UNIVERSIDAD DE ALICANTE

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN EMPRESAS

CURSO ACADÉMICO 2014 - 2015

DIVERSIFICACIÓN INTERNACIONAL DE CARTERAS CON RESTRICCIONES

ALEJANDRO ABAD ALGARRA

ÁNGEL MANUEL LEÓN VALLE

MÉTODOS CUANTITATIVOS Y TEORÍA ECONÓMICA

Alicante, Junio de 2015

RESUMEN

El presente trabajo trata de analizar las implicaciones que tienen en la diversificación del riesgo las limitaciones a la libertad de inversión, tales como restricciones a las ventas en descubierto; a partir de la agregación de mercados por continentes. Para ello se han obtenido rentabilidades mensuales de índices bursátiles de 17 países que, ordenados por regiones, se han ido paulatinamente agregando en carteras eficientes bajo 4 posibles escenarios (sin restricciones, restricción a las ventas en corto y bandas máximas y mínimas de inversión). Además, se ha analizado el efecto que tiene en la diversificación sustituir la media por la mediana en el cálculo de las covarianzas entre activos. Los resultados obtenidos muestran que conforme aumenta el número de índices en los que se puede invertir y disminuyen las restricciones, utilizando la mediana en lugar de la media; el riesgo soportado para un mismo nivel de rentabilidad esperada es menor.

PALABRAS CLAVE

Diversificación internacional, Índice, Media-varianza, Restricción, Robustez.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Cuando un inversor decide que va a colocar parte de su renta disponible en el mercado de capitales, toma en consideración dos variables: el riesgo y la rentabilidad de los productos financieros en los que invierte. Teniendo esto en cuenta, elegirá un grupo de activos del mercado y con ellos formará una cartera de inversión. Utilizando un programa de minimización del riesgo (medido a partir de las varianzas y covarianzas de dichos títulos) obtendrá un conjunto de ponderaciones resultantes de la combinación de estos instrumentos financieros (frontera eficiente) de manera que el riesgo total soportado para cada cartera sea mínimo para un valor de rentabilidad dado. Finalmente, y en base a sus preferencias por el riesgo, elegirá la cartera que mejor satisfaga sus necesidades.

La cantidad de activos en los que un inversor puede colocar parte de su riqueza es amplísima: acciones, bonos, fondos de inversión, futuros, opciones, entre otros. Además, este número se multiplica por la cantidad de países en los que se puede invertir.

En el mercado existen restricciones a la libertad de inversión, tales como la prohibición de las ventas en descubierto; es decir, tomar prestado un activo para negociar con él en el mercado con la esperanza de que baje de valor en el momento que se proceda a su recompra y con ello se obtenga una ganancia.

Sabiendo que cuanto mayor es el número de títulos en los que se puede invertir y menores son las restricciones, menor es también el riesgo soportado para un mismo nivel de rentabilidad; vamos a estudiar cómo varían las fronteras eficientes obtenidas con el modelo de Markowitz. Para ello, utilizaremos una base de datos compuesta de rentabilidades de índices bursátiles de distintos países en la medida en que éstos agrupan a varios títulos bursátiles (Sección 2) y aplicando el modelo de Markowitz (Sección 3) procederemos a agregar paulatinamente mercados e incorporar restricciones a la libertad de inversión (Sección 4). A continuación, analizaremos una variación del modelo a partir de la robustez de la covarianza (Sección 5) y finalizaremos con unas reflexiones acerca de los resultados obtenidos (Sección 6).

2. DATOS Y ANÁLISIS ESTADÍSTICO

A continuación analizaremos la base de datos utilizada para la elaboración de la investigación tanto desde un punto de vista teórico como estadístico.

2.1.Base de datos

Para la realización del presente estudio se han empleado las cotizaciones mensuales de 17 índices agrupados por continentes[1]:

-IBEX: Índice español compuesto por los 35 valores más líquidos de empresas españolas cotizados en el Sistema de Interconexión Bursátil de las Bolsas Española.

-DAX: Índice alemán formado por las 30 mayores empresas por volumen de negociación y capitalización cotizadas en la bolsa de Fráncfort.

-FTSE: Índice de referencia de la Bolsa de Londres formado por las 100 empresas de mayor capitalización bursátil que cotizan en ella.

-CAC40: Índice de la Bolsa de París formado por las 40 empresas líderes que cotizan en ésta.

-FTSE MIB: Índice de la bolsa de Milán formado por las 40 acciones más representativas que cotizan en ella.

-MXX: Se trata del principal índice bursátil de México formado por las 35 empresas emisoras principales de la Bolsa Mexicana.

-IBOVESPA: Índice más importante de la Bolsa de Brasil formado a partir de los principales valores que cotizan en la Bolsa de Sao Paulo. Es una cartera de valores hipotéticamente recomprada cada cuatro meses.

-MERVAL: Índice compuesto a partir de las cotizaciones de las empresas más líquidas que cotizan en la Bolsa de Buenos Aires (Argentina), en función de su participación, número de transacciones y volumen de contratación.

[1] Véase las páginas web de *Yahoo Finance* (https://www.finance.yahoo.com/) junto con http://www.expansión.com y http://www.investing.com. Además, también se puede consultar la obra de Conde Amo, I. B. y Conde López, A., 2003. *Mercados Financieros I: Análisis y gestión de valores bursátiles.* Madrid: Colex.

-S&P500: Considerado como el índice más representativo de EE.UU. Está compuesto por las 500 compañías líderes de la economía estadounidense.

-NASDAQ: Índice bursátil de EE.UU. formado por las 100 empresas (estadounidenses y extranjeras) con mayor capitalización que cotizan en el mercado electrónico del Nasdaq de Nueva York.

-RUSSELL2000: Índice estadounidense compuesto por 2000 acciones de baja capitalización, complementándose con el S&P 500.

-NIKKEI: Índice japonés compuesto por las 225 empresas más líquidas de la Bolsa de Tokio.

-HSI: Índice compuesto por las 40 compañías principales que cotizan en la Bolsa de Hong Kong.

-KOSPI: Índice surcoreano compuesto por las compañías negociadas en la Bolsa de Corea del Sur.

-SSE: Índice bursátil de Shanghái (China) calculado a partir de la cotización de las 20 compañías más grandes y con mayor liquidez de la Bolsa de Shanghái.

-AORD: Índice australiano formado por la cotización de las 500 empresas más grandes que cotizan en la Bolsa Australiana, donde la liquidez únicamente se tiene en cuenta para las empresas extranjeras.

-RTSI: Índice de la Bolsa de Moscú formado por la cotización de las 50 compañías rusas con mayor liquidez.

De estos índices se obtuvo una muestra de 67 cotizaciones mensuales desde junio de 2009 a noviembre de 2014, y a partir de ella se calcularon 66 rentabilidades. La razón de acotar dicha fecha respondió a la necesidad de evitar la presencia de valores muy cercanos al inicio de la crisis económica (2008) de tal forma que no dejase de ser representativa de la evolución de estos índices.

La rentabilidad mensual a partir de los datos se obtuvo con la siguiente fórmula:

$$R_t = Log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right),$$

donde P_t es la cotización al cierre.

2.2. Estadísticos descriptivos de las series

A continuación (Tabla 1) se muestran algunos estadísticos descriptivos de las rentabilidades de los índices utilizados de los cuales se pueden extraer varias conclusiones:

Tabla 1: Estadísticos descriptivos

	Media	Desv. Estánd.	Mediana	Exceso Curtosis	Coeficiente asimetría	Jarque-Bera	Rango
IBEX	0,00084	0,06123	0,00414	0,55019	-0,19109	16,64978	0,30805
DAX	0,01026	0,04878	0,01315	5,80518	-1,32256	40,26115	0,32302
FTSE	0,00684	0,03727	0,00797	-0,3004	-0,12343	29,66607	0,15658
CAC40	0,00463	0,04644	0,00715	-0,3585	-0,44648	32,70863	0,20732
FTSE MIB	-0,0001	0,06387	-0,0003	-0,4488	-0,38236	33,79770	0,27357
MXX	0,00920	0,03558	0,00927	-0,3079	0,13504	29,83338	0,16826
IBOVESPA	0,00030	0,05380	-0,0021	-0,0669	-0,09122	25,56465	0,23501
MERVAL	0,02872	0,09693	0,02245	-0,4317	-0,11390	32,03537	0,43066
SP500	0,01226	0,03746	0,01888	0,35741	-0,42872	20,90419	0,18784
NASDAQ	0,01603	0,04301	0,02410	-0,1499	-0,21114	27,35490	0,19963
RUSSELL2000	0,01296	0,05248	0,02412	-0,0144	-0,34682	25,91183	0,26085
NIKKEI	0,00834	0,05386	0,00653	-0,0553	-0,23469	25,87774	0,24480
HSI	0,00398	0,05327	0,00809	0,77436	-0,52647	16,41834	0,27614
KOSPI	0,00531	0,04329	0,00642	0,66185	-0,19532	15,21960	0,23989
SSE	-0,0031	0,06470	0,00049	2,36326	-0,65792	5,78736	0,38842
AORD	0,00508	0,03629	0,00727	-0,3164	-0,39260	31,45787	0,15558
RTSI	0,00136	0,08077	0,00641	1,26902	-0,65750	12,79827	0,41165

La mayoría de los índices consultados tienen una rentabilidad media, para el período estudiado, positiva; salvo el FTSE MIB (Italia) y el SSE (China). De todos destaca el MERVAL (Argentina) por su mayor rentabilidad; pero también implica que tenga un mayor riesgo (véase Tabla 1).

A partir del contraste de normalidad Jarque-Bera podemos inferir que, bajo un nivel de confianza del 90%, ningún índice sigue una distribución normal, puesto que dicho estadístico de contraste muestra, en todos los casos, un valor superior al punto crítico con dos grados de libertad: 4,61 (Tabla 1) . Además, también podemos destacar algunos aspectos interesantes:

- Todos los índices, salvo el índice mexicano (MXX), muestran un coeficiente de asimetría negativo (Tabla 1). Este matiz se traduce en que es más probable que la rentabilidad de estos índices se sitúe a la izquierda de la media; es decir, por debajo de ésta, y por tanto pierden atractivo frente a un potencial inversor. El coeficiente de asimetría distinto de cero hace más recomendable utilizar la mediana como medida central (Sheskin, 2000).

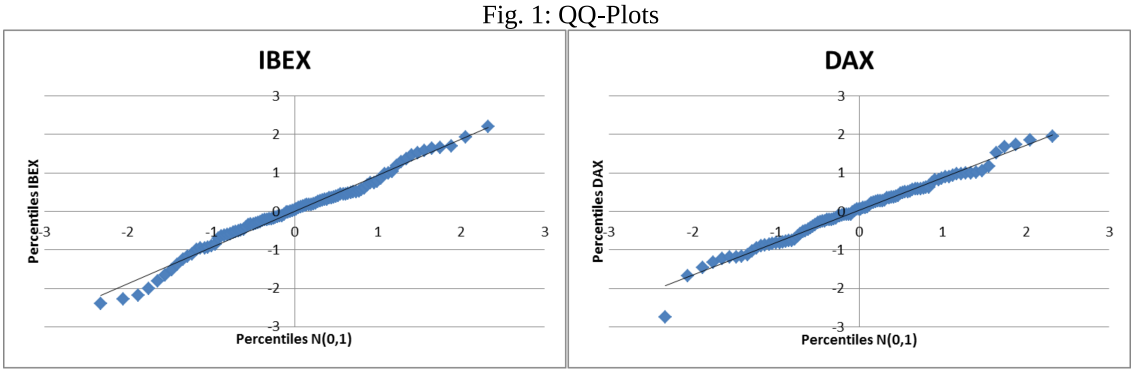
- En cuanto a la curtosis, podemos comprobar que el DAX (Alemania) presenta una elevada leptocurtosis dado que el exceso de curtosis es muy superior a 0 (alcanzando el valor de 5,80), y de forma similar ocurre con el SSE (China) donde el valor del exceso es de 2,36 (véase Tabla 1).

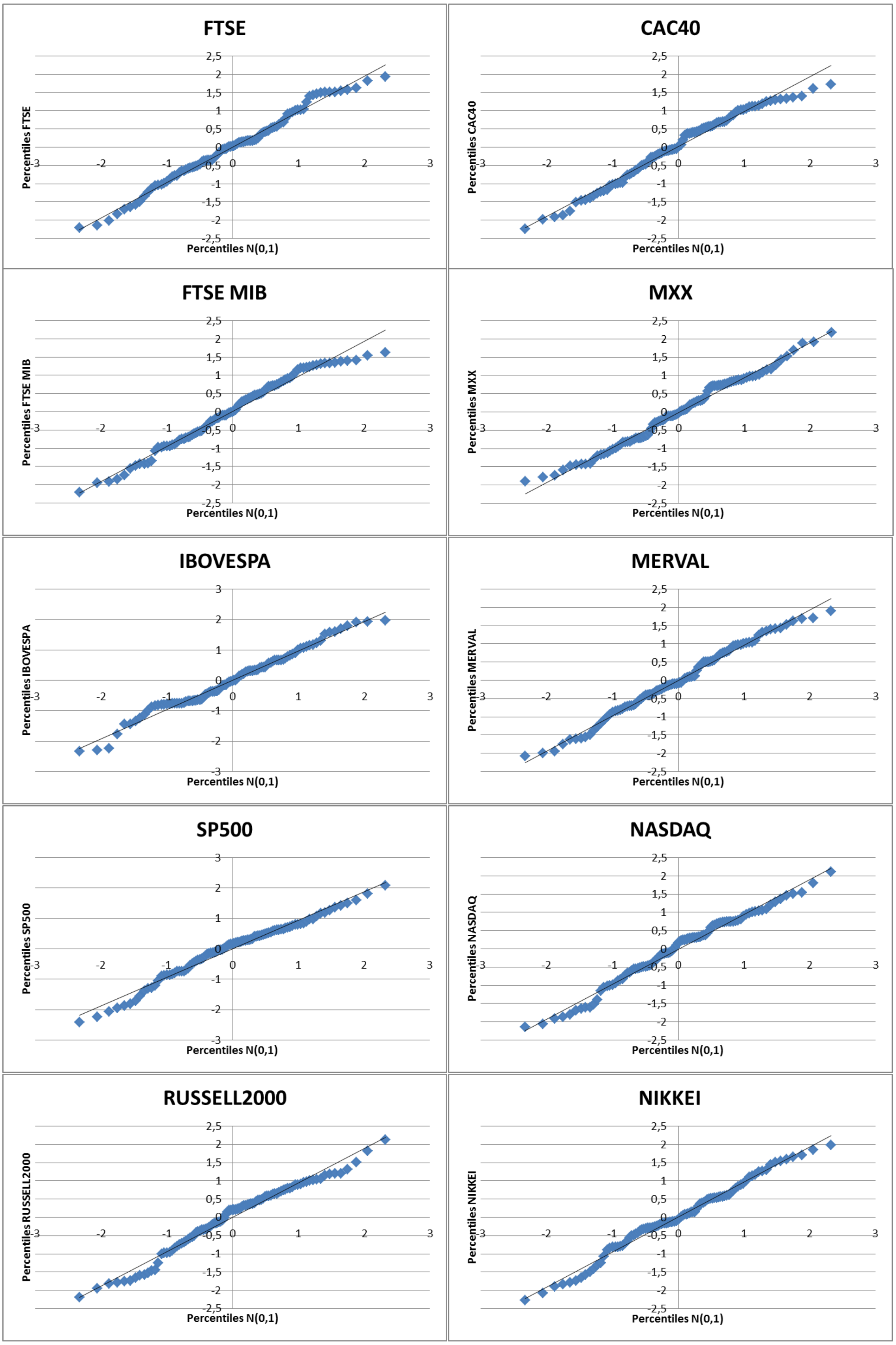
Una situación indeseada para un potencial inversor se dará cuando la distribución de la variable muestre tanto asimetría negativa como exceso de curtosis positivo (leptocurtosis). En este caso, la distribución devuelve más pérdidas que ganancias dado que las colas de la misma son más anchas a la izquierda que en la distribución normal (Sheskin, 2000). De los índices analizados, curiosamente todos los que presentan exceso positivo de curtosis también tienen coeficiente de asimetría negativo.

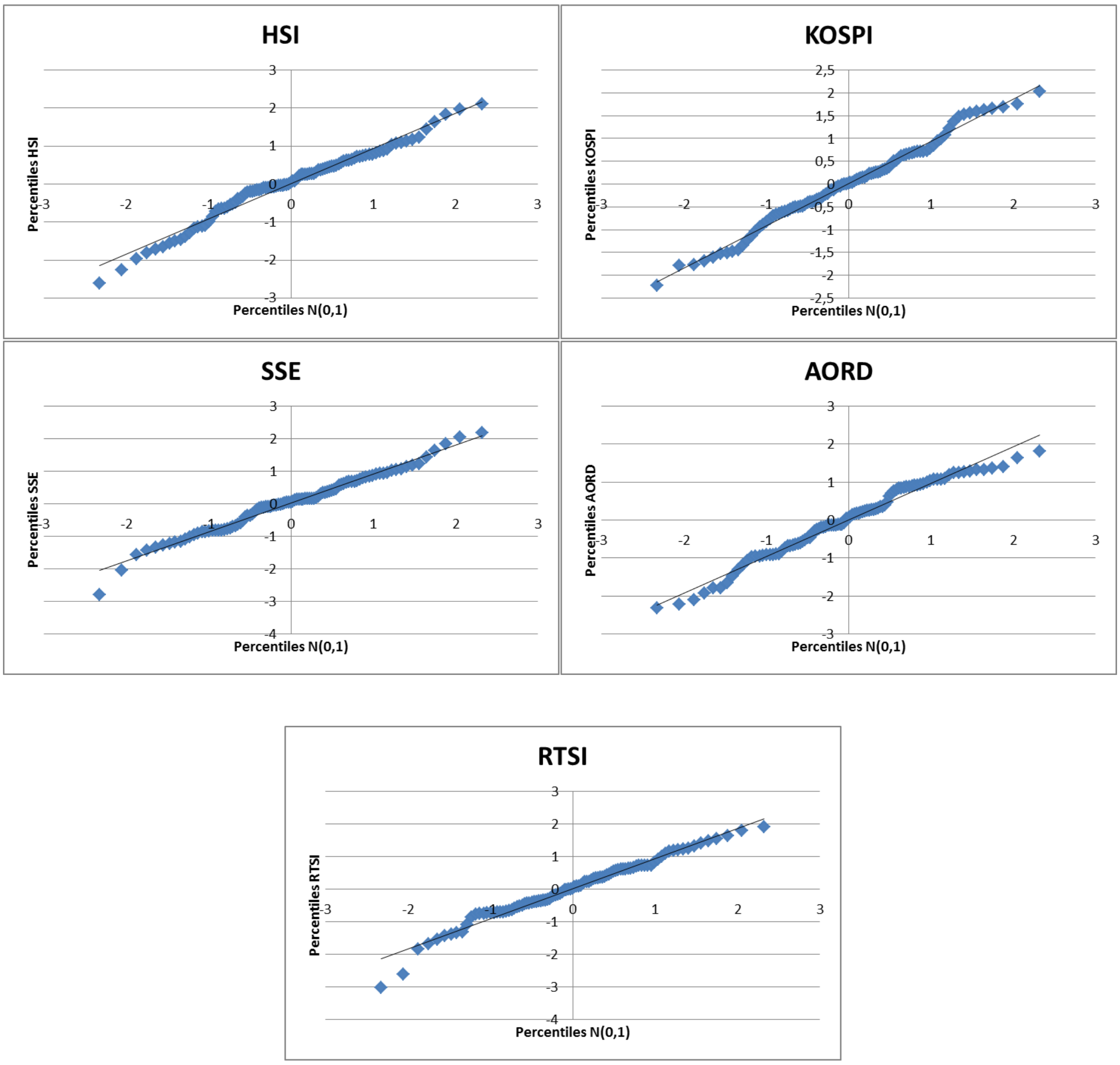
2.3. Contraste de normalidad a través de los QQ-Plots

Otra de las herramientas de las que disponemos para contrastar la normalidad de los índices seleccionados es a través de la representación gráfica de los percentiles tipificados de la muestra obtenida en comparación con los percentiles de la distribución normal tipificada. Es lo que se conoce como gráfico QQ-Plot que se exponen a continuación (véase fig. 1):

Fig. 1: QQ-Plots




FTSE
Percentiles FTSE
Percentiles N(0,1)
CAC40
Percentiles CAC40
Percentiles N(0,1)
FTSE MIB
Percentiles FTSE MIB
Percentiles N(0,1)
MXX
Percentiles MXX
Percentiles N(0,1)
IBOVESPA
Percentiles IBOVESPA
Percentiles N(0,1)
MERVAL
Percentiles MERVAL
Percentiles N(0,1)
SP500
Percentiles SP500
Percentiles N(0,1)
NASDAQ
Percentiles NASDAQ
Percentiles N(0,1)
RUSSELL2000
Percentiles RUSSELL2000
Percentiles N(0,1)
NIKKEI
Percentiles NIKKEI
Percentiles N(0,1)



Como podemos observar, a la vista de los gráficos (fig. 1), no se puede afirmar que ningún índice (rentabilidad mensual) siga una distribución normal, pues los valores de la muestra obtenida de los mismos (en azul) se apartan de la tendencia de la distribución normal tipificada (línea negra).

3. METODOLOGÍA

Para llevar a cabo nuestro estudio hemos seguido el modelo de Markowitz de fronteras eficientes (Huang y Litzenberger, 1988;Gómez Sala, 2012), utilizando para ello el programa informático *Microsoft Excel* y sus herramientas *Análisis de datos* y *Solver* (Jackson y Staunton, 2002). Para ello definimos:

- La matriz de varianzas-covarianzas de los activos considerados[2]: $\mathbf{\Omega}$
- El vector de rentabilidades esperadas: $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots E_n)'$
- El vector unitario: $\mathbf{1_n} = (1, 1, \dots 1_n)'$
- El vector de ponderaciones de la cartera p: $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots w_n)'$

$$\boldsymbol{A} = 1_n' \cdot \Omega \cdot E \qquad \boldsymbol{a} = \frac{A}{D}$$

$$\boldsymbol{B} = E' \cdot \Omega \cdot E \qquad \boldsymbol{b} = \frac{B}{D}$$

$$\boldsymbol{C} = 1_n' \cdot \Omega \cdot 1 \qquad \boldsymbol{c} = \frac{C}{D}$$

$$\boldsymbol{D} = B \cdot C - A^2$$

Una vez establecidas las variables, definimos el programa de minimización como:

$$\left.\begin{array}{l} Mín_w \dfrac{1}{2}\sigma_p^2 = \dfrac{1}{2} w'\Omega w \\ s.a \quad E_p = w'E \\ \qquad\quad w'1_n = 1 \end{array}\right\}$$

Tras desarrollar el programa[3] (que se puede consultar en el anexo 1), obtenemos las siguientes soluciones[4]:

$$w = g + h \cdot E_p$$

$$Ep = w' \cdot E \qquad\qquad \sigma^2 = w' \cdot \Omega \cdot w$$

No obstante, todas las carteras de mínimo riesgo no son eficientes. Para cada nivel de riesgo obtendríamos dos valores de rentabilidad esperada, siendo sólo eficiente el mayor de ambos (pues cualquier inversor racional prefiere más rentabilidad a menos dado un mismo nivel de riesgo). Así, podemos obtener la composición de la **cartera de mínimo riesgo global o mínima varianza global (mvg)** resolviendo el problema de minimización sin la primera restricción:

[2] Obtenida en Excel con la herramienta Análisis de datos, seleccionando como rango de entrada las rentabilidades de los índices considerados en cada cartera.
[3] La constante ½ no tiene significado económico. Se incluye en el problema para facilitar la posterior simplificación y no afecta a los resultados.
[4] Los valores de "g" y "h" pueden consultarse en el anexo 1.

$$\left.\begin{array}{c} Mín_w \dfrac{1}{2}\sigma_p^2 = \dfrac{1}{2} w'\Omega w \\ s.a \quad w'1_n = 1 \end{array}\right\}$$

$$w_{mvg} = \frac{1_n'\Omega^{-1}}{1_n'\Omega^{-1}1_n} = \frac{1_n'\Omega^{-1}}{C}$$

$$E_{mvg} = w'E_{mvg} = \frac{1_n'\Omega^{-1}E}{C} = \frac{A}{C} \qquad \sigma_{mvg}^2 = w_{mvg}'Vw_{mvg} = \frac{1_n'\Omega^{-1}\Omega\Omega^{-1}1_n}{C \cdot C} = \frac{1}{C}$$

La cartera de mínimo riesgo global (mvg) tiene la propiedad de que no tiene cartera ortogonal; es decir, para el nivel de riesgo σ_{mvg}^2 sólo hay un nivel de rentabilidad E_{mvg}. Por tanto, a partir de esta cartera, las que tengan mayor rentabilidad serán eficientes. Y por ello podemos definir la **frontera eficiente de carteras** como:

$$\sigma = \sqrt{c \cdot E_p^2 - 2a \cdot E_p + b}$$

$$s.a \;\; E_p \geq E_{mvg}$$

A través de la resolución de este problema de maximización obtenemos fórmulas cerradas porque se permiten ventas en descubierto. En caso de querer introducir alguna restricción, utilizaríamos la herramienta *Solver* de *Excel*.

Por otro lado, también resulta interesante obtener la cartera que devuelve la máxima rentabilidad por unidad de riesgo (cartera d); es decir, la que geométricamente se encuentra en el punto de la frontera eficiente con mayor pendiente. El programa de maximización quedaría como sigue:

$$\left.\begin{array}{c} Max_{w_d} \dfrac{E_p}{\sigma_p} \\ s.a \quad w'1_n = 1 \end{array}\right\}$$

A partir del desarrollo del programa[5], obtenemos las siguientes soluciones:

$$w_d = \frac{\Omega^{-1}E}{A} \qquad E_d = w_d'E = \frac{E'\Omega^{-1}E}{A} = \frac{B}{A} \qquad \sigma_d^2 = w_d'\Omega w_d = \frac{E'\Omega^{-1}\Omega\Omega^{-1}E}{A \cdot A} = \frac{B}{A^2}$$

[5] El ratio (E_p-R_f/σ_p) se conoce como Ratio de Sharpe. En este caso, dado que no hemos incluido el activo libre de riesgo, R_f es igual a 0.

4. RESULTADOS

Para estudiar el efecto de la diversificación, hemos comenzado a calcular las carteras formadas por los índices europeos (IBEX, DAX, CAC40, FTSE MIB y FTSE) y estadounidenses (NASDAQ, RUSSELL2000 y S&P500) por separado. La razón por la que se ha procedido de esta manera es por la proximidad geográfica del mercado europeo (en el caso de la cartera de Europa) y por el mercado de referencia que supone EE.UU. (para la cartera con la composición únicamente de los índices estadounidenses).

A continuación, se han ido agregando continentes. En primer lugar, se han fusionado el mercado europeo y estadounidense. En segundo lugar, hemos adjuntado el mercado de América Latina (MXX, IBOVESPA y MERVAL). Seguidamente el mercado asiático (NIKKEI, HSI, SSE, KOSPI) y posteriormente Australia (AORD) y Rusia (RTSI) para finalizar.

Para cada cartera anterior, además, se ha obtenido la composición de la cartera de mínimo riesgo global en cuatro escenarios distintos:

Caso 1: Sin restricciones.

Caso 2: Sin posibilidad de ventas en descubierto.

Caso 3: Con unos límites de [0, 30%].

Caso 4: Limitado a [5%, 30%][6].

En el primer caso, representamos una situación de completa libertad para un inversor potencial donde éste puede elegir dónde invertir y en qué proporción hacerlo libremente. No obstante, y debido a las consecuencias negativas que su masiva e incontrolada utilización pueden tener, en ocasiones las ventas en descubierto han sido prohibidas, de ahí que tengamos en cuenta el segundo caso. Sin embargo, en este último comprobamos que hay valores cuya representación en la cartera se dispara o incluso no tiene representación. Es por ello que introducimos los casos 3º y 4º.

Una vez obtenidas las carteras de mínimo riesgo global, hemos calculado el riesgo asociado a cada cartera en función de rentabilidades superiores utilizando la herramienta

[6] En el caso de la cartera estadounidense, dado que está compuesta por tres índices, se ha tenido que ampliar el tope máximo a 40% puesto que en caso contrario no sería posible obtener una solución.

Solver. A continuación hemos representado los datos formando las **fronteras eficientes**. También se han obtenido las carteras de máxima rentabilidad por unidad de riesgo para el caso de no haber restricciones a las ventas en descubierto.

Finalmente, y centrándonos en el mercado europeo, se ha realizado un estudio de la robustez de la covarianza y sus efectos en la diversificación.

4.1. Carteras sin restricciones

Tabla 2: Carteras mvg sin restricciones

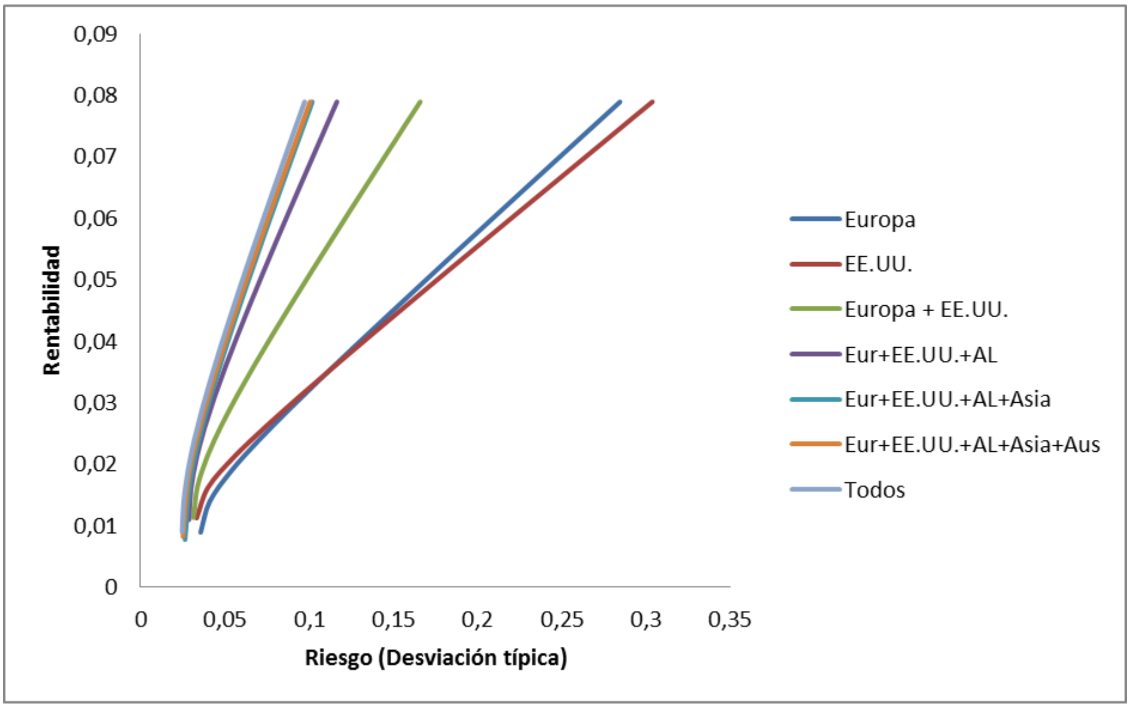
	Europa	EE.UU.	Europa y EE. UU.	Europa, EE.UU. y A. L.	Europa, EE.UU. A. L y Asia	Europa, EE.UU. A.L. Asia y Australia	Europa, EE.UU. A.L. Asia Australia y Rusia
IBEX	0,180		0,074	0,026	-0,040	0,009	0,038
DAX	0,182		0,199	0,083	-0,110	-0,001	0,053
FTSE	1,019		0,457	0,253	0,133	-0,037	-0,004
CAC40	-0,027		-0,081	0,045	0,035	-0,035	-0,090
FTSE MIB	-0,355		-0,255	-0,129	-0,036	-0,071	-0,082
S&P500		1,829	1,402	0,885	1,031	0,907	0,921
NASDAQ		-0,146	-0,149	0,039	-0,115	-0,097	-0,143
RUSSELL		-0,683	-0,648	-0,589	-0,597	-0,541	-0,487
MXX				0,519	0,422	0,392	0,359
IBOVESPA				-0,116	-0,112	-0,176	-0,134
MERVAL				-0,017	-0,047	-0,033	-0,018
NIKKEI					0,130	0,091	0,094
HSI					-0,112	-0,203	-0,162
KOSPI					0,345	0,285	0,276
SSE					0,072	0,074	0,060
AORD						0,437	0,416
RTSI							-0,096
E_{mvg}	0,0089	0,0112	0,0113	0,0109	0,0077	0,0082	0,0090
σ_{mvg}	0,0356	0,0332	0,0314	0,0286	0,0263	0,0251	0,0246

Podemos observar, si seleccionamos un índice, cómo varía la composición en cada cartera a medida que se van agregando otros índices. Así, por ejemplo, el IBEX va reduciendo su participación progresivamente llegando a venderse en corto en la cartera formada por Europa, EE. UU. Asia y América Latina. De todos los índices, el que más representación tiene en todas las carteras es el S&P500 (véase Tabla 2).

Curiosamente, la cartera formada por Europa y EE. UU. tiene tanto mayor rentabilidad como menor riesgo que las carteras individuales de estos dos mercados. Este es un efecto de la diversificación.

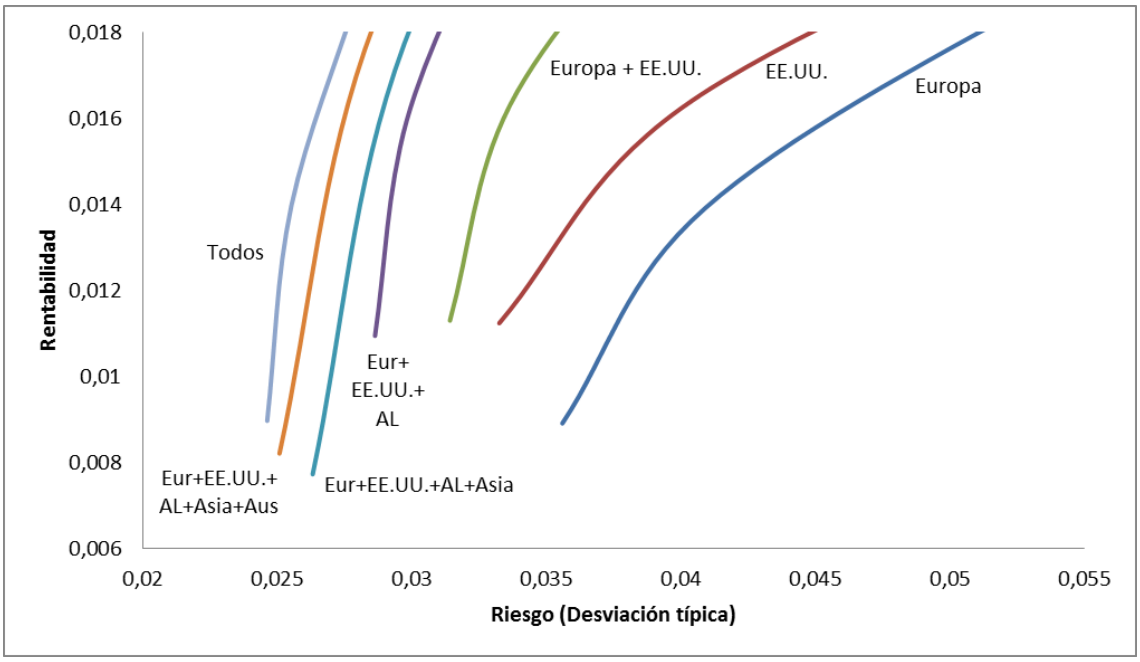
A partir de la rentabilidad de la cartera de mínimo riesgo global, se pueden introducir restricciones de rentabilidades superiores en el programa *Solver* para obtener con ello otras carteras eficientes y poder representar las fronteras eficientes gráficamente de la siguiente manera, siguiendo los colores anteriores:

Fig. 2: Fronteras eficientes sin restricciones



Se puede realizar una ampliación de la Fig. 2 alrededor de las carteras de mínima varianza global, tal y como se puede consultar en la Fig. 3:

Fig. 3: Fronteras eficientes sin restricciones



El riesgo medido como la desviación típica asociado a cada cartera, para un nivel de rentabilidad dado, es diferente conforme agregamos mercados. Podemos apreciarlo en las gráficas y en la tabla que se muestra a continuación para cada nivel de rentabilidad (véase Tabla 3):

Tabla 3: Diferentes niveles de riesgo óptimos según la rentabilidad (caso 1)

	Europa	**EE.UU.**	**Europa y EE. UU.**	**Europa, EE.UU. y A. L.**	**Europa, EE.UU. A. L y Asia**	**Europa, EE.UU. A.L. Asia y Australia**	**Europa, EE.UU. A.L. Asia Australia y Rusia**
E_p **= 0,015**	0,0432	0,0372	0,0327	0,0294	0,0282	0,0268	0,0259
E_p **= 0,03**	0,0922	0,0900	0,0549	0,0427	0,0405	0,0391	0,0375
E_p **= 0,05**	0,1694	0,1760	0,0984	0,0709	0,0641	0,0628	0,0604
E_p **= 0,07**	0,2488	0,2642	0,1448	0,1022	0,0900	0,0888	0,0857

De los datos mostrados en la Tabla 3 destaca una consecuencia básica de la diversificación. A medida que agregamos mercados e índices, las posibilidades de minimizar riesgo son mayores. Por eso, para cada nivel de rentabilidad dado, conforme aumentamos la composición de nuestra cartera, menor es el riesgo que hemos de soportar. Esto hace que las carteras sean cada vez más interesantes para un inversor a medida que aumentan sus posibilidades de invertir.

Igualmente podemos obtener las carteras de máxima rentabilidad por unidad de riesgo para poder compararlas entre sí (Tabla 4):

Tabla 4: Carteras con mayor ratio de Sharpe (caso 1)

	Europa	**EE.UU.**	**Europa y EE. UU.**	**Europa, EE.UU. y A. L.**	**Europa, EE.UU. A. L y Asia**	**Europa, EE.UU. A.L. Asia y Australia**	**Europa, EE.UU. A.L. Asia Australia y Rusia**
IBEX	0,3442		-0,0046	0,0758	0,2627	0,2961	0,3553
DAX	1,2438		0,4671	0,3207	0,7388	0,7889	0,8715
FTSE	1,1025		-0,4537	0,1929	0,5180	0,1943	0,2736
CAC40	-0,6563		-0,4966	-0,7094	-1,1085	-1,0526	-1,1114
FTSE MIB	-1,0341		-0,4683	-0,5350	-0,8470	-0,7857	-0,7381
S&P500		0,5210	1,9633	1,6498	1,8065	1,4976	1,4741
NASDAQ		1,1684	0,9584	0,9284	1,4205	1,2257	0,9195
RUSSELL		-0,6893	-0,9656	-0,8382	-1,0447	-0,8919	-0,6747
MXX				0,2988	0,3776	0,3367	0,2357
IBOVESPA				-0,7280	-0,7124	-0,7275	-0,5250
MERVAL				0,3443	0,5346	0,4727	0,4612
NIKKEI					-0,2133	-0,2250	-0,1767
HSI					-0,1577	-0,2955	-0,1504
KOSPI					-0,1224	-0,1503	-0,1288
SSE					-0,4527	-0,3736	-0,3650
AORD						0,6901	0,5915
RTSI							-0,3124
E_d	0,0177	0,0162	0,0264	0,0381	0,0546	0,0486	0,0463
σ_d	0,0501	0,0399	0,0480	0,0534	0,0700	0,0610	0,0560

4.2. Carteras mvg sólo con posiciones largas

Siguiendo la metodología anterior, la composición de las carteras restringiendo las ventas en corto quedaría de la siguiente manera:

Tabla 5: Carteras de mínimo riesgo global sin ventas en descubierto

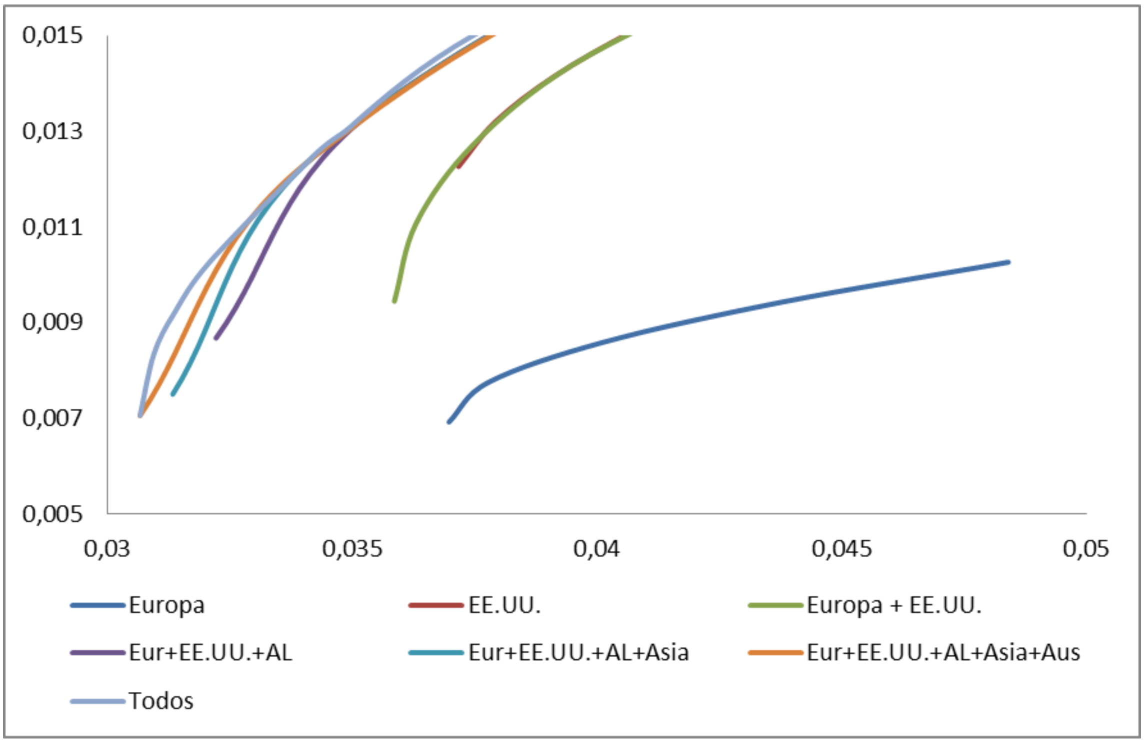
	Europa	**EE.UU.**	**Europa y EE. UU.**	**Europa, EE.UU. y A. L.**	**Europa, EE.UU. A. L y Asia**	**Europa, EE.UU. A.L. Asia y Australia**	**Europa, EE.UU. A.L. Asia Australia y Rusia**
IBEX	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
DAX	0,02		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
FTSE	0,98		0,52	0,36	0,26	0,08	0,08
CAC40	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
FTSE MIB	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S&P500		1,00	0,48	0,11	0,00	0,00	0,00
NASDAQ		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
RUSSELL		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
MXX				0,53	0,47	0,43	0,43
IBOVESPA				0,00	0,00	0,00	0,00
MERVAL				0,00	0,00	0,00	0,00
NIKKEI					0,11	0,09	0,09
HSI					0,00	0,00	0,00
KOSPI					0,11	0,07	0,07
SSE					0,04	0,03	0,03
AORD						0,30	0,30
RTSI							0,00
E_{mvg}	0,0069	0,0123	0,0094	0,0087	0,0075	0,0071	0,0071
σ_{mvg}	0,0370	0,0372	0,0359	0,0322	0,0313	0,0307	0,0307

Resulta curioso cómo, una vez introducida la restricción de las ventas en corto, hay índices en los que no se invierte nada (véase Tabla 5). En todos los supuestos se repite el mismo patrón, se invierte mayoritariamente en los índices FTSE (Londres), S&P500 (EE.UU.), MXX (México), KOSPI (Corea del Sur), SSE (Shanghái) y AORD

(Australia). La restricción introducida produce cambios importantes en la composición de las carteras.

Para poder realizar un análisis más minucioso, exponemos a continuación las fronteras eficientes con esta nueva restricción a las ventas en descubierto (Fig. 4), correspondiéndose los colores de cada frontera con los de la Tabla 5:

Fig. 4: Fronteras eficientes con posiciones largas (caso 2)



Estos son los niveles de volatilidad relativos a cada valor de rentabilidad esperada de las carteras:

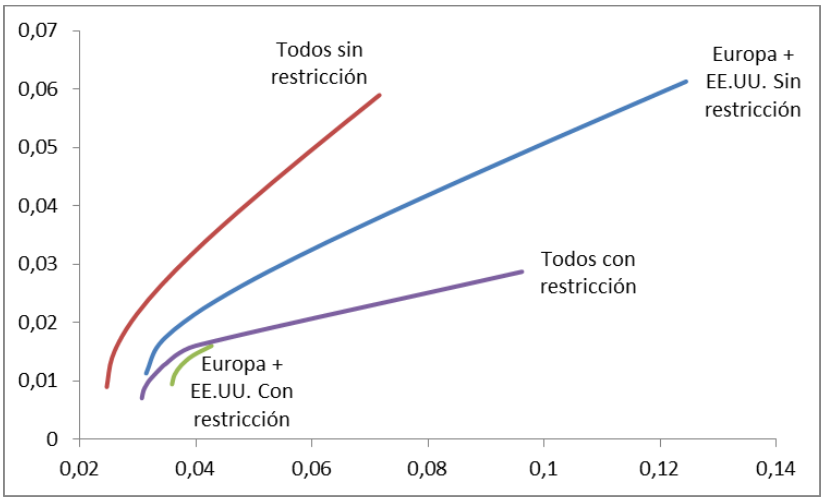
Tabla 6: Diferentes niveles de riesgo óptimo según rentabilidad (caso 2)

	Europa	**EE.UU.**	**Europa y EE. UU.**	**Europa, EE.UU. y A. L.**	**Europa, EE.UU. A. L y Asia**	**Europa, EE.UU. A.L. Asia y Australia**	**Europa, EE.UU. A.L. Asia Australia y Rusia**
E_p **= 0,0085**	0,0398	-	-	-	0,0315	0,0251	0,0246
E_p **= 0,009**	0,0418	-	-	0,0322	0,0317	0,0251	0,0246
E_p **= 0,011**	-	-	0,0363	0,0330	0,0328	0,0254	0,0248
E_p **= 0,015**	-	0,0406	0,0406	0,0379	0,0379	0,0268	0,0259

De la comparación entre las carteras de mínimo riesgo global y las fronteras eficientes con y sin posibilidad de realizar ventas en corto de los casos 1 y 2 (véase Tablas 2 y 5 junto a las Figs. 2 y 4) podemos extraer varias conclusiones:

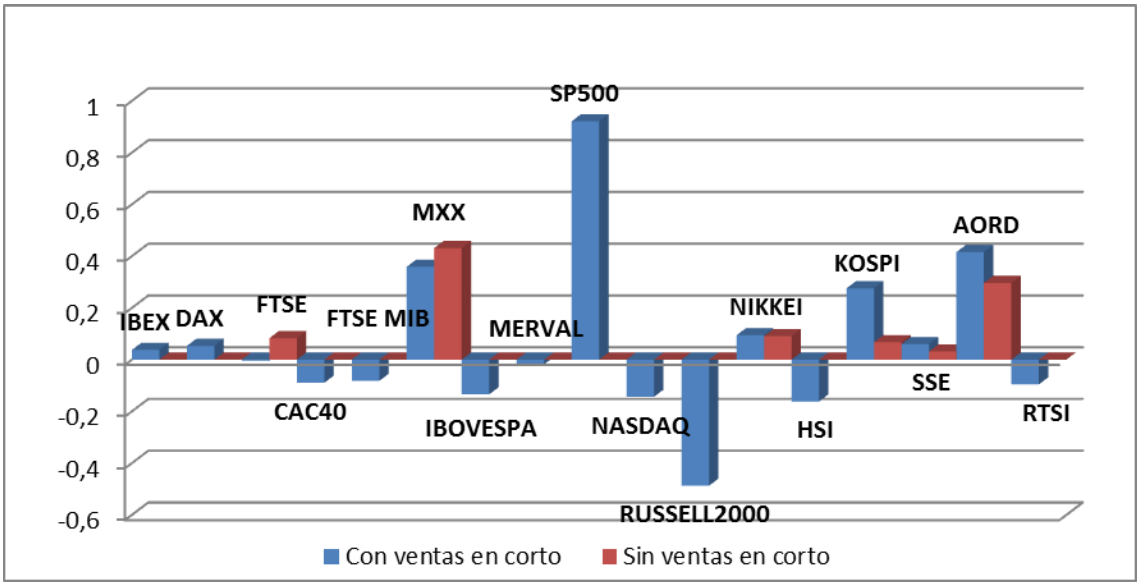
1. El riesgo soportado para un mismo nivel de rentabilidad es mayor si se introduce una restricción a las ventas en descubierto. Esta limitación produce que la posible diversificación que se podría llevar a cabo se vea limitada por la necesidad de invertir en posiciones largas (o no invertir como límite mínimo) en todos los activos. Podemos apreciar esta consecuencia tanto en las carteras de mínimo riesgo global (donde, a modo de ejemplo para la cartera formada por todos los índices, en caso de no haber restricciones, la cartera de mínimo riesgo global alcanzaría una volatilidad de 0,0246 para una rentabilidad de 0,09; mientras que sin ventas en descubierto la volatilidad asciende a 0,0307 para una rentabilidad inferior: 0,071); como en el riesgo que es necesario asumir para obtener una rentabilidad dada, como por ejemplo de 0,015, siendo mayor en el caso de estar restringidas las ventas en descubierto
2. La posibilidad de realizar ventas en corto aumenta las oportunidades de inversión, y ello se traduce en un incremento de las fronteras eficientes, implicando la opción para los inversores de alcanzar mayores niveles de rentabilidad que si éstas se prohíben. Por ejemplo, si comparamos gráficamente las fronteras eficientes de invertir en la cartera formada por Europa y EE.UU. así como en todos los índices en ambos escenarios podemos apreciar este matiz:

Fig. 5: Fronteras eficientes casos 1 y 2



3. La ponderación de las carteras introduciendo la restricción a las ventas en corto varía notablemente. Los índices en los que se invierte en descubierto cuando no hay restricción dejan de estar representados en la cartera con restricción a las ventas en corto, comprobando que en la primera destacan el S&P500 (EE.UU.) que luego pierde toda su relevancia; y el AORD (Australia). Podemos comprobarlo en la Fig. 6:

Fig. 6: Ponderación de las carteras mvg en los casos 1 y 2



4.3. Carteras con restricción [0%, 30%]

Como hemos explicado anteriormente, la introducción de la restricción a las ventas en corto puede derivar en una escasa representación de los valores en la cartera resultante y una concentración en unos pocos. Podemos comprobar este resultado en las carteras anteriores. Las carteras con restricción [0%, 30%] serían las siguientes (véase Tabla 7):

Tabla 7: Carteras mvg con restricción [0%, 30%]

	Europa	EE.UU.	Europa y EE. UU.	Europa, EE.UU. y A. L.	Europa, EE.UU. A. L y Asia	Europa, EE.UU. A.L. Asia y Australia	Europa, EE.UU. A.L. Asia Australia y Rusia
IBEX	0,10		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
DAX	0,30		0,07	0,03	0,00	0,00	0,00
FTSE	0,30		0,30	0,30	0,30	0,15	0,15
CAC40	0,30		0,05	0,00	0,00	0,00	0,00
FTSE MIB	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S&P500		0,40	0,30	0,30	0,09	0,01	0,01
NASDAQ		0,40	0,28	0,00	0,00	0,00	0,00
RUSSELL		0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
MXX				0,30	0,30	0,30	0,30
IBOVESPA				0,07	0,00	0,00	0,00
MERVAL				0,00	0,00	0,00	0,00
NIKKEI					0,11	0,10	0,10
HSI					0,00	0,00	0,00
KOSPI					0,14	0,09	0,09
SSE					0,06	0,05	0,05
AORD						0,30	0,30
RTSI							0,00
$\boldsymbol{E_{mvg}}$	0,0066	0,0139	0,0112	0,0099	0,0073	0,0066	0,0066
$\boldsymbol{\sigma_{mvg}}$	0,0416	0,0409	0,0373	0,0332	0,0317	0,0309	0,0309

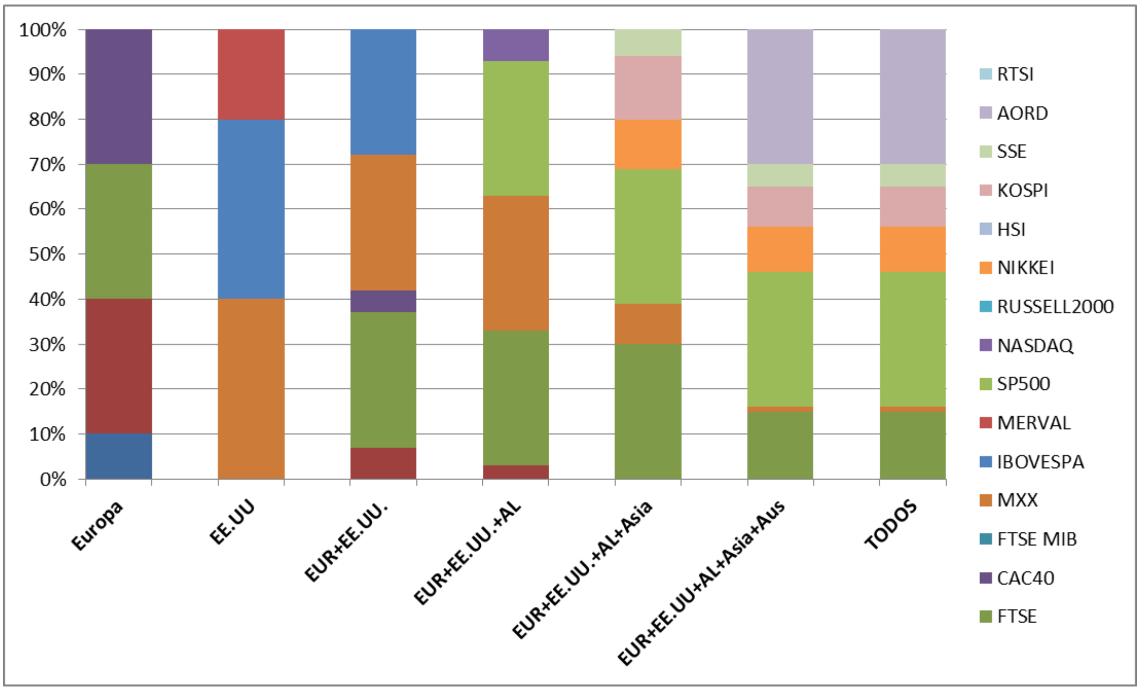
Como podemos comprobar (Tabla 7), la composición de las carteras no difiere mucho de lo ocurrido con las obtenidas a partir de la simple restricción de las ventas en descubierto, sin limitar superiormente las ponderaciones. Así, salvo el MXX (México) en el que se invertía un 43% sin límite superior (pasando a un 30% con el límite), el resto de índices toman valores cercanos o similares.

En este punto sería interesante estudiar cuál es el efecto de introducir un nuevo índice en la cartera, analizando el beneficio añadido para el inversor; usando para ello un test de *spanning* de media-varianza (De Roon, et al., 2001; Glabadanidis, 2009). No obstante, y dada la complejidad del modelo en cuanto a cálculos econométricos, nos limitamos únicamente a citar esta posibilidad.

Paulatinamente, conforme agregamos índices, se nos permite alcanzar carteras de mínima varianza inferiores. Así, si comparamos directamente la cartera formada sólo por Europa con la cartera total, comprobamos que para un mismo nivel de rentabilidad (0,66%) se tiene que soportar, en el caso de la cartera completa, un riesgo de un 1% menos.

Los datos de la Tabla 7 se muestran en el siguiente gráfico (Fig. 7):

Fig. 7: Gráfico de composición de carteras mvg según Tabla 7.



4.4. Carteras con restricción [5%, 30%]

Finalmente, también resulta interesante analizar las carteras donde, al menos en un 5%, todos los índices se encuentran representados. Además, continuamos estableciendo un límite superior para evitar valores extremos.

Las carteras de mínima varianza así obtenidas quedarían como siguen (Tabla 8):

Tabla 8: Carteras mvg con restricción [5%, 30%]

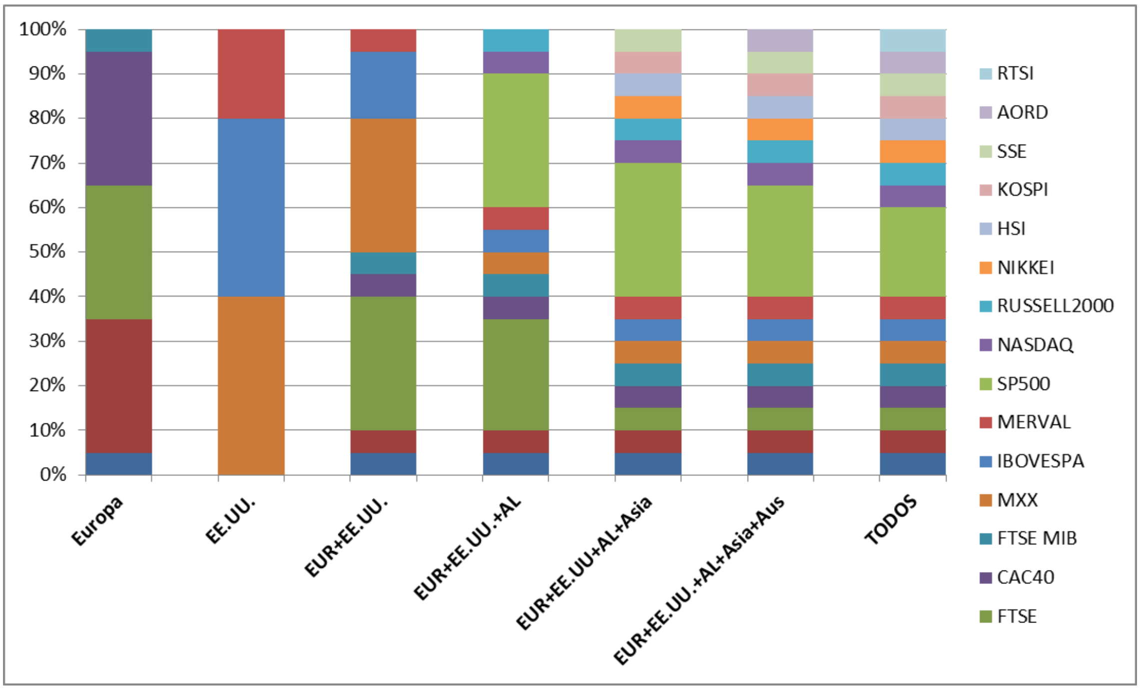
	Europa	EE.UU.	Europa y EE. UU.	Europa, EE.UU. y A. L.	Europa, EE.UU. A. L y Asia	Europa, EE.UU. A.L. Asia y Australia	Europa, EE.UU. A.L. Asia Australia y Rusia
IBEX	0,05		0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
DAX	0,30		0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
FTSE	0,30		0,30	0,25	0,05	0,05	0,05
CAC40	0,30		0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
FTSE MIB	0,05		0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
S&P500		0,40	0,30	0,05	0,05	0,05	0,05
NASDAQ		0,40	0,15	0,05	0,05	0,05	0,05
RUSSELL		0,20	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
MXX				0,30	0,30	0,25	0,20
IBOVESPA				0,05	0,05	0,05	0,05
MERVAL				0,05	0,05	0,05	0,05
NIKKEI					0,05	0,05	0,05
HSI					0,05	0,05	0,05
KOSPI					0,05	0,05	0,05
SSE					0,05	0,05	0,05
AORD						0,05	0,05
RTSI							0,05
E_{mvg}	0,0066	0,0139	0,0096	0,0088	0,0081	0,0079	0,0075
σ_{mvg}	0,0420	0,0409	0,0382	0,0361	0,0362	0,0362	0,0379

Como podemos comprobar, la obligación de invertir en todos los índices, al menos, un 5% implica que desde el momento en que se incluye el índice MXX (México), éste es el que más porcentaje de inversión recibe, y la posterior inclusión de nuevos índices disminuirá la participación de MXX (véase Tabla 8).

Así, a partir de la inclusión de los índices asiáticos, mientras que la rentabilidad de las carteras de mínimo riesgo global decrece, el riesgo soportado medido por la desviación típica aumenta. Esta es una consecuencia derivada de la inclusión del límite inferior del 5%, cuyo resultado es una disminución de la inversión en el índice mexicano al imponer que se invierta en todos los índices.

Utilizando el mismo gráfico que en el apartado anterior, se puede resumir la Tabla 8 en la siguiente figura:

Fig. 8: Representación gráfica de la composición de carteras según Tabla 8



Resulta curioso comprobar, a la vista del gráfico, cómo se invierte en muchos índices únicamente un 5% que es el mínimo exigido; matiz que, sobre todo, cobra protagonismo en las carteras donde se invierte en todos o casi todos los índices.

5. ANÁLISIS DE LA ROBUSTEZ DE LA COVARIANZA

Además, también puede ser aconsejable estudiar la robustez de la covarianza (Huo, et al., 2012).

Al realizar el contraste de normalidad Jarque-Bera, hemos inferido de éste que no podemos afirmar que los índices seleccionados para nuestro estudio sigan una distribución normal. Esto se debe, básicamente, a la existencia de valores extremos que resultan en una asimetría (generalmente negativa) que hace más recomendable utilizar la mediana como medida de tendencia central en lugar de la media (Sheskin, 2000).

La razón fundamental que justifica esta medida reside en que se puede demostrar que la mediana es más estable ante la presencia de valores extremos, y por tanto reduce la correlación entre los activos, derivando en mayores beneficios procedentes de la diversificación (Huo, et al., 2012), que es precisamente lo que se busca al construir carteras eficientes.

Para ello, calcularíamos la nueva matriz de varianzas y covarianzas (que denotamos ahora como Ω_R) a partir de las covarianzas robustas de los índices, que se obtendrían a partir de la siguiente fórmula (Huo, et al., 2012):

$$\hat{C}_R = \widehat{M}\left[\left(x_t - \hat{k}_x\right)\left(y_t - \hat{k}_y\right)\right]$$

Una vez construida la nueva matriz de varianzas y covarianzas hemos obtenido las carteras eficientes sustituyendo la matriz de varianzas y covarianzas convencional por la misma matriz pero robusta (usando la fórmula de $\hat{C}_R$), dándonos los siguientes resultados de carteras de mínima varianza global en el mercado europeo:

mvg - Convencional

IBEX	0,180
DAX	0,182
FTSE	1,019
CAC40	-0,027
FTSE MIB	-0,355

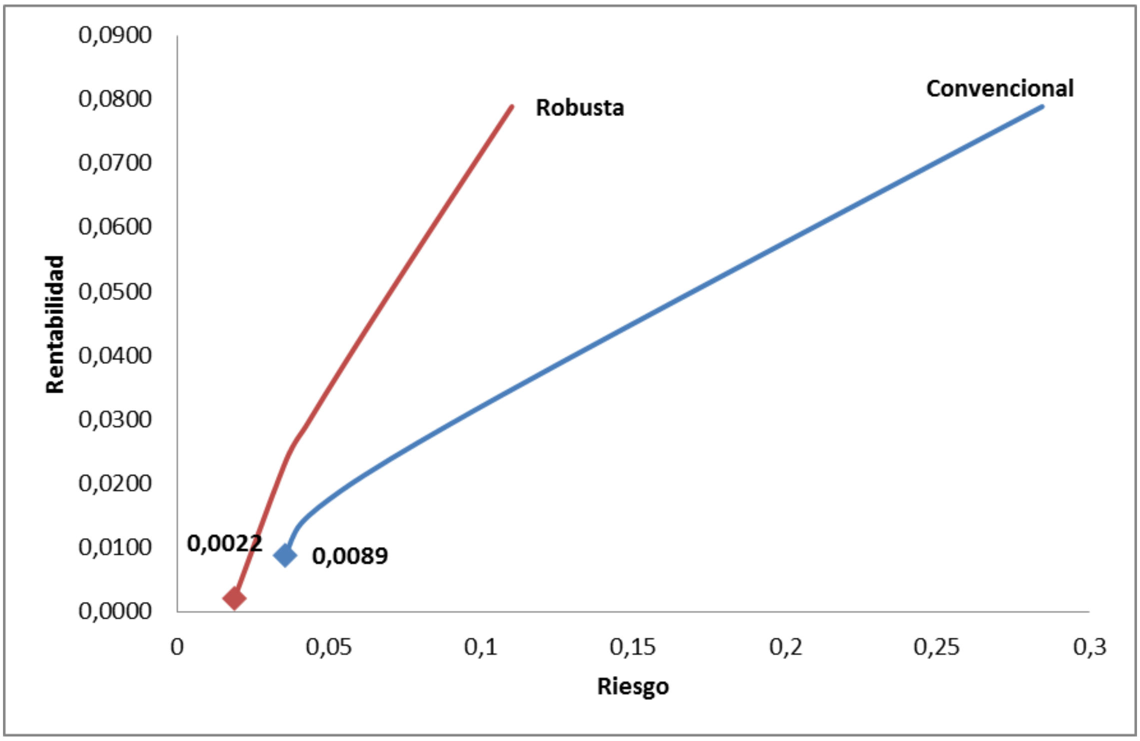
mvg - Robusta

IBEX	1,456
DAX	-0,304
FTSE	0,613
CAC40	-0,044
FTSE MIB	-0,721

Como podemos comprobar, los índices IBEX (España) y FTSE (Reino Unido) son los que más afectados se ven por este cambio en la covarianza, de manera que el primero de ellos gana protagonismo en la nueva cartera mientras que el segundo lo pierde. Mientras que la cartera mvg convencional alcanza unos valores para la rentabilidad esperada y desviación típica de 0,0089 y 0,0356 respectivamente, en la robusta la rentabilidad esperada es de 0,0022 y la desviación típica de 0,0189.

El efecto de la introducción de la covarianza robusta en el modelo se puede apreciar más significativamente en las fronteras eficientes (Fig. 9):

Fig. 9: Fronteras eficientes para Europa



Como podemos comprobar, utilizando este ejemplo se demuestra lo que se afirmó en el apartado de metodología: utilizando la matriz de covarianzas robustas en lugar de la convencional se pueden construir carteras eficientes que, para un mismo nivel de rentabilidad, impliquen asumir menores niveles de riesgo. Así, por ejemplo, para unos niveles de rentabilidad dados, el riesgo que se tendría que asumir sería el siguiente:

	mvg - C	mvg - R
	Riesgo	
E_p = 0,0089	0,036	0,021
E_p = 0,054	0,185	0,076
E_p = 0,074	0,264	0,103

Por lo tanto, podemos concluir que la sustitución de la covarianza convencional por la robusta resulta positivo porque la mediana representa, en el caso de índices de los que no podemos inferir que sigan una distribución normal, una medida de tendencia central más representativa de la muestra (Sheskin, 2000), y por tanto permite realizar una mejor diversificación del riesgo.

6. CONCLUSIONES

Una vez desarrollado el modelo, podemos extraer las siguientes conclusiones:

En primer lugar, se puede confirmar que, conforme aumentamos el número de índices que tiene un inversor para poder construir una cartera de inversión, el riesgo que tiene que soportar es cada vez menor para un mismo nivel de rentabilidad; esto es, al tener mayores posibilidades de elección, el modelo minimizará de forma más eficiente el riesgo.

En segundo lugar, la utilización de índices procedentes de distintos países también contribuye a reducir el riesgo de una cartera eficiente. Esto se explica porque, en una economía dada, suele existir una fuerte tendencia a que los fenómenos económicos vayan al unísono, y por tanto la correlación entre los activos sea mayor (Levy y Sarnat, 1970). Por el contrario, si se utilizan índices de distintas economías, la diversificación del riesgo será mayor en la medida en que existe menos correlación entre estos.

En tercer lugar, la introducción de restricciones en el modelo aumentan la ineficiencia. Al imponer a un inversor un máximo (o mínimo) de inversión en cada índice, las posibilidades de reducir el riesgo disminuyen y, por tanto, dado un nivel de rentabilidad, el riesgo asumido será mayor que en el caso de que se dé plena libertad.

Finalmente, la utilización de la matriz de covarianzas robustas en lugar de la convencional supone notables diferencias respecto a la metodología tradicional en la obtención de fronteras eficientes.

BIBLIOGRAFÍA

Conde Amo, I. B. y Conde López, A., 2003. *Mercados Financieros I: Análisis y gestión de valores bursátiles.* Madrid: Colex.

De Roon, F. A., Nijman, T. E. & Werker, B. J. M., 2001. Testing for Mean-Variance Spanning with Short Sales Constraints and Transaction Costs: The Case of Emerging Markets. *The Journal of Finance,* LVI(2), pp. 721-742.

García Boza, J., 2013. *Inversiones financieras: selección de carteras.* Madrid: Pirámide.

Glabadanidis, P., 2009. Measuring the economic significance of mean-variance spanning. *The Quarterly Review of Economics and Finance,* Issue 49, pp. 596-616.

Gómez Sala, J. C., 2012. *Dirección Financiera I (Finanzas).* Segunda ed. Alicante: ECU.

Huang, C.-f. y Litzenberger, R. H., 1988. *Foundations for Financial Economics.* s.l.:North-Holland.

Huo, L., Kim, T.-H. y Kim, Y., 2012. Robust estimation of covariance and its application to portfolio optimization. *Finance Reserach Letters,* Issue 9, pp. 121-134.

Jackson, M. y Staunton, M., 2002. *Advanced Modelling in finance using Excel and VBA.* s.l.:Wiley.

Levy, H. y Sarnat, M., 1970. International Diversification of Investment Portfolios. *American Economic Association,* 60(4), pp. 668-675.

Sheskin, D. J., 2000. *Parametric and nonparametric statistical procedures.* Segunda ed. s.l.:Chapman & Hall/CRC.

https://www.finance.yahoo.com (Consultado el 15 de Noviembre de 2014).

http://www.expansión.com (Consultado el 1 de febrero de 2015).

http://www.investing.com (Consultado el 3 de febrero de 2015).

ANEXO 1: PROGRAMA DE MINIMIZACIÓN DE MARKOWITZ

Definimos el programa de minimización como:

$$\left.\begin{array}{c} Mín_w \frac{1}{2}\sigma_p^2 = \frac{1}{2}w'\Omega w \\ s.a \quad E_p = w'E \\ w'1_n = 1 \end{array}\right\}$$

A continuación definimos la ecuación lagrangiana y desarrollamos el problema de minimización:

$$L = \frac{1}{2}w'\Omega w - \lambda_1\left(w'E - E_p\right) - \lambda_2(w'1_n - 1)$$

Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \Omega w - \lambda_1 E - \lambda_2 1_n = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -\left(w'E - E_p\right) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(w'1_n - 1) = 0$$

Partiendo de la primera condición, multiplicamos en ambos lados por Ω^{-1} (1) y hacemos prima ambas partes (2):

$$\Omega w = \lambda_1 E + \lambda_2 1_n$$
$$\Omega^{-1}\cdot \Omega w = \Omega^{-1}(\lambda_1 E + \lambda_2 1_n) \ (1)$$
$$w = \Omega^{-1}(\lambda_1 E + \lambda_2 1_n)$$
$$w' = (\lambda_1 E'\Omega^{-1} + \lambda_2 1'_n\Omega^{-1}) \ (2)$$

Sustituimos w' en las ecuaciones de λ_1 (3) y λ_2 (4):

$$(\lambda_1 E'\Omega^{-1}E + \lambda_2 1'_n\Omega^{-1}E) = E_p \ \ (3)$$
$$(\lambda_1 E'\Omega^{-1}1_n + \lambda_2 1'_n\Omega^{-1}1_n) = 1 \ \ (4)$$

Definimos a continuación las siguientes variables, y posteriormente despejamos las ecuaciones anteriores para obtener el valor de λ_1 y λ_2

$$\boldsymbol{A} = 1_n' \cdot \Omega \cdot E \qquad \boldsymbol{a} = \frac{A}{D} \qquad \lambda_1 = c \cdot E_p - a$$

$$\boldsymbol{B} = E' \cdot \Omega \cdot E \qquad \boldsymbol{b} = \frac{B}{D} \qquad \lambda_2 = b - a \cdot E_p$$

$$\boldsymbol{C} = 1_n' \cdot \Omega \cdot 1 \qquad \boldsymbol{c} = \frac{C}{D}$$

$$\boldsymbol{D} = B \cdot C - A^2$$

Sustituimos a continuación el valor de λ_1 y λ_2 en w' (2) transpuesta y simplificamos (5):

$$w = \left(c \cdot E_p - a\right)\Omega^{-1} \cdot E + \left(b - a \cdot E_p\right)\Omega^{-1} \cdot 1_n$$

$$w = (c \cdot \Omega^{-1} \cdot E - a \cdot \Omega^{-1} 1_n)E_p - a \cdot \Omega^{-1} \cdot E + b \cdot \Omega^{-1} \cdot 1_n \quad (5)$$

$$w = h \cdot E_p + g$$

A partir de la ecuación de carteras de menor varianza (5) podemos obtener carteras de mínimo riesgo para cada nivel de rentabilidad E_p. Asimismo, podríamos incluir otro tipo de restricciones (como acotar las ventas en descubierto, o la inversión máxima permitida en cada índice) en el programa de minimización (Bodie, Kane y Marcus, 2009); pero dado que el desarrollo manual se complicaría, nos hemos servido de la herramienta *Solver* en *Microsoft Excel* para llevar a cabo el estudio (Jackson y Staunton, 2002).

Obtenidas las carteras de mínimo riesgo, podemos calcular tanto su rentabilidad esperada como su volatilidad como:

$$Ep = w' \cdot E \qquad \sigma^2 = w' \cdot \Omega \cdot w$$

Así, una vez calculado para cada cartera su rentabilidad y riesgo, podemos representar ambas variables en el plano y con ello obtener la **curva de carteras de menor varianza**, que analíticamente podemos desarrollar partiendo de la fórmula del riesgo de una cartera:

$$\sigma^2 = w' \cdot \Omega \cdot w = w' \cdot \Omega \cdot (\lambda_1 \Omega^{-1} E + \lambda_2 \Omega^{-1} 1_n) = w'(\lambda_1 \Omega \cdot \Omega^{-1} E + \lambda_2 \Omega \cdot \Omega^{-1} 1_n)$$

$$= \lambda_1 w' E + \lambda_2 w' 1_n = \lambda_1 E_p + \lambda_2 1 = \left(c \cdot E_p - a\right)E_p + \left(b - a \cdot E_p\right)$$

$$\sigma = \sqrt{c \cdot E_p^2 - 2a \cdot E_p + b}$$

ANEXO 2: MATRICES DE VARIANZAS Y COVARIANZAS CONVENCIONAL Y ROBUSTA (PARA EUROPA)

- **VCV Convencional**

	IBEX	*DAX*	*FTSE*	*CAC40*	*FTSE MIB*	*MXX*	*IBOVESPA*	*MERVAL*
IBEX	0,0037	0,0017	0,0015	0,0022	0,0034	0,0008	0,0017	0,0027
DAX	0,0017	0,0023	0,0013	0,0019	0,0022	0,0009	0,0014	0,0021
FTSE	0,0015	0,0013	0,0014	0,0015	0,0017	0,0008	0,0013	0,0013
CAC40	0,0022	0,0019	0,0015	0,0021	0,0026	0,0008	0,0015	0,0023
FTSE MIB	0,0034	0,0022	0,0017	0,0026	0,0040	0,0008	0,0019	0,0034
MXX	0,0008	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0012	0,0012	0,0014
IBOVESPA	0,0017	0,0014	0,0013	0,0015	0,0019	0,0012	0,0028	0,0023
MERVAL	0,0027	0,0021	0,0013	0,0023	0,0034	0,0014	0,0023	0,0093
SP500	0,0014	0,0014	0,0012	0,0014	0,0016	0,0009	0,0013	0,0015
NASDAQ	0,0015	0,0015	0,0013	0,0015	0,0017	0,0009	0,0015	0,0018
RUSSELL2000	0,0016	0,0018	0,0015	0,0017	0,0018	0,0011	0,0017	0,0019
NIKKEI	0,0014	0,0014	0,0009	0,0013	0,0015	0,0006	0,0008	0,0020
HSI	0,0016	0,0016	0,0013	0,0015	0,0017	0,0010	0,0019	0,0021
KOSPI	0,0013	0,0015	0,0010	0,0013	0,0015	0,0007	0,0014	0,0017
SSE	0,0011	0,0011	0,0008	0,0009	0,0011	0,0008	0,0014	0,0023
AORD	0,0012	0,0010	0,0010	0,0012	0,0014	0,0007	0,0014	0,0013
RTSI	0,0026	0,0025	0,0019	0,0023	0,0029	0,0014	0,0027	0,0035

	SP500	*NASDAQ*	*RUSSELL2000*	*NIKKEI*	*HSI*	*KOSPI*	*SSE*	*AORD*	*RTSI*
IBEX	0,0014	0,0015	0,0016	0,0014	0,0016	0,0013	0,0011	0,0012	0,0026
DAX	0,0014	0,0015	0,0018	0,0014	0,0016	0,0015	0,0011	0,0010	0,0025
FTSE	0,0012	0,0013	0,0015	0,0009	0,0013	0,0010	0,0008	0,0010	0,0019
CAC40	0,0014	0,0015	0,0017	0,0013	0,0015	0,0013	0,0009	0,0012	0,0023
FTSE MIB	0,0016	0,0017	0,0018	0,0015	0,0017	0,0015	0,0011	0,0014	0,0029
MXX	0,0009	0,0009	0,0011	0,0006	0,0010	0,0007	0,0008	0,0007	0,0014
IBOVESPA	0,0013	0,0015	0,0017	0,0008	0,0019	0,0014	0,0014	0,0014	0,0027
MERVAL	0,0015	0,0018	0,0019	0,0020	0,0021	0,0017	0,0023	0,0013	0,0035
SP500	0,0014	0,0015	0,0018	0,0011	0,0013	0,0010	0,0008	0,0010	0,0021
NASDAQ	0,0015	0,0018	0,0019	0,0012	0,0015	0,0012	0,0011	0,0011	0,0022
RUSSELL2000	0,0018	0,0019	0,0027	0,0015	0,0017	0,0015	0,0010	0,0013	0,0028
NIKKEI	0,0011	0,0012	0,0015	0,0029	0,0012	0,0010	0,0008	0,0008	0,0019
HSI	0,0013	0,0015	0,0017	0,0012	0,0028	0,0015	0,0018	0,0014	0,0028
KOSPI	0,0010	0,0012	0,0015	0,0010	0,0015	0,0018	0,0010	0,0010	0,0021
SSE	0,0008	0,0011	0,0010	0,0008	0,0018	0,0010	0,0041	0,0008	0,0016
AORD	0,0010	0,0011	0,0013	0,0008	0,0014	0,0010	0,0008	0,0013	0,0018
RTSI	0,0021	0,0022	0,0028	0,0019	0,0028	0,0021	0,0016	0,0018	0,0064

- **VCV robusta para Europa**

	IBEX	*DAX*	*FTSE*	*CAC40*	*FTSE MIB*
IBEX	0,0009	0,0007	0,0005	0,0010	0,0014
DAX	0,0007	0,0007	0,0006	0,0008	0,0011
FTSE	0,0005	0,0006	0,0005	0,0007	0,0007
CAC40	0,0010	0,0008	0,0007	0,0010	0,0016
FTSE MIB	0,0014	0,0011	0,0007	0,0016	0,0023