Investigación en Educación Matemática XIX

3, 4 y 5 de septiembre de 2015 · Facultad de Educación

Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Área de Didáctica de la Matemática
http://web.ua.es/es/investigacion-educacion-matematica/

Editoras

Ceneida Fernández Verdú
Marta Molina González
Núria Planas Raig

Organizan

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Departament d'Innovació i Formació Didàctica
Departamento de Innovación y Formación Didáctica

SEIEM

Colaboran

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Vicerrectorado de Campus y Sostenibilidad
Facultad de Educación

GENERALITAT VALENCIANA

VALOR CHOCOLATES 1881

MELIÃ ALICANTE

Investigación en Educación Matemática
XIX

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Investigación en Educación Matemática

XIX

Ceneida Fernández, Marta Molina y Núria Planas (eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Alicante, 3, 4 y 5 de septiembre de 2015

Investigación en Educación Matemática XIX

Edición científica

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)

Ceneida Fernández Verdú
Marta Molina González
Núria Planas Raig

Comité científico
Dra. Marta Molina González (coordinadora)
Dra. Núria Planas Raig (coordinadora)
Dra. Ainhoa Berciano Alcaraz
Dra. María Luz Callejo de la Vega
Dra. Teresa Fernández Blanco
Dr. José Carrillo Yáñez
Dra. Leonor Santos

Cítese como:

C. Fernández, M . Molina y N. Planas (eds.), 2015. *Investigación en Educación Matemática XIX*. Alicante: SEIEM.

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Diseño de la portada*: Gabinete de Imagen y Comunicación Gráfica de la Universidad de Alicante.*

Servicio editorial: Universidad de Alicante
ISBN: 978-84-9717-385-8
ISSN: 1888-0762
Depósito legal: A 602-2015

¿QUÉ ANOTAN LOS ESTUDIANTES DURANTE UNA PRESENTACIÓN INTUITIVA DEL CONCEPTO DE LÍMITE? RELACIÓN CON EL SIGNIFICADO DEL CONCEPTO

What notes are taken by the students during an intuitive presentation of the limit concept? Relationship with the meaning of the concept

Arce, M. y Ortega, T.

Universidad de Valladolid

Resumen

Se presenta un estudio donde hemos analizado las notas que los alumnos toman en sus cuadernos durante la introducción del concepto de límite de una función en cuatro aulas de 1º de Bachillerato. Las exposiciones de los docentes han sido personales y de naturaleza intuitiva. Examinamos qué elementos deciden anotar los alumnos, cómo y qué aspectos del significado del concepto de límite quedan reflejados, usando el marco de Rico y dos descomposiciones genéticas del concepto. Hemos detectado una transcripción mucho mayor de los ejemplos en aulas donde no hay una definición general intuitiva del concepto, así como bastantes anotaciones centradas en una única variable y que sólo inducen un movimiento, sin especificar la aproximación ni la tendencia a ningún valor. Finalizamos con algunas reflexiones sobre la influencia potencial de estas notas en su aprendizaje del concepto.

Palabras clave: *límite de una función, significado, sistemas de representación, anotaciones verbales, bachillerato.*

Abstract

Here we present a study in which we have analyzed the notes taken by the students in their notebooks during the introduction of the concept of limit of a function, in four classrooms of Grade 11. The explanations of the teachers are personal and have an intuitive nature. By using Rico's framework and two genetic decompositions of this concept, we have examined what elements the students have decided to write down and in what way, and what aspects of the meaning of the limit concept have been reflected in. We have detected much more transcription of examples in classrooms in which there has not been an intuitive general definition of the concept. Besides, there are some annotations focusing only in one variable and inducing just a movement, without specifying the approach or the tendency to any value. Finally, we have done some reflections about the potential influence of these notes in the learning of the concept.

Keywords: *limit of a function, meaning, systems of representation, verbal notes, high school students.*

INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

El concepto de límite (CL) y los procesos de paso al límite tienen una importancia central en matemáticas. A partir de él se definen números relevantes o se establecen conceptos como los de continuidad, derivada o integral. Sin embargo, a pesar de la amplia presencia de la idea de límite, hasta el S. XIX (Weierstrass) no se contó con una definición ε-δ similar a las usadas hoy en día (Blázquez, Gatica y Ortega, 2009). Los problemas en la evolución histórica del CL muestran sus dificultades inherentes (Blázquez y Ortega, 2002), también detectadas en alumnos (Cornu, 1991). En 1º de Bachillerato, intentando sortear parte de esas dificultades, tanto el currículo como muchos

Arce, M. y Ortega, T. (2015). ¿Qué anotan los estudiantes durante una presentación intuitiva del concepto de límite? Relación con el significado del concepto. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 133-141). Alicante: SEIEM.

libros de texto y docentes optan por presentar una idea intuitiva del CL de una función, basada en aproximaciones dinámicas de las variables, pasando a tratar técnicas rutinarias de cálculo de límites basadas en la manipulación de expresiones (Claros, Sánchez y Coriat, 2014; Cornu, 1991; Fernández-Plaza, Rico y Ruiz-Hidalgo, 2013; Lacasta y Wilhelmi, 2010).

Tall y Vinner (1981) distinguen entre el *concepto definición* (conjunto de palabras usadas por un individuo o comunidad para especificar un concepto) y el *concepto imagen* (estructura conceptual que un individuo asocia a un concepto). En el caso del CL, el uso y significado cotidiano de términos como *límite*, *aproximar* o *tender* influye en las concepciones espontáneas que presentan los alumnos (Cornu, 1991). Una presentación intuitiva del CL, basada en descripciones dinámicas de aproximaciones, arbitrarias o subjetivas, y/o el desarrollo de ejemplos donde todo “funciona” hacen que el *concepto imagen* abarque un conjunto muy diverso de imágenes mentales, a veces contradictorias, frente a un *concepto definición* débil y poco operativo; conflicto extendido a conceptos como el de asíntota (Kidron, 2011). Además, los alumnos dan significados muy diversos a los términos clave (Fernández-Plaza et al., 2013) e identifican usualmente aproximar y tender.

La situación anterior se mantiene si la definición formal se introduce sin mostrar su necesidad ni dotarla de significado. Przenioslo (2004) revela la gran diversidad de concepciones sobre el CL de una función en un punto, muchas incompletas o erróneas, en estudiantes universitarios. Blázquez y Ortega (2002) crean una definición del CL que mantiene el rigor de la definición ε-δ, pero evita su excesivo formalismo, y que fue matizada en Blázquez et al. (2009): “El límite de la función f en $x=a$ es L si para cualquier aproximación K de L, $K\neq L$, existe un entorno reducido de a tal que las imágenes de todos sus puntos están más próximas a L que K” (p. 161). Creemos que su uso ayuda a los alumnos a desarrollar una *definición conceptual* del CL más significativa, facilitando el paso de lo que Claros et al. (2014) llaman fenómenos del ámbito intuitivo (conjeturar el valor del límite de función) a los fenómenos del ámbito formal (construcción de entornos para validar la conjetura).

Muchas investigaciones se centran en la comprensión del CL (ver Valls, Pons y Llinares, 2011), pero no hemos hallado estudios sobre las notas que toman los alumnos en una presentación del concepto. Pimm (1990, p. 195), en sus líneas abiertas de investigación sobre la escritura en el aula de matemáticas, plantea lo siguiente: ¿Qué les parece a los alumnos digno de anotar (en un contexto determinado)? Nuestro contexto son varias aulas de 1º de Bachillerato donde el CL se presenta intuitivamente a los alumnos. Los objetivos de esta investigación son:

- Detectar qué elementos son considerados por los alumnos como relevantes en una presentación intuitiva del CL, basándonos en su decisión de registrarlos o no.
- Analizar y clasificar qué anotaciones o marcas relacionadas con el significado del CL son registradas por los alumnos, con especial atención a las anotaciones verbales.
- Reflexionar sobre algunas situaciones detectadas en estos registros que pueden influir en el aprendizaje del CL.

MARCO TEÓRICO

Consideramos las tres componentes del marco de Rico (2012) para analizar los significados del CL reflejados en las anotaciones hechas por los alumnos:

- La *estructura conceptual*, sistema organizado de definiciones del concepto y de relaciones entre ellas, propiedades, proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- La *fenomenología*, compuesta por situaciones, contextos o problemas que están en el origen del concepto y le dotan de sentido.
- Los *sistemas de representación*, definido por los signos y gráficos que hacen presente un concepto matemático y permiten su relación con otros.

Nuestro estudio se centrará tanto en los aspectos de la estructura conceptual que los estudiantes deciden anotar como en los sistemas de representación usados para ello.

Las notas de los alumnos no nos permiten inferir una comprensión real. No obstante, para caracterizar el nivel de desarrollo del CL que pueden reflejar sus anotaciones, utilizaremos las *descomposiciones genéticas* (DG, secuencias hipotéticas que describen el desarrollo de la comprensión, marco APOE, Arnon et al., 2014) obtenidas por Cottrill et al. (1996) y Valls et al. (2011) para el CL, que se comparan en la Tabla 1.

Tabla 1. DG para el CL de una función *f* en un punto *a*

Cottrill et al. (1996)	Valls et al. (2011)
1. Acción de evaluar *f* en un punto	
2. Acción de evaluar *f* en varios puntos que se aproximan a *a* 3. Construcción de esquema de coordinación: a. Proceso en el que *x* se aproxima a *a* b. Proceso en el que *y* se aproxima a *L* c. Coordinación de a y b vía *f*	2. Idea de aproximación en dominio y rango: a. *x* se aproxima a *a* b. *f(x)* se aproxima a *L* 3. Coordinación en la concepción dinámica vía *f*: cuando *x* se aproxima a *a*, sus imágenes *f(x)* se aproximan a *L*
4. Encapsulación de 3.: objeto límite 5. Reconstrucción de 3c en términos de intervalos y desigualdades	4. Coordinación en la concepción métrica: encontrar en cada caso un x *suficientemente cerca de a* tal que el valor de f(x) sea *lo suficientemente próximo a L*
6. Cuantificación de 5.: obtención de definición ε-δ 7. Aplicación de la definición ε-δ	5. Consciencia sobre la existencia del límite L: escritura simbólica

La sucesión 1, 1’9, 1’99, 1’999,… se aproxima a 3; pero no tiende a 3. La diferenciación entre aproximación y tendencia es clave: en la tendencia se mejora cualquier aproximación fijada (Blázquez y Ortega, 2002). Las dos propuestas utilizan el término “aproximaciones” en la concepción dinámica. Sólo Valls et al. (2011) parecen aludir a tendencias en el punto 4.

CONTEXTO Y MÉTODO

En esta investigación participan cuatro aulas de 1º de Bachillerato, en Valladolid, elegidas por disposición. Dos pertenecen a un centro privado-concertado (una de Ciencias y otra de Sociales), con un mismo docente de matemáticas, que llamaremos DOC1. Las otras dos son de un instituto público: una de Ciencias, con un profesor[i] DOC2, y otra de Sociales, con un docente DOC3. El número de alumnos por aula es bajo, participando todos los que siguen la asignatura. Nos referiremos a cada estudiante con una “E” seguida de un número: de E1 a E10 son los del aula de Ciencias del DOC1, de E11 a E21 los del aula de Sociales del mismo docente, de E22 a E30 los del aula del DOC2 y de E31 a E37 los del DOC3.

Introducción del CL en las cuatro aulas

El equipo investigador no dio directrices a los profesores sobre cómo desarrollar su docencia. Los tres introdujeron el CL de una función a través de una presentación expositiva personal (no basada en el libro de texto), de tipo intuitivo y combinando el discurso oral con la pizarra de tiza.

La presentación del DOC1 fue similar en sus dos aulas. El docente partió de la representación gráfica (RG) de una función y presentó el CL desarrollando seis ejemplos de límites en ella, explicando la notación simbólica y el resultado obtenido. La estructura y los “modelos” de ejemplos fueron iguales en ambas aulas (marcado carácter *ostensivo*, Lacasta y Wilhelmi, 2010). La introducción de límites en el infinito por DOC3 fue similar: siete ejemplos, pero con una RG diferente en cada uno, añadiendo la idea del límite infinito cuando se puede superar cualquier cota.

Para el CL en un punto hizo dos ejemplos en funciones dadas algebraicamente, explicó su cálculo y lo completó con su RG. Sólo el DOC2 introdujo una definición intuitiva del CL: “A lo que tienden las imágenes de la función, f(x), cuando la variable independiente, x, tiende a algo”, definiendo “tender” como “estar cada vez más cerca de” (confusión entre aproximación monótona y tendencia). Tras esto, explicó con detalle la notación simbólica asociada a los límites en un punto y en el infinito, y realizó cuatro ejemplos en funciones algebraicas, añadiendo la RG en dos de ellos.

Ningún docente usó funciones definidas numéricamente para introducir el CL ni fenomenología que le dote de sentido. El resto del tema se dedicó a un cálculo de límites sin referencia al significado del CL.

Análisis de los datos

Los datos principales son los cuadernos de los alumnos con las notas tomadas durante la presentación del CL, apoyados por información contextual: diarios de clase creados por los docentes (a petición nuestra), notas de campo y entrevistas a varios alumnos sobre su uso del cuaderno.

Sobre las anotaciones registradas por cada estudiante se ha desarrollado un *análisis de contenido* descriptivo-interpretativo (Cohen, Manion y Morrison, 2011), basado en las herramientas del marco teórico. Se ha dividido cada registro en *partes* de la presentación: cada ejemplo, definiciones generales del CL o explicaciones de la notación. Ilustramos este análisis a través de un fragmento del registro de E10 (ver Figura 1), con tres ejemplos de la presentación del DOC1.

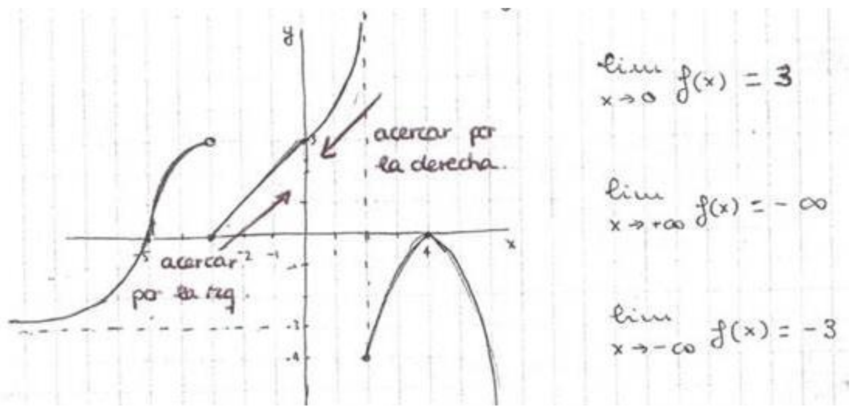

Figura 1. Registro de tres *partes* de la presentación (tres ejemplos) (E10)

Primero hemos estudiado qué *partes* deciden registrar y con qué sistemas de representación. Aquí, E10 toma la RG de la función, que es común a todos los ejemplos, la representación simbólica de los tres límites y sólo anota signos verbales en un límite (x→0).

Después analizamos qué aspectos de la estructura conceptual del CL quedan registrados en las notas del alumno, con la ayuda de las DG de la Tabla 1. En el caso de E10, no hay anotaciones relacionadas con la estructura conceptual en los límites cuando x→±∞, tan sólo la notación simbólica del CL y una marca en la RG sobre la existencia de asíntota en un caso. Sí las hay en el límite cuando x→0. Sus anotaciones verbales (“acercar por la izquierda/derecha”) muestran un proceso dinámico (PD) de aproximación en la x (3a. en DG de Cottrill et al., 1996), aunque sin especificar a qué valor ni mencionar a la variable dependiente (VD). Éstas se complementan con dos flechas en la RG que pudieran indicar una aproximación recorriendo la propia gráfica, sin explicitar la aproximación en cada variable ni su coordinación.

RESULTADOS

Partes de la presentación registradas y sistemas de representación

La Tabla 2 muestra el número de *partes* anotadas por alumno de la presentación de cada docente y el sistema de representación utilizado. En la primera fila se indica el total por docente.

Tabla 2. Número de *partes* (P) anotadas por estudiante (Est) y sistemas de representación: verbal (RV), simbólico (RS) o gráfico (RG)

Aula DOC1 Cie (6P: 6RV, 6RS, 1RG)		**Aula DOC1 Soc** (6P: 6RV, 6RS, 1RG)		**Aula DOC2 Cie** (7P: 7RV, 7RS, 2RG)		**Aula DOC3 Soc** (9P: 9RV, 9RS, 9RG)	
Est	P (RV/RS/RG)	Est	P (RV/RS/RG)	Est	P (RV/RS/RG)	Est	P (RV/RS/RG)
E1	6P (1 / 6 / 1)	E11	6P (1 / 6 / 1)	E22	1P (1 / 1 / 0)	E31	8P (0 / 8 / 6)
E2	6P (1 / 6 / 1)	E12	6P (4 / 6 / 1)	E23	0P	E32	0P
E3	6P (5 / 6 / 1)	E13	6P (6 / 6 / 1)	E24	6P (2 / 6 / 1)	E33	9P (2 / 8 / 9)
E4	6P (0 / 6 / 1)	E14	6P (4 / 6 / 1)	E25	3P (2 / 3 / 0)	E34	9P (1 / 8 / 9)
E5	6P (4 / 6 / 1)	E15	6P (1 / 6 / 0)	E26	7P (2 / 7 / 0)	E35	8P (0 / 8 / 7)
E6	6P (4 / 6 / 1)	E16	5P (4 / 5 / 1)	E27	5P (2 / 5 / 0)	E36	5P (1 / 5 / 3)
E7	6P (0 / 6 / 1)	E17	6P (0 / 6 / 1)	E28	0P	E37	9P (1 / 8 / 9)
E8	6P (5 / 6 / 1)	E18	6P (0 / 6 / 0)	E29	1P (1 / 1 / 0)		
E9	0P	E19	6P (2 / 6 / 1)	E30	5P (3 / 5 / 1)		
E10	6P (2 / 6 / 1)	E20	6P (0 / 6 / 1)				
		E21	6P (0 / 6 / 1)				
Tot	54P (22/54/9)	Tot	65P (22/65/9)	Tot	28P (13/28/2)	Tot	48P (5/45/43)

Cuatro alumnos no anotaron nada. De ellos, E23 indica en una entrevista su preferencia por estudiar la teoría a través del libro de texto (aunque difiera de la presentación del docente), lo que explica la ausencia.

En las tres aulas donde la introducción del CL se hizo sólo con ejemplos particulares (DOC3 y las dos del DOC1), la transcripción de estos ejemplos por los alumnos fue mucho mayor (media del 88’4%) que en el aula del DOC2 (33’3%), donde los ejemplos ilustraban la “definición” intuitiva previa. Así, cuando la presentación se basó exclusivamente en ejemplos “modelo” los alumnos han mostrado mayor necesidad de anotarlos todos. Los alumnos del DOC2 se comportan al revés: E22 y E29 sólo anotan la definición intuitiva del CL, E27 no la escribe pero recoge tres de los cuatro ejemplos.

El papel de las RG provoca diferencias en su registro. Éste es mucho mayor en funciones definidas gráficamente, al ser requisito indispensable para poder dotar de significado las notas tomadas (sólo E15 y E18 transcriben límites sin graficar la función, lo que les imposibilita esa dotación). Sin embargo, hay menos transcripciones cuando la función se presenta algebraicamente y la RG es un complemento (caso del DOC2), que parece no ser valorado por muchos alumnos.

Con respecto a las representaciones verbales, en el aula del DOC3 son muy reducidas y la mayoría se limitan a indicar que no existe el límite en $+\infty$ en una función oscilante. En las aulas del DOC1 existe un alto contraste entre alumnos sobre la cantidad de notas tomadas. Las notas verbales de los alumnos del DOC2 se centran en la definición intuitiva de CL y en los límites laterales en un punto.

Dos hechos destacables más: Sólo tres alumnos del DOC3 registran el ejemplo de límite que no existe en $+\infty$ (función oscilante), lo que manifiesta cierta resistencia en los alumnos a aceptar esta situación (anómala para ellos). Otro alumno, E36, registra los límites en $+\infty$ pero no en $-\infty$, lo que pudiera reflejar un comportamiento selectivo al transcribir los ejemplos (Arce, Conejo y Ortega, 2014).

Aspectos de la estructura conceptual del CL reflejados en las notas de los alumnos

Por motivos de espacio, del análisis sobre qué aspectos de la estructura conceptual del CL han reflejado los alumnos en sus registros, sólo detallamos los resultados para las anotaciones verbales. Hemos detectado cinco tipos de anotaciones que reflejan progresivamente un significado más cercano al CL, y un grupo adicional con otras anotaciones.

- Anotaciones que indican el *nombre* de elementos o *cómo se lee* una notación (ver Figura 2), pero sin mencionar su significado.

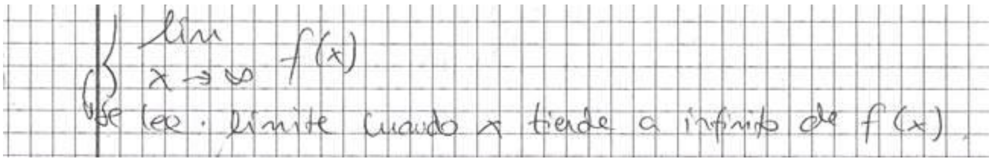

Figura 2. Nota con lectura de notación (E16)

- Anotaciones de *hechos concretos* o *convenios* sobre el límite sin explicar ni justificar. Ejemplo 1: la mera escritura de la no existencia de un límite (Figura 3). Ejemplo 2: “Un límite existe cuando es un número”, de E27, un convenio introducido por su docente.

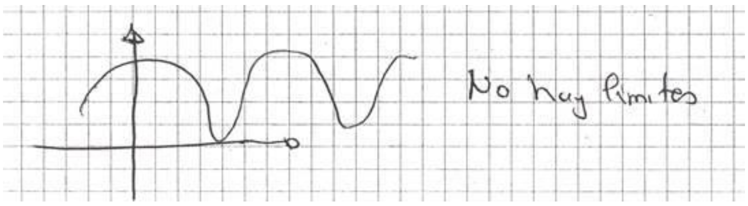

Figura 3. Indicación verbal, sin justificar, de la no existencia de límite en +∞ (E37)

- Anotaciones que aluden a un *PD tan sólo en la* x (3a. en DG de Cottrill et al., 1996; 2a. en Valls et al., 2011), sin referencias ni a la imagen ni a la VD. Algunas, de forma más o menos explícita, sólo reflejan un movimiento monótono en los valores de x (Figuras 4 y 1, aquí ligado a las flechas en la RG), otras sí que precisan a qué valor concreto “se acerca” (Figura 5).

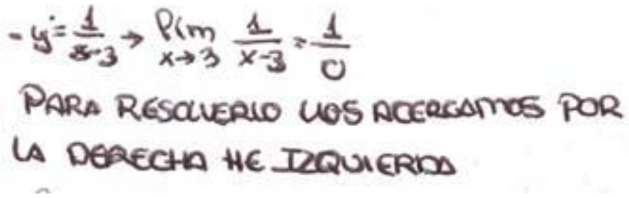

Figura 4. Anotación dinámica en “x” sin indicar a dónde “se acerca” (E27)

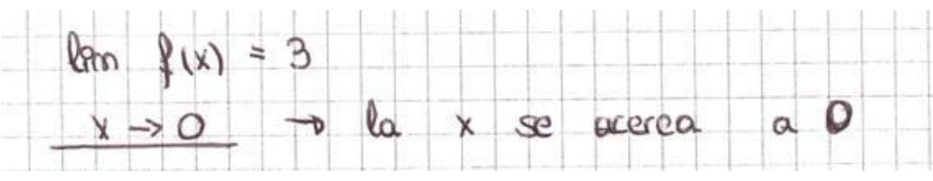

Figura 5. Anotación dinámica en “x” indicando dónde “se acerca” (E5)

- Anotaciones que aluden a un *PD tan sólo en la VD*, sin referencias a la variable independiente (3b. en DG de Cottrill et al., 1996; 2b. en Valls et al., 2011). Se detecta la misma diferencia que en el caso anterior. Destaca la nota de E33, que refleja la superación de cualquier cota en un límite infinito (más cercano al concepto de tendencia), pero sin mencionar los valores de x (Figura 6).

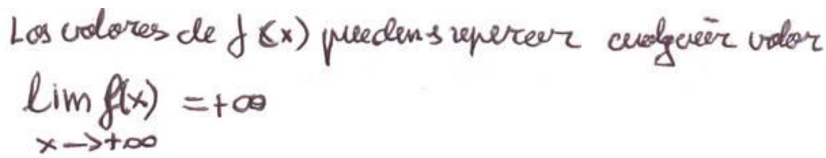
Los valores de f(x) pueden superar cualquier valor
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Figura 6. Idea registrada de superación de cualquier cota (E33)

- Anotaciones que aluden a un *PD en ambas variables*, mostrando incipientes coordinaciones entre variables (3c. en DG de Cottrill et al., 1996; 3. en Valls et al., 2011). Incluimos aquí las transcripciones de la definición intuitiva del CL de seis alumnos del DOC2, enfatizando los términos clave (subrayado, Figura 7). Sólo cuatro alumnos más han escrito notas verbales con este significado, aunque poco precisas, sin explicitar claramente las variables o a qué valor se "acercan". Dos ejemplos, en límites en $+\infty$, son: "Estas imágenes son cada vez más grandes según avanzas la x" (E16) o "Cuanto mayor es la x, más baja" (E6).

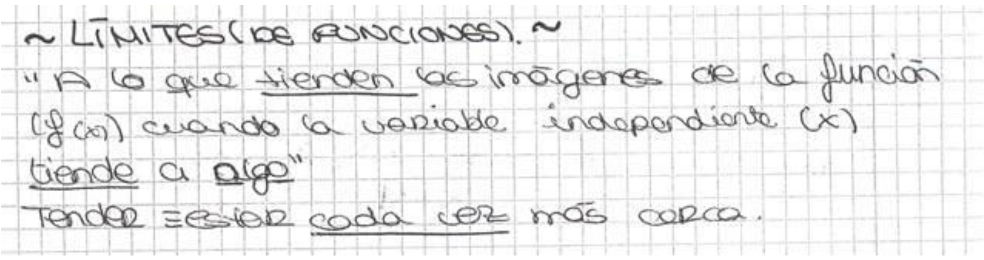
~ LÍMITES (DE FUNCIONES). ~
"A lo que tienden las imágenes de la función (f(x)) cuando la variable independiente (x) tiende a algo"
Tender = estar cada vez más cerca.

Figura 7. Transcripción de definición intuitiva del CL (E26)

- *Otras anotaciones* relacionadas con el significado del CL, como las que explican la no existencia de límite en un punto si no coinciden los límites laterales (alguna con justificación errónea, como la de E19: "No existe porque recorre dos funciones"). También hay una anotación importante de E16, aunque poco clara, que pretende indicar la no relación entre el límite y el valor de la función en un punto (Figura 8).

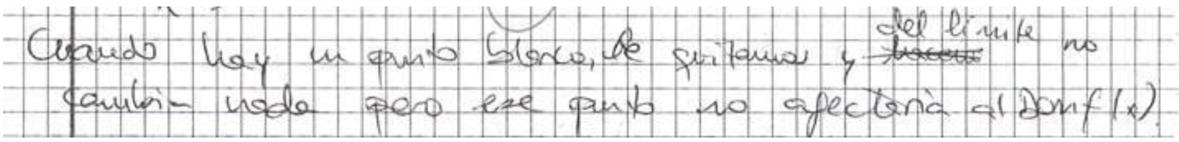
Cuando hay un punto blanco, de su tendencia y del límite no cambia nada pero ese punto no afectaría al Dom f(x)

Figura 8. Nota sobre la no influencia en el límite del valor de la función en el punto (E16)

Hay alguna nota verbal aislada más, con características concretas de ejemplos (como la existencia de un comportamiento asintótico) o aclaraciones personales.

El uso de la representación simbólica se reduce al registro de la notación del límite o de algún cálculo analítico en ejemplos, sin marcas que muestren aspectos de la estructura conceptual del CL. En las RG sí que existen algunas marcas, que podemos clasificar en: marcas que destacan elementos de la gráfica (punto donde se calcula el límite y/o sus coordenadas), trazado de asíntotas horizontales o verticales (si ha lugar, ver Figura 1) y flechas en la RG que inducen un "sentido de recorrido" (Figura 1). La RG que muestra más aspectos relacionados con la estructura conceptual del CL es la tomada por E37 en el $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (Figura 9). En ella, el alumno sitúa una cota "K" en el eje de ordenadas y marca su superación por la función: punto con imagen mayor y sus coordenadas. La RG deja entrever el significado de tendencia y una concepción métrica del CL, pero no se acompaña de anotaciones verbales o simbólicas.

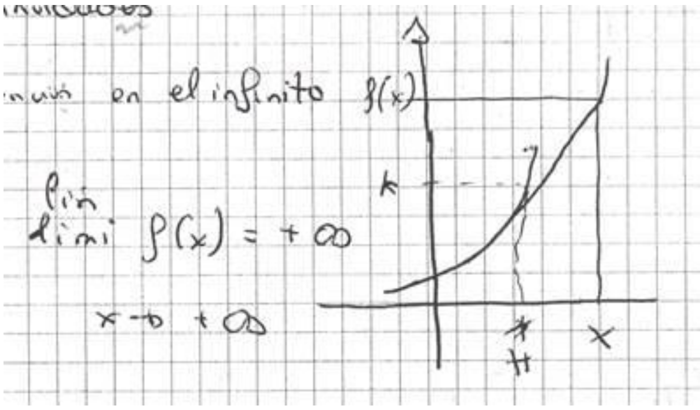

Figura 9. RG que refleja la superación de una cota (E37)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Sobre el primer objetivo, hemos detectado un porcentaje de transcripción de los ejemplos mucho mayor en las tres aulas con presentación *ostensiva* del CL, basada en el desarrollo de ejemplos “modelo” y sin definición general; frente al aula del DOC2, que comenzó enunciando una definición intuitiva. Los alumnos parecen juzgar como muy relevantes los ejemplos en la primera situación, lo que atribuimos a una mayor necesidad de fortalecer su *concepto imagen* del CL, con ejemplos que abarquen diferentes situaciones, ante la ausencia de un *concepto definición*.

La importancia y relevancia de las anotaciones verbales parece diferir mucho de unos alumnos a otros, puesto que hay muchas diferencias entre ellas. Este tipo de notas son las que, principalmente, han mostrado aspectos relacionados con la estructura conceptual del CL (segundo objetivo), frente a representaciones de otro tipo. El análisis y clasificación en diferentes niveles de las notas verbales registradas ha permitido detectar un hecho no presente en las DG tomadas como referencia: la existencia de anotaciones que manifiestan tan sólo un movimiento en una o en las dos variables, pero sin explicitar el valor de aproximación (mayor énfasis en el proceso, algo ya detectado por Kidron, 2011). Además, bastantes anotaciones verbales sólo aluden al proceso dinámico de aproximación en una de las dos variables. Muy pocas coordinan ambos procesos de aproximación. La ausencia de representaciones numéricas de funciones al introducir el CL en las cuatro aulas puede justificar este hecho, al ser éstas facilitadoras de la relación entre las dos variables y la coordinación de las aproximaciones (Valls et al., 2011).

Sobre el tercer objetivo, la falta de anotaciones sobre el doble proceso de aproximación en dominio y rango, y su coordinación, puede provocar un desarrollo insuficiente de la concepción dinámica del CL, que dificulte el desarrollo de aprendizajes posteriores, como el paso a la concepción métrica (Cottrill et al., 1996) y la necesidad de ésta. Como muestra, sólo el DOC3 ha presentado la idea de superación de cualquier cota en el eje de ordenadas en un límite infinito, aspecto que únicamente es tomado por dos alumnos (E33 y E37).

El análisis de las notas de los alumnos no nos da información suficiente sobre su comprensión del CL, pero sí pueden revelar errores de comprensión (como la anterior nota verbal de E19). No obstante, sus decisiones sobre qué aspectos registrar (o no) nos permiten conjeturar qué idea del CL están plasmando y pueden inferir los alumnos de sus notas. Por ejemplo, la tercera parte de los alumnos no han considerado relevante registrar ningún aspecto asociado a la estructura conceptual del CL, pero sí que han enfatizado el cálculo del límite en funciones expresadas algebraicamente o el punto donde se calcula el límite o sus coordenadas en las RG. La combinación de ambas circunstancias puede suponer un obstáculo para el aprendizaje del CL. Registros tan escuetos sólo permitirían inducir una idea muy simple, aunque errónea y frecuente (Przenioslo, 2004), del CL: la combinación de la acción de sustituir la función en el punto (si existe) con la de recorrer la gráfica para obtener el límite cuando dicho valor no existe o hay un salto.

Todos estos hechos son de especial importancia en un contexto como el aquí presentado, donde los alumnos señalan el cuaderno y sus notas como su principal instrumento de estudio, argumentando que contiene "lo que más se acerca a lo que el profesor quiere". Así, la responsabilidad del alumno al tomar notas es alta. Las diferencias evidenciadas en el registro de anotaciones relacionadas con el significado del CL en una presentación intuitiva y su nivel de desarrollo pueden condicionar fuertemente el *concepto imagen* que de él desarrolla el alumno.

Agradecimiento

El primer autor es becario FPU (AP2012-2241, MECD).

Referencias

Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2014). ¿Cómo transcriben los alumnos en sus cuadernos las reglas y técnicas de derivación? Un estudio en tres aulas de Bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 137-146). Salamanca: SEIEM.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME, 12*(1), 145-168.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30*, 67-82.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2014). Marco teórico y metodológico para el estudio del límite. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 19-32). Salamanca: SEIEM.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres: Routledge.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic. D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2013). Concept of finite limit of a function at a point: meanings and specific terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 699-710.

Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(6), 1261-1279.

Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2010). Deslizamiento metadidáctico en profesores de secundaria. El caso del límite de funciones. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 379-394). Lleida: SEIEM.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid: Morata.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 103-132.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM, 1*(1), 39-63.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 325-338.

---

[i] No se considera la variable género: uso genérico del masculino.