



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

XIII JORNADES DE XARXES D'INVESTIGACIÓ EN DOCÈNCIA UNIVERSITÀRIA

Noves estratègies organitzatives i metodològiques en la formació
universitària per a respondre a la necessitat d'adaptació i canvi



JORNADAS DE REDES DE INVESTIGACIÓN EN DOCENCIA UNIVERSITARIA **XIII**

Nuevas estrategias organizativas y metodológicas en la formación
universitaria para responder a la necesidad de adaptación y cambio

ISBN: 978-84-606-8636-1

Coordinadores

María Teresa Tortosa Ybáñez

José Daniel Álvarez Teruel

Neus Pellín Buades

© **Del texto: los autores**

© **De esta edición:**

Universidad de Alicante

Vicerrectorado de Estudios, Formación y Calidad

Instituto de Ciencias de la Educación (ICE)

ISBN: 978-84-606-8636-1

Revisión y maquetación: Neus Pellín Buades

Publicación: Julio 2015

Una visión matemática del campus de la Universidad de Alicante

Mariola Molina Vila¹; Julio Mulero González¹; Lorena Segura Abad²;
Juan Matías Sepulcre Martínez²; Melania Guillén Sánchez

¹*Departamento de Estadística e Investigación Operativa*

²*Departamento de Análisis Matemático*

Universidad de Alicante

RESUMEN (ABSTRACT)

La experiencia que los miembros de la red de divulgación matemática de la Universidad de Alicante, cuyo objetivo principal es la motivación hacia el aprendizaje de las Matemáticas por medio de actividades participativas, confirma que el desarrollo de esta labor es tremendamente importante y ha de realizarse de manera continuada en el tiempo. Este trabajo está dedicado a la descripción del diseño, elaboración, puesta en funcionamiento y valoración de una ruta-yincana matemática, destinada a un público general y organizada en el entorno de la Universidad de Alicante. La ruta-yincana está constituida por diferentes actividades relacionadas con elementos del campus en los que reconocemos cierto contenido matemático, y que fueron descritos en un trabajo presentado en jornadas anteriores. Las transiciones entre dichas actividades, que han sido clasificadas atendiendo a las siguientes ramas de las Matemáticas: Geometría, Análisis, Álgebra y Estadística, se realizan por medio de mensajes codificados. Además, presentamos las distintas iniciativas propuestas por la Facultad de Ciencias en las que esta actividad podría tener cabida.

Palabras clave: Matemáticas, divulgación, ruta matemática, yincana matemática

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Problema/cuestión.

En numerosas ocasiones las matemáticas se perciben como una materia confusa, difícil e incluso inaccesible para gran parte de la sociedad, lo que motiva un gran desinterés por ellas y la renuncia incluso a su utilización e intento de comprensión. Desde esta predisposición negativa hacia una visión más amable de las matemáticas, el viraje debe realizarse acortando la distancia entre las matemáticas y la realidad que nos rodea, haciendo descubrir la presencia de las mismas en nuestra vida cotidiana.

Desde este punto de vista, hemos desarrollado una ruta-yincana por el campus de la Universidad de Alicante en la que pretendemos acercar las matemáticas a distintos colectivos por medio de elementos matemáticos que podemos encontrar en la disposición del campus y que nos servirán de apoyo para introducir conceptos matemáticos de una manera lúdica y participativa a la vez que se realiza una presentación del campus.

Puesto que los colectivos a los que puede ir destinada esta actividad son dispares, la ruta-yincana se adaptará a la naturaleza de los mismos.

1.2 Revisión de la literatura.

La divulgación de las matemáticas, integrada en el objetivo principal de este tipo de trabajos, es un tópico que cuenta cada vez más con una buena variedad de recursos disponibles a través de internet y en forma de publicación. Desde nuestra red de divulgación, algunos ejemplos los encontramos en [3], [4], [5], [6] y [8].

Si nos centramos en el objetivo más específico de este trabajo relacionado con rutas matemáticas, hay varios ejemplos de recorridos que han sido planificadas en diferentes ciudades. Por ejemplo, podemos ver las rutas elaboradas en Elche, Valladolid y Zaragoza (ver [2], [9] y [10], respectivamente), que han sido planificadas con el objetivo de poner en valor los elementos patrimoniales de los que disponen. En este sentido, también existen referencias acerca de la elaboración y el diseño de rutas matemáticas (ver [1]).

En cuanto al campus de la UA, considerado como uno de los mejores campus europeos, podemos encontrar información variada en la página web oficial de la Universidad de Alicante [11]. Nuestra red de divulgación realizó en un trabajo anterior una labor de detección en el propio campus de algunos elementos de marcado carácter matemático [7] que conforman el origen de este trabajo.

1.3 Propósito.

Este trabajo, enmarcado en el contexto de una red de divulgación de las matemáticas, llamada DIMATES, tiene por finalidad la elaboración de una cantidad suficiente de actividades, clasificadas en cuatro ramas matemáticas (Análisis matemático, Álgebra, Geometría y Estadística), para la elaboración de una ruta-yincana que sirva también como medio de presentación y conocimiento del campus de la UA.

Basándonos en algún elemento físico del campus que podamos visualizar fácilmente, el desarrollo de estas actividades se realiza con un formato que permita, por una parte, la interacción de los participantes en el recorrido y, por otra parte, que se facilite la introducción de ciertos conceptos matemáticos.

2. DESARROLLO DE LA CUESTIÓN PLANTEADA

2.1 Objetivos

El objetivo principal es el diseño de rutas matemáticas por el campus de la Universidad de Alicante con el fin de mostrar las matemáticas que se pueden encontrar en un entorno próximo. La consecución de este objetivo pasa por recopilar, en un formato homogéneo, ciertas actividades que involucren algún elemento real y cotidiano como fondo, y que permitan hacer una relación con las matemáticas. De esta forma, se pretende en última instancia acercar esta disciplina a personas con niveles de conocimiento de las matemáticas no necesariamente altos.

2.2. Método y proceso de investigación.

Utilizando el trabajo, anteriormente realizado (ver [7]), de recopilación de elementos que presentan aspectos matemáticos en el campus de la UA, se han diseñado unas fichas que recogen las actividades recopiladas, clasificadas en cuatro grandes áreas de las matemáticas: Análisis matemático, Álgebra, Geometría y Estadística.

Estas fichas están formadas por dos bloques fácilmente diferenciables:

- Una primera parte explicativa sobre conceptos matemáticos, que pueden ser conocidos o no, y con un nivel de profundidad variable según el nivel de conocimiento de las matemáticas que tengan los destinatarios de las actividades, ya que nuestra intención es elaborar material suficiente para proponer una ruta-yincana por el campus de la UA a participantes desde la educación secundaria hasta últimos años de los diferentes grados de ciencias.

- Una segunda parte en la que se proponen actividades para contestar en relación con los conceptos que se han trabajado en la ficha y apoyadas en el elemento visible del campus que presente esos conceptos de una manera palpable y cotidiana. Estas actividades tendrán una puntuación asignada según la dificultad de la prueba y estarán propuestas de forma que la dificultad vaya creciendo a medida que se completa la ficha.

Una vez elaborada una batería de fichas, podemos combinarlas para confeccionar distintas rutas a través del campus que puedan servir como presentación de éste desde un punto de vista matemático diferente. Se pretende además que los participantes en estas actividades puedan acercarse, de manera sencilla y con pequeñas pinceladas, a conceptos matemáticos que no siempre son familiares.

Con el fin de detallar el proceso completo, recogemos a continuación todos los detalles en cuanto a la planificación de la ruta, la elaboración de las fichas matemáticas, la mecánica de las transiciones y la valoración por parte de los participantes.

PLANIFICACIÓN DE LA RUTA

La actividad objeto de este trabajo está pensada para que se pueda llevar a la práctica con alumnos de diferentes edades, desde alumnos de educación secundaria hasta alumnos de los distintos grados de la rama de ciencias, por lo que las fichas que componen la ruta por el campus están elaboradas con distintos niveles de dificultad para poder escoger las más óptimas en función del grupo con el que se pretenda puntualmente trabajar.

La ruta en cuestión estará organizada de manera que todos los grupos salgan desde un punto inicial e incluirá una serie de estaciones ubicadas en distintos puntos del campus, cada una de las cuales irá asociada a una de las fichas elaboradas. En el punto inicial se les explicará a todos los participantes las normas generales para el buen funcionamiento de la actividad y, a continuación, cada uno de los grupos se dirigirá hacia distintas estaciones: al final todos los participantes habrán realizado las mismas actividades pero en distinto orden. En cada una de las estaciones habrá un monitor que será el encargado de dirigir la prueba correspondiente entregando la ficha a todos los participantes que deberán leerla y trabajar en grupo las actividades propuestas.

FICHAS MATEMÁTICAS

A continuación, mostramos ejemplos de fichas, para cada una de las categorías, que bien podrían formar parte en este caso de una ruta-yincana enfocada a alumnos de secundaria. Variando la dificultad de las actividades, este enfoque podría ser modificado de inmediato. El

contenido de las fichas que presentamos es variado: en la ficha de Álgebra se manejan especialmente las congruencias, en la ficha de Análisis Matemático se aborda el número áureo y las sucesiones, en la ficha de Estadística se introduce la ley de Benford y finalmente en la ficha de Geometría se estudian diversas propiedades del círculo.

Figura 1. Ejemplo ficha Álgebra

Matemáticas por el campus

Estación Álgebra

Si un partido de tenis comienza a las 11.00 horas y dura 4 horas, ¿a qué hora terminará? La respuesta, evidentemente es que a las 15 horas o, equivalentemente, a las 3. ¿Por qué 15 es la misma respuesta que 3? Para medir el tiempo utilizamos relojes de doce horas, es decir, el día comienza en un instante 0 y contando 12 horas más...

a partir de ese instante, volvemos a la situación inicial y reiniciamos el conteo de las horas. Estamos realizando un conteo módulo 12 y, en ese contexto, 3 y 15 son equivalentes o congruentes, tal y como veremos. A partir de ahí, si sabemos contar con relojes de 12 horas, ¿por qué no hacerlo con relojes de 7, de 100, de 5000 o de cualquier otro número de horas que nos plantee-mos?

Convergencias

La teoría de congruencias (también conocida como aritmética modular o de los relojes) constituye un campo de la matemática de mucho interés puesto que sus resultados facilitan y agilizan los cálculos cuando se trabaja con números muy grandes, y presentan numerosas aplicaciones en campos como la Computación y la Criptografía.

Si n es un número natural, decimos que dos números enteros a y b son congruentes módulo n cuando, al efectuar la división de cada uno de ellos entre n , el resto obtenido es el mismo. Lo representamos $a \equiv b \pmod{n}$.

Recordemos que el algoritmo de la división nos asegura que al dividir un número entero D , al que llamamos dividendo, entre otro entero $d \neq 0$ al que llamamos divisor, obtenemos, de manera única dos enteros: q (cociente) y r (resto), tales que $0 \leq r < |d|$ y $D = qd + r$.

Atareado en su misión de contar soldados, el matemático chino Sun-Tsu planteó en el s. III, el siguiente problema: cuando cuento a mis soldados de tres en tres, me sobran dos;

cuando los cuento de cinco en cinco, me sobran tres; cuando los cuento de siete en siete, me sobran dos. ¿Cuántos soldados tengo? En la notación que acabamos de introducir, el problema se plantearía: buscamos un número entero a que cumpla que

$$a \equiv 2 \pmod{3}$$

$$a \equiv 3 \pmod{5}$$

$$a \equiv 2 \pmod{7}.$$

Este problema da origen al teorema chino del resto que nos proporciona condiciones para que un problema del tipo anterior tenga solución. El gran matemático chino Qin Jiushao (1202-1261) lo introdujo en su tratado *Sishu Jiuzhang*. En su versión más simple, el teorema se enuncia de la siguiente manera: el sistema de congruencias $x \equiv a_i \pmod{m_i}$, para $i = 1, \dots, n$, tiene solución si y solo si m_i y m_j son primos entre sí (no tienen ningún divisor en común distinto de 1), para cualesquiera $i \neq j$. El resultado se utiliza para simplificar cálculos grandes mediante el desglese en cálculos más pequeños, cuyos resultados luego pueden recombinarse para generar la respuesta a la pregunta original.

Ya en el s. XVII, Pierre de Fermat (1601-1665), conocido por la conjetura que lleva su nombre y que preocupó a los matemáticos durante aproximadamente 350 años, hasta que fue resuelta en 1995, enuncia también lo que se conoce como el Pequeño Teorema de Fermat: si p es un número primo y a es cualquier otro número que no es divisible por p , entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. A Carl Friedrich Gauss (1777-1855), conocido como el príncipe de las matemáticas, se le atribuye la cita: "Si las matemáticas son la reina de las ciencias, la teoría de números es la reina de las matemáticas". En su libro *Disquisitiones Arithmeticae* introduce la noción de congruencia y su aritmética, adoptando el símbolo \equiv , notación que como hemos visto, aún utilizamos. Así, si $a \equiv b \pmod{n}$ y $c \equiv d \pmod{n}$, entonces $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ y $ac \equiv bd \pmod{n}$. Como consecuencia, si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $a^k \equiv b^k \pmod{n}$, para cualquier k .

La teoría de congruencias se empieza a desarrollar en el siglo XIX y actualmente nos ayuda a trabajar con números muy grandes de manera rápida y tiene numerosas aplicaciones, como hemos dicho en computación, criptografía o en la teoría de grupos.

Ahora te toca a ti

Actividad 1:
Si en ese momento fueran las 8 p.m. ¿Qué hora será dentro de 200 horas?

Actividad 2:
Si hoy es jueves, ¿qué día de la semana será dentro de 25 días? ¿Y dentro de 3000?

Actividad 3:
Un número entre 1 y 150, verifica: al dividirlo entre 7, el resto es 2, al dividirlo entre 11, el resto es 1 y finalmente, al dividirlo entre 13 el resto es 9. De qué número se trata? Puedes utilizar esta tabla para calcularlo.

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
| 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 |
| 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 |
| 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 | 130 |
| 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 | 140 |
| 141 | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 |

Actividad 4:
¿Cuál es el resto de dividir el número 28569^4 entre 11? ¿Y 28569^{38} entre 11?

Actividad 5:
Escribe un número de tres cifras ABC y a continuación, el mismo número, obteniendo así un número de seis cifras ABCABC. Dividelo por 7, luego por 11 y finalmente por 13. ¿Cuál es el resto obtenido en cada caso? ¿Sabrías explicar el por qué?

Actividad final:
Uno de los primeros métodos de cifrado conocidos históricamente fue utilizado por Julio César para enviar órdenes en los campos de batalla. Codificamos cada letra del alfabeto (y el espacio) con dos dígitos según la siguiente tabla:

| | | | | | | |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ESP: 00 | D: 04 | H: 08 | L: 12 | O: 16 | S: 20 | W: 24 |
| A: 01 | B: 05 | J: 09 | M: 13 | P: 17 | T: 21 | X: 25 |
| C: 02 | F: 06 | K: 10 | N: 14 | Q: 18 | U: 22 | Y: 26 |
| G: 03 | I: 07 | R: 11 | V: 15 | Z: 19 | | |

El código de las letras cifradas es

$$E(x) = x + k \pmod{26},$$

siendo x el código de la letra original y k (la clave) un número entre 0 y 25. Hemos recibido el mensaje MEXYFHUWHTYI y sabemos que la clave es 5. ¿Serías capaz de descifrarlo?

Matemáticas por el campus
Se han publicado en: info@matem.uned.es lectura@matem.uned.es matem@matem.uned.es preguntas@matem.uned.es

Matemáticas por el campus
Se han publicado en: info@matem.uned.es lectura@matem.uned.es matem@matem.uned.es preguntas@matem.uned.es

Figura 2. Ejemplo ficha Análisis Matemático

Matemáticas por el campus

Estación Análisis Matemático

La aritmética es la rama de la matemática cuyo objeto principal de estudio son los números y las operaciones elementales hechas con ellos: suma, resta, multiplicación y división. Los orígenes de la aritmética se pueden rastrear hasta los comienzos de la matemática misma, y de la ciencia en general.

El número áureo y las sucesiones

El número de oro, también llamado número irracional, es un número irracional de notado habitualmente por ϕ que recibe su nombre del escultor griego Fidias, quien utilizó ampliamente sus propiedades en su destacada obra artística. Este número describe la proporción exacta en una recta que se ha dividido en dos segmentos tales que la proporción entre la longitud total de la línea y el segmento mayor es igual a la proporción entre los dos segmentos.

Desde la antigüedad, el número áureo ha despertado el interés y la curiosidad de filósofos, matemáticos, pintores, arquitectos y escultores. Los griegos sentían verdadera fascinación por ϕ , pues además lo descubrieron en el pentagrama, la estrella de cinco puntas, un símbolo que era reverenciado por la Hermandad Pitagórica. La obra más importante sobre la razón áurea es la Divina Proporción, de Luca Pacioli, publicada en 1509 e ilustrada por Leonardo Da Vinci.

El interés matemático por ϕ tiene su origen en su relación con la sucesión más famosa de las matemáticas: la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots$ en la que cada término es la suma de los dos anteriores. Esta sucesión viene descrita como la solución a un problema de la cría de conejos y tiene también numerosas aplicaciones. Además, la razón o cociente entre un término y el inmediatamente anterior de esta sucesión varía continuamente, pero se estabiliza en el número áureo; es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \phi$.

Por ejemplo si uno observa un jardín, descubrirá que la cantidad de pétalos de la mayoría de las flores se corresponde con un número de la sucesión de Fibonacci (el lirio, la araucaria, la clavellina, el ranúnculo, el delphinio, la calandula, la margarita...). Los números de Fibonacci también son frecuentes en la disposición en espiral que se observa en las piñas. En este sentido, en el campus de la Universidad de Alicante existe una variada flora conformando un maravilloso jardín que invita al paseo y a la observación. Si se visita el Bosque Ilustrado en el que la especie vegetal predominante es el pino mediterráneo, se mira una pinya con detenimiento y se encuentran las hileras espirales de escamas, es fácil descubrir 8 espirales que se enrollan hacia la izquierda y 13 espirales que se enrollan hacia la derecha (o viceversa), y otras parejas de números.

Una sucesión numérica, como la de Fibonacci, es un conjunto de números dispuestos uno a continuación de otro: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$. Cada número a_n es llamado un término de la sucesión. El subíndice nos indica el lugar que el término ocupa en la sucesión. El término general a_n nos permite determinar cualquier término de una sucesión. Otra sucesión clásica es la de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ..., que se consideran los ladrillos básicos indivisibles del sistema de números naturales (gracias al teorema fundamental de la aritmética que afirma que todo número natural se puede representar de forma única como producto de factores primos).

Existen varios tipos de sucesiones en función de las características que posean: monótonas crecientes, monótonas decrecientes, acotadas, convergentes, alternadas... Las hay también en progresión aritmética: cada término se obtiene a partir del anterior sumando una cantidad fija llamada diferencia (de esta forma, $a_n = a_1 + (n-1)d$), o en progresión geométrica: cada término se obtiene a partir del anterior multiplicándolo por una cantidad fija llamada razón (de esta forma, $a_n = a_1 r^{n-1}$).

Ahora te toca a ti

Actividad 1: El triángulo de Pascal

Los coeficientes que aparecen en el binomio de Newton coinciden con los elementos de cada fila del triángulo de Pascal. Observa cómo se forma este triángulo y la relación con los términos de la sucesión de Fibonacci.

Observa también que si sumamos dos elementos consecutivos de la diagonal dada por 1, 3, 6, 10, 15, ..., obtenemos: 1, 4, 9, 16, 25, ... (cuadrados perfectos). Encuentra otras propiedades del triángulo.

a) (1p) Si sumamos los elementos de cada fila, ¿las potencias de qué número obtenemos?

b) (1p) Si tomamos cada fila (las cinco primeras) como un número, ¿los múltiplos de qué número obtenemos?

Actividad 2: Progresiones en el deporte

El campus de la Universidad de Alicante presenta también varias instalaciones deportivas que hacen aún más atractiva para alumnos, trabajadores y visitantes. En particular, en la zona exterior al pabellón deportivo encontramos varias pistas de tenis y paddle.

a) (2p) Imaginemos el movimiento de una pelota de paddle que cada vez que rebota disminuye siempre a la mitad de su altura. En esta situación, ¿qué tipo de sucesión describe la altura de la pelota? Suponiendo que la altura inicial es de un metro y medio, proporciona el término 6-ésimo de la sucesión que describe la altura de esta pelota.

b) (2p) Piensa ahora en una competición, en la que hay siempre un ganador que sale de la final del torneo. Para llegar ahí, se han celebrado unas semifinales en las que han participado 4 jugadores. En la etapa anterior han competido 8 semifinales y así sucesivamente, ya que en cada etapa de la competición siempre se clasifican para la siguiente la mitad. ¿Cuántas rondas hacen falta para que participen 65536 participantes?

Actividad 3: Persistencia de un número

(2p) La persistencia multiplicativa de un número natural cualquiera se define como el número de pasos necesarios hasta obtener un sólo dígito a partir del propio número mediante los productos sucesivos de los dígitos que componen el número precedente en cada paso. Por ejemplo, si tomamos el número 88 tenemos:

$$88 \rightarrow 8 \cdot 8 = 64 \rightarrow 6 \cdot 4 = 24 \rightarrow 2 \cdot 4 = 8$$

y por tanto, 88 tiene persistencia multiplicativa igual a 3, pues se necesitan tres pasos para obtener una sola cifra o dígito. Parecería razonable pensar que cuanto mayor sea el número, mayor será su persistencia. Sin embargo, se ha probado que no existe ningún entero menor de 10^{253} con persistencia multiplicativa mayor que 11.

Piensa en algunos números "grandes" y calcula su persistencia. Cuanta mayor persistencia encuentres, mayor será la puntuación que recibas. Detalla los cálculos del número con mayor persistencia que encuentres.

Actividad 4: Tren de potencias

(2p) Para cualquier número natural escrito en base decimal en la forma $abc\dots$, su tren de potencias es $a^b c^d \dots$. En los números con una cantidad impar de dígitos, el último no tiene ningún exponente, así que alude pasa a ser $a^0 c^0 \dots$. Dado un número natural cualquiera, considera la sucesión obtenida al aplicar repetidamente el tren de potencias hasta que sólo quede un número de un dígito. Por ejemplo:

$$3452 \rightarrow 3^4 5^2 \rightarrow 2016 \rightarrow 2^0 1^6 \rightarrow 1^6 \rightarrow 1$$

Podría decirse que el tren de potencias es una multiplicación tan letal que aniquila todos los números naturales en el universo a excepción de únicamente dos: el 2592 y el 241472842848665600000000 (aceptando que $0^0 = 1$).

Escoje algunos números "grandes" y comprueba que efectivamente la sucesión generada por el tren de potencias desemboca en un único dígito.

Matemáticas por el campus
mat.maria.molina@ua.es | raul.melero@ua.es | teresa.aguero@ua.es | enrique.morales@ua.es | mpg70@ua.es

Página 1

Figura 3. Ejemplo ficha Estadística

Matemáticas por el campus

Estación Estadística

La Estadística es la rama de las Matemáticas que proporciona un conjunto de métodos que se utilizan para recolectar, resumir, clasificar, analizar e interpretar unos datos referidos a una característica, materia de estudio o investigación. La Estadística ofrece a prácticamente todo, si seguimos los propios números escapan a su poder.

La Ley de Benford

Una sorprendente teoría matemática llamada Ley de Benford predice que en un conjunto de números (con unas características determinadas), aquellos cuyo primer dígito es, por ejemplo, 1 no aparecen con la misma frecuencia que los números que empiezan por otros dígitos. De hecho, las frecuencias van disminuyendo conforme aumenta el primer dígito.

Quien primero se dio cuenta de este fenómeno fue en 1881 el matemático y astrónomo Simon Newcomb. Un día, Newcomb estaba usando un libro de logaritmos y se dio cuenta de que las páginas del libro estaban más viejas y usadas cuanto más cercano estaban del principio. Ten en cuenta que en aquella época, las tablas de logaritmos se empleaban, entre otras cosas, para multiplicaciones entre grandes números. Actualmente equivaldría a examinar el desgase de la tela "T" en cajas re-

gistradoras o calculadoras (¿a qué se debía? Sólo podía tener una explicación: a lo largo de los años se había ensuciado mucho más el logaritmo de los números que comenzaban por 1 que de los que comenzaban por números más altos).

El asunto fue rápidamente olvidado hasta 1938, cuando Frank Benford, un físico de la compañía General Electric, se dio cuenta del mismo patrón. Entusiasmado por el descubrimiento, estudió 20000 números provenientes de 20 muestras de todo tipo: constantes y magnitudes físicas, longitudes de ríos, estadísticas de fútbol, direcciones de personas... A partir de estos datos, notó la llamada "Ley de los números anómicos de Benford" según la cual los datos que comenzaban por el dígito 1 eran más que los datos que comenzaban por 2 y, a su vez, estos últimos más que los que empezaban por 3 y así sucesivamente, hasta 9. El análisis de Benford era una prueba de la existencia de la ley, pero tampoco fue capaz de explicar bien por qué era así.

A pesar de que la ley resultaba obvia con sólo hacer algunas comprobaciones sencillas – siempre que el conjunto de datos fuera válido, porque no todos lo son, no fue hasta 1996 que un matemático llamado Ted Hill dio con una demostración matemática satisfactoria. La demostración depende de ver con algunos teoremas del límite central y su relación con el comportamiento de las mantisas en las multiplicaciones de valores aleatorios.

La Ley de Benford es indudablemente un resultado interesante y sorprendente, pero ¿cuál es su relevancia? Un gran paso lo ha dado Mark Nigrini, un profesor de contabilidad de Dallas, quien propone a partir de 1994 emplear el análisis de las frecuencias de los dígitos como mecanismo analítico para detectar, por ejemplo, posibles situaciones de fraude e irregularidades.

Ahora te toca a ti

Actividad 1: Convetosmos

(1p) En nuestro día a día, la canalización de muchos fenómenos es un aspecto fundamental como, por ejemplo, el número del portal de nuestro edificio o los números de teléfono. Como has visto, la Ley Benford establece los porcentajes de dígitos que comienzan un dígito determinado. Imagina que les preguntamos a 200 personas el número de portal de su edificio y su número de teléfono. Observamos dos conjuntos de datos, uno de ellos no puede satisfacer la Ley de Benford ¿cuál es?

| Primer dígito | f _i | p _i |
|---------------|----------------|----------------|
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |

Actividad 2: Los datos

(3p) Para comenzar a comprender la Ley de Benford, necesitamos datos. Ve al parking y marca en negro una celda por cada primer dígito de las matrículas de, al menos, 100 coches sobre el valor correspondiente del eje de abscisas. De esta forma, construirás el diagrama de barras correspondiente a los primeros dígitos de las matrículas.

Actividad 3: Las tablas

(3p) En Estadística, es recomendable organizar los datos por medio de una tabla de frecuencias en la que, entre otros valores, se anota el número de veces que aparece cada dígito (frecuencias absolutas, que se denotan por f_i) y sus porcentajes p_i . Organiza tus datos en una tabla de frecuencias como la siguiente:

Actividad 4: Los conjuntos de Benford

(1p) Benford comprobó que, en su conjunto de datos, los porcentajes de valores que comenzaban por el dígito $d = 1, 2, \dots, 9$ respondían al siguiente gráfico:

Los conjuntos donde se satisface este patrón se conocen conjuntos de Benford. ¿Conforman las matrículas de los coches un conjunto de Benford? ¿Un conjunto de 200 números de teléfono es un conjunto de Benford? ¿Y 400 resultados de 400 tiradas de un dado de 9 caras?

Actividad final: La Ley de Benford

(2p) Más concretamente, la Ley de Benford establece que el porcentaje de valores que comienzan por el dígito d es de $100 \log_{10}(1 + 1/d)$ %. Esta ley se cumple, por ejemplo, en los precios de una lista de la compra. Calcula el porcentaje de productos cuyo precio empieza por 4 y proporciona este dígito al guía de la estación.

Matemáticas por el campus
mat.maria.molina@ua.es | raul.melero@ua.es | teresa.aguero@ua.es | enrique.morales@ua.es | mpg70@ua.es

Página 2

Figura 4. Ejemplo ficha Geometría

Matemáticas por el campus



Estación Geometría



La geometría es una de las ciencias más antiguas. Inicialmente constituida en un cuerpo de conocimientos prácticos en relación con las longitudes, áreas y volúmenes. Se trata de una rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio, incluyendo puntos, rectas, planos, o polígonos (que incluyen paralelas, perpendiculares, curvas, superficies, polígonos, y poliedros). Presenta aplicaciones importantes en la naturaleza y vida cotidiana.

El círculo

La figura circular (también la esférica) resulta muy presente en las concepciones cosmológicas de las civilizaciones antiguas. El tercer volumen de *Los Elementos* de Euclides (300 a.C.), uno de los tratados más importantes de la historia de la geometría del círculo: el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a otro punto fijo, llamado centro, es menor o igual que una cantidad constante, llamada radio.

Relacionado con el círculo, encontramos la circunferencia: la curva geométrica formada por los puntos del plano equidistantes de un punto fijo llamado centro. Es decir, el círculo es el conjunto de puntos del plano que se encuentran contenidos en el interior y sobre una circunferencia.

En cualquier circunferencia hay una relación muy estrecha entre el perímetro (la longitud de la curva) y la longitud de su diámetro (segmento que pasa por su centro y tiene como

extremos dos puntos de la circunferencia). En las actividades podrás trabajar con algunas de las propiedades más importantes del círculo.


Entre todas las curvas cerradas en el plano de perímetro fijo, la curva que maximiza el área de la región que encierra es precisamente la circunferencia (así estaba formulado el llamado problema isoperimétrico clásico). Equivalentemente, entre todas las curvas cerradas en el plano que encierran un área fija, la que minimiza el perímetro es la circunferencia. Por tanto, un círculo tiene mayor área que cualquier polígono regular con idéntico perímetro.

También, respecto al área de un círculo, se denomina *cuadratura del círculo* al problema irresoluble de geometría consistente en hallar, con sólo regla y compás, un cuadrado que posea un área que sea igual a la de un círculo dado. Esta frase ha pasado a formar parte de nuestro lenguaje habitual y, de hecho, la propia RAE recoge dentro de "cuadratura" que la cuadratura del círculo se usa para indicar la imposibilidad de algo. Lindemann demostró que $\pi \approx 3,1415926535897932$ es un número trascendente (no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros no todos nulos), hecho que implica que la cuadratura del círculo es una construcción imposible (siempre que utilizamos la regla y el compás).

Una de las curvas más utilizadas en la arquitectura es precisamente la circunferencia, no sólo como base para la planta de edificios sino también dentro de su diseño. Es muy común su uso en ventanas, roseos y vidrieras. También es muy usual que dé forma a los arcos. Sin embargo, desde la antigüedad esta curva comparó relevancia con la elipse, como puede comprobarse en el trazado de los anfiteatros. La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Matemáticas por el campus
 secretaria.molins@ua.es | julio.malero@ua.es | irenna.saguro@ua.es | jpa.sepulveda@ua.es | mgp70@ua.es

Ahora te toca a ti



Actividad 1: Gazapos televisivos

(2p) Las Matemáticas aparecen en el cine y la televisión con más frecuencia de lo que a primera vista parece. Observa los siguientes ejemplos:

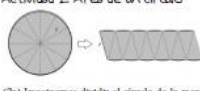
Pr: Fí en el caos (Darren Aronofsky, 1998): En la carátula de esta película aparece $\pi = 3,1415926535897932$...

Corina rasgada (Alfred Hitchcock, 1966): Lee el siguiente diálogo.

A: ¿Qué es una línea griega, tal vez pi? Matemáticas, ¿es el radio de la circunferencia de un círculo por su diámetro, caso se cierra?
 B: No sé.
 A: ¿Y el número Pi, ¿por qué se llama así?
 B: No sé. Creo que por Diágonal.
 C: ¿Qué va! Se llama así porque lo inventó Pappus Lángarum.
 A: ¿Pappus Calculabepus? ¿¿ por qué hay que multiplicar el número Pi por el radio al cuadrado?
 B: Porque es la fórmula del área de la circunferencia.
 A: ¿No? No entiendo nada. ¡Hey a nosotros!

Detecta y subraya los gazapos producidos. Trata de corregirlos.

Actividad 2: Área de un círculo



(2p) Imaginemos dividir el círculo de la manera que se muestra arriba en la que todos los sectores circulares sean iguales entre sí. Si el número de cortes n se hace cada vez más grande (o tiende a infinito), la figura de la derecha se aproxima cada vez más y más a un rectángulo, pero ¿de qué altura? ¿de qué base? Escribe entonces la fórmula del área del círculo de radio r .

Actividad 3: Área de un polígono regular

Imagínate un rectángulo valla-do que inicialmente piensas que es circular pero que posteriormente comprobas que tiene forma de polígono regular de 14 lados.

a) (2p) Calcula el número de diagonales (segmentos que unen dos vértices no consecutivos) de este polígono. ¿Podrías dar una fórmula general con n lados?

b) (2p) El área A de un polígono regular de n lados, conociendo su apotema a y su perímetro P o la longitud de cada lado l , es $A = \frac{1}{2} P a = \frac{1}{2} n l a$. También se puede calcular el área de un polígono regular a partir del número de lados n y su radio r , concretamente $A = \frac{n r^2 \sin(\frac{2\pi}{n})}{2}$ o $A = \frac{n r^2 \sin(\frac{\pi}{n})}{2}$. Calcula el área del polígono anterior (el tetradecágono) sabiendo que su radio r es 3 cm. Compara el valor resultante con el del área de un círculo con el mismo radio $r = 3$ cm. ¿Cuál es la diferencia entre ambos valores?

Actividad final: Cáveas en el campus

(2p) En la antigua Roma, la cávea designaba la parte de un teatro o anfiteatro romano donde se encontraban las gradas, en forma de hileras concéntricas, sobre las cuales se sentaban los espectadores que asistían a los espectáculos. En general, la cávea está formada por gradieros ascendentes en forma de terrazas.

En el campus de la UA, concretamente en el Auditorio I y en el foso situado entre la Torre de Control y el edificio de Enfermería, disponemos de algunos ejemplos.

Por otra parte, se denomina *corona circular* a la región del plano limitada por dos circunferencias concéntricas. Proporciona una fórmula general para calcular el perímetro y el área de una corona circular.

Matemáticas por el campus
 secretaria.molins@ua.es | julio.malero@ua.es | irenna.saguro@ua.es | jpa.sepulveda@ua.es | mgp70@ua.es

Además, para cada una de estas fichas se ha elaborado un cuadro descriptivo donde aparece: el nombre de la ficha y las actividades propuestas, posibles ubicaciones donde localizar la estación, soluciones a los ejercicios y observaciones. Este cuadro sirve como apoyo para el monitor encargado de la estación y, por tanto, no se les entrega a los participantes de la ruta.

Mostramos a continuación un ejemplo, que sería el correspondiente a la ficha de Geometría que hemos expuesto anteriormente.

Tabla 1. Ejemplo de cuadro explicativo

| | |
|------------------------|--|
| NOMBRE DE LA ACTIVIDAD | El círculo |
| ÁREA | Geometría |
| CONTENIDOS | Propiedades básicas del círculo, circunferencia y corona circular. Problema isoperimétrico clásico. |
| NIVEL | A partir de ESO y BACHILLERATO |
| ACTIVIDADES | 1. Gazapos televisivos 2. Área de un círculo 3. Área de un polígono regular 4. Actividad final: Cáveas en el campus |
| MATERIALES | Calculadora |
| POSIBLES UBICACIONES | Foso situado entre Enfermería y la Torre de control |

| | |
|-------------------------------|---|
| OBSERVACIONES | <ul style="list-style-type: none"> Las actividades 1, 2, 4 y la primera parte de 3 no necesitan material alguno En la actividad 3 b) han de calcular un seno La última parte de actividad final se puede quitar para no tener que utilizar metro |
| SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES | <ul style="list-style-type: none"> Actividad 1: <ul style="list-style-type: none"> 1.1: Los decimales de π fallan a partir del noveno decimal. 1.2: π es el cociente entre el perímetro de una circunferencia y la longitud del diámetro asociado a la circunferencia. 1.3: El área del círculo (no de la circunferencia). Actividad 2: altura=r, base=$2\pi r/2$, área= πr^2. Actividad 3: <ul style="list-style-type: none"> 3.1: De un vértice cualquiera parten $(n - 3)$ diagonales, de lo que se deduce que el número de diagonales es: $n(n-3)/2$ (se divide por 2 para no repetir cada diagonal). Para el caso $n=14$ tenemos 77 diagonales 3.2: Área polígono=27.33467, área círculo=28.27433. Diferencia=0.9366544. Actividad final: <ul style="list-style-type: none"> Perímetro $2\pi(r+R)$, área: $\pi(R^2-r^2)$. |

Una vez que hayan completado todas las actividades que sean capaces, el grupo las presentará al monitor y éste las puntuará. Se establecerá una puntuación mínima en cada ficha para poder pasar a la siguiente estación, pudiendo completar más actividades hasta que alcancen esa puntuación. Cuando esto ocurra, se les proporcionará una clave encriptada que les dará la pista para pasar a la siguiente estación.

CRIPTOGRAFÍA DE LAS TRANSICIONES

Entre las normas generales que se dan en el punto inicial de la ruta, se incluye la información acerca del funcionamiento de las transiciones entre estaciones: los cambios entre estaciones se realizarán con un juego de criptografía, siendo necesario que los participantes dispongan de un código como el que se presenta a continuación (ver Tabla 2).

Tabla 2. Código encriptación para la transición entre estaciones

| | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| J | K | L | M | N | Ñ | O | P | Q |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |

Junto con el código, también se les habrá entregado un mapa al inicio de la ruta, que servirá para encuadrar las distintas estaciones por las que irán pasando. Este mapa estará dividido en tantas columnas como columnas tenga el texto de nuestra ficha (tres, en nuestro caso) y las filas suficientes para que los puntos donde colocaremos las estaciones queden correctamente delimitados y sea sencilla su localización. Nombraremos las columnas del mapa con letras mayúsculas y las filas con números naturales de manera que con el par letra-número podamos (a modo de juego ‘hundir la flota’) saber dónde tenemos que dirigirnos para la siguiente estación. A modo de ejemplo, un posible mapa sería el proporcionado en la Figura 5.

Figura 5. Mapa auxiliar para localizar las estaciones de la ruta-yincana

| | A | B | C |
|----|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |
| 11 | | | |
| 12 | | | |
| 13 | | | |
| 14 | | | |
| 15 | | | |
| 16 | | | |
| 17 | | | |
| 18 | | | |
| 19 | | | |
| 20 | | | |

Por ejemplo, si al superar los 6 puntos en la ficha de álgebra (Figura 1), el monitor nos proporciona el código: 7-1-22-20-20, que se corresponde con la palabra *Gauss* (ver Tabla 2), entonces, si la buscamos en el texto, aparece en la undécima fila de la tercera columna. Cada

una de las tres columnas del texto de las fichas se identifica con una letra (A, B o C) de manera que, si la palabra la hemos localizado en la columna izquierda, central o derecha, le hacemos corresponder A, B o C, respectivamente. Además, el número de fila en el que se encuentra la palabra buscada nos proporciona un número y obteniendo así un par letra-número que nos ayudará a encontrar una nueva localización en el mapa. En el ejemplo que estamos viendo el par sería C-11 que, nos lleva a situar la siguiente estación en la zona del campus que se encuentra en el Aulario II.

VALORACIÓN DE LOS PARTICIPANTES

Siempre que se elabora una actividad de estas características es importante tener en cuenta la opinión de los participantes, ya que se pretende confeccionar una ruta-yincana amena, que llame la atención y fomente el interés por los conceptos que se presentan.

Por este motivo, hemos elaborado una encuesta de valoración de la actividad que se entregaría para conocer las opiniones y sugerencias que pudieran surgir después de haber tomado parte en ella. El modelo de encuesta elaborado es el siguiente:

Valora en una escala de 0 a 5 (0=para nada, 5=totalmente)

- ¿Volverías a participar? Marca con una X.

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | | | | | |

- ¿Piensas que los lugares establecidos son los idóneos para la realización de estas actividades? Valóralo por fichas.

| | | | | | | |
|----------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Ficha Álgebra | | | | | | |
| Ficha Análisis Matemático | | | | | | |
| Ficha Geometría | | | | | | |
| Ficha Estadística | | | | | | |

- En general, ¿estás satisfecho con los apartados específicos tratados en estas actividades?

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | | | | | |

- ¿Incluirías algún apartado adicional? _____
- ¿Has descubierto aspectos nuevos en los que no habías observado relación con las matemáticas? _____

- ¿Qué aspecto desarrollado en esta actividad te ha interesado más?

- ¿Qué ficha te ha gustado más? Valora cada ficha de 0 a 5.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------------------|---|---|---|---|---|---|
| Ficha Álgebra | | | | | | |
| Ficha Análisis Matemático | | | | | | |
| Ficha Geometría | | | | | | |
| Ficha Estadística | | | | | | |

- ¿Te han resultado difíciles las actividades realizadas? Valóralo por fichas.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------------------|---|---|---|---|---|---|
| Ficha Álgebra | | | | | | |
| Ficha Análisis Matemático | | | | | | |
| Ficha Geometría | | | | | | |
| Ficha Estadística | | | | | | |

- En general, ¿estás satisfecho con nuestra actividad?

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Una vez recogidas las respuestas de las encuestas, se pretende realizar un trabajo de lectura de todas ellas con tal de mejorar en la medida de lo posible la ruta-yincana, pero también para poder resolver los problemas y las dificultades que hayan surgido en alguna de las estaciones de manera individual y concreta. Así, el trabajo va perfeccionándose según los intereses del público al que se pretende enfocar.

3. CONCLUSIONES

Motivados por la falta de aceptación hacia las matemáticas que habíamos comentado anteriormente, hemos puesto nuestro empeño en la realización de la mayor cantidad posible de fichas que nos permitan elaborar esta actividad para presentar los conceptos matemáticos que nos rodean y pasan desapercibidos en el campus de la UA.

De esta manera, seguimos elaborando un archivo de actividades lúdicas y amenas para favorecer el conocimiento de la materia de forma que los participantes se impliquen en la ruta-yincana. Por esto, se ha intentado crear una variedad de niveles en las actividades propuestas para poder ofrecer esta ruta a diferentes públicos, desde alumnos de secundaria que en un futuro pueden convertirse en alumnos de la universidad y así, llegar con una visión

diferente de la misma, hasta alumnos que cursan grados en la UA con la intención de hacerles ver el lugar de trabajo como algo cercano.

Desde la Facultad de Ciencias de la UA se proponen numerosas actividades en las que se podría encuadrar esta actividad como complemento a los estudiantes, teniendo en cuenta la adaptación necesaria según el nivel de conocimientos del que se disponga. Algunas de estas propuestas serían el programa “Ven a hacer prácticas a la Universidad”, las actividades vinculadas a la celebración de “San Alberto Magno”, las “Pruebas Cangur de Matemáticas”, la participación en el programa Estalmat y las visitas de los centros de secundaria.

Nuestra intención es poner en práctica este proyecto lo antes posible y estudiar el funcionamiento y aceptación del mismo para poder hacer una mejor valoración del trabajo que hemos estado haciendo.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Corbalán, F. (2007). Rutas matemáticas por nuestra localidad. *Sigma*, núm. 30, pp. 105-116.
- [2] Devesa, A.F.; Fargueta, R.M.; Gutiérrez, C.; López, F. (2001). *Ruta matemática por Elche*. Elche: Ajuntament d'Elx, Regidoria d'Educació. ISBN: 84-89479-42-9.
- [3] Mulero, J.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (2012). A new approach to disseminate mathematics. *ICERI 2012 Proceedings*, International Association of Technology Education and Development (IATED): pp: 4436-4442.
- [4] Mulero, J.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (2012). Un nuevo enfoque divulgativo para la enseñanza de las matemáticas en la docencia universitaria. *X Jornadas de redes de investigación en docencia universitaria. La participación y el compromiso de la comunidad universitaria*, Universidad de Alicante: pp: 2035-2048.
- [5] Mulero, J.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (2013). Is Maths everywhere? Our students respond. *INTED 2013 Proceedings*, International Association of Technology Education and Development (IATED): pp: 4287-4296.
- [6] Mulero, J.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (2013). Percepción de nuestros estudiantes acerca de las matemáticas en la vida diaria. *XI Jornadas de redes de investigación en docencia universitaria: Retos de futuro en la enseñanza superior: docencia e investigación para alcanzar la excelencia académica*, Universidad de Alicante: pp: 2144-2157.
- [7] Mulero, J.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (2014): Algunas estructuras matemáticas del campus de la Universidad de Alicante. *XII Jornadas de redes de investigación en docencia*

universitaria. *El reconocimiento docente: innovar e investigar con criterios de calidad*, Universidad de Alicante, 479-493.

[8] Mulero, J.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (eds.) (2014): *Las matemáticas de nuestra vida*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante. Alicante.

[9] Sánchez, F.: *Elaboración de una ruta matemática en la ciudad de Valladolid* (2013). Trabajo fin de máster. Valladolid: Universidad de Valladolid. En línea:

<http://cerro.cpd.uva.es/bitstream/10324/3857/1/TFM-G%20221.pdf>

[10] Usón, C.; Ramírez, A.: *Rutas matemáticas III: El mudéjar*. Zaragoza: Área de Cultura y Educación del Ayuntamiento de Zaragoza. En línea:

<http://www.zaragoza.es/cont/paginas/educacion/pdf/rutasmudejarprof.pdf>

[11] Página web de la Universidad de Alicante. Información del campus. En línea:

<http://web.ua.es/es/universidad-alicante/conoce-el-campus.html>