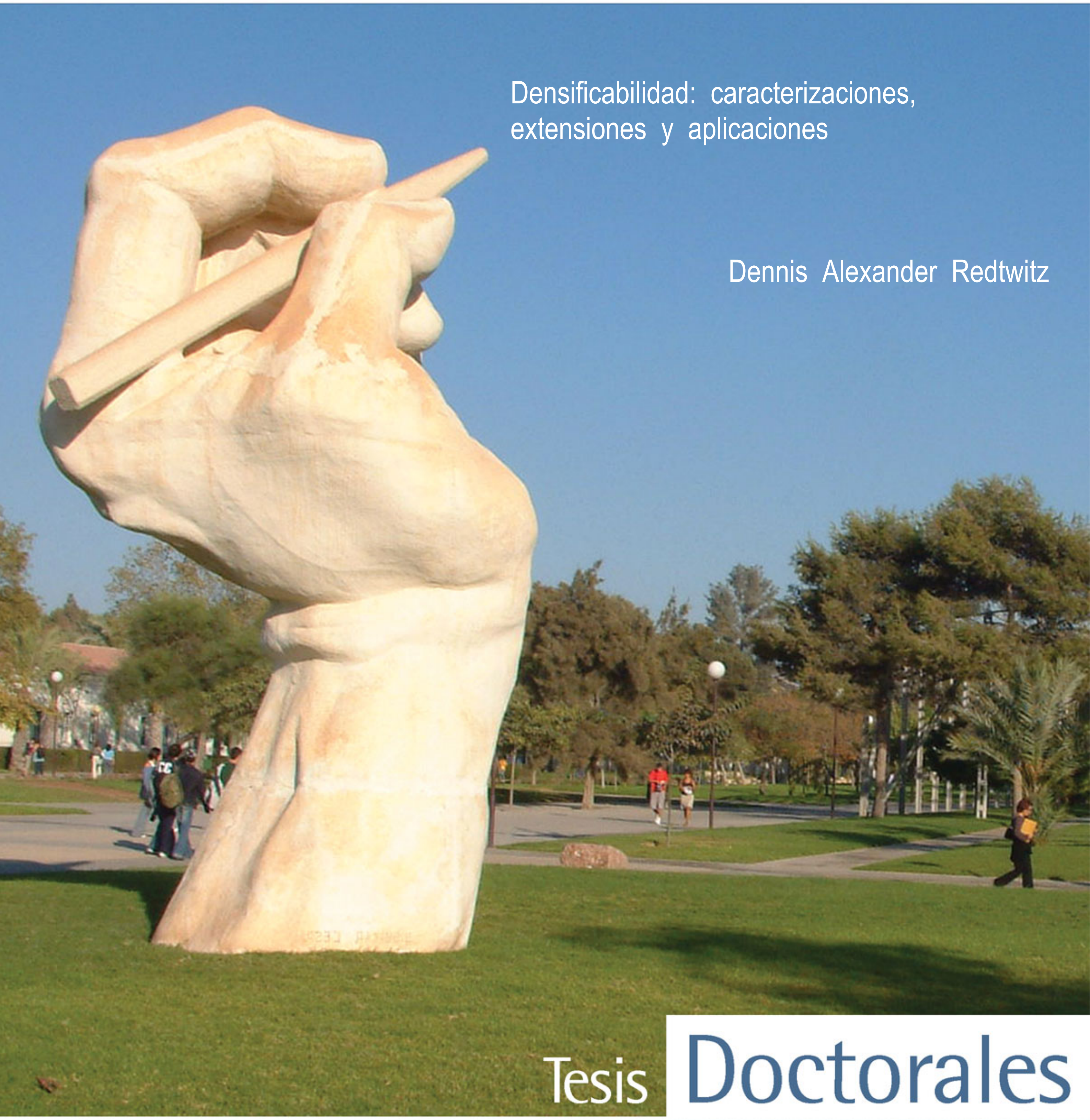
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Densificabilidad: caracterizaciones, extensiones y aplicaciones

Dennis Alexander Redtwitz

Tesis Doctorales
UNIVERSIDAD de ALICANTE

www.eltallerdigital.com

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Densificabilidad: caracterizaciones, extensiones y aplicaciones

Dennis Alexander Redtwitz

Tesis presentada al Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Alicante como requisito final para la obtención del grado de Doctor en Matemáticas y Aplicaciones Científico-Técnicas

Abril 2015

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Densificabilidad: caracterizaciones, extensiones y aplicaciones

Dennis Alexander Redtwitz

Director de Tesis Doctoral
Prof. Dr. Gaspar Mora Martínez

Abril 2015

a Catalina y Viktoria

al Profesor Gaspar: Gracias por su ayuda, su calidez, su optimismo y su paciencia.

a mi esposa Catalina: Gracias por tu amor, tu confianza y tus palabras de aliento.

a mi hija Viktoria: Gracias por tu sonrisa de cada día, tus abrazos y tu alegría.

a mis amigos Christiane y Bernd: Gracias por cuidarme como a un hijo.

a mi padre Burkhard: Gracias por enseñarme a ser independiente.

a mi madre Angelika: Gracias por motivar mi deseo de aprender.

a mis abuelos Gerd y Ruth: Gracias por su apoyo constante.

Resumen

En este trabajo, introducimos los conjuntos densificables, una nueva clase de subconjuntos de espacios métricos en los que problemas de optimización global e integración múltiple se pueden reducir a problemas unidimensionales, resolviendo el mismo problema sobre ciertas curvas (llamadas curvas alfa-densas).

Para realizar el estudio de los conjuntos densificables en espacios métricos, introducimos las nociones de densificador, pseudo-densificabilidad, aproximabilidad por caminos y aproximabilidad numerable por caminos, que proporcionan propiedades topológicas y métricas de dichos conjuntos. Estos conceptos han permitido caracterizar la clase de subconjuntos densificables de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío.

Extendemos el concepto de densificabilidad a espacios topológicos en general, introduciendo las nociones de densificabilidad simple, condicional, secuencial y topológica. De esta manera, problemas de optimización global pueden ser simplificados aun en ausencia de una métrica. Además, probamos que una de estas extensiones es óptima, en el sentido que ninguna condición más débil permite la mencionada simplificación utilizando una sucesión prefijada de curvas.

Asimismo, comparamos la densificabilidad topológica con la extensión de la densificabilidad ya existente a subconjuntos de espacios vectoriales topológicos. Introducimos la noción de densificabilidad lineal, que combina ventajas de ambos conceptos.

Finalmente, presentamos una aplicación de la teoría de curvas alfa-densas al cálculo de la dimensión logarítmica.

Índice general

Introducción

En 1878, G. Cantor demostró un resultado sorprendente: el intervalo y el cuadrado unidad poseen el mismo cardinal, es decir, existe una biyección entre ellos [1].

Además, G. Peano descubrió en 1890 una aplicación continua del intervalo sobre el cuadrado [20], de manera que $[0,1]^2$ es una curva (imagen continua del intervalo unidad).

Más adelante, en 1913, H. Hahn y S. Mazurkiewicz demostraron independientemente que un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es una curva si y sólo si el espacio es un continuo de Peano (compacto, conexo y localmente conexo) y metrizable [6, 10, 21].

Esto da lugar a una amplia variedad de curvas, como, por ejemplo, los hipercubos, las bolas cerradas y las esferas unitarias

$$\mathcal{I}^n := \prod_1^n [0,1]\,, B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\} \text{ y } S^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\right\}.$$

En teoría, esto simplifica los problemas de optimización global en el sentido que si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un continuo de Peano y

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua, en vez de considerar el problema

$$\text{mín}\{f(x_1, \cdots, x_n) : (x_1, \cdots, x_n) \in X\}$$

puede elegirse una parametrización de X, es decir, una sobreyección continua

$$\gamma : \mathcal{I}^1 \longrightarrow X$$

y considerar el problema unidimensional

$$\text{mín}\{(f \circ \gamma)(t) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Esta reducción de variables posee dos inconvenientes: por su naturaleza, sólo es aplicable si X es un continuo de Peano y que la parametrización, en general, no reúne ciertas propiedades analíticas manejables.

Si γ es cualquier parametrización del cuadrado unidad, una aplicación del Teorema de Netto [19] muestra que γ no puede ser inyectiva.

Además, M. Morayne probó en 1980 que $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ no puede ser diferenciable y que si para cada $t \in \mathcal{I}^1$ al menos una de las funciones coordenadas $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ tiene derivada, la hipótesis del continuo es cierta [18], lo cual imposibilita la existencia de un ejemplo constructivo de una función con esta propiedad.

En 1997, G. Mora y Y. Cherruault generalizaron el concepto de continuo de Peano, introduciendo el concepto de curva α-densa [15]. Una curva Γ_α en un espacio métrico X es α-densa si cualquier punto arbitrario de X se encuentra a una distancia no superior a α de algún punto de Γ_α.

Si X posee curvas α-densas para cualquier α positivo y arbitrariamente pequeño, podemos elegir una curva Γ_n, $\frac{1}{n}$-densa en X, para cada $n \in \mathbb{N}$ y transformar el problema de optimización mencionado en

$$\text{mín}\left\{f(x) : x \in \Gamma_n \text{ y } n \in \mathbb{N}\right\}$$

que es equivalente a la sucesión de problemas unidimensionales

$$\text{mín}\left\{(f \circ \gamma_n)(t) : 0 \leq t \leq 1\right\},$$

donde cada γ_n es una parametrización arbitraria de Γ_n.

Los espacios métricos que reúnen la propiedad susodicha pasaron a llamarse densificables [16].

Además de la ventaja consistente en que la clase de los espacios métricos densificables contiene propiamente a la de los continuos de Peano, también representan una ventaja las parametrizaciones de las curvas α-densas, en general, más fáciles de obtener y con propiedades analíticas más manejables.

En el caso del hipercubo unidad $\mathcal{I}^n$, pueden utilizarse gráficas de funciones trigonométricas o incluso polinomios de Chebyshev [12], de manera que cada parametrización es inyectiva y de clase C^ω.

Esta es sólo una de las tantas aplicaciones posibles de las curvas α-densas en espacios densificables. Por ejemplo, curvas α-densas se pueden utilizar para reducir el número de variables en problemas de integración [13, 17] y en desigualdades [14].

Claramente, para poder aplicar cualquiera de estos métodos a un problema particular, debemos saber de antemano si el espacio en cuestión es densificable.

Nuestros objetivos principales son:

- Caracterizar los espacios métricos densificables mediante propiedades topológicas y métricas intrínsecas, pretendiendo obtener una caracterización completa como la obtuvieron H. Hahn y S. Mazurkiewicz para los continuos de Peano.

- Extender el concepto de densificabilidad a una clase más amplia de espacios, pretendiendo obtener una definición de densificabilidad en espacios topológicos en general.

- Encontrar nuevos tipos de problemas multidimensionales que puedan ser simplificados utilizando curvas alfa-densas, como el cálculo de la dimensión logarítmica.

Capítulo 1

Conceptos previos

1.1. Compacidad, separación y separabilidad

Definición 1.1.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **compacto** si y sólo si todo recubrimiento mediante abiertos de X admite un subrecubrimiento finito.*

Teorema 1.1.2 (Tychonoff) *El producto de espacios topológicos compactos es compacto.*

Demostración. Ver [9, cap. 5, Teorema 13]. ■

Definición 1.1.3 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **de Hausdorff** si y sólo si para cada par de puntos distintos $a, b \in X$, existen abiertos disjuntos U y V en X tales que*

$$a \in U \text{ y } b \in V.$$

Definición 1.1.4 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **regular** si y sólo si para cada cerrado B en X y cada $a \in B^{\mathsf{c}}$, existen abiertos disjuntos U y V en X tales que*

$$a \in U \text{ y } B \subset V.$$

Notación 1.1.5 *$\mathcal{I}$ simbolizará el intervalo $[0, 1]$[†].*

Notación 1.1.6 *$\mathcal{C}(X, Y)$ simbolizará la familia de aplicaciones continuas del espacio topológico (X, τ_X) al espacio topológico (Y, τ_Y).*

Escribiremos $\mathcal{C}(X)$ en vez de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Notación 1.1.7 *Si f es una función, A es un subconjunto de su dominio y B es un subconjunto de su codominio,*

$$f[A] \text{ y } f^{-1}[B]$$

simbolizarán, respectivamente, la imagen de A y la preimagen de B por f.

Definición 1.1.8 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **completamente regular** si y sólo si para cada cerrado B en X y cada $a \in B^{\mathsf{c}}$, existe*

$$f \in \mathcal{C}(X, \mathcal{I}) \text{ tal que } f(a) = 0 \text{ y } f[B] = \{1\}.$$

Definición 1.1.9 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **de Tychonoff** si y sólo si es de Hausdorff y completamente regular.*

[†]Si no especificamos lo contrario, consideraremos todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ siempre con la métrica euclídea y la topología inducida por ésta.

Definición 1.1.10 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **normal** si y sólo si para cada par de cerrados disjuntos A y B en X, existen abiertos disjuntos U y V en X tales que*

$$A \subset U \text{ y } B \subset V.$$

Lema 1.1.11 (Urysohn) *Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff. Los enunciados a continuación son equivalentes.*

(1) *X es normal.*

(2) *Para cada par de cerrados disjuntos y no vacíos $A, B \subset X$, existe*

$$f \in \mathcal{C}(X, \mathcal{I}) \text{ tal que } f[A] = \{0\} \text{ y } f[B] = \{1\}.$$

Demostración. Ver [2, cap. VII, Teorema 4.1]. ■

Notación 1.1.12 $\mathfrak{c}$ *simbolizará el cardinal de $\mathbb{R}$.*

Teorema 1.1.13 *Sean L un conjunto y $\langle (X_\lambda, \tau_\lambda) \rangle_{\lambda \in L}$ una familia indexada de espacios topológicos.*

El espacio producto

$$\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$$

es separable si sólo si cada X_λ es separable y

$$\text{card}\, \{\lambda \in L : \text{card}\, X_\lambda > 1\} \leq \mathfrak{c}.$$

Demostración. Ver [2, cap. VIII, Teorema 7.2]. ■

Definición 1.1.14 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **completamente separable** si y sólo si la topología τ posee una base numerable.*

Definición 1.1.15 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **de Lindelöf** si y sólo si todo recubrimiento mediante abiertos de X admite un subrecubrimiento numerable.*

Definición 1.1.16 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$.*

*La **clausura secuencial** de A es el conjunto $\dddot{A}$ caracterizado por*

$$y \in \dddot{A} \text{ si y sólo si } x_n \longrightarrow y \text{ para alguna sucesión } \langle x_n \rangle \text{ en } A.$$

Definición 1.1.17 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$.*

*A es **secuencialmente cerrado** si y sólo si*

$$\dddot{A} = A.$$

Definición 1.1.18 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $D \subset X$.*

*D es **secuencialmente denso** en X si y sólo si*

$$\dddot{D} = X.$$

Definición 1.1.19 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **secuencialmente separable** si y sólo si posee un subconjunto numerable y secuencialmente denso en X.*

Definición 1.1.20 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **de Fréchet-Urysohn** si y sólo si*

$$\dddot{A} = \overline{A} \text{ para cada } A \subset X.$$

1.2. Espacios métricos y vectoriales topológicos

Notación 1.2.1 *En un espacio métrico* (X, d)*,*

$$B_d(a, r) \text{ y } \overline{B}_d(a, r)$$

simbolizarán, respectivamente, la bola abierta y la cerrada de centro a *y radio* r*.*

Omitiremos d siempre que se pueda deducir del contexto.

Definición 1.2.2 *Sea* (X, d) *un espacio métrico.*

X *es* ***precompacto*** *(y* d *es* ***precompacta****) si y sólo si para cada* $\varepsilon > 0$*, existen*

$$c_1, \cdots, c_n \in X \text{ tales que } B(c_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(c_n, \varepsilon) = X.$$

Notación 1.2.3 $\mathbb{N}$ *simbolizará el conjunto de los números naturales, es decir, el conjunto*

$$\{1, 2, \cdots\}.$$

Proposición 1.2.4 *Toda sucesión en un espacio precompacto posee una subsucesión de Cauchy.*

Demostración. Sean (X, d) un espacio precompacto y $\langle x_n \rangle$ una sucesión en X.

Sean $B_0 \coloneqq X$ y $d_0 \coloneqq d$. Una vez definidos

$$(B_0, d_0), \cdots, (B_n, d_n),$$

definamos (B_{n+1}, d_{n+1}) como sigue:

Como (B_n, d_n) es precompacto (pues es un subespacio de (X, d)), existe una familia finita de d_n-bolas abiertas de radio $(n+1)^{-1}$ que recubre a B_n.

Al menos una de estas bolas debe contener infinitos términos de la sucesión $\langle x_n \rangle$; sea B_{n+1} una de ellas, y sea d_{n+1} la restricción de d_n a $B_{n+1} \times B_{n+1}$.

Fijemos

$$n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_{n_1} \in B_1$$

y, una vez definidos

$$n_1, \cdots, n_k,$$

elijamos

$$n_{k+1} \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_{n_{k+1}} \in B_{k+1} \setminus \{x_1, \cdots, x_{n_k}\}.$$

Como cada B_k contiene infinitos términos de la sucesión $\langle x_n \rangle$, la subsucesión $\langle x_{n_k} \rangle$ está bien definida. Afirmamos que esta subsucesión es de Cauchy. En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$ dado y fijemos

$$k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n_{k_0} > 2\varepsilon^{-1}.$$

Si $k, j > k_0$, tenemos que

$$x_{n_k}, x_{n_j} \in B_k \cup B_j \subset B_{k_0},$$

de manera que

$$d\left(x_{n_k}, x_{n_j}\right) \leq d\left(x_{n_k}, c\right) + d\left(c, x_{n_j}\right) < 2n_{k_0}^{-1} < \varepsilon,$$

donde c es el centro de la bola $B_{n_{k_0}}$, cuyo radio es $n_{k_0}^{-1}$.

Esto prueba que $\langle x_{n_k} \rangle$ es de Cauchy, como hemos afirmado. ■

Proposición 1.2.5 *Sean $\langle (X_n, d_n) \rangle$ una sucesión de espacios métricos,*

$$X := \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

τ la topología producto en X y

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

la aplicación definida por

$$d(f, g) = \sup_{n \in \mathbb{N}} d_n(f(n), g(n)).$$

(1) *Si d es acotada, es una métrica en X.*

(2) *d induce la topología τ si y sólo si*

$$\sup_{x,y \in X_n} d_n(x, y) \longrightarrow 0.$$

Demostración. Ver [2, cap. IX, Teorema 7.2]. ■

Notación 1.2.6 *Y^X simbolizará la familia de aplicaciones del conjunto X al espacio topológico (Y, τ_Y), dotada de la topología producto.*

Ejemplo 1.2.7 (Cubo de Hilbert) *$\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$ es metrizable y la métrica $\mathfrak{d}$† definida por*

$$\mathfrak{d}(f, g) := \sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} |f(n) - g(n)|$$

induce su topología.

Demostración. Basta observar que

$$(x, y) \mapsto n^{-1} |x - y|$$

induce la topología de $\mathcal{I}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y aplicar la Proposición 1.2.5. ■

Teorema 1.2.8 (Metrización de Urysohn) *Sea (X, τ) un espacio topológico. Los enunciados a continuación son equivalentes.*

†Utilizaremos el símbolo $\mathfrak{d}$ para refirnos a esta métrica o su restricción a subespacios de $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$.

(1) *X es de Hausdorff, regular y completamente separable.*

(2) *X es metrizable y separable.*

(3) *X es homeomorfo a un subespacio de $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Ver [2, cap. IX, Corolario 9.2]. ■

Corolario 1.2.9 *Sea (X, τ) un espacio metrizable.*

Si X es separable, existe una métrica precompacta d que induce la topología τ.

Demostración. Como X es metrizable y separable, por el Teorema de Metrización de Urysohn (1.2.8), existe un homeomorfismo

$$\varphi : X \to Y,$$

donde Y es un subespacio de $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$.

Escojamos una métrica de $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$ que, como $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$ es compacto, es necesariamente precompacta, y sea ρ su restricción a Y.

Definamos

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

mediante

$$d(x, y) = \rho(\varphi(x), \varphi(y)),$$

de manera que (X, d) y (Y, ρ) son isomorfos. Así, d es una métrica precompacta que induce la topología de X.

Esto prueba el enunciado. ■

Corolario 1.2.10 *Sea (X, τ) un espacio metrizable. Los enunciados a continuación son equivalentes.*

(1) *X es compacto.*

(2) *Toda métrica en X que induce τ es precompacta.*

(3) *X es separable y toda métrica en X que induce τ es acotada.*

Demostración. Como toda métrica en un espacio compacto es precompacta,

$$(1) \longrightarrow (2).$$

Para probar que

$$(2) \longrightarrow (3),$$

basta observar que toda métrica precompacta es acotada y que todo espacio precompacto es separable.

Para probar que

$$(3) \longrightarrow (1),$$

supongamos, por reducción al absurdo, que X sea separable pero no compacto y tal que toda métrica que induce la topología sea acotada.

Siendo X metrizable y separable, por el Teorema de Metrización de Urysohn (1.2.8), existe un homeomorfismo

$$\varphi : X \to Y \text{ donde } Y \subset \mathcal{I}^{\mathbb{N}}.$$

Como X no es compacto, Y no puede ser compacto. Siendo $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$ compacto, Y no puede ser cerrado en $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$.

Luego, existen una sucesión $\langle a_n \rangle$ en Y y $a \in I^{\mathbb{N}} \setminus Y$ tales que

$$a_n \longrightarrow a.$$

Sea d la restricción de una métrica de $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$ a Y y definamos

$$\rho : Y \times Y \to \mathbb{R}$$

mediante

$$\rho(x, y) = d(x, y) + \left| d(x, a)^{-1} - d(y, a)^{-1} \right|.$$

Como $a \notin Y$, ρ está bien definida. Es inmediato verificar que ρ es una métrica.

Sean

$$b \in Y \text{ y } \varepsilon > 0$$

arbitrarios.

Claramente,

$$d \leq \rho,$$

de manera que

$$B_\rho(b, \varepsilon) \subset B_d(b, \varepsilon).$$

Por otra parte, por la continuidad de la distancia, tenemos que

$$d(y, a) = \lim_{z \to a} d(y, z)$$

y que la función

$$f_b : Y \to \mathbb{R}$$

definida por

$$f_b(y) = \rho(b, y)$$

es d-continua y tal que

$$f_b(b) = 0 \text{ y } f_b(a_n) \longrightarrow +\infty.$$

En particular, esto implica que existe $\delta > 0$ tal que

$$f_b(y) < \varepsilon \text{ siempre que } d(y, b) < \delta,$$

de manera que

$$B_d(b, \delta) \subset B_\rho(b, \varepsilon).$$

En síntesis, d y ρ son equivalentes y ρ induce la topología de Y.

Definamos
$$\sigma : X \times X \to \mathbb{R}$$
por
$$\sigma(x, y) = \rho(\varphi(x), \varphi(y)).$$
Claramente, (X, σ) e (Y, ρ) son isomorfos, de manera que σ induce la topología de X.

Sin embargo,
$$\rho\left(a_1, \varphi^{-1}(a_n)\right) \longrightarrow +\infty,$$
lo cual constituye una contradicción, pues ρ es acotada.

Esto prueba el enunciado. ■

Definición 1.2.11 *Sea $(X, +, \cdot)$ un espacio vectorial*[†] *y τ una topología en X.*

$(X, +, \cdot, \tau)$ es un ***espacio vectorial topológico*** *si y sólo si $+$ y $\cdot$ son continuas.*

Para los lectores no familiarizados con espacios vectoriales topológicos, recomendamos [22].

Definición 1.2.12 *Sea $(X, +, \cdot, \tau)$ un espacio vectorial topológico e $Y \subset X$.*

Y es ***precompacto*** *si y sólo si para cada vecindad V del vector 0 existe un conjunto finito F tal que*
$$Y \subset F + V.$$

Proposición 1.2.13 *La imagen de un subconjunto precompacto de un espacio vectorial topológico por una función lineal continua, es precompacto.*

Demostración. Ver [22, cap. 1, 5.4]. ■

Proposición 1.2.14 *Sean L un conjunto, $\langle (X_\lambda, +, \cdot, \tau_\lambda) \rangle_{\lambda \in L}$ una familia indexada de espacios topológicos, π_λ la proyección del espacio producto*
$$X := \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$$
sobre su λ-ésimo factor e $Y \subset X$.

Y es precompacto si y sólo si cada $\pi_\lambda[Y]$ es precompacto.

Demostración. Para probar la primera implicación, basta observar que cada π_λ es lineal y continua, y aplicar la Proposición 1.2.13.

Para probar la implicación inversa, supongamos que cada
$$Z_\lambda := \pi_\lambda[Y]$$
sea precompacto.

[†] Sólo consideraremos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Sea V una vecindad del vector 0 en X.

Entonces existen

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_j \in L \text{ tales que } \prod_{\lambda \in L} U_\lambda \subset V \text{ y } U_\lambda = X_\lambda \text{ si } \lambda \notin \{\lambda_1, \cdots \lambda_j\}$$

y cada U_λ es abierto en X_λ.

Si $i \in \{1, \cdots, j\}$, como Z_{λ_i} es precompacto, existe un conjunto finito

$$F_{\lambda_i} \subset Z_{\lambda_i} \text{ tal que } Z_{\lambda_i} \subset F_{\lambda_i} + U_{\lambda_i}.$$

Si $\lambda \notin \{\lambda_1, \cdots \lambda_j\}$, definamos arbitrariamente

$$a_\lambda \in Z_\lambda \text{ y } F_\lambda \coloneqq \{a_\lambda\},$$

de manera que

$$Z_\lambda \subset X_\lambda = a + X_\lambda = F_\lambda + U_\lambda.$$

Sea

$$F \coloneqq \prod_{\lambda \in L} F_\lambda.$$

Es claro que F es finito.

Además,

$$Y \subset \prod_{\lambda \in L} Z_\lambda \subset \prod_{\lambda \in L} (F_\lambda + U_\lambda) = \left(\prod_{\lambda \in L} F_\lambda \right) + \left(\prod_{\lambda \in L} U_\lambda \right) \subset F + V.$$

Luego, Y es subconjunto de un conjunto precompacto y, por tanto, precompacto.

Esto prueba el enunciado. ■

1.3. Curvas, continuos y conexión por caminos

Definición 1.3.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es una **curva** si y sólo si existe una sobreyección $\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{I}, X)$.*

*Diremos que la aplicación γ es un **camino** y que es una **parametrización** de la curva X.*

Definimos ahora el concepto de continuo de Peano que nos facilitará la comprensión de los conceptos desde un punto de vista histórico.

Definición 1.3.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **localmente conexo** si y sólo si τ admite una base de abiertos conexos.*

Definición 1.3.3 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es un **continuo de Cantor** si y sólo si es de Hausdorff, compacto y conexo.*

Definición 1.3.4 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es un **continuo de Peano** si y sólo si es un continuo de Cantor y localmente conexo.*

Esto nos permite enunciar el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz, que es una de las motivaciones más importantes de esta tesis.

Teorema 1.3.5 (Hahn-Mazurkiewicz) *Un espacio no vacío de Hausdorff es una curva si y sólo si es metrizable y un continuo de Peano.*

Demostración. Ver [8, Teorema 3.30]. ■

La demostración para el caso particular de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ se puede consultar en [6], [10] y [21].

Proposición 1.3.6 *El producto de una cantidad numerable de curvas es una curva.*

Demostración. Como cada curva es metrizable, por la Proposición 1.2.5, su producto es metrizable.

Como cada curva es compacta, por el Teorema de Tychonoff (1.1.2), su producto es compacto.

Finalmente, como cada curva es conexa y localmente conexa, por [2, cap. V, Teorema 1.7] y [2, cap. V, 4.3], su producto es conexo y localmente conexo.

El resultado se sigue del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz (1.3.5). ■

Definición 1.3.7 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **conexo por caminos** si y sólo si para cada par de puntos $a, b \in X$, existe un camino γ del punto a al punto b en X, es decir, un camino γ tal que*

$$\gamma(0) = a \text{ y } \gamma(1) = b.$$

Proposición 1.3.8 *El producto de espacios topológicos es conexo por caminos si y sólo si cada factor es conexo por caminos.*

Demostración. Sean L un conjunto, $\langle (X_\lambda, \tau_\lambda) \rangle_{\lambda \in L}$ una familia indexada de espacios topológicos y π_λ la proyección del espacio producto

$$X \coloneqq \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$$

sobre su λ-ésimo factor.

Basta observar que γ es un camino de $\langle a_\lambda \rangle_{\lambda \in L}$ a $\langle b_\lambda \rangle_{\lambda \in L}$ en X si y sólo si cada $\pi_\lambda \circ \gamma$ es un camino de a_λ a b_λ en X_λ. ■

Notación 1.3.9 $\mathcal{A}X$ *simbolizará la familia de componentes conexas por caminos del espacio topológico* (X, τ).

Notación 1.3.10 $\lfloor x \rfloor$ *denotará la parte entera del número real* x.

Notación 1.3.11 *Si* X *es subconjunto de un espacio vectorial,* X^* *simbolizará el conjunto* $X \setminus \{0\}$.

A menudo, necesitaremos de una curva que pase por una cantidad finita o infinita numerable de puntos prefijados de un espacio conexo por caminos. Bajo esta consideración, presentamos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.12 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico conexo por caminos.*

(1) *Si*

$$\mathcal{F} \coloneqq \{x_1, \cdots, x_n\} \subset X,$$

existe una curva Γ *en* X *tal que* $\mathcal{F} \subset \Gamma$.

(2) *Si*

$$\mathcal{G} \coloneqq \{x_1, x_2, \cdots\} \subset X,$$

existe

$$\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{I}^*, X) \text{ tal que } \mathcal{G} \subset \gamma[\mathcal{I}^*].$$

Demostración.

(1) Como X es conexo por caminos, para cada

$$k \in \{1, \cdots, n-1\},$$

existe

$$\gamma_k \in \mathcal{C}(\mathcal{I}, X) \text{ tal que } \gamma_k(0) = x_k \text{ y } \gamma_k(1) = x_{k+1}.$$

Si definimos

$$\gamma : \mathcal{I} \to X$$

por

$$\gamma(t) = \gamma_{\lfloor nt \rfloor + 1}(nt - \lfloor nt \rfloor),$$

es claro que

$$\Gamma \coloneqq \gamma[\mathcal{I}]$$

satisface las condiciones del enunciado.

(2) Como X es conexo por caminos, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una aplicación

$$\gamma_n \in \mathcal{C}(\mathcal{I}, X) \text{ tal que } \gamma_n(0) = x_n \text{ y } \gamma_n(1) = x_{n+1}.$$

De nuevo, si definimos

$$\gamma : \mathcal{I}^* \to X$$

por

$$\gamma(t) = \gamma_{\lfloor t^{-1} \rfloor}\left(t^{-1} - \lfloor t^{-1} \rfloor\right),$$

es claro que γ satisface las condiciones del enunciado. ■

Teorema 1.3.13 (Sierpiński) *Sean (X, τ) un continuo de Cantor y $\mathcal{F}$ un recubrimiento numerable mediante cerrados de X.*

Si los conjuntos de $\mathcal{F}$ son dos a dos disjuntos, a lo sumo uno de ellos es no vacío.

Demostración. Ver [3, Teorema 6.1.27]. ■

La demostración para el caso particular de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ se puede consultar en [23].

Corolario 1.3.14 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia numerable de subconjuntos conexos por caminos, cerrados de X.*

Si $\mathcal{F}$ es una partición de X, se tiene que $\mathcal{F} = \mathcal{A}X$.

Demostración. Sólo falta comprobar que toda curva en X está contenida en un conjunto de $\mathcal{F}$. En efecto:

Sea γ un camino en X.

Como γ es continua y los conjuntos de son $\mathcal{F}$ son cerrados y dos a dos disjuntos, tenemos que

$$\mathcal{G} := \left\{\gamma^{-1}[Y] : Y \in \mathcal{F}\right\}$$

es un recubrimiento mediante cerrados y dos a dos disjuntos de X.

Por el Teorema de Sierpiński (1.3.13), a lo sumo un conjunto de $\mathcal{G}$ es no vacío, de manera que existe

$$Y \in \mathcal{F} \text{ tal que } \gamma^{-1}[Y] = \mathcal{I}$$

y, por tanto,

$$\gamma[\mathcal{I}] = \gamma\left[\gamma^{-1}[Y]\right] \subset Y \in \mathcal{F}.$$

Esto prueba el enunciado. ■

Definición 1.3.15 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **totalmente disconexo por caminos** si y sólo si cada curva en X se reduce a un punto.*

Proposición 1.3.16 *Sean (X, τ) un espacio topológico e $Y \subset X$.*

Si Y es secuencialmente cerrado e Y^{c} es totalmente disconexo por caminos, toda curva Γ en X, o es una curva en Y o se reduce a un punto de Y^{c}.

Demostración. Supongamos que no. Entonces existe una curva

$$\Gamma \subset X \text{ tal que } \Gamma \not\subset Y \text{ y } \operatorname{card}\Gamma > 1,$$

de manera que Γ interseca a Y y a Y^{c}.

Sea γ una parametrización de Γ. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$\gamma(0) \in X \text{ y } \gamma(1) \in X^{\mathsf{c}}.$$

Sea $a = \gamma(1)$. Como $\{a\}$ es cerrado y γ es continua,

$$t_0 := \min \gamma^{-1}[\{a\}]$$

está bien definido.

Sea $t_1 = \gamma(0)$. Una vez definido t_n, definamos t_{n+1} como sigue:

Sea

$$T_{n+1} = \left[\frac{t_n + t_0}{2}, t_0\right].$$

Si fuese

$$T_{n+1} \cap \gamma^{-1}[Y] = \varnothing,$$

tendríamos que

$$T_{n+1} \subset \left(\gamma^{-1}[Y]\right)^{\mathsf{c}} = \gamma^{-1}[Y^{\mathsf{c}}],$$

de manera que

$$\gamma[T_{n+1}] \subset \gamma\left[\gamma^{-1}[Y^{\mathsf{c}}]\right] \subset Y^{\mathsf{c}}.$$

De esta manera, como Y^{c} es totalmente disconexo por caminos, tendríamos que

$$\gamma[T_{n+1}] = \{a\}$$

en contradicción con la minimalidad de t_0.

Luego, podemos elegir arbitrariamente

$$t_{n+1} \in T_{n+1} \cap \gamma^{-1}[Y].$$

La sucesión así definida satisface que

$$|t_{n+1} - t_0| \leq \frac{|t_n - t_0|}{2} \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

y por inducción,

$$|t_n - t_0| \leq 2^{-n}|t_1 - t_0| = 2^{-n} t_0.$$

Entonces,

$$t_n \longrightarrow t_0, f(t_n) \longrightarrow f(t_0) = a$$

y, por tanto,

$$a \in \dddot{Y} = Y.$$

Esta contradicción prueba el enunciado. ∎

1.4. Compactificación de Stone-Čech

Definición 1.4.1 *Sea (X, τ) un espacio de Tychonoff.*

La ***compactificación de Stone-Čech*** *de X es el par*

$$(\beta_X, \beta X),$$

donde

$$\beta_X : X \to \mathcal{I}^{\mathcal{C}(X,\mathcal{I})}$$

es la aplicación definida por

$$(\beta_X(x))(f) = f(x) \text{ para cada } f \in \mathcal{C}(X, \mathcal{I})$$

y

$$\beta X \coloneqq \overline{\beta_X[X]}.$$

Teorema 1.4.2 (Stone-Čech) *Sea (X, τ_X) un espacio de Tychonoff.*

(1) *βX es un espacio compacto de Hausdorff.*

(2) *X es homeomorfo a un subconjunto denso de βX.*

(3) *Para cada espacio compacto (Y, τ_Y) y cada $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, existe una única*

$$\beta f \in \mathcal{C}(\beta X, Y) \text{ tal que } f = \beta f \circ \beta_X.$$

(4) *Todo espacio que satisface simultáneamente* (1), (2) *y* (3) *es homeomorfo a βX.*

Demostración. Ver [2, cap. XI, Teorema 8.2]. ∎

Proposición 1.4.3 *Si (X, τ) es un espacio normal de Hausdorff, X[†] es secuencialmente cerrado en βX.*

Demostración. Supongamos que no. Entonces existen una sucesión $\langle x_n \rangle$ en X y $a \in X^{\mathsf{c}}$ tales que

$$x_n \longrightarrow a.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\langle x_n \rangle$ no posee términos repetidos, de manera que

$$A \coloneqq \{x_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\} \text{ y } B \coloneqq \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$$

son disjuntos, no vacíos y cerrados en X.

Por el Lema de Urysohn (1.1.11), existe

$$f \in \mathcal{C}(X, \mathcal{I}) \text{ tal que } f[A] = \{0\} \text{ y } f[B] = \{1\}.$$

[†]En realidad, X es homeomorfo a un subconjunto de βX.

Luego, por el Teorema de Stone-Čech (1.4.2), existe una extensión

$$\beta f \in \mathcal{C}(\beta X, \mathcal{I}) \text{ tal que } f = \beta f \circ \beta_X.$$

Así, la continuidad de f implica que

$$0 = \lim \beta f(x_{2n-1}) = \beta f(a) = \lim \beta f(x_{2n-1}) = 1.$$

Esta contradicción prueba el enunciado. ■

Definición 1.4.4 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **realcompacto** si y sólo si existe un cardinal κ tal que X sea homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^\kappa$.*

Es claro que todo espacio realcompacto es de Tychonoff.

Teorema 1.4.5 *Todo espacio regular, de Hausdorff y Lindelöf, es realcompacto.*

Demostración. Ver [3, Teorema 3.11.12]. ■

Teorema 1.4.6 *Sea (X, τ) un espacio realcompacto.*

Si $C \subset \beta X \setminus X$ es cerrado, o C es discreto o $\operatorname{card} C \geq 2^{\mathfrak{c}}$.

Demostración. Ver [5, Teorema 9.11]†. ■

Proposición 1.4.7 *Sea (X, τ) un espacio realcompacto.*

Si Γ una curva en βX, o Γ es una curva en X o Γ se reduce a un punto de X^{c}.

En particular, $\beta X \setminus X$ es totalmente disconexo por caminos.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que X^{c} no sea totalmente disconexo por caminos, de manera que existe una curva

$$\Gamma \subset X^{\mathsf{c}} \text{ tal que } \operatorname{card} \Gamma > 1.$$

Ahora, X es realcompacto, por lo que Γ es discreto o $\operatorname{card} \Gamma \geq 2^{\mathfrak{c}}$, en virtud del Teorema 1.4.6, ya que Γ es cerrado en βX.

Claramente, esto es imposible; en el primer caso, Γ es conexo (pues es una curva) y discreto, de manera que

$$\operatorname{card} \Gamma = 1;$$

en el segundo caso,

$$2^{\mathfrak{c}} \leq \operatorname{card} \Gamma = \operatorname{card} \gamma[\mathcal{I}] \leq \operatorname{card} \mathcal{I} = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}.$$

Esta contradicción prueba que X^{c} es totalmente disconexo por caminos.

Como, por la Proposición 1.4.3, X es secuencialmente cerrado, el enunciado se sigue de la Proposición 1.3.16. ■

†[5] prueba este teorema para espacios de Tychonoff X y subconjuntos de $\beta X \setminus \upsilon X$, donde $\upsilon X \subset \beta X$ es la **realcompactificación de Hewitt** de X y $\upsilon X = X$ si y sólo si X es realcompacto.

1.5. Distancia de Hausdorff

La distancia entre conjuntos, definida de la manera usual, posee algunas deficiencias. De hecho para que la distancia entre dos conjuntos sea cero, es suficiente que sus clausuras tengan un punto en común. De esta manera, la distancia entre los ejes cartesianos de $\mathbb{R}^2$ es cero, a pesar de que estos conjuntos, lejos del origen, son muy distintos.

Para tratar de subsanar esta deficiencia, [7, cap. VIII, p. 293] introduce un concepto alternativo de distancia entre conjuntos. Dicho concepto y sus propiedades serán utilizadas para nuestros propósitos, por ello presentaremos formalmente su definición.

Definición 1.5.1 *Sea (X, d) un espacio métrico.*

Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de X, la ***distancia de Hausdorff*** *entre A y B es*

$$\mathcal{H}_d(A, B) := \text{máx}\left\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(A, b)\right\}.$$

Escribiremos simplemente $\mathcal{H}$ siempre que d se pueda deducir del contexto.

Una definición alternativa, que utiliza entornos en vez de distancias de puntos a conjuntos, se puede consultar en [9, cap. 4, Problema D].

Observemos que la definición anterior no cumple, en sentido estricto, los cuatro axiomas que definen una métrica. Por ejemplo, es inmediato verificar que

$$\mathcal{H}_d(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) = \mathcal{H}_d(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \mathbb{R}) = \mathcal{H}_d(\mathbb{Q}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = 0.$$

Aunque estos conjuntos son distintos o incluso disjuntos, son muy parecidos en el sentido que los puntos de cualquiera de ellos se encuentran arbitrariamente cerca del otro conjunto.

Además, tengamos en cuenta que la distancia de Hausdorff entre dos conjuntos, en general, podría ser infinita. En efecto:

Proposición 1.5.2 *Sea (X, d) un espacio métrico, y sean A y B subconjuntos no vacíos de X.*

Si A es acotado y B no es acotado,

$$\mathcal{H}_d(A, B) = +\infty.$$

Demostración. Supongamos que no y sea

$$\delta = \mathcal{H}_d(A, B).$$

Como A es acotado, existen

$$a \in A \text{ y } r > 0 \text{ tales que } A \subset B(a, r).$$

Sea $b \in B$. Como

$$d(b, A) \leq \mathcal{H}_d(A, B) < 2\delta,$$

existe

$$x_b \in A \text{ tal que } d(x_b, b) < 2\delta,$$

de manera que

$$d(a, b) \leq d(a, x_b) + d(x_b, b) < r + 2\delta$$

y, por tanto,

$$B \subset B(a, r + 2\delta).$$

Esto es una contradicción, pues B no es acotado. ■

La propiedad principal de la distancia de Hausdorff, es que define una pseudo-métrica.

Proposición 1.5.3 *Sea (X, d) un espacio métrico, y sean A, B y C subconjuntos y no vacíos de X.*

(1) $\mathcal{H}_d(A, A) = 0$ *y* $\mathcal{H}_d(A, B) \geq 0$

(2) $\mathcal{H}_d(A, B) = \mathcal{H}_d(B, A)$

(3) $\mathcal{H}_d(A, C) \leq \mathcal{H}_d(A, B) + \mathcal{H}_d(B, C)$

En particular, si $\mathcal{F}$ denota la familia de los subconjuntos acotados y no vacíos de X,

$$\mathcal{H}_d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

es una pseudo-métrica.

Demostración. Las comprobaciones de (1) y (2) son inmediatas.

Para demostrar (3), observemos que

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \text{ para cada } (a, b, c) \in A \times B \times C,$$

ya que d es una métrica.

Tomando ínfimos sobre $b \in B$ queda

$$d(a, c) \leq d(a, B) + d(B, c) \leq \mathcal{H}_d(A, B) + \mathcal{H}_d(B, C) \text{ para cada } (a, c) \in A \times C,$$

de manera que

$$d(a, C) = \inf_{c \in C} d(a, c) \leq \mathcal{H}_d(A, B) + \mathcal{H}_d(B, C), \text{ para cada } a \in A$$

y

$$d(A, c) = \inf_{a \in A} d(a, c) \leq \mathcal{H}_d(A, B) + \mathcal{H}_d(B, C), \text{ para cada } c \in C.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{H}_d(A, C) = \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, C), \sup_{c \in C} d(A, c)\right\} \leq \mathcal{H}_d(A, B) + \mathcal{H}_d(B, C).$$

Esto prueba (3).

Finalmente, es claro que la restricción a los subconjuntos acotados y no vacíos de X hace que $\mathcal{H}_d$ sea finita, lo cual completa la definición de pseudo-métrica. ■

Veamos como se comporta la distancia de Hausdorff en algunos casos particulares.

Proposición 1.5.4 *Sea (X,d) es un espacio métrico, y sean A, B y C subconjuntos arbitrarios y no vacíos de X.*

(1) *Si $A \subset B$, $\mathcal{H}_d(A,B) = \sup_{b\in B} d(A,b)$.*

(2) *Si $A \subset B \subset C$, entonces $\mathcal{H}_d(A,B) \leq \mathcal{H}_d(A,C)$ y $\mathcal{H}_d(B,C) \leq \mathcal{H}_d(A,C)$.*

(3) $\mathcal{H}_d\left(A,\overline{A}\right) = 0$

(4) $\mathcal{H}_d(A,B) = \mathcal{H}_d\left(\overline{A},B\right) = \mathcal{H}_d\left(\overline{A},\overline{B}\right)$

(5) *$\mathcal{H}_d(A,B) = 0$ si y sólo si $\overline{A} = \overline{B}$.*

Demostración.

(1) Es inmediato, pues al ser $A \subset B$, $\sup_{a\in A} d(a,B) = 0$.

(2) Como $A \subset B \subset C$, se tiene que

$$\mathcal{H}_d(A,B) = \sup_{b\in B} d(A,b) \leq \sup_{c\in C} d(A,c) = \mathcal{H}_d(A,C).$$

Para la segunda desigualdad, basta observar que si $A \subset B$, entonces

$$d(A,c) \geq d(B,c), \text{ para cada } c \in C.$$

Luego,

$$\mathcal{H}_d(B,C) = \sup_{c\in C} d(B,c) \leq \sup_{c\in C} d(A,c) = \mathcal{H}_d(A,C).$$

(3) Tenemos que

$$\overline{A} = \{x \in X : d(A,x) = 0\}.$$

Luego,

$$\mathcal{H}_d\left(A,\overline{A}\right) = \sup_{x\in \overline{A}} d(A,x) = 0.$$

(4) En virtud del apartado anterior y la Proposición 1.5.3, se verifica que

$$\mathcal{H}_d(A,B) \leq \mathcal{H}_d\left(A,\overline{A}\right) + \mathcal{H}_d\left(\overline{A},B\right) = \mathcal{H}_d\left(\overline{A},B\right)$$

y que

$$\mathcal{H}_d\left(\overline{A},B\right) \leq \mathcal{H}_d\left(\overline{A},A\right) + \mathcal{H}_d(A,B) = \mathcal{H}_d(A,B).$$

Esto prueba la primera igualdad, y la segunda se sigue de ésta.

(5) Para probar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que

$$\mathcal{H}_d(A, B) = 0.$$

Supongamos además, por reducción al absurdo, que

$$\overline{B} - \overline{A} \neq \varnothing,$$

y sea

$$x \in \overline{B} - \overline{A}.$$

Como $x \notin \overline{A}$,

$$\mathcal{H}_d(A, B) = \mathcal{H}_d\left(\overline{A}, \overline{B}\right) \geq d\left(\overline{A}, x\right) > 0,$$

lo cual constituye una contradicción.

Análogamente,

$$\overline{A} - \overline{B} = \varnothing$$

y, por tanto,

$$\overline{A} = \overline{B}.$$

Esto prueba la primera implicación.

La implicación inversa es consecuencia inmediata del apartado anterior. ■

Estas dos proposiciones nos permiten definir la métrica de Hausdorff.

Corolario 1.5.5 *Si (X, d) es un espacio métrico y $\mathcal{F}$ es la familia de los subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de X,*

$$\mathcal{H}_d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

es una métrica (llamada métrica de Hausdorff).

Demostración. La Proposición 1.5.3 muestra que $\mathcal{H}_d$ es una pseudo-métrica, y sólo falta probar que

$$A = B \text{ para cada } A, B \in \mathcal{F} \text{ tal que } \mathcal{H}_d(A, B) = 0.$$

En efecto:

Sean $A, B \in \mathcal{F}$ arbitrarios y tales que $\mathcal{H}_d(A, B) = 0$.

Por la Proposición 1.5.4, se sigue que $\overline{A} = \overline{B}$, de manera que $A = B$, ya que A y B son cerrados.

Esto prueba el enunciado. ■

Capítulo 2

Espacios métricos densificables

2.1. Curvas alfa-densas

Uno de los principales eventos históricos que dieron lugar a esta tesis fue el descubrimiento de una aplicación continua del intervalo unidad sobre el cuadrado unidad por G. Peano en 1890 [20].

De esta manera, el cuadrado unidad es una curva, un resultado que hace tambalear nuestros conceptos intuitivos de curva y de dimensión. Curvas con estas características se denominan curvas tipo Peano o curvas que llenan el espacio. Formalmente:

Definición 2.1.1 *Sea X una curva en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.*

Diremos que X llena el espacio si $\operatorname{int} X \neq \varnothing$.

Las construcciones de parametrizaciones de curvas que llenan el espacio se pueden consultar en [21].

Enunciamos a continuación ciertas propiedades que todas estas curvas tienen en común.

Teorema 2.1.2 *Si X es una curva que llena el espacio, ninguna parametrización de X puede ser inyectiva o diferenciable.*

Demostración. Ver [18] y [19]. ■

De esta manera, ninguna parametrización de una curva que llena el espacio puede ser una función elemental ni una serie de éstas, que son precisamente aquéllas cuyas propiedades conocemos y sabemos manejar.

A continuación, definimos formalmente el concepto de curva α-densa.

Definición 2.1.3 *Sean (X, d) un espacio métrico y $\alpha \geq 0$.*

*Una curva Γ en X es **α-densa** en X si y sólo si*

$$\mathcal{H}_d(\Gamma, X) \leq \alpha.$$

Naturalmente, ninguna de las restricciones mencionadas de las parametrizaciones de la curvas que llenan el espacio se aplica, en general, a las curvas α-densas.

Veamos a continuación un ejemplo de curvas α-densas en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.1.4 *Sea $X = \mathcal{I} \times [-1, 1]$. Las aplicaciones*

$$\gamma_\alpha : \mathcal{I} \to X$$

definidas por

$$\gamma_\alpha(t) = \left(t, \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\alpha} t\right)$$

son claramente inyectivas, de clase C^ω y parametrizan las curvas Γ_α que son α-densas en X, para cada $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

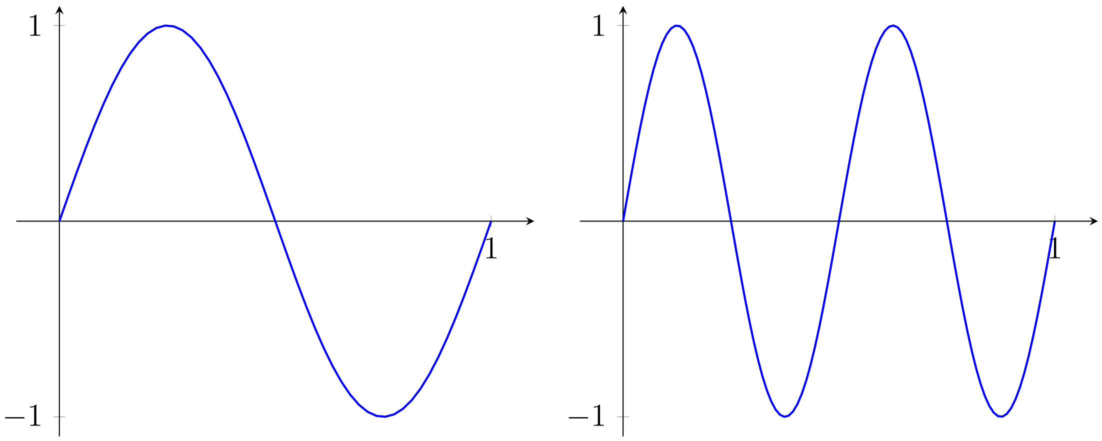


Figura 2.1: $\alpha = 1$ y $\alpha = \frac{1}{2}$

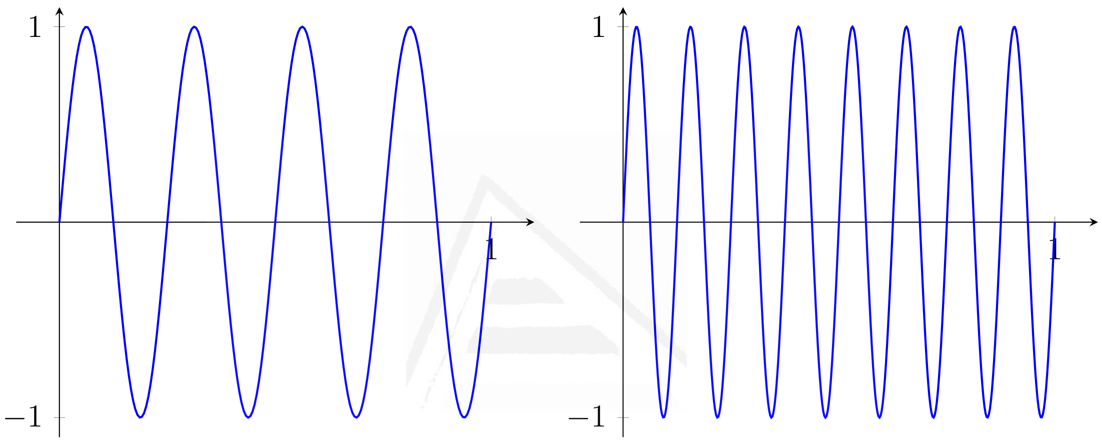


Figura 2.2: $\alpha = \frac{1}{4}$ y $\alpha = \frac{1}{8}$

Demostración. Corroboremos la última afirmación.

Fijemos α. Como la función seno tiene periodo 2π, sen $\frac{2\pi}{\alpha}t$ tiene periodo α, de manera que para cada punto $x = (x_1, x_2)$ en X, deben existir

$$t^- \in (x_1 - \alpha, x_1] \text{ y } t^+ \in [x_1, x_1 + \alpha)$$

tales que

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{\alpha} t^- = x_2 = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\alpha} t^+.$$

Como $\alpha \leq \frac{1}{2}$, al menos uno, entre t^- y t^+, pertenece a $\mathcal{I}$. Así, podemos elegir

$$t = \text{mín}\left(\left\{t^-, t^+\right\} \cap \mathcal{I}\right)$$

de manera que

$$\gamma_\alpha(t) = (t, x_2)$$

y, por tanto,

$$d(\Gamma_\alpha, x) \leq d(t, x_1) < \alpha,$$

donde d denota la distancia euclídea.

Así, queda
$$\mathcal{H}(\Gamma_\alpha, X) = \sup_{x\in X} d(\Gamma_\alpha, x) \leq \alpha,$$
como hemos afirmado. ∎

Las curvas α-densas nos permiten simplificar ciertos problemas de optimización global del tipo
$$\text{ínf}\{f(x) : x \in X\},$$
como ilustra el resultado a continuación.

Proposición 2.1.5 *Sean (X,d) un espacio métrico, $\langle\alpha_n\rangle$ una sucesión de números no negativos que converge a 0 y $\langle\Gamma_n\rangle$ una sucesión de curvas tal que cada Γ_n sea α_n-densa en X.*

Si $f \in \mathcal{C}(X)$ es inferiormente acotada,
$$\text{mín}\, f[\Gamma_n] \longrightarrow \text{ínf}\, f[X].$$

Demostración. Sean
$$m_n = \text{mín}\, f[\Gamma_n] \text{ y } m = \text{ínf}\, f[X].$$
Observemos que m está bien definido, pues f es inferiormente acotada, al igual que cada m_n, pues f es continua y cada Γ_n es compacto.

Sea $\varepsilon > 0$ dado.

Por definición de ínfimo, debe existir $a \in X$ que satisface la desigualdad
$$f(a) < m + \varepsilon.$$

Además, por la continuidad de f, existe $\delta > 0$ tal que
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ siempre que } d(x,a) < \delta.$$

Como $\alpha_n \longrightarrow 0$, debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\alpha_n < \delta \text{ para cada } n > n_0.$$

Para un $n > n_0$ fijo, siendo Γ_n α_n-densa, existe un $x_n \in \Gamma_n$ tal que
$$d(x_n, a) \leq \alpha_n < \delta,$$
de manera que
$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon,$$
y, por tanto,
$$f(x_n) < f(a) + \varepsilon.$$
Como $x_n \in \Gamma_n \subset X$, es claro que
$$m \leq m_n \leq f(x_n)$$
y podemos resumir que
$$m \leq m_n \leq f(x_n) < f(a) + \varepsilon < m + 2\varepsilon \text{ para cada } n > n_0.$$
Esto prueba el enunciado. ∎

Naturalmente, esta técnica no es aplicable a todos los problemas de optimización global. Bien entendido, las hipótesis de la Proposición 2.1.5 no sólo imponen condiciones sobre la función, sino también sobre el espacio.

Veamos un ejemplo de un espacio que no las verifica.

Ejemplo 2.1.6 *El espacio*

$$X \coloneqq [-1,0) \cup (0,1]$$

no posee curvas α-densas con $\alpha < 1$.

Demostración. Basta observar que las componentes conexas por caminos de X son claramente $[-1,0)$ y $(0,1]$, de manera que toda curva en X está incluida en uno de estos dos intervalos. ■

Como hemos visto, los espacios métricos que cumplen las hipótesis de la Proposición 2.1.5 poseen propiedades útiles. Diremos que los espacios con esta característica son densificables. Formalmente:

Definición 2.1.7 *Sea (X, d) un espacio métrico.*

*X es **densificable** si y sólo si posee una curva α-densa para cada $\alpha > 0$.*

En otras palabras, un espacio métrico (X, d) es densificable si y sólo si para cada $\alpha > 0$, existe una aplicación continua

$$\gamma : \mathcal{I} \to X$$

tal que

$$\mathcal{H}_d\left(\gamma[\mathcal{I}], X\right) \leq \alpha.$$

Es claro que toda curva α-densa de un espacio es también β-densa para cada $\beta > \alpha$, de manera que un espacio métrico es densificable si y sólo si posee una curva n^{-1}-densa para cada $n \in \mathbb{N}$.

Claramente, toda curva es densificable, pues es una curva 0-densa de sí misma.

Veamos a continuación unos ejemplos de espacios métricos densificables que no son curvas.

Ejemplo 2.1.8 $(-1, 1)$ *es densificable, pero no es una curva.*

Demostración. $[\alpha, 1-\alpha]$ es una curva α-densa de $(0,1)$ para cada $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

Sin embargo, $(0,1)$ no es una curva porque no es compacto. ■

Ejemplo 2.1.9

$$\mathfrak{C} \coloneqq (\mathcal{I} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathcal{I}) \cup \left(\left\{2^{1-n} : n \in \mathbb{N}\right\} \times \mathcal{I}\right)$$

es densificable, compacto y conexo por caminos, pero no es una curva.

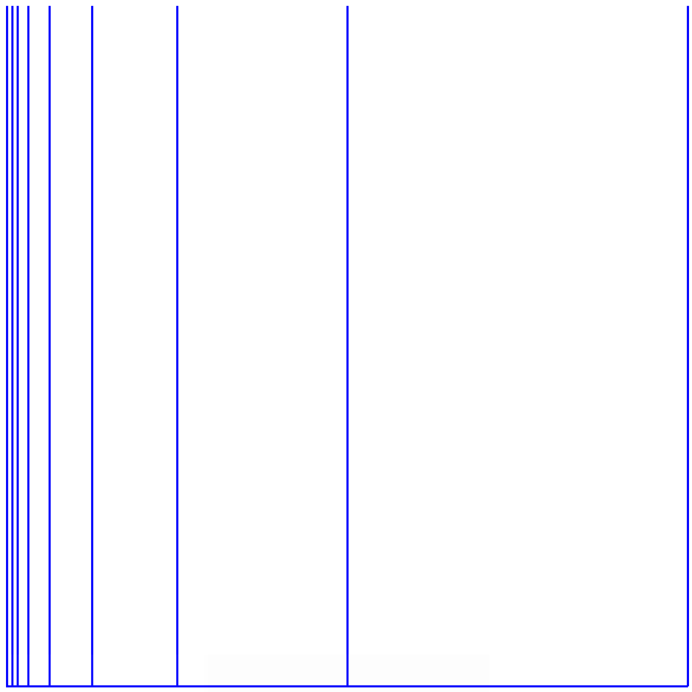


Figura 2.3: $\mathfrak{C}$

Demostración. $\mathfrak{C}$ es claramente compacto. $\mathfrak{C}$ es conexo por caminos, pues es unión de conexos por caminos y $\mathcal{I} \times \{0\}$ interseca a todos ellos.

Sin embargo, $\mathfrak{C}$ no es una curva. En efecto:

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathfrak{C}$ sea localmente conexo. Así, debería existir un abierto U tal que $U \cap \mathfrak{C}$ es conexo y

$$(0,1) \in U \cap \left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\right) = (\{0\} \times \mathcal{I}) \cup \left(\left\{2^{1-n} : n \in \mathbb{N}\right\} \times \mathcal{I}^*\right).$$

Claramente, esto es imposible.

Por último, para ver que $\mathfrak{C}$ es densificable, basta observar que cada

$$\mathfrak{C}_n := (\mathcal{I} \times \{0\}) \cup \left(\left\{2^{1-n} : n \in \mathbb{N}\right\} \times \mathcal{I}\right)$$

es una curva y que

$$\mathcal{H}\left(\mathfrak{C}_n, \mathfrak{C}\right) \leq 2^{1-n}.$$

■

2.2. Propiedades métricas

Dado que una curva es acotada porque es compacta, entre los espacios métricos que no son densificables, se encuentran, en virtud de la Proposición 1.5.2, los no acotados.

Basado en este razonamiento, el siguiente resultado da una condición necesaria para la densificabilidad de un espacio métrico.

Proposición 2.2.1 *Todo espacio métrico densificable es precompacto.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico densificable, y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Como X es densificable, posee una curva $\frac{\varepsilon}{3}$-densa Γ.

Siendo Γ compacto, el recubrimiento abierto

$$\left\{B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) : y \in \Gamma\right\}$$

posee un subrecubrimiento finito

$$\left\{B\left(y_k, \frac{\varepsilon}{2}\right) : 1 \leq k \leq n\right\}.$$

Afirmamos que

$$\{B(y_k, \varepsilon) : 1 \leq k \leq n\}$$

es un recubrimiento de X. En efecto:

Sea $x \in X$ arbitrario. Como

$$d(x, \Gamma) \leq \mathcal{H}_d(\Gamma, X) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

existe un $y_0 \in \Gamma$ tal que

$$d(x, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por definición de recubrimiento, existe un $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que

$$y_0 \in B\left(y_k, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

de manera que

$$d(y_0, y_k) < \frac{\varepsilon}{2},$$

lo cual implica que

$$d(x, y_k) \leq d(x, y_0) + d(y_0, y_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como esto vale para cada $x \in X$, se sigue que

$$\{B(y_k, \varepsilon) : k \in \{1, \cdots, n\}\}$$

es un recubrimiento de X, lo cual prueba el enunciado. ■

Ejemplo 2.2.2 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ no es densificable.*

Demostración. En efecto, basta observar que $\mathbb{R}^n$ no es precompacto. ■

Como vimos en el Ejemplo 2.1.8 y el Ejemplo 2.2.2, el intervalo $(-1, 1)$ es densificable, pero $\mathbb{R}$ no lo es.

Como la aplicación

$$\varphi : (-1, 1) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\varphi (x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

es claramente un homeomorfismo, la densificabilidad de un espacio métrico no depende exclusivamente de la topología, es decir, un espacio métrico puede ser densificable para una métrica, pero no para otra equivalente.

Sin embargo, la densificabilidad es un invariante métrico. En efecto:

Proposición 2.2.3 *La densificabilidad es invariante bajo sobreyecciones uniformemente continuas.*

Demostración. Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos, donde X es densificable, y sea

$$\varphi : X \to Y$$

una sobreyección uniformemente continua.

Sea $\alpha > 0$ dado. Como φ es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho (\varphi (x) , \varphi (y)) < \alpha \text{ siempre que } d (x, y) < \delta.$$

Como X es densificable, posee una curva $\frac{\delta}{2}$-densa Γ.

Para cada $x \in X$,

$$d (x, \Gamma) \leq \mathcal{H}_d (X, \Gamma) \leq \frac{\delta}{2},$$

de manera que, por definición de ínfimo, existe

$$z_x \in \Gamma \text{ tal que } d (x, z_x) < \delta.$$

Así,

$$\mathcal{H}_d (x, \varphi[\Gamma]) = \sup_{x \in X} \rho (\varphi (x) , X) \leq \sup_{x \in X} \rho (\varphi (x) , \varphi (z_x)) \leq \alpha,$$

donde $\varphi[\Gamma]$ es una curva porque φ es continua.

Esto prueba el enunciado. ■

Para imponer menos restricciones sobre la métrica, introducimos a continuación un nuevo concepto que, como veremos, generaliza el concepto del espacio métrico densificable.

Definición 2.2.4 *Sea (X, d) un espacio métrico.*

*X es **pseudo-densificable** si y sólo si para cada $\alpha > 0$, existe*

$$\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{I}^*, X) \text{ tal que } \mathcal{H}_d(\gamma[\mathcal{I}^*], X) \leq \alpha.$$

Las definiciones de espacio métrico densificable y pseudo-densificable no son equivalentes, como ilustra el ejemplo a continuación.

Ejemplo 2.2.5 *$\mathbb{R}$ es pseudo-densificable, pero no es densificable.*

Demostración. Ya vimos en el Ejemplo 2.2.2 que $\mathbb{R}$ no es densificable, aunque es conexo por caminos.

En cambio, como $\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{I}^*)$ definida por

$$\gamma(t) = \frac{1}{t} \cdot \cos\frac{\pi}{t}$$

es sobreyectiva, tenemos que

$$\mathcal{H}_d(\gamma[\mathcal{I}^*]) = 0,$$

de manera que $\mathbb{R}$ es pseudo-densificable.

Corroboremos que γ es sobreyectiva:

Como $\cos k\pi = (-1)^k$ cuando $k \in \mathbb{N}$,

$$\gamma\left(k^{-1}\right) = k\cos k\pi = (-1)^k k \text{ para cada } k \in \mathbb{N},$$

lo cual implica que una infinidad de enteros positivos y negativos pertenece a $\gamma[\mathcal{I}^*]$.

Como γ es continua, por el Teorema del Valor Intermedio,

$$\gamma[\mathcal{I}^*] = \mathbb{R},$$

como hemos afirmado. ∎

El siguiente resultado corrobora que este nuevo concepto es efectivamente una extensión del concepto de densificabilidad.

Proposición 2.2.6 *Todo espacio métrico densificable es pseudo-densificable.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico densificable, y sea $\alpha > 0$ arbitrario.

Como X es densificable, existe

$$\gamma_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{I}, X) \text{ tal que } \mathcal{H}_d(\gamma_0[\mathcal{I}], X) \leq \alpha.$$

Sea γ la restricción de γ_0 al intervalo $\mathcal{I}^*$.

Como γ es continua,

$$\overline{\gamma[\mathcal{I}^*]} = \overline{\gamma_0[\mathcal{I}^*]} \supset \gamma_0\left[\overline{\mathcal{I}^*}\right] = \gamma_0[\mathcal{I}],$$

de manera que

$$\mathcal{H}_d[\gamma[\mathcal{I}^*], X] = \mathcal{H}_d[\gamma_0[\mathcal{I}], X] \leq \alpha.$$

Esto prueba el enunciado. ∎

Como sucede con la densificabilidad, la pseudo-densificabilidad es un invariante métrico. En efecto:

Proposición 2.2.7 *La pseudo-densificabilidad es invariante bajo sobreyecciones uniformemente continuas.*

Demostración. Basta sustituir curvas por imágenes continuas de $\mathcal{I}^*$ en la demostración de la Proposición 2.2.3. ■

A pesar de que la pseudo-densificabilidad exige menos de la métrica, no es una propiedad topológica, como veremos a continuación.

Ejemplo 2.2.8 (Hipercubo Roto) *Sean*

$$\mathfrak{H}_n = \left\{ f \in \mathcal{I}^{\mathbb{N}} : f(n) = 0 \text{ y } f(m) \geq n^{-1} \text{ si } m \neq n \right\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

y

$$\mathfrak{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{H}_n.$$

$(\mathfrak{H}, \mathfrak{d})$ *es (pseudo-)densificable.*

Sin embargo, $\mathfrak{H}$ *no es pseudo-densificable para algunas métricas equivalentes a* $\mathfrak{d}$*.*

Demostración. Cada $\mathfrak{H}_n$ es el producto de $\{0\}$ y una cantidad numerable de intervalos

$$\left[n^{-1}, 1\right],$$

de manera que cada $\mathfrak{H}_n$ es una curva, en virtud de la Proposición 1.3.6.

Sea $g \in \mathcal{I}^{\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n \in \mathfrak{H}$ como sigue:

$$f_n(n) = 0 \text{ y } f_n(m) = \text{máx}\left\{g(m), n^{-1}\right\} \text{ si } m \neq n$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}(f_n, g) &= \sup_{m \in \mathbb{N}} m^{-1} \left| f_n(m), g(m) \right| \\
&= \text{máx}\left\{ n^{-1} \left| f_n(n) - g(n) \right|, \sup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}} m^{-1} \left| f_n(m) - g(m) \right| \right\} \\
&\leq \text{máx}\left\{ n^{-1}, \sup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}} m^{-1} n^{-1} \right\} \\
&= n^{-1}
\end{aligned},$$

donde $f_n \in \mathfrak{H}_n$, de manera que

$$\mathcal{H}_d(\mathfrak{H}_n, \mathfrak{H}) \leq \mathcal{H}_d\left(\mathfrak{H}_n, \mathcal{I}^{\mathbb{N}}\right) = \sup_{g \in \mathcal{I}^{\mathbb{N}}} \mathfrak{d}(\mathfrak{H}_n, g) \leq n^{-1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Esto prueba que $(\mathfrak{H}, \mathfrak{d})$ es (pseudo-)densificable y denso en $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$.

En particular, esto implica que $\mathfrak{H}$ no es compacto, de manera que, en virtud del Corolario 1.2.10, existe una métrica ρ, equivalente a $\mathfrak{d}$, que no es acotada.

Como cada $\mathfrak{H}_n$ es cerrado y los $\mathfrak{H}_n$ son dos a dos disjuntos, por el Corolario 1.3.14,

$$\mathcal{A}H = \{\mathfrak{H}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Luego, si $\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{I}^*, \mathfrak{H})$, tenemos que

$$\gamma[\mathcal{I}^*] \subset \mathfrak{H}_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N},$$

de manera que, por la Proposición 1.5.2, $\gamma[\mathcal{I}^*]$ es acotado, ya que $\mathfrak{H}_n$ es compacto.

Esto prueba que

$$\mathcal{H}_\rho(\gamma[\mathcal{I}^*], \mathfrak{H}) = +\infty$$

y, por tanto, que $(\mathfrak{H}, \rho)$ no es pseudo-densificable. ■

Cerraremos esta sección probando que la clausura mantiene la densificabilidad de un espacio.

Proposición 2.2.9 *Sean (X, d) un espacio métrico y D un subconjunto denso. Si D es (pseudo-)densificable, otro tanto ocurre con X.*

Demostración. Basta observar que, si

$$\gamma \in \mathcal{C}(I, D) \subset \mathcal{C}(I, X), \text{ donde } I = \mathcal{I} \text{ o } I = \mathcal{I}^*,$$

la Proposición 1.5.4 muestra que

$$\mathcal{H}_d(\gamma[I], D) = \mathcal{H}_d\left(\gamma[I], \overline{D}\right) = \mathcal{H}_d(\gamma[I], X).$$ ■

2.3. Propiedades topológicas

Hemos visto en el Ejemplo 2.1.6 que

$$X \coloneqq [-1,0) \cup (0,1]$$

no es densificable, de manera que la precompacidad es una condición necesaria pero no suficiente para la densificabilidad del espacio.

Aunque X sea precompacto, los puntos de X están muy distantes entre sí, en el sentido que no existen curvas que pasen cerca de dos puntos cualesquiera de X. Ésta es una condición que debe cumplir cualquier espacio métrico densificable.

La siguiente definición formaliza esta idea.

Definición 2.3.1 *Sea (X,τ) un espacio topológico.*

*X es **casi conexo por caminos** si y sólo si para cada par de abiertos no vacíos U y V, existe una curva Y en X tal que $U \cap Y \neq \varnothing$ y $V \cap Y \neq \varnothing$.*

Claramente, todo espacio topológico conexo por caminos es casi conexo por caminos. Veamos un ejemplo de un espacio que no satisface el recíproco.

Notación 2.3.2 *Para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathfrak{Q}_n \coloneqq \left(2^{-n}\mathbb{Z} \setminus 2^{1-n}\mathbb{Z}\right) \cap \mathcal{I}.$$

Es claro que los $\mathfrak{Q}_n$ son dos a dos disjuntos y que $\mathcal{H}_d\left(\mathfrak{Q}_n, \mathcal{I}\right) = 2^{-n}$.

Ejemplo 2.3.3 (Velcro) *Si*

$$\mathfrak{V}_1 = (\mathcal{I} \times \{0\}) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathfrak{Q}_{2n-1} \times \left[0, 1-2^{1-2n}\right]\right)$$

y

$$\mathfrak{V}_2 = (\mathcal{I} \times \{1\}) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{Q}_{2n} \times \left[2^{-2n}, 1\right]\right),$$

el conjunto

$$\mathfrak{V} \coloneqq \mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2$$

es casi conexo por caminos, pero no conexo por caminos.

Demostración. Claramente, $\mathfrak{V}_1$ y $\mathfrak{V}_2$ son conexos por caminos.

Para verificar que $\mathfrak{V}_1$ y $\mathfrak{V}_2$ son las componentes conexas por caminos de $\mathfrak{V}$, sólo falta probar que $\mathfrak{V}$ no es conexo por caminos. Supongamos lo contrario, y sean

$$a \in \mathcal{I} \times \{0\} \subset \mathfrak{V}_1 \text{ y } b \in \mathcal{I} \times \{1\} \subset \mathfrak{V}_2.$$

Por suposición, existe

$$\gamma \in \mathcal{C}\left(\mathcal{I}, \mathfrak{V}\right) \text{ tal que } \gamma(0) = a \text{ y } \gamma(1) = b.$$

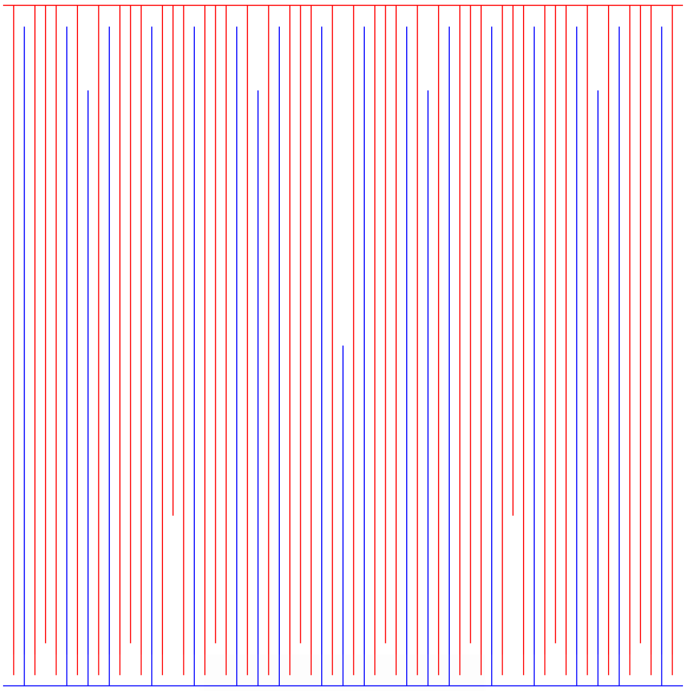


Figura 2.4: $\mathfrak{V}$

Como $\mathcal{I} \times \{0\}$ y $\mathcal{I} \times \{1\}$ son cerrados, por continuidad,

$$A \coloneqq \gamma^{-1}\left[I \times \{0\}\right] \text{ y } B \coloneqq \gamma^{-1}\left[I \times \{1\}\right]$$

son cerrados. Además, son no vacíos, pues

$$0 \in A \text{ y } 1 \in B.$$

Así, podemos tomar

$$t_0 = \max A \text{ y } t_1 = \min B.$$

Claramente, $t_0 \neq t_1$.

Tenemos que

$$\gamma\left[(t_0, t_1)\right] \subset (I \times (0,1)) \cap \mathfrak{V} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{R},$$

cuyas componentes conexas por caminos son de la forma $\{r\} \times \mathbb{R}$, con $r \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto,

$$\gamma\left[(t_0, t_1)\right] \subset \{r\} \times \mathbb{R}$$

para algún $r \in \mathbb{Q}$.

Por otra parte, dependiendo del valor de r,

$$(\{r\} \times \mathbb{R}) \cap \mathfrak{V} = \{r\} \times \left[0, 1 - 2^{1-2n}\right] \text{ o } (\{r\} \times \mathbb{R}) \cap \mathfrak{V} = \{r\} \times \left[2^{-2n}, 1\right],$$

con $n \in \mathbb{N}$, de manera que

$$\gamma\left[(t_0, t_1)\right]$$

es subconjunto de uno de estos dos conjuntos.

Esto es una contradicción, pues si π_2 denota la proyección sobre la segunda coordenada, la continuidad de γ implica que

$$\lim_{t\to t_0} (\pi_2 \circ \gamma)(t) = 0 \text{ y } \lim_{t\to t_1} (\pi_2 \circ \gamma)(t) = 1.$$

Por último, veamos que $\mathfrak{V}$ es casi conexo por caminos.

Para el efecto, probaremos que $\mathfrak{V}_1$ es denso en $\mathfrak{V}$, lo cual implica que todo par de abiertos no vacíos interseca a $\mathfrak{V}_1$ y, por tanto, a una curva en $\mathfrak{V}_1$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}) &\leq \mathcal{H}(\mathfrak{V}_1, \mathcal{I}^2) \\
&\leq \mathcal{H}\left(\mathfrak{Q}_{2n-1} \times [0, 1 - 2^{1-2n}], \mathcal{I}^2\right) \\
&\leq \mathcal{H}(\mathfrak{Q}_{2n-1}, \mathcal{I}) + \mathcal{H}\left(\mathcal{I} \times [0, 1 - 2^{1-2n}], \mathcal{I}^2\right) \\
&= 2^{1-2n} + 2^{1-2n} \\
&< 2^{2-2n}
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Esto prueba el enunciado. ■

Casi conexión por caminos es más débil que conexión por caminos, pero más fuerte que conexión. En efecto:

Proposición 2.3.4 *Todo espacio casi conexo por caminos es conexo.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio casi conexo por caminos.

Supongamos, por reducción al absurdo, que X no sea conexo; esto es, existen A y B, abiertos en X, disjuntos y no vacíos, tales que

$$X = A \cup B.$$

Por definición de casi conexión por caminos, existe una curva Γ en X que interseca a A y a B. Así,

$$\Gamma \cap A \text{ y } \Gamma \cap B$$

son no vacíos, disjuntos y, por definición de subespacio, abiertos en Γ. Como

$$\Gamma = \Gamma \cap X = \Gamma \cap (A \cup B) = (\Gamma \cap A) \cup (\Gamma \cap B),$$

llegamos a una contradicción, pues Γ es conexo, en virtud del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz (1.3.5).

Esto prueba el enunciado. ■

Es intuitivamente cierto que todo espacio métrico densificable es casi conexo por caminos, y probaremos este resultado en el Teorema 2.3.13. El recíproco no es cierto, incluso si el espacio es precompacto.

A continuación, presentamos un ejemplo que prueba esta afirmación, que se construye a partir del ejemplo anterior.

Ejemplo 2.3.5 (Y de Velcro) *Consideremos las aplicaciones*

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$$

definidas por

$$\varphi_1(x,y) = e^{-\frac{\pi}{2}i}(x+iy), \varphi_2(x,y) = e^{-\frac{\pi}{6}i}(x+iy-1)$$

y

$$\varphi_3(x,y) = e^{\frac{\pi}{6}i}(x+iy)+1.$$

El conjunto

$$\mathfrak{Y} := \varphi_1[\mathfrak{V}] \cup \varphi_2[\mathfrak{V}] \cup \varphi_3[\mathfrak{V}]$$

es casi conexo por caminos y precompacto, pero no es densificable.

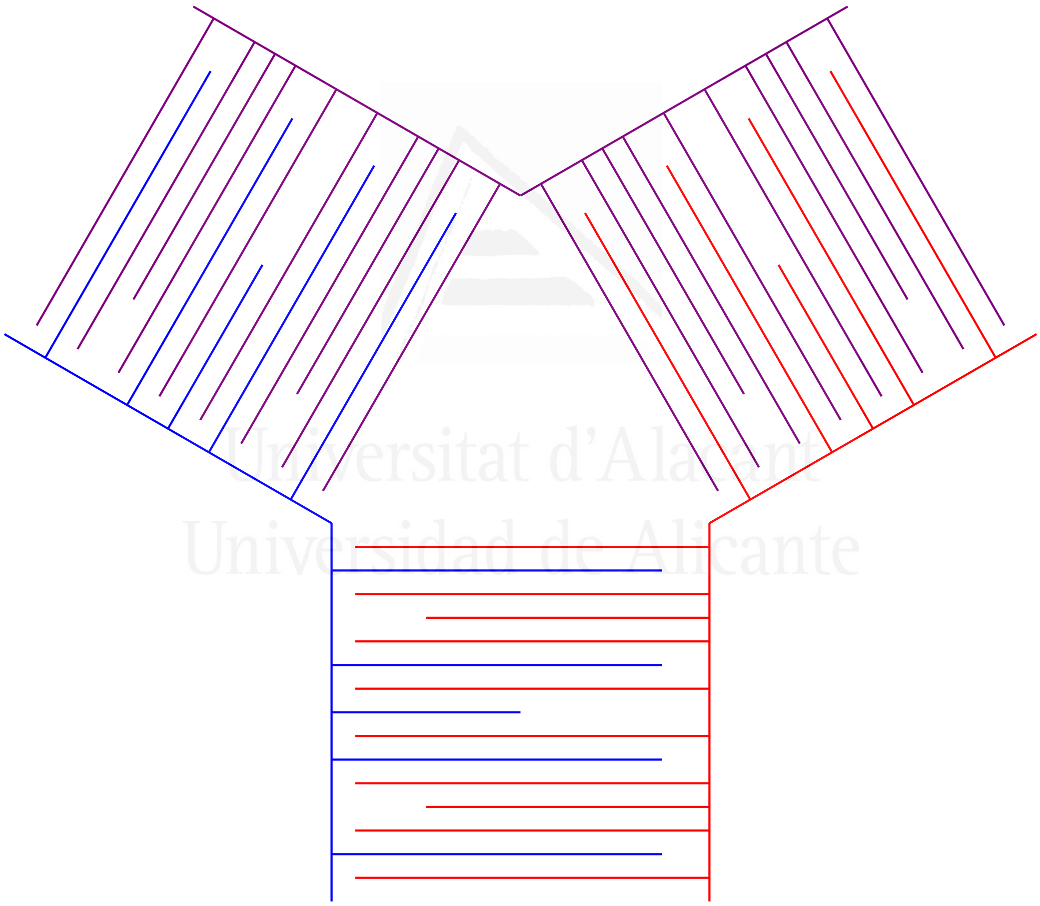


Figura 2.5: $\mathfrak{Y}$

Demostración. Es inmediato ver que φ_1, φ_2 y φ_3 son isometrías.

Se verifica que

$$\varphi_1(0,0) = 0 = \varphi_2(1,0), \varphi_2(1,1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \varphi_3(0,1) \text{ y } \varphi_3(0,0) = 1 = \varphi_1(0,1).$$

Así,

$$A_1 \coloneqq \varphi_1\left[\mathfrak{V}_1\right] \cup \varphi_2\left[\mathfrak{V}_1\right], A_2 \coloneqq \varphi_2\left[\mathfrak{V}_2\right] \cup \varphi_3\left[\mathfrak{V}_2\right] \text{ y } A_3 \coloneqq \varphi_3\left[\mathfrak{V}_1\right] \cup \varphi_1\left[\mathfrak{V}_2\right]$$

son conexos por caminos, pues tienen un punto en común. Además, como $\mathfrak{V}$ no es conexo por caminos, se verifica inmediatamente que A_1, A_2 y A_3 son precisamente las componentes conexas por caminos de $\mathfrak{Y}$.

Hemos probado en el Ejemplo 2.3.3 que $\mathfrak{V}_1$ es denso en $\mathfrak{V}$, y análogamente se prueba que $\mathfrak{V}_2$ también lo es.

Por lo tanto, se verifica que A_1, A_2 y A_3 son densos en

$$B_1 \coloneqq \varphi_1\left[\mathfrak{V}\right] \cup \varphi_2\left[\mathfrak{V}\right], B_2 \coloneqq \varphi_2\left[\mathfrak{V}\right] \cup \varphi_3\left[\mathfrak{V}\right] \text{ y } B_3 \coloneqq \varphi_3\left[\mathfrak{V}\right] \cup \varphi_1\left[\mathfrak{V}\right],$$

respectivamente.

Esto implica que $\mathfrak{Y}$ es casi conexo por caminos, pues si U_1 y U_2 son dos abiertos no vacíos, cada uno interseca a dos conjuntos entre B_1, B_2 y B_3, de manera que cada uno interseca a dos conjuntos entre A_1, A_2 y A_3.

Por lo tanto, intersecan a la misma componente conexa por caminos, y la existencia de una curva que interseque a U_1 y U_2 está asegurada.

Sin embargo, $\mathfrak{Y}$ no es densificable para la métrica euclídea d, pues

$$d\left(A_1, \varphi_3(1,1)\right) = 1, d\left(A_2, \varphi_1(1,0)\right) = 1 \text{ y } d\left(A_3, \varphi_2(0,1)\right) = 1,$$

de manera que

$$\mathcal{H}_d\left(A_1, \mathfrak{Y}\right) \geq 1, \mathcal{H}_d\left(A_2, \mathfrak{Y}\right) \geq 1 \text{ y } \mathcal{H}_d\left(A_3, \mathfrak{Y}\right) \geq 1,$$

lo cual imposibilita la existencia de una curva α-densa con $\alpha < 1$. ■

El concepto que presentamos a continuación es más fuerte que la casi conexión por caminos, y nos resultará más fructífero.

Definición 2.3.6 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **aproximable por caminos** si y sólo si para cada familia finita de abiertos no vacíos $\mathcal{F}$, existe una curva Γ en X tal que Γ interseca a cada miembro de $\mathcal{F}$.*

La aproximabilidad por caminos es una propiedad topológica. En efecto:

Proposición 2.3.7 *La aproximabilidad por caminos es invariante bajo sobreyecciones continuas.*

Demostración. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos, donde X es aproximable por caminos, y

$$\varphi : X \to Y$$

una sobreyección continua.

Sea

$$\{U_1, \cdots, U_n\}$$

una familia finita de abiertos no vacíos en Y.

Así,

$$\left\{\varphi^{-1}\left[U_1\right], \cdots, \varphi^{-1}\left[U_n\right]\right\}$$

es una familia finita de abiertos (por definición de continuidad) y no vacíos (por definición de sobreyectividad) en X.

Como X es aproximable por caminos, existe una curva Γ en X tal que

$$\Gamma \cap \varphi^{-1}\left[U_k\right] \neq \varnothing \text{ para cada } k \in \{1, \cdots, n\}.$$

Así, si $k \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\varphi[\Gamma] \cap U_k \supset \varphi[\Gamma] \cap \varphi\left[\varphi^{-1}\left[U_k\right]\right] \supset \varphi\left[\Gamma \cap \varphi^{-1}\left[U_k\right]\right] \neq \varnothing,$$

donde $\varphi[\Gamma]$ es una curva, ya que φ es continua.

Esto prueba que Y es aproximable por caminos. ■

Tenemos el siguiente resultado, análogo a la Proposición 1.3.8, para aproximabilidad por caminos.

Proposición 2.3.8 *El producto de espacios topológicos es aproximable por caminos si y sólo si cada factor es aproximable por caminos.*

Demostración. Sea L un conjunto, $\langle(X_\lambda, \tau_\lambda)\rangle_{\lambda \in L}$ una familia indexada de espacios topológicos,

$$X \coloneqq \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$$

el espacio producto de la familia y π_λ la proyección sobre la λ-ésima coordenada.

Para probar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que Y sea aproximable por caminos.

Para cada $\lambda \in L$,

$$\pi_\lambda : Y \to X_\lambda$$

es una sobreyección continua, de manera que cada X_λ es aproximable por caminos, en virtud de la Proposición 2.3.7.

Esto prueba la primera implicación.

Para probar la implicación inversa, supongamos que cada X_λ sea aproximable por caminos.

Sea $\{U_1, \cdots, U_n\}$ una familia finita de abiertos no vacíos de Y.

Para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$, existe un abierto (básico) no vacío

$$B_k \subset U_k \text{ tal que } \pi_\lambda\left[B_k\right] \in \tau_\lambda \text{ para cada } \lambda \in L \text{ y } B_k = \prod_{\lambda \in L} \pi_\lambda\left[B_k\right].$$

Para cada $\lambda \in L$, como X_λ es aproximable por caminos, existe una curva Γ_λ que interseca a cada conjunto de la familia

$$\left\{\pi_\lambda\left[B_k\right] : k \in \{1, \cdots, n\}\right\},$$

y podemos elegir una parametrización γ_λ de Γ_λ tal que

$$\gamma_\lambda\left(n^{-1}k\right) \in \pi_\lambda\left[B_k\right].$$

Por definición de topología producto, existe una única

$$\gamma \in \mathcal{C}\left(\mathcal{I}, Y\right) \text{ tal que } \gamma_\lambda = \pi_\lambda \circ \gamma \text{ para cada } \lambda \in L.$$

De esta manera,

$$\gamma\left(n^{-1}k\right) \in B_k \text{ para cada } k \in \{1, \cdots, n\}$$

e Y es aproximable por caminos.

Esto prueba la implicación restante. ■

Claramente, conexión por caminos implica aproximabilidad por caminos. El siguiente resultado formaliza esta afirmación.

Lema 2.3.9 *Todo espacio topológico conexo por caminos es aproximable por caminos.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico conexo por caminos, y sea

$$\mathcal{F} = \{U_1, \cdots, U_n\}$$

una familia finita de abiertos no vacíos.

Eligiendo un x_k en cada U_k, como X es conexo por caminos, la Proposición 1.3.12 implica que existe una curva Γ en X tal que

$$\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \Gamma,$$

de manera que Γ interseca a cada miembro de $\mathcal{F}$.

Esto prueba el enunciado. ■

El siguiente resultado relaciona los conceptos de pseudo-densificabilidad y aproximabilidad finita por caminos.

Proposición 2.3.10 *Todo espacio métrico pseudo-densificable es aproximable por caminos.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico pseudo-densificable, y sea

$$\{U_1, \cdots, U_n\}$$

una familia de abiertos no vacíos.

Claramente, para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$, existe una bola

$$B\left(x_k, r_k\right) \subset U_k.$$

Tomando

$$r := \min\{r_1, \cdots, r_n\} > 0,$$

se verifica que

$$B\left(x_k, r\right) \subset B\left(x_k, r_k\right) \subset U_k \text{ para cada } k \in \{1, \cdots, n\}.$$

Por definición de espacio métrico pseudo-densificable, existe $\gamma \in \mathcal{C}\left(\mathcal{I}^*, X\right)$ tal que

$$\mathcal{H}_d\left(\gamma[\mathcal{I}^*], X\right) \leq \frac{r}{2} < r.$$

Supongamos que la curva $\gamma[\mathcal{I}^*]$ no interseca a algún U_k fijo. Esto implicaría que

$$\mathcal{H}_d\left(\gamma[\mathcal{I}^*], X\right) \geq d\left(\gamma[\mathcal{I}^*], x_k\right) \geq r,$$

lo cual constituye una contradicción.

Elijamos ahora arbitrariamente un punto

$$y_k \in \gamma[\mathcal{I}^*] \cap U_k \text{ para cada } k \in \{1, \cdots, n\}.$$

Como $\gamma[\mathcal{I}^*]$ es conexo por caminos, la Proposición 1.3.12 implica la existencia de una curva Γ verificando que

$$\{y_1, \cdots, y_n\} \subset \Gamma,$$

de manera que Γ interseca a cada U_k.

Esto prueba el enunciado. ■

El resultado anterior tiene un importante corolario, pues proporciona una condición necesaria e intrínseca para la (pseudo-)densificabilidad de un espacio métrico.

Corolario 2.3.11 *Todo espacio métrico (pseudo-)densificable es conexo.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio métrico (pseudo-)densificable.

Por la Proposición 2.2.6 y la Proposición 2.3.10, X es, en ambos casos, aproximable por caminos.

Luego, X es casi conexo por caminos. Por la Proposición 2.3.4, X es conexo.

Esto prueba el enunciado. ■

La Proposición 2.2.1 y el Corolario 2.3.11 muestran que todo espacio métrico densificable es precompacto y conexo. El recíproco no es cierto, como ilustra el ejemplo a continuación.

Ejemplo 2.3.12 (Y de Velcro) $\mathfrak{Y}$ *es precompacto y conexo, pero no es densificable.*

Demostración. $\mathfrak{Y}$ es claramente precompacto, ya que es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$.

Ya hemos visto en el Ejemplo 2.3.5 que $\mathfrak{Y}$ no es densificable, pero sí casi conexo por caminos.

Por la Proposición 2.3.4, $\mathfrak{Y}$ es conexo.

Esto prueba el enunciado. ■

A continuación, presentamos una caracterización de los espacios métricos densificables en función de los nuevos conceptos definidos.

Teorema 2.3.13 *Sea (X, d) un espacio métrico. Los enunciados a continuación son equivalentes.*

(1) *X es densificable.*

(2) *X es pseudo-densificable y precompacto.*

(3) *X es aproximable por caminos y precompacto.*

Demostración. En efecto, la Proposición 2.2.1 y la Proposición 2.2.6 prueban que

$$(1) \longrightarrow (2)$$

y la Proposición 2.3.10 prueba que

$$(2) \longrightarrow (3).$$

Para completar la prueba, supongamos (3), y sea $\alpha > 0$.

Por definición de precompacidad, existen

$$x_1, \cdots, x_n \in X$$

tales que la familia

$$\mathcal{F} := \left\{ B\left(x_1, \frac{\alpha}{2}\right), \cdots, B\left(x_n, \frac{\alpha}{2}\right) \right\}$$

sea un recubrimiento de X.

Como X es aproximable por caminos, existe una curva Γ en X que interseca a cada miembro de $\mathcal{F}$, de manera que

$$d(\Gamma, x_k) < \frac{\alpha}{2} \text{ para cada } k \in \{1, \cdots, n\}.$$

Sea $x \in X$ arbitrario. Como $\mathcal{F}$ es un recubrimiento de X, existe $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que

$$x \in B\left(x_k, \frac{\alpha}{2}\right),$$

de manera que

$$d(\Gamma, x) \leq d(\Gamma, x_k) + d(x_k, x) < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

Como esto vale para cada $x \in X$, tenemos que

$$\mathcal{H}_d(\Gamma, X) \leq \alpha.$$

Entonces (1) se sigue. Esto muestra que

$$(3) \longrightarrow (1),$$

lo que finaliza la prueba. ■

En particular, tenemos la siguiente condición suficiente e intrínseca para la densificabilidad de un espacio métrico:

Corolario 2.3.14 *Todo espacio métrico conexo por caminos y precompacto es densificable.*

Demostración. Basta observar que, por el Lema 2.3.9, conexión por caminos implica aproximabilidad por caminos, y que el Teorema 2.3.13 prueba que todo espacio métrico aproximable por caminos y precompacto es densificable. ■

El Teorema 2.3.13 muestra que los conceptos de pseudo-densificabilidad y densificabilidad están estrechamente vinculados. Por este motivo, dedicaremos lo que sigue de esta sección a las propiedades de los espacios métricos pseudo-densificables.

Hasta el momento, sólo hemos probado que aproximabilidad por caminos es una condición necesaria para la pseudo-densificabilidad. A continuación, presentamos otra condición necesaria, de manera que la aproximabilidad por caminos no es una condición suficiente.

Proposición 2.3.15 *Todo espacio métrico pseudo-densificable es separable.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico pseudo-densificable.

Por definición, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe

$$\gamma_n \in \mathcal{C}(\mathcal{I}^*, X) \text{ tales que } \mathcal{H}_d(\gamma_n[\mathcal{I}^*], X) \leq n^{-1}.$$

Tomando

$$Y := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n[\mathcal{I}^*],$$

vemos que

$$\mathcal{H}_d(Y, X) \leq \mathcal{H}_d(\gamma_n[\mathcal{I}^*], X) \leq n^{-1},$$

de manera que

$$\mathcal{H}_d(Y, X) = 0$$

y, por tanto, Y es denso en X.

Como cada $\gamma_n[\mathcal{I}^*]$ es separable, Y es separable. Luego, X es separable.

Esto prueba el enunciado. ■

El Corolario 2.3.11 y la Proposición 2.3.15 muestran que todo espacio métrico pseudo-densificable es conexo y separable. Ya que precompacidad implica separabilidad, el espacio del Ejemplo 2.3.5 muestra que el recíproco no es cierto.

La separabilidad es para un espacio métrico pseudo-densificable lo que es la precompacidad para un espacio métrico densificable, pues constituye, en cierto sentido, una limitación de tamaño. El ejemplo a continuación ilustra esto.

Ejemplo 2.3.16 *El espacio vectorial $X = \mathcal{I}^{\mathcal{I}}$, con la distancia obtenida de la norma del supremo, es conexo por caminos, pero no es pseudo-densificable.*

Demostración. Sea d la distancia obtenida de la norma del supremo, es decir,

$$d(f,g) = \sup_{t\in\mathcal{I}} |f(t) - g(t)| \text{ para cada } f,g \in X.$$

Es inmediato verificar que d es una métrica en X. Con la topología inducida por d, X es conexo por caminos, pues es convexo.

Sin embargo, X no es pseudo-densificable, pues no es separable.

Para corroborar esta afirmación, sea

$$\{f_1, f_2, \cdots\}$$

un subconjunto arbitrario de X.

Sea $\langle r_n \rangle$ una enumeración arbitraria de $\mathbb{Q} \cap \mathcal{I}$, y definamos $g \in X$ de la siguiente manera:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = r_n \text{ y } f_n(r_n) \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Así,

$$d(f_n, g) \geq |f_n(r_n) - g(r_n)| \geq \frac{1}{2},$$

lo cual prueba que D no es denso en X y, por tanto, que X no es separable. ■

Como aproximabilidad por caminos implica densificabilidad en espacios métricos precompactos, es natural que nos preguntemos si existe un resultado análogo para la pseudo-densificabilidad en espacios métricos separables.

La respuesta es negativa, como ilustra el ejemplo a continuación.

Ejemplo 2.3.17 (Hipercubo Roto) $\mathfrak{H}$ *es separable y aproximable por caminos, pero no es pseudo-densificable para todas las métricas que inducen su topología.*

Demostración. Ya vimos en el Ejemplo 2.2.8 que $(\mathfrak{H}, \mathfrak{d})$ es pseudo-densificable (y, por tanto, separable y aproximable por caminos), pero que $\mathfrak{H}$ no es pseudo-densificable para sus métricas no acotadas. ■

El siguiente concepto es una extensión natural del concepto de aproximabilidad por caminos.

Definición 2.3.18 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico.*

X *es numerablemente aproximable por caminos si y sólo si para cada familia numerable de abiertos no vacíos* $\mathcal{F}$*, existe* $\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{I}^*, X)$ *tal que* $\gamma[\mathcal{I}^*]$ *interseque a cada miembro de* $\mathcal{F}$*.*

Claramente, conexión por caminos implica aproximabilidad numerable por caminos que, a su vez, implica aproximabilidad por caminos. Los resultados a continuación formalizan estas afirmaciones.

Proposición 2.3.19 *Todo espacio numerablemente aproximable por caminos es aproximable por caminos.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico numerablemente aproximable por caminos y $\mathfrak{F}$ una familia finita de abiertos no vacíos.

Por definición de aproximabilidad numerable por caminos, existe $\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{I}^*, X)$ tal que $\gamma[\mathcal{I}^*]$ interseque a cada miembro de $\mathcal{F}$.

Elijamos ahora arbitrariamente un punto

$$y_U \in \gamma[\mathcal{I}^*] \cap U \text{ para cada } U \in \mathcal{F}.$$

Como $\gamma[\mathcal{I}^*]$ es conexo por caminos, la Proposición 1.3.12 implica la existencia de una curva Γ verificando que

$$\{y_U : U \in \mathcal{F}\} \subset \Gamma,$$

de manera que Γ interseca a cada conjunto de $\mathcal{F}$.

Esto prueba el enunciado. ∎

Lema 2.3.20 *Todo espacio topológico conexo por caminos es numerablemente aproximable por caminos.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico conexo por caminos, y sea

$$\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \cdots\}$$

una familia numerable de abiertos no vacíos.

Eligiendo un x_k en cada U_k, como X es conexo por caminos, la Proposición 1.3.12 implica que existe

$$\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{I}^*, X) \text{ tal que } \mathcal{F} \subset \gamma[\mathcal{I}^*].$$

de manera que $\gamma[\mathcal{I}^*]$ interseca a cada miembro de $\mathcal{F}$.

Esto prueba el enunciado. ∎

Análogamente al resultado en los espacios métricos precompactos, tenemos la siguiente condición suficiente de pseudo-densificabilidad.

Proposición 2.3.21 *Todo espacio métrico separable y numerablemente aproximable por caminos es pseudo-densificable.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico separable y numerablemente aproximable por caminos.

Por definición de separabilidad, X posee un subconjunto D, numerable y denso.

Sea $\alpha > 0$ dado.

La familia

$$\left\{B\left(y, \frac{\alpha}{2}\right) : y \in D\right\}$$

es claramente un recubrimiento numerable de X, cuyos miembros son todos abiertos y no vacíos.

De esta manera, como X es numerablemente aproximable por caminos, existe $\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{I}^*, X)$ tal que $\gamma[\mathcal{I}^*]$ interseque a todos los miembros de la familia.

Para un $x \in X$ arbitrario, existe un $y_0 \in D$ tal que

$$x \in B\left(y_0, \frac{\alpha}{2}\right),$$

de manera que

$$d(\gamma[\mathcal{I}^*], x) \leq d(\gamma[\mathcal{I}^*], y_0) + d(y_0, x) \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

Como esto vale para cada $x \in X$, se sigue que $\mathcal{H}_d(\gamma[\mathcal{I}^*], X) \leq \alpha$.

Esto prueba que X es pseudo-densificable. ■

En particular, tenemos la siguiente condición suficiente e intrínseca para la pseudo-densificabilidad de un espacio métrico:

Corolario 2.3.22 *Todo espacio métrico separable y conexo por caminos es pseudo-densificable.*

Demostración. Basta observar que, por el Lema 2.3.20, conexión por caminos implica aproximabilidad numerable por caminos, y que la Proposición 2.3.21 prueba que todo espacio métrico separable y numerablemente aproximable por caminos es pseudo-densificable. ■

El ejemplo a continuación ilustra que el recíproco de la Proposición 2.3.21 no es cierto.

Ejemplo 2.3.23 (Hipercubo Roto) $(\mathfrak{H}, \mathfrak{d})$ *es pseudo-densificable, pero no es numerablemente aproximable por caminos.*

Demostración. Basta observar que, si $\mathfrak{H}$ fuese numerablemente aproximable por caminos, sería pseudo-densificable para todas las métricas que inducen su topología. ■

Cerraremos esta sección probando que la clausura mantiene la aproximabilidad y aproximabilidad numerable por caminos de un espacio.

Proposición 2.3.24 *Sean (X, d) un espacio métrico y D un subconjunto denso.*

Si D es (numerablemente) aproximable por caminos, otro tanto ocurre con X.

Demostración. Basta observar que, si $\mathcal{F}$ es una familia de abiertos no vacíos,

$$\{U \cap D : U \in \mathcal{F}\}$$

es una familia de abiertos no vacíos en D. ■

Capítulo 3

Espacios topológicamente densificables

3.1. Densificabilidad condicional y absoluta

Hemos visto en el Ejemplo 2.2.8 que la (pseudo-)densificabilidad es una propiedad métrica, es decir, un espacio puede ser densificable para una métrica y no ser densificable para otra métrica equivalente.

A continuación, estudiaremos dos tipos especiales de espacios metrizables: los que son densificables para todas las métricas que inducen su topología y los que son densificables para al menos una de ellas.

Formalmente, tenemos las siguientes definiciones:

Definición 3.1.1 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico metrizable.*

X es ***condicionalmente densificable*** *si y sólo si* (X, d) *es densificable para alguna métrica d que induce la topología τ.*

Definición 3.1.2 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico metrizable.*

X es ***condicionalmente pseudo-densificable*** *si y sólo si* (X, d) *es pseudo-densificable para alguna métrica d que induce la topología τ.*

Definición 3.1.3 *Sea* (X, τ) *un espacio metrizable.*

X es ***absolutamente densificable*** *si y sólo si* (X, d) *es densificable para toda métrica d que induce la topología τ.*

Claramente, densificabilidad absoluta implica (pseudo-)densificabilidad, que, a su vez, implica (pseudo-)densificabilidad condicional.

El recíproco no es cierto, como ilustra el ejemplo a continuación.

Ejemplo 3.1.4 $\mathbb{R}$ *es condicionalmente densificable, pero no es densificable.*

Demostración. En efecto, $\mathbb{R}$ no es densificable con la métrica euclídea, pero hereda una métrica precompacta de su embebimiento en $[-1, 1]$. ■

Obtendremos una caracterización completa de los espacios absolutamente densificables a partir de un corolario del Teorema de Metrización de Urysohn (1.2.8).

Teorema 3.1.5 *Un espacio metrizable es absolutamente densificable si y sólo si es compacto y aproximable por caminos.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio metrizable.

Para probar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que X sea absolutamente densificable.

Sea d una métrica que induce la topología τ. Como (X, d) es densificable, por el Teorema 2.3.13, es aproximable por caminos.

Por otro lado, si X no fuera compacto, admitiría una métrica no acotada ρ, en virtud de el Corolario 1.2.10, de manera que (X, ρ) no sería densificable y la densificabilidad de X no sería absoluta.

Esto prueba la primera implicación.

Para probar la implicación restante, supongamos que X sea compacto y aproximable por caminos.

Sea d una métrica que induce la topología τ. Como X es compacto, d es precompacta y, por el Teorema 2.3.13, X es densificable.

Esto prueba la implicación restante. ■

De manera similar, podemos caracterizar los espacios condicionalmente densificables.

Teorema 3.1.6 *Sea X un espacio metrizable. Los enunciados a continuación son equivalentes.*

(1) *X es condicionalmente densificable.*

(2) *X es condicionalmente pseudo-densificable.*

(3) *X es separable y aproximable por caminos.*

Demostración. El Teorema 2.3.13 prueba que

$$(1) \longrightarrow (2).$$

Por la Proposición 2.3.10 y la Proposición 2.3.15,

$$(2) \longrightarrow (3).$$

Finalmente, si X es separable, el Corolario 1.2.9 prueba que existe una métrica precompacta d que induce la topología τ.

Si, además, X es aproximable por caminos, (X, d) es densificable, en virtud del Teorema 2.3.13.

Esto prueba que

$$(3) \longrightarrow (1).$$ ■

El Teorema 3.1.6 indica que la densificabilidad condicional es una propiedad topológica, ya que ni la aproximabilidad por caminos ni la separabilidad de un espacio metrizable dependen de la métrica.

De esta manera, podemos extender el concepto de densificabilidad condicional a espacios no metrizables:

Definición 3.1.7 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **condicionalmente densificable** si y sólo si es separable y aproximable por caminos.*

La densificabilidad condicional, definida en espacios topológicos en general, también es una propiedad topológica. En efecto:

Proposición 3.1.8 *La densificabilidad condicional es invariante bajo sobreyecciones continuas.*

Demostración. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos, donde X es condicionalmente densificable, y $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ sobreyectiva.

Por la Proposición 2.3.7, Y es aproximable por caminos.

Además, como X es separable, posee un subconjunto numerable y denso D, de manera que

$$Y = f[X] = f\left[\overline{D}\right] \subset \overline{f[D]},$$

ya que f es continua.

Como D es numerable, $f[D]$ es numerable, de manera que Y es separable.

Esto prueba el enunciado. ■

Tenemos el siguiente resultado para espacios producto.

Proposición 3.1.9 *Sean L un conjunto e $\langle(X_\lambda, \tau_\lambda)\rangle_{\lambda\in L}$ una familia indexada de espacios topológicos.*

El espacio producto

$$\prod_{\lambda\in L} X_\lambda$$

es condicionalmente densificable si sólo si cada X_λ es condicionalmente densificable y

$$\operatorname{card}\{\lambda \in L : \operatorname{card} X_\lambda > 1\} \le \mathfrak{c}.$$

Demostración. Basta combinar el Teorema 1.1.13 y la Proposición 2.3.8. ■

Análogamente a la Proposición 2.2.9, tenemos el siguiente resultado para espacios topológicos en general.

Proposición 3.1.10 *Sea (X, τ) un espacio topológico y D un subconjunto denso.*

Si D es condicionalmente densificable, otro tanto ocurre con X.

Demostración. La Proposición 2.3.24 prueba que X es aproximable por caminos.

Además, si C es denso en D,

$$\overline{C} = \overline{\overline{C}} \supset \overline{D} = X,$$

por lo que la separabilidad de X se sigue de la de D.

Esto prueba el enunciado. ■

3.2. Densificabilidad secuencial

En todo espacio métrico densificable existen, por definición, sucesiones de curvas $\langle \Gamma_n \rangle$ tales que cada Γ_n sea α_n-densa y $\langle \alpha_n \rangle$ converja a cero. Bien entendido, estas sucesiones puede existir sólo en espacios precompactos.

Sin embargo, la propiedad de densificabilidad condicional es topológica, lo cual sugiere estudiar las propiedades topológicas de estas sucesiones.

Definición 3.2.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

Una sucesión $\langle Y_n \rangle$ de subconjuntos de X es ***asintóticamente densa por sucesiones*** *en X si y sólo si para cada $a \in X$, existe una sucesión $\langle x_n \rangle$ en X tal que*

$$x_n \longrightarrow a \text{ y } x_n \in Y_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

En espacios métricos, las sucesiones asintóticamente densas por sucesiones de curvas se pueden identificar utilizando la distancia de Hausdorff.

Teorema 3.2.2 *Sean (X, d) un espacio precompacto y $\langle \Gamma_n \rangle$ una sucesión de curvas en X.*

$\langle \Gamma_n \rangle$ es asintóticamente densa por sucesiones en X si y sólo si

$$\mathcal{H}_d (\Gamma_n, X) \longrightarrow 0.$$

Demostración. Para probar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que $\langle \Gamma_n \rangle$ sea asintóticamente densa por sucesiones en X.

Por reducción al absurdo, supongamos además que

$$\mathcal{H}_d (\Gamma_n, X) \not\longrightarrow 0.$$

Como la sucesión $\langle \mathcal{H}_d (\Gamma_n, X) \rangle$ es no negativa, esto implica que

$$s := \limsup \mathcal{H}_d (\Gamma_n, X) > 0,$$

de manera que $\langle \Gamma_n \rangle$ posee una subsucesión $\langle \Gamma_{n_k} \rangle$ tal que

$$\mathcal{H}_d (\Gamma_{n_k}, X) \longrightarrow s.$$

Por definición de convergencia, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{H}_d (\Gamma_{n_k}, X) > \frac{s}{2} \text{ siempre que } k > k_0.$$

Así, para cada $k > k_0$, podemos elegir $x_k \in X$ tal que

$$d (x_k, \Gamma_{n_k}) > \frac{s}{4},$$

ya que

$$\frac{s}{4} < \frac{1}{2} \mathcal{H}_d (\Gamma_{n_k}, X) = \sup_{x \in X} d (x, \Gamma_{n_k}).$$

Como (X, d) es precompacto, la sucesión $\langle x_k \rangle_{k>k_0}$ posee una subsucesión de Cauchy $\langle x_{k_j} \rangle$.

Por definición de sucesión de Cauchy, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d\left(x_{k_j}, x_{k_i}\right) < \frac{s}{8} \text{ siempre que } j, i > j_0$$

y, en particular,

$$d\left(x_{k_j}, a\right) < \frac{s}{8} \text{ siempre que } j > j_0, \text{ donde } a = x_{k_{j_0+1}}.$$

Como $\langle \Gamma_n \rangle$ es asintóticamente densa por sucesiones en X, existe una sucesión $\langle a_n \rangle$ en X tal que

$$a_n \longrightarrow a \text{ y } a_n \in \Gamma_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo, si $j > j_0$, tenemos que

$$\frac{s}{4} < d\left(x_{k_j}, \Gamma_{n_{k_j}}\right) \le d\left(x_{k_j}, a_{n_{k_j}}\right) \le d\left(a, a_{n_{k_j}}\right) + d\left(x_{k_j}, a\right) < d\left(a, a_{n_{k_j}}\right) + \frac{s}{8},$$

de manera que

$$d\left(a, a_{n_{k_j}}\right) > \frac{s}{8} \text{ para cada } j > j_0.$$

Esto es una contradicción, pues

$$a_n \longrightarrow a,$$

lo cual prueba la primera implicación.

Para probar la implicación inversa, supongamos que

$$\mathcal{H}_d\left(\Gamma_n, X\right) \longrightarrow 0$$

y sea $b \in X$ dado.

Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$d\left(\Gamma_n, b\right) \le \mathcal{H}_d\left(\Gamma_n, X\right),$$

de manera que podemos elegir

$$b_n \in \Gamma_n \text{ tal que } d\left(b_n, b\right) < \mathcal{H}_d\left(\Gamma_n, X\right) + \frac{1}{n}.$$

Como

$$\mathcal{H}_d\left(\Gamma_n, X\right) + \frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

tenemos que

$$b_n \longrightarrow b.$$

Esto prueba la implicación restante. ■

Corolario 3.2.3 *Sean (X, d) un espacio precompacto, ρ una métrica precompacta equivalente a d y $\langle \Gamma_n \rangle$ una sucesión de curvas en X.*

En estas condiciones,

$$\mathcal{H}_d\left(\Gamma_n, X\right) \longrightarrow 0 \text{ si y sólo si } \mathcal{H}_\rho\left(\Gamma_n, X\right) \longrightarrow 0$$

Demostración. Basta observar que ambas sucesiones de distancias convergen a cero si y sólo si $\langle \Gamma_n \rangle$ es asintóticamente densa por sucesiones en X. ■

Ya que la densidad asintótica por sucesiones es una propiedad topológica, la existencia de sucesiones asintóticamente densas por sucesiones de curvas también lo es. Formalmente:

Definición 3.2.4 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

X es ***secuencialmente densificable*** *si y sólo si posee una sucesión asintóticamente densa por sucesiones de curvas.*

Esta definición extiende el concepto de densificabilidad condicional a todos los espacios topológicos. Corroboremos esta afirmación.

Proposición 3.2.5 *Sea (X, τ) un espacio metrizable.*

X es secuencialmente densificable si y sólo si es condicionalmente densificable.

Demostración. Para probar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que X sea secuencialmente densificable.

Por definición, X admite una sucesión de curvas asintóticamente densa por sucesiones $\langle \Gamma_n \rangle$.

De la definición de densidad asintótica por sucesiones, se sigue inmediatamente que

$$Y := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

es denso en X.

Como cada Γ_n es separable, Y es separable; en consecuencia, X es separable.

Por el Corolario 1.2.9, existe una métrica precompacta d que induce la topología τ, de manera que

$$\mathcal{H}_d(\Gamma_n, X) \longrightarrow 0,$$

en virtud del Teorema 3.2.2.

Por tanto, (X, d) es densificable y (X, τ) es condicionalmente densificable, lo cual prueba la implicación de izquierda a derecha.

Para probar la implicación inversa, supongamos que X sea condicionalmente densificable.

Por definición, existe una métrica ρ que induce la topología τ y tal que (X, ρ) sea densificable.

Así, existe una sucesión de curvas $\langle \Phi_n \rangle$ tal que

$$\mathcal{H}_d(\Phi_n, X) \leq n^{-1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

de manera que $\langle \Phi_n \rangle$ es asintóticamente densa por sucesiones, en virtud del Teorema 3.2.2.

Esto prueba la implicación restante. ■

La densificabilidad secuencial es una propiedad topológica. En efecto:

Proposición 3.2.6 *Sean* (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y) *espacios topológicos y* $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ *sobreyectiva.*

Si $\langle \Gamma_n \rangle$ *es una sucesión de curvas asintóticamente densa por sucesiones en* X*,* $\langle f[\Gamma_n] \rangle$ *es una sucesión asintóticamente densa por sucesiones en* Y*.*

Demostración. Sea $a \in Y$ arbitrario.

Como f es sobreyectiva, existe

$$b \in X \text{ tal que } f(b) = a,$$

de manera que existe $\langle x_n \rangle$ in X tal que cada $x_n \in \Gamma_n$ y

$$x_n \longrightarrow b.$$

Por la continuidad de f, se sigue que

$$f(x_n) \longrightarrow a,$$

donde cada $f(x_n) \in f[\Gamma_n]$.

Como la imagen de una curva por una función continua es, nuevamente, una curva, se sigue que $\langle f[\Gamma_n] \rangle$ es una sucesión de curvas asintóticamente densa por sucesiones en Y.

Esto prueba el enunciado. ■

Corolario 3.2.7 *La densificabilidad secuencial es invariante bajo sobreyecciones continuas.*

Demostración. Basta elegir una sucesión asintóticamente densa por sucesiones en el dominio y aplicar la Proposición 3.2.6. ■

Veamos un ejemplo de espacio secuencialmente densificable que no es metrizable.

Ejemplo 3.2.8 *Sean*

$$X := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*, \varphi : \mathbb{R} \to X$$

la aplicación definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t \in X \\ 0 & \text{si} \quad t \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

y

$$\tau = \left\{ U \subset X : \varphi^{-1}[U] \text{ es abierto en } \mathbb{R} \right\}.$$

El espacio topológico (X, τ) *es secuencialmente densificable, pero no es metrizable.*

Demostración. Es inmediato verificar que τ es efectivamente una topología y que φ es sobreyectiva.

Ya vimos en el Ejemplo 3.1.4 que $\mathbb{R}$ es condicionalmente densificable, de manera que es secuencialmente densificable en virtud de la Proposición 3.2.5.

Como φ es, por construcción, continua, se sigue que X es secuencialmente densificable.

Afirmamos que X no es metrizable. En efecto:

Supongamos que sí. Entonces X admite una métrica d que induce la topología τ.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$U_n := B_d\left(0, n^{-1}\right) \text{ y } V_n := \varphi^{-1}\left[U_n\right] = U_n \cup \mathbb{Z}.$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$, como V_n es abierto en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z} \subset V_n$, existe $r_{n,k} \in (0,1)$ tal que

$$(k - r_{n,k}, k + r_{n,k}) \subset V_n$$

y, por tanto,

$$(k - r_{n,k}, k) \cup (k, k + r_{n,k}) = \varphi\left[(k - r_{n,k}, k + r_{n,k})\right] \subset U_n.$$

Sean

$$V = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k - \frac{r_{|k|,k}}{2}, k + \frac{r_{|k|,k}}{2}\right)$$

y

$$U := \varphi\left[V\right] = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left(k - \frac{r_{|k|,k}}{2}, k\right) \cup \left(k, k + \frac{r_{|k|,k}}{2}\right)\right).$$

Como d induce τ y U es un entorno de 0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$U_{n_0} \subset U,$$

de manera que

$$a := n_0 + \frac{r_{n_0,n_0}}{2} \in U_{n_0} \subset U.$$

Por definición de unión, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a \in \left(k_0 - \frac{r_{|k_0|,k_0}}{2}, k_0\right) \cup \left(k_0, k_0 + \frac{r_{|k_0|,k_0}}{2}\right),$$

de manera que

$$\left|2\left(n_0 - k_0\right) + r_{n_0,n_0}\right| = 2\left|n_0 + \frac{r_{n_0,n_0}}{2} - k_0\right| = 2\left|a - k_0\right| < r_{|k_0|,k_0}.$$

Claramente, $n_0 \neq k_0$, de manera que

$$1 = 2 - 1 < 2\left|n_0 - k_0\right| - r_{n_0,n_0} \leq \left|2\left(n_0 - k_0\right) + r_{n_0,n_0}\right| < r_{|k_0|,k_0} \leq 1.$$

Esta contradicción prueba el enunciado. ■

Hasta ahora, hemos presentado dos extensiones del concepto de densificabilidad condicional a espacios no metrizables.

Veamos que estas extensiones no son equivalentes.

Ejemplo 3.2.9 *$\beta\mathbb{R}$ es condicionalmente densificable, pero no secuencialmente densificable.*

Demostración. Como $\mathbb{R}$ es condicionalmente densificable, $\beta\mathbb{R}$ también lo es, en virtud de la Proposición 3.1.10.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\beta\mathbb{R}$ sea secuencialmente densificable, es decir, que $\beta\mathbb{R}$ admita una sucesión de curvas asintóticamente densa por sucesiones $\langle\Gamma_n\rangle$.

Como $\mathbb{R}$ no es compacto, podemos fijar

$$a \in \beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R},$$

de manera que deben existir $\langle x_n\rangle$ y $\langle z_n\rangle$ en $\beta\mathbb{R}$ tales que

$$x_n, z_n \in \Gamma_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, x_n \longrightarrow a \text{ y } z_n \longrightarrow 0.$$

Por la Proposición 1.4.3, $\mathbb{R}$ es secuencialmente cerrado en $\beta\mathbb{R}$, de manera que infinitos términos de $\langle x_n\rangle$ deben estar en $\beta\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}$; sea $\langle x_{n_k}\rangle$ la subsucesión formada por dichos términos.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$x_{n_k} \in (\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}) \cap \Gamma_{n_k},$$

de manera que

$$z_{n_k} \in \Gamma_{n_k} = \{x_{n_k}\} \text{ para cada } k \in \mathbb{N},$$

en virtud de la Proposición 1.4.7.

Por tanto,

$$z_{n_k} \longrightarrow a,$$

lo cual constituye una contradicción, ya que

$$z_n \longrightarrow 0$$

y, por el Teorema de Stone-Čech (1.4.2), $\beta\mathbb{R}$ es de Hausdorff.

Esto prueba el enunciado. ■

De especial importancia es el siguiente hecho.

Ejemplo 3.2.10 *$\mathbb{R} \subset \beta\mathbb{R}$ es secuencialmente densificable, pero $\overline{\mathbb{R}} = \beta\mathbb{R}$ no lo es.*

Demostración. Ya vimos en el Ejemplo 3.2.9 que $\beta\mathbb{R}$ no es secuencialmente densificable.

Afirmamos que la sucesión de curvas $\langle[-n, n]\rangle$ es asintóticamente densa por sucesiones en $\mathbb{R}$. En efecto:

Sea $a \in \mathbb{R}$ y definamos la sucesión $\langle x_n \rangle$ mediante

$$x_n = \begin{cases} a & \text{si} \quad n \geq |a| \\ 0 & \text{si} \quad n < |a| \end{cases} .$$

Así,

$$x_n \in [-n, n] \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

y, fijando $n_0 > |a|$, tenemos que

$$x_n = a \text{ para cada } n > n_0.$$

Esto prueba el enunciado. ■

Cerraremos esta sección con un resultado que proporciona una fuente natural de espacios secuencialmente densificables.

Proposición 3.2.11 *Todo espacio conexo por caminos y secuencialmente separable (X, τ) es secuencialmente densificable.*

Demostración. Por definición de separabilidad secuencial, X posee un subconjunto numerable

$$D = \{y_1, y_2, \cdots\}$$

tal que $\dddot{D} = X$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escojamos una curva Γ_n tal que

$$F_n \subset \Gamma_n \text{ donde } F_n = \{y_1, \cdots, y_n\}.$$

Afirmamos que $\langle \Gamma_n \rangle$ es asintóticamente densa por sucesiones en X. En efecto:

Sea $a \in X$ arbitrario.

Como $\dddot{D} = X$, existe una sucesión $\langle x_n \rangle$ en D tal que

$$x_n \longrightarrow a.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $x_1 = y_1$.

Sea $k_1 = 1$. Una vez definidos

$$k_1, \cdots, k_n,$$

sea

$$k_{n+1} = \begin{cases} k_n + 1 & \text{si } x_{k_n+1} \in F_{n+1} \\ k_n & \text{en caso contrario} \end{cases} .$$

Tenemos que $x_{k_1} \in F_1$ por construcción, y si $x_{k_n} \in F_n$, se satisface que

$$x_{k_{n+1}} = x_{k_n+1} \in F_{n+1} \text{ o } x_{k_{n+1}} = x_{k_n} \in F_n.$$

Por inducción,

$$x_{k_n} \in F_n \subset \Gamma_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Además, $1 \in k[\mathbb{N}]$ por construcción. Supongamos que $m \in k[\mathbb{N}]$, de manera que

$$m = k_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$x_{k_n+1} \in F_{k_n+1},$$

tenemos que

$$j_0 \coloneqq \max \{\min \{j \in \mathbb{N} : x_{k_n+1} \in F_j\}, n+1\}$$

está bien definido y $j_0 > n$.

Si

$$n \leq j < j_0,$$

tenemos que

$$x_{k_n+1} \notin F_j \text{ o } j = n,$$

de manera que

$$k_{j_0-1} = \cdots = k_j = \cdots = k_n = m.$$

Así,

$$k_{j_0} = k_n + 1 = m + 1, \text{ ya que } x_{k_n+1} \in F_{j_0}$$

y, por inducción,

$$k[\mathbb{N}] = \mathbb{N}.$$

Finalmente, sea U un abierto arbitrario tal que $a \in U$.

Como

$$x_n \longrightarrow a,$$

existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_m \in U \text{ para cada } m > m_0.$$

Si

$$n > n_0 \coloneqq \min \{n \in \mathbb{N} : k_n = m_0 + 1\},$$

tenemos que

$$x_{k_n} \in U, \text{ ya que } k_n \geq k_{n_0} = m_0 + 1 > m_0.$$

Por tanto,

$$x_n \longrightarrow a$$

y $\langle \Gamma_n \rangle$ es asintóticamente densa por sucesiones en X, como hemos afirmado. ■

3.3. Densificabilidad topológica

Hemos visto en la Proposición 3.2.5 y en el Ejemplo 3.2.9 que los conceptos de densificabilidad secuencial y condicional son equivalentes en espacios metrizables, pero no en espacios topológicos en general.

El Ejemplo 3.2.10 sugiere que esta no equivalencia se debe a que $\beta\mathbb{R}$ no es un espacio de Fréchet-Urysohn.

Esto sugiere definir un concepto afín a la densidad asintótica por sucesiones que haga uso de entornos en vez de sucesiones.

Definición 3.3.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

Una sucesión $\langle Y_n \rangle$ de subconjuntos de X es ***asintóticamente densa*** *en X si y sólo si para cada abierto no vacío $U \subset X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$Y_n \cap U \neq \varnothing \text{ para cada } n > n_0.$$

El siguiente ejemplo muestra que los conceptos de densidad asintótica por sucesiones y densidad asintótica no son equivalentes.

Ejemplo 3.3.2 *La sucesión de curvas $\langle [-n, n] \rangle$ es asintóticamente densa en $\beta\mathbb{R}$.*

Demostración. Como $\mathbb{R}$ es denso en $\beta\mathbb{R}$, cada abierto no vacío U interseca a $\mathbb{R}$.

Fijando $a \in U \cap \mathbb{R}$, tenemos que

$$U \cap [-n, n] \neq \varnothing \text{ para cada } n > n_0$$

siempre que $n_0 \geq |a|$. ■

Esta no equivalencia nos deja con la siguiente duda: ¿Cuál de los conceptos de densidad es el más fructífero?

En general, esta pregunta es demasiado abierta para ser contestada. Limitemos nuestro objetivo a determinar condiciones suficientes, tan débiles como sea posible, para que una sucesión de curvas pueda ser utilizada para reducir cualquier problema de optimización global a una serie de problemas de optimización global en $\mathcal{I}$.

La densidad asintótica es una condición suficiente para este propósito, como veremos a continuación.

Proposición 3.3.3 *Sean (X, d) un espacio topológico y $\langle \Gamma_n \rangle$ una sucesión de curvas asintóticamente densa en X.*

Si $f \in \mathcal{C}(X)$ es inferiormente acotada,

$$\min f[\Gamma_n] \longrightarrow \inf f[X].$$

Demostración. Sean

$$m_n = \min f[\Gamma_n] \text{ y } m = \inf f[X].$$

Observemos que m está bien definido, pues f es inferiormente acotada, al igual que cada m_n, pues f es continua y cada Γ_n es compacto.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por definición de ínfimo, debe existir

$$m_\varepsilon \in [m, m+\varepsilon) \cap f[X],$$

y sea $r > 0$ tal que

$$(m_\varepsilon - r, m_\varepsilon + r) \subset (m - \varepsilon, m + \varepsilon) .$$

Como f es continua,

$$U := f^{-1}[(m-r, m+r)]$$

es abierto, de manera que, por hipótesis, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Gamma_n \cap U \neq \varnothing \text{ para cada } n > n_0.$$

Fijando

$$x_n \in \Gamma_n \cap U \text{ para cada } n > n_0,$$

vemos que

$$m \leq m_n \leq f(x_n) < m_\varepsilon + r \leq m + \varepsilon \text{ para cada } n > n_0.$$

Esto prueba el enunciado. ■

En algunos espacios, la condición de densidad asintótica podría ser debilitada, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.4 *Sea $(\mathfrak{S}, \tau)$ el espacio de Sierpiński, es decir,*

$$\mathfrak{S} = \{0, 1\} \text{ y } \tau = \{\varnothing, \{0\}, \mathfrak{S}\} .$$

La sucesión $\langle\{1\}\rangle$ no es asintóticamente densa (por sucesiones) en $\mathfrak{S}$.

Sin embargo, toda función $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{S})$ satisface que

$$\min f[\{1\}] \longrightarrow \inf f[\mathfrak{S}] .$$

Demostración. $\langle\{1\}\rangle$ no es asintóticamente densa en $\mathfrak{S}$ porque

$$\{0\} \cap \{1\} = \varnothing \text{ donde } \{0\} \in \tau.$$

Para corroborar la segunda observación, basta observar que cada $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{S})$ es necesariamente constante.

Esto prueba el enunciado. ■

En contraste al ejemplo anterior, el resultado a continuación prueba que los espacios topológicamente densificables y completamente regulares pueden ser caracterizados por ser susceptibles al método de reducción de variables de la Proposición 3.3.3.

Teorema 3.3.5 *Sean (X, τ) un espacio completamente regular y $\langle\Gamma_n\rangle$ una sucesión de curvas en X. Los enunciados a continuación son equivalentes.*

(1) $\langle \Gamma_n \rangle$ *es asintóticamente densa en* X.

(2) *Para cada* $f \in \mathcal{C}(X)$ *inferiormente acotada, se tiene que*

$$\min f[\Gamma_n] \longrightarrow \inf f[X].$$

Demostración. La Proposición 3.3.3 prueba que

$$(1) \longrightarrow (2).$$

Para probar que

$$(2) \longrightarrow (1),$$

supongamos, por reducción al absurdo, que $\langle \Gamma_n \rangle$ no sea asintóticamente densa en X.

Por definición, existe $U \subset X$ abierto tal que

$$J := \{n \in \mathbb{N} : U \cap \Gamma_n = \varnothing\}$$

sea infinito, es decir, existe una sucesión estrictamente creciente

$$\langle n_k \rangle \text{ tal que } J = n[\mathbb{N}].$$

Fijemos $a \in U$. Como X es completamente regular, existe $f \in \mathcal{C}(X, \mathcal{I})$ tal que

$$f(a) = 0 \text{ y } f[U^c] = \{1\}.$$

Como

$$\Gamma_{n_k} \subset U^c,$$

tenemos que

$$\min f[\Gamma_{n_k}] = 1 \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Por (2),

$$\inf f[X] = \lim \min f[\Gamma_{n_k}] = 1 > 0 = f(a) \geq \inf f[X].$$

Esta contradicción prueba que

$$(2) \longrightarrow (1).$$

■

Este resultado prueba que, al menos en espacios completamente regulares, la condición de densidad asintótica no puede ser debilitada sin perder la posibilidad de reducir cualquier problema de optimización global en dicho espacio a una serie de problemas de optimización global en $\mathcal{I}$, es decir, la densidad asintótica es la condición óptima para este propósito.

En contraste con el Ejemplo 3.3.2, densidad asintótica y densidad asintótica por sucesiones son equivalentes en espacio métricos.

Proposición 3.3.6 *Sea* (X, τ) *un espacio e* $\langle Y_n \rangle$ *una sucesión de subconjuntos de* X.

Si $\langle Y_n \rangle$ *es asintóticamente densa por sucesiones en* X*, es asintóticamente densa en* X.

Demostración. Si $U \subset X$ es abierto y no vacío, podemos fijar $a \in U$.

Por definición de densidad asintótica por sucesiones, existe una sucesión $\langle x_n \rangle$ tal que cada $x_n \in Y_n$ y

$$x_n \longrightarrow a.$$

Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in U \text{ para cada } n > n_0,$$

de manera que

$$U \cap Y_n \neq \varnothing \text{ para cada } n_0 \in \mathbb{N},$$

$\langle Y_n \rangle$ es asintóticamente densa en X.

Esto prueba el enunciado. ■

Teorema 3.3.7 *Sea (X, d) un espacio métrico e $\langle Y_n \rangle$ una sucesión de subconjuntos de X.*

$\langle Y_n \rangle$ es asintóticamente densa en X si y sólo si es asintóticamente densa por sucesiones en X.

Demostración. Para probar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que $\langle Y_n \rangle$ sea asintóticamente densa en X.

Sea $a \in X$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, por definición de densidad asintótica, existe

$$n_k \in \mathbb{N} \text{ tal que } Y_n \cap B\left(a, k^{-1}\right) \neq \varnothing \text{ si } n > n_k.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la sucesión $\langle n_k \rangle$ es estrictamente creciente.

Definamos la sucesión $\langle x_n \rangle$ como sigue:

Sea $n \in \mathbb{N}$.

Tomando $n_0 = 0$, existe un único

$$k \in \mathbb{N} \text{ tal que } n_k < n \leq n_{k+1}.$$

De esta manera, podemos elegir

$$x_n \in Y_n \cap B\left(a, k^{-1}\right)^{\dagger}$$

Así,

$$d\left(x_n, a\right) < k^{-1} \text{ siempre que } n > n_k.$$

Esto prueba la primera implicación.

Por la Proposición 3.3.6, la implicación restante se satisface en espacios topológicos en general. ■

† Convendremos que $B\left(a, 0^{-1}\right) = X$.

Esto nos permite reformular el Teorema 3.2.2 en función de la densidad asintótica.

Corolario 3.3.8 *Sean (X, d) un espacio precompacto y $\langle \Gamma_n \rangle$ una sucesión de curvas en X.*

En estas condiciones, $\langle \Gamma_n \rangle$ es asintóticamente densa en X si y sólo si

$$\mathcal{H}_d(\Gamma_n, X) \longrightarrow 0.$$

Demostración. Basta combinar el Teorema 3.2.2 con el Teorema 3.3.7. ■

Ya que la densidad asintótica es una propiedad topológica, la existencia de sucesiones asintóticamente densas de curvas también lo es. Formalmente:

Definición 3.3.9 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **topológicamente densificable** si y sólo si posee una sucesión asintóticamente densa de curvas.*

Como hemos visto en el Teorema 3.3.5, los espacios topológicamente densificables son precisamente aquellos en los que cualquier problema de optimización global se reduce a un problema de optimización global en $\mathcal{I}$, excepto para los espacios no completamente regulares.

La densificabilidad topológica es una propiedad topológica. En efecto:

Proposición 3.3.10 *Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ sobreyectiva.*

Si $\langle \Gamma_n \rangle$ es una sucesión (de curvas) asintóticamente densa en X, $\langle f[\Gamma_n] \rangle$ es una sucesión (de curvas) asintóticamente densa en Y.

Demostración. Sea $U \subset Y$ abierto y no vacío.

Como f es continua y sobreyectiva,

$$V := f^{-1}[U]$$

es abierto y no vacío, de manera que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$V \cap \Gamma_n \neq \varnothing \text{ para cada } n > n_0.$$

Luego,

$$U \cap f[\Gamma_n] \supset f\left[f^{-1}[U]\right] \cap f[\Gamma_n] \supset f\left[f^{-1}[U] \cap \Gamma_n\right] = f[V \cap \Gamma_n] \neq \varnothing,$$

de manera que $\langle f[\Gamma_n] \rangle$ es asintóticamente densa en Y.

Finalmente, como la imagen de una curva por una función continua es, nuevamente, una curva, se sigue que $\langle f[\Gamma_n] \rangle$ es una sucesión de curvas si lo es $\langle f[\Gamma_n] \rangle$.

Esto prueba el enunciado. ■

Corolario 3.3.11 *La densificabilidad topológica es invariante bajo sobreyecciones continuas.*

Demostración. Basta elegir una sucesión de curvas asintóticamente densa en el dominio y aplicar la Proposición 3.3.10. ■

Tenemos los siguientes resultados para espacios producto.

Proposición 3.3.12 *Sea L un conjunto y $\langle(X_\lambda,\tau_\lambda)\rangle_{\lambda\in L}$ una familia indexada de espacios topológicos, y para cada $\lambda\in L$, sea $\langle Y_{\lambda,n}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos del espacio producto*

$$X \coloneqq \prod_{\lambda\in L} X_\lambda.$$

La sucesión $\langle Y_n\rangle$ definida por

$$Y_n \coloneqq \prod_{\lambda\in L} Y_{\lambda,n}$$

es asintóticamente densa en X si y sólo si cada sucesión $\langle Y_{\lambda,n}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ es asintóticamente densa en X_λ.

Demostración. Sea π_λ la proyección sobre el λ-ésimo factor.

Para probar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que $\langle Y_n\rangle$ sea asintóticamente densa en X.

Para cada $\lambda\in L$,

$$\pi_\lambda : X \to X_\lambda$$

es una sobreyección continua y satisface

$$\pi_\lambda\left[Y_n\right] = Y_{\lambda,n},$$

de manera que cada $\langle Y_{\lambda,n}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ es asintóticamente densa en X_λ, en virtud de la Proposición 3.3.10.

Esto prueba la primera implicación.

Para probar la implicación inversa, supongamos que cada $\langle Y_{\lambda,n}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ sea asintóticamente densa en X_λ.

Sea U un abierto de X, de manera que existen

$$\lambda_1,\cdots,\lambda_j\in\mathbb{N},$$

dos a dos distintos, y

$$V_1\in\tau_{\lambda_1},\cdots,V_j\in\tau_{\lambda_j} \text{ tales que } \varnothing\neq\bigcap_{i=1}^{j}\pi_{\lambda_i}^{-1}\left[V_i\right]\subset U.$$

Para cada V_i, como $\langle Y_{\lambda_i,k}\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ es asintóticamente densa en X_{λ_i}, existe

$$k_i\in\mathbb{N} \text{ tal que } Y_{\lambda_i,k}\cap V_i\neq\varnothing \text{ para cada } k>k_i.$$

Dado

$$k>k_0\coloneqq \text{máx}\left\{k_1,\cdots,k_j\right\},$$

elijamos

$$x_{\lambda_i} \in Y_{\lambda_i,k} \cap V_i \text{ para cada } i \in \{1, \cdots, j\}$$

y fijemos arbitrariamente

$$x_n \in Y_{n,k} \text{ si } n \notin \{\lambda_1, \cdots, \lambda_j\}.$$

De esta manera

$$\langle x_n \rangle \in \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_{n,k} \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{j} \pi_{\lambda_i}^{-1} [V_i] \right) \subset Y_k \cap U$$

y $\langle Y_k \rangle$ es asintóticamente densa en X.

Esto prueba el enunciado. ■

Corolario 3.3.13 *Si el producto de espacios topológicos es topológicamente densificable, cada factor es topológicamente densificable.*

Demostración. Basta elegir una sucesión de curvas asintóticamente densa en el espacio producto y aplicar la Proposición 3.3.12. ■

Proposición 3.3.14 *Sea $\langle (X_n, \tau_n) \rangle$ una sucesión de espacios topológicos.*

Si cada X_n es topológicamente densificable, otro tanto ocurre con el espacio producto

$$X \coloneqq \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como X_n es topológicamente densificable, existe una sucesión de curvas $\langle \Gamma_{n,k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ asintóticamente densa en X_n.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$\Gamma_k \coloneqq \prod_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{n,k}.$$

Por la Proposición 1.3.6, cada Γ_k es una curva.

Además, como cada sucesión $\langle \Gamma_{n,k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ es asintóticamente densa en X_n, $\langle \Gamma_k \rangle$ es asintóticamente densa en X, en virtud de la Proposición 3.3.12.

Esto prueba el enunciado. ■

Determinar si el producto de $\mathfrak{c}$ espacios topológicamente densificables es, en general, topológicamente densificable aún constituye un problema abierto.

Análogamente a la Proposición 3.1.10, tenemos el siguiente resultado para la densificabilidad topológica.

Proposición 3.3.15 *Sea (X, τ) un espacio topológico y D un subconjunto denso.*

Si D es topológicamente densificable, otro tanto ocurre con X.

Demostración. Como D es topológicamente densificable existe una sucesión de curvas $\langle \Gamma_n \rangle$ en D que es asintóticamente densa en D.

Sea $U \subset X$ abierto, de manera que

$$D_U := U \cap D$$

es abierto en D.

Como D es denso en X, D_U es no vacío, de manera que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$D \supset D_U \cap \Gamma_n \neq \varnothing \text{ para cada } n > n_0.$$

Esto prueba el enunciado. ∎

Dedicaremos el resto de este capítulo a determinar qué relaciones existen entre los conceptos de conexión por caminos y densificabilidad topológica, secuencial y condicional.

La densificabilidad secuencial es más fuerte que la densificabilidad topológica. Formalmente:

Proposición 3.3.16 *Todo espacio secuencialmente densificable es topológicamente densificable.*

Demostración. Basta elegir una sucesión de curvas asintóticamente densa por sucesiones en el espacio y aplicar la Proposición 3.3.6. ∎

Combinando este resultado con el ejemplo a continuación, podemos observar que la densificabilidad secuencial es estrictamente más fuerte que la densificabilidad topológica.

Ejemplo 3.3.17 *$\beta\mathbb{R}$ es topológicamente densificable, pero no secuencialmente densificable.*

Demostración. Hemos visto en el Ejemplo 3.3.2 que $\langle [-n, n] \rangle$ es asintóticamente densa en $\beta\mathbb{R}$, y en el Ejemplo 3.2.9, que $\beta\mathbb{R}$ no admite sucesiones de curvas asintóticamente densas por sucesiones. ∎

A su vez, la densificabilidad topológica es más fuerte que la densificabilidad condicional. Formalmente:

Proposición 3.3.18 *Todo espacio topológicamente densificable es condicionalmente densificable.*

Demostración. Sean (X, τ) un espacio topológicamente densificable. Por definición, X admite una sucesión de curvas asintóticamente densa $\langle \Gamma_n \rangle$.

Sea $\mathcal{F}$ una familia finita de abiertos no vacíos.

Para cada $U \in \mathcal{F}$ existe, por definición de densidad asintótica, $n_U \in \mathbb{N}$ tal que

$$U \cap \Gamma_n \neq \varnothing \text{ para cada } n > n_U.$$

Así, si

$$n > \max_{U \in \mathcal{F}} n_U,$$

se satisface que

$$U \cap \Gamma_n \neq \varnothing \text{ para cada } U \in \mathcal{F}$$

y X es, por tanto, aproximable por caminos.

Finalmente, de la definición de densidad topológica, se sigue inmediatamente que

$$Y := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

es denso en X.

Como cada Γ_n es separable, Y es separable; en consecuencia, X es separable.

Esto prueba el enunciado. ■

Los ejemplos a continuación ilustran que la densificabilidad topológica es estrictamente más fuerte que la densificabilidad condicional.

Notación 3.3.19 *ω simbolizará el cardinal de $\mathbb{N}$.*

Ejemplo 3.3.20 *Como subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,*

$$\mathfrak{A}_1 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \operatorname{card} f^{-1}[\mathbb{R}^*] \leq \omega \right\}$$

es conexo por caminos, secuencialmente cerrado y denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pero no es separable.

Demostración. Dados $f, g \in \mathfrak{A}_1$, es claro que

$$((1-t) f + tg)^{-1} [\mathbb{R}^*] \subset f^{-1} [\mathbb{R}^*] \cup g^{-1} [\mathbb{R}^*],$$

de manera que $\mathfrak{A}_1$ es convexo y, por tanto, conexo por caminos.

Para ver que $\mathfrak{A}_1$ es denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, sea $U \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ abierto y no vacío.

Entonces U contiene un abierto básico de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_i}^{-1} [V_i],$$

donde cada λ_i es un número real distinto, cada V_i es abierto en $\mathbb{R}$ y π_λ denota la proyección sobre el λ-ésimo factor de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Escogiendo un a_i en cada V_i, la función $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definida por

$$f(\lambda) = \begin{cases} a_i & \text{si } \lambda = \lambda_i \\ 0 & \text{si } \lambda \notin \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \end{cases}$$

pertenece claramente a

$$\mathfrak{A}_1 \cap \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_i}^{-1} [V_i] \subset \mathfrak{A}_1 \cap U$$

y $\mathfrak{A}_1$ es, por tanto, denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Por último, sea $Y \subset \mathfrak{A}_1$ numerable y definamos

$$X := \bigcup_{f \in Y} f^{-1}[\mathbb{R}^*],$$

que es numerable, por ser unión numerable de conjuntos numerables.

Sean

$$f_0 \in \overline{Y} \text{ y } \lambda_0 \in X^{\mathsf{c}}.$$

Como

$$f(\lambda_0) = 0 \text{ para cada } f \in Y,$$

tenemos que

$$\pi_{\lambda_0}^{-1}[\mathbb{R}^*] \cap Y = \varnothing,$$

lo cual prueba que

$$f_0(\lambda_0) = 0.$$

Así,

$$\overline{Y} \subset \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \text{card } f^{-1}[\mathbb{R}^*] \subset X \right\},$$

donde X es numerable, de manera que $\mathfrak{A}_1$ es secuencialmente cerrado y no es separable. ■

Ejemplo 3.3.21 *Como subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, el conjunto de todos los polinomios reales con coeficientes racionales,*

$$\mathfrak{A}_2 := \left\{ x \mapsto \sum_{i=0}^{n} c_i x^i : n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \text{ y } (c_0, \cdots, c_n) \in \mathbb{Q}^{n+1} \right\},$$

es numerable y denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Demostración. Identificando cada polinomio con el vector formado por sus coeficientes, se obtiene una inyección

$$\varphi : \mathfrak{A}_2 \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^n,$$

de manera que $\mathfrak{A}_2$ es numerable.

Para ver que $\mathfrak{A}_2$ es denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, sea $U \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ abierto y no vacío.

Entonces U contiene un abierto básico de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_i}^{-1}[V_i],$$

donde cada λ_i es un número real distinto, cada V_i es abierto en $\mathbb{R}$ y π_λ denota la proyección sobre el λ-ésimo factor de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Escojamos un a_i en cada $V_i \cap \mathbb{Q}$, y sea p el polinomio interpolador de Lagrange correspondiente, es decir, la función de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definida por

$$p(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j} \right).$$

Como

$$p(\lambda_i) = a_i \text{ para cada } i \in \{1, \cdots, \lambda_n\},$$

tenemos que

$$p \in \mathfrak{A}_2 \cap \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_i}^{-1}[V_i] \subset \mathfrak{A}_2 \cap U$$

y $\mathfrak{A}_2$ es, por tanto, denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Esto completa la prueba. ■

Ejemplo 3.3.22 (Agua y Aceite) *Como subespacio de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*,*

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$$

es condicionalmente pero no topológicamente densificable.

Demostración. Observemos inicialmente que

$$\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2^*,$$

ya que todo polinomio no idénticamente nulo posee una cantidad finita de raíces.

Como $\mathfrak{A}_1$ es conexo por caminos, es aproximable por caminos en virtud del Lema 2.3.9.

Por la Proposición 2.3.24, $\mathfrak{A}$ es aproximable por caminos y, por tanto, condicionalmente densificable.

Finalmente, supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathfrak{A}$ admita una sucesión de curvas $\langle \Gamma_n \rangle$, asintóticamente densa en $\mathfrak{A}$.

Ya vimos en el Ejemplo 3.3.20 que $\mathfrak{A}_1$ es secuencialmente cerrado.

Como $\mathfrak{A}_2^*$ es, por el Corolario 1.3.14, totalmente disconexo por caminos, la Proposición 1.3.16 muestra que cada Γ_n es una curva en $\mathfrak{A}_1$ o se reduce a un punto de $\mathfrak{A}_2^*$.

Así, o $\mathfrak{A}_1$ o $\mathfrak{A}_2^*$ debe contener infinitos términos de la sucesión $\langle \Gamma_n \rangle$, de manera que la subsucesión formada por estos términos es asintóticamente densa en ese conjunto.

De esta manera, o $\mathfrak{A}_1$ o $\mathfrak{A}_2^*$ es topológicamente densificable y, en virtud de la Proposición 3.3.18, $\mathfrak{A}_1$ es separable o $\mathfrak{A}_2^*$ es aproximable por caminos.

Esta contradicción prueba el enunciado. ■

En conjunción con la Proposición 3.1.10, el resultado provee una fuente natural y abundante de espacios topológicamente densificables.

Teorema 3.3.23 *Sea (X, τ) un espacio conexo por caminos. Los enunciados a continuación son equivalentes.*

(1) *X es topológicamente densificable.*

(2) *X es condicionalmente densificable.*

(3) *X es separable.*

Demostración. La Proposición 3.3.18 prueba que

$$(1) \longrightarrow (2)$$

y la implicación

$$(2) \longrightarrow (3)$$

se satisface por definición de densificabilidad condicional.

Para probar que

$$(3) \longrightarrow (1),$$

supongamos que X sea separable.

Por definición, X posee un subconjunto numerable y denso

$$D = \{x_1, x_2, \cdots\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escojamos una curva Γ_n tal que

$$\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \Gamma_n.$$

Afirmamos que $\langle \Gamma_n \rangle$ es asintóticamente densa en X. En efecto:

Sea $U \subset X$ abierto y no vacío.

Como D es denso en X,

$$U \cap D \neq \varnothing,$$

es decir,

$$x_{n_0} \in U \text{ para algún } n_0 \in \mathbb{N}.$$

De esta manera,

$$x_{n_0} \in U \cap \Gamma_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

y $\langle \Gamma_n \rangle$ es asintóticamente densa, como hemos afirmado. ∎

En espacios de Fréchet-Urysohn, el Teorema 3.3.23 y la Proposición 3.2.11 pueden combinarse.

De esta manera, las tres nociones de la densificabilidad en espacios topológicos que hemos definido son equivalentes en espacios conexos por caminos de Fréchet-Urysohn.

Teorema 3.3.24 *Sea (X, τ) un espacio conexo por caminos de Fréchet-Urysohn. Los enunciados a continuación son equivalentes.*

(1) *X es topológicamente densificable.*

(2) *X es condicionalmente densificable.*

(3) *X es separable.*

(4) *X es secuencialmente separable.*

(5) *X es secuencialmente densificable.*

Demostración. Para espacios conexos por caminos en general, el Teorema 3.3.23 prueba que

$$(1) \longrightarrow (2) \longrightarrow (3),$$

la Proposición 3.2.11 que

$$(4) \longrightarrow (5)$$

y la Proposición 3.3.16 que

$$(5) \longrightarrow (1).$$

Finalmente,

$$(3) \longrightarrow (4)\,,$$

ya que X es de Fréchet-Urysohn. ■

Cerraremos este capítulo con la prueba de que los tres conceptos de densificabilidad que hemos definido son equivalentes en espacios metrizables.

Así, la densificabilidad topológica es nuestra tercera (y, en cierto sentido, óptima) extensión del concepto de densificabilidad condicional a espacios no metrizables.

Teorema 3.3.25 *Sea (X, τ) un espacio metrizable. Las condiciones a continuación son equivalentes.*

(1) X es topológicamente densificable.

(2) X es condicionalmente densificable.

(3) X es secuencialmente densificable.

Demostración. Para espacios topológicos en general, la Proposición 3.3.16 prueba que

$$(1) \longrightarrow (2)$$

y la Proposición 3.3.16 prueba que

$$(3) \longrightarrow (1).$$

Finalmente, en espacios metrizables en particular, la Proposición 3.2.5 prueba que

$$(2) \longrightarrow (3),$$

lo cual finaliza la prueba. ■

3.4. Curvas V-densas

En 2009, G. Mora introdujo el concepto de curva V-densa, extendiendo el concepto de α-densidad (y de densificabilidad) a espacios vectoriales topológicos.

Definición 3.4.1 *Sea* $(X, +, \cdot, \tau)$ *un espacio vectorial topológico,* $Y \subset X$ *y* V *una vecindad del vector* 0.

Una curva Γ *es* ***V-densa*** *en* Y *si y sólo si*

$$\Gamma \subset Y \text{ e } Y \subset \Gamma + V.$$

Definición 3.4.2 *Sea* $(X, +, \cdot, \tau)$ *un espacio vectorial topológico e* $Y \subset X$.

Y *es* ***densificable*** *si y sólo si para cada vecindad* V *del vector* 0 *existe una curva* V*-densa en* Y.

Este concepto posee una ventaja sobre el de densificabilidad topológica, pues la curvas V-densas permiten medir cuán próximo está una determinada curva de los demás puntos del espacio. En contraste, la densidad asintótica de una sucesión de curvas sólo caracteriza las propiedades de la sucesión entera; cada curva determinada puede estar arbitrariamente lejos de los demás puntos del espacio.

Dada la utilidad del concepto de V-densidad, analicemos los vínculos existentes entre la densificabilidad en espacios vectoriales topológicos y los conceptos de las secciones anteriores.

Proposición 3.4.3 *Todo subconjunto densificable de un espacio vectorial topológico es aproximable por caminos.*

Demostración. Sean $(X, +, \cdot, \tau)$ un espacio vectorial topológico,

$$Y \subset X$$

densificable y

$$\{U_1, \cdots, U_n\}$$

una familia de abiertos no vacíos de Y.

Para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$, elijamos

$$y_k \in U_k \text{ y } W_k \in \tau \text{ tal que } U_k = W_k \cap Y,$$

y definamos

$$V_k \coloneqq y_k - W_k.$$

Claramente, los V_k y, por tanto,

$$V \coloneqq \bigcap_{k=1}^{n} V_k,$$

son vecindades del vector 0.

Por definición de densificabilidad, existe una curva Γ en Y tal que

$$Y \subset \Gamma + V.$$

Así, para cada y_k, existe

$$c_k \in \Gamma \subset Y \text{ tal que } y_k \in c_k + V,$$

o bien,

$$c_k \in y_k - V \subset y_k - V_k = W_k,$$

de manera que

$$c_k \in W_k \cap Y = U_k.$$

Esto prueba el enunciado. ■

Lema 3.4.4 *Todo subconjunto densificable de un espacio vectorial topológico es precompacto.*

Demostración. Sean $(X, +, \cdot, \tau)$ un espacio vectorial topológico,

$$Y \subset X$$

densificable y V una vecindad del vector 0.

Como $+$ es continua, existe una vecindad U del vector 0 tal que

$$U + U \subset V.$$

Por definición de densificabilidad, existe una curva Γ en Y tal que

$$Y \subset \Gamma + U.$$

Como Γ es compacto, es precompacto, y existe un conjunto finito

$$F \subset \Gamma \text{ tal que } \Gamma \subset F + U.$$

Así,

$$Y \subset \Gamma + U \subset (F + U) + U = F + (U + U) \subset F + V.$$

Esto prueba el enunciado. ■

Los dos resultados anteriores nos permiten caracterizar los subconjuntos densificables de espacios vectorial topológicos en función de un concepto del capítulo anterior.

Teorema 3.4.5 *Un subconjunto de un espacio vectorial topológico es densificable si y sólo si es precompacto y aproximable por caminos.*

Demostración. La Proposición 3.4.3 y el Lema 3.4.4 prueban la implicación de izquierda a derecha.

Para probar la implicación inversa, sean $(X, +, \cdot, \tau)$ un espacio vectorial topológico,

$$Y \subset X$$

precompacto y aproximable por caminos y V una vecindad del vector 0.

Como $+$ es continua, existe una vecindad U del vector 0 tal que

$$U + U \subset V.$$

Por definición de precompacidad, existe un conjunto finito

$$F \subset Y \text{ tal que } Y \subset F + U.$$

Como Y es aproximable por caminos, existe una curva Γ que interseca a todos los conjuntos de la familia

$$\{a + U : a \in F\}.$$

Pero

$$\Gamma \cap (a + U) \neq \varnothing \text{ si y sólo si } (\Gamma + U) \cap \{a\} \neq \varnothing,$$

de manera que

$$F \subset \Gamma + U$$

y, por tanto,

$$Y \subset F + U \subset (\Gamma + U) + U = \Gamma + (U + U) \subset \Gamma + V.$$

Esto prueba la implicación restante. ■

En espacios vectoriales topológicos metrizables, hemos presentado definiciones de densificabilidad en función de curvas α y V-densas. A partir del resultado anterior, es fácil ver que estas definiciones son compatibles.

Corolario 3.4.6 *Sean $(X, +, \cdot, \tau)$ un espacio vectorial topológico metrizable, $Y \subset X$ y d una métrica invariante en X que induce la topología τ.*

Y es densificable como subconjunto de $(X, +, \cdot, \tau)$ si y sólo si es densificable como subespacio de (X, d).

Demostración. Basta observar que, por el Teorema 2.3.13 en espacios métricos y el Teorema 3.4.5 en espacios vectoriales topológicos, Y es densificable si y sólo si es precompacto y aproximable por caminos. ■

A pesar de esta equivalencia en espacios metrizables, la densificabilidad de subconjuntos de espacios vectoriales topológicos no metrizables no es equivalente a la densificabilidad topológica o incluso condicional de dicho conjunto.

Obtendremos un ejemplo de esta no equivalencia a partir del resultado que presentamos a continuación.

Proposición 3.4.7 *El producto de subconjuntos de espacios vectoriales topológicos es densificable si y sólo si cada factor es densificable.*

Demostración. Basta combinar el Teorema 3.4.5, la Proposición 1.2.14 y la Proposición 2.3.8. ■

Ejemplo 3.4.8 *$\mathcal{I}^{\mathcal{P}(\mathbb{R})}$ es densificable como subconjunto del espacio vectorial topológico $\mathbb{R}^{\mathcal{P}(\mathbb{R})}$, pero no es condicionalmente densificable.*

Demostración. $\mathcal{I}^{\mathcal{P}(\mathbb{R})}$ es densificable en virtud de la Proposición 3.4.7, pero no es condicionalmente densificable, en virtud de la Proposición 3.1.9. ■

Como el Teorema 3.3.5 muestra que la definición de densificabilidad topológica es, en cierto sentido, óptima, el Ejemplo 3.4.8 resalta un inconveniente.

A continuación, presentamos una definición alternativa de densificabilidad en espacios vectoriales topológicos.

Definición 3.4.9 *Sea $(X,+,\cdot,\tau)$ un espacio vectorial topológico, $Y \subset X$ y $\langle Z_n \rangle$ una sucesión de subconjuntos de Y.*

$\langle Z_n \rangle$ es ***linealmente densa*** *en Y si y sólo si para cada vecindad del vector 0 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$Y \subset Z_n + V \text{ para cada } n > n_0.$$

Definición 3.4.10 *Sea $(X,+,\cdot,\tau)$ un espacio vectorial topológico e $Y \subset X$.*

Y es ***linealmente densificable*** *si y sólo si posee una sucesión de curvas linealmente densa.*

La densidad lineal está íntimamente vinculada con la densidad asintótica.

Lema 3.4.11 *Toda sucesión de conjuntos $\langle Z_n \rangle$, linealmente densa en un subconjunto Y de un espacio vectorial topológico $(X,+,\cdot,\tau)$, es asintóticamente densa en Y.*

Demostración. Sea $U \subset Y$ abierto. Entonces existe W, abierto en X, tal que

$$U = Y \cap W.$$

Fijando $a \in U$, tenemos que

$$W_a := a - W$$

es una vecindad del vector 0.

Por definición de densidad lineal, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$Y \subset Z_n + W_a \text{ para cada } n > n_0.$$

Así, si $n > n_0$, existe

$$x_n \in Z_n \text{ tal que } a \in x_n + W_a,$$

de manera que

$$x_n \in a - W_a = a - (a - W) = W$$

y, por tanto,

$$x_n \in Z_n \cap W = (Z_n \cap Y) \cap W = Z_n \cap (Y \cap W) = Z_n \cap U.$$

Esto prueba que $\langle Z_n \rangle$ es asintóticamente densa en Y. ■

En conjuntos precompactos, densidad lineal y asintótica son equivalentes.

Proposición 3.4.12 *Sean $(X,+,\cdot,\tau)$ un espacio vectorial topológico, $Y \subset X$ precompacto y $\langle Z_n \rangle$ una sucesión de subconjuntos de Y.*

$\langle Z_n \rangle$ es linealmente densa en Y si y sólo si es asintóticamente densa en Y.

Demostración. El Lema 3.4.11 prueba que la implicación de izquierda a derecha se satisface en general.

Para probar la implicación inversa, supongamos que $\langle Z_n \rangle$ sea asintóticamente densa en Y y sea V una vecindad del vector 0.

Como $+$ es continua, existe una vecindad U del vector 0 tal que

$$U + U \subset V.$$

Así, como Y es precompacto, existe un conjunto finito

$$F \subset Y \text{ tal que } Y \subset F + U.$$

Para cada $a \in F$, existe, por definición de densidad asintótica,

$$n_a \in \mathbb{N} \text{ tal que } Z_n \cap (a + U) \neq \varnothing \text{ siempre que } n > n_a.$$

Luego, si

$$n > n_F := \{k_a : a \in F\},$$

tenemos que

$$F \subset Z_n + U,$$

ya que

$$Z_n \cap (a + U) \neq \varnothing \text{ si y sólo si } (Z_n + U) \cap \{a\} \neq \varnothing.$$

De esta manera,

$$Y \subset F + U \subset (Z_n + U) + U = Z_n + (U + U) \subset Z_n + V \text{ para cada } n > n_F,$$

y $\langle Z_n \rangle$ es linealmente densa en Y.

Esto prueba la implicación restante. ■

El resultado anterior nos permite caracterizar los conjuntos linealmente densificables en función de la densificabilidad topológica.

Teorema 3.4.13 *Sean $(X, +, \cdot, \tau)$ un espacio vectorial topológico e $Y \subset X$.*

Y es linealmente densificable si y sólo si es topológicamente densificable y precompacto.

Demostración. Y es precompacto en ambos casos. En efecto, si Y es linealmente densificable, admite una sucesión de curvas linealmente densa que contiene infinitas curvas V-densas para cada vecindad V del vector 0, de manera que Y es densificable y, por el Teorema 3.4.5, precompacto.

Por la Proposición 3.4.12, Y admite una sucesión de curvas linealmente densa si y sólo si admite una sucesión de curvas asintóticamente densa.

Esto prueba el enunciado. ■

El resultado anterior ilustra que la densificabilidad lineal combina dos aspectos útiles de las curvas V-densas y las sucesiones asintóticamente densas. Las últimas son las únicas sucesiones de curvas que satisfacen las condiciones del Teorema 3.3.5, mientras que las curvas V-densas permiten medir cuán próximo está una determinada curva de los demás puntos del espacio.

Capítulo 4

Espacios simplemente densificables

4.1. Densificadores

Todos los conceptos que hemos analizado hasta ahora están íntimamente relacionados con el concepto de curva. Como toda curva está contenida en una componente conexa por caminos, todos estos conceptos dependen de la estructura de las componentes conexas por caminos del espacio.

El concepto a continuación abarca un caso especial de esta estructura.

Definición 4.1.1 *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $R \subset X$.

R *es un densificador de* X *si y sólo si* R *es denso en* X *y* $R \in \mathcal{A}X$.

Ejemplo 4.1.2 (Velcro) $\mathfrak{V}_1$ *y* $\mathfrak{V}_2$ *son ambos densificadores de* $\mathfrak{V}$.

Demostración. Ya vimos en el Ejemplo 2.3.3 que $\mathfrak{V}_1$ y $\mathfrak{V}_2$ son las componentes conexas por caminos de $\mathfrak{V}$ y que $\mathfrak{V}_1$ es denso en $\mathfrak{V}$.

El resultado para $\mathfrak{V}_2$ se prueba de manera análoga. ■

El ejemplo anterior muestra que el densificador de un espacio no es necesariamente único.

De manera parecida a la aproximabilidad (numerable) por caminos, la existencia de un densificador impone ciertas restricciones sobre la familia de componentes conexas por caminos del espacio. De hecho, la existencia de un densificador es más fuerte que la aproximabilidad numerable por caminos.

Proposición 4.1.3 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico.*

Si X *posee densificador, es numerablemente aproximable por caminos.*

Demostración. Sea R un densificador de X.

Como R es conexo por caminos, es numerablemente aproximable por caminos, en virtud del Lema 2.3.20.

Luego, X es numerablemente aproximable por caminos, en virtud de la Proposición 2.3.24.

Esto prueba el enunciado. ■

En espacios separables, la existencia de un densificador garantiza la densificabilidad condicional del espacio.

Corolario 4.1.4 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico.*

Si X *es separable y posee densificador, es condicionalmente densificable.*

Demostración. Basta combinar la Proposición 4.1.3 con la Proposición 2.3.19. ■

La propiedad de poseer un densificador es topológica. En efecto:

Proposición 4.1.5 *Sean* (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y) *espacios topológicos y* $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ *sobreyectiva.*

Si R *es un densificador de* X, $f[R]$ *está contenido en un densificador de* Y.

Demostración. Como f es continua, $f[R]$ es conexo por caminos, si S es la componente conexa por caminos que lo contiene,

$$\overline{S} \supset \overline{f[R]} \supset f\left[\overline{R}\right] = f[X] = Y.$$

Esto prueba el enunciado. ■

Análogamente a la Proposición 2.3.8, tenemos el siguiente resultado para densificadores.

Proposición 4.1.6 *El producto de espacios topológicos posee densificador si y sólo si cada factor posee densificador.*

Demostración. Sea L un conjunto, $\langle (X_\lambda, \tau_\lambda) \rangle_{\lambda \in L}$ una familia indexada de espacios topológicos,

$$X \coloneqq \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$$

el espacio producto de la familia y π_λ la proyección sobre la λ-ésima coordenada.

Para probar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que X posea densificador.

Para cada $\lambda \in L$, como

$$\pi_\lambda : X \to X_\lambda$$

es una sobreyección continua, X_λ posee densificador, por la Proposición 4.1.5.

Esto prueba la primera implicación.

Para probar la implicación inversa, supongamos que cada X_λ posea densificador R_λ.

Como cada R_λ es conexo por caminos, por la Proposición 1.3.8,

$$R \coloneqq \prod_{\lambda \in L} R_\lambda$$

es conexo por caminos y, por tanto, está contenido en una componente conexa por caminos S.

Además,

$$\overline{S} \supset \overline{R} = \overline{\prod_{\lambda \in L} R_\lambda} = \prod_{\lambda \in L} \overline{R_\lambda} = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda = Y,$$

de manera que S es denso en Y.

Esto prueba la implicación inversa. ■

No todos los espacios condicional o incluso topológicamente densificables poseen densificador.

Ejemplo 4.1.7 (Hipercubo Roto) $\mathfrak{H}$ *es topológicamente densificable, pero no posee densificador.*

Demostración. Sea d una métrica heredada de $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$.

Ya vimos en el Ejemplo 2.2.8 que $(\mathfrak{H}, \mathfrak{d})$ es densificable (y, por tanto, topológicamente densificable) y que

$$\mathcal{A}\mathfrak{H} = \{\mathfrak{H}_n : n \in \mathbb{N}\},$$

donde cada $\mathfrak{H}_n$ es compacto.

Esto imposibilita la existencia de un densificador en $\mathfrak{H}$. ■

A partir del ejemplo anterior, construiremos un espacio compacto y topológicamente densificable que no posee densificador.

Ejemplo 4.1.8 (Hipercubo Roto) *$\beta\mathfrak{H}$ es compacto y topológicamente densificable, pero no posee densificador.*

Demostración. Por el Teorema de Stone-Čech (1.4.2), $\beta\mathfrak{H}$ es compacto.

En virtud del Ejemplo 2.2.8, $\mathfrak{H}$ es topológicamente densificable. Por la Proposición 3.3.15, otro tanto ocurre con $\beta\mathfrak{H}$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que R fuera un densificador de $\beta\mathfrak{H}$.

Como $\mathfrak{H}$ es metrizable y separable, es de Lindelöf y, por el Teorema 1.4.5, realcompacto.

Luego, por la Proposición 1.4.7, $R \subset \mathfrak{H}$ o R se reduce a un punto.

En el primer caso, R sería un densificador de $\mathfrak{H}$, contradiciendo el Ejemplo 4.1.7; en el segundo caso, R no sería denso en $\beta\mathfrak{H}$, contradiciendo la definición de densificador.

Esto prueba que $\beta\mathfrak{H}$ no posee densificador. ■

A continuación, presentamos una condición suficiente para la existencia de un densificador en espacios aproximables por caminos.

Proposición 4.1.9 *Sea (X, τ) un espacio aproximable por caminos.*

Si algún abierto no vacío U interseca a sólo una cantidad finita de componentes conexas por caminos de X, X posee densificador.

Demostración. Supongamos que no.

Entonces

$$\mathfrak{F} := \{U\} \cup \left\{X \setminus \overline{Y} : Y \in \mathcal{A}X \text{ y } Y \cap U \neq \varnothing\right\}$$

es una familia finita de abiertos no vacíos de X.

Por definición de aproximabilidad por caminos, existe una curva que interseca a todos los conjuntos de $\mathfrak{F}$; sea R la componente conexa por caminos que contiene a esta curva.

Por construcción, R interseca a U, de manera que

$$\varnothing \neq R \cap \left(X \setminus \overline{R}\right) \subset R \cap R^{\mathsf{c}} = \varnothing.$$

Esta contradicción prueba el enunciado. ■

La Proposición 4.1.9 posee un corolario importante, pues caracteriza a los subconjuntos condicionalmente densificables y con volumen de los espacios euclídeos.

Teorema 4.1.10 *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ tiene interior no vacío, es condicionalmente densificable si y sólo si posee densificador.*

Demostración. Para probar la implicación de izquierda a derecha, basta aplicar la Proposición 4.1.9 a int X.

Para probar la implicación inversa, basta observar que X es separable y aplicar el Corolario 4.1.4. ■

La Proposición 4.1.9 proporciona una condición suficiente para la existencia de un densificador en un espacio condicionalmente densificable, pero no es necesaria, incluso si el espacio es topológicamente densificable. El ejemplo a continuación ilustra esto.

Ejemplo 4.1.11 (Velcro Roto) *Si*

$$\mathfrak{R}_1 := \mathfrak{V}_1, \mathfrak{R}_2 := \mathfrak{V}_2 \setminus (\mathcal{I} \times \{1\}) \text{ y } \mathfrak{R} := \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2,$$

$\mathfrak{R}$ es simplemente densificable, pero cada abierto no vacío interseca a una cantidad infinita de componentes conexas por caminos de $\mathfrak{R}$.

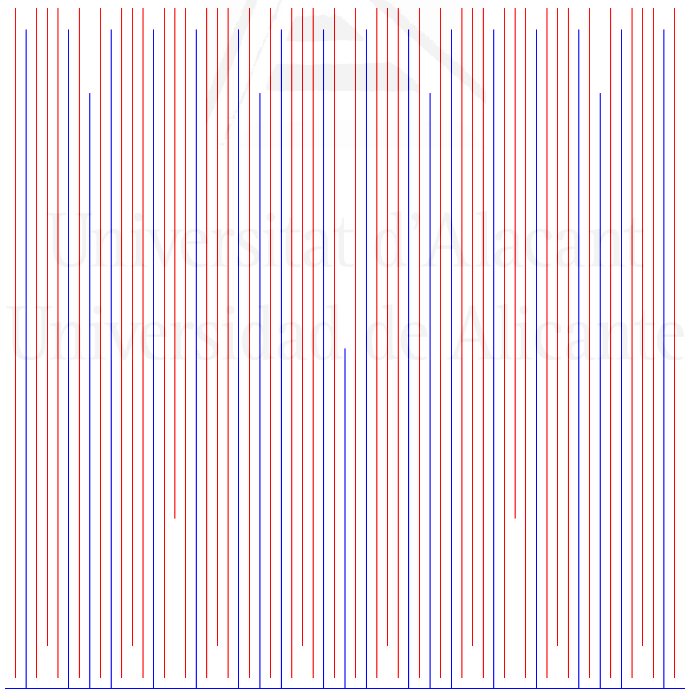


Figura 4.1: $\mathfrak{R}$

Demostración. Hemos probado que $\mathfrak{V}_1$ y $\mathfrak{V}_2$ son densos en $\mathfrak{V}$, de manera que $\mathfrak{V}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ son densos en $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{V}_1$ es claramente separable.

Además, hemos probado que $\mathfrak{V}_1$ es una componente conexa por caminos de $\mathfrak{V}$, de manera que, a fortiori, es una componente conexa por caminos de $\mathfrak{R}$. En particular, esto significa que $\mathfrak{V}_1$ es un densificador de $\mathfrak{R}$.

Como $\mathfrak{R}_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, tenemos que cada elemento de

$$\mathfrak{Q}_{2n} \times \left[2^{-2n}, 1\right]$$

está compuesto por varias componentes conexas por caminos de $\mathfrak{R}$.

Así,

$$\mathcal{H}\left(\mathfrak{Q}_{2n} \times \left[2^{-2n}, 1\right], \mathcal{I}^3\right) \leq \mathcal{H}\left(\mathfrak{Q}_{2n}, \mathcal{I}\right) + \mathcal{H}\left(\mathcal{I} \times \left[2^{-2n}, 1\right], \mathcal{I}^3\right) = 2^{2n} + 2^{2n} = 2^{1-2n}$$

y cada abierto interseca, por tanto, a una infinidad de estos conjuntos.

Así, $\mathfrak{R}$ no cumple las hipótesis de la Proposición 4.1.9, lo cual finaliza la prueba. ■

Cerraremos esta sección dando ejemplo de un subconjunto densificable de un espacio euclídeo que no posee densificador.

Ejemplo 4.1.12 (Panal de Abejas) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea*

$$\mathfrak{P}_n := \left(\left\{2^{-n}\right\} \times \mathcal{I} \times \{0\}\right) \cup \left(\left\{2^{-n}\right\} \times \mathfrak{Q}_n \times \left[0, 2^{-n}\right]\right) \cup \left(\mathcal{I} \times \mathfrak{Q}_n \times \left[2^{-n}, 1\right]\right).$$

Si

$$\mathfrak{P} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{P}_n,$$

$\mathfrak{P}$ es densificable pero no posee densificador.

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, observemos inicialmente que

$$\mathfrak{P}_n = J_n \cup \bigcup_{r \in \mathfrak{Q}_n} \left(L_{n,r} \cup K_{n,r}\right),$$

donde

$J_n = \left\{2^{-n}\right\} \times \mathcal{I} \times \{0\}$, $L_{n,r} = \left\{2^{-n}\right\} \times \{r\} \times \left[0, 2^{-n}\right]$ y $K_{n,r} = \mathcal{I} \times \{r\} \times \left[2^{-n}, 1\right]$.

Como J_n, los $L_{n,r}$ y los $K_{n,r}$ son curvas,

$$\left(2^{-n}, r, 2^{-n}\right) \in L_{n,r} \cap K_{n,r} \text{ y } \left(2^{-n}, r, 0\right) \in J_n \cap K_{n,r}$$

y $\mathfrak{Q}_n$ es finito, se sigue que $\mathfrak{P}_n$ es una curva.

Como los $\mathfrak{P}_n$ son dos a dos disjuntos, por el Corolario 1.3.14,

$$\mathcal{A}\mathfrak{P} = \left\{\mathfrak{P}_n : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Así,

$$\begin{array}{rcccc}
\mathcal{H}\left(\mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}\right) & \leq & \mathcal{H}\left(\mathfrak{P}_n, \mathcal{I}^3\right) & & \\
& \leq & \mathcal{H}\left(\mathfrak{P}_n, \mathcal{I}^2 \times \left[2^{-n}, 1\right]\right) & + & \mathcal{H}\left(\mathcal{I}^2 \times \left[2^{-n}, 1\right], \mathcal{I}^3\right) \\
& \leq & \mathcal{H}\left(\mathcal{I} \times \mathfrak{Q}_n \times \left[2^{-n}, 1\right], \mathcal{I}^2 \times \left[2^{-n}, 1\right]\right) & + & 2^{-n} \\
& = & \mathcal{H}\left(\mathfrak{Q}_n, \mathcal{I}\right) & + & 2^{-n} \\
& = & 2^{-n} & + & 2^{-n} \\
& < & 2^{1-n} & &
\end{array}$$

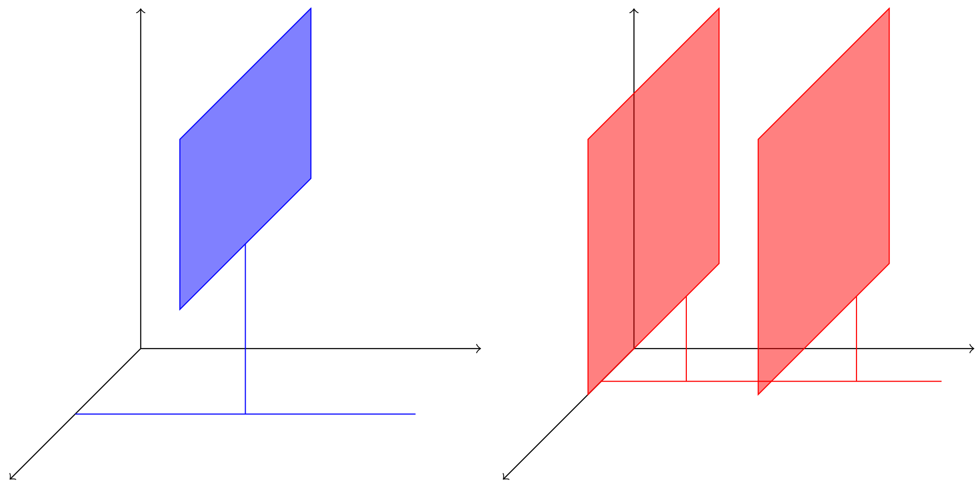


Figura 4.2: $\mathfrak{P}_1$ y $\mathfrak{P}_2$

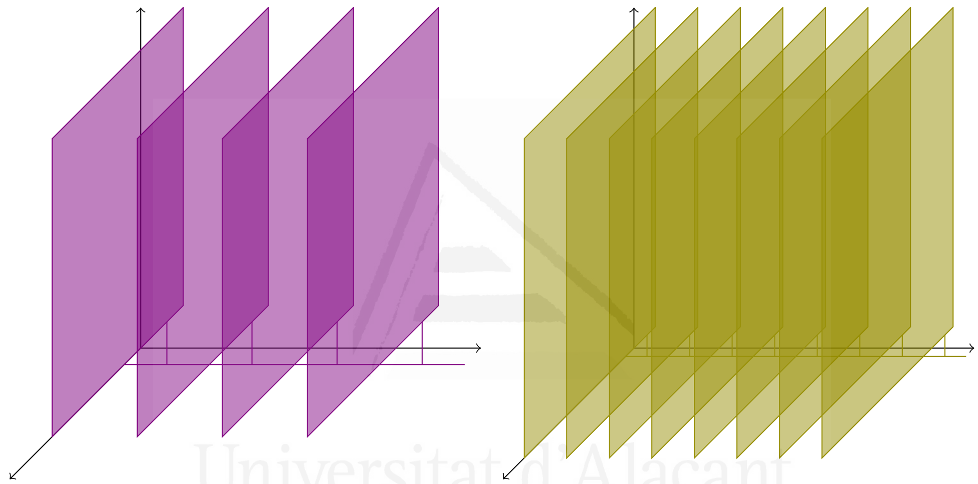


Figura 4.3: $\mathfrak{P}_3$ y $\mathfrak{P}_4$

y, por tanto, $\mathfrak{P}$ es densificable y denso en $\mathcal{I}^3$.

Finalmente, como $\mathfrak{P}_n$ es cerrado, no es un densificador de $\mathfrak{P}$.

Esto prueba el enunciado. ■

Averiguar si existen espacios métricos absolutamente densificables que no poseen densificador aún constituye un problema abierto.

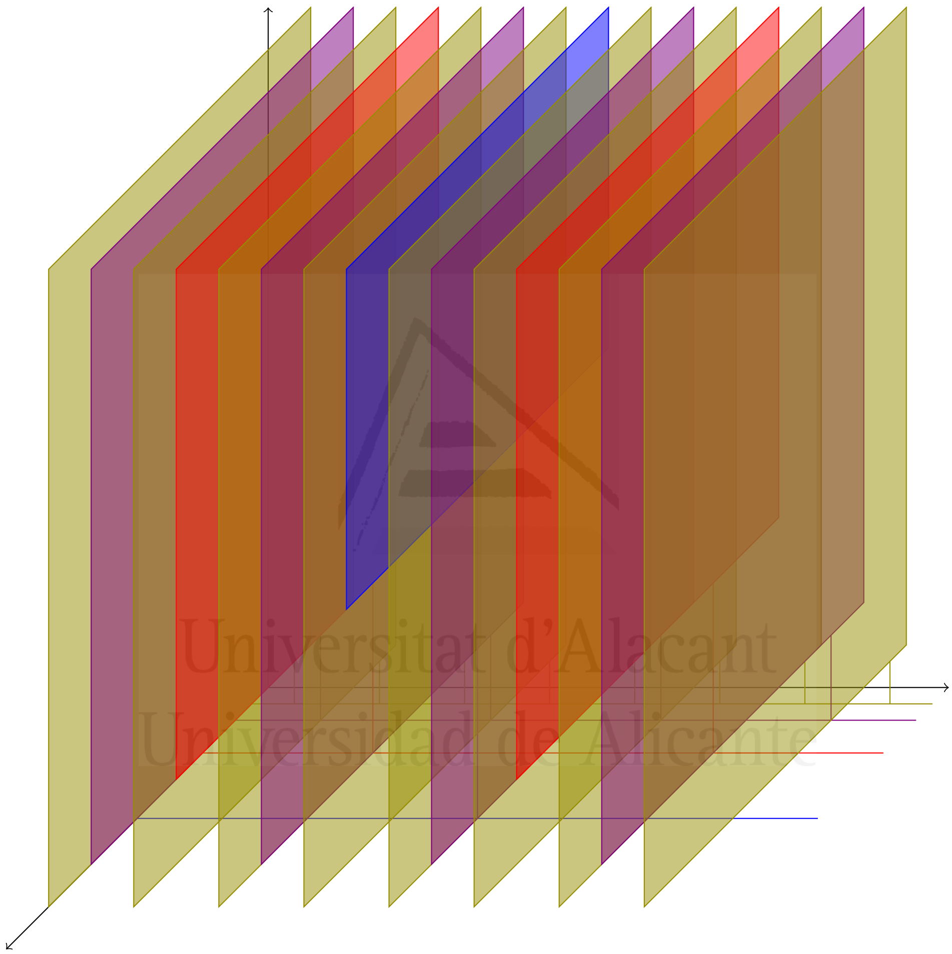


Figura 4.4: $\mathfrak{P}$

4.2. Densificabilidad simple

En la sección anterior, hemos probado que la existencia de un densificador implica densificabilidad condicional en espacios separables. Sin embargo, como veremos a continuación, esto no garantiza la densificabilidad topológica.

Ejemplo 4.2.1 (Agua y Aceite) *$\mathfrak{A}$ es separable y posee densificador, pero no es topológicamente densificable.*

Demostración. Ya vimos en el Ejemplo 3.3.20 que $\mathfrak{A}_1$ es un densificador de $\mathfrak{A}$, en el Ejemplo 3.3.21 que $\mathfrak{A}_2$ es un subconjunto numerable y denso de $\mathfrak{A}$ y en el Ejemplo 3.3.22 que $\mathfrak{A}$ no es topológicamente densificable. ■

Para subsanar esta deficiencia en espacios no metrizables, introducimos el siguiente concepto.

Definición 4.2.2 *Sean (X, τ) un espacio topológico.*

*X es **simplemente densificable** si y sólo si posee un densificador separable.*

A menudo, querremos probar que un espacio topológico es simplemente densificable sin determinar su familia de componentes conexas por caminos. Bajo esta consideración, presentamos el resultado a continuación.

Proposición 4.2.3 *Un espacio topológico es simplemente densificable si y sólo si posee un subconjunto conexo por caminos, separable y denso.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico.

Para probar la implicación de izquierda a derecha, basta elegir un densificador de X y observar que éste es conexo por caminos, separable y denso en X.

Para probar la implicación inversa, sea $A \subset X$ conexo por caminos, separable y denso en X.

Como A es conexo por caminos, existe

$$R \in \mathcal{A}X \text{ tal que } A \subset R.$$

Así, como A es denso en X,

$$R \subset X \subset \overline{A} \subset \overline{R},$$

de manera que R es separable y denso en X.

Esto prueba el enunciado. ■

Los espacios simplemente densificables representan una clase particularmente manejable de los espacios topológicamente densificables, pues su densificación mediante curvas se reduce a la de un subespacio conexo por caminos. El resultado a continuación ilustra esto.

Teorema 4.2.4 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

X es simplemente densificable si y sólo si posee una sucesión de curvas $\langle \Gamma_n \rangle$, asintóticamente densa en X y tal que

$$\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Para probar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que X sea simplemente densificable, y sea R un densificador separable de X.

Por definición, R posee un subconjunto numerable y denso

$$D = \{x_1, x_2, \cdots\}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, como R es conexo por caminos, existe un camino γ_n que une los puntos x_n y x_{n+1}.

Definamos

$$\Gamma_n \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i [\mathcal{I}].$$

Usando inducción, se prueba fácilmente que cada Γ_n es una curva, y es claro que

$$\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que $\langle \Gamma_n \rangle$ es asintóticamente densa en X. En efecto:

Sea $U \subset X$ abierto y no vacío.

Como D es denso en X, existe

$$n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_{n_0} \in U,$$

de manera que

$$x_{n_0} \in \Gamma_{n_0} \cap U \subset \Gamma_n \cap U \text{ para cada } n > n_0.$$

Esto prueba la primera implicación.

Para probar la implicación inversa, supongamos la existencia de una sucesión de curvas satisfaciendo las condiciones del enunciado.

Sea

$$R \coloneqq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n.$$

R es claramente conexo por caminos.

Además es separable, pues es unión numerable de conjuntos separables, y es denso en X, pues cada abierto interseca a algún Γ_n.

Por la Proposición 4.2.3, la implicación restante se sigue. ■

Como corolario, vemos que densificabilidad simple implica densificabilidad topológica.

Corolario 4.2.5 *Todo espacio topológico simplemente densificable es topológicamente densificable.*

Demostración. Basta aplicar el Teorema 4.2.4. ■

En conjunción con el ejemplo a continuación, esto muestra que la densificabilidad simple es estrictamente más fuerte que la densificabilidad topológica.

Ejemplo 4.2.6 (Hipercubo Roto) $\mathfrak{H}$ *es topológicamente pero no simplemente densificable.*

Demostración. Basta recordar los resultados del Ejemplo 4.1.7. ■

La densificabilidad simple es una propiedad topológica. En efecto:

Proposición 4.2.7 *La densificabilidad simple es invariante bajo sobreyecciones continuas.*

Demostración. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos, donde X es simplemente densificable, y $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ sobreyectiva.

Por definición de densificabilidad simple, X posee un densificador R, que tiene un subconjunto numerable y denso D.

Como f es continua y sobreyectiva,

$$\overline{f[R]} \supset \overline{f[D]} \supset f\left[\overline{D}\right] \supset f\left[\overline{\overline{D}}\right] \supset f\left[\overline{R}\right] \supset f[X] = Y,$$

de manera que $f[R]$ es denso en Y.

Además, como f es continua, $f[R]$ es conexo por caminos, de manera que Y es simplemente densificable, en virtud de la Proposición 4.2.3.

Esto prueba el enunciado. ■

Análogamente a la Proposición 3.1.9, tenemos el siguiente resultado para la densificabilidad simple.

Proposición 4.2.8 *Sean L un conjunto e $\langle (X_\lambda, \tau_\lambda) \rangle_{\lambda \in L}$ una familia indexada de espacios topológicos.*

El espacio producto

$$X := \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$$

es simplemente densificable si sólo si cada X_λ es simplemente densificable y

$$\operatorname{card}\{\lambda \in L : \operatorname{card} X_\lambda > 1\} \leq \mathfrak{c}.$$

Demostración. Sea π_λ la proyección sobre la λ-ésima coordenada.

Para probar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que X posea densificador separable.

Para cada $\lambda \in L$, como

$$\pi_\lambda : X \to X_\lambda$$

es una sobreyección continua, X_λ posee densificador, por la Proposición 4.2.7.

Además, X es separable, y la desigualdad se sigue del Teorema 1.1.13.

Esto prueba la primera implicación.

Para probar la implicación inversa, supongamos que cada X_λ posea densificador separable R_λ.

Como cada R_λ es separable y conexo por caminos, por el Teorema 1.1.13 y la Proposición 1.3.8,

$$R \coloneqq \prod_{\lambda \in L} R_\lambda$$

es separable y conexo por caminos.

Además,

$$\overline{R} = \overline{\prod_{\lambda \in L} R_\lambda} = \prod_{\lambda \in L} \overline{R_\lambda} = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda = X,$$

de manera que R es denso en X.

Por la Proposición 4.2.3, X es simplemente densificable.

Esto prueba la implicación restante. ■

En espacios topológicos en general, la densificabilidad simple no es suficiente para garantizar la densificabilidad secuencial del espacio.

Ejemplo 4.2.9 *$\beta\mathbb{R}$ es simplemente densificable, pero no es secuencialmente densificable.*

Demostración. Ya vimos en el Ejemplo 3.2.9 que $\beta\mathbb{R}$ no es secuencialmente densificable.

Sin embargo, en virtud de la Proposición 1.4.7, $\mathbb{R}$ es un densificador de $\beta\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R}$ es separable, $\beta\mathbb{R}$ es simplemente densificable. ■

Bajo las condiciones de la Proposición 4.1.9, densificabilidad topológica implica densificabilidad simple.

Proposición 4.2.10 *Sea (X, τ) un espacio topológicamente densificable.*

Si algún abierto no vacío U interseca a sólo una cantidad finita de componentes conexas por caminos de X, X es simplemente densificable.

Demostración. Por definición de densificabilidad topológica, X admite una sucesión asintóticamente densa de curvas $\langle \Gamma_n \rangle$.

Como U es abierto y no vacío, existe

$$n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \Gamma_n \cap U \neq \varnothing \text{ para cada } n > n_0.$$

Así, estas curvas están contenidas en una cantidad finita de componentes conexas por caminos de X y, al menos una de ellas, debe contener infinitos términos de la sucesión $\langle \Gamma_n \rangle$.

Sea R una de estas componentes y $\langle \Gamma_{n_k} \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ la subsucesión de las curvas contenidas en R.

El conjunto

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_{n_k}$$

es separable, pues es unión numerable de conjuntos separables, y es denso en X, pues cada abierto interseca a algún Γ_{n_k}.

Por tanto, R es un densificador separable de X, lo cual prueba el enunciado. ■

Corolario 4.2.11 *Todo espacio topológicamente densificable con una cantidad finita de componentes conexas por caminos, es simplemente densificable.*

Demostración. Basta aplicar la Proposición 4.2.10 al espacio en sí. ■

Cerraremos este capítulo presentando dos caracterizaciones de la densificabilidad simple en espacios particulares.

En espacios realcompactos, la densificabilidad simple puede ser caracterizada en función de la estructura topológica de la compactificación de Stone-Čech del espacio.

Teorema 4.2.12 *Sea (X, τ) un espacio realcompacto.*

X es simplemente densificable si y sólo si $\mathcal{C}(\beta\mathcal{I}^*, \beta X)$ contiene una sobreyección.

Demostración. Para probar la implicación de izquierda a derecha, supongamos que X sea simplemente densificable, sea R un densificador separable de X y D un subconjunto numerable y denso de R.

Por la Proposición 1.3.12, existe

$$\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{I}^*, \beta X) \text{ tal que } D \subset \gamma[\mathcal{I}^*]$$

que, por el Teorema de Stone-Čech (1.4.2), posee una extensión

$$\beta\gamma \in \mathcal{C}(\beta\mathcal{I}^*, \beta X).$$

Finalmente, como $\beta\mathcal{I}^*$ es compacto y $\beta\gamma$ es continua, tenemos que

$$\beta X \subset \overline{X} \subset \overline{\overline{R}} \subset \overline{\overline{\overline{D}}} = \overline{D} \subset \overline{(\beta\gamma)[\mathcal{I}^*]} \subset \overline{(\beta\gamma)[\beta\mathcal{I}^*]} = (\beta\gamma)[\beta\mathcal{I}^*]$$

y $\beta\gamma$ es la sobreyección buscada.

Esto prueba la primera implicación.

Para probar la implicación inversa, supongamos que $\mathcal{C}(\beta\mathcal{I}^*, \beta X)$ contenga una sobreyección f.

Como $\mathcal{I}^*$ es un densificador separable de $\beta\mathcal{I}^*$, βX es simplemente densificable, en virtud de la Proposición 4.2.7.

Pero todo densificador de βX debe estar contenido en X, ya que X es realcompacto y, por la Proposición 1.4.7, toda curva en βX o está contenida en X o se reduce a un punto.

Esto prueba la implicación restante. ■

En espacios metrizables, obtendremos una caracterización de la densificabilidad simple en función de uno de los conceptos introducidos en el capítulo 2.

Teorema 4.2.13 *Un espacio metrizable es simplemente densificable si y sólo si es separable y numerablemente aproximable por caminos.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio metrizable.

Para probar la primera implicación, basta observar que la existencia de un densificador separable implica la separabilidad y, por la Proposición 4.1.3, la aproximabilidad numerable de X.

Para probar la implicación inversa, supongamos que X sea separable y numerablemente aproximable por caminos.

Como X es metrizable y separable, por el Teorema de Metrización de Urysohn (1.2.8), posee una base numerable $\mathcal{B}$.

Como X es numerablemente aproximable por caminos, existe $\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{I}^*, X)$ tal que $\gamma[\mathcal{I}^*]$ interseque a cada conjunto de $\mathcal{B}$, de manera que la componente conexa por caminos R que contiene a $\gamma[\mathcal{I}^*]$ es un densificador de X.

Como X es separable y metrizable, R es separable y X es simplemente densificable, lo cual prueba la implicación restante. ■

Capítulo 5

Dimensión logarítmica

5.1. Antecedentes

Existen varias definiciones de dimensión fractal, que extienden el concepto intuitivo de dimensión (es decir, una recta tiene dimensión 1, un plano dimensión 2, etc.) a otros conjuntos. Una de las definiciones más populares, por la relativa facilidad de hallarla de manera computacional, es la que presentamos a continuación.

Definición 5.1.1 *Sea $X \subset \mathbb{R}^k$ acotado y no vacío, y sea $\overline{\mathcal{N}}_\delta X$ el cardinal mínimo de los recubrimientos de X mediante conjuntos de diámetro $\delta \in (0,1)$.*

*La **dimensión logarítmica inferior** de X es*

$$\underline{\operatorname{dlog}}\, X := \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log \overline{\mathcal{N}}_\delta X}{-\log \delta}.$$

*Similarmente, la **dimensión logarítmica superior** de X es*

$$\overline{\operatorname{dlog}}\, X := \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log \overline{\mathcal{N}}_\delta X}{-\log \delta}.$$

*Si ambos valores coinciden, la **dimensión logarítmica** de X se define como ese valor común, es decir,*

$$\operatorname{dlog} X := \lim_{\delta \to 0} \frac{\log \overline{\mathcal{N}}_\delta X}{-\log \delta}.$$

La dimensión logarítmica se conoce por varios nombres distintos. En inglés, el más utilizado es *box-counting dimension.*

En [4], se proporcionan varias alternativas para hallar la dimensión logarítmica. Tal vez la más útil en la práctica es la siguiente:

Definición 5.1.2 *Si $\delta > 0$, $k \in \mathbb{N}$ y $X \subset \mathbb{R}^k$, definimos*

$$\mathcal{N}_\delta X := \operatorname{card} \mathcal{M}_\delta X,$$

donde

$$\mathcal{M}_\delta \mathbb{R}^k := \left\{ \prod_{i=1}^{k} [m_i \delta, (m_i + 1)\,\delta] : m_i \in \mathbb{Z} \text{ para cada } i \in \{1, \cdots, k\} \right\}$$

*es la **malla de tamaño** δ de $\mathbb{R}^k$ y*

$$\mathcal{M}_\delta X := \left\{ C \in \mathcal{M}_\delta \mathbb{R}^k : C \cap X \neq \varnothing \right\}$$

es malla de tamaño δ de $X \subset \mathbb{R}^n$.

Proposición 5.1.3 *Si $k \in \mathbb{N}$ y $X \subset \mathbb{R}^k$ es acotado y no vacío,*

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta X}{-\log \delta} = \underline{\operatorname{dlog}}\, X \text{ y } \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta X}{-\log \delta} = \overline{\operatorname{dlog}}\, X.$$

En particular,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta X}{-\log \delta} = \operatorname{dlog} X,$$

si dicho límite existe.

Demostración. Ver [4, cap. 3, p. 42]. ■

De particular interés para métodos iterativos es el resultado a continuación.

Proposición 5.1.4 *Si $k \in \mathbb{N}$ y $X \subset \mathbb{R}^k$ es acotado y no vacío y $\langle \delta_n \rangle$ es una sucesión en $(0,1)$ tal que exista $c \in (0,1)$ con*

$$c\delta_n \leq \delta_{n+1} \leq \delta_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log \mathcal{N}_{\delta_n} X}{-\log \delta_n} = \underline{\operatorname{dlog}} X \text{ y } \limsup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log \mathcal{N}_{\delta_n} X}{-\log \delta_n} = \overline{\operatorname{dlog}} X.$$

En particular,

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log \mathcal{N}_{\delta_n} X}{-\log \delta_n} = \operatorname{dlog} X,$$

si dicho límite existe.

Demostración. Ver [4, cap. 3, p. 44]. ■

La dimensión logarítmica de un subconjunto de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ se puede hallar utilizando herramientas informáticas, pero el cálculo de la dimensión de subconjuntos de $\mathbb{R}^k$ se hace más complejo a medida que k aumenta. En [24], se proporciona una manera de reducir este último caso al caso real.

Teorema 5.1.5 *Sean $k \in \mathbb{N}$, $X \subset \mathcal{I}^k$ y*

$$\psi : \mathcal{I}^k \to \mathcal{I}$$

una inversa a la derecha de

$$\gamma : \mathcal{I} \to \mathcal{I}^k,$$

donde γ es la parametrización de $\mathcal{I}^k$ de Peano, Hilbert o Sierpiński[†]*.*

Si $\operatorname{dlog} X$ existe, entonces

$$\operatorname{dlog} X = k \cdot \operatorname{dlog} \psi[X].$$

Demostración. Ver [24]. ■

Si bien esto reduce el cálculo de $\operatorname{dlog} X$ al cálculo de $\operatorname{dlog} \psi[X]$, donde $\psi[X] \subset \mathcal{I}$, añade la dificultad que supone determinar ψ y $\psi[X]$ y el propio manejo de las curvas que llenan el espacio.

[†]La construcción de estas parametrizaciones se puede consultar en [21].

5.2. Caminos delta-uniformes

Ya que [24] muestra que las parametrizaciones de las curvas que llenan el espacio pueden facilitar el cálculo de la dimensión logarítmica, y las curvas α-densas son aproximantes a las curvas que llenan el espacio, es natural preguntarse si las curvas α-densas se pueden emplear para el mismo propósito.

Haremos uso de las definiciones a continuación.

Definición 5.2.1 *Sean $k \in \mathbb{N}$, $X \subset \mathbb{R}^k$ y $\varepsilon > 0$.*

*El ε-**entorno** de X es*

$$\mathcal{V}_\varepsilon X := \left\{ y \in \mathbb{R}^k : d\,(y, x) \leq \varepsilon \text{ para algún } x \in X \right\}.$$

Notación 5.2.2 $\mathfrak{U}_{k,\delta} := \left\{ Y \cap \mathcal{I}^k : Y \in \mathcal{M}_\delta \mathcal{I}^k, Y \cap \operatorname{int} \mathcal{I}^k \neq \varnothing \right\}$

Definición 5.2.3 *Sean $k \in \mathbb{N}$, γ un camino en $\mathcal{I}^k$ y $\delta > 0$.*

*Diremos que γ es δ-**uniforme** si existe una biyección*

$$\varphi : \mathfrak{U}_{1,\delta^k} \to \mathfrak{U}_{k,\delta}$$

tal que

$$\gamma|_J : J \to \varphi\,(J) \text{ para cada } J \in \mathfrak{U}_{1,\delta^k}.$$

Ejemplo 5.2.4 *El camino γ en $\mathcal{I}^2$, definido por*

$$\gamma\,(t) = (t, \text{mín}\,\{4t, |4t-2|\,, |4t-4|\})$$

es $\frac{1}{4}$-uniforme.

Demostración. Probaremos este resultado formalmente en el Teorema 5.2.7.

En este caso particular, para cada intervalo

$$J_m := \left[\frac{m}{16}, \frac{m+1}{16}\right] \subset \mathcal{I},$$

se tiene que $\gamma\,[J_m]$ está contenido en uno de los 16 cuadrados isométricos que particionan $\mathcal{I}^2$, como se puede observar en la Figura 5.1. ∎

Ejemplo 5.2.5 *El camino γ en I^2, definido por*

$$\gamma\,(t) = \left(t, \frac{1 - \cos 4\pi t}{2}\right)$$

no es $\frac{1}{4}$-uniforme.

Demostración. Basta observar que $\gamma^{-1}\left[\left[0, \frac{1}{4}\right]^2\right] = \left[0, \frac{1}{12}\right]$. ∎

Los caminos δ-uniformes son casos especiales de las parametrizaciones de las curvas α-densas en $\mathcal{I}^k$.

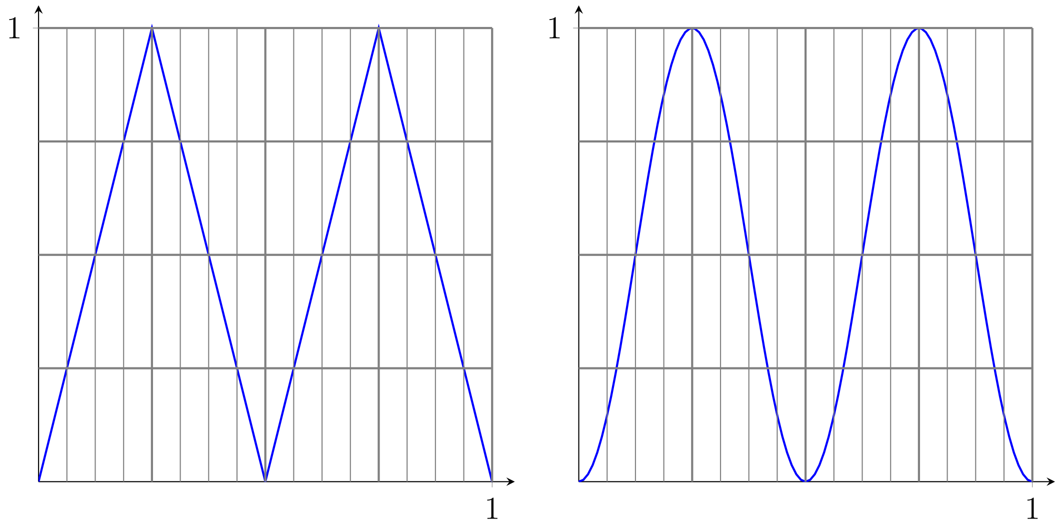


Figura 5.1: $t \mapsto (t, \text{mín}\{4t, |4t-2|, |4t-4|\})$ y $t \mapsto \left(t, \frac{1}{2}(1-\cos 4\pi t)\right)$

Proposición 5.2.6 *Todo camino δ-uniforme γ en $\mathcal{I}^k$, con $k \in \mathbb{N}$, parametriza una curva $\delta\sqrt{k}$-densa.*

Demostración. Como γ es δ-uniforme, $\gamma[\mathcal{I}]$ interseca a cada hipercubo en $\mathfrak{U}_{k,\delta}$.

Luego, basta observar que el diámetro de estos hipercubos es $\delta\sqrt{k}$. ■

El resultado a continuación establece la existencia de caminos δ-uniformes con δ arbitrariamente pequeño.

Teorema 5.2.7 *Sean $n, k \in \mathbb{N}$.*

Si γ es el camino en $\mathcal{I}^k$ definido mediante

$$\gamma_j(t) = \min_{i \in \mathbb{Z}} \left|n^{j-1}t + 2i\right| \text{ para cada } j \in \{1, \cdots, k\},$$

entonces γ es $\frac{1}{n}$-uniforme.

Demostración. Sean $\delta = n^{-1}$ y Γ_j la extensión de γ_j a la recta real, es decir,

$$\Gamma_j : \mathbb{R} \to \mathcal{I} \text{ y } \Gamma_j(t) = \min_{i \in \mathbb{Z}} \left|n^{j-1}t + 2i\right| \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Si $t \in [0, \delta^{j-1}]$, tenemos que

$$\left|n^{j-1}t + 2i\right| = n^{j-1}t + 2i > n^{j-1}t \text{ si } i \in \mathbb{Z}^+$$

y

$$\left|n^{j-1}t + 2i\right| = 2|i| - n^{j-1}t \geq 2 - 1 = 1 \geq n^{j-1}t \text{ si } i \in \mathbb{Z}^-,$$

de manera que

$$\Gamma_j(t) = n^{j-1}t \text{ si } t \in \left[0, \delta^{j-1}\right].$$

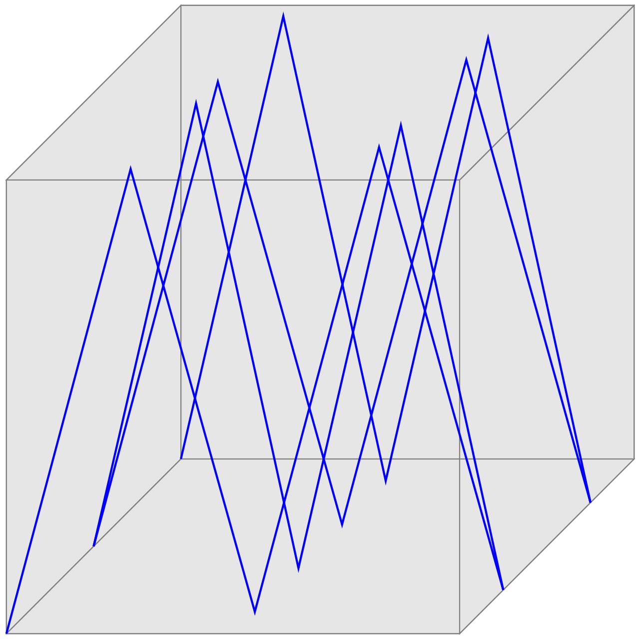


Figura 5.2: $t \mapsto \left(t, \min_{i\in\mathbb{Z}} |4t-2i|, \min_{i\in\mathbb{Z}} |16t-2i|\right)$

Como

$$\begin{aligned}
\Gamma_j\left(t+2\delta^{j-1}\right) &= \min_{i\in\mathbb{Z}} \left|n^{j-1}\left(t+2\delta^{j-1}\right)+2i\right| \\
&= \min_{i\in\mathbb{Z}} \left|n^{j-1}t+2+2i\right| \\
&= \min_{i\in\mathbb{Z}} \left|n^{j-1}t+2\left(i+1\right)\right| \\
&= \min_{i-1\in\mathbb{Z}} \left|n^{j-1}t+2i\right| \\
&= \min_{i\in\mathbb{Z}} \left|n^{j-1}t+2i\right| \\
&= \Gamma_j\left(t\right)
\end{aligned}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, Γ_j es una función periódica de periodo $2\delta^{j-1}$.

Además,

$$\begin{aligned}
\Gamma_j\left(-t\right) &= \min_{i\in\mathbb{Z}} \left|n^{j-1}\left(-t\right)+2i\right| \\
&= \min_{i\in\mathbb{Z}} \left|-\left(n^{j-1}t-2i\right)\right| \\
&= \min_{i\in\mathbb{Z}} \left|\left(n^{j-1}t-2i\right)\right| \\
&= \min_{-i\in\mathbb{Z}} \left|n^{j-1}t+2i\right| \\
&= \min_{i\in\mathbb{Z}} \left|n^{j-1}t+2i\right| \\
&= \Gamma_j\left(t\right)
\end{aligned}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Si $k = 1$, γ es la aplicación identidad y no hay nada que probar.

Supongamos que el enunciado sea cierto para $k-1$.

Entonces la aplicación

$$\hat{\gamma} \coloneqq (\gamma_1, \cdots, y_{k-1}) : \mathcal{I} \to \mathcal{I}^{k-1}$$

es una curva $\frac{1}{n}$-uniforme, de manera que existe una biyección

$$\hat{\varphi} : \mathfrak{U}_{1,\delta^{k-1}} \to \mathfrak{U}_{k-1,\delta}$$

tal que

$$\hat{\gamma}|_J : J \to \hat{\varphi}(J) \text{ para cada } J \in \mathfrak{U}_{1,\delta^{k-1}}.$$

Definamos

$$\varphi : \mathfrak{U}_{1,\delta^k} \to \mathfrak{U}_{k,\delta}$$

como sigue:

Para cada $J \in \mathfrak{U}_{1,\delta^k}$, por definición de $\mathfrak{U}$ y el algoritmo de la división, existen

$$m \in \left\{0, \cdots, n^k - 1\right\}, q \in \left\{0, \cdots, n^{k-1} - 1\right\} \text{ y } r \in \{0, \cdots, n-1\}$$

tales que

$$J = \left[m\delta^k, (m+1)\,\delta^k\right] \text{ y } m = nq + r.$$

Sea

$$\varphi(J) = \hat{\varphi}\left(\left[q\delta^{k-1}, (q+1)\,\delta^{k-1}\right]\right) \times \begin{cases} [r\delta, (r+1)\,\delta] & \text{si } q \text{ es par} \\ [1-(r+1)\,\delta, 1-r\delta] & \text{si } q \text{ es impar} \end{cases}.$$

Como el par (q, r) es distinto para cada J y $\hat{\varphi}$ es biyectiva, se sigue que φ es biyectiva.

Sea $t \in J$.

Tenemos que

$$q\delta^{k-1} = qn\delta^k \le m\delta^k \le t \le (m+1)\,\delta^k \le (q+1)\,n\delta^k = (q+1)\,\delta^{k-1},$$

de manera que

$$\hat{\gamma}(t) \in \hat{\varphi}\left(\left[q\delta^{k-1}, (q+1)\,\delta^{k-1}\right]\right).$$

Si q es par, como

$$t - q\delta^{k-1} \in [0, \delta^{k-1}],$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma_k(t) &= \gamma_k\left(t - q\delta^{k-1}\right) \\ &= n^{k-1}\left(t - q\delta^{k-1}\right) \\ &= n^{k-1}\left(t - nq\delta^k\right) \\ &= n^{k-1}\left(t - (m-r)\,\delta^k\right) \\ &= n^{k-1}\left(t - m\delta^k + r\delta^k\right) \\ &= n^{k-1}\left(t - m\delta^k\right) + r\delta, \end{aligned}$$

de manera que

$$\gamma_k(t) \in [r\delta, (r+1)\delta]$$

puesto que

$$n^{k-1}\left(t - m\delta^k\right) \in n^{k-1}\left[0, \delta^k\right] = [0, \delta].$$

Similarmente, si q es impar, como

$$(q+1)\,\delta^{k-1} - t \in [0, \delta^{k-1}],$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma_k(t) &= \gamma_k\left(t - (q+1)\,\delta^{k-1}\right) \\
&= \gamma_k\left((q+1)\,\delta^{k-1} - t\right) \\
&= n^{k-1}\left((q+1)\,\delta^{k-1} - t\right) \\
&= n^{k-1}\left(\delta^{k-1} + nq\delta^k - t\right) \\
&= n^{k-1}\left(\delta^{k-1} + (m-r)\,\delta^k - t\right) \\
&= n^{k-1}\left(\delta^{k-1} - r\delta^k - \left(t - m\delta^k\right)\right) \\
&= 1 - r\delta - n^{k-1}\left(t - m\delta^k\right),
\end{aligned}$$

de manera que

$$\gamma_k(t) \in [1 - (r+1)\,\delta, 1 - r\delta]$$

puesto que

$$-n^{k-1}\left(t - m\delta^k\right) \in -n^{k-1}\left[0, \delta^k\right] = [-\delta, 0].$$

En cualquier caso,

$$\gamma(t) \in (\hat{\gamma}(t), \gamma_k(t)) \in \varphi(J).$$

Esto prueba el enunciado. ■

5.3. Resultados

Probaremos el resultado principal de este capítulo en tres partes.

Proposición 5.3.1 *Si $k \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0,1)$, $X \subset \operatorname{int} \mathcal{I}^k$ es no vacío y γ es un camino δ-uniforme $\mathcal{I}^k$, se tiene que*

$$\mathcal{N}_\delta X \leq \mathcal{N}_{\delta^k} \gamma^{-1} [\mathcal{V}_\alpha X] \text{ donde } \alpha = \delta\sqrt{k}.$$

Demostración. Como γ es δ-uniforme, existe una biyección

$$\varphi : \mathfrak{U}_{1,\delta^k} \to \mathfrak{U}_{k,\delta}$$

tal que

$$\gamma|_J : J \to \varphi(J) \text{ para cada } J \in \mathfrak{U}_{1,\delta^k}.$$

Para probar la primera desigualdad, sea $Y \in \mathcal{M}_\delta X$.

Como $X \subset \operatorname{int} \mathcal{I}^k$,

$$J_Y := \varphi^{-1}\left(Y \cap \mathcal{I}^k\right)$$

está bien definido.

Fijando $a \in Y$ y $t \in J_Y$, tenemos que

$$d(\gamma(t), a) \leq \alpha.$$

Así,

$$\gamma(t) \in \mathcal{V}_\alpha \{a\} \subset \mathcal{V}_\alpha X,$$

de manera que

$$\gamma[J_Y] \cap \mathcal{V}_\alpha X \neq \varnothing$$

y, por tanto,

$$J_Y \cap \gamma^{-1}[\mathcal{V}_\alpha X] \neq \varnothing.$$

Como la aplicación

$$Y \mapsto J_Y$$

es inyectiva y J_Y está contenido en un único cubo de $\mathcal{M}_\delta \mathcal{I}$, el enunciado queda probado. ∎

Proposición 5.3.2 *Dado $k \in \mathbb{N}$, existe $c_k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $\delta \in (0,1)$, cada $X \subset \operatorname{int} \mathcal{I}^k$ no vacío y cada camino δ-uniforme γ en $\mathcal{I}^k$, se tiene que*

$$\mathcal{N}_{\delta^k} \gamma^{-1} [\mathcal{V}_\alpha X] \leq c_k \mathcal{N}_\delta X \text{ donde } \alpha = \delta\sqrt{k}.$$

Demostración. Como γ es δ-uniforme, existe una biyección

$$\varphi : \mathfrak{U}_{1,\delta^k} \to \mathfrak{U}_{k,\delta}$$

tal que

$$\gamma|_J : J \to \varphi(J) \text{ para cada } J \in \mathfrak{U}_{1,\delta^k}.$$

Sea

$$J \in \mathcal{M}_{\delta^k}\mathcal{I} \text{ tal que } J \cap \gamma^{-1}[\mathcal{V}_\alpha X] \neq \varnothing,$$

de manera que

$$J = \left[-\delta^k, 0\right], J = \left[1, 1+\delta^k\right] \text{ o } K \coloneqq J \cap \mathcal{I} \in \mathfrak{U}_{1,\delta^k}.$$

En el último caso, fijando

$$s \in K \cap \gamma^{-1}[\mathcal{V}_\alpha X],$$

tenemos que

$$\gamma(s) \in \gamma[K] \cap \mathcal{V}_\alpha X \subset \varphi(K) \cap \mathcal{V}_\alpha X,$$

de manera que existe

$$y \in X \text{ tal que } d(y, \gamma(s)) \leq \alpha.$$

Eligiendo

$$C_y \in \mathcal{M}_\delta X \text{ tal que } y \in C_y,$$

se tiene entonces que

$$d(C_y, \varphi(K)) \leq d(y, \varphi(K)) \leq d(y, \gamma(s)) \leq \alpha$$

y, por tanto,

$$d\left(M, \delta^{-1}\varphi(K)\right) \leq \delta^{-1}\alpha = \sqrt{k} \tag{5.1}$$

se satisface si

$$M = \delta^{-1}C_y.$$

Tomemos c_k tal que $c_k - 2$ sea el número de cubos $M \in \mathcal{M}_1\mathbb{R}^k$ para los que (5.1) se satisfaga.

Ahora, si K_0 es otro intervalo de $\mathfrak{U}_{1,\delta^k}$, como

$$\mathcal{M}_1\mathbb{R}^k = \left\{j + M : M \in \mathcal{M}_1\mathbb{R}^k\right\} \text{ para cada } j \in \mathbb{Z}^k$$

y existe

$$j_0 \in \mathbb{Z}^k \text{ tal que } \delta^{-1}\varphi(K_0) = j_0 + \delta^{-1}\varphi(K),$$

podemos observar que c_k no depende de la elección de K.

De esta manera, sólo hay $c_k - 2$ elecciones posibles para C_y y, por tanto,

$$\mathcal{N}_{\delta^k}\gamma^{-1}[\mathcal{V}_\alpha X] \leq 2 + (c_k - 2)\mathcal{N}_\delta X \leq 2\mathcal{N}_\delta X + (c_k - 2)\mathcal{N}_\delta X \leq c_k\mathcal{N}_\delta X,$$

ya que X es no vacío.

Esto prueba el enunciado. ■

La Proposición 5.3.2, si bien no reduce el cálculo de $\operatorname{dlog} X$ al cálculo de la dimensión logarítmica de un conjunto de números reales, muestra que

$$\log \mathcal{N}_\delta X = \log \mathcal{N}_{\delta^k}\gamma^{-1}\left[\mathcal{V}_{\delta\sqrt{k}}X\right] + O(1), \text{ donde } \gamma^{-1}\left[\mathcal{V}_{\delta\sqrt{k}}X\right] \subset \mathbb{R}.$$

Los resultados a continuación formalizan como este resultado se puede utilizar para facilitar el cálculo de la dimensión logarítmica.

Teorema 5.3.3 *Sean* $k \in \mathbb{N}$ *y* $X \subset \operatorname{int} \mathcal{I}^k$ *no vacío.*

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, γ_n *es una curva* 2^{-n}*-uniforme en* $\mathcal{I}^k$, *se tiene que*

$$\underline{\operatorname{dlog}} X = \liminf_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathcal{N}_{2^{-kn}} \gamma_n^{-1} \left[\mathcal{V}_{2^{-n}\sqrt{k}} X \right]}{n \log 2} \text{ y } \overline{\operatorname{dlog}} X = \limsup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathcal{N}_{2^{-kn}} \gamma_n^{-1} \left[\mathcal{V}_{2^{-n}\sqrt{k}} X \right]}{n \log 2}.$$

En particular,

$$\operatorname{dlog} X = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathcal{N}_{2^{-kn}} \gamma_n^{-1} \left[\mathcal{V}_{2^{-n}\sqrt{k}} X \right]}{n \log 2},$$

si dicho límite existe.

Demostración. Dado $\delta \in (0,1)$, la Proposición 5.3.1 y la Proposición 5.3.2 prueban que

$$\mathcal{N}_\delta X \leq \mathcal{N}_{2^{-kn}} \gamma_n^{-1} \left[\mathcal{V}_{2^{-n}\sqrt{k}} X \right] \leq c_k \mathcal{N}_\delta X,$$

de manera que

$$\frac{\log \mathcal{N}_\delta X}{n \log 2} \leq \frac{\log \mathcal{N}_{2^{-kn}} \gamma_n^{-1} \left[\mathcal{V}_{2^{-n}\sqrt{k}} X \right]}{n \log 2} \leq \frac{\log \left(c_k \mathcal{N}_\delta X \right)}{n \log 2} = \frac{\log \mathcal{N}_\delta X}{n \log 2} + \frac{\log c_k}{n \log 2}.$$

Tomando límites superiores, vemos que

$$\overline{\operatorname{dlog}} X \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log \mathcal{N}_{2^{-kn}} \gamma_n^{-1} \left[\mathcal{V}_{2^{-n}\sqrt{k}} X \right]}{n \log 2} \leq = \overline{\operatorname{dlog}} X + \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log c_k}{n \log 2} = \overline{\operatorname{dlog}} X.$$

El resultado para la dimensión inferior se prueba de manera análoga. ■

Conclusiones finales

Hemos introducido las nociones de densificador, pseudo-densificabilidad, densificabilidad condicional y absoluta, aproximabilidad por caminos y aproximabilidad numerable por caminos. Dichos conceptos han facilitado la comprensión de la propiedad de la densificabilidad y han permitido obtener resultados tales como la caracterización de los densificables en $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío. Estimamos que por este camino se puede llegar a una caracterización de la densificabilidad en espacios métricos compactos.

Además, hemos extendido la propiedad de densificabilidad, conjuntamente con su aplicabilidad a los problemas de optimización global, a espacios métricos no precompactos y espacios no metrizables, introduciendo las nociones de densificabilidad simple, secuencial y topológica. Asimismo, hemos demostrado que la densificabilidad es la extensión óptima en espacios topológicos en general.

Asimismo, hemos comparado la densificabilidad topológica con la extensión ya existente de la densificabilidad a subconjuntos de espacios vectoriales topológicos. Esto dio lugar a la densificabilidad lineal, un nuevo concepto que combina la ventajas de las dos extensiones anteriores.

Finalmente, hemos presentado un nuevo método de reducción de variables que hace uso de curvas alfa-densas. Este método reduce problemas de cálculo de la dimensión logarítmica a una serie de problemas unidimensionales del mismo tipo.

Bibliografía

[1] Cantor, G.: Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Crelle J. 84 (1878) 242-258

[2] Dugundji, J.: Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966

[3] Engelking, R.: General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989

[4] Falconer, K.: Fractal Geometry, Wiley & Sons, West Sussex, 2003

[5] Gillman, L. and Jerison, M.: Rings of Continuous Functions, D. Van Nostrand, New Jersey, 1960

[6] Hahn, H.: Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurven, S.-B. Kaiserl. Akd. Wiss. Wien, Abt. 2a (Math.) 123 (1914) 2433-2487

[7] Hausdorff, F.: Grundzüge der Mengenlehre, Verlag von Weit & Comp., Leipzig, 1914

[8] Hocking, J. and Young, G.: Topology, Addison-Welsey Publishing Company, Massachusetts, 1961

[9] Kelley, J. L.: General Topology, Springer-Verlag, New York, 1955

[10] Marzurkiewicz, S.: O arytmetyzacji kontinuow, C.R. Soc. Sc. Varsovie VI (1913) 205-311

[11] Mora, G.: Global optimization by V-dense curves in topological vector spaces, Kybernetes 38(5) (2009) 709-717

[12] Mora, G., Benavent, R. and Navarro, J. C.: Polynomial Alpha-Dense Curves and Multiple Integration, Inter. Journal of Comput. and Num. Anal. and Applic. 1(1) (2002) 55-68

[13] Mora, G., Cherruault, Y., Benabidallah, A. and Tourbier, Y.: Approximating Multiple Integrals via α-Dense Curves, Kybernetes, 31(2) (2002) 292-304

[14] Mora, G., Cherruault, Y. and Ubeda, J.: Solving Inequalities by α-Dense Curves. Application to Global Optimization, Kybernetes, 34(7/8) (2005) 983-991

[15] Mora, G. and Cherruault, Y.: Characterization and Generation of Alpha-Dense Curves, Computers and Math. Applic. 33(9) (1997) 83-91

[16] Mora, G. and Mira, J. A.: Alpha-dense Curves in Infitite Dimensional Spaces, Inter. Journal of Comput. and Num. Anal. and Applic. 5(4) (2003) 437-449

[17] Mora, G. and Mora-Porta, G.: Dimensionality Reducing Multiple Integrals by Alpha-Dense Curves, Inter. Journal of Pure and Applied Math. 22(1) (2005) 105-116

[18] Morayne, M.: On diferentiability of Peano type functions, Colloquium Math. LIII(1) (1987) 129-132

[19] Netto, E.: Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Crelle J. 86 (1879) 263-268

[20] Peano, G.: Sur une courbe qui remplit toute une aire plane, Math. Annln. 36 (1980) 157-160

[21] Sagan, H.: Space Filling Curves, Springer-Verlag, New York, 1994

[22] Schaefer, H. H.: Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, New York, 1971

[23] Sierpiński, W: Un théorème sur les continus, Tôhoku Math. J. 13 (1918) 300–305

[24] Skubalska-Rafajłowicz, E.: A new method of estimation of the box-counting dimension of multivariate objects using space-filling curves, Nonlinear Analysis 63 (2005) e1281 – e1287

Índice alfabético