor absoluto de las partes negativas	
35		K	¿Por qué?	
36		MA	Para calcular el área	
37		K	Tienes que hacer los tres ejercicios para esto…	
38		MA	No, pero esto, da igual	
39		K	A ver	
40	10:32	MA	Mira, lee la pregunta	
41	10:42	K	El área, el área es igual a integrales positivas más integrales negativas	
42		MA	Eso es lo que te estaba diciendo. Ya está	
43	11:00	K	Y luego… sí, sí, porque sólo preguntaba lo del área, pensaba que preguntaba otras cosas.	
			….	
44	15:16	MA	Esto está claro, es…	Tienen abierto el applet de la tarea siguiente
45		K	¿Qué es?	
46		MA	Es la integral	
47		K	No si la integral…	
48		MA	Y mira, encima tienes una cosa aquí que te lo pone	
49		K	Pues yo no lo tengo claro, Miguel	
50	15:27	MA	A ver, integral de -2 a 2. Ponemos…	
51		K	Esto, esto no es de esta, eso es de la otra	Se dan cuenta que siguen en el applet anterior
52		MA	¿Estamos en la 9 todavía?	
53		K	¡No cierres! [el applet]	Abren applet T9. Está m=0, n=-5, a=-2, b=2
54	15:42	MA	¿Seguro que estamos en la 9?	
55		K	Sí	
56		MA	Está claro, es cambiar los valores y ver lo que te pone ahí	
57		K	Sí, pero aquí pone x	
58		MA	Claro, porque x dx	
59		K	De -2	

Pareja 6			Dicen	Hacen
60	16:11	MA	Pues habrá que poner que esto es igual a… a 1, no, m=1, para que la función sea… esto, f(x), o sea y=x. Como la pendiente es 1. Uno por x	Ponen m=1, n=1 
61		K	Bien. ¿Entonces como…?	
62		MA	¿Pero seguro que estamos con este ejercicio?	
63		K	Que sí, que va así	
64		MA	¿Seguro que es este no, tarea 9?	
65	17:15	K	Aquí no hay que dar un valor de un número, creo, hay que dejar una función. Es de -2 a 2	
66		MA	Vale, ya está. Ahora te están pidiendo…	
67		K	Ah, vale, ¿estamos en esto, esto es de esto?	
68		MA	Sí, eso es del 3 [se refieren al apartado III de la tarea], con estos valores	m=1, n=0
69		K	¡Ah! Vale, sí	
70		MA	Te están pidiendo	
71		K	Cero	
72	17:55	MA	Aquí como te están pidiendo la integral es cero	
73		K	Vale. [lLee IIIb]El valor del área encerrada… Pues el área es…	
74		MA	Y=x	
75		K	2 por 2	
76		MA	A ver, integral x=-2, x=2	
77		K	8. Ah, no, no, no, 4, perdón	
78		MA	Pero se refiere al área esta o a esta área	
79	18:30	K	Sí, 4. Al área de todo. 2 por 2 dividido 2 es 4, o sea 2 por 2, 4, dividido 2, 2, 2 por 2, 4, dividido 2, 2, 2 más 2, 4	
80		MA	Es que aquí está hablando del área entre x=-2, x=2, el eje OX	
81		K	Y la recta. Exacto, esto. La zona esta.	
82		MA	Ah, claro, sí. Pues ya está, 4.	
83		K	Calcula… anda mira, aquí nos lo cambia [se refiere al apartado c]	
84		MA	-2	
85		K	Vamos a ver dónde está el 3	Cambian la escala para poner b=3 I=2.5 

Pareja 6			Dicen	Hacen
86		MA	A ver	
87	19:16	K	…	
88		MA	La integral	
89		K	Pues no, no es la integral. Ah, sí, sí, perdón, 2.5. Y calcula el área de..	
90		MA	2.5	
91		K	Entonces es 4 más 2.5. Si antes era cero y ahora es 2.5 significa que lo hemos aumentado 2.5 el área	
92	19:50	MA	Pues ahora el área en vez de 2.5 es 3 por 3, 9, 4.5…, 4.5 más 2, sí, 6.5	
93		K	[Lee IIIe] Expresa el área mediante integrales y valores absolutos	
94		MA	Pues pon que es integral de f(x) esta, de…	
95	20:03	K	[está escribiendo] Espera ponemos desde -2 a cero	
96		MA	En valor absoluto, más	
97		K	X dx, más… desde cero hasta 3 xdx	
98		MA	Ahí. Ya está.	
99	20:20	K	Ahora ya está. Ahora llegamos a lo de aquí	
			Vuelven a la tarea siguiente	

ANEXO XII

Transcripción de la Tarea: Área e integral. Pareja 4. L-M

Vamos a calcular las áreas de regiones que no están situadas siempre por encima del eje X, es decir delimitadas por funciones no siempre positivas. También calcularemos las integrales de dichas funciones en esos intervalos.

En éstos casos, ¿será igual el área a la integral?, ¿Podrá ser cero la integral aunque delimite una región de área no nula?

I. Para **m**=0, **n**=-2 entre **a**=0 y **b**=4

a. Calcula $\int_0^4 -2\,dx$

b. Calcula por métodos geométricos el área sombreada.

c. Qué relación tiene el área sombreada con $\int_0^4 -2\,dx$

d. Expresa el área sombreada usando $\int_0^4 -2\,dx$

II. Da otros valores a **m** y **n**, **a** y **b**, para que toda la región sombreada quede por debajo del eje X.

a. Calcula el área de dichas regiones.

b. Expresa dichas áreas usando integrales

c. Escribe tus conclusiones respecto a cómo se calculan las áreas de regiones situadas por debajo del eje X usando integrales.

III. ¿Y si la región está situada en parte por encima del eje X y en parte por debajo, es decir la integral es negativa en un trozo y positiva en otro?

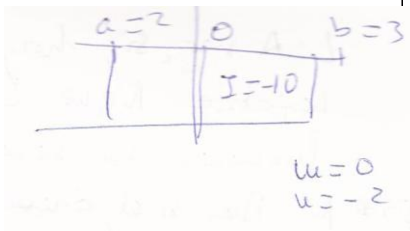
a. Prueba con **m**=1, **n**=0, entre **a**=-2 y **b**=2. ¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{\int_{-2}^{2} x dx}$

b. Y el valor del área encerrada entre las rectas x=-2, x=2 , el eje OX y la recta y=x.

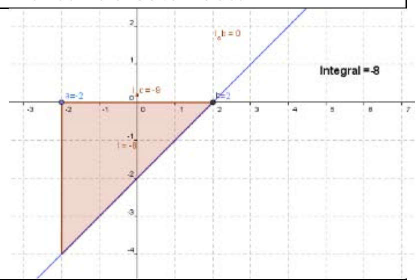
c. Calcula $\boldsymbol{\int_{-2}^{3} x dx}$

d. Calcula el área de la región determinada por las rectas x=-2, x=3 , el eje OX y la recta y=x.

e. Expresa dicha área mediante integrales y valores absolutos.

Pareja 4			Dicen	Hacen
1	00:38	L	El área será positiva y la integral negativa	
2		M	Sí, eso ha dicho, que el área en valor absoluto y la integral sin valor absoluto.	A=2, b=3, m=0, n=-2, I=-10 
3	00:46	L	Pero es que en este caso van a estar por debajo siempre, entonces la integral siempre va a ser negativa	
¿Podrá ser cero?				
4		L	Lee…	
5		L	Ha dicho que… iguales, sí.	
6		M	Más y menos igual a cero. Si son iguales	
7		L	Pero aquí estamos hablando de que esté todo el rato por debajo	
8		M	Si está por debajo, entonces no. Sólo se puede anular si arriba y abajo es igual	
9		L	Sí qué	
10		M	Si arriba y abajo es igual	
11		L	Sí	
12		M	Si el valor absoluto del número positivo y del número negativo son iguales, por lo tanto se anula	
13		L	Ya, pero no vas a poner el valor absoluto de un positivo y ..	
14		M	Pues, sí, sumas los dos y sale cero	
15		L	A ver, si hay una función positiva y otra negativa. No, no [Lee] Es decir, delimitadas por funciones no siempre positivas	
16	2:03	M	Pues sí el área de la parte positiva es igual al área de la parte negativa	
17	2:11	L	Sólo se puede anular si…	
18		M	Repite lo de arriba. Tú pon signos y iguales para abreviar y eso	
I.a				
19	2:43	M	[Lee el apartado I] Calcula para m=0, n=-2 entre a=0 y b=4	
20		L	Base por altura ¿no?	Ponen a=0, b=4
21		M	Claro, porque aquí es una recta, es muy fácil, igual a -8 porque este es el eje	
22		L	La integral sí	
I.b				
23	3:27	M	[Lee] Calcula por métodos geométricos el área sombreada… pues base por altura	

Pareja 4			Dicen	Hacen
24		L	Igual aquí hay que hacer otra cosa	
25		M	No, eso… 4 por 2	
26		L	Por -2	
27		M	-8	
I. c. Qué relación tiene el área sombreada con $\int_0^4 -2\,dx$				
28		L	Que es la misma	
29		M	Sólo cambia el signo. Claro es que el área es… tiene que ser….	
30		L	Ah, sí, es verdad.	
31		M	Ponle un más	
32		L	No, hay que dejarlo	
33		M	Como el otro	
4:10	**Escriben: El área ha de ser positiva y la integral puede ser negativa**			
II				
34	6:00	L	¿Ya está?	
35		M	sí	
36		L	Pero está por debajo del eje	
37		M	Pues lo dejamos	
38		M	-5, vamos a hacer un cuadradito	Ponen a=0, b=5, m=0, n=-5
39		L	[Lee] Calcula el área… expresa dicha área usando integrales	
	Escriben A=b·h =5·5=25			
40		M	-25 Es complicado	
41		L	¿Entre qué y qué?	
42		M	De 0 a 5 de -5 dx	
	Escriben $\int_0^5 -5dx = -25$			
43		L	¿Así?	
44		M	Sí, es igual de feo. -25, es fácil, multiplicas ese por ese	
45	7:03	L	Ya, pero en este caso, en otros no	
46		M	Da igual, tú multiplica siempre	
47		L	Sí, claro… Pues [responden a 2c] el valor absoluto de la integral. Eso es lo que hemos puesto antes. Siempre pregunta lo mismo.	
III				
48		L	[Lee] III	
49	7:53L	L	Se suman los valores absolutos ¿no?	
50		M	No, se suman las dos integrales. O sea sí, la integral reduce el valor y el área aumenta el valor.	
51		L	[Lee IIIa] ¿Cuál es el valor …? 2x ¿no? Ah, no, no ves, me has dicho que siempre l multiplicas y ahora… pues eso	
52		M	¡Ah! Te he engañado	
	Escriben $\int_{-2}^{2} x\,dx = 0$ pero no hacen nada en el applet			
53		L	Utilizando la lógica sería…	

Pareja 4			Dicen	Hacen
54		M	Espera pero es que pone de x. si es de x … el valor será menos… espera… 4 por –x, no por x , 4 por x, 4x	Ponen a=2, b=2, m=0, n=-5
55		L	¿Y el negativo este no lo ponemos?	
56		M	Pero es que esto hay que restarlo, es 2-(-2), es igual a 2+2	
57		L	[Lee IIIb] Y el valor del área encerrada entre las rectas x=-2, x=2, eñ eje OX y la recta y=x	
	Escriben $A=\frac{b\cdot h}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}=2\cdot 2=4$			
58		L	X=-2, x=2, es cero ¿no?	
59		M	Es complicado… espera	
60		L	Ah, no, el área no	
61		M	[Lee] El valor….	
62	10:05	L	Depende de lo grande que sea	
63		M	Claro. ¡Ah! El eje OX y la recta y=x. Mira a ver si puedes hacer algo porque no lo veo. Bueno, a ver, espérate	
64	10:20	M	A ver, ¿qué rectas tenemos ahí?	
65		L	¡Ah no! Esto no es ¿igual?	
66		M	Mira, esta recta es horizontal, horizontal , vertical.	
67		L	No, es vertical	
68		M	¿x=2?	
69		L	X siempre va a ser igual a 2	
70		M	Vale, entonces tenemos una vertical, otra vertical	
71	10:38	L	Es que son verticales todas. Ah no, esta no	
72		M	Esta es horizontal y el eje OX es horizontal entonces si te pregunta, entre … es entre… x=… aquí así como está	
73	10:54	L	¿Y=x es esta?	
74		M	Eh, eh…	
75		L	Mario, es el bisector	
76		M	No, igual x es… y=x	
77		L	No, si x es igual a 1	
78		M	Sí, entonces esto hay que ponerlo	Mueven m, lo dejan m=0
79	11:15	M	Es que no puedo saberlo… Esto hay que tirarlo para arriba, pero no hay forma de subirlo… no sube. Esto imagínatelo más para arriba ¿vale?	M=1, n=-2Señala como s i subiera el triángulo dos unidades verticalmente. Con el puntero recorre la pantalla marcando esta recta.
80	11:20	L	¿Y si mueves el eje, los ejes? Ahí la flecha esa. Ah, no, eso es hacerlo más grande o más pequeño.	
81	11:30	M	A ver, es que pone … de x es a x, de x es a x. El eje OX es este y la recta…	Ponen m=1, n=2
82		L	Y si lo dibujo aquí	
83		M	Pero la recta es esta. Da cero	

Pareja 4			Dicen	Hacen
84		L	¿Por qué?	
85		M	Porque esta recta pasa por aquí, entonces este trozo es igual que este	
86		L	Pero el área no da cero… es la integral	
87		M	¿Y que pregunta?	
88		L	El área	
89		M	Entonces no da cero, entonces da…	
90	11:59	L	El área de un triángulo por 2	
91		M	Da, a ver,… no, el área de dos triángulos… Un triángulo es este… El área de uno por 2. Da 2 por 2	
92		L	Partido por dos	
93		M	Por dos otra vez	
94		L	Vamos, que da 4.	
95		M	A ver, mira… uno, dos, uno, dos , partido 2 por uno, dos, uno, dos, que es este trozo	Está recorriendo con el puntero los la base y la altura de los triángulos
96		L	Da 4	
97		M	Sí	
98		L	Bueno voy a explicárselo	
99		M	Si ya lo ha oído	
100		L	Y es igual…	
101		M	Base por altura porque tachas los dos doses	
102		L	…	
103		M	x diferencial de x	
104		L	¿tú estás seguro de que hay que restar esto?	
105		M	Sí, aquí da 5x	¿Se refiere a $\int_{-3}^{2} x\,dx$?
106	13:05	L	¿Y por qué lo restas?	
107		M	Porque tienes que sacar la distancia final menos la inicial	
			Comentarios	
III.d				
108	14:30	L	Estos ya no son iguales	
109		M	La recta x=-2, x=3, el eje OX que es este. Cero, cero no es	
110	14:51	L	No, cero no es	
111		M	¿Qué da, 3?	
112		L	No vayas tan rápido	
113		M	3 x 3	
114		L	¿En cuál, en el que está por debajo o en el que está por arriba? En el que está por arriba	
115	15:00	M	A ver, queda 9 menos 4	
116		L	Partido 2. Y aquí…	
117		M	No, pero que es el área, vale	
118		L	Y aquí es 2 por 2 partido 2	
119		M	Claro	
120		L	Y se suma	

Pareja 4			Dicen	Hacen
121		M	Claro es que -2 por -2 y 3 por 3 y da 9 y 4 que son 13	
122		L	9 partido 2. Ah, no.	
123		M	Sí, si, 9 partido 2	
124		L	9/2 y 2 y se suma ¿no? Y esto es igual a…	
125				
126		M	9 entre 9 son 3 y medio, 7, 4.5, 4.5, 6.6	
127		L	13/2	
128		M	Vale, vale	
III.e				
129		L	[Lee] Expresa dicha área mediante integrales y valores absolutos	
130		M	…	
131		L	De 3 a -2	
132		M	No, de 3 a 0 porque son dos diferentes. Tienes que sumarlos	
133	16:07	L	Pero la integral ¿no se suma? ¿no es igual?	
134		M	No sé yo, eh…	
135		L	A ver, de -3 a 0, de…	
136		M	Bueno, sí, sería de 3 a -2	
137		L	No me marees	
138		M	Claro, de 3 a -2 y tienes que poner después de… ¿x es 1? Pero x ¿qué es? X es y, de y ¿Que follón!	
139		L	¿Porqué?	
140		M	Porque x es … y =x, entonces en x tienes que poner y	
141		L	A ver, la función que estamos integrando es igual a x, vale, de y diferencial y, es lo mismo que x diferencial x. Sí ¿no?	
142	17:07	M	[Lee] Expresa dicha área mediante integrales. Es que a ver, aquí tú les das a x un valor y te queda una recta ¿no?	
143		L	Pero si pones y diferencial de y es lo mismo que x diferencial de x	
144		M	¡Ah! Entonces esto está mal. Entonces es esto. ¡No! Esto es cero.	
145		L	¿Por qué es cero?	
146		M	Porque … si es x diferencial de x está diciéndote esta recta que pasa por aquí y si la altura es igual, pues es cero	
147	17:42	L	¿Entonces aquí también es cero?	
148		M	Sí	
149		L	No, aquí no Mario, aquí no es cero, porque aquí…	
150		M	No es aquí, es aquí	
151		L	Ahí sí, aquí no. ¿Y aquí qué es?	
152		M	Ahí esto. No, eso no.	
153		L	No me marees	
154		M	Es 9/2 menos 2	
126		L	Y esto es…	

Pareja 4			Dicen	Hacen
127		M	… menos 4. Y aquí es poner esto… x diferencial x	
128		L	Toma, lo sabía	
129		M	Y ahora, espera, ya está, en valor absoluto	
130	18:25	L	Esto sería la integral	
131		M	Y ahora pon el valor absoluto	
132		L	Y área es igual al valor absoluto de esto	
133	18:28	M	¿Esto no sería negativo? No, esto da bien, tiene que ser así y ahora pone… espera… no, no	
134		L	¿Por qué?	
135		M	Porque si pones esto te da 5/2, tienes que hallarlo del 3 al 0 y de -2 a 0	
136	18:50	L	A ver, entonces el área es…	
137		M	Aquí pones un 0 debajo. Aquí pon un 0. No, pero si no hace falta valor absoluto	
138		L	Sí, si hace falta, ponlo. De 3 a 0. De 3 a 0 dx	
139		M	Más	
140		L	Bueno, yo pongo valores absolutos porque da igual más de 0 a -2	
141	19:10	M	Sí, si hace falta	
142		L	El -2 va arriba o abajo	
143		M	No, ahí 0 y abajo -2	
144		L	De x dx	
145		M	Ponlo igual que está ahí y ya está	
146		L	[Leyendo el final]Si la función es negativa.. .	

ANEXO XIII

Transcripción Tarea 'Función Integral I. Trío 3. AV- J-V

I. Cuando **a**=0 y **t**=2, cambiando el valor de **m** y **n** en los deslizadores justifica que el área del cuadrilátero es la que se indica,
- en el caso de rectángulos (**m**=0)
- en el caso de triángulos (**n**=0)
- en el caso de trapecios (**m**≠0 y **n**≠0)

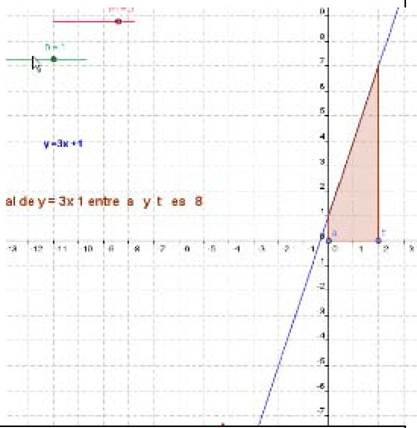
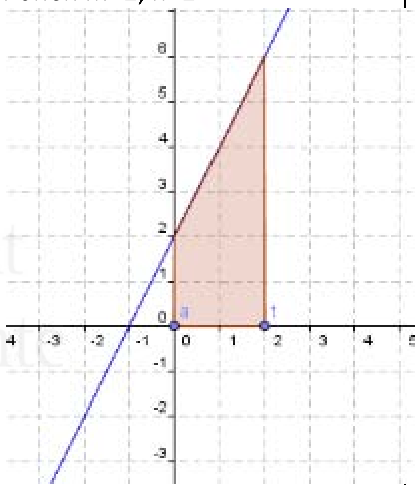
II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?
Por ejemplo:
- Si **m**=0, **n**=2
- Si **m**=2, **n**=0
- Si **m**=1, **n**=2

III. Comprueba la validez de las fórmulas cambiando el valor de t y sustituyendo en las fórmulas obtenidas.

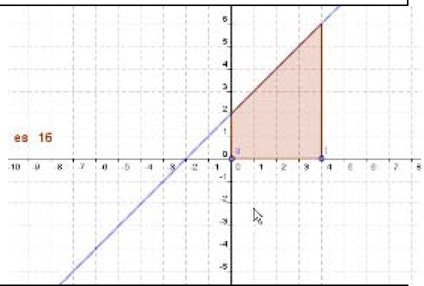
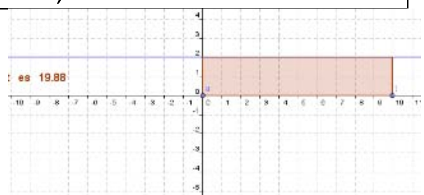
IV. ¿Qué ocurre si para un valor de **m** y **n** dados, manteniendo fijo t, cambiamos el valor de **a**?

Trío 3			Dicen	Hacen
I. rectángulo				
121	00:53			Tienen y=0,6x+2,8, integral entre a y t es 6,8
122	1:04	V	Cuando m es cero es un rectángulo, ¿qué hay que poner?	m=0, n=2,4
123		Av	A es igual a cero	
124		V	Hay que justificar	
125		Av	Y movemos n… n es igual a… no, ah, no, m=0 y t=2	
126		V	El área ahí no está	
127		Av	M=0, entonces… ¿cómo era la fórmula, n·t, no? La base n·t. Responde al a fórmula	
128		Av	Sí, pero la fórmula es n que es la base y n va a ser la altura	
129		V	No, no , te pone justificar porqué	
130		V	Sí, un rectángulo. Rectángulo es base por altura	
131	1:59	Av	Ya está, t por n	
132		V	Porque es la fórmula de un rectángulo, base por altura	
133	Escriben: nt, la fórmula de un rectángulo			
134	3:07			M=0,6, n=0, triángulo Y=0,6x+10
135				M=-0,9, n=0, a=, t=2, Integral =-1,8
136				M=2
137		Av	Si n=0, m=2 y=2x+0 I=4, m^2t [en realidad es $mt^2/2$, aunque aquí, como m=2 y t=2 les da el mismo resultado]. Vamos a corroborarlo con el 3	M=3, n=0 Y=3x
138		Av	6, m^2, m^2t partido 2	
139		V	No es m^2, es m por 2 será	
140		Av	m^2 digo, o sea sería 2m	
141		V	m por 2	
142		Av	2 por m por t partido 2, partido 3 , no partido 2, es la fórmula del triángulo	
143	5:09	V	Es m por 2	
144		Av	Claro, 2 por m por t partido 2	
145	5:19	V	El 2 se va con el 2, y es m por t	
146		Av	Y m por t, 3 por 2	
147	5:26	V	El 2 se va con el 2, y es m por t	
148		Av	Es que mira, 2m, porque m es 3 y este lado da 6. Entonces 2 por m por t porque es la base partido 2 porque es el triángulo	Integral de Y=3x entre 0 y 2 es 6
149		P	Muy bien	
150		Av	Y en el primero también sería	
151		P	Pero falta la base	
152		Av	La base es t	
153		P	2m, 2m no es, 2mt ¿no?	
154		V	¿Cómo que 2mt? No es siempre 2. Ah, bueno, sería t, claro sí, ese 2 es t	

Trío 3			Dicen	Hacen
155	5:57	Av	¿2mt?	
156		P	Claro, porque tienes la función, por ejemplo la imagen del 1 sería, en el caso de… ¿qué valor de m tienes aquí?, 3, la imagen del 1 es 3, ¿no?. Es m·1, en el caso de t es… m por	
157		Av	En el de 3 es 6	
158		P	m por…	
159		Av	Por t	
160		P	Lo que no tiene sentido aquí es el 2, el 2 es sólo cuando t vale 2. Quiero decir, a ver, ¿aquí les estás dando a la t un valor o estás trabajando con t en general? Aquí t vale 2	
161	6:35	A	Claro	
162		P	Si lo haces en general tienes que poner la t en los dos sitios, y si lo haces para el 2 tienes que poner el 2 en los dos sitios	
163		A	¿El 2 en los dos sitios? Ah bueno sí	
164		P	¿Sabes lo que quiero decir?	
165		Av	Pero en este caso sería 2 por t porque ya, 2 sería 4 la base y no es 4	
166		V	Porque es t=2, pones t=2	
167		P	¿Pero eso sería para un valor determinado de t o es para m t en general?	
168		Av	No, en general	
169		P	Entonces, dado un valor de t cualquiera ¿cuál es su imagen?	
170		Av	Yo que sé	
171		P	La recta ¿cuál es en este caso?	
172		Av	¿La recta esta?	
173		P	La que tú estás considerando aquí	
174		Av	Si t es 2 la imagen es 6 porque es m por t	
175		P	M por t. Eso es lo que quiero decirte, es m por t	
176		V	Entonces si ponemos t=2	
177	7:30	P	Si t es =2, aquí lo estamos haciendo para cualquier t	
178		Av	Si t=2 sería 2 por m por 2 partido 2	
179		P	Exactamente, porque ha de ser… o lo hacéis para el 2 o lo hacéis para la t, pero…	
180		V	Sería m, el área	
181		Av	Está bien	
182		V	El área	
183	7:50	Aj	…	

Trío 3			Dicen	Hacen
184		V	Pon t=2 y entonces… bien al final es m por 2	Ponen m=3, n=1, trapecio Integral de y=3x+1 entre a y t es 8 
185	8:17			N=2, m=1,9
186	8:35			
187	9:05	Av	A ver, la imagen de t	
		V	La 1, la 3	Explicación en la pizarra de la profesora sobre el ejercicio; pone m=2, n=2
188	9:10	Av	Área del trapecio es base mayor más base menor por altura partido 2	Ponen m=2, n=2 
189		P	[al grupo] La base sería t, esta altura siempre es 2 y esta que tengo aquí 2t+2, tendría que sumarle…	
190		P	La suma de las 2 bases partido 2 y multiplicado por la altura, que sería esa. Bueno, quiero decir que se puede obtener una fórmula, pero porque son rectas pero que lo que tenemos claro es que yo puedo definir una función integral que me va a dar el área desde un valor de a hasta un valor de t que es variable..	
191	10:28	Aj	La suma de las bases, entre 2, por este	Comentan lo que dice la profesora
192		Av	¿En la base grande qué has puesto? [al grupo de al lado]	
193	11:07	L	[del otro grupo] mt	

Trío 3			Dicen	Hacen
194		Av	¿Por qué?	
195		L	Porque esta altura, eh, porque aquí no es 2	
196		Av	Ves	
197		L	Sí que es mt, si no hemos…	
198		Av	Pero si ahí… 2 por m da 4, no da 6	
199		L	Es verdad, que mt no es la base grande	
200		Av	¿ 2 por 2 es 6?	
201				
202		M	[del otro grupo] La base mayor n-mt, no, n+mt	
203	12:00	Av	Ah, esn+mt, sería mt que es 4, 2+4	
II				
204	12:19	Av	[lee] sin desplazar a mueve t. Pero m y eso ¿qué? [sigue leyendo]	
205		Av	A ver, pues si m es cero	M=0, n=2
206		Av	Para un valor fijo de a movemos t. La fórmula general sería… m	
207	12:52	Aj	…	
208		Av	Por ejemplo, damos esos valores entonces si dice valores fijos de a,m ovemos t que sería la imagen de a por t, o sería t por m. Para que t se a mayor o igual que cero [lo dice el ejercicio], es que t siempre va a ser mayor o igual que cero a no ser que movamos la…	Mueven t, lo dejan en 6,01
209	13:10	Aj	Mueve la m	mueve la m
210	13:40	Av	O aquí, mira	Mueven la t hasta el valor 7. Aumentan y disminuyen m, lo dejan en m=0; n=-4 I=14.05
211		Aj	Pues sería n por t otra vez	Disminuyen n hasta -4,3 y l odejan en -4
212	13:59	Av	Pero n por t en el intervalo de n mayor que cero porque dice para n mayor, entonces n desde cero	
213		Aj	….	
214		Av	Pues sería n por t, pon igual a 2 por t, igual a 14	Aumentan a n=2, m=0, I=14,05
215		Aj	Es para cualquier valor, que lo pues mover	M=2, n=0, t=6,.. I=49,33
216	14:38	Av	Pues sería t… Claro sería t	
217	15:14	Aj	¿t que es ahora? Porque eso sería ponerlo ahí. Si por ejemplo es 3	Zoom alejar Zoom acercar Disminuyen t hasta 3
218		Av	T por m, o sea m por t, por t partido 2. Es igual a 2 por 3 por 2, no, 2 por 3 por 3	
219	15:25	Aj	Eso el 2 este	
220		Av	No, eso es la base. 2 por 3 por 3 partido 2 igual a 6 por 3 igual a 18 partido 2 igual a 9	
221		Av	M es 1 y n es 2	Ponen m=1 y n=2
222	16:26	Aj	A ver, pínchale, pínchale fuerte [están tecleando algo]	
223		Av	M+n+m por t [parece que escribe]	

Trío 3			Dicen	Hacen
224		Av	2 más t por m, o sea, sería 3 [están escribiendo la solución del 2]	
III				
225	17:44	Av	[Lee] Comprueba la validez de las fórmulas… ¿Y si pongo este valor de t qué?	
226		V	…	
227		Aj	A ver, la primera es la de n	
228		V	No, no, espérate	
229		Aj	No, no, da igual, déjala esa. 2 + 1 ·3 igual a 5 [Están hablando de lo que han escrito]	Mueven t hasta -2
230		V	3 por 3, m=-2…	
231		Aj	Eso no lo tienes que cambiar, solo t, ponlo en 2	M=1, n=2, a=0, t=-2
232		Aj	Ahí estamos	
233	19:00	Av	T [igual a] cinco ni de coña, t [igual a] 4. Pues sería…	Ponen n=5, n=-1,3,n =4,4, n=2 Ponen t=5, luego t=4
234		Aj	Pues sería n [igual a] 2, n	
235	19:14	Av	Si 2, más, n [igual a] 2 más t por 1, o sea 1 por t	
236		Aj	¿t qué es, 4?	
237		Av	T que es 4 por 2, no, no por 4, 2+4 [es] 6	
238	19:20	Aj	¿qué ha dicho, Vicent?	
239		V	Estoy contando los cuadraditos y después ha dicho que es 16	
240		Aj	8 por 2, 8 por 4 entre 2	
241	19:45	V	M=0 y n=2. Pues hemos dicho, si lo ponemos en 10,…	M=0, n=2, $t \approx 10$ [9,94] , l=19,88
242		Av	2 por 5 partido 2, por 5, 2 por 5, 10, por 5, 50, partido 2,	
IV				
243		Av	[Lee] Pon: lo mismo que si cambiamos el valor de t. Espérate, no ,lo pongas todavía	
244	20:42	Aj	…	
245		V	..	T=2, a=-10
246	21:42	P	Pasad a la 13	
247		Av	Pues si no hemos terminado	Juegan con a y t, lo dejan en t=2, a=3,.. l=-6,02
248			[Explicación de la profesora]	
249		Aj	Siempre es negativo…	
250	22:01	Av	Siempre es negativo. Lo mismo pero en negativo	
251		Av	¿Qué pongo?	

Trío 3			Dicen	Hacen
252		V	Lo mismo pero en negativo	T=0, y llevan *a* a valores positivo y negativos, muy rápido
	23:15		Cierran la tarea	

ANEXO XIV

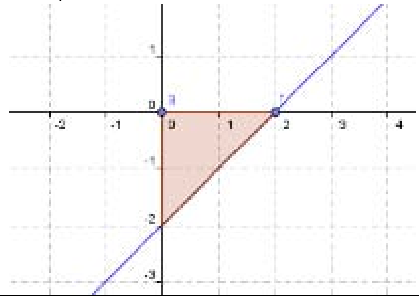
Transcripción de la tarea Función Integral I. Pareja 4. L-M.

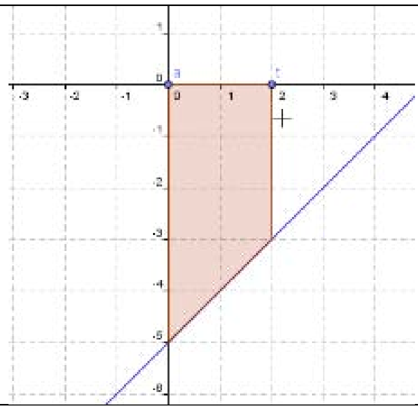
I. Cuando **a**=0 y **t**=2, cambiando el valor de **m** y **n** en los deslizadores justifica que el área del cuadrilátero es la que se indica,
 - en el caso de rectángulos (**m**=0)
 - en el caso de triángulos (**n**=0)
 - en el caso de trapecios (**m**≠0 y **n**≠0)

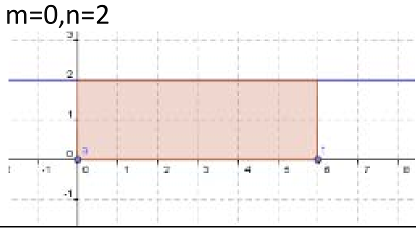
II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?
Por ejemplo:
- Si **m**=0, **n**=2
- Si **m**=2, **n**=0
- Si **m**=1, **n**=2

III. Comprueba la validez de las fórmulas cambiando el valor de t y sustituyendo en las fórmulas obtenidas.

IV. ¿Qué ocurre si para un valor de **m** y **n** dados, manteniendo fijo t, cambiamos el valor de **a**?

Pareja 4			Dicen	Hacen
I				
147	00:15	M	Justifica que el área es la que se indica	
148		L	Hay que justificarlo, base por altura	
149		M	Tú dices, 2 por -2	
150	0:19	M	Después triángulos	Varían n
151		M	Es m. En el caso de los triángulos. En el caso de los triángulos es esto. Sería así	m=1, n=-2 
152		L	¿Y cuánto da?	
153		M	Daría lo de arriba partido por 2, o sea t por n partido 2	
154		L	Pero tenemos que justificar el número	
155	1:28	M	El número este por n partido …	
156		L	Ya, pero claro, es que no siempre es 2. Vale, entonces es… y por n ¿por qué n? ¿n qué es?	
157		M	N es -2. Mira	Cambia n
158	2:00	L	Entonces arriba no cambia	
159		M	A n por t	
160		L	Que es lo mismo que pone… ¿Y en el caso de los trapecios?	
161		M	En el caso de los trapecios, m distinto de cero	
162		L	¿En qué teoría eso sería un trapecio?	[Hay un triángulo]
163		M	Esto es un trapecio	Pone m=0,7, n=-2
164		L	Ya, pero es que aquí pone que con que sea distinto de cero ya está	
164		M	Antes era cero la…, no era 1. Ya pero es un trapecio ¿cómo lo hacemos?	
165	2:35	L	Base mayor más base menor	
166		M	¿Y qué hay más?	
167		L	Partido 2 más la altura, no, por la altura	
168		M	Entonces la base mayor es n, la base menor es n por m	
169		L	¿n por m?	
170		M	Es que aquí sí, pero aquí no	Mueve t
171		L	Pero es que t no lo tienes que mover, tienes que decir que t=2 y ya está	
172		M	Entonces sí que es, es que claro, no sé…	
173		L	Mueve m un momento	
174		M	¿n?	
175		L	m	Varían m, lo dejan en m=0
176		L	no, porque si la base menor es n·m	M=0,5; n=-2
177		M	No, no es n·m,. Pon que es 1	
178		L	Pero no siempre es 1	

Pareja 4			Dicen	Hacen
179	3:43	M	Pero es que tampoco hay una fórmula para sacarlo. O sea, m te indica…	
180		L	Algo tiene que haber	Varían m, lo dejan igual
181		M	Pues pones t, que es lo que avanza, por m, negativo, o sea n-t·m	
182		L	¿Si mueves m es eso también?	Mueven m
183		M	Si ponemos que n –t ·m, t·m sería, t que es 2, por m que es 1, sería 2 y n… sí que baja 2, baja de -5 a -3. Entonces es la base menor es n, menos m·t	
184		L	Pero m te da 2 y la base menor es n	
185		M	Menos 2	
186		L	Más 2	
187		M	Más 2 . Pero n, menos, vale, entonces…	
188	5:00	L	A ver, dime como es. Más la base.	
189		M	Pero no, yo tampoco. N es la base mayor, la base menor es, vamos a subirlo, m ponemos. A ver, vamos a subirlo esto	Varían m y lo dejan igual
190	5:20	M	N, vale	Varían n
191		L	¿No sería calcular esto ¿ Si se puede de alguna fórmula en plan triángulo y sumárselo a m	
192		M	Es n+m·t	
193		L	n+m·t	
194		M	Partido 2	
195		L	Y la altura…	
196		M	T	
197		L	La altura ¿cuál es? Ah, vale, esto	
198		M	t. Y esto si lo simplificas sería, bueno 2t partido 2	
199		L	¿Qué?	
200		M	2n+ mt partido 2 [$\frac{2n+mt}{2}$] [La escriben correctamente]	
II				
201	6:05	L	[Lee]	
202		L	Vale, tienes que dejar valores fijos de n y de m	
203		M	Valores fijos, así mismo	m=1, n=3; varían t
204		L	[sigue leyendo]	
205		M	La fórmula es esta ¿no?	Cambian el zoom
206		L	¿La de ahí arriba?	
207		L	El caso del trapecio, que es el más complejo	
207		L	Pero y si fuera un triángulo, esta no serviría	
208	6:43	M	¿Estás segura? Vamos a verlo. Bajamos aquí	
209		L	Es que no hay base mayor y base menor	

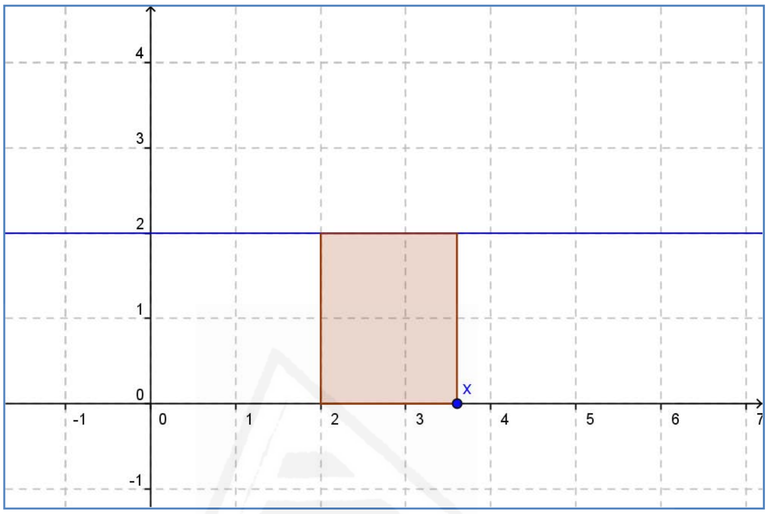
Pareja 4			Dicen	Hacen
210		M	Pero hay base	
211		L	Bueno, la base menor sería cero	
212		M	Vamos a ver	Ponen n=0, m=1
213		L	…	
214		M	Ya, pero aquí mira, 2n, 2 por n, cero, cero ,más m por t	
215		P	Muy bien	
216		M	m·t es 1·6, por t, partido 2	Los valores son t=6, y=mt; 6·6 /2=18
217		L	Vamos, que está bien	
218		M	Es que…	
219		L	Y para los cuadrados también	
220	7:37	M	Sí, yo creo que también serviría	
221		L	Y entonces sirve para todos estos valores	
222		M	Compruébalo, anda. A ver, si m es cero	Ponen m=0, n=-2, t=6
223		L	2	
224		M	2 positivo ¿y la t? Mayor que cero, vale, 6, 6 por 2. A ver, lo ponemos ahí, 2 por n, 2 por 2, 4, más mt	Cambian m
225		L	Cero	
226		M	Cero por…	m=0,n=2 
227		L	4 entre 2, 2, por t que es 6, 12	
228	8:32	M	Vale, si m=2 y n=0	M=2, n=0, t=6
229		L	A ver, 2n que es 0, mt que es 12, partido 2, 6, por 6, 36. Sí, está bien	
III				
230	8:57	L	[Lee] Comprueba la validez de las fórmulas cambiando el valor de t	
231		M	Espera, m=1 y n=2	
232		L	Sí, eso es para que…	Ponen m=1, n=2 (trapecio)
233		M	Vale, pues ya está	
234	10:19	L	[Lee]	
235		M	comprobado	
236		L	Vale	
IV				
237		L	[Lee]	
238		M	Pues que se va a la mierda la fórmula	
239		L	La base sería t-a	
240		M	Pon que la t pasaría a ser t-a	
241		L	¿Aquí también? Aquí sería la altura	
242		M	Sí, todas las t pasarían a ser t-a	
243	11:18	L	Pero si aquí está calculando la altura. ¡Ah, sí!	

ANEXO XV

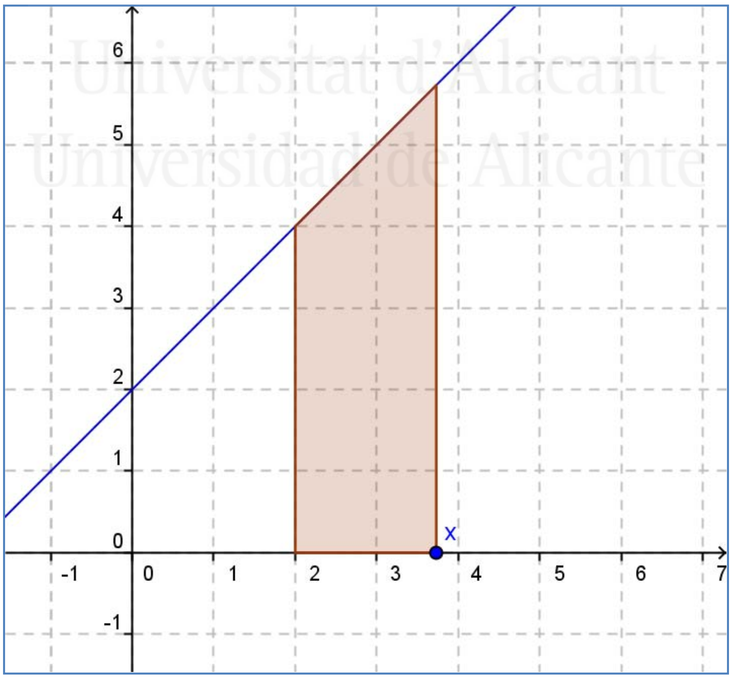
Transcripción de la Tarea Función integral II. Pareja 4. L-M

Dibuja, aproximadamente, las gráficas de la funciones F_I y F_{II} que nos ofrezcan el valor del área bajo cada una de las gráficas siguientes desde 2 hasta x (para valores comprendidos entre 2 y 5)

I.



II.



Pareja 4			Dicen	Hacen
244		M	Dibuja, aquí en el papel	
245		L	No entiendo el enunciado	
246		M	O sea, la integral de esta y la integral de esta. O sea sería e igual…	
247		L	¿El área?	
248		M	No, digo la función uno, y =2	
249		L	Pero hay varias, sería esta…	
250	1:13	M	¿Entonces la primitiva no sería y=2x?	
251		L	Sí	
252		M	Pues ya está, a dibujar 2x	
253		L	Pero a ver, entonces si la x es 4, el área será 2 por 2, 4, sí	
254		M	Si tú haces 2x que hay aquí y tendrías que en 1 es 2	
255		L	4-2, sería x-2, 2 por x-2	
256		M	¿Por qué es menos?	
257		L	Pero es que si la x fuera 4, el área de esto sería 4-2, 2, por 2, 4	
258		M	¡Ah! Es que pone desde 2 , entonces si pone desde 2 empezaría aquí	
259		L	x-2	
260	2:00	M	Claro, menos 2. ¡Pero por lo menos 2 detrás, 2x-2	
261		L	¿Pero no es 2 por x-2? Es que no es lo mismo 2x-2 que 2 por x-2	
262		M	¿Ah, no? No, pero entonces sería 2 por x-1	
263		L	¿Por qué?	
264		M	Porque sacas factor común. A ver, esto es 2 por x-2	
265		L	Esto es esto	
266	2:28	M	A que es menos 4? Qué te apuestas?	
267		L	2x	
268		M	O sea es así	
269		L	Pues eso es lo que estaba diciendo yo	
270		M	Pero entonces es 2x-4	
271		L	Es lo mismo. Pero tú decías 2x-2	
272		M	Claro	
273		L	Vale	
274		M	Entonces llegaría aquí. En 2 sería cero, en 3 habría subido al 2 ¿no? En 3 habría subido hasta aquí y sería 2 por 1	
275		L	¿La tengo que dibujar?	
276		M	Sí, tiene que pasar de ahí y tiene que llegar hasta aquí	
277		L	Espera, en cero es - 4	
278		M	No, en cero es 2. Sí, en cero es -4, pero en este -4, no sale, tú empieza por 2	
279	3:17	L	¡Ah, vale! En 2 sería…	
280		M	Tiene que ir de ese punto a ese punto	
281		L	¿Este?	
282		M	¡No, no, no!	
283		L	¿Este?	
284		M	De ese	

Pareja 4			Dicen	Hacen
285		L	Sí, bien	
286		M	Y hasta, hasta,…	
287		L	¿Así?	
288		M	Sí. ¿Qué haces?	
289		L	Pues especificarle qué es eso. Mario, escribe, escribe.	
290		M	Si ya lo has escrito aquí	
291		L	Luego que no entiende tus exámenes. Pues normal ¿esta qué es? Esta es y=	
292		M	Bien, no	
293		L	Sí	
294		M	Vale, esa es la fórmula	
295		L	Esta	
296		M	¿Y aquí cuánto sube? Es x	
297		L	Vale	
298		M	La primitiva	
299	4:00	L	¿Qué es primitiva? Para calcular el área	
300		M	Para dibujarla	
301		P	¿Qué tiene que ver la primitiva con e lárea? La primitiva no es el área	
302		L	¿Aquí no era la primitiva?	
303	4:18	L	Ah, sí, sí que era la primitiva	
304		P	Pero, ¿por qué?	
305		M	Porque la tenemos que dibujar ¿tú quieres que la dibujemos sin hacer la primitiva?	
306		P	Yo es que no sé qué es la primitiva ¿Qué tiene que ver la primitiva aquí?	
307	4:30	M	Porque si tú quieres calcular el área…	
308		P	¿Tienes que utilizar la primitiva?	
309		L	Has de utilizar la integral	
310		M	No, no tienes que utilizar la primitiva, pero si la queremos dibujar, nosotros calculamos la primitiva y dibujamos la primitiva	
311		P	Pero ¿cómo sabes tú qué es la primitiva?	
312		M	¿Qué cómo sé yo…?	
313		P	Qué es la primitiva	
314	4:46	M	Porque la primitiva nos indica l integral	
315		P	La primitiva nos indica la integral ¿sí? Y eso ¿cómo lo sabes tú?	
316		M	La de antes, la antiderivada, la integral	
317		P	La antiderivada es una cosa y esto es otra	
318		M	Pero nosotros la dibujamos, y después cogemos…	
319	5:03	P	Son dos cosas diferentes	
320		M	Cogemos el intervalo que queremos	
321		P	¿Sí? Bien, yo no lo he dicho	
322	5:13	M	Nos está comiendo la cabeza. A ver, tiene que dar una parábola	
323		L	¿Por qué?	
324		M	Porque de grado 1 tiene que pasar a grado 2	
325		L	Vale, entonces…	

Pareja 4			Dicen	Hacen
326		M	Pero vamos a hacerlo… a ver, aquí es cero	
327		L	¿Que aquí es qué?	
328		M	En ese valor ¿cuánto vale el área?	
329	5:38	L	¿En 2? No entiendo lo que me estás diciendo. A ver, si x=3 el área de esto es 9	
330		M	Mira, pasa por ese punto porque es 2 por 2 partido 2, que es 2. Entonces el área de ese triángulo es 2. Si ese triángulo es 2 quiere decir que la primitiva pasa por 2	
331		L	Pero si ese triángulo no lo estamos mirando ahora	
332		M	A ver, te pregunta un trozo, pero tú tienes que mirarlo todo	
333		L	Ya, pero es que lo que mueves es x	
334		M	Bueno, pero, es que ese punto sabemos qué es ya, después seguimos	
335		L	Bueno, si tú lo dices	
336		M	Márcalo ahí. Entonces, después, si aumentamos uno tenemos 1, 2, 3, por 1, 2, 3 por 9… vale, pero te pregunta sólo este trozo	
337		L	Si tienes que calcular la primitiva de esto ¿no seía directamente mirar aquí y calcularla?	
338		M	Es que al calcular la primitiva te queda un más c	
339		L	Ya, y luego miramos cuál es la c	
340		M	La c depende de este trozo. Pero vamos a hacerlo de otra forma. O sea, aquí hemos sacado la fórmula. Aquí la fórmula podemos no sacarla y fijarnos en el área. Aquí sabemos que es cero, en 2 ¿y aquí cuánto es? En x no, que en x está en ningún sitio, en tierra de nadie. En 3 sería, altura 1…	
341		L	¡Ah, ya sé lo que estás haciendo! Vale	
342		M	O sea, sacas el área en 3, marcas el punto. A ver, base menor, 4, base mayor, 5, que son 9, entre 2, 4.5, por 1…	
343		L	4,5	
344	7:35	M	4,5	
345		L	Vale. Y ahora qué	
346		M	E n3, no ahora en 4	
347		L	¿Y si la dibujamos y ya está? Si es una parábola	
348	7:43	M	Pero es así o así	
349		L	Será así	
350		M	Ya, pero vamos a poner otro punto por lo menos	
351	7:48	L	Que no puede hacer así, porque solo tiene… Ya, es así. Hacemos otra	
352		M	En 4	
353		L	E n4 se nos va a ir	
354		M	Bueno, esto… da igual. 2 sigue siendo 4 y es…	
355		L	Una cosa estoy pensando	
356		M	4 por 6, 24, entre 2, 12 y 12 por 2… ¡adiós!	
357		L	La dejo así, ¿no?	
358		M	Pero mucho para arriba ¿no?	

Pareja 4			Dicen	Hacen
359		L	¿Qué? Hazla un poco más redondita	
360		M	Sólo hace falta dibujar… esta a partir de 2	
361		L	Aquí hemos dibujado más	
362		M	Vale	
363	8:36	L	Ay, me ha quedado muy…	
364	8:49	L	Vale	
365	8:53	M	¡Ya está hecho!	

ANEXO XVI

SESIÓN Nº: 2 FECHA: 9-2-10 PAREJA Nº: 2

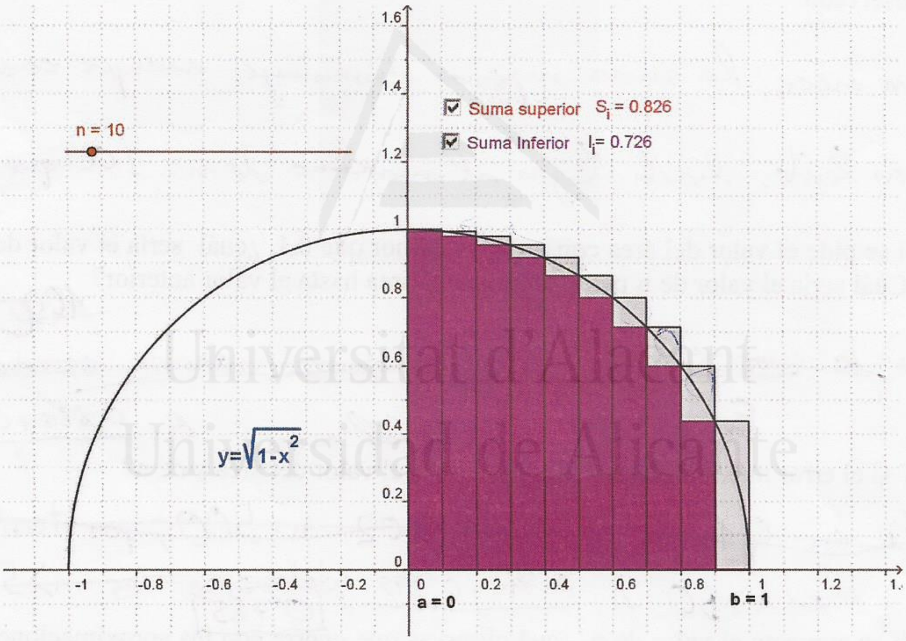
NOMBRES:

Tarea 2. Área del cuadrante. Cálculo aproximado del área mediante particiones

Archivos: T2_área_del_cuadrante.ggb y Tarea2.xls

Cuando queremos calcular el área bajo una función no rectilínea, es decir bajo una curva, tenemos que recurrir a aproximaciones. Recuerda cómo calculamos el valor de π aproximando el área del círculo mediante polígonos inscritos y circunscritos en el círculo, aumentando el número de lados y hallando el límite.

Ahora vamos a calcular de nuevo el valor de π, hallando el área del cuadrante de un círculo, usando la función $y = \sqrt{1 - x^2}$, y aproximando mediante rectángulos.



I. Cambia el valor de **n** utilizando el deslizador, y observa:
   a. El número de subintervalos en que se divide el intervalo. Para un valor de **n** dado, ¿cuántos subintervalos hay?

Cambia cada 0'1 m (10 cm)

Para n = 10, tenemos 10 subintervalos.

3

0'7655

Fórmula general → $\boxed{d = \frac{1}{n}}$

b. La longitud de estos subintervalos.
Para un valor de **n** dado, ¿cuál es la longitud de los subintervalos?

Cuando n aumenta, la distancia entre subintervalos disminuye proporcionalmente.

Ejemplo: Para n = 20 → 0'05 m → 5 cm

II. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas inferiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

Si n crece la suma inferior aumenta, aunque cada vez mucho más lentito.

III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

Si n crece, la suma superior disminuye, aunque cada vez más lento, hasta llegar al máximo de n = 100 que es S = 0'790.

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ~~A 100~~
¿Cuál sería el valor de **n** para aproximar el área hasta el valor anterior? ~~100, porque la diferencia de la suma superior y de la suma inferior es de 1 decímetro.~~

En n = 10 es 0'1 el error. $A: \frac{0'826 + 0'726}{2} = \boxed{0'776}$

Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de **n**?

~~Si en 0,1 n = 100, en 0,02 n = 500; por tanto el valor del área es n > 500~~

en n = 50, $A: \frac{0'795 + 0'775}{2} = \boxed{0'785}$

V. Si se aumenta el valor de **n**, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?

Al aumentar n, la aproximación al área se va haciendo más y más exacta, y el margen de error acaba quedándose en 0'01.

VI. Abre la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** y completa las celdas vacías para los valores de **n=3, n=4, n=5**.

VII. Comprueba en la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** los valores obtenidos en los apartados IV y V.

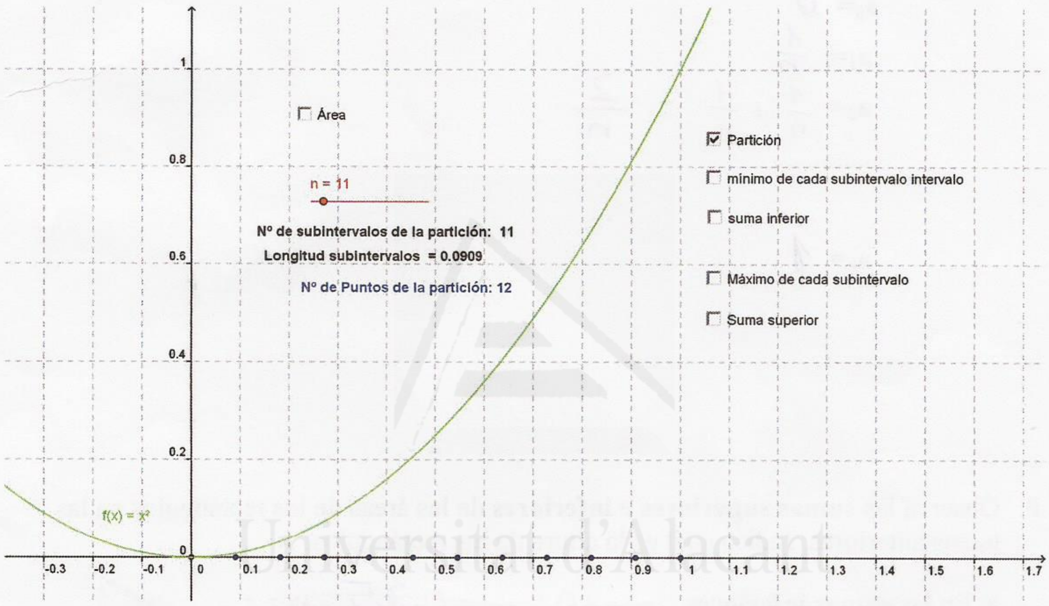
SESIÓN Nº: 3 FECHA: 11-2-10 PAREJA Nº: 2

NOMBRES: ______ y ______

VIII.

Tarea 3. **Partición.** Archivos: T3_partición_parábola[0,1] yTarea3_parábola.xls

I. Mueve el deslizador y observa lo que ocurre con el número de puntos de la **partición**, el número de subintervalos y la longitud del subintervalo.



a. ¿Qué representa **n**? el número de subintervalos de la partición

¿Qué relación hay entre **n** y el número de puntos de la **partición**?

$n^o p = n + 1$

b. ¿Qué relación hay entre **n** y la longitud de los subintervalos?

$l_{sb} = \frac{1}{n}$

c. Escribe los valores de los extremos del intervalo de la **partición** para:

n=1: a_0= 0 ; a_1= 1

n=2: a_0= 0 ; a_1= 0,5 ; a_2= 1

5

n=3: $a_0 = 0$; $a_1 = 0,\widehat{33}$; $a_2 = 0,\widehat{66}$; $a_3 = 1$
n=4: $a_0 = 0$; $a_1 = 0,25$; $a_2 = 0,5$; $a_3 = 0,75$; $a_4 = 1$
...
n=10: $a_0 = 0$; $a_1 = 0,1$; $a_2 = 0,2$; $a_3 = 0,3$; $a_4 = 0,4$; $a_5 = 0,5$...

d. Busca una fórmula general para cualquier valor de **n**:

1. De la longitud del subintervalo : **Δx**= $\frac{1}{n}$

2. De los valores de los extremos del intervalo de la **partición**:

a_0= 0

a_1= $\frac{1}{n}$

a_2= $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$

....

a_n= 1

II. Observa las **sumas superiores** e **inferiores** de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos:

a. En las **sumas inferiores**: ~~$n_1 = 0$; $h_2 = 0,25$; $h_3 =$~~

La img dels punts

b. En las **sumas superiores**:

La altura es la img del siguiente punto

c. Escribe una fórmula para las **sumas superiores**, **S_i** y otra para las **sumas inferiores**, **I_i**, relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la **partición**.

$\frac{1}{n} \cdot f(a_n)$

Sumas inferiores → la base del subintervalo será la misma para un n determinado, la altura será siempre la imagen del punto de la izquierda.

Sumas superiores: " " " "
la altura será la imagen del punto de la derecha.

ANEXO XVII

1

SESIÓN Nº: 6 FECHA: 24 · 2 · 2010 PAREJA Nº: 5

NOMBRES: y

Hemos definido la integral a partir del área, pero ahora podemos considerar la integral como un número asociado a una función: **Integral = límite sumas inferiores= límite sumas superiores.**

Tarea 9. **Archivo:T9_integral y área.ggb**

Vamos a calcular las áreas de regiones que no están situadas siempre por encima del eje X, es decir delimitadas por funciones no siempre positivas. También calcularemos las integrales de dichas funciones en esos intervalos.

En éstos casos, ¿será igual el área a la integral?, ¿Podrá ser cero la integral aunque delimite una región de área no nula?

I. Para **m**=0, **n**=-2 entre **a**=0 y **b**=4

a. Calcula $\int_0^4 -2\,dx$ → -8

no es igual integral al area

b. Calcula por métodos geométricos el área sombreada.

A= b · h

A= 4 · 2 = 8

c. Qué relación tiene el área sombreada con $\int_0^4 -2\,dx$

La integral definida en valor absoluto es igual a al área sombreada

d. Expresa el área sombreada usando $\int_0^4 -2\,dx$

$\int_0^4 |-2\,dx| = |+8|$

II. Da otros valores a **m** y **n**, **a** y **b**, para que toda la región sombreada quede por debajo del eje X.

$m = 0'8$ $b = +2'5$
$n = -2$
$a = 0$

a. Calcula el área de dichas regiones.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2'5}{2} = 2'5$$

b. Expresa dichas áreas usando integrales

$$\int_0^{2'5} |-2\, dx| = |2'5|$$

$m = 0'8$
$n = -2$
$a = 0$
$b = 2'5$

$$\int_0^{1} |-2\, dx| = |1|$$

$m = 2$
$n = -2$
$a = 0$
$b = 1$

c. Escribe tus conclusiones respecto a cómo se calculan las áreas de regiones situadas por debajo del eje X usando integrales.

Igual que una integral pero en valor absoluto

III. ¿Y si la región está situada en parte por encima del eje X y en parte por debajo, es decir la integral es negativa en un trozo y positiva en otro?

Prueba con **m**=1, **n**=0, entre **a**=-2 y **b**=2

El area es la soma de las dos integrales en valor absoluto.

$$\int_{-2}^{0} |-2\, dx| + \int_0^{2} |-2\, dx| = 4$$

2

SESIÓN Nº: 6 FECHA: 24-2-2010 PAREJA Nº: 5

NOMBRES: ______ y ______

a. ¿Cuál es el valor de $\int_{-2}^{2} x\,dx$ $= 0$

b. Y el valor del área encerrada entre las rectas x=-2, x=2 , el eje OX y la recta y=x.

$$A = \int_{-2}^{0} |-2\,dx| + \int_{0}^{2} |-2\,dx| = 16$$

c. Calcula $\int_{-2}^{3} x\,dx$

$x = 2$

$$\int_{-2}^{3} -2\,dx = 12'5$$

d. Cálcula el área de la región determinada por las rectas x=-2, x=3 , el eje OX y la recta y=x.

$$A = \int_{-2}^{2} |-2\,dx| + \int_{2}^{3} |-2\,dx| = 8'5$$

e. Expresa dicha área mediante integrales y valores absolutos.

$$A = \int_{-2}^{2} |-2\,dx$$

ANEXO XVIII

SESIÓN Nº:__________ FECHA: 3/~~3~~3/2010 PAREJA Nº: 3

NOMBRES y 7

Tarea 11. $\boxed{\text{T\_11\_F\_Integral\_I\_rectas}}$ Función Integral I. Rectas, Ej. 53 del libro de texto

I. Cuando **a**=0 y **t**=2, cambiando el valor de **m** y **n** en los deslizadores justifica que el área del cuadrilátero es la que se indica, $n \cdot t$ → La fórmula de un rectangulo $(b \cdot a)$
- en el caso de rectángulos (**m**=0)
- en el caso de triángulos (**n**=0) → $[(\cancel{n} \cdot mt) \cdot t]/2$ $(t=2)$
- en el caso de trapecios (**m**≠0 y **n**≠0) ↳ $\dfrac{n + (n+mt)}{2} \cdot t$

II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?
Por ejemplo:
- Si **m**=0, **n**=2 $n \cdot t = 2 \cdot 7 = 14$
- Si **m**=2, **n**=0 $[(m \cdot t) \cdot t]/2 = [(2 \cdot 3) \cdot 3]/2 = 9$
- Si **m**=1, **n**=2 $\dfrac{n + (n+mt)}{2} \cdot t = \dfrac{2 + (2+1 \cdot 3)}{2} \cdot 3 = 10{,}5$

III. Comprueba la validez de las fórmulas cambiando el valor de t y sustituyendo en las fórmulas obtenidas.
$\dfrac{n + (n+mt)}{2} \cdot t = \dfrac{2 + (2+1) \cdot 4}{2} \cdot 4 = 16$
$n \cdot t = 2 \cdot 10 = 20$
$[(m \cdot t) \cdot t]/2 = [(2 \cdot 5) \cdot 5]/2 = 25$

IV. ¿Que ocurre si para un valor de **m** y **n** dados, manteniendo fijo t, cambiamos el valor de **a**?

Lo mismo pero en negativo.

V. ¿Y con parábolas? Repite los pasos anteriores NO

ANEXO XIX

SESIÓN Nº: 2 FECHA: 9/02/10 PAREJA Nº: 6

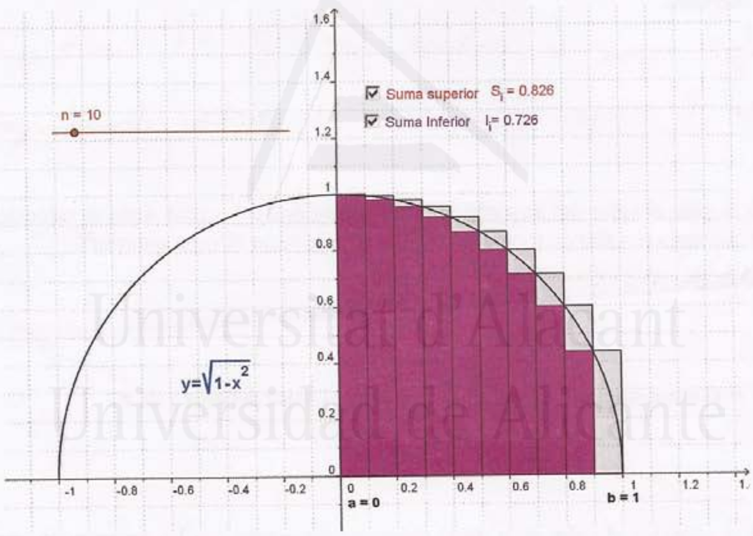
NOMBRES: ________ y ________

Tarea 2. Área del cuadrante. Cálculo aproximado del área mediante particiones

Archivos: T2_área_del_cuadrante.ggb y Tarea2.xls

Cuando queremos calcular el área bajo una función no rectilínea, es decir bajo una curva, tenemos que recurrir a aproximaciones. Recuerda cómo calculamos el valor de π aproximando el área del círculo mediante polígonos inscritos y circunscritos en el círculo, aumentando el número de lados y hallando el límite.

Ahora vamos a calcular de nuevo el valor de π, hallando el área del cuadrante de un círculo, usando la función $y = \sqrt{1-x^2}$, y aproximando mediante rectángulos.



I. Cambia el valor de **n** utilizando el deslizador, y observa:
   a. El número de subintervalos en que se divide el intervalo.
      Para un valor de **n** dado, ¿cuántos subintervalos hay?

$\boxed{n}$

b. La longitud de estos subintervalos.
Para un valor de **n** dado, ¿cuál es la longitud de los subintervalos?

$\boxed{\frac{1}{n}} \to \boxed{n^{-1}}$

II. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas inferiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

Cuando aumentas el valor de n la suma de las áreas se aproxima al valor del área del cuadrante que vale $\frac{\pi}{4}$. Aquí se aproxima aumentando

III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

Aquí pasa lo mismo que en el caso anterior sólo que la aproximación se realiza disminuyendo.

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de **n** para aproximar el área hasta el valor anterior?

n=10

Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de **n**?

V. Si se aumenta el valor de **n**, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?

VI. Abre la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** y completa las celdas vacías para los valores de **n=3**, **n=4**, **n=5**.

VII. Comprueba en la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** los valores obtenidos en los apartados IV y V.

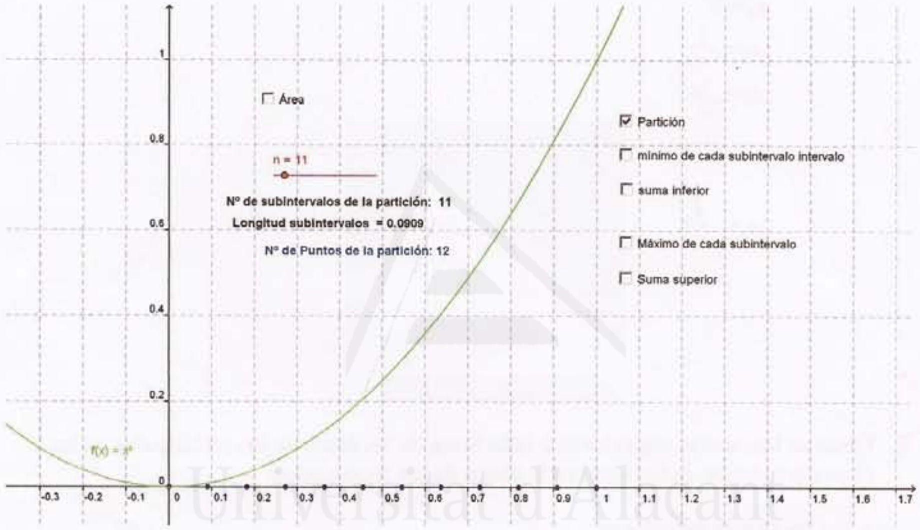
SESIÓN Nº: 4 FECHA: 11/02/10 PAREJA Nº: 6

NOMBRES:_ y

VIII.

Tarea 3. **Partición.** Archivos: T3_partición_parábola[0,1] yTarea3_parábola.xls

I. Mueve el deslizador y observa lo que ocurre con el número de puntos de la **partición**, el número de subintervalos y la longitud del subintervalo.



a. ¿Qué representa **n**?

¿Qué relación hay entre **n** y el número de puntos de la **partición**?

$n+1$

b. ¿Qué relación hay entre **n** y la longitud de los subintervalos?

$\frac{1}{n} = l \Rightarrow l \cdot n = 1$

c. Escribe los valores de los extremos del intervalo de la **partición** para:

n=1: a_0= 0 ; a_1= 1

n=2: a_0= 0 ; a_1= 0'5 ; a_2= 1

5

n=3: $a_0 = 0$ $a_1 = 0'33$ $a_2 = 0,677$ $a_3 = 1$
n=4: $a_0 = 0$ $a_1 = 0'25$ $a_2 = 0'5$ $a_3 = 0'75$ $a_4 = 1$
...
n=10: $a_0 = 0$ $a_1 = 0'1$ $a_2 = 0'2$ $a_3 = 0'3$ $a_4 = 0'4$ $a_5 = 0'5$ $a_6 = 0'6$ $a_7 = 0'7$ $a_8 = 0'8$ $a_9 = 0'9$ $a_{10} = 1$

d. Busca una fórmula general para cualquier valor de **n**:

1. De la longitud del subintervalo : **Δx**=

$\frac{1}{n}$

2. De los valores de los extremos del intervalo de la **partición**:

a_0= 0
a_1= $\frac{1}{n}$
a_2= $\frac{2}{n}$
....
a_n= 1

II. Observa las **sumas superiores** e **inferiores** de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos:

a. En las **sumas inferiores**:

$h \quad a_n = f(a_n)$

b. En las **sumas superiores**:

$\cancel{h \quad a_n = f(a_n + 1)}$ $\cancel{a_n = f(a_n)}$

$a_n = f(a_n) + \frac{1}{n}$

c. Escribe una fórmula para las **sumas superiores, S_i** y otra para las **sumas inferiores, I_i,** relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la **partición**.

$a_i = \frac{i}{n}$

$$\frac{1}{n} \cdot f(a_0) + \frac{1}{n} f(a_1) + \frac{1}{n} f(a_2) + \ldots\ldots + \frac{1}{n} f(a_{n-1})$$

$\boxed{\text{inferiores}} \rightarrow$ $$\sum \text{Areas} = \frac{1}{n}\left(f(a_0) + f(a_1) + \ldots\ldots + f(n-1) \right) =$$

Inferiores ~~Superiores~~: $\sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1}{n}(f(a_i))$ / Superiores $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n}(f(a_i))$

$\hookrightarrow \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$ $\hookrightarrow \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$

SESIÓN Nº: 5 FECHA: 12-02-10 PAREJA Nº: 6

NOMBRES:

Tarea 4. **Archivo: T4_Parábola[0,5]**

Mueve el deslizador **n** y observa cómo varían los rectángulos superiores e inferiores y el rectángulo rojo de la derecha:

I. Trata de identificar alguna relación. ¿Ocurre lo mismo que en el ejercicio anterior respecto a las diferencias $\mathbf{S_i}$-$\mathbf{I_i}$?

Cuando variamos n (al aumentarlo) aumenta el número de subintervalos en la gráfica y el número de rectángulos. En el rectángulo rojo al variar n ~~aument~~ divide el rectángulo en más rectángulos y disminuye la base

II. Busca una fórmula para el área del rectángulo rojo de la derecha dependiendo del valor de n. Para ello necesitas saber la base y la altura del rectángulo.

1. ¿La altura depende de **n**? Altura= $f(5) = 25$

no n = cte

2. ¿La base depende de **n**? Calcula la base del rectángulo para:

Si, disminuye al aumentar n.

a. **n=10**, Base= $\frac{5}{10}$

b. **n=20**, Base= $\frac{5}{20}$

c. **n= 50**, Base= $\frac{5}{50}$

d. ....

e. **n** , Base= $\frac{5}{n}$

b. Obtén una fórmula para las diferencias entre las **sumas superiores e inferiores** dependiendo del valor de n.

$$\boxed{\text{diferencia} = S_i - I_i = -\sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{5}{n}\left(f\left(\frac{5i}{n}\right)\right) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{5}{n}\left(f\left(\frac{5i}{n}\right)\right)}$$

c. Identifica la relación entre el área del rectángulo amarillo y el **error máximo** cometido al aproximar el área.

d. Si error máximo es 0,1 ¿cuántos intervalos tienes que coger?

¿y si es 0,01?

e. ¿Podrías encontrar un procedimiento para determinar un valor de **n** que permita calcular el área con un error menor que un número tan pequeño como se quiera?

9

SESIÓN Nº:____________ FECHA:____________________ PAREJA Nº:_______

NOMBRES:__________________ y ______________________

Hemos definido la integral a partir del área, pero ahora podemos considerar la integral como un número asociado a una función: **Integral = límite sumas inferiores= límite sumas superiores.**

Tarea 9. **Archivo:T9_integral y área.ggb**

Vamos a calcular las áreas de regiones que no están situadas siempre por encima del eje X, es decir delimitadas por funciones no siempre positivas. También calcularemos las integrales de dichas funciones en esos intervalos.

En éstos casos, ¿será igual el área a la integral?, ¿Podrá ser cero la integral aunque delimite una región de área no nula?

I. Para **m**=0, **n**=-2 entre **a**=0 y **b**=4

a. Calcula $\int_0^4 -2\,dx$ = -8

b. Calcula por métodos geométricos el área sombreada.

$\overline{ab} \cdot 2 = 8$

c. Qué relación tiene el área sombreada con $\int_0^4 -2\,dx$

el valor absoluto $|\int| = \cancel{\text{[illegible]}}\ A$

d. Expresa el área sombreada usando $\int_0^4 -2\,dx$

$\left|\int_0^4 -2\,dx\right|$

II. Da otros valores a **m** y **n**, **a** y **b**, para que toda la región sombreada quede por debajo del eje X.

a. Calcula el área de dichas regiones.

b. Expresa dichas áreas usando integrales

c. Escribe tus conclusiones respecto a cómo se calculan las áreas de regiones situadas por debajo del eje X usando integrales.

$|S|$

III. ¿Y si la región está situada en parte por encima del eje X y en parte por debajo, es decir la integral es negativa en un trozo y positiva en otro?

Prueba con **m**=1, **n**=0, entre **a**=-2 y **b**=2

$A = S_+ + |S_-|$

SESIÓN Nº:__________	FECHA:________________	PAREJA Nº:______
NOMBRES:________________ y ____________________		

a. ¿Cuál es el valor de $\int_{-2}^{2} x dx$

0

b. Y el valor del área encerrada entre las rectas x=-2, x=2 , el eje OX y la recta y=x.

4

c. Calcula $\int_{-2}^{3} x dx$

2,5

d. Calcula el área de la región determinada por las rectas x=-2, x=3 , el eje OX y la recta y=x.

6,5

e. Expresa dicha área mediante integrales y valores absolutos.

$A = \left|\int_{-2}^{0} x dx\right| + \int_{0}^{3} x dx$

SESIÓN Nº:__________ FECHA:__________ PAREJA Nº:______

NOMBRES: __________ y __________

Tarea 11. $\boxed{\text{T\_11\_F\_Integral\_I\_rectas}}$ Función Integral I. Rectas, Ej. 53 del libro de texto

I. Cuando **a**=0 y **t**=2, cambiando el valor de **m** y **n** en los deslizadores justifica que el área del cuadrilátero es la que se indica,
- en el caso de rectángulos (**m**=0)
- en el caso de triángulos (**n**=0)
- en el caso de trapecios (**m**≠0 y **n**≠0)

II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?
Por ejemplo:
- Si **m**=0, **n**=2 $2 \cdot t$
- Si **m**=2, **n**=0 $\frac{t \cdot f(t)}{2}$
- Si **m**=1, **n**=2 $\longrightarrow 2 + \frac{f(t)}{2} \cdot t$

III. Comprueba la validez de las fórmulas cambiando el valor de t y sustituyendo en las fórmulas obtenidas.

Comprobadas

IV. ¿Que ocurre si para un valor de **m** y **n** dados, manteniendo fijo t, cambiamos el valor de **a**?

La ~~integral~~ integral varía

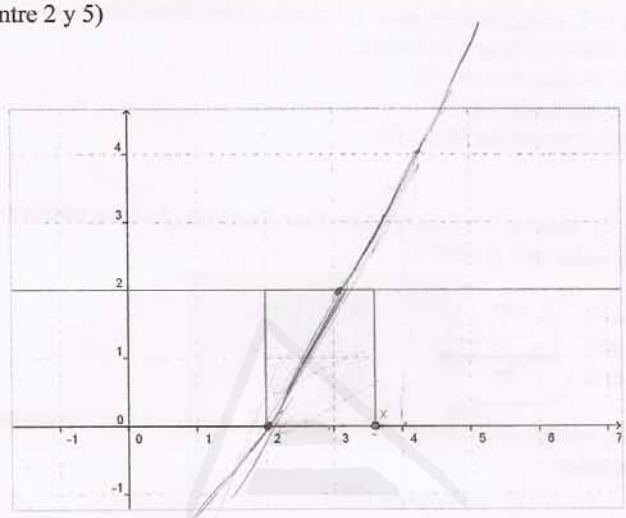
V. ¿Y con parábolas? Repite los pasos anteriores NO

21

Tarea 12.

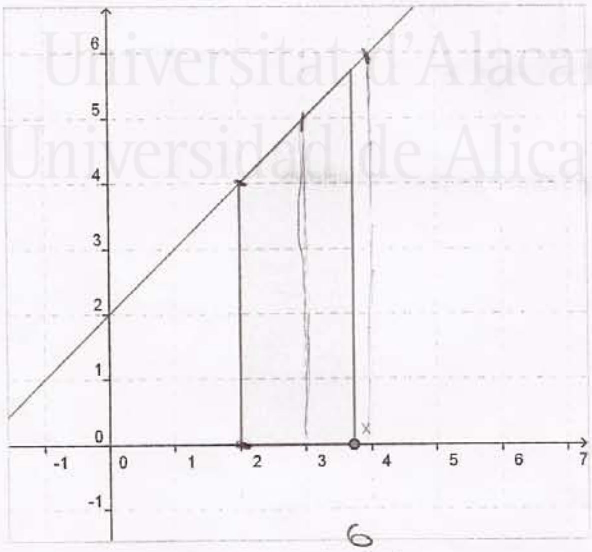
Dibuja, aproximadamente, las gráficas de la funciones F_I y F_{II} que nos ofrezcan el valor del área bajo cada una de las gráficas siguientes desde 2 hasta x (para valores comprendidos entre 2 y 5)

I.



$F(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$

II.



Para $x = 3$

$\frac{4+5}{2} \cdot (x-$

$\frac{4+\cancel{}6}{2} \cdot (x-2) = \cancel{}\ 5x - 10$

ANEXO XX

SESIÓN Nº: 2 FECHA: 9/02/10 PAREJA Nº: 4

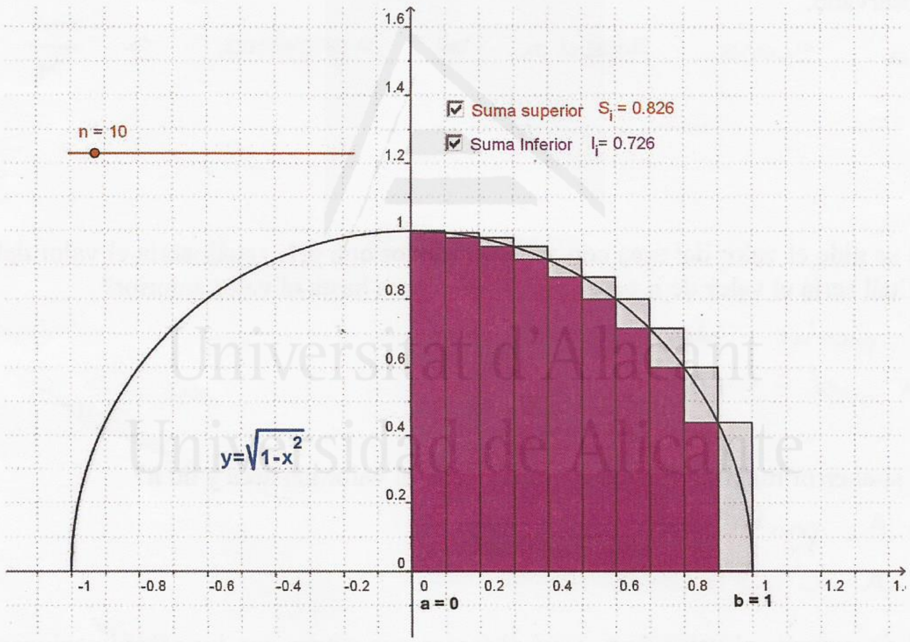
NOMBRES: ______________ y ______________

Tarea 2. Área del cuadrante. Cálculo aproximado del área mediante particiones

Archivos: T2_área_del_cuadrante.ggb y Tarea2.xls

Cuando queremos calcular el área bajo una función no rectilínea, es decir bajo una curva, tenemos que recurrir a aproximaciones. Recuerda cómo calculamos el valor de π aproximando el área del círculo mediante polígonos inscritos y circunscritos en el círculo, aumentando el número de lados y hallando el límite.

Ahora vamos a calcular de nuevo el valor de π, hallando el área del cuadrante de un círculo, usando la función $y = \sqrt{1 - x^2}$, y aproximando mediante rectángulos.



I. Cambia el valor de **n** utilizando el deslizador, y observa:
   a. El número de subintervalos en que se divide el intervalo.
      Para un valor de **n** dado, ¿cuántos subintervalos hay?

n intervalos

3

b. La longitud de estos subintervalos.
Para un valor de **n** dado, ¿cuál es la longitud de los subintervalos?

$\frac{1}{n}$ = longitud

II. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas inferiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

La suma inferior se aproxima a $\frac{\pi}{4}$

III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

La suma superior se aproxima a $\frac{\pi}{4}$

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de **n** para aproximar el área hasta el valor anterior?

A partir de n = 11
A = 0'7775

doble

Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de **n**?

A partir de n = 51
A = 0'785

V. Si se aumenta el valor de **n**, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?

Van aumentando poco a poco y el error se reduce, aproximándose a la integral.

VI. Abre la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** y completa las celdas vacías para los valores de **n=3**, **n=4**, **n=5**.

Completada

VII. Comprueba en la hoja de cálculo **Tarea2_cuadrante.xls** los valores obtenidos en los apartados IV y V.

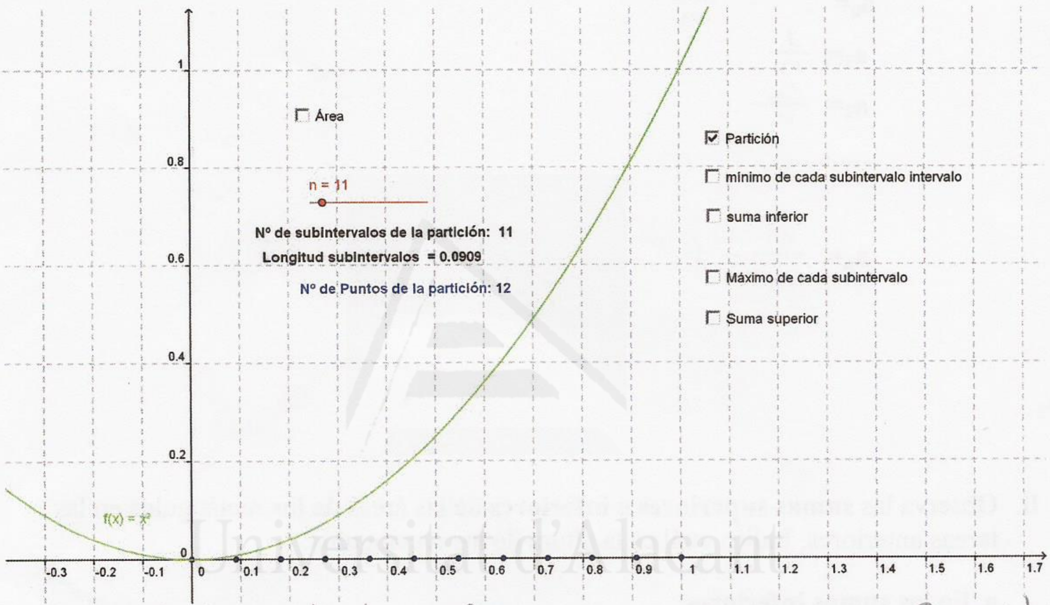
SESIÓN Nº: 3 FECHA: 11/02/10 PAREJA Nº: 4

NOMBRES: ____________ y ____________

VIII.

Tarea 3. **Partición.** Archivos: T3_partición_parábola[0,1] yTarea3_parábola.xls

I. Mueve el deslizador y observa lo que ocurre con el número de puntos de la **partición**, el número de subintervalos y la longitud del subintervalo.



El nº de subintervalos es n y su longitud $\frac{1}{n}$

a. ¿Qué representa **n**?

El número de puntos de la partición sin incluir el 0.

¿Qué relación hay entre **n** y el número de puntos de la **partición**?

n = nº de puntos de la partición + 1.

b. ¿Qué relación hay entre **n** y la longitud de los subintervalos?

$l = \frac{1}{n}$

c. Escribe los valores de los extremos del intervalo de la **partición** para:

n=1: a_0= 0 **; a_1=** 1

n=2: a_0= 0 **; a_1=** 0'5 **;a_2=** 1

5

n=3: $a_0 = 0$ $a_1 = 0'\widehat{3}$ $a_2 = 0'\widehat{6}$ $a_3 = 1$
n=4: $a_0 = 0$ $a_1 = 0'25$ $a_2 = 0'5$ $a_3 = 0'75$ $a_4 = 1$
...
n=10: $a_0 = 0$ $a_1 = 0'1$ $a_i = 0'1 \cdot i$ $i = [0, n]$

d. Busca una fórmula general para cualquier valor de **n**:

1. De la longitud del subintervalo : **Δx**=

$\frac{1}{n} = l$ $n = n^{\circ}$ particiones

2. De los valores de los extremos del intervalo de la **partición**:

$a_0 = 0 = \frac{0}{n}$

$a_1 = \frac{1}{n}$

$a_2 = \frac{2}{n}$

....

$a_n = \frac{n}{n} = 1$

II. Observa las **sumas superiores** e **inferiores** de las áreas de los rectángulos en las tareas anteriores. Indica cuál es la altura de los rectángulos:

a. En las **sumas inferiores**:

$H_i = f(\frac{1}{n} \cdot (i-1))$

b. En las **sumas superiores**:

$H_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$

c. Escribe una fórmula para las **sumas superiores**, **S_i** y otra para las **sumas inferiores**, **I_i**, relacionando la altura de los rectángulos con los puntos de la **partición**.

$A = b \cdot h$

$S_i = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{3}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{4}{n} f\left(\frac{4}{n}\right) \ldots$

$S_i = \left(\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^7$

SESIÓN Nº: 4 FECHA: 12/02/10 PAREJA Nº: 4

NOMBRES: ______ y ______

Tarea 4. **Archivo: T4_Parábola[0,5]**

Mueve el deslizador **n** y observa cómo varían los rectángulos superiores e inferiores y el rectángulo rojo de la derecha:

I. Trata de identificar alguna relación. ¿Ocurre lo mismo que en el ejercicio anterior respecto a las diferencias S_i-I_i?

n es el nº de intervalos y $S_i - I_i$ es el área del rectángulo. sí

II. Busca una fórmula para el área del rectángulo rojo de la derecha dependiendo del valor de n. Para ello necesitas saber la base y la altura del rectángulo.

$A = 25 \cdot \frac{5}{n} = b \cdot h$

1. ¿La altura depende de **n**? Altura= 25

No, es una constante

2. ¿La base depende de **n**? Calcula la base del rectángulo para:

a. **n=10**, Base= 0'5

b. **n=20**, Base= 0'25

c. **n= 50**, Base= 0'1

d. ....

e. **n** , Base= $\frac{5}{n}$

b. Obtén una fórmula para las diferencias entre las **sumas superiores** e **inferiores** dependiendo del valor de n.

$S_i - I_i = 25 \cdot \frac{5}{n}$

c. Identifica la relación entre el área del rectángulo amarillo y el **error máximo** cometido al aproximar el área.

$\text{Error} = \frac{25 \cdot \frac{5}{n}}{2} = \frac{\frac{125}{n}}{2} = \frac{62'5}{n}$

d. Si error máximo es 0,1 ¿cuántos intervalos tienes que coger?

$n = 625$

¿y si es 0,01?

$n = 6250$

e. ¿Podrías encontrar un procedimiento para determinar un valor de **n** que permita calcular el área con un error menor que un número tan pequeño como se quiera?

$\text{Error} = \frac{62'5}{n}$

9

SESIÓN Nº:____________ FECHA: 24/2/10 PAREJA Nº: 4

NOMBRES: ____________ y ____________

Hemos definido la integral a partir del área, pero ahora podemos considerar la integral como un número asociado a una función: **Integral = límite sumas inferiores= límite sumas superiores.**

Tarea 9. **Archivo:T9_integral y área.ggb**

Vamos a calcular las áreas de regiones que no están situadas siempre por encima del eje X, es decir delimitadas por funciones no siempre positivas. También calcularemos las integrales de dichas funciones en esos intervalos.

En éstos casos, ¿será igual el área a la integral?, ¿Podrá ser cero la integral aunque delimite una región de área no nula? El área será + y la integral −
Sólo se puede anular si el área de la parte + es = al de la parte −

I. Para **m**=0, **n**=-2 entre **a**=0 y **b**=4

a. Calcula $\int_0^4 -2\,dx$ $= -8$

b. Calcula por métodos geométricos el área sombreada.

$A = b \cdot h = 4 \cdot 2 = 8$

c. Qué relación tiene el área sombreada con $\int_0^4 -2\,dx$

El área ha de ser positiva y la integral puede ser negativa

d. Expresa el área sombreada usando $\int_0^4 -2\,dx$

$\left| \int_0^4 -2dx \right| = |-8| = 8$

II. Da otros valores a **m** y **n**, **a** y **b**, para que toda la región sombreada quede por debajo del eje X.

a. Calcula el área de dichas regiones.

$A = b \cdot h = 5 \cdot 5 = 25$

b. Expresa dichas áreas usando integrales

$\int_0^5 -5\,dx = -25$

c. Escribe tus conclusiones respecto a cómo se calculan las áreas de regiones situadas por debajo del eje X usando integrales.

El área es el valor absoluto de la integral

III. ¿Y si la región está situada en parte por encima del eje X y en parte por debajo, es decir la integral es negativa en un trozo y positiva en otro?

Prueba con **m**=1, **n**=0, entre **a**=-2 y **b**=2

La integral reduce su valor (se restan las dos integrales) y el área aumenta su valor (se suman las dos áreas)

SESIÓN Nº:__________ FECHA: 24/2/10 PAREJA Nº: 4

NOMBRES: y

a. ¿Cuál es el valor de $\int_{-2}^{2} xdx$ $= 0$ ×

b. Y el valor del área encerrada entre las rectas x=-2, x=2 , el eje OX y la recta y=x.

$A = \frac{b \cdot h}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = 2 \cdot 2 = 4$

c. Calcula $\int_{-2}^{3} xdx$ $= \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$

d. Cálcula el área de la región determinada por las rectas x=-2, x=3 , el eje OX y la recta y=x.

$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$ $A_1 + A_2 = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$

$A_2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 2$

e. Expresa dicha área mediante integrales y valores absolutos.

$\int_{-2}^{3} x \, dx$ $A = \left| \int_{0}^{3} x \, dx \right| + \left| \int_{-2}^{0} x \, dx \right|$

$y = x$

SESIÓN Nº:________ FECHA: 3/3/10 PAREJA Nº: 4

NOMBRES: y ________

Tarea 11. T_11_F_Integral_I_rectas Función Integral I. Rectas, Ej. 53 del libro de texto

I. Cuando **a**=0 y **t**=2, cambiando el valor de **m** y **n** en los deslizadores justifica que el área del cuadrilátero es la que se indica, $\rightarrow A = tn$
- en el caso de rectángulos (**m**=0) $A = \ell \cdot \ell = 2 \cdot (-2) = -4$
- en el caso de triángulos (**n**=0) $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{t \cdot n}{2}$
- en el caso de trapecios (**m**≠0 y **n**≠0)

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{n + n+mt}{2} \cdot t = \frac{2n + mt}{2} \cdot t$$

II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?
Por ejemplo:
- Si **m**=0, **n**=2
- Si **m**=2, **n**=0
- Si **m**=1, **n**=2

$$\frac{2n + mt}{2} \cdot t$$

III. Comprueba la validez de las fórmulas cambiando el valor de t y sustituyendo en las fórmulas obtenidas.

Comprobado.

IV. ¿Que ocurre si para un valor de **m** y **n** dados, manteniendo fijo t, cambiamos el valor de **a**?

$$\frac{2n + m(t-a)}{2} (t-a)$$

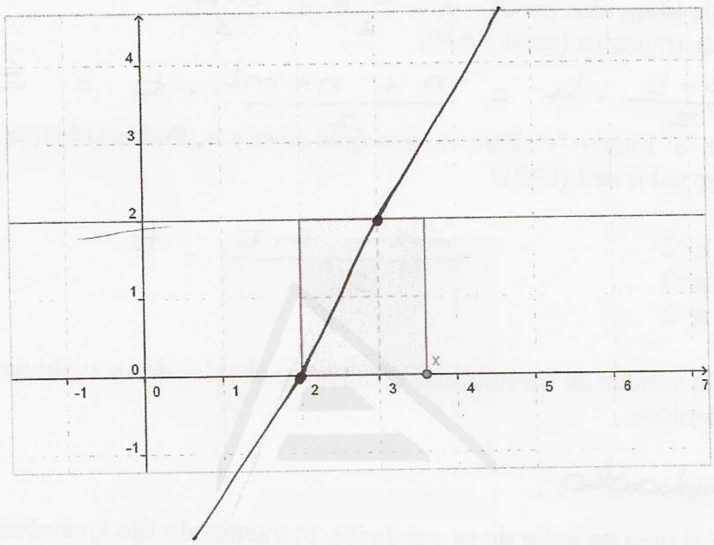
V. ¿Y con parábolas? Repite los pasos anteriores NO

Tarea 12.

Dibuja, aproximadamente, las gráficas de la funciones F_I y F_{II} que nos ofrezcan el valor del área bajo cada una de las gráficas siguientes desde 2 hasta x (para valores comprendidos entre 2 y 5)

I.

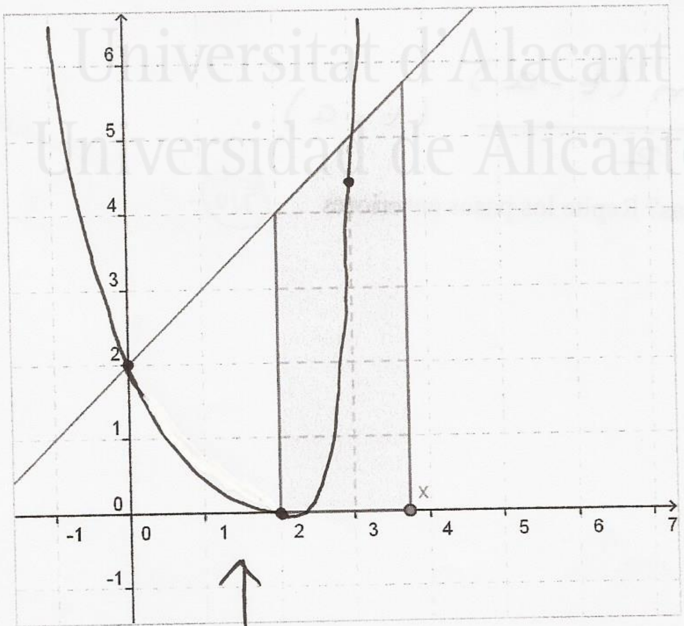
$y = 2$ $\quad$ $y = 2x - 4$



$y = 2(x - 2)$

$y = 2x - 4$

II.



$y = x + 2$

Parábola.

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha acordó otorgar, por a la Tesis Doctoral de Don/Doña. la calificación de

Alicante de de

El Secretario,

El Presidente,

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

EDUA

La presente Tesis de D. ha sido registrada con el nº del registro de entrada correspondiente.

Alicante, de de

El Encargado del Registro