



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN EN ESTUDIANTES
DE BACHILLERATO DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE
UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

ANEXO TESIS DOCTORAL

Joan Baptista Pons Tomàs



Tesis

Doctorales

www.eltallerdigital.com

UNIVERSIDAD de ALICANTE



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

DEPARTAMENTO DE INNOVACIÓN Y FORMACIÓN DIDÁCTICA

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

ANEXO TESIS DOCTORAL

JOAN BAPTISTA PONS TOMÀS

ALICANTE, Noviembre 2014

ÍNDICE

ANEXO 1. CUESTIONARIO.....	1
ANEXO 2. TRANSCRIPCIONES DE LAS ENTREVISTAS	13
EST7.....	13
EST30.....	21
EST33.....	25
EST35.....	29
EST38.....	33
EST55.....	36
EST58.....	41
EST59.....	51
EST61.....	58
EST63.....	64
EST64.....	73
EST67.....	80
EST68.....	85
EST71.....	96

EST72.....	105
EST73.....	112
EST74.....	119
EST90.....	127
EST98.....	138
EST117.....	149
EST120.....	156



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



ANEXO 1

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CUESTIONARIO

NOM DEL CENTRE:

INICIALS DEL NOM I DELS COGNOMS:

ESTAS REPETINT PRIMER DE BATXILLERAT: NO SI

EDAT:

SEXE:

NOTES.

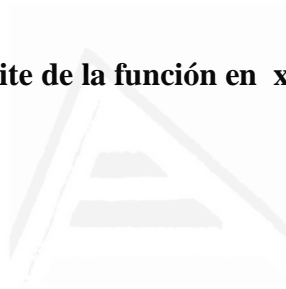
- 1. Les respostes al qüestionari han de ser individuals.**
- 2. Les respostes seran confidencial.**
- 3. La persona present a l'aula, solament ha de respondre a preguntes relacionades amb la comprensió del text.**

Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	...	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

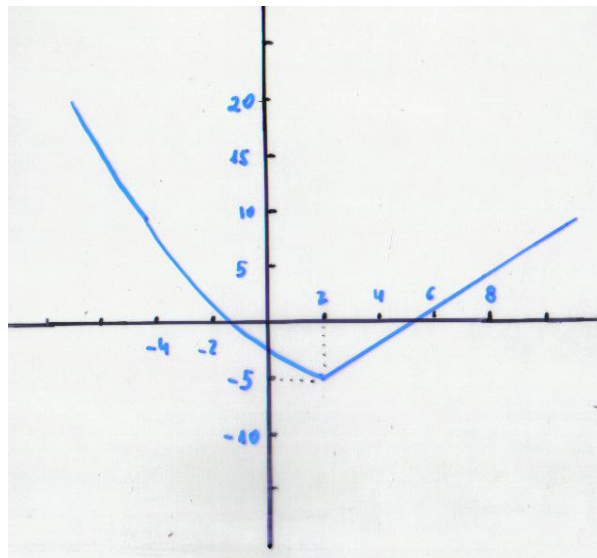
- a) ¿A qué número a se aproxima x ?
- b) ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?
- c) Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x
- d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en $x=3$



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tarea 2

Desde la función $f(x)$ que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:



- Elige un valor para la x , y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto
- Cuando x tome, sucesivamente, los valores 1.9, 1.99, 1.999, ... ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?
- Cuando x tome, sucesivamente, los valores 2.1, 2.01, 2.001, ... ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x .
- Di, si es posible, cuál es el límite de la función en $x = 2$

Tarea 3

Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a				
x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)				
f(x) tiende a				

x tiende a			
2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x) tiende a			

- a. Completa la tabla
- b. ¿A qué número a se aproxima x ?
- c. ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?
- d. Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x .
- e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en $x=2$

Universitat d'Alicant
 Universidad de Alicante

Tarea 4

Alba, una estudiante de primero de bachillerato, con la ayuda de una hoja de cálculo, ha ido sustituyendo valores en una función $f(x)$ y ha obtenido las dos primeras filas de la tabla. Después, ha construido dos filas más de diferencias en valor absoluto

x	0,499	0,4999	0,49999	0,499999	...	0,500001	0,50001	0,5001	0,501
f(x)	1,497003	1,499700	1,499970	1,499997	...	1,500003	1,500030	1,500300	1,503003
0,5 - x	0,00100	0,00010	0,00001	0,000001	...	0,00000	0,00001	0,00010	0,00100
1,5 - f(x)	0,0029973	0,0003000	0,0000300	0,0000030	..	0,0000030	0,0000300	0,0003000	0,0030027

- a. ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5 para que la diferencia $1,5-f(x)$, en valor absoluto, sea menor que 0,001?

- b. Con la información del apartado anterior, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x=0,5$?

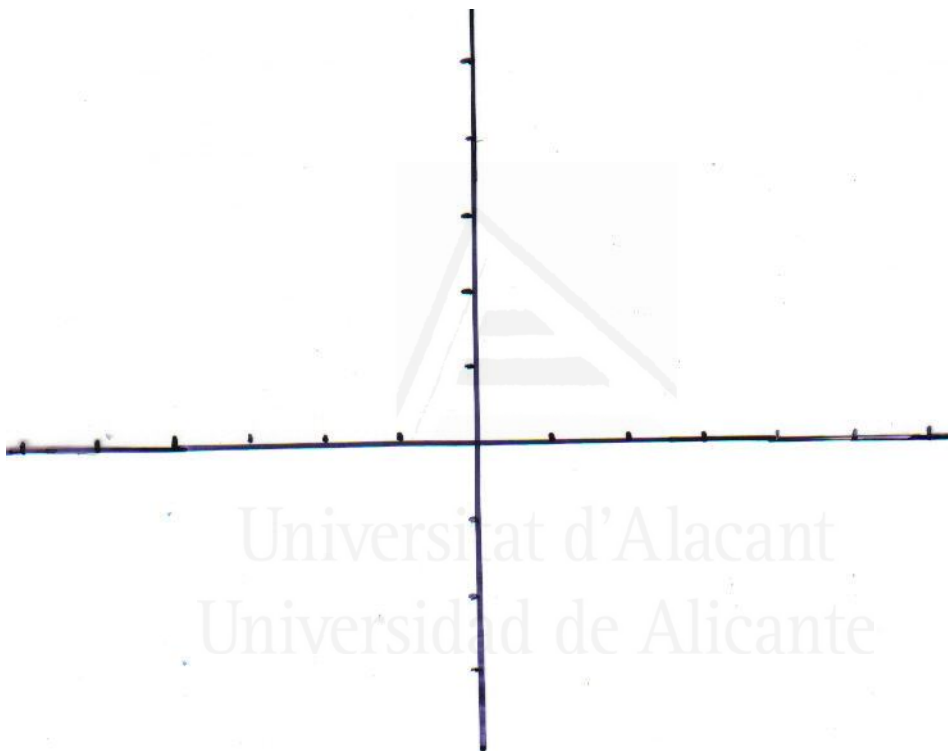
Tarea 5

Si es posible, representa la gráfica de una función que cumpla las siguientes tres condiciones a la vez:

a) $f(1) = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$

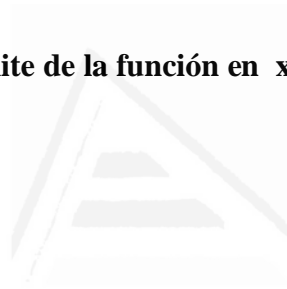


Tarea 6

A partir de la tabla, responde:

X	3.99	3.999	3.9999	3.99999	...	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	...	14.00003	14.0003	14.003	14.03

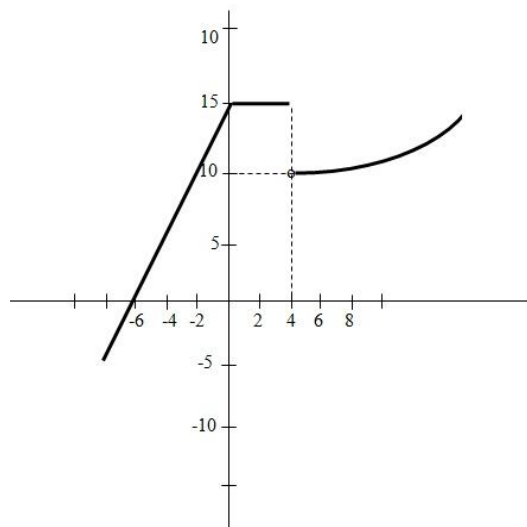
- a) ¿A qué número a se aproxima x ?
- b) ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?
- c) Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x
- d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en $x=4$



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tarea 7

Desde la función $f(x)$ que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:



- Elige un valor para la x , y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto
 - Cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99, 3.999, ... ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?
 - Cuando x tome, sucesivamente, los valores 4.1, 4.01, 4.001, ... ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?
 - Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x .
- e) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en $x = 4$

Tarea 8

Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)									

- Completa la tabla
- ¿A qué número a se aproxima x ?
- ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x .
- Di, si es posible, cuál es el límite de la función en $x = 0$

Tarea 9

Alba, una estudiante de primero de bachillerato, con la ayuda de una hoja de cálculo, ha ido sustituyendo valores en una función $f(x)$ y ha obtenido las dos primeras columnas de la tabla. Después ha construido dos columnas más de diferencias en valor absoluto

X	f(x)	$ 2,5 - x $	$ 3,5 - f(x) $
2,45	3,35000000	0,05	0,15
2,49	3,47000000	0,01	0,03
2,499	3,49700000	0,001	0,003
2,4999	3,49970000	0,0001	0,0003
2,49999	3,49997000	0,00001	0,00003
2,499999	3,49999700	0,000001	0,000003
...
2,500001	2,00000200	0,000001	1,499998
2,50001	2,00002000	0,00001	1,49998
2,5001	2,00020000	0,0001	1,4998
2,501	2,00200000	0,001	1,498
2,51	2,02000000	0,01	1,48
2,55	2,10000000	0,05	1,4

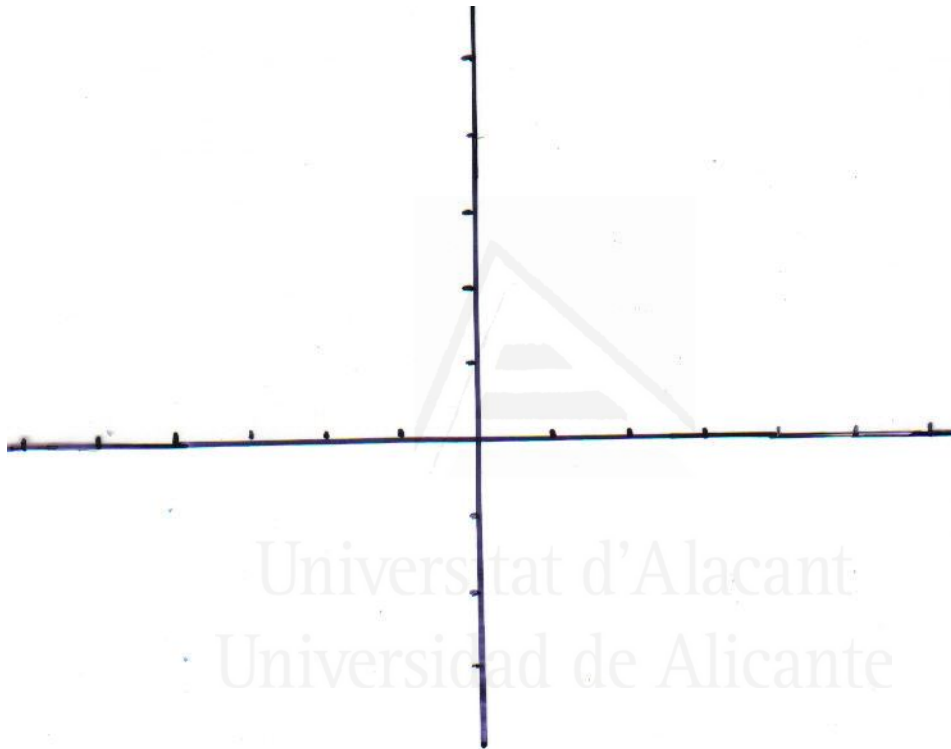
- a. ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 2,5 para que la diferencia $3,5-f(x)$, en valor absoluto, sea menor que 0,001?

- b. Con la información del apartado anterior, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x=2,5$?

Tarea 10

Si es posible, representa la gráfica de una función que cumpla las siguientes tres condiciones a la vez:

- a) $f(0) = 4$
- b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$
- c) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$





Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

ANEXO 2

Transcripciones de las entrevistas**Entrevista al EST7**

Inv: ¡Hola buenos días!

EST7: ¡Buenos días!

Inv: Te he estado buscando para hacerte una entrevista, por las respuestas que diste a lo largo de todo el cuestionario. Estamos en la tarea 1. Me podrías justificar alguna de las respuestas que das, por ejemplo a la pregunta a. ¿A qué número se aproxima x ?

EST7: Bueno, contesto que 3, porque cada vez, aunque dé más decimales, todos aumentan, y no pasan nunca de 3, y nunca llegan.

Inv: ¿Y el 15?

EST7: El 15, porque con la $f(x)$ también pasa lo mismo. Que aunque aumenta, no llega nunca a 15. Siempre se aproxima.

Inv: ¿Dónde estás mirando?

EST7: En los dos lados.

Inv: En los dos lados. Y ese movimiento de los dos dedos, ¿podrías explicarme...?

EST7: Vale. Cuando la x se acerca, cuando la x tiende a 3 desde los números pequeños, que es 2.9, 2.99, todos estos, no llega a 3. Por el otro lado pasa lo mismo. Empieza cerca de 3 y cuando te alejas del 3, la función se va alejando

Inv: ¿Me podrías contestar a la pregunta c? Describir el comportamiento de la función.

EST7: La función, el comportamiento de la función. Sí, que cuando la x vale..., tiene valores muy cerca de 3, la $f(x)$ tiende a 15.

Inv: ¿Eso parece claro, no?

EST7: Sí.

Inv: Y en la pregunta d. ¿Qué respuesta das?

EST7: 15.

Inv: ¿Al límite de la función?

EST7: 15.

Inv: ¿Me lo podrías escribir con otro tipo de notación?

EST7: Bueno, se podría poner como el límite de $x...$ (Figura 1)

$$\text{T1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 15$$

$$\text{T2}$$

$$y = 0 \begin{cases} x = 1.6 \\ x = 5.5 \end{cases}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -5$$

Figura 1. Respuesta del EST7 a las Tareas 1d, 2a, 2e

Inv: ¿Me lo podrías poner?

EST7: Sí.

Inv: Yo te dejaré una libreta. Si quieres añadir alguna cosa, lo añades en la libreta adjunta.

EST7: Vale.

Inv: Si necesitas bolígrafos, lápices,...

EST7: Este mismo.

Inv: Pon ahí T1. Un poco más formal.

EST7: ¿Más formal?

Inv: Formal en el sentido matemático del término.

EST7: Sí, sí, ..., a 3,...

Inv: Porque esa nomenclatura la utilizas en unas tareas, y en otras no.

EST7: Ya.

Inv: Vale. ¿Seguimos, cambiamos de tarea?

EST7: Vale.

Inv: Respondes a la primera pregunta eligiendo un punto de la gráfica. ¿Podrías explicarme como lo calculas?

EST7: Es el que más claro te dan, porque te lo marcan. Está con los puntos, ..., y también es él en que se diferencian las dos partes de la gráfica.

Inv: ¿Podrías elegir otro punto?

EST7: ..., um, ninguno sería exacto.

Inv: Por ejemplo, cuando la y es 0, ¿qué vale la x?

EST7: Pues, cuando la y es 0, vale o -1.6 más o menos, y también vale..., 5.5 (Figura 1).

Inv: Contestas a las preguntas b, y c. ¿Podrías describirme el comportamiento de la función?

EST7: Sí. ¿Te lo escribo, también?

Inv: Sí.

EST7: Que cuando se acerca a x igual a 2, por la izquierda, disminuye cada vez menos. Empieza disminuyendo muy acelerado y se va frenando, hasta que llega a x igual a 2, y después aumenta en forma de recta, que siempre tiene la misma pendiente.

Inv: ¿Podrías describir el comportamiento?

EST7: No sé a qué te refieres, pero bueno. Que cuando x tiende a 2 por la izquierda, ¿no?, el límite es -5 .

Inv: ¿Esa sería la pregunta b?

EST7: Sí.

Inv: ¿Me podrías contestar a la c, en los mismos términos?

EST7: ¿Serían las dos juntas? Cuando tiende por la izquierda hasta x igual a 2, el límite es -5 . Y cuando tiende por la derecha a x igual a 2, el límite es igual a -5 , también. Y es el punto en el que se diferencian las dos formas de la gráfica. Que no serían la misma ecuación.

Inv: ¿Pero, el límite en el punto 2, cual sería?

EST7: -5 .

Inv: ¿Podrías ponerlo un poco más formal, y podrías describir el comportamiento?

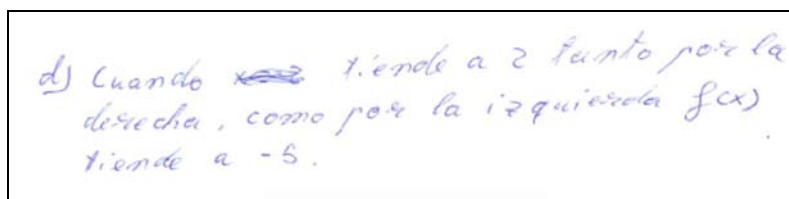
EST7: ... es tanto por la derecha como por la izquierda.

Inv: Cuando respondes por la izquierda estaríamos en la pregunta b , y cuando respondes por la derecha estaríamos en la pregunta c . Pero en el punto 2, ¿qué comportamiento tiene la función?

EST7: Que cuando x tiende a 2, la función tiende a -5 ... (Figura 2)

Inv: ¿Por qué en la tarea 1 respondes de forma clara al describir el comportamiento de la función, y en la tarea 2 te cuesta más?

EST7: Porque veo que estoy poniendo lo mismo que en las dos preguntas anteriores, e intento ver la diferencia.



d) Cuando ~~x~~ tiende a 2 tanto por la derecha, como por la izquierda $f(x)$ tiende a -5 .

Figura 2. Respuesta del EST7 a la Tarea 2d

Inv: Vale. Cambiamos de tarea, estamos en la tarea 3. Completas la tabla. Pienso que podríamos pasar de la tarea 3. ¿Pasamos?

EST7: Sí.

Inv: Vamos a situarnos en la tarea 4. ¿Puedes leer la respuesta que da a la pregunta a? ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5 para que la diferencia $1.5-f(x)$ en valor absoluto, sea menor que 0.001?

09:30

EST7: Como que x tiene que tener una diferencia respecto a 0.5 de 0.0001.

Inv: Bien. ¿Podrías decirme dónde miras, cómo lo observas?

EST7: Pues me está preguntando, por valores de x próximos a 0.5, me fijo en está

Inv: ¿Qué fila estás señalando?

EST7: La tercera, que habla de $0.5-x$.

Inv: $0.5-x$ en valor absoluto.

EST7: Y da toda una serie de valores y la de abajo pone $1.5-f(x)$.

Inv: ¿Y esa qué fila es?

EST7: La cuarta, que es exactamente lo mismo que te pone ahí

Inv: Que es lo que nos están preguntando.

EST7: Y en valor absoluto sea menor que 0.001, y... ¿Cómo?, espera un momento, dónde están los valores de x ... Vale, pues tienen que estar, para que sea menor que 0.001, de $1.5-f(x)$, me fijo en qué momento de los datos que te dan, eh, sí, disminuye, ya en el segundo, aquí, en el segundo dato de la cuarta fila, que ya es menor que 0.001. Y me fijo en x , en qué se diferencia, y que sería 0.5001, que está aquí.

Inv: ¿Cuánto has dicho que vale x ?

EST7: No, x vale 4 coma...

Inv: ¿4?

EST7: No, 0.4999.

Inv: ¿Miras a otro sitio para resolver el problema, o solo has mirado a esa columna que estás señalando?

EST7: He mirado también en el otro lado, en el segundo valor que me dan.

Inv: Más que decirme el segundo, di el valor que encabeza la columna.

EST7: Vale, pues 0.5001 , creo que es. Sí. Y con la función es lo mismo, la misma diferencia pero al revés, en negativo.

Inv: En valor absoluto.

EST7: Sí, bueno.

Inv: Vale.

EST7: Sí.

Inv: Estamos en la tarea 6. Pero no, podemos pasar. ¿Has mirado la tarea 6?

EST7: Sí.

Inv: Estamos en la tarea 7. Das una respuesta a la pregunta a , a la pregunta b , cuando nos aproximamos por la izquierda, a la pregunta c , cuando nos aproximamos por la derecha. ¿Podrías describirme el comportamiento de la función, $f(x)$, con relación al comportamiento de la variable x ?

EST7: Aquí contesto que de menos infinito a..., porque nunca se sabe por dónde empieza, hasta 0 aumenta hasta llegar a 15, $f(x)$ aumenta proporcionalmente hasta el 15. Y luego de 0 a 4, se mantiene con 15, con en el valor, y cuando llegamos a 4, tiende a infinito, bueno, a partir de 4 cuando nos dirigimos hacia el infinito. Y cuando x tiende a infinito, $f(x)$ también tiende a infinito.

Inv: Vale.

EST7: Sí.

Inv: Das una respuesta correcta a la pregunta e . ¿Qué podrías decirme del límite en el punto 4?

EST7: Que no es el mismo si te diriges desde la izquierda o desde la derecha.

Inv: ¿Y exactamente en el punto 4, que podrías decir?

EST7: La función, ¿cuándo vale 4?

Inv: La función no, del límite en $x=4$.

EST7: Que tienes que poner los dos, si pones uno no es correcto. Tienes que diferenciarlo cuando tiende por la derecha o cuando tiende por la izquierda, porque no sería correcto (Figura 3).

Inv: Vale. Volveré sobre estas tareas. Vamos a la tarea 8. ¿Tienes calculadora?

EST7: Sí.

Inv: Comprobemos alguno de los valores de la tabla.

EST7: ¿Los calculo?

Inv: Bien.

EST7: Empiezo por el primero.

Inv: ¿Cuál has señalado, como primero?

EST7: x es igual a -0.1 .

Inv: Bien, perfecto.

EST7: Me fijo en la función que nos dan, que cuando x vale menos de 0, hay que utilizar la primera que es $2x+1$. Entonces es $-0.2+1$, y es 0.8 .

Inv: Correcto, sigamos.

EST7: Con el segundo término, que es -0.01 , pues hacemos lo mismo, y es $1...$, pero aquí yo creo que lo hago mal. Bueno, aquí es 1 menos 0... voy a hacerlo con la calculadora. Bueno, dos por..., vale sí, eh..., sí me equivoqué (Figura 3).

The image shows a handwritten calculation on a white background. At the top left, 'T8' is written and underlined. Below it, the value $x = -0.01$ is written. The main calculation is $2 \cdot (-0.01) + 1 = 1 - 0.02 = 0.98$.

Figura 3. Respuesta del EST7 a la Tarea 8a

Inv: Te equivocaste, ¿qué quiere decir?

EST7: Que en vez de poner 0.98 , porque a 1 le restas 0.02 , le reste ve a saber, no le reste a 1 le reste a 0.1 .

Inv: ¿Podrías poner en la hoja los cálculos que terminas de realizar con la calculadora?

EST7: Sustituyo la x .

Inv: Calcúlame algún valor más, para ver.

EST7: Sí claro, porque a partir de aquí todos son errores, porque los ceros deberían ser nueves. En vez de poner que x vale -0.001 , y pongo 0.008 , tendría que ser 0.998 . Y así en todos. Bueno, y en el otro lado no sé si...

Inv: Comprueba alguno a ver.

EST7: Empecemos por este, a partir de 0 , cuando son positivos, hemos de utilizar la de abajo que es $-2x-3$. Y es 0.1 , menos dos por..., aquí ya está bien. Yo creo que están bien.

Inv: ¿Todos?

EST7: Sí.

Inv: Si intentáramos rectificar ese error, ¿en la pregunta c , a qué se aproxima la función?

EST7: A, tiende a 1 y a -3 . Pues, por la izquierda tiende a 1 y por la derecha tiende a -3 .

Inv: Bien. Respecto a la pregunta d , cuando describes el comportamiento de la función,..., a mí me gustaría saber qué hay en tu cabeza cuando respondes eso.

EST7: Cuando x tiende a 0 por la izquierda, $f(x)$ tiende a 0 , y cuando x tiende a 0 por la derecha, $f(x)$ tiende a -3 (lee lo que escribió en el cuestionario). Porque los datos que nos dan son los números cuando se acercan a 0 . Pues, lo defino a partir de ahí, y hablo del comportamiento que tiene $f(x)$, respecto a x cuando se va acercando a 0 .

Inv: En la tarea 6 respondes de una forma parecida

EST7: Cuando x tiende a 4 por la izquierda... (Lee lo que escribió).

Inv: Te centras en un número.

EST7: Sí, y explico el comportamiento del resto en ese punto.

Inv: Sí, pero en modo gráfico.

EST7: Hablo de todo. Sí.

Inv: En las tareas iniciales, también haces lo mismo.

EST7: Sí, porque en la gráfica se ven todos los puntos, y en el resto, cuando solamente te dan la tabla, es como que con la tabla también se centra en un punto, y como se va acercando hacia a ese punto.

Inv: ¿Podrías contestarme en la tarea 7 , a la pregunta d , como si nos estuviéramos centrando en un punto?

EST7: Bueno, pues, podríamos hablar de..., el punto $(0,15)$, por ejemplo del punto 4 , que cuando x se acerca a 4 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a 15 , y cuando x se aproxima a 4 por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 10 . Y con el punto 15 , $(0,15)$. Cuando x vale 0 . Voy a explicarlo bien. Cuando x tiende a 0 por la izquierda, $f(x)$ tiende a 15 , también pasa lo mismo por la derecha, y cuando x tiende a 4 por la izquierda, $f(x)$ vale 15 , y cuando x tiende a 4 por la derecha, $f(x)$ vale 10 . Sería lo que he dicho en las anteriores, lo que he hecho en las otras.

Inv: Me gustaría que escribieras las dos últimas cosas que has escrito. Las dos últimas descripciones.

EST7: Es la d .

Inv: Sí.

EST7: ... (Escribe en la hoja auxiliar las dos últimas descripciones). Esto queda mal,..., puedo tachar,..., tiende a 15 ,... (Figura 4).

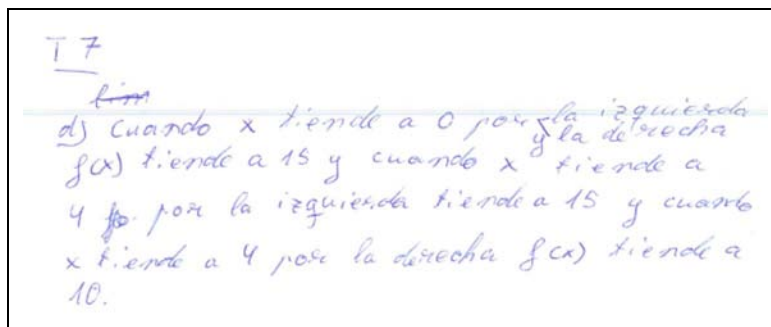


Figura 4. Respuesta del EST7 a la Tarea 7d

23:57

Inv: Pasamos a la tarea 9. ¿Podrías justificarme la respuesta que das a la pregunta a?

EST7: Alba, una estudiante de primero de bachillerato con la ayuda de una hoja de cálculo... ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x ... Bien, me fijo en los valores de esta columna, que es la tercera columna, no, la cuarta columna

Inv: La cuarta columna

EST7: Y busco el valor que ya vale menos que 0.001 . Que es el cuarto.

Inv: ¿Dime el valor inicial de la x ?

EST7: x es, pero ¿aquí o...?, te refieres en el cuarto, 2.4999 . Y te preguntan la diferencia, pues en ese punto la diferencia con respecto a 2.5 es de 0.0001 . Y eso ocurre..., por el otro lado también tiene que ocurrir... este punto la diferencia también es de 0.0001 y coinciden en valor absoluto. Que sería también en el punto 2.5001 .

Inv: ¿Qué diferencia es la que queremos que sea menor que una milésima?

EST7: Espera un momento. La de la x . Sí, la de la x es en la que buscamos la diferencia

Inv: ¿Sí? Lee el final de la pregunta.

EST7: Bueno, la diferencia de está es la de la $f(x)$, y nosotros damos la diferencia que tiene que tener la de la x .

Inv: Sí, pero, ¿en la cuarta columna, en qué momento la diferencia es menor que una milésima?

EST7: En 1.4998 .

Inv: ¿Eso es menor que una milésima?

EST7: No, la diferencia sí... Entonces es solamente en la de arriba, la diferencia sí. El único momento en que la diferencia es..., cuando x vale 2.4999 .

Inv: ¿Qué respuesta debíamos dar?

EST7: Cuando x vale 2.4999 . Es cuando se produce la diferencia de 0.001 . A partir de 2.4999 .

Inv: ¿Y por la otra parte?

EST7: Por la otra parte no pasará, porque no tienen los mismos números por los dos lados

Inv: Vale.

EST7: Sí.

Inv: Dediquémosle unos minutos a las tareas 5 y 10.

EST7: ¿Primero la 5 o la 10?

Inv: La que quieras.

EST7: Pues la 10.

Inv: ¿Cumple todas las condiciones?

EST7: Sí. La he mirado antes y he visto que las cumplía.

Inv: Mi pregunta sería, ¿puedes dibujar otra que no sea esa?

EST7: Sí, porque pueden haber muchas, porque tengo una borrada que también las cumplía.

Inv: Dibújalas en la hoja adjunta que tenemos aquí al lado. Disponemos de cinco minutos más.

28:07

EST7: Sí, el problema es que esto se va a llenar (estábamos en el bar, y era el recreo)

Inv: Bien.

EST7: Vale, pues. Cuando vale 0 tiene que valer 4. Luego, cuando x vale 3, $f(x)$ ha de tender a 1, tiene que pasar por 1. Y cuando vale -3 , tiene que pasar por 0, y con unir los tres puntos, más o menos debería dar. Se puede hacer a lápiz, o..., una sería esta por ejemplo.

Inv: Cambiamos de color (Figura 5).

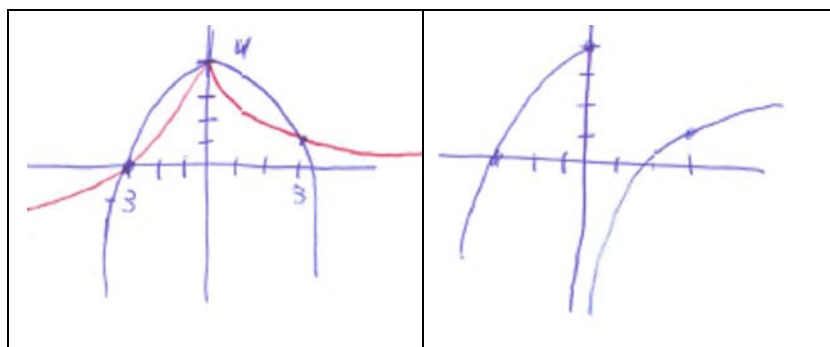


Figura 5. Respuesta del EST7 a la Tarea 10

EST7: Sí. (En el mismo gráfico hay dos funciones que cumplen las tres condiciones)

Inv: Las tres que has puesto, son continuas.

EST7: Sí.

Inv: ¿Podrías hacer alguna discontinua?

EST7: Sí.

Inv: Inténtalo.

EST7: ¿Con este color?

Inv: Sí, haz otra. Cambia el gráfico. Con esas que tenemos en azul y en rojo tenemos bastante.

EST7: ... (Figura 5)

Inv: ¿Quieres dibujar alguna más, o lo dejamos?

EST7: Se puede hacer, ..., así más o menos (Figura 6).

Inv: ¿En la última gráfica, esa línea discontinua que has puesto, que intenta ser?

EST7: Marca el punto en el que la gráfica deja de ser continua.

Inv: ¿Y qué punto es?

EST7: $x = 1$.

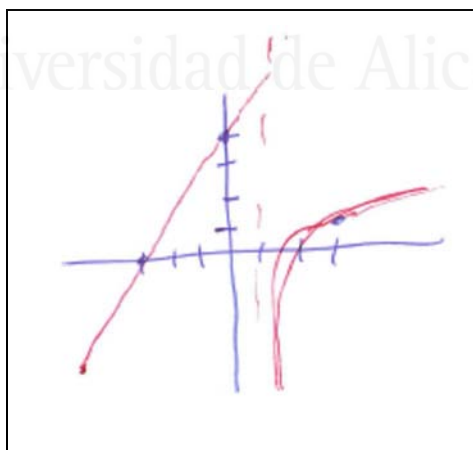


Figura 6. Respuesta del EST7 a la Tarea 10

31:40

Inv: Veamos si la tarea 5 cumple todas las condiciones.

EST7: ..., no, el primero no lo cumple.

Inv: El primero no lo cumple. ¿Podrías dibujar una gráfica que cumpliera el primero?

EST7: Sí, ¿solo el primero?

Inv: No, que cumpliera también el primero.

EST7: Vale, pues,... (Figura 7, izquierda)

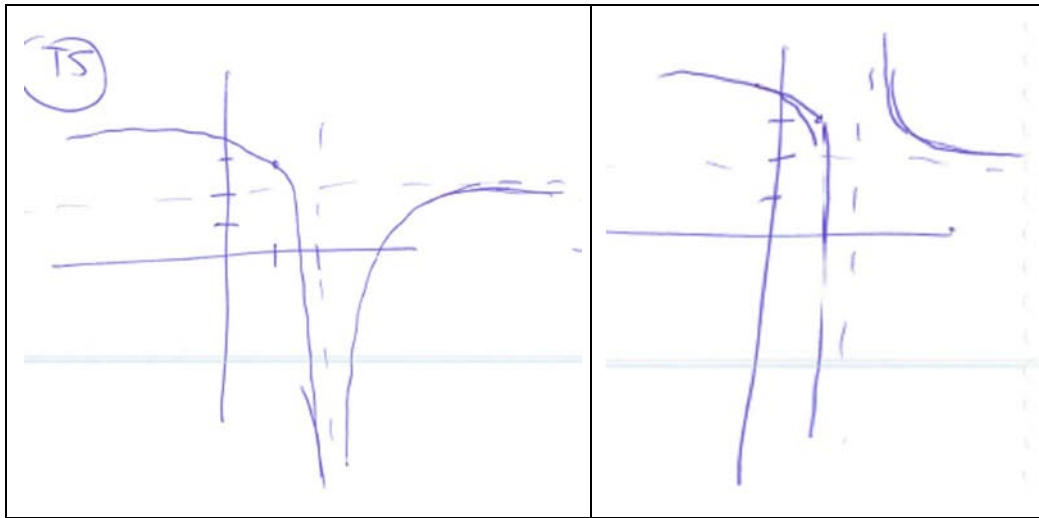


Figura 7. Respuesta del EST7 a la Tarea 5

Inv: Ahora sí que cumple la primera condición. ¿Podrías dibujarme alguna más?

EST7: Sí, se parecería un poquito, pero sí (Figura 7, derecha).

Inv: Estas marcando la primera condición.

EST7: Sí, la primera parte la haría igual, y la siguiente...

Inv: Vale, muchas gracias.

EST7: De nada.

Entrevista a la EST30

Inv: ¡Hola, buenos días y gracias por venir! Estamos en la tarea 6. Argumenta un poco porqué respondes 4 a la pregunta a.

EST30: Porque ese valor es al que se aproxima la función. Si la función toma los valores más, 3.99, 3.999, y así sucesivamente, por la izquierda y por la derecha 4.001, y así sucesivamente, cada vez van, se van acercando más a 4.

Inv: A veces esos movimientos de los dedos.

EST30: ¿No se pueden...?

Inv: No, no. No se pueden grabar, pero son muy buenos. Con los dedos está gesticulando y los dos dedos tropiezan. Arguéntame la pregunta b.

EST30: Pues, aquí lo que pasa es que, ..., van tomando valores, van tomando cada vez valores, pues por la izquierda se van acercando cada vez más a 5, a 15.5, mientras que por la derecha van tomando valores de 14.

Inv: Eso es lo que comentas en el apartado c.

EST30: Sí.

Inv: ¿Podrías leer el apartado c?

EST30: Cuando x se aproxima a 4 por la izquierda, $f(x)$ tiende a 15.5, y cuando x tiende a 4 por la derecha, $f(x)$ tiende a 14.

Inv: En la pregunta e, dices que no es posible, a la pregunta de: Decir si es posible, cuál es el límite de la función en $x=4$. ¿Por qué dices que no es posible?

EST30: Porque si tuviésemos la sexta te diría que tuviesen valor las dos ecuaciones, las dos cuestiones tuviesen el mismo valor nos daría que x tiende a dos valores posibles 15.5, y 14, porque serían, se podría decir que la función está definida a trozos, y a partir de valores que no llegan al 4, tendría unos valores que llegan a 15.5, y para otros números mayores que 4, toma valores mayores que 14.

Inv: ¿Por qué esa misma respuesta no la das en la tarea 7?

EST30: Espera un momento, ..., ¿te refieres al valor de 4?

Inv: Sí, sí cuando x se aproxima a 4.

EST30: Porque aquí, este se supone que está vacío, por tanto en este valor, en valores próximos sí que toma, pero justamente en ese valor está función no tiene, no tiene valor, en cambio, como aquí sí que está cogido, sí que tiene valor.

Inv: Sí, pero hablemos del límite.

03:16

EST30: Sí que existiría el límite por los dos lados, pero valdrían cosas distintas.

Inv: ¿Podrías escribirlo? Pon 7d.

EST30: ... El límite de la función por la izquierda es distinto al límite por la derecha, pues por 4⁻ toma valores que tienden a 15 mientras que para 4⁺ $f(x)$ tiende a 10... (Figura 8)

2. D (EST 30)
 El límite de la función por la izquierda es distinta al límite por la derecha pues por 4⁻ tomo valores que tienden a 15 mientras que para 4⁺ $f(x) \rightarrow 10$

Figura 8. Respuesta de la EST30 a la Tarea 7d

Inv: En la tarea 7 contestas de esa manera, mientras que en la tarea 8 dices que no existen. ¿En todos los sitios el argumento sería el mismo: “No existe límite pues los límites laterales son distintos”, cómo respondes a la tarea 7?

EST30: Sí.

Inv: ¿Esa sería la idea?

EST30: Los límites laterales son distintos, por lo tanto no existe un límite porque se supone que solamente se aproxima; por lo tanto, si hacemos más pequeño el intervalo, toma distintos valores, por lo tanto, no existe el límite.

Inv: Estamos en la T1. Justifica alguna de las respuestas. Dame una respuesta a la pregunta *c*.

EST30: Describe el comportamiento de la función, $f(x)$, con relación al comportamiento de la variable x . Pues cuando x se va aproximando cada vez más a 3, por la izquierda y por la derecha, $f(x)$ toma valores cada vez más próximos a 15... y se van intercalando; por ejemplo, aquí se añade 9, pero eso depende de la función.

Inv: De acuerdo. Estamos en la tarea 2. Respondes a la pregunta *a*, a la *b*, a la *c*, también respondes a la pregunta *e*, ¿podrías dar una descripción del comportamiento de la función?

EST30: La función, bueno en el intervalo menos infinito 2, decrece,

Inv: Pero en el límite, en el punto 2.

EST30: En este punto, en el punto 2.

Inv: Sí.

EST30: Pues, se trata de un punto, se puede decir que convergen dos tipos de funciones. Una podría ser una especie de parábola y la otra una recta, así que...

Inv: La parábola, ¿a qué valor converge?

EST30: La parábola converge, ¿pero $f(x)$?

Inv: Sí, sí $f(x)$.

EST30: -5 .

Inv: -5 . Y lo que podría ser una recta, ¿converge a?

EST30: También a $-5, \dots$, a ver, no, tiende a infinito, la recta tiende a infinito, pero, sería $f(x)$ paréntesis, ..., cuando x toma los valores 2.1.

Inv: Estamos hablando cuando x toma valores próximos al 2.

EST30: Sí, $f(x)$ tiende a -5 , por los dos, el límite es -5 , sí.

Inv: ¿Y aquí sí que dices que hay límite?

EST30: Sí.

Inv: ¿Por qué?

EST30: Porque, porque a pesar de ser un punto en el que dos ecuaciones tienen distinta forma, al comenzar el nuevo punto los valores se aproximan también a ese valor.

Inv: Pasemos a la tarea 3. Respondes a la pregunta *a*, completas la tabla, respondes a los apartados *b*, *c* y *e*. ¿Podrías describirme el comportamiento de la función?

EST30: Pues, cuando x tiende a 2 por la derecha, por la izquierda, $f(x)$ tiende a $1/4$, mientras que cuando tiende a 2 por la derecha, tiende también a $1/4$.

08:32

Inv: Y entonces, ¿podríamos decir qué cuando x tiende...?

EST30: Cuando x tiende a 2, el límite es igual a $1/4$.

Inv: Es igual a $1/4$. Pasemos a la tarea 4. Respondes a la primera pregunta, ¿me podrías decir donde miras para dar esa respuesta?

09:00

EST30: ... sería esta.

Inv: Sí.

EST30: ... de x de 0.5, para que los valores de $f(x)$..., pues 0.5 menos $f(x)$ tengo que mirar aquí, ..., me fije en la tabla.

Inv: Te fijaste en la tabla.

EST30: Cero con, es que no lo comprendo bien, los valores de $x, \dots, 1.5-f(x)$ en valor absoluto, ..., de 0.44, es que no entiendo.

Inv: Tenemos todo el tiempo del mundo.

EST30: Tendrían que estar en este intervalo 0.4999.

Inv: ¿En qué columnas estas mirando?

EST30: En estas creo que son.

Inv: Dime la x que vale en esa.

EST30: 0.4999.

Inv: ¿Cuántos nuevos pones?

EST30: Es que creo que lo puse así por..., a no, en esta, entonces son esta y esta, es que pensaba que era por..., creo que mire estas.

Inv: ¿Estas señalando esa, y esa?

EST30: Sí, porque..., porque, a ver, la diferencia sea, miré aquí.

Inv: Estas señalando la cuarta fila.

EST30: Sí, por tanto, para qué, pues me fijé y a partir de aquí estos ya son menores que...

Inv: Estas señalando la columna que tiene el cero coma.

EST30: 0.003, la columna...

Inv: La x .

EST30: La que tiene tres, 0.4999.

Inv: Tres nueves, correcto. ¿Y por la derecha hiciste lo mismo?

EST30: Sí.

Inv: ¿Cuándo respondes en la pregunta b , qué el límite es 1.5, donde estás mirando?

EST30: A $f(x)$, porque x está tomando...

Inv: ¿Estás mirando la segunda fila?

EST30: Sí.

11:24

Inv: Vamos a las tareas 5 y 10. Voy a preguntarte si puedes dibujar otra gráfica que cumpliera las mismas condiciones.

EST30: A ver, la 5.

Inv: Estamos en la tarea 5.

EST30: Sí, ¿puedes dejarme un lápiz?

Inv: Un lápiz no, tengo bolígrafos, pero no, dibuja en la hoja adjunta.

EST30: ¿Aquí?

Inv: En la auxiliar, pon T5.

EST30: ¿T5?

Inv: Sí, tarea 5.

EST30: De acuerdo.

Inv: He traído colores por si los necesitas.

EST30: $f(1) = 3$.

Inv: $f(1)$ es 3, estás marcando un punto.

EST30: Sí. El límite cuando x tiende a infinito de $f(x)$ es igual a 2. Por lo tanto, cuando x tiende hacia allá será cada vez más..., por tanto,...

Inv: Estás dibujando una línea discontinua.

EST30: Sí, se supone que es discontinua.

Inv: Bueno, de trazo fino,

EST30: Sí.

Inv: ¿A la altura de la x igual?

EST30: ¿Eh?, 2. Cuando x tiende a infinito, $f(x)$ es 2. El límite cuando $f(x)$ tiende a menos infinito.

Inv: ¿ x tiende a?

EST30: A menos infinito, $f(x)$ tiende, no, cuando x tiende a 2, me he liado,

Inv: Cuando x tiende a 2.

EST30: $f(x)$ tiende a menos infinito, por lo tanto, aquí hay otra y podemos dibujar infinidad de funciones, porque podríamos hacer por ejemplo, así mismo, o en vez de hacer para que siguiese así, una recta aquí, o que bajase (Figura 9).

Inv: Espera, espera, podrías coger el bolígrafo rojo y hacer otra versión, aunque sea sobre la misma (Figura 9,).

EST30: Se me ocurren muchas cosas, no sé, serían infinitas, no sé, podría ser una recta así, luego por ejemplo, esto se aproximaría cada vez más a 2, ¿no? A ver, límite cuando $f(x)$ tiende a 2, aquí se va haciendo cada vez más a 2, porque esto va siendo cada vez más pequeño, eso es menos infinito, por lo tanto, esto se va haciendo cada vez más...

Inv: Esa idea que has hecho con la mano sí, pero la ondulado.

EST30: No, ya, sí, sé a que me refiero, ya porque habría valores para x aquí, y aquí, vale.

Inv: Vale.



Figura 9. Respuesta de la EST30 a la Tarea 5

EST30: Ya lo comprendo.

Inv: Cambiamos de página.

EST30: Vale, mejor, es que la idea

Inv: Las ideas son buenas.

EST30: ... aquí,...

Inv: Esa idea que has hecho antes con las manos la daríamos por buena.

EST30: Y, por ejemplo, ahora se puede hacer aquí y no aquí, es que hay tantas posibilidades, porque solo tengo que poner esto y esto. Esto está en el 2 (dibuja un punto gordo, figura 9),...

Inv: Antes habías dado una versión que era buena, es que es difícil dibujar varias cosas en la misma gráfica. Cuando yo pido soluciones distintas hay cosas concretas que se repiten y otras que no. Lo que dices, tampoco sé cómo plasmarlo en este momento.

EST30: No sé, es que, aquí con el concepto de límite, este punto está claro.

Inv: Ese punto está claro.

EST30: Con el concepto de límite, se sabe que se aproxima, se pueden tomar varias

Inv: Intenta poner alguna solución modificando el apartado b .

EST30: Puede ser una asíntota así como he puesto antes, también lo que he puesto aquí, se va acercando cada vez más.

Inv: Pon eso, sí, pon esa idea.

Voz: A menos cuarto, vale.

Inv: Me cago en la leche.

EST30: Esa es otra opción, y sí ya, pero...

Inv: Y pon algo distinto a la derecha.

EST30: Aquí.

Inv: A la izquierda, perdón.

EST30: Aquí.

Inv: Sí, alguna versión distinta a la que has dibujado, que en el fondo es parecida a la que tienes en la hoja.

EST30: Sí.

Inv: Pon en rojo, alguna posibilidad más, algo distinto a lo que has dibujado en azul. Que putada que nos tiren.

EST30: Sí... pues f tiende a 2, esta no valdría por eso, x tiende a 2, $f(x)$ tiende a menos infinito, por lo tanto cuando va aproximándose así, tiene que ser, tenemos aquí, no sé, de momento no sé me ocurre otra cosa, sería poner aquí una recta, si pusiésemos aquí $f(x)$, un punto aquí, se podría poner una recta así, y así, pero no puede ser.

Inv: Vale, lo dejamos.

EST30: Sí.

Inv: Una lástima que nos tiren, yo había contado, nos están tirando. Muchas gracias.

EST30: A ti. ¿Ya está? 18:30

Entrevista a la EST33

Inv: Hola bon dia!

EST33: Bon dia!

Inv: Estem en la tasca 1, respons a totes les preguntes. Voldria que m'explicares la resposta a la pregunta c.

EST33: Jo he suposat que entre el 2.9 i el 3.01, ací estaria el 3.

Inv: Sí.

EST33: I si ací està el 3, ací estaria el 15.

Inv: Sí.

EST33: Eh, quan x és igual a 3, el límit és 15.

Inv: Tu eres l'estudiant 33, estem en la tasca 1, podries escriure el que acabes de dir?

EST33: Amb lletres? ... no sé com dir-ho, eh ...

Inv: El que acabes de dir.

EST33: Ho escric en castellà (Figura 10).

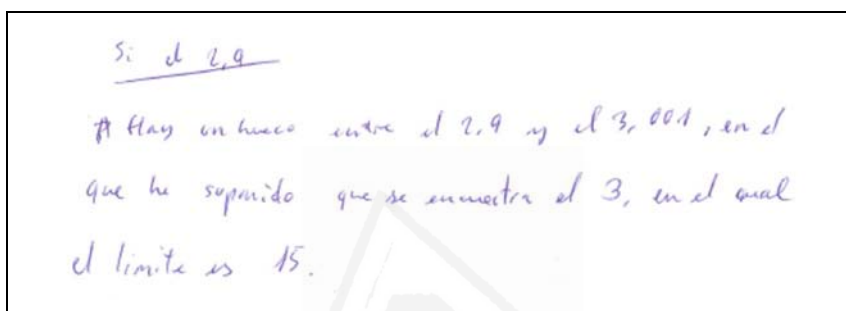


Figura 10. Resposta de la EST33 a la Tasca 1

Inv: No tinc cap problema, ho entenc tot.

EST33: Eh, ...

Inv: Sí, torna a dir el que has escrit.

EST33: Jo he suposat que en el lloc d'ací està el 3.

Inv: Sí, sí, això és el que has escrit.

EST33: Llavors, el que estaria ací seria el 15.

Inv: El 15, i?

EST33: I això, no sé.

Inv: Intenta fer una frase amb el que has escrit.

EST33: Que per a $f(x)$, eh, per a quan $f(x)$ és 15, x és 3.

Inv: D'acord ..., estem en la tasca 2. Contestes algunes preguntes, podries descriure el comportament?

EST33: Eh, ..., doncs que en, quan x és igual a 2, no hi ha cap, no hi ha...

Inv: On estàs mirant?

EST33: Com?

Inv: On estàs mirant?

EST33: Que vols que et diga?

Inv: On mires per contestar la pregunta b?

EST33: Ací, és que vols que et conteste a la pregunta b.

Inv: Sí, la b, o la c, o la d.

EST33: Bo, eh!

Inv: I que em digues on mires.

EST33: Ací.

Inv: Què assenyaales?

EST33: ...

Inv: La gràfica.

EST33: Si, la gràfica. Doncs, quan la x val 2.9, eh, $f(x)$ s'aproxima a 2 per l'esquerra.
 Inv: $f(x)$ s'aproxima a?
 EST33: A 2 per l'esquerra, ..., hum, ..., clar jo és que vaig posar que 1.999 s'aproxima a 2 per l'esquerra.
 Inv: Però, qui s'aproxima a 2?
 EST33: 1.9
 Inv: Però eixa quina variable és?
 EST33: La variable x .
 Inv: La x , i la funció, a què s'aproxima?
 EST33: Eh, s'aproximarà ... a -5 .
 Inv: A -5 , i en l'apartat c ?
 EST33: S'aproximarà també 2.1, ..., a -5 , també.
 Inv: A -5 , i en l'apartat d , que diries ara?
 EST33: ..., doncs que hi ha un límit, que hi ha límit en -5 .
 Inv: Intenta explicar ho una mica més.
 EST33: Quan x és igual a 2, per l'esquerra i per la dreta,
 Inv: S'aproxima a 2.
 EST33: Si, s'aproxima, la variable y s'aproxima a -5 .
 Inv: La funció s'aproxima a -5 .
 EST33: Sí.
 Inv: Estem en la tasca 3. Necessitaria que m'explicares alguna cosa del que estàs fent?
 EST33: A veure.
 Inv: Tu completes la taula.
 EST33: Sí.
 Inv: En la pregunta b , a quin número s'aproxima x ?
 EST33: He posat que al 2 per l'esquerra, perquè sempre és 1.999.
 Inv: Sí, a quin número s'aproxima x ?
 EST33: A 2.
 Inv: A 2. Anem a la pregunta c , a quin número s'aproxima $f(x)$?
 EST33: A 0.25
 Inv: A 0.25. I en la pregunta d , descriure el comportament, diries que...
 EST33: Que el límit de 2 és 0.25.
 Inv: No, no, quan, quan x .
 EST33: Quan x és 2.
 Inv: Tendeix a 2.
 EST33: La funció tendeix a 0.25.
 Inv: La funció tendeix a 0.25. Mira el que has posat en la pregunta e .
 EST33: Di, si és possible el límit de la funció en $x = 2$, eh, jo he posat que és 15.
 Inv: I ara, què hi posaries?
 EST33: Que és 0.25.
 Inv: Posa ho ahí.
 EST33: Pose T3 (Figura 11).
 Inv: D'on pot eixir el 15?

The image shows a handwritten note on a white background. At the top left, the letters 'T3' are written in blue ink and circled with a blue oval. Below this, the mathematical expression $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0.25$ is written in blue ink. The 'x' in the denominator of the limit is written as $x \rightarrow 2$.

Figura 11. Resposta de la EST33 a la Tasca 10

EST33: No ho sé, igual ho vaig..., no ho sé.
 Inv: Estem en la tasca 6. A què s'aproxima x ?
 EST33: Eh, la x s'aproxima al 4.
 Inv: Al 4, i la $f(x)$, a què s'aproxima?
 EST33: Eh, al 14.
 Inv: On estàs mirant per a dir que a 14?
 EST33: ...
 Inv: Estàs assenyalant els punts suspensius, assenjala'm alguna cosa més.
 EST33: A 14 per la dreta, i a 15 per l'esquerra.
 Inv: A molt?
 EST33: A 15, no?... no sé, a 15. S'aproxima a 15.
 Inv: Mira els números, mira eixe número, mira eixe número, mira'ls.
 EST33: A 15.5.
 Inv: Aleshores, a quin número s'aproxima la funció?
 EST33: A 15.5, no? ... quan x és 4, $f(x)$ s'aproxima a 15.5, ..., o a 15.
 Inv: El que pregunta sóc jo.
 EST33: No sé, jo diria que a 15.5.
 Inv: On estàs mirant?
 EST33: Aquí, no passa de 15.5.
 Inv: I si canviem de lloc?
 EST33: A 14. A 14.
 Inv: Aleshores,
 EST33: A 14, uf, quin embolic.
 Inv: A què s'aproxima la funció?
 EST33: A 14, jo crec que a 14, jo vaig posar 14, perquè ací ja va pujant, cap a dintre va baixant
 Inv: Canviem de tasca. Si en algun moment vols tornar en darrera ho podem fer. Contestes a la pregunta a , em podries donar una resposta a la pregunta b ?
 EST33: Eh, ..., hum, ..., a 3.9, ..., a 4.
 Inv: Qui s'aproxima a 4?
 EST33: $f(x)$, el x .
 Inv: El x . A què s'aproxima la funció?
 EST33: A 4, també, ..., a veure, quan x és 3.9, la funció s'aproxima a, ..., a 4, no? Quan ací és 3, s'aproxima a 4, ..., no sé, jo crec que és això.
 Inv: Estem en la tasca 8. A què s'aproxima x ?
 EST33: Em, a 0.
 Inv: A què s'aproxima la funció?
 EST33: Em, a ..., a 3, ..., no sé, és que m'arme un embolic.
 Inv: És que ahí tens coses que estan molt bé, i altres que no estan tan bé.
 EST33: No sé.
 Inv: Estan mesclades....: Vols que mirem la taula? A què s'aproxima la x ?
 EST33: Ací, quan és -0.001 , $f(x)$ s'aproxima a 1.5, ..., i ací quan és positiu, s'aproxima a -3 .
 Inv: A molt?
 EST33: A -3 .
 Inv: En el full havies posat el 3 positiu, i ací negatiu.
 EST33: M'embolique.
 Inv: Estem en la tasca 9. Podries explicar-me l'interval que marques en la pregunta a , què vol dir?
 EST33: Ací pose que quan x és 2.4999.
 Inv: Sí.
 EST33: Eh, fins el 2.5.
 Inv: Sí.
 EST33: Per a que siga menor que 0.001, ha de ser des d'ací fins ací.
 Inv: Què vols dir amb eixe segon número? De 2.4999.
 EST33: Fins a 2.5, ..., hi ha una coma.

Inv: En la pregunta b, per què dius que no existeix el límit?

EST33: Eh?

Inv: On mires per a dir això?

EST33: Eh, ..., eh, ..., perquè no sé, perquè no té límit. Quan $f(x)$ és 2.1, crec que no me'n recorde, eh, ..., no sé, no me'n recorde.

Inv: D'acord. Moltes gràcies.

14:10



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Entrevista a la EST35

Inv: ¡Hola, Buenos días! Muchas gracias por venir. Vamos a trabajar sobre la tarea 10 y porqué dejas en blanco la pregunta 2d.

EST35: Vale.

Inv: Estamos en la tarea 10.

EST35: ¡Uf!

Inv: Si quieres hacer alguna anotación, la puedes hacer en la hoja auxiliar.

EST35: Vale. Puse que no era posible, porque me pareció extraño que según la había dibujado yo, que me diesen dos valores en x y no..., y no..., y luego me diesen solo uno en el eje con x y con y , no sé si me explico. Que en el mismo eje tenía dos, y en el otro solo tenía uno, y no sabía cómo dibujar la parábola, cómo iba a ser, creo que era como lo tenía al principio.

Inv: Inténtalo de nuevo, pon T10 de tarea 10.

EST35: Sí..., ¡ay!...,

Inv: Has puesto tres puntos.

EST35: Sí. He puesto tres puntos. Sí, ¡je, je, je! Es que son los apartados a , b , y c . Lo que yo interpreto.

Inv: ¿Lo que tu interpretas?

EST35: Si, ¡je!, otra cosa es lo que sea.

Inv: ¿El apartado a , cómo lo interpretas?

EST35: Que cuando f , cuando x es 0, y es 4.

Inv: El segundo apartado, ¿cómo lo interpretas?

EST35: Que cuando x tiende a 3, la imagen, la y , sería 1. Y el tercer apartado, cuando la x tiende a -3 , ¡eh!, ¡eh!, y tiende a 0. Entonces me quedaría así..., ¡je, je, je!, más o menos (Figura 12, izquierda)

Inv: Después de la gráfica que terminas de hacer, ¿hay alguna solución más?

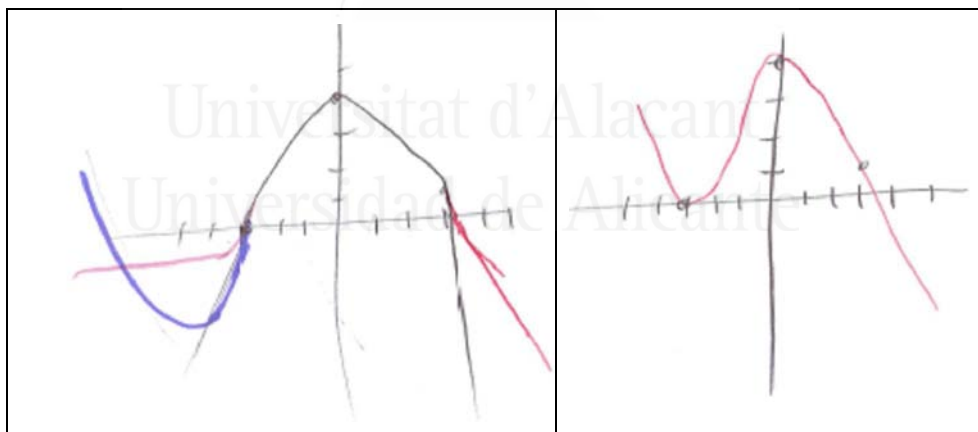


Figura 12. Respuesta de la EST35 a la Tarea 10

EST35: ..., ¡eh!..., podría ser que fuese así también, ¿no? O no tiene nada que ver. ¡Je!

Inv: ¡En otro gráfico distinto, por favor! O si quieres hacerla en el mismo, tengo colores.

EST35: Vale. Pues igual, pero que fuese así.

Inv: En este momento, cuando dices igual, ¿te refieres a la anterior?

EST35: A la anterior, pero con azul, que indica que la gráfica viene de antes, o podría ser...

Inv: Cambiemos de color.

EST35: Podría ser así, que viniese de menos infinito, y que luego siguiese (Figura 12, izquierda)

Inv: ¿Qué color utilizas ahora?

EST35: El rosa.

Inv: El rosa. ¿Y los dos colores que estás añadiendo, los estás añadiendo a la izquierda de la función?

EST35: Sí. A la derecha, creo que también se podría.

Isabel: Ella parla amb valencià, i amb alemany.

Inv: Tengo más colores, pero, ¿podrías poner alguna variante a la derecha?

EST35: ¡Uf!, poder, puedo,..., así (Figura 12, izquierda)

Inv: ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

EST35: Infinitas.

Inv: Infinitas.

04:18

EST35: ¿Y por qué puse que no era posible? ¡Je!, ¡je!, ¡je!

Inv: No sé porque lo pusiste. En todas estás manteniendo la estructura central. ¿Esa estructura la podrías modificar?

EST35: ¡Uf!,...

Inv: Entre esas infinitas que hay, ¿podrías dibujar una en la que modificaras la estructura central que estás poniendo?

EST35: ¡Uf!, sí.

Inv: Cambia de gráfico.

EST35: ..., ¡uf!

Inv: Estás marcando la primera condición.

EST35: Si, ahora marco la segunda.

Inv: Lo que tu entiendes por la segunda.

EST35: Sí, ¡je!, ¡je!, ¡je!,..., ¡ay!

Inv: ¿Y ahora estás marcando?

EST35: Lo que yo entiendo por tercera, ¡ja!, ¡ja!

Inv: No, muy bien.

EST35: Cojo otro color.

Inv: El color que quieras. Algo que sea distinto a la estructura central que has mantenido.

EST35: ... (Figura 12, derecha).

Inv: Hasta ahí, estamos haciendo más o menos la misma de antes, sí, la uve invertida.

EST35: Sí, entonces...

Inv: Has modificado un poco la parte izquierda, pero la pregunta que te estaba haciendo es, ¿si entre las infinitas soluciones, puedes modificar la parte central?

EST35: ¡Uf!

Inv: No tengo prisa, y está saliendo muy bien.

EST35: ¡Je!, ¡je!, ¡je!

Inv: Y nos estamos riendo también, muy bien. Y hasta tendré tiempo para ver a la otra persona que quiero entrevistar.

EST35: El 3 igual, la segunda condición (Figura 13).

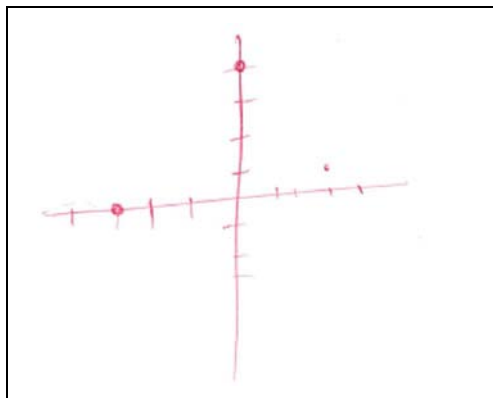


Figura 13. Respuesta de la EST35 a la Tarea 10

Inv: La segunda condición.

EST35: La primera para mí, y dibujo la tercera condición para mí.

Inv: Algún tipo de solución que no tenga...

EST35: Esa forma de... Podría no ser posible,..., hombre podría, no, podríamos coger solo esta parte de la gráfica, ¡ya! pero no, no puede ser, porque es la..., toda la función sería eso, no, para mí no puede tener otra, tiene infinitas soluciones, pero tendría que tener ese recorrido.

Inv: ¡Muy bien! Vamos a la tarea 2.

EST35: Vamos a la tarea 2, sí.

Inv: Respondes completamente a la tarea 1, a la tarea 3, y dejas en blanco la descripción del comportamiento de la función en la tarea 2. ¿Qué hay en la tabla que haga que respondas y que hay en el gráfico que hace que no respondas? ¿Entiendes mi pregunta?

EST35: Sí, sí, no sé.

Inv: También respondes en el apartado c, cuando vuelve a haber una tabla.

EST35: No sé porqué lo hago.

Inv: Entonces, ¿podrías darme una respuesta al apartado d?

EST35: Sí, que cuando, espérate.

Inv: No tenemos prisa.

EST35: ¡Je!, ¡je!, ¡je!, a ver un momento,..., ¡eh!, cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, $f(x)$ tiende a -5 , y cuando x se aproxima a 2 por la derecha tiende a más infinito.

08:14

Inv: ¿Tiende a?

EST35: A más infinito, sí, tiende a más infinito, que en la gráfica es 10, ¡je!, ¡je!, no continúa más, ¿no, o sí?

Inv: ¿En qué punto de la x estamos calculando el límite?

EST35: En 2.

Inv: En 2. Y en dos me has dicho que por la derecha.

EST35: No tiende a más infinito, no, un momento,..., también tendería a -5 . ¡Eh!, cuando x tiende a 2 por la izquierda, la función tiende a -5 , y cuando x tiende a 2 por la derecha, x se aproxima, $f(x)$ se aproxima a -5 , también.

Inv: Que en el fondo es lo que has escrito en la respuesta a la pregunta e.

EST35: Sí, sí.

Inv: Lo que pasa es que ahora lo estamos diciendo de palabra.

EST35: Sí, sí.

Inv: ¿Vale?

EST35: Sí...

Inv: ¿Quieres que miremos la tarea 5?

EST35: ¿La tarea 5, la dibujo?

Inv: Pon T5.

EST35: ¿Vas a pedirme más soluciones?

Inv: No lo sé.

EST35: No, pero si la pregunta va a ser esa,..., a ver, para mí, la primera condición es que cuando la f de 1, ¡uf!, la x es 3. Estoy mirando, ¡je!, ¡je!, ¡je!, estoy cambiando lo que había dicho aquí, en la tarea 10, pero bueno, sigamos, eso ya está pasado (Figura 14)

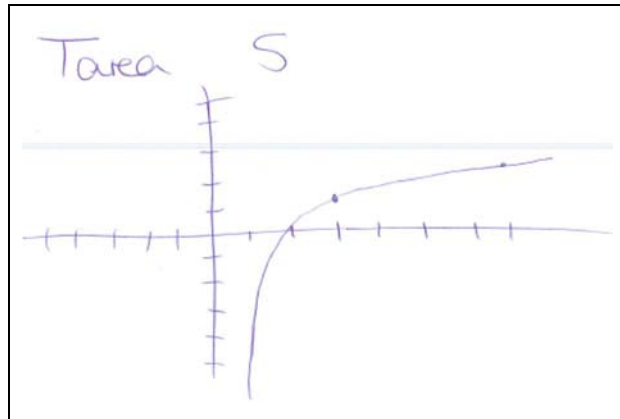


Figura 14. Respuesta de la EST35 a la Tarea 5

Inv: ¿Cuándo la x es cuánto?

EST35: 3, su imagen es 1, y luego, ¡eh!, cuando x tiende a más infinito. ¡Eh!, sería 2, su imagen, a ver, y luego, cuando x es 2, se aproxima a 2, tiende a menos infinito, sí, la dibujare como la he dibujado ahí, ..., ¿no?

Inv: Muchas gracias.

11:50



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Entrevista a la EST38

Inv: ¡Hola, buenos días!

EST38: ¡Hola!

Inv: Estamos en la tarea 3. Completas la tabla, respondes a qué se aproxima x , a qué se aproxima $f(x)$, describes el comportamiento, e indicas el límite. Vamos, respondes a todas las preguntas. Coméntame un poco la respuesta d .

EST38: ¿La d ?

Inv: Sí.

EST38: Hum,..., según la x se va aproximando a 2, la $f(x)$ se aproxima a 0.25.

Inv: Pasemos a la tarea 1 o a la 2, porque en las tareas 1 y 2 das respuestas distintas a la que has dado. Estamos en la tarea 1. ¿Podrías describir el comportamiento de la función?

EST38: Pues lo mismo, según la x va acercándose a 3, entonces la función de x a 15. ¿Está bien o no?

Inv: Pasemos a la tarea 2. ¿Podrías darme la misma respuesta?

EST38: Hum, hum, según la x se va acercando a 2, sí, no, sí, entonces la $f(x)$ va aumentando poco a poco, creo, sí, no sé,..., vale, espera.

Inv: No tenemos ninguna prisa, estamos cómodos, el sitio es agradable.

EST38: Los valores de x van aumentando todo el tiempo, pero $f(x)$ va disminuyendo hasta -5 , y después va aumentando.

Inv: Sí, pero cuando estamos pidiendo el comportamiento de la función nos estamos centrando...

EST38: En el 2. Sí, y la función de x se acerca a -5 .

Inv: Se acerca a -5 ... Vamos a fijarnos en las tareas 6, 7, y 8, en la descripción del comportamiento de la función. En la tarea 6 das una respuesta, ¿podrías leerla?

EST38: Los límites laterales de x cuando se va aproximando a 4 son $f(x) = 15.5$ y $f(x) = 14$.

Inv: ¿Podrías matizar un poco más? Cuando dices que se aproxima a 4, ¿podrías matizar un poco más?

EST38: ¿Matizarte?

Inv: Algo parecido a la respuesta que das en el apartado d .

EST38: Pues que ¡uy!, cuando x se acerca a 4, entonces las funciones son, no sé, son 15.5 y 14.

Inv: ¿Dónde estás mirando, para decir 15.5?

EST38: Aquí a la función.

Inv: Ese aquí, ¿cómo se podría decir? Señala ese aquí de una forma un poco más matemática.

EST38: El punto 15.5, no sé. Hay una discontinuidad.

Inv: Sí, bien, sí. Hay una discontinuidad, pero de qué forma distingues el 15.5 del 14.

EST38: De qué hay dos puntos en el 4, dos únicas funciones, no lo sé.

Inv: Pues das una muy buena respuesta en el apartado d .

EST38: ¡Je!, ¡je!, cuando x tiende a 4 por el lado izquierdo.

Inv: Por el lado izquierdo, ¿la $f(x)$ tiende a...?

EST38: A 15.5, y cuando tiende a 4 por el lado derecho, a 14.

Inv: En la pregunta d respondes al límite por la derecha y al límite por la izquierda. ¿Qué me puedes decir del límite en el punto $x = 4$?

04:39

EST38: Hum,..., que hay dos soluciones, no sé, que hay dos funciones ahí.

Inv: Pasemos a la tarea 7. ¿Podrías describir el comportamiento de la función?

EST38: Que el valor de x va aumentando hasta el punto $(0, 15)$, ese es el valor de la $f(x)$.

Inv: Tú haces una descripción global.

EST38: Si, y después...

Inv: A mí me interesaría una descripción como haces en la tarea 6, o como después vuelves a hacer en la tarea 8 (que después te pediré que me aclares) y aquí estás haciendo una descripción global. A mí me interesaría saber porqué en la tarea 6 das una respuesta de la forma que la das,

porqué en la 8 das una respuesta parecida, y después en la 7 que es en modo gráfico, describes toda la función que ves en el dibujo, en la gráfica.

06:07

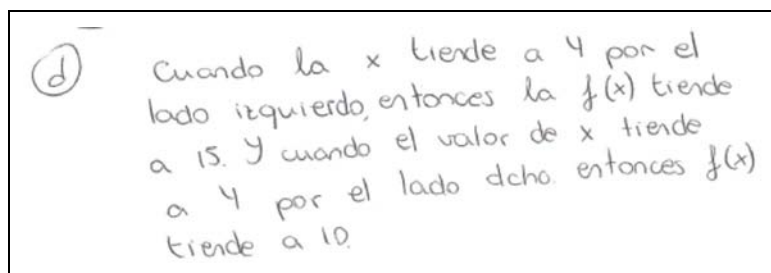
EST38: Sí, porque es un gráfico, que va a describirla. Ni idea, cuando x tiende a 4 por la parte izquierda, la $f(x) = 15$; pero cuando tiende a 4 por la derecha, entonces la $f(x)$ tiende a 10.

Inv: Es decir, ¿en este momento que respuesta me darías a la pregunta e?

EST38: ¿A la d?

Inv: Bueno, a la d y a la e.

EST38: Pues que, cuando la función,... a 4... (Figura 15)



d) Cuando la x tiende a 4 por el lado izquierdo, entonces la $f(x)$ tiende a 15. Y cuando el valor de x tiende a 4 por el lado dcho. entonces $f(x)$ tiende a 10.

Figura 15. Respuesta de la EST38 a la Tarea 7d

Inv: ¿Y darías una respuesta a la pregunta e?

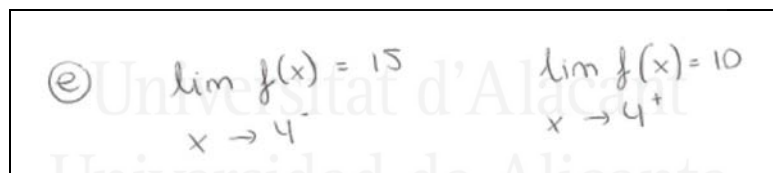
EST38: ¿Así?

Inv: En el cuestionario hay uno, y ahora das dos. Y cuando x tiende a 4, ¿qué me podrías decir del límite?

EST38: ¿Eh?, el límite cuando...

Inv: El límite, cuando x tiende a 4. Tú hablas de la derecha, de la izquierda, pero, ¿qué me puedes decir del límite cuando x tiende a 4?

EST38: Que es igual, que tiene dos soluciones laterales (Figura 16).



e) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 15$ $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 10$

Figura 16. Respuesta de la EST38 a la Tarea 7e

Inv: Laterales, una por la derecha y otra por la izquierda. Vamos a las tareas 5 o 10, la que prefieras. Quiero ver si eres capaz de encontrar alguna solución distinta a la que has hecho.

EST38: Hum, esto... creo que ya sí.

Inv: ¿Prefieres el 10?

EST38: Sí, espera, ¿puedo mirarlo?

Inv: Sí, sí, y, si quieres, algún papel para hacer una prueba. Haz las pruebas que quieras, y después, no tenemos prisa, vamos bien de tiempo.

EST38: Pues, yo había pensado, ¿puedo decirlo ya?

Inv: Ahí no, en la otra hoja, en el papel que te dado. ¿Quieres colores?, el otro día estuve en el Enric Valor y me hicieron falta colores.

EST38: Vaya, pues, la función pasa por el $(0,4)$, y si el límite iba por -3 , entonces esto podría ir así, es lo que pensé. Pero no sé si estaba bien. Cuando x tiende a 0, es que no sé, un momento por favor,..., hum, hum,..., esto, no, no sé, entonces pensé que podría ser así, pero no sé si está bien,..., ¡jo!, no me gusta el tema de límites, prefiero otra cosa.

Inv: Pues las respuestas que has dado de momento están muy bien. En la gráfica, hay algún pequeño error. Pon ahí, T10.

EST38: T10.

Inv: Sí, de tarea 10. Pasa la gráfica a limpio. ¿Ahí estás marcando el...?

EST38: El 4 (Figura 17).

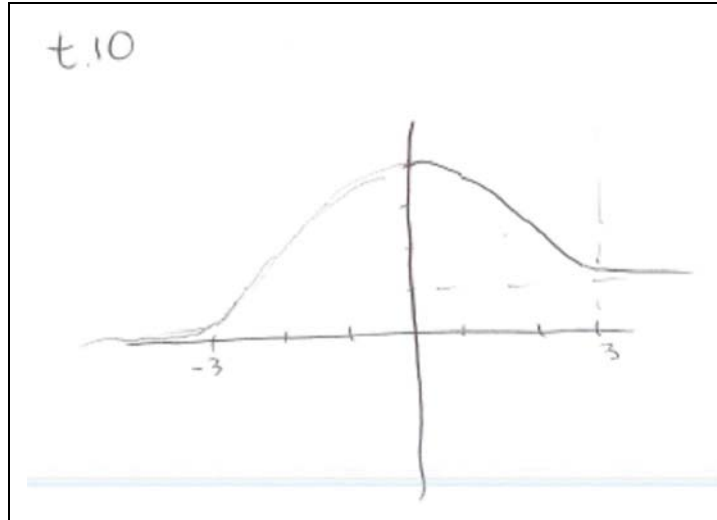


Figura 17. Respuesta de la EST38 a la Tarea 10

Inv: El $(0,4)$ que es la primera condición.

EST38: Que tiene que pasar por ahí, sí o sí. Y esto, ¡jo!. Bueno vale,..., esto no estaría bien, ¿no? ... ¡jo!

Inv: Yo te respondo, al final, a cualquier pregunta que me hagas.

EST38: Vale, hum, venga,...

Inv: Vale. Muchas gracias.

12:54

Entrevista al EST55

Inv: ¡Buenos días!

EST55: ¡Hola!

Inv: Quiero que mires las tareas 1, 2 y 3.

EST55: ...

Inv: En la tarea 1 respondes a todas las preguntas.

EST55: Sí.

Inv: En la tarea 3 respondes a todas las preguntas. Completas la tabla, el número a que se aproxima x , el número al que se aproxima la $f(x)$, describes el comportamiento de la función, y calculas el límite. ¿Por qué en la tarea 2 no la resuelves de la misma forma?

EST55: ...

Inv: En la tarea 2 respondes a la pregunta a , y a la b .

EST55: Sí.

Inv: ¿Por qué a la c no, o por qué a la d no?

EST55: ¡Uf!, me hice un lío..., es que, a ver, el problema es que en la gráfica no lo veía claro, al ser una recta, no lo veía tan claro.

Inv: ¿Pero estamos hablando en las cercanías del 2?

EST55: En las cercanías del 2.

Inv: A la derecha del 2, pero para valores cada vez más a su derecha.

EST55: Sí, a la derecha del 2, que no lo veía claro en la función, no, mejor lo veo por la izquierda, no sé por qué, pero no...

Inv: Tú respondes que a $1.9, 1.99, 1.999, \dots$, es decir, cuando estamos a la izquierda de la función, dices que tiende a -5 . ¿Cómo lo consigues, qué haces, dónde miras?

EST55: La verdad es que estaba mirando por ahí, pero al ver la escala, tampoco, es que era una pregunta muy aguda, para contestar a algo..., la escala tampoco es, va de cinco en cinco, y tampoco es, tiende a -5 , no lo sé.

Inv: ¿Y por la derecha, en el $2.1, 2.01, 2.001, \dots$, a qué tiende la función?

EST55: Estaría en lo mismo, también a -5 .

Inv: Y si te pidiera que describieras el comportamiento de la función, ¿Qué dirías?

EST55: Pues, para..., cuando x tiende a 2, la función se aproxima a 5.

Inv: ¿A?

EST55: A 5, ah, a -5 , perdón.

Inv: A -5 , bien. Te resulta distinto, o más extraño verlo en una tabla, como en las tareas 1 y 3 en los que aparece una fórmula o una tabla los resuelves perfectamente. ¿Te causa algún problema el gráfico?

EST55: El gráfico sí, porque en clase no hemos trabajado tanto con gráficas.

Inv: ¿Habéis trabajado más con tablas?

EST55: Si con alguna tabla.

Inv: Te voy a hacer las mismas preguntas en las tareas 6, 7, y 8.

EST55: ...

Inv: Vuelves a hacer lo mismo. A la pregunta de a qué valor se aproxima la x , respondes que a 4.

EST55: Sí

Inv: ¿Podrías mirar la tabla y decirme a qué número se aproxima la función?

04:31

EST55: A... ¡uy!, a 15 no es, se aproxima a 15 cuando tiende por la izquierda, pero a 14 cuando tiende por la derecha.

Inv: Hemos mejorado. Mira un poco más atentamente. Lo del 14 por la derecha lo daría por bueno. ¿Podrías mirar a que se aproxima por la izquierda?

EST55: A 15.5.

Inv: A 15.5. ¿Podrías describir el comportamiento de la función?

EST55: Eh, pues, cuando x tiende a 4, por la izquierda, la función es 15, la función tiende a 15.5, y por la derecha, y cuando x tiende a 4 por la izquierda, la función es 14.

Inv: ¿Por la?

EST55: Por la derecha.

Inv: Por la derecha. ¿Podrías escribirlo con un lenguaje?

EST55: ¿Qué quieres?

Inv: Eso que acabas de decir, ¿lo puedes escribir un poco más formal?

EST55: Pero...

Inv: ¿Podrías contestar a la pregunta d)?

EST55: ... (Figura 18)

TG

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 15,5$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 14$$

Figura 18. Respuesta del EST55 a la Tarea 6

Inv: La nomenclatura del 4 con el menos que estas terminando de poner ahora, ¿la conoces?

EST55: La conozco de pasada, ahora no me acuerdo de cual era cual.

Inv: Bien, sí hombre sí.

EST55: Creo que menos era la izquierda.

Inv: Un poco menos.

EST55: ...

Inv: ¿Qué podrías decirme del límite exactamente en el punto $x=4$?

EST55: ..., espérate..., eso se calculaba con el..., se calculaba, me parece con esto..., estoy aquí dibujando, era con la h , me parece, ahora mismo no me acuerdo..., esto sería, se divide entre, esto nunca lo he visto,

Inv: ¿Cuándo dices la h , qué es?

EST55: Para calcular un punto a veces era necesario recurrir a los puntos cercanos, o próximos.

Inv: ¿Para eso tenemos la tabla?

EST55: ..., pero ahí, no sé, porque sería h menos, no me acuerdo ahora, no sabría.

Inv: Estas intentando recordar esa fórmula, ¿la del cociente incremental?

EST55: Sí.

Inv: El $f(x+h)$ menos $f(x)$, partido por h , ¿cuándo h tiende a 0?

EST55: Sí, pero ahora no me acuerdo.

Inv: Vamos a la tarea 8. Has llenado la tabla, a qué número se aproxima la x , sí que habías distinguido derecha e izquierda, habías dado una buena descripción, pero no contestas a la pregunta e. ¿Podrías decir, si es posible, cuál es el límite de la función en el punto $x = 0$? En la hoja adjunta. Pon T8 (Figura 19).

T8

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -3$$

Figura 19. Respuesta del EST55 a la Tarea 8

EST55: ..., x tiende a 0 ...

Inv: ¿Y exactamente en el punto 0 ?

EST55: En el punto 0 , en el punto 0 tengo las mismas de antes, pero espérate, sería -3 ,..., al ser a trozos, no sé, y como aquí dice que es una función que está definida, una función a trozos, y como está definida en más o menos cero, está en este trozo y luego, y en las funciones básicas siempre lo haces con el valor, será -3 ,..., pienso.

10:21

Inv: Vamos a la tarea 7.

EST55: ...

Inv: Estamos en la misma situación de antes. Respondes a la pregunta a y a la c , y no respondes a las otras. ¿Podrías intentar responder a la pregunta b ?

EST55: ¿A la b ?

Inv: Cuando x toma los valores 3.9 , 3.99 , 3.999 ,... ¿A qué número se aproxima la función?

EST55: ..., aquí el problema era, ..., ¡fu!, estaría ahí en 5 , porque este trozo es continuo; a 15 perdón.

Inv: Cuando dices 15 , ¿quién estaría en 15 ?

EST55: Los tres coma, los valores que se aproximan a 4 .

Inv: ¿Entonces la función se aproximaría a...?

EST55: A 15 . Aquí uno de los problemas es que no sabía si esta llegaba aquí, la función. No sabía si llegaba o no.

Inv: Donde se pone el circulito es donde no llega.

EST55: Ya, pero el circulito está ahí.

Inv: Sí, sí.

EST55: ¿Está lo sobrepasa o...?

Inv: No, puede.

EST55: Ya, ya, me refiero a...

Inv: Sí, sí, termina perfectamente.

EST55: Entonces sí que es a 15 .

Inv: A 15 . ¿Podrías describir el comportamiento? Pon $T7$.

EST55: ..., entonces sería, cuando tiende a 4 , por la izquierda, la función tiende a 15 , y el 4.1 , ¿cuándo tiende por la derecha también?

Inv: Sí, sí.

EST55: ..., y cuando el límite de $f(x)$ es igual a 10 (Figura 20).

Inv: Podrías verbalizar lo que has escrito un poco más fuerte, para grabarlo bien.

EST55: Cuando x tiende a 4 por la izquierda, la función tiende a x , se aproxima a x .

Inv: ¿Tiende a...?

EST55: A 15 , y cuando x tiende a 4 por la derecha, la función se aproxima a 10 .

T7

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 15$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 10$$

Figura 20. Respuesta del EST55 a la Tarea 7

Inv: Y la pregunta que te he hecho en todos los sitios, ¿qué me puedes decir exactamente del límite en el punto $x = 4$?

EST55: Es que..., no sé..., no me acuerdo, no sé cómo se hacía.

Inv: De acuerdo.

EST55: Lo sabía hacer pero ..., necesitaría la fórmula, la función para hallarlo, y eso me parece que lo he hecho cuando no eran a trozos, cuando es una función continua y no este, que sea solo una función.

Inv: De todas formas, en la tarea, a raíz de lo que dices, volviendo a la tarea 3, cuando tú resuelves el apartado e, lo resuelves vía algebraica.

EST55: Sí.

Inv: ¿No se te ocurrió mirar la tabla?

EST55: No.

Inv: Y en la tabla, ¿la función a qué tiende?

EST55: ...

Inv: Si miras los valores de la tabla, ¿a qué tiende la función?

EST55: A 0.25.

Inv: No puede tender a otra cosa.

EST55: No.

Inv: Lo hagas como lo hagas va a tender a lo mismo. Vamos a la tarea 10, o a la 5, al que prefieras

EST55: Me da igual.

15:03

Inv: Empezamos por la 10. Tienes una solución. ¿Me podrías...?

EST55: Otra solución.

Inv: Si me puedes poner otra solución distinta a la que tienes ahí.

EST55: Sí, sí,...

Inv: No tenemos problema de tiempo, puedes hacer un intento.

EST55: Tranquilo, lo voy a intentar..., 4, ..., tiene que pasar por aquí, ..., por aquí debe tender a 0, ..., no sabría, me sale lo mismo, (Figura 21).

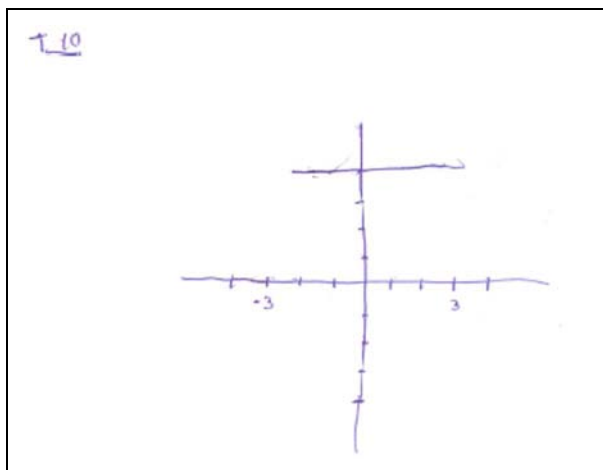


Figura 21. Respuesta del EST55 a la Tarea 10

Inv: ¿Has puesto la condición a ?

EST55: Aquí, debería pasar por aquí,..., si es continua que tampoco lo sé, debería ser esto,...

Inv: ¿La condición a la podrías poner?

EST55: Espérate, que lo estoy pensando.

Inv: No te preocupes, pero me gustaría que me la pusieras.

EST55: ..., sería una línea horizontal, es que no sé,..., debería pasar por aquí no, pero,..., estaba mirando otra vez, vale, aquí sí que lo he puesto, no sé si pasa lo mismo, con una línea horizontal,..., yo pondría aquí una línea horizontal..., después,

Inv: De momento has puesto la primera condición.

EST55: Hum,..., ahora me está diciendo que cuando x tiende a 3, la función es 1,..., no sé, no sé cómo hacerlo. Sé lo que me quiere decir, pero no sé cómo hacerlo,..., no puedo cogerlo de aquí,..., no sé.

Inv: Si en algún momento quieres volver a intentarlo puedes. ¿Quieres mirar la tarea 5?

EST55: De acuerdo.

EST55: ...

Inv: Estamos intentando la tarea 5.

EST55: Pero en la representación gráfica, ¡uf!,..., no sé (Figura 22).

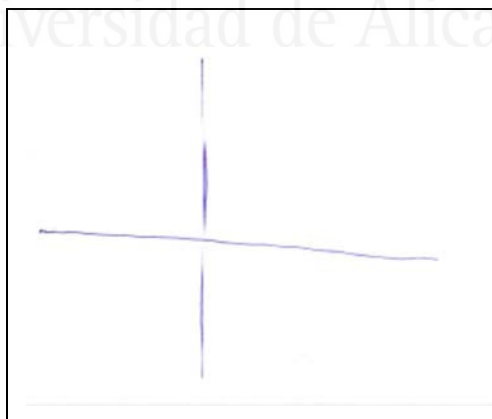


Figura 22. Respuesta del EST55 a la Tarea 5

Inv: No.

EST55: No lo hemos hecho así nunca y me ha pillado por sorpresa.

Inv: Vamos.

EST55: Como quieras.

Inv: Muchas gracias.

21:17

Entrevista al EST58

Inv: Hola ¡bon dia!. Voldria que començarem per la tasca 8.

EST58: Per la 8?. D'acord.

Inv: En la tasca 8, completes la taula. Dónes una resposta a la pregunta b , a que s'aproxima la x , dius que a 0 . Dónes una resposta a la pregunta c . Podries llegir la resposta a la pregunta c ?

EST58: A quin número s'aproxima la funció $f(x)$? Quan x tendeix a 0 per l'esquerra, $f(x)$ tendeix a 1 , i quan x tendeix a 0 per la dreta, $f(x)$ tendeix a -3 .

Inv: Contestes la pregunta d , i també dónes una bona nomenclatura en la part de baix. Ara anem a situar-nos en la tasca 6.

EST58: ...

Inv: Dónes una resposta a la pregunta a , dius que la x s'aproxima a 4 . Vaig a tornar a preguntar-te per la b , a quin número s'aproxima la funció $f(x)$?

EST58: La funció $f(x)$?

Inv: Sí.

EST58: Jo he posat que s'aproxima a 15 ?

Inv: A 15 ?

EST58: A 15.5 .

Inv: Mira la taula, per favor.

EST58: A 15.5 , quan x i s'aproxima a 4 .

Inv: Quina part de la taula assenyaies amb el dit?

EST58: La de l'esquerra.

Inv: La de l'esquerra.

EST58: En la de la dreta, com aquí enmig ens falten dades, supose que hi haurà un moment en que s'aproximarà a 15.5 , per aquesta part, per la dreta. Això és el que pensava jo, que faltaven números per posar, i s'aproximaria més a 15.5 . Però pense que la resposta no és correcta.

Inv: Si penses que la resposta no és correcta, quina resposta em donaries en aquests moments?

EST58: ..., mm, 14.3 , ... uf, ..., 14.3 , a no, el límit és 14 , per la dreta.

Inv: Per la dreta, i per l'esquerra?

EST58: Per l'esquerra és 15 .

Inv: 15 ?

EST58: 15.5 , clar.

Inv: Jo et faig aquesta pregunta perquè en la tasca 8 has contestat de meravella, i en aquesta, que aparentment es pareguen respons d'una altra manera.

EST58: Em centrava més segons avançava en l'examen.

Inv: Per això et pregunte jo perquè contestes de forma diferent a un i a l'altre no. Podries respondre'm ara la pregunta c ?

EST58: ..., eh...

Inv: Ho pots escriure en el full adjunt (Figura 23).

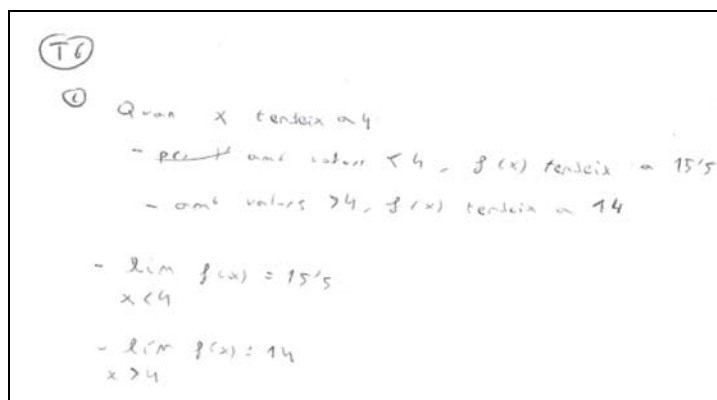


Figura 23. Resposta del EST58 a la Tasca 6

EST58: ..., seria, mm, per l'esquerra, és que aquí per l'esquerra no són números negatius. Quant tendeix a 4, ..., a 4,

Inv: El que estàs escrivint amb valors menors que 4, és el mateix que dir per l'esquerra.

EST58: Sí, però com els valors no són negatius.

Inv: Quan et situes en un número, els menors que ells són a l'esquerra, i els majors a la dreta. Però, el que estàs escrivint és correcte.

EST58: ... quan x tendeix a 4 ... la funció tendeix a 14.

Inv: I quan els valors són majors que 4, tendeix a molt?

EST58: A 14. Sempre quan la x tendeix a 4, són majors, però tendeixen a 4.

05:10

Inv: Anem a l'apartat *d*. Què em podries dir del límit?

EST58: El límit de la funció quan x .

Inv: Què em podries dir del límit?

EST58: Quan x és igual a 4, uf, ..., ara mateix no me'n recordo molt, ..., seria quan, n'hi hauria dos.

Inv: Posa'ls.

EST58: ..., crec que seria això, però ara mateix no me'n recordo de més.

Inv: Una nomenclatura una mica millor per posar els límits no la recordes?

EST58: Quan x tendeix a 4 i és menor que 4, quan x tendeix a 4 i és major que 4.

Inv: En matemàtiques utilitzem una nomenclatura específica per a dir això.

EST58: No.

Inv: Bé. I què em podries dir exactament del límit de la funció en el punt 4?

EST58: El límit en el punt 4.

Inv: Sí, tu has posat un límit pels menors que 4, i un límit pels majors que 4, i en el punt 4, què podries dir exactament del límit?

EST58: Que no existeix el límit en el punt 4.

Inv: Per què, per quina raó no existeix?

EST58: Perquè no pot ser, perquè ..., perquè no pot ser que ..., hi ha un salt.

Inv: Sí hi ha un salt, sí.

EST58: Hi ha un salt, i això ha de ser perquè quan $x=4$, el límit no existeix, això és un valor que no pot definir la funció.

Inv: Però, per què no existeix, quina és la raó de dir no existeix?

EST58: Perquè a mesura que jo vaig donat un valor a x , apareix un valor de $f(x)$ proporcional.

Inv: Sí, sí.

EST58: Aleshores, quan aquí veus el salt.

Inv: Quan dius aquí estàs assenyalant la taula?

EST58: Aquí, faig aquí, quan passes a 4.00001, el valor canvia molt en quant a la proporcionalitat, ..., la ..., la proporcionalitat és la mateixa, però el valor de $f(x)$ canvia massa comparant amb el valor de x quan canvia a 4.

Inv: Eixa és la raó que tu argumentes per a dir que no hi ha límit. És això?

EST58: Mm, sí.

Inv: Si tornem a la tasca 8, i tornem a la pregunta e, quan et pregunte: Diques, si és possible, quin és el límit de la funció en $x=0$. Què hauries de dir?

EST58: Que no existiria, ...

Inv: I no existiria, per què?

EST58: Per la mateixa raó.

Inv: Per la mateixa raó. Ho deixem ahí?

EST58: Ho vaig fer un poc, uf.

Inv: No, no. Anem a la tasca 7. Dónes una resposta a la pregunta a, no, respons a moltes coses. Tornaré a preguntar-te per la pregunta b. Quan la x pren els valors 3.9, 3.99, 3.999, ... a què s'aproxima la $f(x)$?

EST58: ..., valors, ..., a què s'aproxima $f(x)$, per a eixos valors de la x ?

Inv: Sí.

EST58: Mm, el valor de la x no està inclòs.

Inv: Estàs fent uns moviments amb els dits.

09:33

EST58: Mm.

Inv: Uns moviments en la línia, serien línies verticals.

EST58: Diria que tendeix a 10, però sense arribar al 10. S'aproxima, ..., seria, no, s'aproximaria a 15, hi ací hi hauria un salt. Seria 15 constant, i ací hi hauria un salt.

Inv: I quan la x pren els valors 4.1, 4.01, 4.001, a quin valor s'aproxima la $f(x)$?

EST58: A 10.

Inv: Podries tornar a contestar-me la pregunta d' ?

EST58: Quan x pren els valors 3.9, 3.99, 3.999 el valor de $f(x)$ és 15, i quan ja passa de 4, serien valors majors de 10.

Inv: Sí.

EST58: Supose que sense incloure el 10, perquè està amb el cercle, que no està inclòs, però quan x tendeix a 4 per l'esquerra, $f(x)$ tendeix a 15, i quan x tendeix a 4 per la dreta, és major de 10.

Inv: I respecte al punt 4, què diries del límit en el punt $x=4$?

EST58: Aquí?

Inv: Sí.

EST58: El límit, ..., no pot tornar, ..., x és 10, ..., seria, el valor que no pot prendre, seria 4.

Inv: La que tendeix a 4 és la x .

EST58: Sí, sí, sí. La que tendeix a 4 és la x . El límit del 4, ara mateix jo veig 10, però pels dos costats, ah. Bé, quan x és menor que 4, el límit és 15, i quan x és major que 4 el límit és 10.

Inv: Sí, això ho has dit abans, però en $x=4$, què passa?

EST58: A no, en el 4, ..., açò no està inclòs, supose, o sí?

Inv: Eixe sí, on no està inclòs és on està el cercle.

EST58: El límit seria 15, perquè quan el valor és 4, el valor aquí és 15, encara que, sí, crec que sí, crec que és 15. Perquè si fem una taula, és exactament igual als anteriors.

Inv: D'acord. Això ho tens clar?

EST58: Sí.

Inv: I a l'inrevés. Si de les tasques anteriors ferem la gràfica, en totes han d'aparèixer eixe salt que has dit tu. Per tant, en el punt $x=4$?

EST58: En el punt $x=4$, no hi hauria límit.

Inv: Anem a passar un segon a les tasques 5 i 10. En prefereixes alguna?

13:14.

EST58: Em fa igual.

Inv: Ho intentes, però voldria suggerir-te si en fas una millor del que tenim en el qüestionari.

EST58: En la tasca 5 hi ha tres funcions.

Inv: Tres condicions.

EST58: La primera, quan $x=1$, ..., la $f(x)=3$. És un punt.

Inv: Sí, això és un punt. Si ho vols fer, ho has de fer en el full adjunt.

EST58: El dibuix?

Inv: Sí, el qüestionari el deixem tal com està.

EST58: ... (Figura 24)

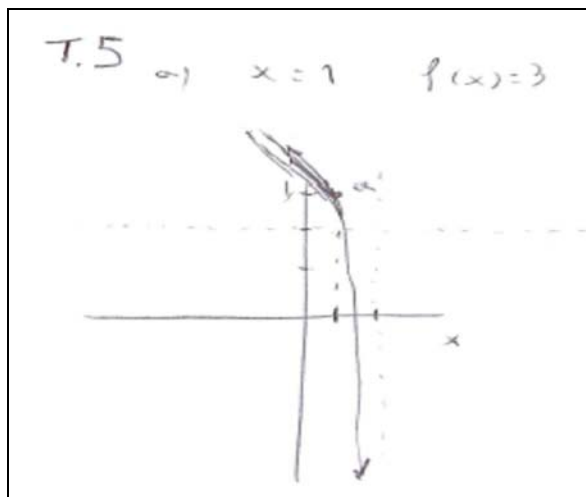


Figura 24. Resosta del EST58 a la Tasca 5

Inv: Estàs representant el punt. La x val 1, i la funció val 3.

EST58: No vaig estudiar per a aquest examen.

Inv: No, si no és un examen. La idea és veure què recordeu pocs dies després d'estudiar el límit, i també he fet el mateix amb 2n de Batxiller en novembre - desembre per a veure què recordaven sis mesos després.

EST58: Bé. L'apartat b, el límit és 2, quan la x tendeix a més infinit, supose que sí ..., 2 per a y és així.

Inv: Estàs dibuixant en aquestos moments una línia discontinua.

EST58: El límit de $f(x)$.

Inv: A l'altura de la y igual a molt?

EST58: $y=2$.

Inv: $y=2$.

EST58: Quan x tendeix, el problema és que, no puc continuar, si, si és infinit, crec que és la mateixa funció, si des d'un punt.

Inv: Anem a la tercera condició, intenta esbossar una mica la tercera condició.

EST58: $f(x)$ tendeix a menys infinit, quan x tendeix a 2.

Inv: Estàs dibuixant també una línia discontinua, ara vertical, què passa per x igual a molt?

EST58: A 2.

Inv: Que en el dibuix del qüestionari ja ho tenies.

EST58: Sí. Quan x ve, ..., crec que és, crec que l'he fet bé.

Inv: En el dibuix que has fet hi ha alguna cosa incorrecta. En el dibuix que has fet en el qüestionari, quan la x val -1 , la funció què val?

EST58: La funció, quina la b , la c ? La c ?

Inv: Jo vull una única funció. Jo en vull una única!

EST58: Sempre va a menys infinit de la x . Quan els valors són menors que 1.

Inv: En el 1 del teu qüestionari, la funció què val?

EST58: En l'1 la funció val 3.

Inv: Però, no és això el que tens en el dibuix?

EST58: No les he relacionades.

Inv: Correcte, no les has relacionades, i hauries de relacionar-les en una. Perquè tu en l'1 quan tires cap a dalt toques una gràfica, toques el punt que has marcat, i toques l'altra gràfica.

EST58: És veritat.

Inv: Però jo només en vull una només.

EST58: Bé, bé, bé.

Inv: En el que has fet hi ha coses que són correctes i altres que no ho són.

EST58: Aquesta funció és la que es creua amb el punt, la c , crec.

Inv: Posa-la, posa-la, poc a poc.

EST58: Seria, aquestes dues serien així, mm, no faig el dibuix bé.

Inv: No patisques, ens entenem.

EST58: Això seria la b , i ara la c .

Inv: No, ahí has posat més que la b . Has posat alguna cosa de la b , i també has posat la a , i el que tenies.

EST58: I, hauria de posar també la c , ara? Quan x , ah, açò és la c , la que acabe de posar. Es la c la que acabe de posar.

Inv: I alguna cosa de la a .

EST58: I la a , em faltaria la b . Quan la x tendeix a més infinit, per aquí, la funció tendeix a 2. Seria una gràfica així? Que no pot creuar la $x=2$, però seria una cosa així, però no pot arribar fins el punt 3, haurà de creuar la funció per aquí supose, ..., crec que seria una com aquesta, ..., mm, no pot ser, ...

Inv: Si vols ho deixem.

EST58: No, no, ..., a , b , c , ..., x és 2, el límit no pot creuar el 2, ..., no sé, ..., també podria ser, però seria una funció així, uf, no sé molt bé en què em fonamente per això, a veure, x tendeix a infinit, el límit és 2

Inv: I quan la x tendeix a 2, la funció és?

EST58: Quan x tendeix a 2, a és veritat, la funció no existeix, la funció no existeix en x el punt 2, ..., uf.

Inv: Vols que ho deixem, i després si vols tornem?

EST58: Sí, perquè ara mateix estic atascat.

21:23

Inv: D'acord, Era la tasca 5, posa ací el T5. Estem en la tasca 10. Posa T10.

EST58: Quan la x és 0, la funció val 4.

Inv: Que també el vas dibuixar en el qüestionari.

EST58: La condició a , i quan x tendeix a 3, el límit és 1, ..., i quan x , quan x tendeix a 3, ho fem així, la funció tendeix a 1.

Inv: Sí, però tu tornes a fer el mateix que abans, tu has fet varies gràfiques, però jo en vull una només.

EST58: Bé, en la c , el límit és 0, quan x tendeix a -3 .

Inv: Sí, eixa és la condició c , sí.

EST58: Una condició ens diu que x tendeix a 3, i l'altra que x tendeix a -3 , ..., quan, ...,

Inv: No t'oblides de la condició a .

EST58: Del punt.

Inv: Del punt.

EST58: Uf, si és per dalt, eixe punt és el 4, ..., eixe punt és el 0, ..., quan x tendeix a 3, el límit és 1, era, l'he de posar ací, després quan x tendeix a -3 , el límit és 0, ..., seria una recta, seria una semi paràbola, o una cosa així ..., quan x tendeix a -3 , és 0, i quan, a no, està recta primer, ..., uf!

Inv: Tens el llapis.

EST58: Ho pensava, això!

Inv: Si vols el llapis.

EST58: Això seria a i b , ..., i c , quan x tendeix a -3 , ..., a -3 (Figura 25, esquerra).

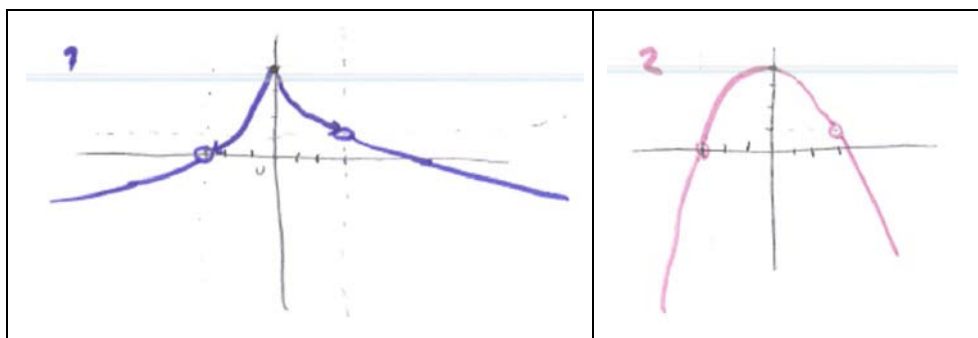


Figura 25. Resposta del EST58 a la Tasca 10

Inv: Quin punt marques ara?

EST58: El -3 .

Inv: El -3 de la x , i el ...

EST58: El -3 de la x , i el 0 de la y ,..., això seria el límit, ..., seria, ..., crec que seria una cosa així? Però no pot arribar a aquest punt.

Inv: Per què no?

EST58: Ah no, no, no, no, sí que pot, perquè és x 0 , no la y 0 . Seria una cosa així. Si estic marcat aquest punt, així marcat.

Inv: Necessitaria alguna cosa més ..., ens consta, eh?

EST58: Puf, je, je. És que, quan x és igual a 0 , no, ..., és y , ..., mm, crec que ja està bé, continua, ..., en aquestes condicions ja tinc el punt 4 , quan x tendeix a 3 , la funció tendeix a 1 , ..., mm.

Inv: Eixa tendència a 1 , que tu has posat, per quina part és?

EST58: Per la part de la y , y tendeix a 1 , quan x tendeix a 3 .

Inv: Però, tendeix a 3 , per quina part?

EST58: x tendeix a 3 , i y tendeix a 1 , així quan x no tendeix a 3 , la y no tendeix a 1 , ..., no puc pensar en una altra cosa.

29:11

Inv: D'acord. Ho deixem. Podries agafar un retolador i marcar-me una mica millor la gràfica. Amb el retolador blau, ..., eixa fletxa que estàs posant, què significa? (Figura 25)

EST58: Que tendeix, és que no puc marcar-los.

Inv: Tendeix, però eixa última que has marcat, la x a què tendeix?

EST58: Ací?

Inv: Sí.

EST58: A -3 .

Inv: Per quina part?

EST58: Per la part de x , tendeix a -3 .

Inv: Per quina part?

EST58: Ah, per la dreta.

Inv: Ah, i en la condició ens diuen alguna cosa.

EST58: Mm, x tendeix a -3 , no diuen res.

Inv: Aleshores,...

EST58: Podria ser per l'esquerra.

Inv: Ah, podria ser per l'esquerra! Tu en el teu dibuix si que l'has posada, per la dreta i per l'esquerra.

EST58: Mm, sí però, no està del tot correcte.

Inv: Bé, però ara estem millorant-ho.

EST58: Seria una altra per aquí.

Inv: Ah, ara estaries aproximant-te al -3 per?

EST58: Per l'esquerra.

Inv: I la funció tendeix a?

EST58: També al mateix punt, $(-3,0)$.

Inv: Al $(-3, 0)$. Però no t'arrisques encara a dibuixar-la.

EST58: Puf, crec que sí, perquè ara no se me n' ocorre altra.

Inv: Anem a veure si acabem la gràfica.

EST58: Aquesta seria la forma, i a l'altre costat seria el mateix.

Inv: Seria el mateix.

EST58: Ah, doncs d'acord!

Inv: Estàs posant el mateix cercle que tenies. Si?

EST58: Jum.

Inv: T'agrada el que acabes de fer, o no?

EST58: Sí.

Inv: Puc marejar-te una mica més, o no?

EST58: Sí.

Inv: Em posaries una altra solució.

EST58: Mm, una altra, però ...

Inv: Sí, sí.

EST58: ...

Inv: Si vols posar-ne una altra, en un altre gràfic. Posa I , amb numeració romana, o amb el que vulgues.

EST58: ..., faré una altra gràfica.

Inv: Mira a veure si ho intentes amb una altra solució.

EST58: ... (Figura 25, dreta)

Inv: Estàs marcant el punt, la primera condició.

EST58: Sí, una solució diferent, després, ..., estic pensant en fer-ho, ..., me'n recorde d'altra però, no sé si poden creuar-se, la funció tendeix a I , quan la x tendeix a 3 , ...

Inv: Ara estàs marcant un punt que és el?

EST58: El punt $(3, I)$.

Inv: El $(3, I)$.

EST58: Aquestos punts els he de marcar perquè continuen sent els límits, continuem fent els límits, aquest per l'esquerra o per la dreta, aquest ix des del 4 , ..., també pot ser.

Inv: Si vols fer algun intent previ, agafa el llapis, si vols?, i després et quedes amb el que més t'interessa.

EST58: Com no especifica la forma de la funció.

Inv: No l'especifica.

EST58: Podria ser, ..., una paràbola, però ...

Inv: Una forma parabòlica, sí. Agafa el retolador, agafa el retolador.

EST58: Mm, d'eixe color ara

Inv: Té igual, bé, si, si.

EST58: ...

Inv: Intueixes quina pregunta et faré després?

EST58: Si és una equació de segon grau? Si fora de segon grau hauria de tenir un mínim. Això seria una equació de segon grau, o una equació racional amb un segon grau a baix? No, no puc intuir la pregunta.

Inv: Jo no estic demanant-te això, jo estic demanant-te una gràfica que s'adapte a tres condicions.

EST58: El dibuix seria, ..., ara bé, el dibuix continuaria ...

Inv: Posa 2 (segona gràfica, figura 25). T'agrada? O no?

EST58: Aquesta es completaria per aquí, si fóra independent.

Inv: Jo vull una gràfica única

EST58: Que complisca les condicions, crec que si.

Inv: Em posaries una altra solució? O és demanar massa?

EST58: Sí, però ara seria en línia recta, ..., bé, el 3 , ..., doncs, ..., el punt del límit sempre ha de ser aquest.

Inv: Estàs intentant marcar.

EST58: Se m'ocorre que una seria en línia recta. Directament, ..., seria una cosa així, ..., això seria, si fora una taula seria una ..., serien proporcionals, les, les ...

Inv: Anem a agafar el retolador, a veure si.

EST58: ..., seria, ...

Inv: En totes estàs posant el cercle, el cercle què indica?

EST58: El cercle indica que no està inclòs.

Inv: És a dir, s'aproxima.

EST58: S'aproxima, però no hi arriba (Figura 26).

Inv: Eixa és la teua idea del límit, perquè ho estàs marcant en tots el llocs.

EST58: Sí, ...

Inv: Una cosa, quantes solucions portem de moment?

EST58: Tres.

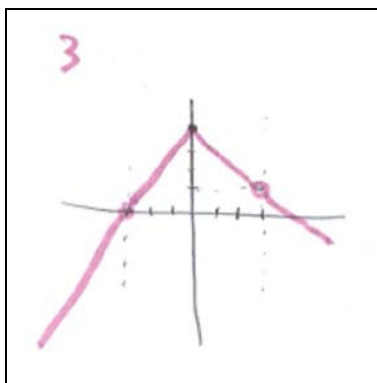


Figura 26. Resposta del EST58 a la Tasca 10

Inv: Està constant-nos, eh? Quantes solucions té el problema?

EST58: En podria tenir infinites, crec, el que jo he posat són diferents formes.

Inv: Has posat diferents formes, hi ha unes condicions bàsiques.

EST58: Hi ha unes condicions que determinen la funció, ara bé, però aquí estem utilitzant diferents formes, i si continuem així, fem infinites formes amb les mateixes condicions.

Inv: Sí?

EST58: Sí, crec que sí.

Inv: Ho deixem.

EST58: És molt possible que no ho tinga bé, eh?

Inv: Perquè?

EST58: Puf, això d'interpretar a mi ...

Inv: Anem a situar-nos ara en la tasca 4.

38:05

EST58: Mm, tenim una taula, quan x tendeix a 0.5 , per la dreta $f(x)$ tendeix a 1.5 , serà per la dreta, i ahi ho posem, anem a la a , o a la b , o ambdós?

Inv: Anem a la a .

EST58: ¿Cómo de pròximos han de estar los valores de x de 0.5 para que la diferencia $1.5-f(x)$ en valor absoluto, sea menor que 0.001 ?

Inv: Tu escrius $1 < f(x) < 0.01$.

EST58: La resposta ha de ser que ha de ser menor que 0.01 .

Inv: No.

EST58: No, menor que 0.001 .

Inv: I tu contestes que x ha de ser pròxima a 0.5001 . Per què dones eixa resposta?

EST58: Perquè la resposta, perquè l'equació siga correcta.

Inv: I on mires?

EST58: A veure, ..., aquesta estic mirant.

Inv: Sí.

EST58: Com de pròximos han d'estar els valores de 0.5 , eh, eh, haurien de ser de pròximos, 00 , aquí em falta un zero, crec, ..., no, no, no, està, ..., aquí dona pròxim a 0.003 , tendeix a 0 , almenys aquesta, ..., um, ..., ah aquí.

Inv: Estàs assenyalant-me la columna on la x val 0 coma?

EST58: 0.5001 , i en aquesta.

Inv: Eixa és la resposta que tu dones.

EST58: Si perquè fins a, perquè m'aproxime per la dreta, si continua sent positiu ja es passa.

Inv: D'acord!

EST58: Per l'esquerra encara pot, des de 0.5001 i valors menors.

Inv: Tots els menors. I en l'altra part de la taula també vas mirar?

EST58: ..., ho he fet solament per la dreta.

Inv: Tu vas mirar solament una part, d'acord.

EST58: Ara que em fixe també pot ser.

Inv: I si et fixes per l'esquerra?

EST58: Seria aquesta.

Inv: Aleshores què em diries?

EST58: Que el valor de x hauria de ser entre 0.4999 i ...

Inv: Escriu ho ahí. Estic preguntant-te perquè pensava que solament havies mirat a una part.

EST58: Sí, solament havia mirat una part, ..., un valor menor que 0.001 , ..., x pot valdre tots els reals que hi ha entre 0.4999 i 0.5001 (Figura 27).

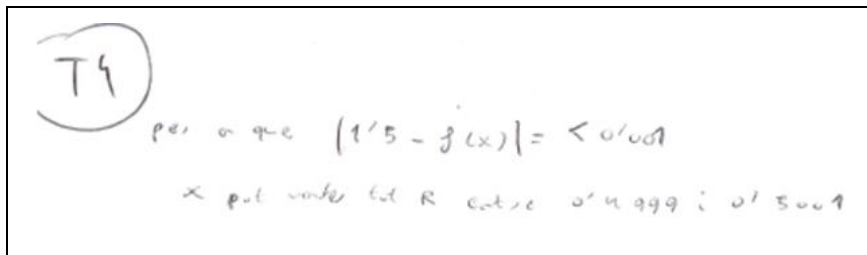


Figura 27. Resposta del EST58 a la Tasca 4

Inv: D'acord. Anem a la pregunta b . Tu en la pregunta b , dius que el límit és 1.5 ja que $1.5 - f(x)$, tendeix a 0 . Amb això que vols dir, o que vols intentar dir?

EST58: Quan x tendeix a 0.5 .

Inv: Per a dir el que dius, quina filera mires?

EST58: Estos.

Inv: Quan dius estos...

EST58: Estava mirant, estava intuïnt la de...

Inv: D'acord. A mi m'interessaria que em digueres en quina filera mires, per a dir-me que el límit és 1.5 ?

EST58: Més que una filera, jo vaig mirar la fórmula.

Inv: Sí. Quan dius la fórmula estàs assenyalant-me ara $1.5 - f(x)$.

EST58: La veritat és que aquesta no la vaig ni considerar.

Inv: Quina filera?

EST58: La quarta columna.

Inv: No, no, la quarta columna no, la quarta filera. Estàs assenyalant la quarta filera, per això dius, que això tendeix a molt?

EST58: Això tendeix a 0 , el resultat tendeix a 0 , conforme la x tendeix a 0.5 , intuïa que quan x valdria 0.5 , el resultat seria 0 completament.

44:28

Inv: Per això dius que el límit de la funció és?

EST58: 1.5 .

Inv: Tu estàs mirant la quarta filera.

EST58: Sí.

Inv: Anem a la tasca 9 ara?

EST58: Tasca?

Inv: 9. Aquesta és l'última.

EST58: ...

Inv: En la tasca 9, fas coses paregudes.

EST58: Sí, ja, ja.

Inv: Però hi ha algunes coses que m'agradaria que m'explicares, tens una fletxeta marcada

EST58: Sí.

Inv: En la pregunta a poses una coseta amb un parèntesis. Què poses en el parèntesis?

EST58: Mirant la primera taula...

Inv: Mirant la primera.

EST58: Sí.

Inv: En la segona, no?

EST58: No, però segurament hi ha una resposta paral·lela.

Inv: Mirem una mica més?

EST58: ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 2.5, para que la diferencia $3.5 - f(x)$, en valor absoluto, sea menor que 0.001?

Inv: En valor absolut, siga menor que 0.001.

EST58: Doncs, si ha de ser menor que 0.001, la resposta ha d'estar aquí.

Inv: Estàs assenyalant la mateixa filera on tens la fletxeta en el qüestionari.

EST58: La que vaig mirar.

Inv: Si, eixa és la resposta que dones, mirant la taula de dalt que jo havia interpretat perfectament que estaves dient.

EST58: Ara bé, també hi ha, açò és per la, per l'esquerra.

Inv: Sí.

EST58: I faltaria també per la dreta?

Inv: Mirem per la dreta?

EST58: Per la dreta també faltaria, seria a partir d'aquesta, aquestes dues són les que donen menor que 0.001.

Inv: Però estan preguntant-nos per a què la diferència entre 3.5 i la funció. On estàs mirant tu ara?

EST58: Mire aquesta, ..., com han de ser de pròxims de, quan x tendeix a 2.5, la $f(x)$ tendeix a 3.5, ..., siga menor. Ah, no, vaig mirar aquesta, vaig mirar aquesta la que, de totes formes el resultat és el mateix, ha de ser tots els menors d'aquesta filera, i d'aquí cap avall.

Inv: Aleshores no, perquè si són d'aquí cap avall són?

EST58: x tendeix a 2.5, si x tendeix a 2.5, a partir de ..., 2.499 sense incloure'l, ..., hauria de ser pròxims a 2.499, sí, sí, però hi ha tres nous. Però del 0.003 al 0.0003 també hi ha resultats.

Inv: Bé, però nosaltres mirem els de la taula?

48:05

EST58: Aleshores sí, seria 2.4999, a partir d'aquí cap a ...

Inv: Pense que part de l'esquerra de la taula la tenim clara, pense que l'entens prou bé. Mira la part dreta?

EST58: En aquesta part, com més valors se li donen a la x , com més tendeix a 2.5, el resultat d'aquesta més tendeix a 0.

Inv: Ahi estàs contestant-me la pregunta b , i estàs assenyalant la part de dalt de la taula

EST58: Sí, sí.

Inv: Però jo no estic preguntant-te per això, jo estic preguntant-te per la part de baix.

EST58: La part de baix, la part de baix, quan x tendeix a 2.5 la funció tendeix a

Inv: Eixa diferència és menor que 0.001?

EST58: Aquesta?

Inv: Sí.

EST58: No, és major, aquesta diferència crec que és major, pense que x siga un número negatiu, ..., podria, ..., aquí x tendeix a 2, a 2 per l'esquerra i quan va augmentant, el resultat minva.

Inv: Quan dius tendeix a 2, quina columna mires?

EST58: Ara estic en la segona.

Inv: Ah, d'acord!

EST58: Tendeix a 2, i podria ser que haguera un resultat que no estiguera en la taula. Seria 3.4. No, no, no perquè és en aquesta part, ..., uf.

Inv: Portem 50 minuts, quan vulgues ho deixem, ja està bé, està molt bé.

EST58: ..., pense que en aquesta part no en pot tindre ...

Inv: No pot tindre què?

EST58: Resultat menor que 0.001. El cas és que sí, és que conforme augmenta ..., conforme, conforme 2 s'aproxima a

Inv: S'ha de veure en la taula, però tu això ho intueixes?

EST58: Sí, jo ho intuisc.

Inv: D'acord, ho deixem?

EST58: Sí.

Entrevista al EST59

Inv: Hola ¡bon dia!. Estem en la tasca 1. Podries intentar justificar perquè a la pregunta *a* contestes que la x s'aproxima a 2?

EST59: Doncs, perquè és 2.99, i cada vegada s'acosta més a 2.

Inv: Més a què?

EST59: A 21, no? Des de 2.9999 s'aproxima..., a no, a 3.

Inv: D'acord. Torne a preguntar-te, on s'aproxima la x ?

EST59: A 15.

Inv: No, la x ?

EST59: Ah la x ! A 3.

Inv: A 3. I si contestes la pregunta *b*. A on s'aproxima la funció?

EST59: A 15.

Inv: Sorprenent. Que coses!

EST59: No sé perquè vaig contestar...

Inv: Però és el teu qüestionari?

EST59: Sí, sí.

Inv: Podries descriure el comportament de la funció?

EST59: No entenc què vols preguntar quan dius el comportament, però el que jo entenc... El que jo vaig posar és que augmenten els dos iguals.

Inv: Sí, però la x cap a on s'acosta? Fes una lectura completa de la taula en eixe punt.

EST59: Doncs ...

Inv: La descripció faria referència als dos apartats junts.

EST59: Aniria cap a menys infinit, no sé.

Inv: Cap a on s'aproxima la x ?

EST59: La x al 3.

Inv: I la funció?

EST59: Se ..., a 15.

Inv: Podries fer una lectura conjunta, les dues coses al mateix temps?

EST59: Fins a 3.

Inv: Quan la x s'aproxima a 3.

EST59: Quan la x s'aproxima a 3, cada vegada augmenta més.

Inv: Quan la x s'aproxima a 3, la funció s'aproxima a...

EST59: A 15.

Inv: A 15. Això és la descripció. Podries contestar una mica més formalment la pregunta *d*?

EST59: Què és més formal?

Inv: ... (Li mostre la tasca 5)

EST59: Límit de, ..., el límit de $f(x)$.

Inv: Sí, sí.

EST59: ... és igual a 15. No?

Inv: Posa alguna cosa més en el límit?

EST59: Quan x tendeix a 0, no espera't, no, quan x tendeix a 3.

Inv: Si en algun moment vols tornar enrere, i canviar alguna cosa, podem fer ho? Posa *T1*, apartat *d* (Figura 28).

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 15$$

Figura 28. Resposta del EST59 a la Tasca 1

EST59: ¡Ah!

Inv: Canviem? Estem en la tasca 2. Podries argumentar-me perquè en la pregunta a dius que quan la $x = 4$, $f(x) = 2.5$? Com ho fas, on mires?

EST59: Quan la x està en el 4.

Inv: Sí.

EST59: ..., és que no està.

Inv: Sí, aproximadament.

EST59: La meitat, 2.5, sí. És la meitat del, ..., sí perquè és la meitat, 2.5, sí. No, la funció, això seria la y .

Inv: Si, la y és la funció.

EST59: Per això, sí.

Inv: On mires per a dir que és 2.5.

EST59: Ahí.

Inv: I que val la y ?

EST59: La meitat de 5, 2.5, no? Ah no, menys, -2.5 (Figura 29).

T2

a) ~~$f(x) = 2.5$~~ $f(x) = -2.5$
 $x = 4$

b) $x \rightarrow 2$ $f(x) = -5$

c) $x \rightarrow 2$ $f(x) = -5$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -5$

Figura 29. Resposta del EST59 a la Tasca 2

Inv: Posa ahí, apartat a. Indica-ho tot complet. Posa el valor de la x i el valor de la $f(x)$.

EST59: ...

Inv: Dis-me algun valor més, situa algun valor més?

EST59: Per exemple, quan x és, ..., 0, ..., espera, ..., a veure, ..., -2.5 que ja estaria marcat.

Inv: Quan val?

EST59: En 2, la funció és -5 .

Inv: Després, contestes la pregunta b, quan demanen que la x val 1.9, 1.99, 1.999, tu dius que la funció s'aproxima a 5. On mires per a donar eixa resposta?

EST59: Aquí, abans d'arribar a 2, i en el moment que arriba a 2 és 5.

Inv: És?

EST59: -5 .

Inv: D'acord..., i en la pregunta c, quan la x val 2.1, 2.01, 2.001,... la funció s'aproxima a...?

EST59: A més infinit, perquè la x ...

Inv: A què s'aproxima la x ?

EST59: Pareix que el representat segueix, segueix, ..., clar segueix cap a l'infinit. O fins aquí arribaria a 10.

Inv: I la x que val?

EST59: Mira, quan la $f(x)$, ..., espera...

Inv: No tenim cap pressa.

EST59: ..., 1, 2, 3.1, ..., a no, ..., quan es va allunyant de..., quan es va arrimat a 2, la funció tendeix a 5 ...

Inv: I en l'apartat c? Quan la x val 2.1, 2.01, 2.001, ... a què s'aproxima la funció?

EST59: A 5.

Inv: A?

EST59: A -5.

09:06

Inv: A -5.

EST59: És clar, és el mateix, la x tendeix a 2.

Inv: Hi ha una xicoteta diferència, però bé.

EST59: És al contrari.

Inv: Si en algun moment vols canviar la nomenclatura ho dius. A què tendeix $f(x)$?

EST59: A -5.

Inv: Faries una descripció?

EST59: Sí, a veure, ...

Inv: Quan...

EST59: Quan, a veure, ho he de dividir per dos, ..., quan la funció tendeix, quan x tendeix a 2, la funció és, serà -5, i quan tendeix, quan x tendeix a més infinit...

Inv: Però...

EST59: No vols.

Inv: No pregunten pel límit en el més infinit.

EST59: Ho hem de partir en dos, perquè s'acosta per ací i es va acostant.

Inv: Sí.

EST59: Quan arriba a 2, s'acosta a -5, però després a -5, i després va en valors positius, la funció.

Inv: D'acord. Podries escriure una mica més formal. Podries respondre la pregunta e?

EST59: ... f , quan x tendeix a 2...

Inv: Acabes d'escriure que el límit de la funció...

EST59: El límit de la funció, quan x tendeix a 2, és -5 (Figura 29)

11:31

Inv: Anem a canviar de tasca. Estem en la tasca 3. Podries calcular algun valor? Contestant a la pregunta a, podries completar la taula?

EST59: Quin?

Inv: Algun?

EST59: Quan x val 1.9 (Figura 30).

(T3)

a	0'26	$x = 1.9$	$f(x) = 0.2569$
		$x = 1.999$	$f(x) = 0.2501$
		$x = 2.01$	$f(x) = 0.2499$
		$x = 2.1$	$f(x) = 0.2439$
b		$x \rightarrow 2$	$f(x) = 0.25$
c		$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$	$= 0.25$

Figura 30. Resposta del EST59 a la Tarea 3

Inv: Anem a veure què dóna.
 EST59: ..., la funció dóna 70.3.
 Inv: Dóna molt?
 EST59: 7.03.
 Inv: 7.03, tu quan has substituït en la funció, utilitzant la calculadora. Podries llegir en veu alta el que has posat?
 EST59: He substituït la x pel 1.9.
 Inv: Si, però llig el que posa la calculadora.
 EST59: $1.9-2 / 1.9-4$
 Inv: Però, previ al 1.9 què has posat?
 EST59: Un parèntesis.
 Inv: En el numerador no poses parèntesis?
 EST59: Ah, me l'he saltat.
 Inv: Tornem a començar? Anem a intentar-ho una altra vegada.
 EST59: 1.9, ..., -4, ara sí.
 Inv: Posa ho en el full.
 EST59: Faig l'operació completa, ...
 Inv: Amb el resultat en tinc prou. Indica quin valor de la x , i quin de la $f(x)$.
 EST59: $x = 1.9$, ..., ho indique?
 Inv: Per contra de 0.26, posa quatre xifres decimals. L'aproximació que estàs fent és correcta.
 EST59: ...
 Inv: Calcula algun valor més. El 1.9, posa tres nous.
 EST59: ..., 1.999, ..., 2, ..., al quadrat, ...,
 Inv: Amb quatre xifres hi ha prou.
 EST59: Ha faig aproximat i pose 0.2501 (Figura 30).
 Inv: Això és més correcte, perquè la sexta xifra que no posem és un 6. Calcula algun d'aquesta part?
 EST59: Sí, ..., també.
 Inv: Això que estàs fent té un nom, una part i una altra té un nom, ..., ara vas a calcular quan la x val?
 EST59: 2.01.
 Inv: Calcula un altre valor, en el qüestionari no posaries el parèntesis, i ara veig que ho fas de forma correcta. Quan la x val 2.1?
 EST59: Eh, $f(x)$ val, ..., quan la x val 2.1 la funció és igual a 2, a 0.2439.
 Inv: Jo pense que en tenim prou per a completar la taula. Si vols en podem fer més, però pense que en tenim prou. A què s'aproxima x ?
 EST59: La x s'aproxima a 2.
 Inv: A 2, i la funció a que s'aproxima?
 EST59: A 0.24, no a 0.25.
 Inv: A 0.25?
 EST59: ..., sí a 0.25.
 Inv: A 0.25?
 EST59: Sí, tendeix, cada vegada va acostant-se...
 Inv: Sí?
 EST59: Sí.
 Inv: Podries fer la descripció?
 EST59: Eh, ..., quan el ..., la x tendeix a 2, la funció tendeix a 0.25.
 Inv: Ara intenta posar-ho una mica més formal? Di, si és possible, quin és el límit en $x = 2$.
 EST59: ... límit, ..., x tendeix a 2, ..., és 0.25.
 Inv: D'acord? Anem a canviar de tasca. Anem a la tasca 6 ..., en la tasca 6 respon la pregunta a, i dius que x s'aproxima a 4, si?
 EST59: Sí.
 Inv: A què s'aproxima la funció?
 EST59: La funció ..., a 14, ..., si a 14, ...

Inv: On mires per a dir 14?

20:26

EST59: ..., no sé, ..., per aquí.

Inv: On estàs mirant, podries dir algun número per a veure el 14 on el mires?

EST59: Quan mire, ..., es va aproximant.

Inv: A què s'aproxima on estàs assenyalant amb el bolígraf?

EST59: A ..., a 15.5.

Inv: A 15.5. Aleshores hauríem de dir que la funció s'aproxima?

EST59: A 15.5.

Inv: Quan mires?

EST59: A ..., quan x val 3.9999.

Inv: I la funció s'aproxima a...?

EST59: A 15.5.

Inv: I si canviem de costat?

EST59: x val 4.00001.

Inv: I la funció s'aproxima a...?

EST59: 14.

Inv: A 14.

EST59: Ho explique?

Inv: Sí, d'acord? Això del 3.9 i del 4.001, ho podries dir d'alguna altra forma?

EST59: Quan x s'acosta a 4..., no sé posar-ho d'altra manera.

Inv: No? I una mica més formal, ho podries posar d'alguna forma?

EST59: Límit, ... vols dir el límit?

Inv: Sí, sí. Fa igual que siga verbal, o més formal.

EST59: ..., quan tendeix a 4, ..., és clar, és que ara hi ha, si dius que no tendeix a 14, jo veig que tendeix a 14.

Inv: Sí? Quan tu has dit el 14, jo he preguntat on mires?

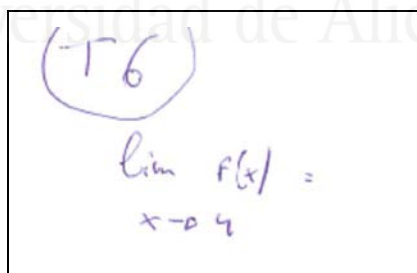
EST59: ..., és clar, aquí es va aproximant cada vegada més, ..., però aquí s'acosta a 15.

Inv: S'acosta a?

EST59: A 15.

Inv: A molt?

EST59: Bo, a 15.5, però, sí, a 15.5, i per aquell costat a 14, per tant ..., és més lògic que s'acosta al 15.5, espera, no ho sé, ..., estic en blanc (Figura 31).



$$\begin{array}{l} (-16) \\ \lim f(x) = \\ x \rightarrow 4 \end{array}$$

Figura 31. Resposta del EST59 a la Tarea 6

Inv: D'acord. Canviem de tasca?

EST59: Sí. Ara ja hem acabat el curs i ho he oblidat tot.

Inv: Estem en la tasca 8. Podries dir com intentes completar la taula?

EST59: ..., quan x és menor que 0.

Inv: Sí.

EST59: El valor de la x es multiplica per 2 i es suma 1.

Inv: Agafa la calculadora.

EST59: Per exemple, ..., -0.1 per 2 més 1, 0.8. Espera, no, no, no, quan 0 és major que x , ..., sí, estic en aquesta part.

Inv: Pots llegir ahí què posa?

EST59: Quan x és menor que 0 .

Inv: Quins valors de la taula són menors que 0 ?

EST59: A partir de -0 .

Inv: No tinc cap pressa.

EST59: ..., està part, ...

Inv: Eixe que està assenyalant que és el 0.0001 .

EST59: És major que 0 .

Inv: Aleshores has de substituir-lo on?

EST59: En la primera, quan $x...$, a no, sí, quan x és menor que 0 , és en aquell costat.

Inv: Tornem a calcular el valor, com, com?

EST59: Ho havia fet bé (Figura 32).

(13)
 $x = -0.1 \quad f(x) = 0.8$
 $x = -0.001 \quad f(x) = 0.998$
 $x = -0.0001 \quad f(x) = 0.9998$
 $x = 0.01 \quad f(x) = -3.02$
 $x = 0.001 \quad f(x) = -3.002$
 $x = 0.0001 \quad f(x) = -3.0002$

(d) ~~amb~~ $x < 0 \quad f(x) = 1$
 $x \geq 0 \quad f(x) = -3$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \begin{cases} x < 0 = 1 \\ x \geq 0 = -3 \end{cases} - \lim_{x=0} f(x) = -3$

Figura 32. Resposta del EST59 a la Tasca 8

Inv: Ho havies fet bé, sí.

EST59: Clar. Però a vegades dubte, i ja ..., per 2 més 1 , i ix 0.8 .

Inv: x val?

EST59: -0.1 .

Inv: I la funció?

EST59: I $f(x) = -0.8$.

Inv: Calcula més valors. Necessites que calcules un, dos, tres, fins que tingues clar la funció a què s'aproxima?

27:35

EST59: ...

Inv: La x val -0.001 , i la funció?

EST59: La funció 0.998

Inv: 0.9998 .

EST59: Quan x val -0.0001 , la funció ..., la funció val 0.9998 , per tant, s'acosta a 1 .

Inv: S'aproxima a 1 .

EST59: S'aproxima a 1 .

Inv: Anem a canviar de valors. Anem a l'altra part de la taula.

EST59: Quan x val 0.01 , la funció és igual ..., a -3.02 . Quan x és igual a 0.001 , la funció és igual a -3.002 . Quan la x és igual a 0.0001 , la funció és igual a -3.0002 , trobe que és això, però anem a fer-ho.

Inv: Sí, anem a fer-ho. És fàcil que la suposició siga correcta.

EST59: ...

Inv: Era correcta la suposició?

EST59: Sí, era correcta.

Inv: A què s'aproxima la funció?

EST59: La funció va aproximant-se a menys ..., a -3 .

Inv: A – 3. Podríem fer una frase que ho englobarà a tot?

EST59: Quan x tendeix a 0 , jo faig la b , no? Quan x tendeix a 0 , la funció ..., és que aquí tendeix a 1 , i aquí a -3 , ...

Inv: Com podríem escriure això?

EST59: És que aquí és igual, quan és igual és que és 0 , és -3 . Però quan x és menor que 0 .

Inv: Podries escriure això que dius? ... Intenta dir en paraules el que acabes d'escriure.

EST59: Quan x és menor que 0 , la funció s'aproxima a 1 , i quan x és major o igual a 0 , la funció s'aproxima a -3 (Figura 32)

Inv: Ho podries escriure més formal?

EST59: Sí, límit de $f(x)$, ..., ho pose amb un clau, quan x ... dona 1 , i quan x ...

Inv: I si intentarem contestar la pregunta e , el límit.

EST59: A d'acord, seria aquest, ..., el límit quan $x=0$, seria -3 ...

35:12

Inv: Anem a canviar de tasca i fem l'última? Anem a la tasca 7 ..., contestes la pregunta a , i la pregunta b . En la b dius que s'aproxima a 15 . On mires, com ho fas?

EST59: Cada vegada, arriba a un punt que és 15 , i després...

Inv: Però en la pregunta b , la x què val? ... A què s'aproxima la x ?

EST59: A 4 .

Inv: A 4 , però els valors són 3.9 , 3.99 , ...

EST59: 3.999 , ..., s'aproxima a 4 , i la funció a 15 .

Inv: La funció s'aproxima a 15 .

EST59: La funció s'aproxima a 15 .

Inv: ... Anem a la pregunta c . Quan x pren els valor 4.1 , 4.01 , 4.001 , a què s'aproxima la funció?

EST59: ..., també ..., s'acosta a 15 , ..., quatre, ..., s'aproxima a 15 , no, no, ..., s'aproxima a 10 , però ..., a 10 .

Inv: Anem a la pregunta d ? Podries fer la descripció?

EST59: Quan ..., quan x tendeix a 4 , la funció tendeix a 15 , sí però, ací també tendeix a 4 , ..., però ací és menor que 4 .

Inv: Podries escriure això? (Figura 33).

Figura 33. Resposta del EST59 a la Tasca 7

EST59: Quan x és menor que 4 , la funció tendeix a 15 , i quan la x és major que 4 , la funció tendeix a 10 , no, aquí és igual també.

Inv: D'acord.

EST59: Aquí no ..., aquí se suposa que no l'agafa? I quan siga ..., però quan és 4 , és igual a 10 , si jo crec que així està bé.

Inv: I respecta a la pregunta e , per acabar? Exactament el límit en el punt $x = 4$?

EST59: ..., quan $x = 4$, ..., a 10 .

Inv: Per què 10 ?

EST59: Perquè se suposa que aquest punt engloba al 4 .

Inv: Ho deixem?

EST59: Com vulgues.

Inv: Moltes gràcies. 41:41

Entrevista al EST61

Inv: Hola, bon dia!

EST61: Bon dia!

Inv: Comencem per la tasca 1? Intenta explicar-me per què a la pregunta a, a quin número s'aproxima la x , respons que 3.

EST61: Perquè, ..., tant a una banda com a l'altra del quadre, hi ha ..., els números, no, la suma, a l'anar sumant, la majoria, tots el nombres s'aproximen més a 3 que a cap altre.

Inv: Això parlant de la x ; i quan parlem de la funció, a quin número s'aproximen?

EST61: A 16, per la mateixa raó.

Inv: Ah!... sí?

EST61: ... en x el número més xicotet que apareix és 2.9 i el més gran és 3.1. En canvi en la funció el més gran és 14.21

Inv: Sí, sí, però llig-me eixos números i dis-me a que s'aproximen? Llig me'n algun d'ells.

EST61: 14.21, 14.9992001.

Inv: A què s'aproximen?

EST61: ... a 15, en eixe cas.

Inv: A 15, bé. Això és per la l'esquerra, i per la dreta a què s'aproximen?

EST61: Per la dreta, els tres primers a 15 i el segon a 16.

Inv: Nosaltres estem aproximant-nos al 3, no és això? I quan es aproximem al 3, la funció a que tendeix?

EST61: A ...

Inv: No fa falta que em mires, tu mira la taula. Tu has donat una conclusió molt contundent en la x , però en la funció no dones una resposta tan contundent.

EST61: A 15, no ho sé.

Inv: La pregunta que jo vull fer-te és perquè a la x dones una resposta molt contundent mirant la taula, però ...

EST61: ...

Inv: Tornem a començar. A quin número s'aproxima la x ?

EST61: A 3.

Inv: A quin número s'aproxima al funció?

EST61: A 16. Es que m'estàs marejant. No sé ... no sé, no ... a 16 perquè seria el número més gran, o ..., la majoria de les respostes no tenen massa fonament matemàtic ...

03:00

Inv: Passem a la tasca 3. A quin valor s'aproxima la x ?

EST61: A infinit.

Inv: Mira la taula.

EST61: Va de 0.26 a 0.24

Inv: No, no la x .

EST61: 1.9, 1.99, 2,01.

Inv: A quin valor s'aproxima?

EST61: A 2.

Inv: A 2. Canviem de banda. 2.1, 2.01, 2.001... A què s'aproxima?

EST61: A 2.

Inv: A 2. Passem a la funció?

EST61: Sí.

Inv: A que s'aproxima la funció? Vols calcular algun valor més, o no?

EST61: A 0 coma, a 0, a 0.25, a 0.24...

Inv: A que s'aproxima?

EST61: A 0... Igual que l'altra estava a 16. Són dues línies que tenen..., i en l'altra era per la mateixa raó.

Inv: Llig eixe número

EST61: 0,24, 0.24.

Inv: A que s'aproxima?

EST61: A 0.2 o a 0...

Inv: Torna a calcular algun valor de la taula.

EST61: ...

Inv: La x què valia?

EST61: 2.1 (Figura 34).

(T3)	$x = 2.1$	$x = 2.001$
	$f(x) = 0.2439$	$f(x) = 0.249437$

Figura 34. Resposta del EST61 a la Tasca 3

Inv: I la funció què ens dóna?

EST61: 0.2439.

Inv: Calcula algun valor més. Valors de la taula.

EST61: D'acord.

Inv: Ara està calculant 2.001.

EST61: 0.249937.

Inv: A què s'aproxima la funció?

EST61: A 0.25.

Inv: Tornem a la tasca 1. A què s'aproxima la funció?

EST61: A 15.

Inv: A 15. Costa, és difícil, eh?

EST61: Sí.

Inv: Estem en la tasca 2. Tu contestes a les dues primeres preguntes. A la pregunta b , dius que quan la x val 1.9, 1.99, 1.999, la funció s'aproxima a -5 . Podries indicar-me on mires per a donar eixa resposta?

EST61: A la gràfica.

Inv: A la gràfica. Després, en la pregunta c , quan la x s'aproxima a 2.1, 2.01, 2.001, a què s'aproxima la funció?

EST61: A infinit.

Inv: Assenya-la'm amb el bolígraf on mires en la pregunta b ?

EST61: Ahí.

Inv: Ahí. La x val 1.9, 1.99, 1.999, i la funció s'aproxima...?

EST61: A -5 .

Inv: Anem a situar-nos en el 2.1, 2.01, 2.001, a què s'aproxima la funció?

EST61: A ..., a -4.5 , al ser, jo he pensat en l'infinit.

Inv: Tu ara assenyaes l'infinit, però jo no et pregunte això.

EST61: A -4.9 , a 4.89 , a...

Inv: A què tendeixen eixos números?

EST61: A -5 .

Inv: Intenta fer-me la descripció de la funció. Al fer la descripció, voldria que la feres al voltant del 2.

EST61: A -5 .

Inv: Fes-me una frase completa. Una persona que actua en el teatre pot improvisar un text.

EST61: Amb el comportament de la variable x , la funció.

Inv: A què s'aproxima la x ?

EST61: Quan la x s'aproxima a 2, la funció s'aproxima, la funció està al voltant de -5 .

09:19

Inv: Bé. Series capaç d'escriure'm el límit de la funció? En una nomenclatura una mica més formal?

EST61: ...

Inv: A què tendia la x ?

EST61: A 2.

Inv: Podries anotar-ho?

EST61: ...

Inv: Eixa nomenclatura la coneixes?

EST61: No.

Inv: A què s'aproxima la funció?

EST61: A -5 .

Inv: I tu què has posat en el full?

EST61: A menys infinit (Figura 35)

T2 $\lim f(x) = -\infty$
 $x = 2$
 $f(x) = -5$

Figura 35. Resposta del EST61 a la Tasca 2

Inv: A què s'aproxima la funció quan x s'aproxima a 2?

EST61: A -5 .

Inv: Aleshores, hauries de posar que...

EST61: Quan la x s'aproxima a 2, la funció s'aproxima a -5 (Figura 32)

Inv: El que tu has posat, no és el que has expressat.

EST61: ...

10:49

Inv: Anem a la tasca 1. Podries fer-me una descripció verbal del comportament de la funció?

EST61: Quan la x , ..., quan la x està al voltant del 3, la funció s'aproxima a 16, no a 15.

Inv: Pots escriure-ho més formal?

EST61: ... (Figura 36)

T1 $x = 3$
 $f(x) = 15$

Figura 36. Resposta del EST61 a la Tasca 1

Inv: I en la tasca 3, una descripció?

EST61: Quan la x s'aproxima a 0.25.

Inv: Quan la x s'aproxima a...

EST61: Quan la x s'aproxima a 0.25, no ha 2, la funció està al voltant de 0.25.

Inv: Anem a la tasca 6. A què s'aproxima la x ?

EST61: A 4.

Inv: No dubtes massa, dónes una resposta prou clara.

EST61: Sí.

Inv: A què s'aproxima la funció?

EST61: A 15.

Inv: On mires? Quins números estàs mirant per a dir a 15?

EST61: 15.52, 15.5, i 14.0003, 14.00003.

Inv: A què s'aproximen eixos números?

EST61: A 14, i a 15.5.

Inv: D'acord. Però, podries especificar-ho una mica més? Com podem distingir un de l'altre?

EST61: No ho sé.

Inv: Anem a intentar descriure el comportament.

EST61: Quan la x s'aproxima a 4, la funció s'aproxima a 15.

Inv: Mirarem la taula. Llig algun número.

EST61: 15.530, 15, 5254, 15.5001, 15.50001, 14.00003.

Inv: A què s'aproximen?

EST61: A 15.5.

Inv: I els altres?

EST61: A 14.

Inv: Descriu el comportament de la funció. Comences amb molta energia, però després et frenes.

EST61: Quan la x s'aproxima a 4, la funció està situada entre 15.5 i 14.

Inv: Podries matisar una mica la diferència entre els dos valors? On mires per a dir un número, on mires per a dir l'altre?

EST61: Quan la x menor a 4, la funció s'aproxima a 15.5, i quan la x és major a 4, la funció s'aproxima a 14.

Inv: Això pots escriure-ho en el full?

EST61: ... (Figura 37)

14:30

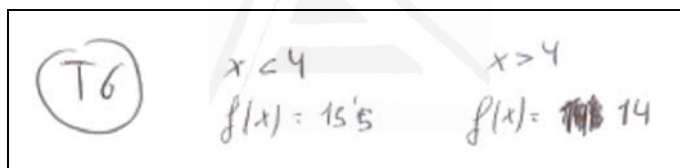


Figura 37. Resposta del EST61 a la Tasca 6

Inv: Intenta contestar la pregunta d? Què podem dir del límit quan la x ...?

EST61: Quan la x és 4... No sé perquè he posat 0.

Inv: Si en algun moment vols tornar enrere, o vols contestar alguna cosa, ho dius. Canviem, anem a la tasca 7. En la pregunta a et demane que tries un punt de la gràfica. El que intente es veure si alguna persona té dificultats en triar un punt. En un punt que situes en tinc prou.

EST61: 4.

Inv: Quan la x val molt?

EST61: Quan la x val 4.

Inv: Quan la x val 4, la funció val?

EST61: 10, 15?

Inv: Això ho has de contestar tu. Canvia de punt, agafa'n un que no siga el 4.

EST61: Quan la x val 4.1, la funció val 10.

Inv: I quan la x val 4.01, què val la funció?

EST61: ¡Je!, ¡je!

Inv: No estic enganyant-te.

EST61: Jo he posat infinit en la pregunta c, perquè al ser exponencial i muntar cap amunt.

Inv: Però ahí estaries contestant al límit en l'infinit, però...

EST61: Sí, al número, el número seria al 10.

Inv: En l'apartat c, i en l'apartat b? Quan la x s'aproxima a 3.9, 3.99, 3.999, ...

EST61: A 15.

Inv: A 15. Dis-me algun valor de la funció.

EST61: En el 2, la funció val 15.

Inv: Fes-me una descripció.

EST61: Quan ... la x ... s'aproxima, quan s'aproxima a , quan la x pren un valor menor a 4, la funció...

Inv: Quina mà has maneja't?

EST61: Està.

Inv: Quina és està?

EST61: L'esquerra.

Inv: Eixa nomenclatura, la coneixes?

EST61: No.

Inv: No.

EST61: Quan la x és menor a 4, s'aproxima a 4, la funció s'aproxima a 10.

Inv: A molt?

EST61: Ah!, a 15.

Inv: A 15.

EST61: I quan la x és, quan la x pren un valor major que...

Inv: Quina fas servir ara?

EST61: La dreta.

Inv: La dreta, eixa nomenclatura no la coneixes?

EST61: No, i quan la x pren un valor major que 4, la funció s'aproxima a 10.

Inv: I exactament, en el punt 4, què podríem dir?

EST61: Que s'aproxima a 10. És que el punt no sé si està en ..., no sé, no me'n recorde d'això.

Inv: Quan acabem t'ho conte. Anem a la tasca 8.

18:45

Inv: Quan intentes completar la taula, estàs posant dos valors.

EST61: ¡Mm!

Inv: Per què poses dos valors?

EST61: Perquè a l'equació..., hi ha ... dues x .

Inv: Dues fórmules.

EST61: Sí, dues fórmules.

Inv: Dues funcions.

EST61: Que semblen diferents.

Inv: Sí.

EST61: Una és ..., aquí hauria d'haver utilitzat aquesta, i d'aquí cap allà l'altra.

Inv: És fàcil que el que dius siga correcte, però precisa una mica més. Per a què ho grave.

EST61: Ho escric?

Inv: Bé, o ho dius? Com vulgues.

EST61: La primera funció que és $2x$ més 1, per a x menor a 0. S'haguera que aplicat a x menor que 0. I la segona equació que és $-2x$ menys 3, s'haguera aplicat a la part de la taula on x pren valors igual majors que 0.

20:00

Inv: D'acord. Mirem el números que havies posat, a que s'aproxima la funció? Per què la pregunta a, a què s'aproxima la funció responns que a 0.

EST61: Quan la x pren valors menor que 0, la funció s'aproxima a -3.

Inv: Quan funció ..., sí? Vols agafar la calculadora?

EST61: Quan la x , és que si ...

Inv: És que com tens dos valors depèn.

EST61: ...

Inv: Quin valor de la x estàs posant?

EST61: Quan la x és menor que 0, la funció s'aproxima a 0 coma, a 1. I quan la x pren valors iguals o majors que 0, la funció s'aproxima a -3.

Inv: I en el punt 0, què podríem dir?

EST61: Que la funció s'aproxima a -3.

Inv: Perquè dones eixa resposta?

EST61: Per què és el cas de la segona equació, de la segona funció que s'ha d'aplicar quan x és igual o major que 0 . Com x és igual a 0 , agafem eixa!

Inv: Jo pense que està bé. Moltes gràcies.

EST61: Ja està.

Inv: Sí.

21:50



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Entrevista al EST63

Inv: Hola bon dia!

EST63: Bon dia!

Inv: Estem en la tasca 1. Tu dones una resposta a la pregunta *a*, dones una resposta a la pregunta *b*, però, ... Podries dir-me on mires, o què fas per respondre la pregunta *a*, a quin número s'aproxima x , per a dir que és 3?

EST63: Perquè, perquè com apareix un buit entre el 2.9999 i el 3.0001, doncs jo pensava que es referia a eixe buit. Doncs, jo he dit: Quin número està entre eixos dos, doncs el 3.

Inv: El 3, i de la mateixa forma respons a l'apartat *b*.

EST63: Sí. A l'apartat *b*, sí.

Inv: A la pregunta *b* no respons.

EST63: A la *b*?

Inv: No, a la *c*. A la *c*, no respons. Podries intentar descriure'm el comportament de la funció, al voltant del punt 3?

EST63: En el punt 3?

Inv: Sí, o en les proximitats del punt 3.

EST63: No sé, la recta passa pel punt 3, jo pense que segons els valors donats, la gràfica es representa amb una recta. Doncs, la funció..., sí, que passa pel punt 3. No sé.

Inv: T'ho preguntaré d'una altra manera. Podries descriure'm que diu la taula amb paraules?

EST63: La taula?

Inv: Sí.

EST63: No sé, és una taula estranya, perquè té en els números que comencen per 2, eh, sí, que són 2 coma decimals, el número és 14.21, i els números 2 i 1 es repeteixen separant-se per zeros seguits. Doncs, no sé molt bé,...

Inv: Si en algun moment vols que tornem enrere, podem fer-ho.

EST63: No, es que no ho sé.

Inv: Intenta argumentar-me, en la pregunta *d*. Tu has posat alguna cosa que jo no acabe d'entendre que vols dir.

EST63: En la pregunta *d*?

Inv: Sí. De fet el que fas en la *d*, ho fas en totes les tasques.

EST63: En totes?

Inv: Sí, en totes.

EST63: Perquè, no sé, jo pense que es referia al punt. Perquè el límit es pot dir que és més infinit, no menys infinit, menys infinit i més infinit, pense jo, però en eixe punt, en el punt 3 pense que és 15. O no?

Inv: Però, el punt, a mi el punt, a mi m'interessa més el límit.

EST63: El límit?

Inv: Sí el límit.

EST63: Veient com va la taula!

Inv: Sí.

EST63: És menys infinit, i més infinit.

Inv: Mira la taula. Mira la taula bé. Com lliges tú el més infinit, o el menys infinit? On mires tu això en la taula?

EST63: En els valors...

Inv: Sí, llig-los, llig-los, els valors.

EST63: 2.9.

Inv: Sí.

EST63: La funció de 2.9 és 14.21.

Inv: Sí.

EST63: En el punt 2.99, la funció val 14.9201.

Inv: Sí.

EST63: En el punt 2.999, la funció val 14.992001.

Inv: Sí.

EST63: En el punt 2.9999, la funció val 14.99920001.

Inv: Continua, no pares, continua.

EST63: Per l'altra banda. Quan x val 3.0001, la funció val 15.00080001.

Inv: Aleshores, quan x ... s'aproxima ...

EST63: A 3, la funció s'aproxima a 15.

Inv: Ah, a 15, això no és infinit?

EST63: No!

Inv: No, sorprenent, eh.

EST63: ¡Mm!

Inv: Ho podries escriure ahí. (En referència al full en blanc de la llibreta). Posa c . No espera, primer $T1$, ..., i posa c . Quan x ... (Figura 38)

EST63: Quan x s'aproxima a 3, el límit s'aproxima a 15.

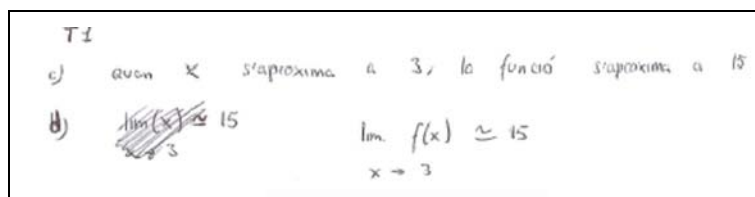


Figura 38. Resposta del EST63 a la Tasca 1

Inv: S'aproxima a 15. I em podries respondre a la pregunta d?

EST63: A la pregunta d?

Inv: Sí, que és el mateix però més formal.

EST63: A quin número s'aproxima la funció, a 15.

Inv: Sí.

EST63: A 15.

Inv: Sí, en una nomenclatura, un poquet més formal.

EST63: El límit de la funció.

Inv: Sí, però en nomenclatura matemàtica.

EST63: Això (assenyala la resposta del qüestionari).

Inv: Sí, això, però més ben posat.

EST63: ¡Je!, ¡je!. El límit de x , en el punt 3, en el punt $x = 3$, és igual a 15. Ah!

Inv: Eixe ah, encara no sé què vol dir, si, alguna cosa, si. Trobe que anem entenent-nos. Encara falta un xicotet detall. El límit de què estem calculant?

EST63: De 3.

Inv: Quan x tendeix...

EST63: A 3.

Inv: I quan x tendeix a 3, estem calculant, el límit de què?

EST63: De la funció.

Inv: De la funció. Això és el que no estàs posant ahí (Torna a repetir el que havia contestat al qüestionari).

EST63: Espera.

Inv: Pots tatxar-ho si vols, pots tatxar-ho, no, no, suficient. Eixa nomenclatura que estàs escrivint ara, la coneixes?

EST63: Més o menys.

Inv: D'acord.

EST63: Com no sabem si és 15 (no posa un igual, posa el símbol d'aproximat, figura 36).

07:12

Inv: Bé. Anem a canviar de tasca. Passem a la 2... Dónes una resposta a la pregunta a, a la b, a la c. Podries intentar contestar-me a la pregunta d?

EST63: ...

Inv: T2, sí. Descriure el comportament, sí, el comportament.

EST63: La funció té dos parts. Es pot veure que la primera és mitja paràbola.

Inv: Sí.

EST63: I la segona és una recta. Fins al punt x .

Inv: Sí, però a mi m'interessa en concret en el punt 2.

08:01

EST63: Quan ... Quan x s'aproxima a 2, la funció s'aproxima a -5 .

Inv: I també em podries respondre a la pregunta e .

EST63: A la e , el límit de la funció d' x quan la x val 2 és igual a -5 . (Ho escriu en el full adjunt) (Figura 39)

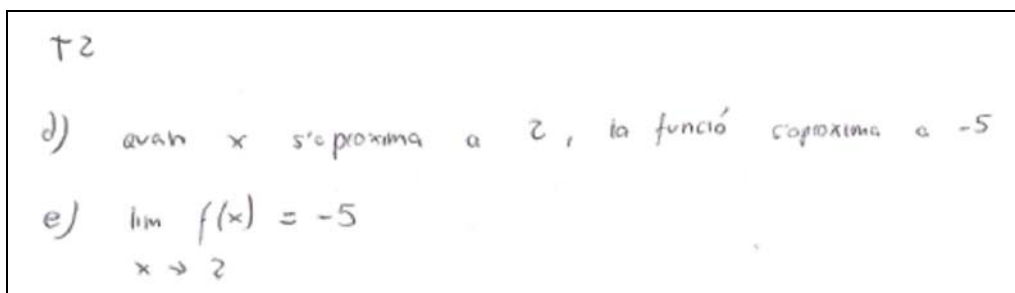


Figura 39. Resposta del EST63 a la Tasca 2

Inv: Bé. Canviem de tasca. Completes la taula, respons a les aproximacions, a les preguntes b i c . Podries intentar descriure'm el comportament?

EST63: Quan ..., x ... espera que ...

Inv: No tenim cap pressa.

EST63: Quan x s'aproxima a 2, la funció s'aproxima a 0.25 , però mai arriba fins aquest valor per que es produeix una asímptota.

Inv: Em podries contestar també la pregunta e ?

EST63: El límit de la $f(x)$, quan x s'aproxima a 2, és de ..., a veure com ho expresse així, ..., no sé com expressar-ho, ..., perquè no agafa el punt 0.25 , no sé com expressar-ho. No agafaria el punt. (Figura 40)

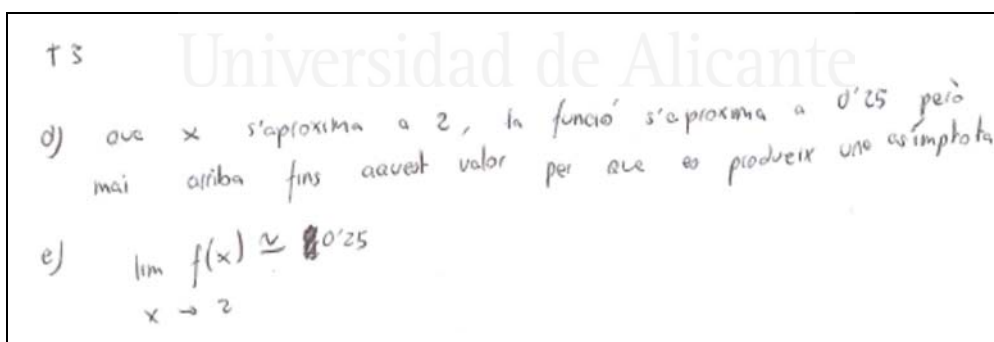


Figura 40. Resposta del EST63 a la Tasca 3

Inv: Ahí no posaries el signe igual.

EST63: No. No el posaria... aproximadament.

Inv: Aproximadament.

EST63: D'acord.

Inv: Estem en la tasca 6. Respons la pregunta a . No respons la pregunta b . Podries intentar-ho ara?

EST63: Se m'haurà passat. No, no, perquè té dos valors.

Inv: Té dos valors

EST63: I no se sap quin agafa, perquè ..

Inv: Però podries especificar-me eixos dos valors com són?

EST63: El primer valor és 15.5

Inv: Sí.

EST63: 15.5, i el segon valor és 14.

Inv: Especifica'm un poquet més, com puc distingir. Coneixes alguna forma de distingir, o d'especificar...?

EST63: Els valors ...?

Inv: Sí. Quan em dius 15.5 on he de mirar?

EST63: Al punt, quan la funció tendeix a... , quan x tendeix a 4 la $f(x)$ tendeix a dos punts.

Inv: Però necessitaria que m'especificares una mica més.

EST63: En el punt $x = 4$.

Inv: On estàs mirant, per a dir-me ... Quan dius 14 on mires?

EST63: 14, mire, mire dalt.

Inv: Eixe per dalt té un nom. Això ho controles.

EST63: No. No ho controle.

Inv: I una simbologia que ens done això.

EST63: Quan el número és major que 4, el número...

Inv: Podries intentar escriure això. En l'apartat b , o en el c ? A vegades tinc dificultats per a dir quin és el b , o quin és el c .

EST63: ... si el número és ... major que 4, quan el número és major que 4, el número al que s'aproxima la funció és 14; quan el número és menor que 4 la funció s'aproxima a 15.5.

Inv: Podries intentar contestar a la pregunta d . El que has escrit, posa ho una mica més formal.

EST63: Límit de la $f(x)$ quan x s'aproxima a 4 té dos punts, 15 ..., 15.5 unit, no se com dir-ho, a 14 (veure anotació en el full adjunt). O no sé com dir-ho. A 14, més o menys. (Figura 41)

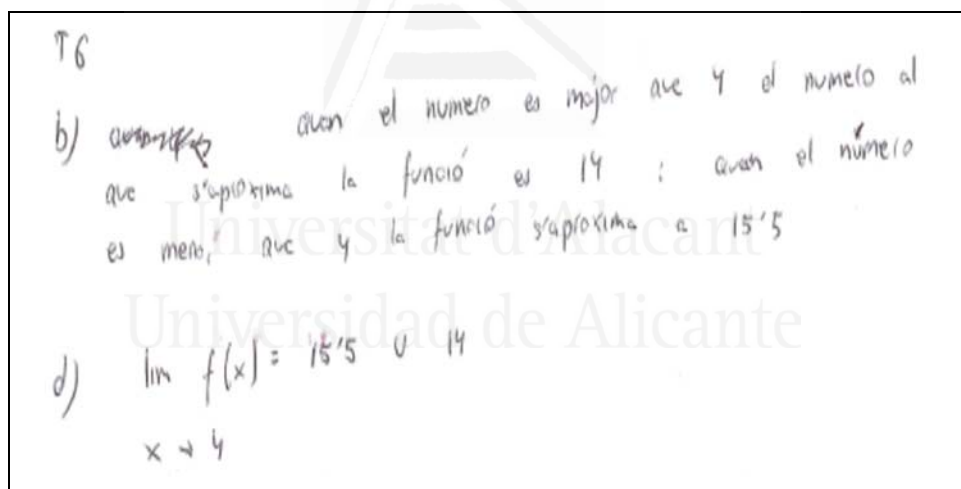


Figura 41. Resposta del EST63 a la Tasca 6

Inv: No ho podries escriure d'una altra manera?

EST63: És que nomenclatura matemàtica no en sé molta.

Inv: Si en algun moment vols canviar alguna cosa, ho fem.

EST63: D'acord, d'acord!

Inv: Passem a la tasca 7... respons la pregunta a , respons la b , respons la c . Podries descriure'm el comportament de la funció?

EST63: Quan ...

Inv: Sí, escriu-ho ...

EST63: El comportament d' x com és de paràbola, tendeix a infinit. Quan x s'aproxima a més infinit el valor de la funció s'aproxima a menys, no a més, a més infinit, i per l'altra banda, quan x s'aproxima a menys infinit, la funció també, s'aproxima a menys infinit.

Inv: Podries assenyalar-me amb el dit, eixos dos límits on els mires?

EST63: La primera està, i la segona està, i continua.

Inv: La forma amb què ho indiques està molt bé. Però podries dir-me on s'aproxima la x en les preguntes b , i c ?

EST63: Quan x s'aproxima a 4.

Inv: Eixa seria la resposta que voldria que em donares en la d . Tu en la d m'has donat els límits en l'infinit. D'acord, correcte. Eixos els identifiqués bé. Però podries cenyir-te als valors als que s'aproxima la x ?

EST63: Quan el valor de x s'aproxima a 4, el número al que s'aproxima la funció és a 15. La funció val 15.

Inv: Quan s'aproxima a 4, on mires? Especifica'm un poquet més, perquè has donat dos valors diferents en b i en c . Especifica'm un poquet més.

18:48

EST63: Perquè en la funció que apareix representada, en el punt 4 apareixen dos valors per a la funció. El primer és 15 i el segon és 10, però el 10 apareix el punt buit. (Figura 42)

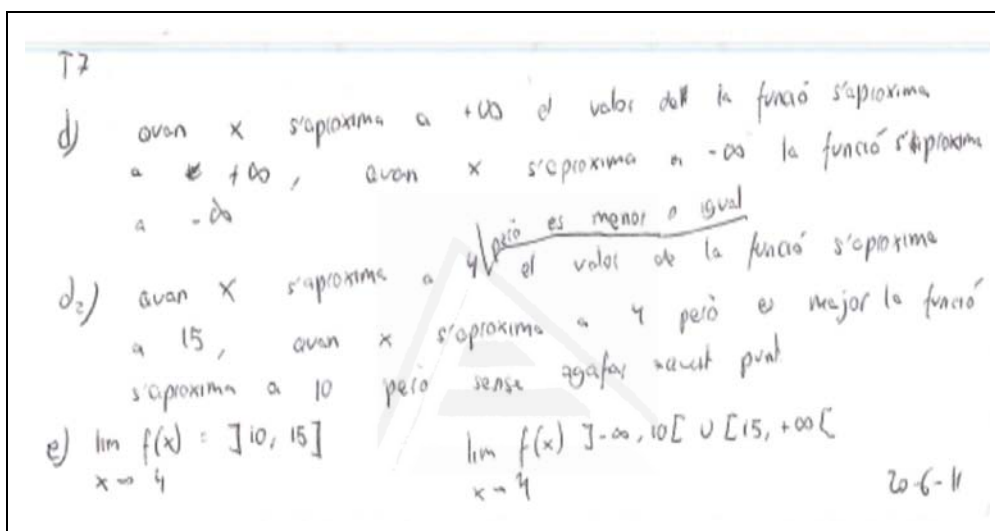


Figura 42. Resposta del EST63 a la Tasca 7

Inv: Un buit.

EST63: Com no l'agafem, agafem l'altre. L'altre val 15.

Inv: Sí.

EST63: Doncs, quan x s'aproxima a 4, el valor de la funció s'aproxima a 15, i quan x s'aproxima a 4 però és major, la funció s'aproxima a 10, però sense agafar aquest punt. (Veure full adjunt)

Inv: Ací has posat, quan x s'aproxima a 4 però és major. En la primera part no has distingit el 4 per a res.

EST63: Quan x s'aproxima a 4 però és menor o igual ...

Inv: I podries intentar contestar-me a la pregunta e?

EST63: ... s'ha intentat (Figura 39)

Inv: Sí, sí, està molt bé. Passem a la tasca 8.

EST63: Que crec que, que no sé si ...

Inv: Perdona un segon, és que buscava una calculadora... Bé. Anem a la tasca 8. Podries intentar buscar-me algun valor de la taula? Podries intentar buscar-me el valor del -0.1 ?

EST63: Sí. Seguint la $f(x)$. Quin valor m'has dit el -0.1 o el 0.1 , quin vols, quin m'havies dit?

Inv: Comencem pel primer que has dit, pel negatiu -0.1 .

EST63: Observem la funció, i sabem que com que és número negatiu és menor que 0.

Inv: Sí, correcte.

EST63: Per tant, si x és menor o igual a 0, si x és menor que 0 la funció que s'aplica és la del doble d' x més 1.

Inv: Correcte.

EST63: Agafem el -0.1 i el multipliquem per 2, pel doble i li sumen 1.

Inv: I dóna?

EST63: 0.8.

Inv: 0.8, sí, sí posa-ho, posa-ho! Si tot el que dius és molt correcte. Sí, sí, identifiqués perfectament la part que has de substituir, i la substitució ha sigut impecable, però no coincideix amb el que tu vas posar.

EST63: Ja, ho vaig fer ràpid, no sé.

Inv: En el que escrius, posa què val la x . D'acord millor (Figura 43). Provem algun valor més.

EST63: Provem -0.001 , ..., espera, i li sumem 1, ... ara agafem un número major 0, com el 0.001, i la funció ens diu que si és un número major que 0 o igual, s'aplica la funció de menys el doble de $x-3$, agafem 0.01 i el multipliquem pel menys doble i li sumem, no, i li restem -3 .

T8

a)

x	-0.1	-0.01	...	0.01
$f(x)$	0.8	0.98	...	-3.02

c)

Quan x s'aproxima a 0 el valor de la funció s'aproxima a dos punts: -3 y 1 però el valor real del límit és -3

Figura 43. Resposta del EST63 a la Tasca 8

Inv: No, en tinc prou. Ho controles perfectament. Volia saber perquè havies respost correctament una part de la taula, i l'altra no. També distingeixes perfectament quina part cal substituir. També respons la pregunta b. Quina resposta donaries ara a la pregunta c? A què s'aproxima la funció?

EST63: La funció s'aproxima a dos punts, a -3 i a 2.

Inv: Però amb els nous valors. Eixa és la resposta que has donat tu en el qüestionari.

EST63: Però s'aproxima, però només hi ha un punt. La funció, ..., quan x s'aproxima a 0, el valor de la funció s'aproxima a dos punts, -3 i 2. Però...

Inv: Podries mirar els valors de la taula que has acabat de calcular.

EST63: Ah, és veritat, sí!

Inv: Tu respons el mateix que en el qüestionari, però hem canviat algun valor.

EST63: a -3 i a 1, però...

Inv: Però...

EST63: Però, realment ..., el límit de la funció, quan x val 0, perquè la funció especifica que quan x és igual a 0 la funció que s'aplica és menys el doble de la funció -3 , doncs sabem que el valor de x és 0, però el valor real del límit és -3 (Figura 43).

Inv: -3 . D'acord. Canviem de tasca. Anem a situar-nos en la tasca 10. El que voldria preguntar-te és si em podries donar alguna solució distinta de la que tens en el qüestionari. Si podries fer-me alguna gràfica que complira les tres condicions, modificant alguna cosa diferent del que ja hi has posat.

EST63: A veure, anem a estudiar-la.

Inv: Sí, sí, no tenim cap pressa, pense que després d'aquesta podem acabar la entrevista, o podem anar a la tasca 5 per si vols intentar fer alguna gràfica.

EST63: La funció ens diu que si el valor és 0, el punt passa pel 4. Si el punt és, si $l'x$ és 0 la funció passa per $y = 4$. Aleshores sabem que...

Inv: És el puntet que estàs marcant ara. On has marcat el punt?

EST63: En el 4.

Inv: Compta, compta.

EST63: ¡Ah!

Inv: No ens angoixem, ho dius bé!

EST63: Les presses. El límit quan la funció s'aproxima a 3.

Inv: Quan, què?

EST63: No, quan la $f(x)$ és 3, el límit és 1.

Inv: Però, qui s'aproxima a 3?

EST63: La funció, ah no, la, el valor de la x . Sabem que en 3 és 1.

Inv: I l'altra condició?

EST63: L'altra condició és que quan la x val -3 , és 0... Aleshores, podem fer el que, el que vulguem.

Inv: Intenta fer-ne alguna que no siga la mateixa.

EST63: ...

Inv: Intenta explicar-me per escrit eixe, "el que vulguem".

EST63: La contraria, la inversa, ...(en el qüestionari hi ha una paràbola). Més o menys.

Inv: Intenta fer-ne un altra... Què has fet en el gràfic? Què acabes de posar? (Figura 44)

EST63: Els punts.

Inv: Quants?

EST63: 3.

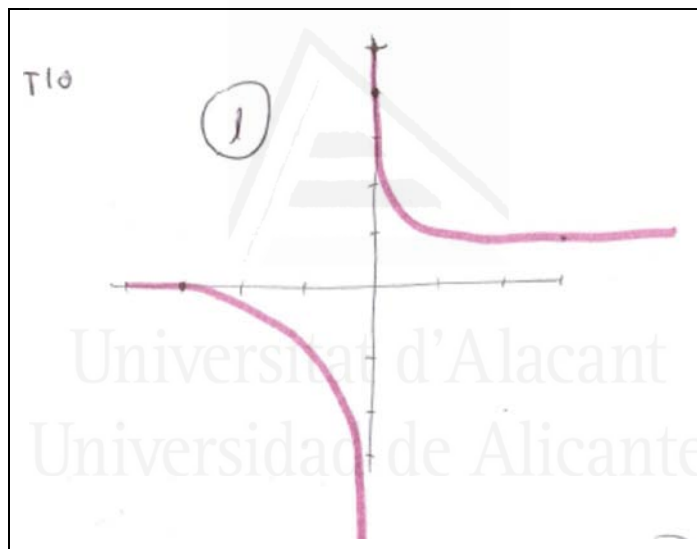


Figura 44. Resposta del EST63 a la Tasca 10

Inv: 3. Dibuixa alguna que no tinga asímtota.

EST63: Més o menys. (Figura 45, 2)

Inv: Fes-ne un altra!

EST63: ... (Figura 45, 3)

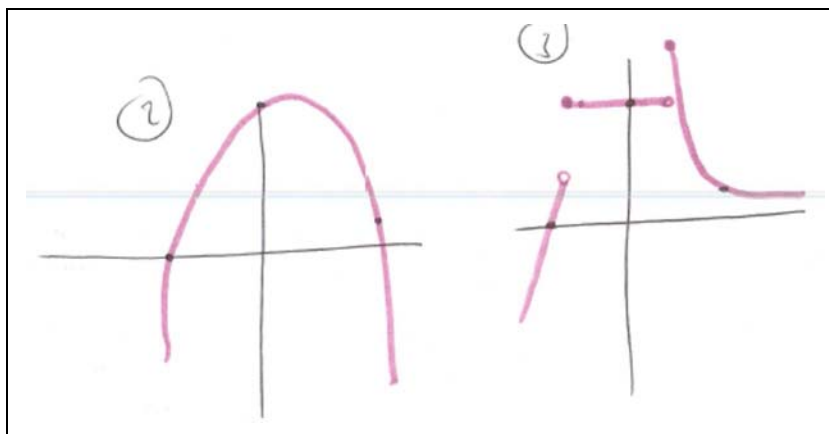


Figura 45. Resposta del EST63 a la Tasca 10

33:52

Inv: Jo pense que d'eixa ja en tinc prou. Anem a la tasca 5. Trobe que no la vas respondre. O sí, però eixa no ...

EST63: El dibuix em va eixir...

Inv: Una pregunta, jo he d'entendre que això tendeix a on?

EST63: A infinit.

Inv: Qui tendeix a infinit, ací?

EST63: x .

Inv: I la y què val?

EST63: I la y val?

Inv: En l'altura a la que està.

EST63: 3

Inv: Aleshores, no estaries responnent a la pregunta b . I una altra pregunta, en eixe valor la x val?

EST63: Jo he intentat representar que tendeix a 2.

Inv: Sí.

EST63: Però...

Inv: En el 2, la y val, quant?

EST63: Infinit.

Inv: Infinit, quin signe té eixe infinit?

EST63: ¡Eh!, menys.

Inv: I eixe?

EST63: Més infinit.

Inv: Aleshores, no estaries responnent a la pregunta c . Podries fer-me una gràfica que complira les tres condicions?

EST63: La dibuixes?

Inv: Ací. Si m'en dibuixes, tens diverses opcions. Dir-me que no és possible, però si en dibuixes una que siga possible, et preguntaré si en pots dibuixar una altra. Si no és possible, acabem. Si em dius que no hi ha solució, ens anem.

EST63: No, ho intentaré.

Inv: D'acord, gràcies.

EST63: ... En el punt, quant x val 1, la funció ha de valdre 3.

Inv: Eixe és el punt que poses ara.

EST63: El límit quan x és més infinit, ha de ser 2. No ha de passar d'ací.

Inv: Marques una línia discontinua horitzontal, a l'altura del...?

EST63: Del 2.

Inv: Del 2.

EST63: I quan x val 2.

Inv: Quan x s'aproxima a 2.

EST63: El valor tendeix a menys infinit.

Inv: Dibuixes una línia vertical a...?

EST63: A 2.

Inv: Vegem si fem una gràfica.

EST63: ... en aquesta part, jo crec que ... i després ... més o menys. (Figura 46)

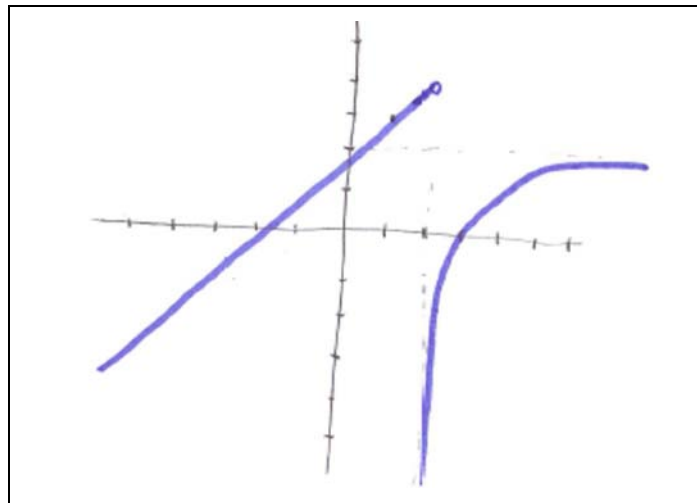


Figura 46. Resposta del EST63 a la Tasca 5

Inv: Em podries posar una altra solució?

EST63: ... Estic pensant.

Inv: No tenim cap pressa. Després d'aquesta acabem.

EST63: ... no sé, jo crec que ja està. (Figura 47)



Figura 47. Resposta del EST63 a la Tasca 5

Inv: Ho deixem?

EST63: Sí vols, fem més gràfiques, però pense que ja està bé.

Inv: Moltes gràcies.

39:34

Entrevista al EST64

Inv: Hola bona vesprada!

EST64: Bona vesprada!

Inv: M'agradaria que mirares la tasca 3. Completes la taula, respons a què s'aproxima a 2, i que la funció s'aproxima a 0.25, i respons la pregunta e. Però no respons la descripció del comportament de la funció. Podries justificar-me perquè la x s'aproxima a 2?

EST64: No he contestat a la descripció perquè no sé quin és el comportament de la funció.

Inv: A què s'aproxima la x ?

EST64: Ah, la x ?

Inv: Sí.

EST64: Al 2.

Inv: On mires, com ho fas?

EST64: Completant els valors de x amb la funció.

Inv: Per què respons que la x s'aproxima a 2, què mires?

EST64: La quantitat de decimals que hi ha en eixe número.

Inv: On has posat el dit?

EST64: En la funció?

Inv: En quina part de la taula?

EST64: En una d'elles, en la que vulgues. En la que necessites, com més decimals, més s'aproximarà al número.

Inv: Després respons la pregunta b, que la funció s'aproxima a 0.25. On mires?

EST64: Aquest i aquest.

Inv: Eixos aquests, podries especificar-ho una mica més?

EST64: Quan el valor de x en la funció té més decimals, els números són 0.25006, són més exactes que els altres valor de la taula.

Inv: La pregunta d la deixes en blanc.

EST64: Sí.

Inv: La pregunta d és un intent d'argumentar amb les dues anteriors.

EST64: Ah, ja, ja!

Inv: Podries descriure el comportament?

EST64: Quan major siga x , més s'aproximarà, quan més exacte siga x , més s'aproximarà al valor

Inv: Concreta'm.

EST64: Sí x , com més decimals tinga x més exacte...

Inv: Com més decimals tinga, a quin número s'aproximarà?

EST64: Com més decimals tinga s'aproximarà al número de la $f(x)$, que en aquest cas és 0.25.

Inv: Bé. A mi m'interessaria tornar a la tasca 1... Tornarè a fer-te totes les preguntes. A quin número s'aproxima la x ?

02:59

EST64: A 3.

Inv: Les preguntes te les faig perquè en una taula respons d'una forma molt correcta i en l'altra de forma diferent. A quin número s'aproxima la funció?

EST64: La funció a 15 ..., equivocacions.

Inv: Bé, però jo volia saber el perquè d'eixes equivocacions.

EST64: Perquè eren les 8 del mati, Joan!

Inv: Je, je. I em podries descriure el comportament de la funció?

EST64: Perquè com més exactes siguen el valor de x , més exacte serà el valor de y .

Inv: Si, però el que dius ho podries dir en tots els llocs, concreta'm una mica més?

EST64: Quan la x s'aproxima al valor...

Inv: A quin, a quin?

EST64: A 3, més exacte serà el valor de la funció.

Inv: S'aproximarà a molt?

EST64: A 15.

Inv: Bé. Quin seria el límit de la funció en $x=3$?

EST64: Supose que 15.

Inv: Això ho podries escriure una mica més formal?

EST64: ... (Figura 48)

Inv: Amb una nomenclatura més matemàtica?

EST64: ...

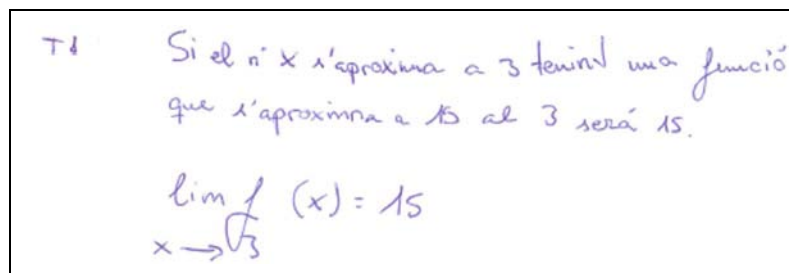


Figura 48. Resposta del EST64 a la Tasca 1

Inv: El que estàs escrivint és el que jo esperava que respongueres en la descripció. Un poquet més formal ho podries fer?

EST64: Ara no.

Inv: No?

EST64: Ho hauria de veure. Si tu em feres un argument un poc més formal, jo ho podria fer més formal.

Inv: En eixe tipus de llenguatge no (mirem la tasca 5)?

EST64: Home, amb eixe llenguatge, seria posant un 15?

Inv: Si que coneixes la nomenclatura formal?

EST64: Fa molt de temps.

Inv: Bé.

EST64: ...

Inv: Perfecte, bé... Ara estem en la tasca 2. Respon les preguntes a , la b , i la c . Podries descriure el comportament de la funció?

EST64: ... A mesura que augmentem el valor de x després del 2,..., de x a més infinit anirà augmentant el valor de y , passant de -2 , és que no sé, en passar. En l'interval $-2, 2$... La funció minva de menys infinit al 2.

Inv: Des d'on?

EST64: Des de menys infinit. Fins -2 descendeix, i des del 2 augmenta.

Inv: Ahi el que estàs fent és una descripció global, i és correcta. Però, podries fer-me una descripció en el punt 2?

EST64: A mesura que la funció s'aproxima al punt 2...

Inv: Que la x .

EST64: Que la x s'aproxima al punt 2, la funció minva.

Inv: A quin valor?

EST64: A -5 .

08:04

Inv: D'acord... Anem a la tasca 6. Respon la pregunta a , a quin número s'aproxima la x , i dius que a 4. Podries tornar a contestar-me la pregunta b ?

EST64: A quin número s'aproxima la funció?

Inv: Sí.

EST64: Hi ha dos casos, no sé si un s'anul·larà respecte a l'altre, però que són impossibles, però en el cas de la primera part de la taula, com major siga el valor...

Inv: Una cosa, amb quina mà ho has assenyalat?

EST64: Amb l'esquerra.

Inv: Eixa nomenclatura la coneixes?

EST64: No. Quina nomenclatura?

Inv: El senyalar una part com a l'esquerra i l'altra com a la dreta, no?

EST64: No, no entenc què vols dir-me, què vols dir-me?

Inv: Quan tu mires la taula que tens enfront, tu veus dues parts de la taula i veus dos números diferents als quals s'aproxima la funció, una forma d'identificar-la és dir que una és la part dreta i l'altra la part esquerra, això ho coneixes?

EST64: Sí, al no ser dues taules separades, si no una junta, la $f(x)$ no té, és impossible.

Inv: Impossible, què vol dir?

EST64: Que no es pot.

Inv: Per què no es pot?

EST64: Perquè no es pot, perquè si el mateix, si les dues parts de la taula, comptant en el centre, tendeixen a 4, se suposa.

Inv: La x tendeix a 4.

EST64: La x tendeix a 4, la funció de los dues parts de la taula hauria de tendir a 15.5 o 14. Però com una tendeix a 15.5 i l'altra tendeix a 14, no és pot, atès el cas que hi hagués dues taules, en eixe cas.

Inv: Eixe no pot, què vol dir? A què estàs referint-te, al límit?

EST64: Al límit de la funció.

Inv: El que vols dir és que no hi ha límit?

EST64: En aquest cas és impossible que hi haja límit. (Figura 49)

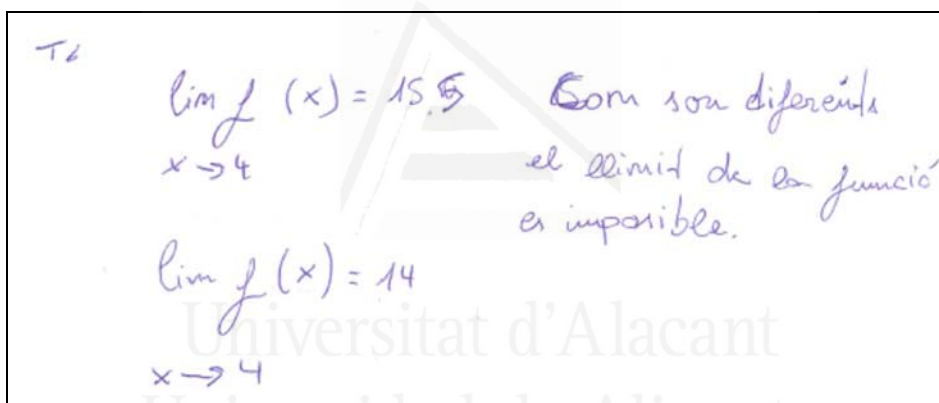


Figura 49. Resposta del EST64 a la Tasca 6

Inv: D'acord, no ho tenia clar. Podries fer-me la descripció, podries contestar la pregunta c?

EST64: No.

Inv: Sí, home, sí, xe, intenta-ho.

EST64: És que si ho posem en el llenguatge aquest, com això només és una taula.

Inv: Sí.

EST64: Si no hi hagués dues taules, no en podria posar-ne dues.

Inv: Considerem ho dues taules, és que no acabe d'entendre't. Jo tape la part on està el 14 i tu ho consideres una taula, no és això? Anota T6, és que no acabe d'entendre't?

EST64: ...

Inv: Coneixes alguna forma de distingir un 4 de l'altre?

EST64: No. Els decimals que li sobren a aquesta són els que li falten a l'altra.

Inv: Bé, i el que dius és que com són diferents és impossible. Escriu-ho! (Figura 49)

EST64: ...

Inv: Estem ara en la tasca 8. Podries calcular algun valor de la taula?

EST64: En la funció, si x és igual a -1 .

Inv: Si és -0.1 ?

EST64: Si, -0.1 , i et diu que la x ha de ser, la funció ha de ser menor que x i major o...

Inv: Menor que?

EST64: Major que x la de dalt, i menor o igual que x la de baix. Quin embolic!

Inv: Sí.

EST64: Hi ha d'haver dos valors. Ara no sé ni com ho faré.

Inv: Anem a fer-ho una altra vegada.

EST64: ..., en aquesta...

Inv: Estàs assenyalant el $2x+1$.

EST64: Sí.

Inv: Eixa funció, quan la x és?

EST64: -0.1 , quan la x és menor que 0 .

Inv: D'acord.

EST64: Aleshores, ..., aquesta part serà d'aquí cap allà, i està part d'aquí cap allà.

Inv: Calcula algun valor?

EST64: 0.8 .

Inv: Posa el que val la x , -0.1 , i el valor de la funció que has calculat és...?

EST64: 0.8 . (Figura 50)

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$
$f(x)$	$0,8$	$0,98$	$0,998$	$0,9998$

x	$-0,0001$	$-0,001$	$-0,01$	$-0,1$
$f(x)$	$-3,0002$	$-3,002$	$-3,02$	$-3,2$

Figura 50. Resposta del EST64 a la Tasca 8

Inv: Calcula més valors.

EST64: ...

Inv: Quan la x és -0.01 , la funció val 0.98 .

EST64: ...

Inv: Quan la x val -0.001 , en la funció quin número posa?

EST64: 0.998 ...

Inv: Quan la x val -0.0001 .

EST64: La x val...? La funció val 0.9998 .

Inv: Canviem de part?

EST64: ...

Inv: És que jo havia entès amb el que havies escrit és que havies calculat un doble valor, havies substituït en una i en l'altra.

EST64: Sí.

Inv: Això seria un error de concepte. Tu només pots substituir...

EST64: Ja, ja, ja. Però veient que aquí posa x , jo havia entès que calcular els dos que em donaven en la $f(x)$, un menor o igual que x .

Inv: Major o igual què?

EST64: Major o igual que x .

Inv: Major que 0 .

EST64: I l'altra menor que 0 .

Inv: Anem a l'altre costat; calcula algun valor positiu.

18:00

EST64: ... (Figura 50)

Inv: Quan la x val 0.0001 , la funció et dona?

EST64: -3.0002 .

Inv: Quan la x val 0.0001 , la funció et dona -3.0002 , i els altres valors els poses sense calcular-los?

EST64: No, estan en el full.

Inv: Has posat que la x s'aproxima a 0 . A què s'aproxima la funció?

EST64: A què s'aproxima la funció?

Inv: Sí.

EST64: Com la pregunta anterior, encara que les x s'aproximen a un mateix número, al 0 , en donar unes restriccions dintre de la fórmula de la funció, cada valor, és a dir cada part esquerra i dreta de la x s'aproxima a un número diferent. Els límits de la funció són diferents.

Inv: Específica una mica més.

EST64: A causa de...

Inv: Però dis-me els números eixos, als que s'aproxima la funció.

EST64: Quan, la funció dona, dos criteris, un per calcular quan la x que, és menor que 0 , i l'altre quan la x és major o igual que 0 . Al donar la taula -0.1 , -0.01 , -0.001 , i -0.0001 .

Inv: Eixa quina part és?

EST64: Eixa és la part menor que x .

Inv: Menor que 0 .

EST64: Menor que 0 , menor que 0 .

Inv: I la funció s'aproxima?

EST64: La funció s'aproxima a 1 .

Inv: A 1 .

EST64: I en l'altra part, aplicant l'altra fórmula, la funció s'aproxima a 3.2 .

Inv: A?

EST64: A 3 , a 3 .

Inv: A què?.

EST64: A -3 .

Inv: D'acord. El que acabes de fer, d'alguna forma és la descripció. I del límit què em diries?

EST64: El límit, supose que si jo calculés eixes, eh, mm, en una de les dues fórmules que em donen jo ho calcule tot tindria el límit; però com ho he calculat amb dues fórmules diferents, és lògic que la funció no tinga un límit fix... Com els límits de la funció són diferents és impossible.

Inv: Com abans.

EST64: Sí.

Inv: Anem a la tasca 7... Podries elegir algun punt de la gràfica?

EST64: El 4 , 10 .

Inv: Per què tries el $(4,10)$? Tria un altre punt que no siga el 4 .

EST64: El $(0, 15)$

Inv: El $(0,15)$. I el -6 , per exemple?

EST64: $(-6,0)$

Inv: En el 4 , tu veus la línia discontinua?

EST64: Sí.

Inv: Per què agafes el 10 ?

EST64: És el més pròxim.

Inv: En el 10 , què hi veus?

EST64: En el 10 veig un canvi de la funció.

Inv: Bé. Anem a la pregunta b . Quan la x s'aproxima a 3.9 , 3.99 , 3.999 , ... a què s'aproxima la funció?

EST64: A 15 .

Inv: A 15 . Tu havies contestat?

EST64: A 10 .

Inv: I quan la x pren els valors 4.1 , 4.01 , 4.001 , ..., cap a on s'aproxima la funció?

EST64: A 10 .

Inv: A 10 . Podries fer me una descripció del comportament de la funció?

EST64: Com abans, quan el límit de la funció és 4.

Inv: La x .

EST64: Quan x s'aproxima a 4 per la part de baix, 3.9999, el límit de la funció serà 15, i quan s'aproxima a 4 per part de dalt, 4.0001, el límit de la funció serà 10. Per tant són diferents els dos límits de la funció.

Inv: I en el punt 4, què diríem?

EST64: Que el límit de la funció és diferent.

Inv: El mateix d'abans.

EST64: Sí.

Inv: Per acabar podríem fer la tasca 5 o la 10. Tens preferència per alguna?

EST64: La 10, que és Tote.

Inv: Eixe qui és?

EST64: Un futbolista, un jugador de l'Hercules.

Inv: ... Mira les condicions. Podries dibuixar una gràfica que complira les tres condicions?

EST64: ... Quan la funció s'aproxima a 0, el límit és 4,..., això hauria d'aproximar-se ací, ..., quan la x tendeix a 3, la funció ha d'anar a 1, per tant ací, només amb això ja puc dir-te que no puc dibuixar una funció,..., ah, abans no me n'he adonat d'això.

Inv: Ara estàs intentant marcar la tercera condició.

EST64: El límit serà 0, està ací.

Inv: Quants punts hi has dibuixat?

EST64: Tres. Seria,..., una cosa així? (Figura 51)

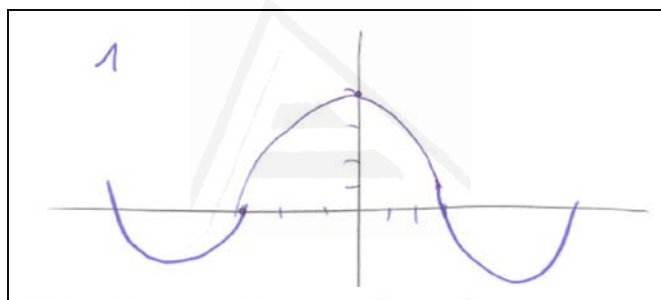


Figura 51. Resposta del EST64 a la Tasca 10

Inv: Podries posar alguna solució diferent a eixa? Posa uns altres eixos.

EST64: ... (Figura 52)

Inv: Estàs marcant els mateixos tres punts d'abans.

EST64: Quan la x tendeix a 0, no sé per quin costat, pot ser així, i així. (Figura 52,2)

Inv: Intenta posar una altra solució.

EST64: No tinc ni idea.

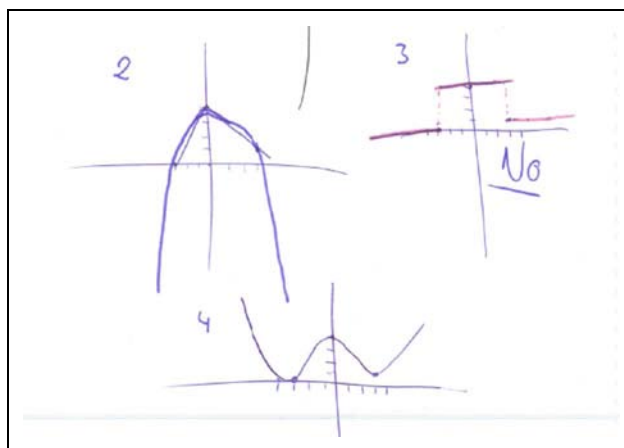


Figura 52. Resposta del EST64 a la Tasca 10

Inv: En portes dues, quan hem començat no tenies ni idea de res. Véns amb una predisposició una mica negativa, no?

EST64: Sóc de l'Hercules.

Inv: I l'Hercules on és?

EST64: A segona.

Inv: Això marca els límits que un fa?

EST64: Sí ...

Inv: Tornes a marcar els tres punts.

EST64: Pot ser com abans.

Inv: Espera, que no es nota massa bé el que marques.

EST64: ... Com l'anterior, però no seria una solució.

Inv: Per què?

EST64: Perquè les funcions no són les mateixes.

Inv: Aleshores?

EST64: No tenen els mateixos límits.

Inv: Aleshores?

EST64: No és una solució. (Figura 52,3)

Inv: Eixa no seria una solució. Però jo et demanava una solució. Intenta modificar el que has posat i que siga una solució.

EST64: ...

Inv: Posa'n una altra.

EST64: ... Pot ser com una de quart grau. (Figura 52,4)

Inv: Això m'ha deixat fora de joc, això de quart grau. Si senyor, magnífic. És la millor de les que tens. Agafa el retolador blau. La primera no la donaria per bona. Però vaig a deixar-te que afegisques alguna cosa, i té la done per bona.

EST64: En aquesta?

Inv: Sí.

EST64: ... podria seguir per aquí.

Inv: Ara la donaria per bona. Tu abans has dit que en eixa gràfica i en tot que si són diferents no hi ha límit.

EST64: Mm.

Inv: En la que acabes de canviar el color havies parat; hi havia un valor per un costat però no per l'altre. I la que ara numerarem com a 2 també et deixare que poses alguna cosa més per donar-te-la per bona.

EST64: Aquí tinc valors que s'aproximen al -3 , és que jo també puc fer una paràbola així

Inv: D'acord. Diguem que en eixa has marcat amb color blau una gràfica, i ara has posat amb retolador blau una altra gràfica. Tenim dues gràfiques.

EST64: Sí.

Inv: Numera les gràfiques 1, 2, 3, 4. I de la 3, què hem dit?

EST64: Que eixa no té solució.

Inv: Escriu en algun lloc el no. Gràcies, moltes gràcies.

31:47.

Entrevista al EST67

Inv: Hola bon dia!

EST67: Bon dia!

Inv: Revisem el problema 1. Perquè dones la resposta que dones a l'apartat a?

EST67: Perquè es veu que en les ixes per l'esquerra es va aproximant a 3 progressivament, i per la dreta també minva fins a, ..., fins a aproximar-se a 3.

Inv: Perquè dones la resposta que dones en l'apartat b, al límit de la funció quan ...?

EST67: Perquè en la taula es veu que en la $f(x)$ augmenta per l'esquerra fins aproximar-se a 15 i per la dreta descendeix fins fer-se cada vegada més pròxima a 15.

Inv: Després deixes la resposta c en blanc.

EST67: Sí.

Inv: Per què?

EST67: Perquè, ..., perquè no vaig entendre exactament que es demanava.

Inv: D'acord. Jo voldria que em respongueres, ..., que descrivires la situació. Parlem de límits...

Voldria que em descrigues la situació, que em resumires els apartats a i b.

EST67: De forma gràfica, o ...

Inv: Em faria igual que fóra gràfica, que fóra verbal, que fóra escrita, no tindria...

EST67: ... La $f(x)$ en relació al seu comportament de la variable x , ..., aleshores que, que, ..., quan la x s'aproxima a 3, la funció de x s'aproxima a 15 (Figura 53).

Inv: Podries escriure eixa frase que has acabat de dir?

EST67: Si ..., d'acord, ..., aleshores, ..., la x , ..., a 3, ..., no se exactament com representar-ho... (Figura 53).

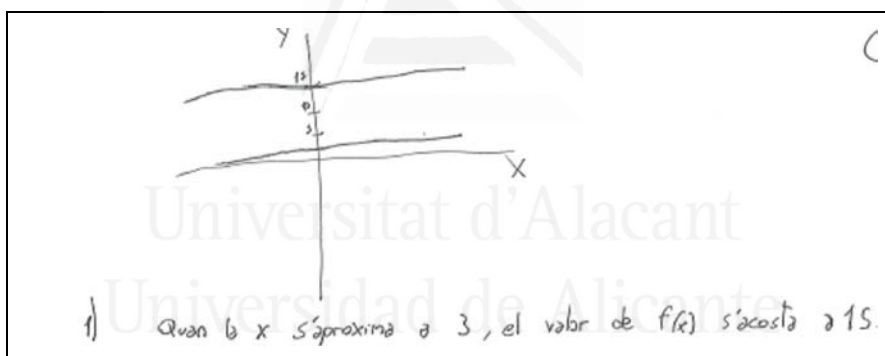


Figura 53. Resposta del EST67 a la Tasca 1

Inv: Bé. Canviem de problema.

EST67: Mm.

Inv: Passa a la tasca 2. Justifica'm algun valor, i intenta també comentar-me'l. Per què tu tornes a deixar en blanc la mateixa pregunta del problema anterior?. Intenta argumentar-me algun dels valors que dones.

EST67: D'aquestos.

Inv: Sí, algun d'ells, si per què respon així?

EST67: Sí, quan ... aquí es veu (assenyala el gràfic) 9, 99, conforme avança cap al 1,9 quan s'aproxima al 2, ..., s'acosta al -5, ..., i quan s'acosta per la dreta cap al 2 també s'acosta al mateix, a -5. Després, el comportament de la funció de x l'he deixada en blanc, ...

Inv: Sí, però, per què?

EST67: Igual, perquè no sé com descriure-la. Si fem la gràfica, o per escrit, o què posar..

Inv: Tu has acabat de fer un moviment amb el bolígraf. No?. La descripció seria fer eixe moviment, però intentant escriure'l igual que ho has escrit amb el problema anterior. Eixe mateix moviment que has fet amb el bolígraf per a indicar-me límits. Intenta verbalitzar-ho. Podries verbalitzar-ho?.

EST67: D'acord, a veure, ..., seria conforme la x s'aproxima al dos per l'esquerra ...
 Inv: La matisació de l'esquerra em pareix adequada, abans no l'havies feta. Continua.
 EST67: ... s'aproxima cada vegada més al -5 de..., a l'eix de la y , igualment quan s'acosta per la dreta al 2 també s'aproxima al -5 de l'eix de la y .
 Inv: Podries donar-me alguna justificació a l'última pregunta?
 EST67: Quin és el límit de la funció quan x és igual a 2 .
 Inv: A la pregunta e .
 EST67: Quan x és igual a 2 , en la gràfica és veu que està en el -5 de l'eix de les y . Per això vaig fer aqueixa resposta.
 07:20
 Inv: Bé, canviem de tasca?.
 EST67: Bé.
 Inv: Tornes a respondre la pregunta a , la b , la c , ..., deixen en blanc , sempre deixes en blanc la mateixa pregunta.
 EST67: Sí.
 Inv: Podries intentar descriure el comportament de la funció?
 EST67: Aquí es veu ...
 Inv: On, on es veu?
 EST67: A la gràfica, a la taula.
 Inv: A la taula.
 EST67: Es veu que la x s'aproxima per l'esquerra al 2 , i per la dreta també, i es demana omplir la funció de la x i substituint en la fórmula que hi ha al principi es poden obtenir els valors, però per a descriure el comportament de la funció en relació al comportament de la x , no sé com hauria d'expressar-ho, ..., utilitzant una fórmula, o la gràfica, o escrivint alguna cosa.
 Inv: Podria ser una fórmula, bé per escrit o verbalment. Una cosa es quan vaig passar l'enquesta podia ser per escrit i ara podria ser verbalment...,no tinc problema amb la forma amb que vulgues expressar-ho.
 EST67: Quan la x s'aproxima a 2 la funció de x tendeix a 0.25 ,... segons els valors de la taula.
 Inv: Molt bé, canviem de tasca.
 EST67: Sí.
 10:00
 Inv: És la tasca 4 i et demanem la proximitat dels valors de x a $0'05$. Per què dones la resposta que dones?
 EST67: Perquè mirant la taula, la pregunta a demanen, ..., fem referència a la diferència de $1.5 - f(x)$, que correspon a la quarta fila de la taula i, ..., els valors de x , ..., de 0.5
 Inv: I la pregunta et demana una proximitat de quan?
 EST67: De 0.001 , que siga menor a eixa, per això mirant la primera fila els valors de x i mirant la proximitat en la quarta fila, ..., es veu que per a que la diferència siga menor a la demanada ha d'estar a a , ..., a, ..., a això no?
 Inv: Tu tens escrita com a solució una mil·lèsima, i mirant la taula la proximitat on està?
 EST67: ..., mirant a la taula, ha de ser, per a que siga menor que una mil·lèsima, ..., hauria d'estar a 0.0001 .
 Inv: Ho podries escriure en el full. Per favor. Estem en la tasca 4 (Figura 54).

4) a) Ha d'estar 0,0001 de 0,5.
 b) $\lim_{x \rightarrow 0,5} f(x) = 1,5$

Figura 54. Resposta del EST67 a la Tasca 4

EST67: $4a$, ..., després hauria d'estar en lloc del que vaig posar, a 0.0001 , ..., de 0.5 .

Inv: Una altra pregunta, tu estàs mirant la taula, completa, o a una part, o les dos parts de la taula?

EST67: Estic mirant la primera i la quarta fila.

Inv: Sí, però en quins valors de la x estem parlant?

EST67: En els valors de l'esquerra.

Inv: Aleshores, sí mirarem a la dreta?

EST67: A la dreta,..., per a eixa diferencia hauria de ser ,..., per a que siga menor ,..., seria a 0.00001 ,..., seria a veure, ...,si a veure, sí aquí mirant la quarta filera per a que siga menor que el valor que es dona ahí, el valor de la x hauria de ser que ser 0.5001 per a que la funció, ...,eixa diferència siga menor a la demanada.

Inv: Podries indicar-me quina columna assenyaales?

EST67: La tercera columna de la dreta.

Inv: Que comença per...?

EST67: 0.5001 .

Inv: Amb la informació que diem parlant, podries afirmar quin és el límit, ..., podries respondre a la pregunta b ?

EST67: Amb la informació de l'apartat a es podria saber,..., jo vaig indicar que el límit de la funció és 0.5 .

Inv: Quan la x tendeix a quan?

EST67: a 0.5 ,..., encara que pense que no és això.

Inv: I si penses que no és això, què posaries?

EST67: Jo ara posaria que el límit de la funció per a x és igual a 0.5 , mirant la segona filera de la taula hauria de ser 1.5 .

Inv: Canviem de tasca.

EST67: D'acord.

Inv: Que podries dir-me d'eixe problema?

EST67: Es demana representar la funció i dos límits,..., representar la gràfica d'una funció amb tres apartats. Que la funció siga igual a 3 , que el límit de la funció quan x tendeix a més infinit siga 2 i quan...

Inv: On representes en la gràfica que el límit siga 2 quan la x tendeix a infinit?

EST67: Hi he assenyalat una línia vertical en el 2 de l'eix de la x ,..., però,..., a veure, ..., quan x tendeix a més infinit, ..., el límit de la funció és 2 . Aquí he marcat la línia del 2 .

Inv: El 2 que marques ara correspon a quina variable?

EST67: La línia horitzontal.

Inv: Horitzontal.

EST67: Ara marque el 2 ,..., quan x tendeix a més infinit el límit ha de ser 2 , aleshores, pense que no seria com ho vaig posar, encara que ..., quan la x tendeix a més infinit, ..., haurà, ..., sí, sí jo pense que sí és com ho tinc posat, encara aquest la fletxa no sé no hauria d'estar posada.

Inv: quan poses eixa fletxa a quin límit intentes contestar?

EST67: Quan pose aquesta fletxa la línia vertical que passa pel 2 en l'eix de la x , estic marcant que quan la x , el límit de la funció quan x és en 2 , el límit de la funció està en menys infinit.

Inv: Està en...?

EST67: En menys infinit.

Inv: El punt, l'hem marcat, la primera condició de la funció també l'hem marcada?

EST67: Sí, quan la x és 1 la funció es igual a 3 .

Inv: Canviem de tasca.

EST67: D'acord.

Inv: Dónes una resposta a la primera pregunta, dónes una resposta a la segona pregunta, dónes una resposta a l'última, i tornes a deixar en blanc la tercera.

EST67: Mm.

Inv: Podries descriure el comportament de la funció?

EST67: Pense que la resposta que hauria de posar ahí, bé amb una fórmula. Però, no vaig trobar la forma de posar-ho, i ho vaig deixar en blanc.

Inv: Podries descriure-ho ara encara que no fora amb fórmula.

EST67: Mirant la taula es pot veure que conforme la x es va aproximant a 4,..., per l'esquerra, la $f(x)$ s'aproxima a 15.5, i conforme la x es va aproximant cada vegada més a 4 per la dreta la $f(x)$ s'aproxima a 14.

Inv: Quina conclusió podem extraure del que acabes de dir respecte del límit?

EST67: Que el límit d'aquesta funció quan la x , ..., per a x és igual a 4 per l'esquerra serà 15'5, i el límit de la funció per a x és igual a 4 per la dreta serà 14.

Inv: Perdona que insisteisca, què podríem dir del límit en x igual a 4?

EST67: Per a x igual a 4, el límit està en 15'5 per l'esquerra i en 14 per la dreta.

Inv: Molt bé, canviem de tasca.

EST67: D'acord.

Inv: Mirem ara en la tasca 7, ..., podries descriure'm el comportament de la funció?

EST67: En aquest apartat vaig respondre,..., vaig tractar d'expressar-ho, i vaig posar un dels tres trams de la gràfica, perquè era el més senzill dels tres de representar, perquè era una línia horitzontal, després el primer tram que es una recta, però no vaig saber com fer-ho, a l' igual que el tercer tram a partir del quatre.

24:10

Inv: Podries descriure verbalment el comportament de la funció?

EST67: Quan, ..., des de, ..., x és..., fins a x és igual a 0 la y va augmentant de forma continua fins arribar a 15, des de x és igual a 0 fins el 4 la y es manté constant en un valor de 15 i després hi ha un salt, i des de que la x té el valor de 4, la y va augmentant.

Inv: A mi m'interessaria que en feres la descripció mirant les preguntes a , b , c .

EST67: L'apartat a he triat la $f(x)$ per a x igual a 0 que és la y val 15.

Inv : Sí?

EST67: I després la b per a contestar-la es pot veure en la gràfica que conforme la x va prenent valors més pròxima a 4, la funció val 15.

Inv: I la pregunta c ?

EST67: A qui pregunta, a quin número s'aproxima des de la dreta i conforme és va aproximant a 4 la funció val 10.

Inv: Podries descriure eixos tres apartats conjuntament?

EST67: ..., conjuntament ,..., seria per,..., el límit per l'esquerra de la funció conforme s'aproxima a 4 seria 15, mentre que el límit de la funció quan la x s'aproxima per la dreta a 4 seria 10.

Inv: I que podríem dir del límit exactament en el punt 4?

EST67: Que hi ha un salt que es veu en la gràfica,... que, on la x passa d'un valor de 15 a 10, estant el 10 inclòs.

Inv: Canviem de tasca.

EST67: Bé.

Inv: Respon la pregunta a , la pregunta b , la pregunta c , i la pregunta e , i deixes com en tot el qüestionari la pregunta d en blanc. Podries descriure el comportament de la funció, en relació al comportament de la variable x ?

EST67: Mirant la funció que està expressada al principi, i després de completar la taula, ...

Inv: Sí.

EST67: El límit de la funció per a x és igual a 0 per l'esquerra seria 1, i el límit d'aquesta funció per a x , quan la x tendeix a 0 per la dreta és igual -3

Inv: I en el punt 0, què és el que pregunta la pregunta e . Què podríem dir del límit quan la x tendeix a 0?

EST67: Quan x tendeix a 0, el límit de la funció per l'esquerra seria 1, i per la dreta -3.

Inv: Fem una altra tasca.

EST67: Sí.

Inv: Aquest en blanc, bé!

EST67: Sí.

Inv: Et resulta molt estrany el problema?

EST67: Vaig veure que el format era diferent a la resta de problemes, i vaig preferir fer els altres a aquest i finalment el vaig deixar en blanc.

Inv: Vols mirar-ho un poquet?

EST67: ... A l'apartat a mirant la primer columna de la taula, els valors de la x i mirant la ultima columna, ..., per a què la diferencia siga menor a 0.001 ,..., hauria, ..., els valors de la x ,..., hauria de ser 2.5001 o, ..., 2.4999 ,..., per a què la diferencia siga menor a 0.001 .

Inv: Canviem de tasca?

EST67: Sí.

Inv: Estem en la tasca 10, tens alguna cosa dibuixada, hi havia tres condicions, i demanem una gràfica que complisca aqueixes tres condicions.

EST67: La a diu que la funció és igual a 4.

Inv: En quin punt de la x ?

33:32

EST1: Per a x és igual a 0, per això tenia ací tinc marcat eixe punt, ..., després l'apartat b diu que el límit de la funció per x , valor d' x de 3 és igual a 1, per això vaig marcar una línia vertical que passava pel 3 de la x ,..., i la c diu que el límit de la funció per a x és igual a -3 és 0, en -3 és 0, aleshores vaig fer una línia vertical que passava pel -3 de la x , aleshores, ..., per a representar la funció que complisca eixes tres condicions, ..., aleshores, ..., (Figura 55).

Inv: Com entens que el límit de la funció quan la x tendeix a 3 siga 1?,... o com entens que el límit de la funció quan x tendeix a -3 siga 0?

EST67: Que conforme els valors de la x s'aproximen a 3, els valors de la funció s'aniran aproximant a l'1, per això també vaig posar una línia horitzontal que passava per 1, per l'1 de la x ,..., i en l'apartat c , i conforme la x s'aproxima a -3 el límit de la funció serà 0.

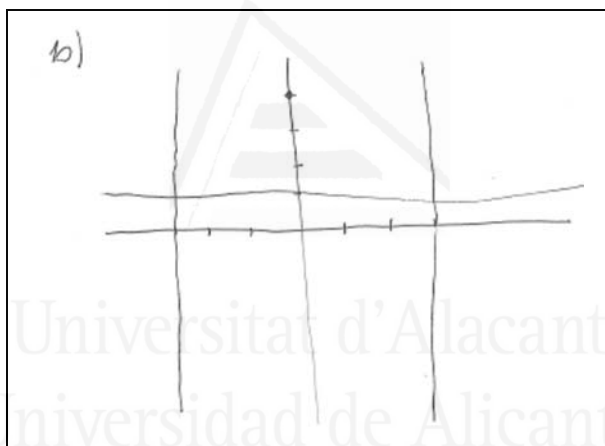


Figura 55. Resposta del EST67 a la Tasca 10

Inv: Quan el límit s'aproxima al 3, tu la gràfica l'has feta per ...?

EST67: Quan la x s'aproxima a 3 ...

Inv: Especifica'm un poquet, eixe 3 que s'aproxima per on és, el que estàs assenyalant amb el bolígraf, s'aproxima a 3 per on?

EST67: He assenyalat la part de dalt, ..., també podria ser per la part de baix, ..., però ho vaig fer de dalt per a que passarà pel punt que he marcat, fent referència a l'apartat a .

Inv: Jo pense que està bé. Moltes gràcies.

38:00 (Eren les 15 hores, moment en que acaben les classes)

Entrevista al EST68

Inv: ¡Hola bon día!

EST68: ¡Bon día!

Inv: Estamos en la tarea 1, respondes a la pregunta a, a la pregunta b, a la pregunta c, y a la d.

¿Podrías darme alguna razón de por qué contestas 3 a la pregunta a?

EST68: Porque es lo que observe en la gráfica, lo que voy observando en la tabla de valores.

Inv: ¿Podrías especificar un poco más ese movimiento que haces con el dedo?

EST68: Voy indicando los valores de la x , y los valores de la función.

Inv: ¿Y qué es lo que observas?

EST68: ¡Ah!, que cada vez se va acercando más al 3 y, cuando se acerca, luego por la otra parte se va.

Inv: Cuando dices por la otra parte, ¿a qué parte te estás refiriendo?

EST68: Hum, ..., pues, hum, por la derecha se va acercando cada vez más, no por la izquierda

Inv: Por la izquierda.

EST68: Se va acercando más al 3, y por la derecha se va alejando.

Inv: Y por la derecha, ¿se va?

EST68: Alejando.

Inv: ¿Sí?

EST68: Sí, ¿no? ... Sí creo que sí.

Inv: ¿Por qué dices en la respuesta a la pregunta a, que se aproxima a 3?

EST68: Eh, porque he mirado solamente estos valores de aquí, porque luego por aquí se va alejando, y nunca llega. Para mí la gráfica es por la derecha; se va acercando.

Inv: ¿Por la...?

EST68: Por la izquierda se va acercando al 3, y por la derecha se va alejando, y nunca llega a ser 3, sino 2.999, o tres coma.

02:27

Inv: Vale.

EST68: Hum.

Inv: A la pregunta b respondes que la función $f(x)$ se aproxima a 15.

EST68: Sí.

Inv: ¿Podrías argumentarme por qué?

EST68: Lo mismo que en la de arriba, que en la a, que por la izquierda se va acercando a 15, y por la derecha se va alejando.

Inv: Cuando dices se está alejando, ¿cómo estás mirando?

EST68: Que se va cada vez más a la izquierda.

Inv: Se va cada vez más ¿a la...?

EST68: A la derecha.

Inv: Cada vez más a la derecha...

EST68: Me confundo con la derecha y la izquierda.

Inv: La pregunta c la dejas en blanco.

EST68: Ahora digo no sé porque he escrito eso, cuando en su momento dije vale por aquí va el 3. Sí, pero ahora lo veo y digo, pues no..., no sé si eso es lógico, el haberlo puesto... Sí, podría contestar a la pregunta c, me has dicho.

Inv: Te piden que describas el comportamiento de la función.

EST68: Sí, sí, pues no sé si me acuerdo.

Inv: Tú podrías mirar la tabla y describirla.

EST68: Sí, ..., cuando es menor de, menor; no, no podría, ..., no me acuerdo de como describirla. Gráficamente a lo mejor sí que tengo el dibujo, pero a la hora de describirla...

Inv: ¿Podrías intentar hacer el dibujo?

EST68: Sí, ..., la x ..., no lo voy a hacer con números, que si no, no me llega, ..., sí esto es 15 cuando se va acercando.

Inv: ¿Has dibujado una línea vertical en él?

EST68: En el 3. En el 3 de las equis. ..., no sabría, se acerca, cuanto más se acerca a 3, por ahí, por ahí, ..., no lo sé, es que creo que va..., no, no sabría.

Inv: Ese movimiento que estás haciendo con el bolígrafo, ¿podrías dibujarlo?

EST68: Sí, estoy intentando ir desde, ah ¿dibujarlo? ¿O explicarlo?, has dicho.

Inv: Me da lo mismo que me lo expliques o que me lo dibujes.

EST68: Pensaba que sería una cosa así porque es lo que me suena de cuando tiende a un número; se va acercando a un número y no llega, pero no sería así (Figura 56).

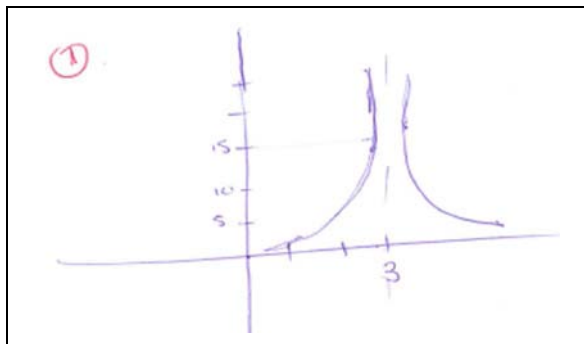


Figura 56. Respuesta de la EST68 a la Tarea 1

Inv: Lo que estás dibujando a qué número se acerca.

EST68: Al 3 de las equis.

Inv: ¿Y de las y?

EST68: A más infinito.

Inv: Pero en la tabla que tenemos delante.

EST68: A 15.

06:12

Inv: ¿Nos interesaría?

EST68: Que fuese 15 pero que no llegue; por eso digo que no sabría, si fuera que aquí se acerque a 3, sí, pero ahí...

Inv: Lo que tú estás dibujando tiene un nombre, ¿te acuerdas de cómo se llamaba eso?

EST68: La asin, no.

Inv: Podría ser, sí, sí.

EST68: La asíntota.

Inv: La asíntota, tú estás intentando dibujar una asíntota.

EST68: Sí.

Inv: Vamos a ver ¿Podrías describirme los números que te dan en la tabla?

EST68: ¿Cómo que describirlos?

Inv: Una descripción global, teniendo en cuenta los apartados anteriores.

EST68: Sí, x va teniendo valores que se van aproximando cada vez más al 3.

Inv: La x se va acercando más al 3.

EST68: Y en la función, aproximándose al 15, pero a la hora de representar no sabría. Si es el 2.9 valdría 14, si es...

Inv: ¿Podrías hacer el dibujo abajo?, deja el primero, hazlo otra vez (Figura 57).

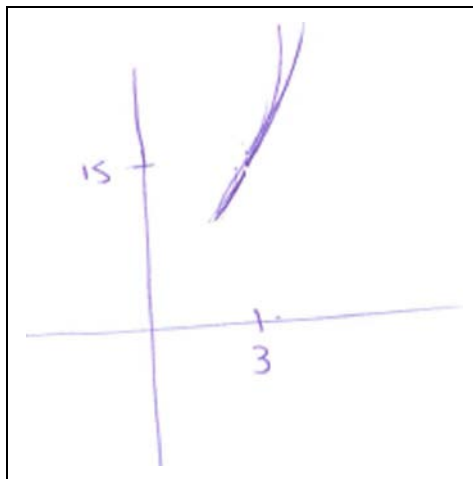


Figura 57. Respuesta de la EST68 a la Tarea 1

EST68: Sí,..., si eso es 15, y lo ponemos aquí sin llegar, yo diría que es así, pero luego,... no sabría, no, no.

Inv: Tú en el dibujo estas dibujando con respecto a la tabla, ¿Qué parte de la tabla estas representando?

EST68: La parte izquierda.

Inv: La parte izquierda, ¿y podrías representar la parte de la derecha también?

EST68: Sí, se va alejando cada vez más, bueno,..., si se va alejando cada vez más, bueno, se va.

Inv: ¿Quieres que cambiemos de tarea?

EST68: Sí.

Inv: Vamos a pasar a la siguiente. Si en algún momento quieres que volvamos hacia atrás para resolver o hablar de alguna cosa, lo hacemos, ¿eh?

EST68: Vale, vale.

Inv: Pasamos a la tarea 2.

EST68: Sí.

Inv: Contestaste a la pregunta *a*, a la *b*, a la *c*, y a la *e*, pero el apartado *d* describe el comportamiento de la función, lo dejaste otra vez...

EST68: En blanco, sí.

Inv: ¿Podrías argumentarme por qué respondes -5 al apartado *b*?

EST68: Cuando x tome, sucesivamente, hum, ¿a qué número se aproxima la función?, por qué he estudiado el comportamiento, he estado mirando la gráfica, y voy tomando valores.

Inv: ¿Por qué parte?

EST68: Por la der..., por la izquierda.

Inv: Por la izquierda, y la gráfica, ¿se aproxima?

EST68: A -5 .

Inv: A -5 . Cuando hablamos de la izquierda, ¿de la izquierda de quién? ¿De qué número?

EST68: ¡Ah!, de la x , cuando x tiende a 2.

Inv: ¿Cuándo x tiende a 2 por...?

EST68: Por la izquierda.

Inv: Por la izquierda, ¿la función tiende a...?

EST68: A -5 .

Inv: A -5 . Pasemos a la pregunta *c*.

EST68: Cuando x tome..., a qué número se aproxima la función.

Inv: ¿A qué se acerca x en el apartado *c*?

EST68: Van aumentando.

Inv: Los valores que te dan en el apartado *c*; los...

EST68: Sí, sí, sí.

Inv: ¿Me podrías decir cuáles son los valores del apartado *c*?

EST68: 2.1, 2.001, 2.001.

Inv: ¿A qué número se acercan?

EST68: A -5 , ¡ah!, vale, sí.

Inv: ¿A qué número se acercan?

EST68: ¡Ah!, esos a 2 .

Inv: ¿Y la función?

EST68: A -5 , antes lo estaba diciendo al revés que se iban alejando, pero se van acercando

Inv: Sí, ¿podrías describirme el comportamiento de la función?

EST68: Cuando x tiende a 2 por la derecha, la función tiende a -5 .

Inv: ¿Y?

EST68: ¿Cómo que y?

Inv: Cuando yo te pido el comportamiento, que describa el comportamiento.

EST68: Sí.

Inv: Intento que argumentes...

EST68: Hum, sí.

Inv: No con respecto al apartado b , no con respecto al apartado c , sino con respecto a los dos apartados. ¿Lo intentamos de nuevo?

EST68: Hum, es que no lo entiendo.

Inv: Vamos a ver. Descríbeme el comportamiento de la función.

EST68: Cuando viene de la izquierda...

12:07

Inv: De la izquierda, acercándose...

EST68: A 2 . Tiende a -5

Inv: ¿Quién tiende a -5 ?

EST68: La, la, la función.

Inv: La función, ¿y?

EST68: Y si viniésemos desde la derecha.

Inv: Y si viniésemos desde la derecha.

EST68: Cuando x tiende a -2 , la función...

Inv: ¿ x tiende a?

EST68: A 2 , a 2 .

Inv: Cuando x tiende a 2 .

EST68: La función tiende a -5 .

Inv: A -5 . ¿Quieres que cambiemos de tarea?

EST68: Hum.

Inv: Estamos en la tarea 3, ¿de qué forma has completado la tabla?

EST68: Dándole un valor a la x , o sea dando, cogiendo un valor de la x .

Inv: ¿Qué valor has cogido, por ejemplo?

EST68: 1.9 .

Inv: 1.9 , ¿y?

EST68: Lo he sustituido en la función que te dan, y me ha dado lo que he sacado.

Inv: ¿Y da?

EST68: 0.256 .

Inv: ¿Y con los demás valores?

EST68: Lo mismo.

Inv: Lo mismo.

EST68: Los he cogido y los he sustituido en la función.

Inv: Los has cogido y has sustituido. ¿Podrías justificarme alguna de las respuestas, por ejemplo la b ? ¿A qué número se aproxima x , y tu respuesta es...?

EST68: A 2 .

Inv: A 2 . ¿Dónde miras, qué observas, para dar esa respuesta?

EST68: Vale, pues, eh, hay dos tablas.

Inv: Hay dos tablas.

EST68: Entonces, he cogido la de la izquierda, que cuando x tiende a a, \dots , cogemos, cuando x tiende a 2 , la función tiende a 0.25 .

Inv: Que cuando la función tiende a 2, que cuando x tiende a 2, la función tiende a 0.25.
 EST68: Sí, y por la parte de la derecha. Cuando x tiende a 2, la función tiende a 0.25
 Inv: ¿Y la respuesta a la pregunta e ?
 EST68: ¿La e ?
 Inv: ¿Por qué das esa respuesta?
 EST68: Por qué cuando x tiende a 2, la función se aproxima a 0.25
 Inv: Vale. ¿Quieres que cambiemos de tarea?
 EST68: Sí, vale.
 Inv: Pasamos a la tarea 4. ¿Te resulto extraña la presentación?
 EST68: Hum, sí, no la había visto nunca; había visto más la x y la $f(x)$.
 Inv: La x y la $f(x)$.
 EST68: Pero con el valor absoluto, no.
 Inv: ¿Podrías leer la respuesta que das a la pregunta a ?
 EST68: ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5, para qué?
 Inv: Sí, lee tu respuesta.
 EST68: Han de ser “majors que 0.4999 i menors que 0.5001”.
 15:27
 Inv: ¿Dónde miras, qué observas para dar esa respuesta?
 EST68: A ver,..., pues, hum, lo estuve mirando en la tabla, pero ahora no sé por qué, tienen que ser mayores que 0.4999 y menores que 0.5001, tienen que estar entre estos para que te dé.
 Inv: Cuando dices entres estos, ¿a qué valores te estás refiriendo?
 EST68: 0.4999
 Inv: ¿y?
 EST68: 0.5001
 Inv: ¿y han de estar entre esos, por qué?
 EST68: Porque la diferencia dice que tiene que ser menor que 0.0001.
 Inv: ¿La diferencia entre quién?
 EST68: $1.5-f(x)$.
 Inv: Menos la función.
 EST68: Ah, entonces no.
 Inv: ¿En qué fila estás mirando tú?
 EST68: Yo estaba mirando en $0.5-x$.
 Inv: ¿Y si mirarás en la otra, qué respuesta darías?
 EST68: Menores que 0.01,..., hum, mayores que 0.4999 e..., igual.
 Inv: Igual.
 EST68: Sí.
 Inv: Y cuando respondes a la pregunta b .
 EST68: Sí.
 Inv: ¿Por qué das la respuesta que das?, ¿por qué dices que el límite de la función cuando x tiende a 0.5 es 1.5?
 EST68: ¿Por qué la fun...? porque por la derecha.
 Inv: Por la...
 EST68: Por la izquierda, hum.
 Inv: Por la izquierda.
 EST68: Cuando x tiende a 0.5, la función se va acercando a 1.5, y por la derecha, cuando tiende a 0.5 la x , la función tiende a 1.5.
 Inv: Para esa respuesta última que me estás dando, ¿dónde estás mirando? ¿En qué filas estas mirando?
 EST68: En la primera y en la segunda.
 Inv: En la primera y en la segunda.
 EST68: En la de x y en la de $f(x)$.
 Inv: Muy bien. ¿Cambiamos de tarea?
 EST68: Sí.

Inv: Estamos en la tarea 5, y se pide representar la gráfica de una función que cumpla tres condiciones.

EST68: Sí.

Inv: La primera condición.

EST68: ..., sí, cuando x vale 1, la función vale 3, cuando el límite de la función, cuando x tiende a más infinito, el límite tiende a $+2$, y cuando x tiende a 2, la función es, o sea el límite es a menos infinito.

19:11

Inv: ¿Qué estás haciendo ahora con los dedos?

EST68: El recorrido.

Inv: El recorrido de la gráfica que tienes, interpretando al mismo tiempo.

EST68: Sí.

Inv: ¿Serías capaz de representarme otra función que cumpliera las mismas condiciones?

EST68: ...

Inv: ¿Sería posible?

EST68: ...

Inv: Lo que has terminado de hacer, ¿qué es?

EST68: Marcar el punto que te dan al principio.

Inv: Marcar el punto, ¿qué es la condición?

EST68: La primera condición (Figura 58).



Figura 58. Respuesta de la EST68 a la Tarea 5

Inv: La línea que estás marcando, ¿Cuál es?

EST68: La segunda, por qué dice que tiende a 2.

Inv: Que tiende a 2, y tú estás dibujando un línea discontinua, de trazo discontinuo, ¿a qué altura?

EST68: A 2.

Inv: En el 2.

EST68: Hum, ..., y aquí otra.

Inv: ¿Ahora estas dibujando una línea?

EST68: Una línea discontinua, vertical en $x=2$

Inv: En $x=2$.

EST68: Pues creo que no sabría hacer otra diferente, cuando x tiende a más infinito, la función tiende a $+2$, hombre, no, ..., no, sí puede.

Inv: No sé, veo movimientos.

EST68: Pero no los dibujo.

Inv: Esa, ¿podría tener otra forma? ¿Sólo es esa?

EST68: No, podría, bueno, ...

Inv: Cuando dices podría.

EST68: No, no podría.

21:45

Inv: ¿Estás dibujando una rama, a la...?

EST68: A la izquierda.

Inv: A la izquierda.

EST68: Que pase por...

Inv: ¿A la izquierda de qué número?

EST68: A la izquierda de, de 2.

Inv: Del 2, bien.

EST68: Y luego esto,...

Inv: La gráfica que has terminado de dibujar ahora, ¿cumple las tres condiciones?

EST68: Hum, sí, hum.

Inv: ¿Sí?, ¿cuándo x tiende a 2, a qué tiende la función?

EST68: A menos infinito.

Inv: A menos infinito, ¿por la...?

EST68: Por la derecha.

Inv: Por la...

EST68: Ah, por la izquierda.

Inv: Por la izquierda.

EST68: Hum, hum.

Inv: Porque mueves una mano, pero dices otra cosa.

EST68: Sí, sí.

Inv: Y por la derecha, ¿a qué está tendiendo la función que estás representando?

EST68: A 2.

Inv: Bueno, pero...

EST68: Cómo, cómo.

Inv: Volvamos a empezar. Miremos la condición tres, la pregunta tres.

EST68: Sí.

Inv: ¿Cuando x tiende a 2 por...?

EST68: Por la izquierda.

Inv: Por la izquierda, ¿la función tiende a?

EST68: A menos infinito.

Inv: A menos infinito, y ahora nos pasamos a la derecha.

EST68: Si, cuando x tiende a más infinito la función tiende a 2, así, oh, no sé si podría así también porque también va tendiendo a 2, no, puede ser por arriba o por abajo.

Inv: No lo sé, la respuesta me la tienes que dar tú.

EST68: ..., yo creo que sí.

Inv: ¿Lo dejamos?

EST68: Sí.

Inv: ¿Vamos a la tarea 6?... Estamos en la tarea 6, ¿podrías justificarme a qué número se aproxima x ? ¿Tú qué respuesta has dado?

EST68: Que x se aproxima a 4.

Inv: ¿Podrías decirme donde miras, o qué observas?

EST68: Sí, los valores de la x , que cuando más se apr..., que por la izquierda se aproxima a 4, y por la izquierda también.

Inv: ¿Y por la?

EST68: Y por la izquierda, por la derecha se va alejando.

Inv: ¿Podrías decirme qué respondes a la pregunta b? ¿A qué se aproxima la función?

EST689: A 14.

24:49

Inv: A 14, ¿dónde estás mirando?

EST68: En la tabla.

Inv: En la tabla, el dedo lo has puesto, ¿en?

EST68: En la función.

Inv: En la función.

EST68: En los valores de la función,..., porque en la izquierda, se va aproximando a 14.

Inv: ¿De qué números estamos hablando? ¿Podrías leer los números?

EST68: 15.530.

Inv: Sí.

EST68: 15.5254.

Inv: Sí.

EST68: 15.5015, cada vez se va haciendo más...

Inv: ¿A qué se aproximan?

EST68: A 15.5.

Inv: ¿A?

EST68: 15.5.

Inv: A 15.5.

EST68: Y en la derecha.

Inv: ¿Y en la derecha?

EST68: A cato..., se va alejando de..., se va alejando de 14.

Inv: Se va alejando de 14 ¿Podríamos describir el comportamiento global de la función?

¿Intentar responder a la pregunta c?

EST68: Cuando,..., por la izquierda, cuando se aproxima, cuando x tiende a 4,

Inv: Por la izquierda, cuando x se aproxima a 4, ¿puedes hablar un poco más alto?

EST68: Sí, es que estaba pensando en voz alta.

Inv: Bien.

EST68: Por la derecha, no por la izquierda. Cuando x tiende a 4, la función se va acercando a 15.5.

Inv: a 15.5

EST68: Y por la derecha, cuando x tiende a 4, se va, aproximando a 14,..., sí.

Inv: ¿Podríamos intentar responder a la pregunta d? ¿Cuál es el límite de la función en $x = 4$?

EST68: Mm,..., yo he puesto que es 14, pero ahora estoy dudando.

Inv: Sí, tú has puesto que es 14, y ahora dudas. ¿Qué dirías ahora?

EST68: Pues si x se va acercando aquí a 15.5

Inv: ¿Cuándo dices aquí, donde es?

EST68: Por la parte de la izquierda, si se va acercando a 15.5, y por la parte de la derecha se acerca a 14,..., hum,..., a 14, no lo sabría decir.

Inv: No lo sabrías decir. ¿Quieres que cambiemos de tarea? ¿Pasamos a la tarea 7?

EST68: Hum, hum.

Inv: En la pregunta b, respondes que a 15.

EST68: Aquí, hum, hum

Inv: ¿Podrías explicarme,..., por qué das esa respuesta?

EST68: Vale, porque mirando la gráfica cuando la..., por la parte de la izquierda, cuando x tiende a 4, la función es 15.

Inv: Es 15, ¿y,..., la respuesta a la pregunta c, es?

EST68: A 10, porque por la parte de la derecha, cuando la función se va acercando a 4, o sea, cuando la x tiende a 4, la función se acerca a 10.

Inv: La función se acerca a 10.

EST68: ¿Esto es un punto gordo, o es...?

Inv: La idea es un agujerito.

EST68: Vale.

Inv: ¿Podrías describir el comportamiento de la función? ¿Podrías darme una respuesta a la pregunta d?

EST68: Por la izquierda,..., la función,..., cuando son menores que cero, cuando x es menor que 0, los valores de la y van aumentando, de la función, cuando los valores son de 0 hasta el 4 sin incluir el 4, la función vale 15, y los números mayores que 4, cuando x es mayor que 4 la función vuelve a subir.

Inv: Bien.

EST68: Pero esto no sé llama aquí, como es, aquí cada vez aumenta I , pero aquí es un crecimiento, es que no sé como...

Inv: Parabólico, parabólico, una rama parabólica. Me podrías dar ahora una respuesta a la pregunta e , ¿Cuál es el límite de la función en $x = 4$?

EST68: ..., yo diría que no tiene.

Inv: Tú dirías que no tiene, ¿Por qué?

EST68: Bueno, o no tiene o es 15 ,...

Inv: Cuando has pensado en no tiene, ¿por qué razón?

EST68: Por qué he pensado que, que, ..., no tiene, por qué no, porque no tendría ningún número, porque al no estar cogido el 10 , he pensado que en el número 4 no habría ningún valor, pero si el 15 sí que está, sí que sería 15 .

Inv: ¿Cambiamos de tarea? ¿Intenta justificarme como has completado la tabla?

EST68: Vale, he cogido los valores de la x y los he sustituido en la función.

Inv: ¿En, en cuál de ellas?

EST68: Pues, eh, para I la x tiene que ser menor que 0 , entonces, los números menores que 0 , pues he sustituido en esta función.

Inv: Cuando dices está, ¿cuál es?

EST68: En, en la primera.

Inv: En la primera.

EST68: Y los números que son iguales o mayores que cero los he sustituido en la segunda.

Inv: En la segunda. Respondes a la pregunta b .

EST68: Hum, hum.

Inv: Y dices que x se aproxima a 0 .

EST68: Porque, porque como todas, eh, todas las condiciones respecto a 0 .

Inv: ¿Dónde estás mirando para decir que x se aproxima a 0 ?

EST68: En la función..., lo he cogido en la función, ..., o también en los valores de la x .
33:18

Inv: Y dejas en blanco la pregunta c . ¿Podrías dar una respuesta ahora?

EST68: ..., no, ..., no, ..., a, no.

Inv: ¿No?

EST68: ...

Inv: ¿Podrías mirar la tarea 6 ?

EST68: ¿Podemos ir?: ...

Inv: Ahí hemos dado determinadas respuestas; diste una, hoy hemos dado otra.

EST68: Sí,...

Inv: ¿Te recuerda algo la tarea 6 , o no?

EST68: Sí, es la misma, pero lo que pasa es que tiene diferentes valores, pero, ..., oh, ..., es que cuando, por la izquierda tiende a 0 .

Inv: ¿Quién, quién?

EST68: La función, o sea, cuando x tiende a 0 , la función tiende a 1 , y cuando por la derecha tiende a 0 , la función tiende a -3 .

Inv: Tiende a -3 .

EST68: Entonces, no sabría decir cuando x es 0 , si es 1 o -3 , por eso lo dejé en blanco, igual que el límite.

Inv: O sea, ¿que no sabrías darme una respuesta a la pregunta e ?

EST68: No.

Inv: Vale. ¿Cambiamos de tarea? ¿Me puedes dedicar cinco minutos más?... Te resultó extraño, la presentación del problema.

EST68: Sí, igual que, no sé qué tarea.

Inv: Sería la 4 , la tarea 4 .

EST68: ..., menor que 0.001 , ...,

Inv: A mí me gustaría en este momento estar dentro de tu cabeza. Para entender los movimientos, esos múltiples movimientos que haces de dedos.

EST68: La primera, que, dice que cómo de próximos han de estar los valores de x de 2.5, para que la diferencia sea menor que 0.001, ..., en esta parte sí sé dónde mirar, pero cuando vienen por aquí hasta qué número...

Inv: Pero, pero, ¿podrías, aunque sea contestar, lo que estás intentando decir?

EST68: ...

Inv: Estas escribiendo, tienen que ser mayores que 2.4999, ¿te refieres a los valores de? (Figura 59)

EST68: Los valores de la x .

Inv: Los valores de la x .

EST68: ..., y luego ya sí que no sabría,...

Inv: ¿Dónde estás mirando ahora?

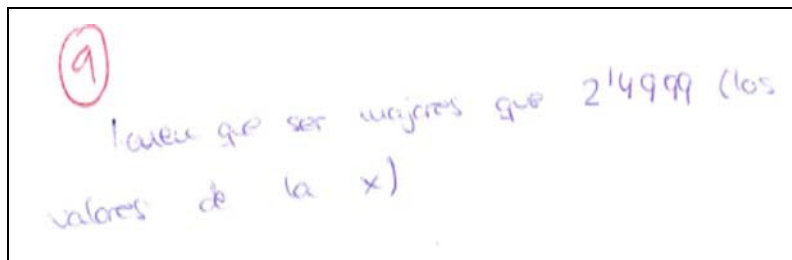


Figura 59. Respuesta de la EST68 a la Tarea 9

EST68: En la parte de la... En la parte de la derecha

Inv: En la parte de la derecha, ahí, ¿no sabrías contestarme?

EST68: No.

Inv: Vale. Y respecto a la pregunta b de indicar cuál es el límite, la dejaste en blanco, bueno, escribiste límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2.5, pero la dejaste en blanco

EST68: Claro, porque al tener dos valores diferentes que no son muy próximos, no sabría qué decir.

39:39

Inv: Al tener dos valores distintos próximos, no sabrías que decir.

EST68: Hum, hum.

Inv: Bueno, ¿cambiamos de tarea? A la tarea 10, de representar una gráfica no contestaste. Puedes intentarlo.

EST68: ... ¿cuándo?

Inv: Has puesto la condición a , un punto, ¿Dónde?

EST68: Cuando x vale 0 la función vale 4.

Inv: Cuando x vale 0 la función vale 4.

EST68: Cuando x va a 3, la función tiende a 1, ..., tiene que ir por aquí, la función tendría, ..., cuando x vale -3 .

Inv: Ahí estas intentando marcar la tercera condición.

EST68: Sí, ..., cuando, ..., pero no, no confiaría mucho, ... tiende a 0, tiende a 1.

Inv: Pero lo que estás dibujando ahora no cumple la primera condición, ¿la cumple?

EST68: No. ..., pero entonces, hum, ..., pero entonces, si hago una entonces ya no sabría hacer la otra, la otra parte.

Inv: Nosotros hemos hecho dos intentos, ¿podrías poner un 1 encima del primer intento y un 2 encima del segundo? (Figura 60)

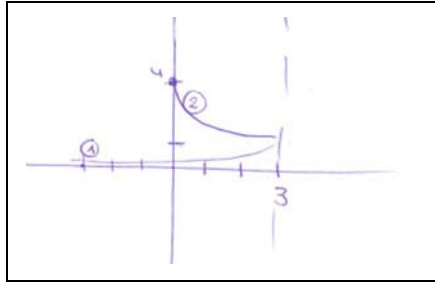


Figura 60. Respuesta de la EST68 a la Tarea 10

EST68: Sí,..., es que no sabría.

Inv: Quieres que lo dejemos.

EST68: Sí.

Inv: Y, muchas gracias, 43' de maravilla.

43:23



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Entrevista al EST71

Inv: Hola bon dia!

EST71: Bon dia!

Inv: Estem en la tasca 1. Hi vas contestar la pregunta a i b . Podries justificar-me la resposta a la pregunta a ?

EST71: Sí, he, tendeix a 3, ¿no?.

Inv: Podries dir-me, eixe moviment que has fet amb el dit, que has assenyalat?.

EST71: x 2.9.

Inv: Sí.

EST71: 2.99, 2.999, 2.9999, i l'altre costat esta...

Inv: El altre costat quin és?

EST71: La dreta. Esta 3.01.

Inv: Per tant la x s'aproxima a?

EST71: A 3.

Inv: A 3. Y respecte a la pregunta b ?

EST71: Eh, igual

Inv: Igual, quan dius igual vols dir?

EST71: També que s'aproxima a 15.

Inv: S'aproxima a 15.

EST71: Perquè a l'esquerra hi ha números que s'aproximen a 15, eh, i a la dreta, eh, igual.

Inv: Igual. Anem a la pregunta c . La pregunta c la vas deixar en blanc

EST71: Sí..., no ho entenc.

Inv: Podries descriure el comportament de la funció?

EST71: Eh, és, la ...

Inv: Mira els apartats a i b ... de tota manera si en algun moment de l'entrevista vols tornar enrere i contestar alguna de les preguntes, ho fem. Podries intentar descriure el comportament de la funció?

EST71: Posant més infinit o el que siga.

Inv: Sí, o mirant l'apartat a i l'apartat b .

EST71: Comença en el 3, en ...

Inv: De quina variable estàs parlant.

EST71: De la x . Comença en el 3, i a la $f(x)$ en el 15.

Inv: En el 15.

EST71: O siga més infinit, no?

Inv: O és 15 o és més infinit.

EST71: Ah, d'acord, d'acord, és 15.

Inv: Sí, torne a fer-te la pregunta. Descriu el comportament de la funció.

EST71: En x és igual a 3 i en $f(x)$ a 15.

Inv: És 15.

EST71: El comportament de la funció tendeix a 15.

Inv: El comportament de la funció tendeix a 15. Podries intentar contestar ara a la pregunta d ?

EST71: ... més infinit.

Inv: Podries intentar escriure-ho.

EST71: Com? ... dividint.

Inv: És que hi ha moltes maneres de contestar, podria ser dividint. La pregunta d demana que intentes dir-me quin és el límit de la funció en x igual a 3.

EST71: ... si tendeix a 15 ...

4:38

Inv: Vols que canviem de tasca.

EST71: Sí.

Inv: D'acord. Si en algun moment vols tornar enrere sense cap problema. Estem en la tasca 2, i contestes la pregunta *a*. Podries intentar argumentar-me perquè en la pregunta *b* dones, quina resposta vas donar en la pregunta *b*?

EST71: $x=2$, i $y=-5$. En l'altre costat, la dreta $x=4$, $y=-2.5$.

Inv: Eixa és la pregunta *a*, i en la pregunta *b*, quina resposta vas donar?

EST71: A més infinit.

Inv: A més infinit. Podries comentar-me on mires?

EST71: ... perquè la,... la recta, bo, la corba, la ...

Inv: La funció.

EST71: La funció va de ... eh, ..., de la part esquerra baixant fins a $-2x$, no fins $2x$ i -5 y i després puja, cap la part dreta.

Inv: Però, que et pregunten exactament en la pregunta *b*?

EST71: A quin número s'aproxima la funció.

Inv: Quan x ...

EST71: Quan x és...

Inv: S'aproxima a...

EST71: A 2.

Inv: A 2. A què s'aproxima la funció quan x s'aproxima a 2? A 2 per on?

EST71: Positiu?

Inv: Sí.

EST71: En x .

Inv: En x , sí. A què s'aproxima la funció, quan x s'aproxima a 2?

EST71: A més infinit.

Inv: I estàs mirant a on?

EST71: A partir d'ací cap amunt.

Inv: A partir d'ací cap amunt. Que en el full has posat un més infinit en la gràfica.

EST71: Sí.

Inv: Anem a la pregunta *c*.

EST71: Si. ... quan x pren els valors, eh, s'aproxima a 2.

Inv: A 2.

EST71: Jo he posat menys infinit.

Inv: Tu has posat menys infinit, i ara què posaries?

EST71: També més infinit, no?. No, tendeix a,..., a 2

Inv: A 2, tendeix qui?

EST71: ... $f(x)$, no?. No, si són iguals, d'acord m'he equivocat.

Inv: No tinc massa clar, però si vols modificar alguna cosa, el que vulgues, però no t'entenc ara. Vols que tornem a la pregunta *b*, o tornem a la *c*?

EST71: No, a la *c*.

Inv: A la *c*. A què s'aproxima la funció quan x s'aproxima als valors 2.1, 2.01, 2.001.

EST71: A més infinit.

Inv: A més infinit, i quan dius més infinit estàs mirant a...

EST71: En aquest cas igual al 2, ..., a la part dreta també, no?, ...

Inv: Vols que passem de pregunta?

EST71: Sí, d'acord.

Inv: Quin és el comportament de la funció $f(x)$, en relació al comportament de la variable x ?

EST71: ...

Inv: Si vols et pregunte la pregunta *e*. Quin és el límit de la funció en $x=2$?

EST71: ..., jo he posat més infinit.

Inv: Tu has posat més infinit.

EST71: Perquè a partir d'ací puja.

10:07

Inv: Perquè a partir d'ahí puja. D'acord, canviem de tasca? Estem en la tasca 3. La pregunta *a* és completa la taula. Podries justificar-me com has calculat algun valor?

EST71: Sí, he posat un número gran en la x i he fet l'equació, i m'ha donat.

Inv: Com un número gran?

EST71: Ara no me'n recorde del número, però ... puc posar (en la calculadora).

Inv: Sí, sí.

EST71: Per exemple, 1000 , $1000 - 2$ partit per 1000 al quadrat, on estava la x , $- 4$.

Inv: Sí.

EST71: I m'ha donat.

Inv: Què t'ha donat?

EST71: 9.2 per 10 a la $- 4$, ...

Inv: Però el problema et demana completa la taula.

EST71: Ah, d'acord, m'he equivocat.

Inv: Que vols dir m'he equivocat?

EST71: Que en lloc de 1000 hauria d'haver posat 1.9 , on estava en l'equació la x .

Inv: Podries fer-ho en el full que t'he donat?

EST71: Sí, ...

Inv: I ara et dona, el 1.9 de la x , et dona?

EST71: 0.25 .

Inv: Posa'm alguna xifra decimal més.

EST71: 64 (Figura 61).

Figura 61. Resposta de la EST71 a la Tasca 3

Inv: Perfecte. Calcula'm algun valor més.

EST71: El 1.99 , ..., i ara em dona...

Inv: Posa-ho ací.

EST71: I ara em dona 0.2506 .

Inv: Calcula me'n un altre, per favor.

EST71: Em dona 0.25006 .

13:14

Inv: Bé, parlem de la pregunta b . En la pregunta b pregunten a què s'aproxima la x .

EST71: ... jo he posat 2 , però...

Inv: Tu has posat 2 .

EST71: Ara estic mirant-ho i .

Inv: On estàs mirant?

EST71: Els resultats.

Inv: Però, els resultats són la x o...

EST71: La de dalt.

Inv: A què tendeix x ?

EST71: A 2 .

Inv: A 2 . I si responguérem a la pregunta c , la funció a què s'aproxima?

EST71: A ... 0.25 .

Inv: A 0.25 . Nosaltres hem fet els càlculs en una part de la taula.

EST71: Sí.

Inv: Sí, quina part?

EST71: En l'aproximació, ..., en l'equació, no?

Inv: Sí, però en quina part de la taula, en quins valors de la x .

EST71: 1.9 , 1.99 , i 1.999 .

Inv: I en l'altra part de la taula, què passa? Podríem provar a veure què passa?

EST71: Sí.

Inv: Ara estem completant la taula, per a quin valor de la x ?

EST71: 2.0001 (el so de fons és de la calculadora).

Inv: I dóna?

EST71: 0.24999 .

Inv: Bé, fem algun valor més.

EST71: Dóna 0.2499 .

Inv: A què s'aproxima l' x en eixa part de la taula?

EST71: S'aproxima a zero coma, a 0.24 , a 25 .

Inv: A 25 , però això qui és?

EST71: La part dreta.

Inv: Sí, però l' x a què s'aproxima?

EST71: A 2 .

Inv: A 2 , i la funció?

EST71: A 0.24 .

Inv: A?

EST71: A...

Inv: Sí?

EST71: Sí.

Inv: Podries descriure el comportament de la funció, podries respondre la pregunta d ?

EST71: ...

Inv: Si en algun moment vols mirar algun problema anterior, ho fem, sense dificultats, ..., et costa molt.

EST71: Sí

Inv: I respondre'm a la pregunta e , dir-me quin és el límit de la funció en $x=2$?

EST71: ..., el límit s'aproxima a 0.25 .

Inv: El límit s'aproxima a 0.25 . I això no podries escriure-ho?

EST71: En una taula?

Inv: La taula la tenim.

EST71: En una gràfica?

Inv: Hum, si en algun moment vols tornar enrere tornaré a fer-te la mateixa pregunta. Canviem de tasca?

EST71: Sí.

Inv: D'acord. Estem en la tasca 4 . Tu vas posar valors en determinats llocs, podries explicar-me algun dels valors que vas posar?

EST71: El primer perquè x s'aproxima a 0.5 .

Inv: Estàs mirant la primera.

EST71: Sí.

Inv: La primera fila.

EST71: Sí.

Inv: s'aproxima a 0.5 , I s'aproxima per on?... Quan dius s'aproxima, que vols dir?

EST71: Eh, a la part esquerra.

Inv: D'acord.

EST71: Eh, hi ha números que, eh, s'aproximen, eh, números per baix de 0.5 .

Inv: Per baix de...

EST71: Aproximant-se.

Inv: Aproximant-se.

EST71: Sí, 0.49999 , i per la dreta.

Inv: I per la dreta.
 EST71: Eh, un poquet majors.
 Inv: Un poquet majors que qui?
 EST71: Que 0.5 .
 Inv: Que 0.5 .
 EST71: Per exemple 0.0500001 , o 0.5001 .
 Inv: Després, també poses un altre número en la segona fila.
 EST71: Igual, s'aproxima però en aquest cas a 1 coma.
 Inv: S'aproxima a 1 coma.
 EST71: A 1.5 .
 Inv: A 1.5 , i s'aproxima igual.
 EST71: Si, igual és per la dreta, per l'esquerra.
 Inv: Per l'esquerra.
 EST71: Números menors 1.499997 , i per la dreta 1.500003 .
 Inv: Bé, després intentes donar una resposta a la pregunta a .
 EST71: ...
 Inv: Quan intentes donar una resposta la pregunta a , en quina fila estàs mirant?
 EST71: ..., en la tercera.
 Inv: En la tercera.
 EST71: ...
 Inv: I després, quan respones a la pregunta b , tu vas escriure que el límit era més infinit?
 EST71: Sí, ..., m'estic fixant en la x .
 Inv: T'estàs fixant en la x .
 EST71: I en la $f(x)$.
 Inv: I en la $f(x)$. Quin és el límit de $f(x)$ en el punt $x=0.5$?
 EST71: El límit?
 Inv: El límit de la funció $f(x)$ quan la x val 0.5 ?
 EST71: Més infinit.
 21:18
 Inv: Més infinit, i això ho estàs mirant en la taula?
 EST71: Sí.
 Inv: On estàs mirant? En quina fila?
 EST71: En la primera i en la segona.
 Inv: En la primera i en la segona. En la primera la x , s'aproxima a què?
 EST71: A 0.5 .
 Inv: A 0.5 , I en la segona la $f(x)$ s'aproxima a?
 EST71: A 1.5 .
 Inv: Per tant, el límit de la funció en el punt 0.5 és?
 EST71: Més infinit.
 Inv: Més infinit. Anem a canviar de tasca... estem en la tasca 5, i demanem una gràfica que complisca tres condicions.
 EST71: $f(1)$ és igual a 3.
 Inv: A 3, I això en la gràfica que tens és?
 EST71: ...
 Inv: Que estàs senyalant?
 EST71: En $x 1$.
 Inv: En $x 1$.
 EST71: La y és 3.
 Inv: La y és 3, i tu vas posar.
 EST71: Un punt.
 Inv: Un punt. Després tens una línia.
 EST71: Límit.
 Inv: Sí.
 EST71: Eh, $f(x)$ és igual a més dos de x que tendeix a més infinit.

Inv: Més infinit. Podries indicar-me el més infinit de la x on està?
 EST71: ... el més infinit ...
 Inv: El més infinit de les ixs .
 EST71: A, és açò?, no t'entenc.
 Inv: No ho entens. Quan nosaltres posem en l'apartat b que la x tendeix a més infinit, on mirem? On observem? En què he de fixar-me per a saber que la x tendeix a més infinit?
 EST71: ...
 Inv: Tu m'has marcat el primer quadrant, una zona un poquet massa ampla el que m'has marcat, voldria un poquet més concret, que concretares un poquet més.
 EST71: Entre la x 2.
 Inv: Entre la x 2.
 EST71: I el $f(1)$.
 Inv: I el $f(1)$.
 EST71: Igual a 3.
 Inv: Igual a 3. Bé, i quan parlem de la pregunta c .
 EST71: ..., doncs...
 Inv: Ahi la x a què tendeix?
 EST71: A 2.
 Inv: I la $f(x)$?
 EST71: A més infinit ...
 Inv: D'acord, canviem de tasca? Estem en la tasca 6, respons la pregunta a , respons la pregunta b . Podries justificar-me perquè respons 4 a la pregunta a ?
 EST71: Perquè pel costat esquerre, eh, els números s'aproximen per baix a 4, i pel dret damunt de 4.
 Inv: Però s'aproximen a?
 EST71: A 4.
 Inv: A 4. I en la pregunta b contestes 15 i 14.
 EST71: 15, i 14.
 Inv: Per què?
 EST71: ... ara no me'n recorde.
 Inv: Podries mirar la taula, i intentar tornar a contestar la pregunta b ?
 EST71: ...
 26:15
 Inv: Tornem a començar.
 EST71: Sí.
 Inv: Tu contestes a la pregunta a que x s'aproxima a 4.
 EST71: Sí.
 Inv: Per què contestes que x s'aproxima a 4?
 EST71: Per l'esquerra els números s'aproximen a 4 per baix.
 Inv: Sí.
 EST71: I pel costat dret per damunt.
 Inv: S'aproximen...?
 EST71: A 4.
 Inv: Per damunt, anem a la pregunta b . A què s'aproxima la funció?
 EST71: Per l'esquerra a 15.5.
 Inv: A 15.5.
 EST71: I per la dreta a 14.
 Inv: Podries descriure'm el comportament de la funció?
 EST71: ...
 Inv: Podries contestar-me a la pregunta d , quin és el límit de la funció?
 EST71: A 15.5 o a 14, ..., a menys infinit.
 Inv: A menys infinit. D'acord.
 EST71: Sí.

Inv: Canviem de tasca... Estem en la tasca 7, vas contestar la pregunta a , en la pregunta b vas posar més infinit, i en la pregunta c vas posar menys infinit. Podries intentar explicar-me com respons la pregunta b ?

EST71: ...

Inv: On estàs mirant per a donar eixa resposta?

EST71: ...

Inv: Has llegit la pregunta b ?

EST71: Si, ..., ah, he posat valors en x . Eh, ..., no sé què vaig fer.

Inv: A què s'aproxima x , ..., en la pregunta b , els valors de la x .

EST71: A més infinit.

Inv: Els valors de la x .

EST71: A menys infinit.

Inv: A menys infinit, on estàs mirant?

EST71: A la part esquerra de la gràfica.

Inv: I quan passem a la pregunta c , a què s'aproxima la x .

EST71: Jo he posat a més infinit, però ...

Inv: Però jo t'he preguntat a què s'aproxima la x ?

EST71: Ah, a 4.

Inv: A 4, ..., i quan la x s'aproxima a 4, la funció s'aproxima a.

EST71: A més infinit.

Inv: A més infinit, i tornes a mirar...

EST71: A la part dreta.

Inv: Quasi eixint-se ja de la gràfica.

EST71: Hum.

Inv: D'acord, canviem de tasca?... Estem en la tasca 8, i tu contestes la pregunta a , i la pregunta b .

EST71: Hum

Inv: Podries intentar justificar-me com calcules algun dels valors de la taula?

EST71: Posant en la x 0.1.

Inv: Quan dius posant, on estàs referint-te.

EST71: Substituint.

Inv: Substituint, però a on?

EST71: En la funció, en l'equació.

Inv: En l'equació, però hi ha dues equacions?

EST71: En les dues, ..., no en una.

30:59

Inv: En una.

EST71: En x , en la part esquerra, i la de baix, en la dreta.

Inv: D'acord. Calcula un valor de cada costat.

EST71: ...

Inv: Has calculat quan la x val -0.1 , i et dóna?

EST71: 0.8.

Inv: Igual que ho havies calculat. Bé. Provem un altre valor.

EST71: El de baix.

Inv: Si, m'has assenyalat, quin valor?

EST71: 0.0001.

Inv: I et dóna?

EST71: -3 .

Inv: Menys tres coma.

EST71: -3.0002 .

Inv: I l'altra vegada et va donar.

EST71: -2.9998 .

Inv: 8, ..., vols calcular-ne algun valor més.

EST71: Hum, de la dreta.

Inv: Si de la dreta, ..., ara has substituït, quin valor?

EST71: 0.001.

Inv: 0.001, i et dóna?

EST71: -3.002 (Figura 62).

The image shows handwritten work for 'Tasca 8'. It includes the following equations and solutions:

$$2 \cdot (-0.2) + 1 = 0.8 \quad -2 \cdot 0.0001 - 3 = -3.0002$$

$$2 \cdot (-0.02) + 1 = 0.98 \quad -2 \cdot 0.001 - 3 = -3.002$$

Figura 62. Resposta del EST71 a la Tasca 8

Inv: -3.002, ..., vols calcular-ne algun valor més.

EST71: El de l'esquerra.

Inv: Ara has calculat, quin...?

EST71: -0.01.

Inv: -0.01, i et dóna.

EST71: 0.98.

Inv: Que és el mateix que et donava.

EST71: Hum.

Inv: Anem a la pregunta b. En la pregunta b en què s'aproxima la x, tu respos?

EST71: A 0.

Inv: A 0. I quan arriben a la pregunta c, a què s'aproxima la funció, la deixes en blanc. Mirant els càlculs que has fet ara, podries dir-me a què tendeix, a què s'aproxima la funció?

EST71: A 3.

Inv: A 3. A 3?

EST71: A -3.

Inv: I quan parlem del -3, a on estàs mirant?

EST71: En la part dreta.

Inv: En la part dreta, i en l'altra part?

EST71: En l'altra part, a ..., a 1.

Inv: A 1. Per tant, en la pregunta c quan diuen, a què s'aproxima la funció, quina resposta hauríem de donar?

EST71: A menys infinit.

Inv: D'acord. Canviem de tasca? Que et va pareixer, una mica sorprenent la tasca 9?

EST71: Sí.

Inv: Vols mirar-la, vols que la deixem.

EST71: Sí, millor.

Inv: D'acord. Passem a la tasca 10. En la tasca 10 demanen que representes una funció, la gràfica d'una funció que complisca tres condicions. Tu vas marcar.

EST71: La primera.

Inv: Solament la primera de les condicions, que és...?

EST71: $f(0)=4$.

Inv: Que és un...?

EST71: ..., és un punt.

Inv: És un punt. Les altres condicions, no.

EST71: No.

Inv: Vols intentar-ho ara?

36:10

EST71: ...

Inv: Quan tu veus que límit de la funció quan x tendeix a tres, és l , què estàs veuent, que hi veus? Com t'ho imagines?

EST71: En la part esquerra, en la part dreta.

Inv: Podries intentar-ho, si necessites fer-ne més d'una ho fas?

Inv: Ara estàs marcant la primera condició.

EST71: Sí.

Inv: Que és el punt.

EST71: En $x+l$,...

Inv: En x què...?

EST71: Tendeix a $+3$.

Inv: x tendeix a $+3$, la funció val l .

EST71: ...

Inv: Podríem posar també si vols, la condició a , en el gràfic que estàs fent ara.

EST71: ...

Inv: La condició a és $f(0)=4$.

EST71: Ah, x és 0 , y és 4 (Figura 63).

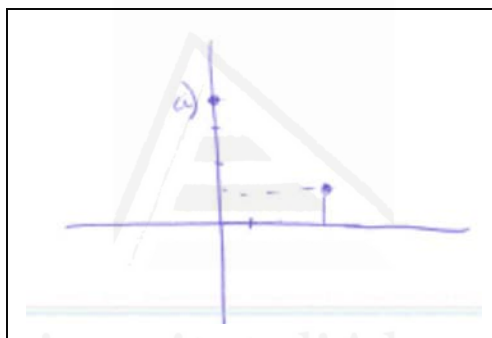


Figura 63. Resposta del EST71 a la Tasca 10

Inv: x és 0 , y és 4 . Eixa és la primera condició.

EST71: Sí, ..., esta és la b , quan x és l , ...

Inv: És complicat, eh?

EST71: Hum.

Inv: Una pregunta, en el full del qüestionari, quans punts vas marcar.

EST71: Un.

Inv: Un. Només un.

EST71: Açò, ..., un...

Inv: El que es veu directament.

EST71: Hum.

Inv: Vols que ho deixem.

EST71: Sí.

Inv: D'acord, i moltes gràcies!

EST71: De res.

39:05

Entrevista al EST72

Inv: ¡Hola!

EST72: ¡Oh!,...

Inv: Estamos en la tarea 1, ¿me podrías justificar,..., porque respondes,...?

EST72: ¿A esto?

Inv: Sí.

EST72: Pues me acuerdo un poco, que cuando el número se aproximaba, que el número se aproxima, pero nunca llegará al número, pero siempre por un lado... desde el más infinito al menos infinito, me acuerdo que se aproximaba a un número, pero nunca llegaba a ese número.

Inv: Cuando dices por un lado y,..., ¿a qué te refieres? Concrétame un poco más.

EST72: Eh,..., más hacia el tres, o,..., no sé cómo decirlo..., desde infinito hacia al tres y desde menos infinito al tres.

Inv: Vale. ¿Y la respuesta a la pregunta b?

EST72: Eh,..., por lo mismo, por los resultados que pone aquí,..., no lo sé, se aproxima cada vez más al 15, y aquí también.

Inv: Indícame, cuando pones,..., ese movimiento que haces con el dedo.

EST72: No se, cuando va desde el más infinito al 15 coma algo, al 15 por ejemplo al 15'011, se acerca más al 15, y cuando va desde el 14 al 999 se acerca más al 15 por redondeo.

Inv: Después respondes a la pregunta c.

EST72: Sí.

Inv: Sí. Y cuando intentas responder a la pregunta ¿Cómo intentas responder a la pregunta d?

EST72: ..., eh,..., no sé, no sé,...

Inv: Tú escribes, en la respuesta b, ¿qué escribiste?

EST72: No, porque en este momento la función no existiría.

Inv: ¿En qué fracción estas pensando?

EST72: Ahora mismo no lo sé, pero,...

Inv: ¿Por qué en la hoja...?

EST72: Sí, porque en la hoja no he escrito nada.

Inv: Porque en la hoja no hay ninguna fracción.

EST72: A lo mejor en aquel momento me dolía la cabeza y...

Inv: ¿Me podrías dar ahora una respuesta a la pregunta d?

EST72: ... no lo sé..., no sé ninguna, no...

Inv: De todas maneras, si a lo largo del rato que estamos,..., de entrevista, quieres volver atrás, volvemos ¿eh?

EST72: Sí, vale.

Inv: Vale. ¿Vamos a cambiar de tarea?

03:14

Inv: En la tarea 2, contestas a la primera pregunta. ¿Podrías decirme de que forma lo hiciste?

EST72: Sí, mirando en la gráfica, me fije en un valor cualquiera en el valor de las equis, y mire que..., el equivalente a la y.

Inv: El equivalente a la y, ¿podrías elegirme otro?

EST72: Sí, por ejemplo el menos uno con...

Inv: Sí.

EST72: Menos uno con cinco más o menos sería de las equis, y daría 0.

Inv: 0, vale.

Inv: Vamos a la pregunta b.

EST72: ¿.... aquí con la gráfica?

Inv: Sí.

EST72: Llegas a este punto, y conforme le das valores vas viendo cómo va aumentando.

Inv: Ah.

EST72: Bueno, se va acercando pero nunca llega.

Inv: ¿A qué se acerca?

EST72: Al 2.

Inv: Al 2, ..., ¿la x ?

EST72: Sí la x .

Inv: ¿Y la función?

EST72: ...yo he puesto más infinito, pero ahora mismo no me acuerdo.

Inv: Sí, tú en tu respuesta pones más infinito.

EST72: Yo he puesto más infinito porque esto se va para allá.

Inv: ¿Podrías indicar que estas señalando?

EST72: La recta que va desde el 2 y va subiendo para arriba hacia la derecha.

Inv: ¿Hacia...?

EST72: Hacía la derecha.

Inv: La derecha, pero la pregunta que te hace el apartado b es para valores de equis $1'9$, $1'99$, $1'999$, ...

EST72: ...

Inv: ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

EST72: ..., va subiendo, cada vez va ascendiendo más, pero no sé, ahora mismo no sé, me estoy liando.

Inv: Pasamos a la pregunta c .

EST72: Sí, es la misma, pero...

Inv: También vuelves a responder más infinito, ¿dónde miras, qué observas para decir más infinito?

EST72: ... creo que a la curva que va hacia arriba.

Inv: Cuando dices hacia arriba, ¿estamos hablando...?

EST72: De los positivos, a ver...

Inv: ¿Qué se pregunta en el apartado c exactamente?

06:10

EST72: Que cuando coja las equis los valores de de 2.1 , 2.01 , ..., ¿a qué número se acerca la función de $f(x)$? ...

Inv: Cambiamos de tarea.

EST72: ¡Hum!

Inv: Vale. Vamos a la tarea 3. Como has respondido a la pregunta a .

EST72: Aquí he completado, he ido a $f(x)$ en la ecuación he ido sustituido el 1.9 en la x , y así en todos.

Inv: De acuerdo. Dime, ¿porque respondes 0.25 a la pregunta c ?

EST72: ¿Aquí?

Inv: Sí.

EST72: Porque en el resultado que me da en la ecuación con 1.9 , 1.99 , y el 2.01 todos me dan hacia 25, redondeando. El 1.9 me da 25.26 , 25.06 y me..., redondeando se aproxima al 25.

Inv: ¿Se aproxima a?

EST72: A 25, ..., o sea a 0.25 .

Inv: A 0.25 , bien, sí.

07:40

EST72: Y el 2.001 se aproxima también hacia el 25 porque me da 0.2499 , si redondeas a 0.25 .

Inv: Y después das una respuesta a la pregunta e . ¿Me podrías explicar en la pregunta e qué haces?

EST72: También sustituir en fórmula.

Inv: Sustituir en la fórmula.

EST72: Sí.

Inv: ¿Y da?

EST72: 0 partido 0.

Inv: 0 partido 0, y pones que no existiría.

EST72: Sí, aunque me acuerdo que vimos algo el año pasado, que se podía hacer algo más, pero no me acuerdo cómo se hacía, ah,..., hay una cosa ahí que, que no me acuerdo, se tenía que hacer algo cuando ponía cero partido cero, ... o cosas así.

08:24

Inv: ¿Podrías intentar ahora contestarme a la pregunta e , mirando lo que has escrito anteriormente?

EST72: ..., no.

Inv: ¿No?

EST72: ..., no lo sé.

Inv: Cambiamos de tarea.

EST72: Vale.

Inv: Vale. En la tarea 4 has puesto dos números.

EST72: Sí, también por aproximación.

Inv: Sí, sí, por aproximación.

EST72: Desde un lado y desde el otro.

Inv: Cuando dices un lado, ¿te refieres a...?

EST72: De izquierda a derecha, y de derecha a izquierda.

Inv: De izquierda a derecha. Y los números que has puesto, quieres intentar decir... ¿Qué quieres intentar decir con los dos números que has puesto?

EST72: ..., que ya desde un lado o desde el otro te vas, vas a encontrarte en ese punto, vamos.

Inv: Especifícame, en qué fila estás mirando.

EST72: En la x .

Inv: En la x .

Inv: Y mirando la tabla, ¿la tiende...?

EST72: A 0.5 , desde 0.4999 , y desde 0.5 .

Inv: ¿El otro número que pones?

EST72: En $f(x)$, también hago lo mismo.

Inv: En $f(x)$, ¿lo pones mirando dónde?

EST72: También va a ser por lo mismo.

Inv: ¿Lo pones mirando la tabla?

EST72: Sí.

Inv: ¿Y las preguntas te resultaron un poco extrañas?

EST72: Sí.

Inv: Sí... ¿Quieres leerlas, quieres que pasemos?

EST72: ... mejor paso.

Inv: Estamos en la tarea 5. En la tarea 5 marcaste un punto.

EST72: Sí, cuando f es 1 es igual a 3 .

Inv: ¿Cuando tienes uno...?

EST72: Cuando la x es 1 la función es 3 .

Inv: Cuando tienes 1 la función es 3 .

EST72: Aquí,..., en la b contesté esto,...,

Inv: En, en el gráfico, dibujaste,..., un trozo. ¿Con ese trozo que intentas representar?

11:29

EST72: Que se va aproximando hacia el 2 , en esta función. Que cuando viene desde el más infinito de la x cada vez se aproxima más a 2 . Quiero representar eso.

Inv: ¿Podrías intentarlo?

EST72: ¿Hacerlo otra vez?

Inv: Sí.

EST72: No se,...

Inv: Intenta poner algo más de lo que tienes en la respuesta que diste.

EST72: ...

Inv: Intenta responder al apartado a .

EST72: ..., no me acuerdo.

Inv: Es que antes has hecho un movimiento,..., intentado indicar que podías continuar.
¿Podrías hacerlo?

EST72: ¿Cómo que puedo continuar?, ¿esté?

Inv: Sí,...

EST72: No sé, podría ser ahí, que esto siga, no sé,... (Figura 64).

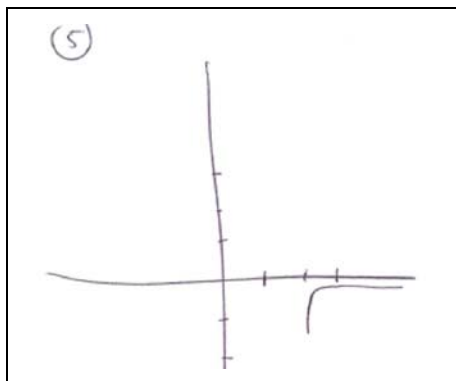


Figura 64. Respuesta de la EST72 a la Tarea 5

Inv: Lo que terminas de dibujar,..., ¿a qué se aproxima?

EST72: Al más infinito.

Inv: ¿Al...?

EST72: Al menos infinito.

Inv: Al menos infinito, ¿estaríamos contestando...?

EST72: A la pregunta c.

Inv: ¿Y la otra rama a que se aproxima?

EST72: A 2.

Inv: Pero en el dibujo, ¿a qué número te aproximas tú?

EST72: ¿En este?, esperate.

Inv: Yo estoy mirando el gráfico que estas terminando de hacer, sí, ese.

EST72: Este va hasta el menos infinito.

Inv: Este va hasta el menos infinito.

EST72: Este va hasta el más infinito.

Inv: ¿El más infinito de quien?

EST72: De los positivos, de la x .

Inv: De la x , y la y , ¿a qué tiende?

EST72: Al menos infinito, o no sé, si, me estoy liando,...

Inv: ¿Quieres que lo dejemos?

EST72: Hum, sí.

Inv: En la tarea 6 respondes al apartado a,...

EST72: ..., 4. Igual que las anteriores. Por aproximación.

Inv: Después intentas responder a la pregunta b.

EST72: Sí, ..., y también por aproximación.

Inv: ¿Dónde estás mirando para responder a la pregunta b?

EST72: Sí por ahí.

Inv: Y por aproximación, ¿a qué número se aproxima $f(x)$?

15:17

EST72: Por ahí, parece que a 14.

Inv: Cuando dices por ahí, ¿a qué te refieres?

EST72: Por la derecha.

Inv: Por la derecha.

EST72: Se aproximaría a 14, y... A 15 coma.

Inv: ¿A qué número?

EST72: ..., a 16, ¿sí, no?, a 15, a la mitad, entonces a 16, ¿sí, no?

Inv: ¿A qué número se aproxima $f(x)$? Si mirando la tabla.

EST72: ..., por un lado a 15, y por el otro a 14.

Inv: ¿Cuándo dices por un lado nos estamos refiriendo?

EST72: De la izquierda a la derecha a 15, y de la derecha a la izquierda a 14.

Inv: ¿Y podrías darme alguna respuesta a la pregunta d?

EST72: ..., puede ser, ..., no, ...

Inv: ¿Cómo?

EST72: Al haber un intervalo, puede que siga la función, es que no lo sé, ...

Inv: Vale, pasamos a la tarea 7.

Inv: Respondes a la pregunta a.

EST72: Sí.

Inv: ¿Podrías decirme...? Tienes varios tachones en la pregunta b. ¿Podrías decirme, cómo, dónde miras, qué observas para responder?

EST72: Sí, cuando miro el 3', miro las equis; x que sería aquí, me fijo aquí creo, en la raya que...

Inv: ¿En la función?

EST72: Sí.

Inv: Y la función, ¿se aproxima a?

EST72: A 15.

Inv: A 15... Y en el apartado b, ..., perdón en el apartado c.

EST72: A 10, porque baja.

Inv: Cuando dices aquí, ¿te fijas en...?

EST72: En la curva que hay.

Inv: ¿En qué sitio de las equis te estás fijando?

EST72: De más infinito hacia 4.

Inv: Hacia 4, y cuando nos vamos acercando al 4, ¿la función se va acercando?

EST72: Al 10, ...

Inv: Y, ¿podrías intentar describirlo?

EST72: Pues, ..., cuando..., de estas dos, ¿no?

Inv: Sí.

EST72: Pues cuando x se aproxima a 4, la función de x se aproxima a 10, y desde menos infinito hacia 4 por la izquierda.

Inv: Por la izquierda.

EST72: Se aproxima a 15.

Inv: Y el primer límite que has señalado, ¿nos aproximamos por dónde?

EST72: Pues, por la derecha.

Inv: Ah, por la derecha. Y del límite en el punto 4, ¿podrías decirme algo?, intentando responder a la pregunta d.

19:22

EST72: Creo que esté abierto, puede que no; no sé si está abierto o cerrado, puede que se coja o no; o sea...

Inv: Vale.

EST72: Que puede pertenecer al límite o no.

Inv: Cambiamos de tarea

EST72: Vale. Sí, aquí es como lo anterior ejercicio, cojo el valor de la x y lo pongo en la función, para completar la tabla, ...

Inv: Por ejemplo ¿Este valor donde lo sustituiste? ¿El 0.1 donde lo sustituiste?

EST72: ..., no lo sé ahora mismo.

Inv: ¿Podrías intentar decirme que vale la función en 0.1?

EST72: ...

Inv: ¿Estás haciendo algún cálculo mental?

EST72: Sí, estoy intentando...

Inv: ¿Podrías intentar escribirlo?

EST72: Sí,..., Hum, ..., aquí, ..., Hum,..., ahora ya no lo sé.

Inv: ¿Qué te está dando ahora?, pero, ¿qué número te está dando ahora?

EST72: Menos tres coma... (Figura 65).

Inv: ¿Cuándo la x vale?

EST72: 0.1 en la $f(x)$ cuando x es mayor o igual que 0 .

Inv: Cuando x es mayor o igual que 0 .

$$2 - 0'7 + 1.$$

$$0'2 + 1 = 1'2.$$

$$-2'.$$

$$-0'2 - 3 = -3'2$$

Figura 65. Respuesta de la EST72 a la Tarea 8

EST72: ...

Inv: Y respecto al comportamiento de la función, el describir el comportamiento, ¿podrías decirme algo?

EST72: ..., si,..., cuando la $f(x)$ tiende a $+1$, que pone este resultado.

Inv: ¿Dónde estás mirando para decir...?

EST72: En la tabla

Inv: Sí, si, pero en que parte de la tabla.

EST72: En la de abajo, en la de la $f(x)$. Cuando va a 1 , en la x se aproxima a 0 .

Inv: Cuando la x se aproxima a 0 la $f(x)$ se aproxima a 1 . ¿Y estamos hablando de...?

EST72: La $f(x)$.

Inv: ¿Y?

EST72: ..., no lo sé ahora mismo.

Inv: Esta bien, ¿lo dejamos?

EST72: Sí.

Inv: Miramos la tarea 9, que la dejaste en blanco. ¿Es que te resulta complicada?

EST72: Me resultó bastante complicada, y no la supe contestar.

Inv: Vale. Y respecto a la tarea 10.

EST72: Pues intente igual que la otra.

Inv: Sí.

EST72: ...

Inv: Cuando la x .

EST72: Cuando la x es 0 , es 4 .

Inv: Es 4 .

EST72: Y puse un punto. Y cuando,..., la x es -3 se va aproximando a 0 .

Inv: En la gráfica se va aproximando, ¿por dónde?

EST72: De izquierda a la derecha.

Inv: Pero en un momento determinado paras.

24:20

EST72: Sí, cuando se aproxima al..., cuando la x está en el 3 .

Inv: ¿En el...?

EST72: En el 3 , cuando la x es -3 .

Inv: ¿Y el otro límite, el del apartado b ?

EST72: Es que ahí no sé si era una recta, o que sea cero el límite,...o, bueno porque también podría ser un punto, si sustituyo, si pongo la x ahí me da 1 .

Inv: ¿Cuándo dices pongo la x ahí?

EST72: En el b el 3 , al sustituirlo en la x da 1 .

Inv: Lo sustituyes en la x .

EST72: Y me da $+1$, podría ser un punto, no sé...

Inv: Lo dejamos

EST72: Vale

Inv: Muchas gracias.

25:30



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Entrevista al EST73

Inv: Hola. Empezamos con la tarea 1. Respondes a la pregunta a, a la b, a la c. ¿Me podrías justificar la pregunta b, por ejemplo?

EST73: ... no sé.

Inv: ¿Por qué das la respuesta que das?

EST73: Porque es a lo que se aproxima, es que no...

Inv: Sí, sí, dime dónde, especificame, ¿dónde miras exactamente, para decir...?

EST73: Pues, eh, a los dos lados.

Inv: ¿A los dos lados de qué?

EST73: A los resultados que pone aquí.

Inv: ¿No podrías ser un poco más concisa?

EST73: Es que no me acuerdo de cómo lo hice.

Inv: Sí, sí, ese movimiento que has hecho con los dedos, sí, intenta explicarlo con palabras. Tú has señalado un sitio, has señalado otro.

EST73: Ahí, pero...

Inv: ¿Podrías especificame ese ahí, con algún número, concrétime?

EST73: Cuando, eh, no sé cómo decirlo, cuando x se aproxima más al 3 por la izquierda, $f(x)$, eh, se aproxima a 15.

Inv: Sí, ¿y?

EST73: E igual, pero por la derecha.

Inv: Igual quiere decir, ¿qué cuándo la x ...?

EST73: Que cuando la x tiende a 3 por la derecha.

Inv: Sí.

EST73: Desde, supongo que será desde el infinito, no sé, eso no lo sé.

Inv: Bien.

EST73: Eh, f se aproxima al 15.

Inv: f se aproxima al 15.

EST73: Sí.

Inv: Que es un poco lo que dices en la pregunta c, y dejas la pregunta d en blanco.

EST73: Sí.

Inv: ¿No podrías intentar contestar a esa pregunta?

EST73: ..., pues sería 15, ¿no?

Inv: Sería 15, ¿lo podrías escribir?

EST73: Eh, no sé, je, je.

Inv: Te puedes reír todo lo que quieras.

EST73: Es que no sé cómo ponerlo, no sé cómo ponerlo (Figura 66).

Handwritten mathematical work showing limits and function values:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 2}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 2} = -5$
- (3) $x = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2} = 0,25$
 $f(2) = 0,25$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 2} = -5$
- (1) $\lim_{x \rightarrow 3} = 15$

Figura 66. Respuesta de la EST73 a las Tareas 1, 2, y 3.

Inv: Bueno, si en algún momento a lo largo del comentario te acuerdas de cómo ponerlo, lo ponemos. ¿Vale?

EST73: Si lo supiera lo hubiese puesto, en ese momento.

03:14

Inv: Bien, pero, si dieras una respuesta ahora, ¿qué respuesta dirías?

EST73: Eso, que cuando x es a 3, $f(x)$ se aproxima a 15.

Inv: Pero escribirlo no.

EST73: No, no sé cómo ponerlo (Figura 66).

Inv: ¿Quieres que cambiemos de tarea, pasamos a la 2?

EST73: Sí.

Inv: ¿Por qué no respondes a la pregunta a ?

EST73: No, no sé calcular el valor.

Inv: ¿De ningún punto?

EST73: Uh,...

Inv: ¿No podrías elegir un valor de la x ?

EST73: Sí.

Inv: Elige uno.

EST73: El 2.

Inv: Por ejemplo, ¿qué vale la función?

EST73: - 5, no, cuando...

Inv: Podrías elegir otro.

EST73: Eh, no sé, el 4.

Inv: ¿Cuando la x vale 4, la función vale?

EST73: 2 y, no menos dos y medio.

Inv: - 2.5. Inv: ¿Por qué no respondes a la pregunta a ?

EST73: No, no sé calcular el valor.

Inv: ¿De ningún punto?

EST73: Uh,...

Inv: ¿No podrías elegir un valor de la x ?

EST73: Sí.

Inv: Elige uno.

EST73: El 2.

Inv: Por ejemplo, ¿qué vale la función?

EST73: - 5, no, cuando.

Inv: Podrías elegir otro.

EST73: Eh, no sé, el 4.

Inv: ¿Cuando la x vale 4, la función vale?

EST73: 2 y, no -2.5.

Inv: -2.5.

EST73: Más o menos.

Inv: Elige alguno más.

EST73: El 6.

Inv: ¿Cuándo x vale 6, la función vale?

EST73: 1, aquí, más o menos.

Inv: Más o menos, 1.

EST73: Vale 1.

Inv: Pues sí que sabes calcular valores de la función. Vamos a intentar mirar la pregunta b . ¿En la pregunta b qué respondes?

EST73: Más o menos.

Inv: Elige alguno más.

EST73: El 6.

Inv: ¿Cuándo x vale 6, la función vale?

EST73: Uno, aquí, más o menos.

Inv: Más o menos, 1.

EST73: Vale 1.

Inv: Pues sí que sabes calcular valores de la función. Vamos a intentar mirar la pregunta *b*. ¿En la pregunta *b* qué respondes?

EST73: ..., creo que está mal, pero, cuando x .

Inv: Si quieres no mires la respuesta que has dado, mira la pregunta, e intenta contestarme.

EST73: Se aproxima a -5 .

Inv: Se aproxima a -5 , ¿Quién?

Inv: La función, cuando x se aproxima a, especificame un poco más, x se aproxima a 2.

EST73: Cuando x se aproxima a 2.

Inv: Me podrías especificar.

EST73: No.

Inv: Me podrías decir los valores de la x ; ¿dónde estás mirando, cuáles son?

EST73: Estoy mirando el b .

Inv: Ah, sí, sí, lo que estás diciéndome es correcto, lo quiero es que me especifiques si estamos en la pregunta b o en la pregunta c .

EST73: A vale. Cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a 2, no, espera, no, se aproxima a -5 .

Inv: A -5 , ¿y?

EST73: Y, ya está, eso es la b .

Inv: Eso es la b . Correcto, bien. Vayamos a la c .

EST73: ..., cuando x toma esos valores...

Inv: Cuando x toma esos valores, ¿a qué valores te estás refiriendo?

EST73: A 2.1, 2.01.

Inv: ¿La función se acerca?

EST73: a -4 , -3 , no.

Inv: ¿A qué valores se aproxima?

EST73: a -4 .

Inv: Y cuando nos acercamos más hacia el 2?

EST73: Al -5 .

Inv: A -5 . Con lo que terminas de decirme, ¿qué respuesta daría a la pregunta d ?

08:03

EST73: ..., cuando, cuando x se aproxima al valor, cuando x se aproxima a 2, eh, $f(x)$ se aproxima a -5 .

Inv: Se aproxima a -5 . La pregunta e la has dejado en blanco. ¿Intentaríamos poder escribir algo?

EST73: -5 .

Inv: -5 , pero escribirlo.

EST73: Es que no sé cómo escribirlo. Si me lo dices (Figura66).

Inv: Je, je. ¿Cambiamos de pregunta?

EST73: Cambiamos.

Inv: Aquí por ejemplo, si que has intentado escribir a la pregunta e .

EST73: Sí, porque me acuerdo de algo de eso, pero no me acuerdo muy bien de cómo se hacía.

Inv: Intenta justificarme alguno de los valores, bien de la pregunta b , o bien la pregunta c .

EST73: Pues, en la formula, cambie los valores, algún valore de x , y lo que me dio era el valor de $f(x)$.

Inv: Y ahí estabas contestando a que pregunta.

EST73: A la a y a la b . Claro porque cambie, puse los valores de x .

Inv: ¿Puedes indicar alguno de los que estas señalando?

EST73: 1.9.

Inv: Sí.

EST73: Lo cambie por...

Inv: Lo cambiaste en la fórmula.

EST73: Y el resultado daba que cuando x tiende a 2, $f(x)$ se acercaba a 0.25.

Inv: Se acercaba a 0.25. Tú estabas señalando una parte de la tabla, ¿podrías indicarme cual?

EST73: Ah, está.

Inv: Especifícame un poco más.

EST73: No se a que te refieres, con que especifique un poco más.

Inv: De qué forma podrías distinguir.

EST73: Esta de esta.

Inv: Sí.

EST73: Está es la de la derecha y está la de la izquierda.

Inv: Bien ya estas distinguiendo. ¿Podrías intentar responder a la pregunta e ?

EST73: Esto está bien, eh.

Inv: Debieras mirar las preguntas a , b , c , d .

EST73: ..., cuando x es 2, $f(x)$ es 0,25, ¿no?

Inv: ¿Podrías escribirlo? Estamos en la tarea 3. ¿Podrías escribirlo? Lo que terminas de decir.

EST73: Es que no sé cómo ponerlo, a ver, si x es 2, no sé, sería de 2, ¿no?

Inv: Lee la pregunta.

EST73: ¿Cuál es el límite de la función?,..., no sé, has dicho que sí.

Inv: Sí, sí, está muy bien. Y entre lo que has escrito y lo que tienes escrito en la hoja, ¿podrías intentarlo otra vez?

EST73: ..., ah, ..., no, ..., je, el límite es... (Figura 66).

Inv: ¿Podríamos volver a la tarea 2? ¿Serías capaz ahora de? Si no te molesta, pónmelo en la parte de abajo, pon 2. De otra manera, si en algún momento quieres volver. Podemos ir a la tarea 1 el apartado e , también.

EST73: ...

Inv: Cambiamos de tarea. La cuarta tarea la dejaste en blanco.

EST73: Sí, está no lo sé.

Inv: ¿Quieres mirarla?

EST73: No, la veo muy complicada.

Inv: La ves muy complicada, bien. Pasamos a la tarea 5... En la tarea 5 tienes marcado un punto

EST73: Sí.

Inv: ¿Qué vale x ?

EST73: 1.

Inv: ¿Y la $f(x)$?

EST73: 3.

13:59

Inv: 3. Después tienes marcadas dos líneas discontinuas.

EST73: Sí, je.

Inv: ¿Podrías intentar explicarme qué intentabas?

EST73: Sí, pues cuando x es más infinito, pues $f(x)$ es 2, y pues, no tiene valor en la x .

Inv: Tienes también, en la hoja intentaste escribir y después borraste. ¿Podrías indicarme esa línea, a qué límite hace referencia esta línea?

EST73: Ah, este al límite de $f(x)$ igual a +2.

Inv: A qué apartado de pregunta es?

EST73: A la b .

Inv: Yo estaba marcando la línea.

EST73: La horizontal.

Inv: ¿Una horizontal que pasa por qué punto?

EST73: Por el 2, en el eje de la y .

Inv: Pero dibujar la gráfica, ¿no?, puedes intentarlo.

EST73: Pues, ahora mismo, no sé, ..., y eso no está bien, je, ..., Hum.

Inv: No, inténtalo a ver si.

EST73: Pero, esto está bien o no.

Inv: Pero, ¿qué pone ese apartado? ¿Qué cuánto vale la x ?

EST73: 1.

Inv: 1, ¿y la y ?

EST73: ¿La y ?

Inv: ¿O la $f(x)$ que vale?

EST73: 3.

Inv: 3, entonces, ¿está bien o no?

EST73: Sí (Figura 67).

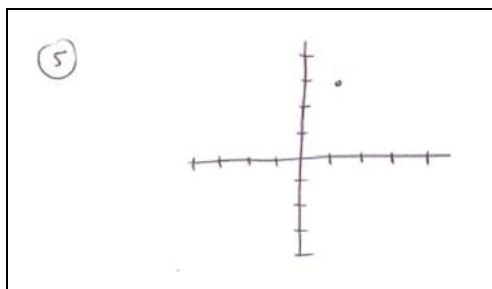


Figura 67. Respuesta de la EST73 a la Tarea 5.

Inv: De todas maneras, yo pienso que debes contestar tú, yo debo preguntar, yo pregunto.

EST73: Vale, eh.

Inv: Después cuando terminemos, si quieres, te contesto a todo lo que quieras, yo debo preguntar, no debería influir en los resultados, me entiendes.

16:40

EST73: Sí, sí, ..., no sé, no.

Inv: ¿No?

EST73: No.

Inv: Vale. Cambiamos de tarea. Explícame alguno de los resultados.

EST73: Eh, cuando x se aproxima por la izquierda. Se aproxima a 4. Por la derecha igual.

Inv: Por la derecha, igual.

EST73: Y cuando x se aproxima a 4, $f(x)$ se aproxima por la izquierda a 15.5, y por la derecha a 14.

Inv: Y de la pregunta d , ¿me podrías decir algo?

EST73: Bueno, ...

Inv: Porque tú como siempre, has contestado a la a , a la b , a la c , y la d la has dejado en blanco.

EST73: ..., porque este tiene dos resultados, y no sé qué poner (Figura 68).

Figura 68. Respuesta de la EST73 a la Tarea 6.

Inv: ¿Conoces alguna forma de distinguir los dos resultados?

EST73: Uh, uh, no, ...

Inv: Lo dejamos.

EST73: Sí.

Inv: Has contestado a la pregunta b , y a la c ; y has dejado en blanco la a . ¿Podrías indicarme algún valor? Elige algún valor de la x y dime la función que vale.

EST73: Cuando x vale 4. La función vale 10.

Inv: ¿Cuánto?

EST73: 10

Inv: ¿Y cuando la x vale 2?

EST73: Cuando la x vale 2, 15.

Inv: ¿Y cuando la x , por ejemplo vale 0?

EST73: 15.

Inv: ¿Por qué dejas la pregunta en blanco?

EST73: No lo sé.

Inv: ¿Y cuando la x vale -1 ?

EST73: Pues 14, uh.

Inv: ¿Podrías señalarlo?

EST73: Cuando la x vale 1, -1 .

Inv: Pero no rayes, indícalo verbalmente.

EST73: Ahí más o menos.

Inv: Más o menos ahí, ..., y por ejemplo, ese punto de ahí, ¿Cuál sería?

EST73: Sí x vale -6 , la y vale... -6 , igual, -6 , ¿no?

Inv: ¿No sé?

EST73: ..., A no, 0.

20:44

Inv: ¿Podrías decirme por qué respondes la pregunta b ?

EST73: Hum.

Inv: ¿Como lo haces, dónde has observado para responder que $f(x)$ es 15?

EST73: En este.

Inv: Intenta indicarme en qué parte estás mirando.

EST73: Pues, como pone que, que x se aproxima a 4.

Inv: ¿Por dónde?

EST73: Por la izquierda.

Inv: ¿La función vale...?

EST73: Se aproxima a 15, no, es 15.

Inv: Es 15, ¿y en la pregunta c ?

EST73: Cuando x se aproxima a 4 por la derecha...

Inv: $f(x)$ vale cuanto.

EST73: 4,...

Inv: ¿Sí o no?

EST73: Sí.

Inv: ¿Dónde miras para decirme 4?

EST73: Ahí, espera, ..., a no, 10.

Inv: ¿Podrías repetirme la pregunta c ?

EST73: Cuando x se aproxima a 4 por la derecha, la $f(x)$ vale 10.

Inv: Vale 10. ¿Has dejado la pregunta d en blanco? ¿Podrías describirme el comportamiento de la función?

EST73: Eh, no,...

Inv: ¿No?

EST73: ..., No, cuando x tiende vale -2 ...

Inv: Los dos apartados juntos.

EST73: Cuando x tiende a 4 por la izquierda, $f(x)$ vale 15.

Inv: Vale a 15.

EST73: Y cuando x tiende a 4 por la derecha, $f(x)$ vale 4.

Inv: ¿Vale cuanto?

EST73: 10.

Inv: 10. Vale. Cambiamos de tarea.

EST73: ¿Cómo calculaste el 0.8, el 0.98...?

EST73: En la..., en la..., los valores esos.

Inv: Los sustituiste, ¿dónde?

EST73: En la fórmula.

Inv: ¿En cuál de ellas?

EST73: En $2x+1$.

Inv: Y los otros valores, ¿dónde los sustituiste?

EST73: En el mismo que...

Inv: ¿Podrías indicar...?

EST73: En $-2x-3$.

Inv: Una pregunta. Tú has respondido en el cuestionario a la pregunta, a la tarea 6 al apartado c. Sí, puedes leer lo que pone. ¡Lee, léelo, por favor!

EST73: Cuando x se aproxima a 4, $f(x)$ se aproxima a 15.5 y a 14.

Inv: Y a 14. También respondes a la pregunta d de la tarea 8.

EST73: Cuando x se aproxima a 0, $f(x)$ tiende a 1 y a -3 .

Inv: Sí, pero eso mismo cuando te lo pregunto en la tarea 7, me dices que no ¿Te resultan más familiares?

EST73: A lo mejor es que, en un momento no me fijé, oh al ser la función así me lie un poco.

Inv: ¿Al ser una gráfica?

EST73: Sí.

Inv: Vale. Pero en la tarea 8 si que intentas responder a la pregunta e.

EST73: Hum...

Inv: Hay algo en el enunciado que te ayuda a responder, y otros que no te ayudan a responder.

EST73: Hum,..., hum

Inv: Pero no sabes responderme porque.

EST73: No.

Inv: ¿Quieres que pasemos a la tarea 9? Te la dejaste en blanco. ¿Quieres mirarla? ¿Te parece difícil?

EST73: ..., Hum, sí.

Inv: La simple visión incita a pasar de hoja.

EST73: Sí.

Inv: Sí, ¿quieres que pasemos de hoja?

EST73: Sí.

Inv: Estamos en la tarea 10. Marcaste dos puntos. Uno de ellos...

EST73: $f(0)=4$.

27:15

Inv: La x es 4. Y el otro punto que tienes marcado.

EST73: ...

Inv: Y no sé si tienes marcado un tercer punto, ¿no?

EST73: No, no estaba.

Inv: No estabas muy segura.

EST73: Pero igualmente lo hubiese dejado, yo no sabía hacer eso.

Inv: Cuando dices hacer eso, ¿a qué te estás refiriendo?

EST73: A la parábola.

Inv: ¿Quieres intentar hacer al gráfica? ¿Estás cansada?

EST73: Si estoy cansada, pero de todas formas no sé hacerlo.

Inv: ¿Lo dejamos?

EST73: Sí.

Inv: Muchas gracias.

EST73: Eh.

Inv: Muchas gracias.

28:35

Entrevista al EST74

Inv: ¡Hola buenos días!

EST74: ¿Buenos días!

Inv: Vamos a empezar con la tarea 1. ¿Tienes algún problema con el enunciado?

EST74: No, ninguno, está más o menos claro.

Inv: ¿Podrías intentar justificarme alguna de las preguntas?

EST74: ¿La primera?

Inv: Sí.

EST74: se aproxima al tres, pues cada vez, a ver, primero se aproxima al 2.99 cada vez más al tres; aquí se ve que se va más al tres, no sé como justificártelo, se ve claramente, ¿no?

Inv: Cuando dices se ve claramente, ¿a qué fila estás mirando?

EST74: Aa la primera.

Inv: A la primera, y miras, ¿podrías indicar ese movimiento, que estás haciendo con el dedo?

EST74: De la izquierda a la derecha, y de la derecha hacia la izquierda, ¿no? Desde aquí.

Inv: Esto es lo que tú llamas claramente?

EST74: Sí.

Inv: ¿Y respecto a $f(x)$?

EST74: Pues lo mismo, se aproxima a 15, por el mismo motivo. Empieza en 14.21, y aquí en medio a 14.999, a 15.

Inv: A 15.

Inv: ¿Respondes a la pregunta c?

EST74: Sí. Describe el comportamiento de la función $f(x)$, en relación al comportamiento de la variable x . Cuanto más se acerca x al 3 más se acercará $f(x)$ a 15.

Inv: Y después no contestas a la pregunta d.

01:50

EST74: ¡Hum!, pues porque no me acordaba, o no sabía cómo se hacía.

Inv: ¿Podrías mirar las preguntas a, b, c e intentar dar una respuesta a la pregunta d?

EST74: Pues sí; no, porque..., si no me acordé en ese momento..., ahora...

Inv: Vale, ¿quieres que cambiemos de tarea?

EST74: Vale.

Inv: Haces algo parecido, respondes a las primeras preguntas, y no a la última.

EST74: Sí, me ha pasado lo mismo en todas.

Inv: ¿En todas?

EST74: Sí.

Inv: ¿Podrías justificarme alguna de ellas, la b por ejemplo?

EST74: ¿La b?

Inv: Sí.

EST74: Cuando x toma sucesivamente los valores, a qué número se aproxima $f(x)$, esto es x , a, no me acuerdo mucho, pero 1.9 estaría aquí.

Inv: ¿Dónde estás señalando?

EST74: En el eje de las x .

Inv: En el eje de las x .

EST74: Y baja aquí, pues, ..., no me acuerdo.

Inv: ¿Y la pregunta c?

EST74: Cuando x tome sucesivamente los valores 2.1, 2.01, a qué número se aproxima la función $f(x)$, yo he puesto a -4.9 , ..., porque viendo en el eje de las x que es 1.9, o sea que estaría..., a es 2.1; si bajo hacia abajo, estaría en -4.9 , estaría por aquí.

Inv: ¿Y si nos seguimos acercando hacia el 2?, ponle más ceros.

EST74: 2.0001, pues cada vez sería -4.999 .

Inv: Sigue aproximándote.

EST74: Entonces, al llegar al 2 sería -5 .

Inv: ¿Eso mismo me lo podrías hacer en la pregunta *e*?

EST74: ¿En la *e*?

Inv: Sí.

EST74: Di, si es posible, cuál es el límite en $x=2$. ¿Con el límite?

04:40

Inv: Sí, con el límite.

EST74: Eh, es que no sé cómo se haría, pero supongo que será igual.

Inv: Sí, sí, sí será igual, pero no sé qué quieres decir con supongo que será igual.

EST74: No me acordaba, y ahora tampoco, como se hacían los límites. A ver, si el límite se acerca..., en $x=2$, no me acuerdo.

Inv: Vale. ¿Cambiamos de tarea?

EST74: Sí.

Inv: Estamos en la tarea 3. ¿Cómo respondiste a la pregunta *a*

EST74: Dice complete la tabla, pues aquí creo que sustituí, ¿no?, el 1.9 en la función $f(x)$, creo que lo fui sustituyendo.

Inv: ¿Y los demás valores de la x ?

EST74: ..., Pues los sustituí aquí, primero 1.9, y lo sustituí aquí, y luego aquí lo mismo.

Inv: Vale.

Inv: Contéstame alguna de las preguntas, el apartado *c* mejor.

EST74: Dime a qué se aproxima $f(x)$. A 0.25, porque comienza en la izquierda con 0.256, y cada vez se va juntando más a 0.25, se va aproximando más a 0.25 para ser más exacto.

Inv: ¿A qué lado has señalado?

EST74: Por el medio.

Inv: Estas señalando el medio, ¿cómo te has ido acercado? ¿Qué movimiento has hecho con el dedo?

EST74: De izquierda a derecha.

Inv: ¿Y?

EST74: De derecha a izquierda.

Inv: ¿También se cumple lo mismo?

EST74: Sí.

Inv: Y respecto a la pregunta *e*, ¿no vas a contestarme?

EST74: ¿Es lo mismo en todas?

Inv: Sí, es lo mismo en todas.

EST74: No.

Inv: ¿No? Cambiamos de tarea. Estamos en la tarea cuatro. ¿Qué te pareció el enunciado?, ¿te sorprendió el enunciado?

EST74: Sí, este me costó más, aunque es lo mismo que en todos, pero... Si en este no...

Inv: ¿Podrías intentarlo?

EST74: ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5, para que la diferencia $|f(x) - f(x)|$, en valor absoluto, sea menor que 0,001? Pues la pregunta es que no la entendí, y..., es que sigo sin entenderla

Inv: ¿Cambiamos de Tarea?

EST74: Por favor, sí.

Inv: En la tarea 5 te pedimos una gráfica.

EST74: Uh, uh.

Inv: Que cumpla tres condiciones.

EST74: Que f ...

Inv: La primera es un punto.

EST74: Sí, lo tengo mal todo, todo lo que está marcado.

Inv: Sí, sí, sí, que vale x .

EST74: 3, a ver, 1.

Inv: ¿Y la y ?

EST74: 3.

Inv: Ese punto está bien marcado; y respecto a los límites, ¿podríamos intentar hacer algún límite?

08:20

EST74: Sí, pero, yo lo tengo aquí marcado, pero está mal. A ver, si límite de $f(x)$, x va hacia más infinito, va hacia acá.

Inv: De acuerdo.

EST74: $f(x)$ es $+2$.

Inv: $f(x)$ es $+2$.

EST74: 2 aquí, ..., entonces debería ir hacia acá, es qué.

Inv: ¿Podrías intentarlo en la hoja?

EST74: ... Este, ¿no?

Inv: Sí, empecemos por ese.

EST74: Es el 2, ...

Inv: ¿Ese es el 2 de quien?

EST74: De $f(x)$.

Inv: ¿Dónde has puesto el 2?

EST74: En el eje de las x .

Inv: Ese 2 corresponde, ¿a qué letra?

EST74: A la x .

Inv: A la x .

EST74: Pero, si tiende a más infinito.

Inv: La x tiende hacia, a más infinito.

EST74: ¿La x ?, o sea esta.

Inv: Esa, sí, y la función tiende...

EST74: A 2.

Inv: A 2.

EST74: ¿Entonces?, dice aquí, no me acuerdo mucho, más infinito.

Inv: ¿Quieres que cambiemos de límite?

EST74: Sí.

Inv: En el segundo, en el dibujo de lo que me entregaste tienes una flecha, ¿esa flecha qué significa?

EST74: Esta flecha, que tiende hacia menos infinito (Figura 69).

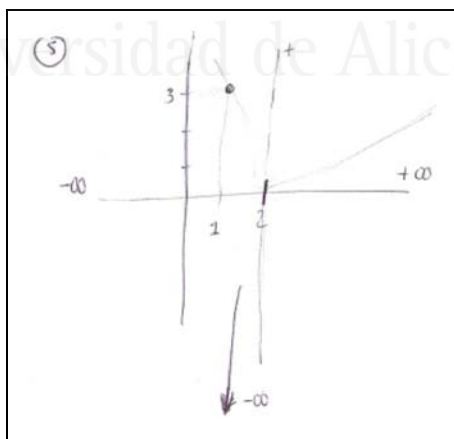


Figura 69. Respuesta de la EST74 a la Tarea 5.

Inv: Sí, podrías intentarlo.

EST74: ..., x esto, tiende hacia aquí.

Inv: Podrías poner una gráfica.

EST74: En la gráfica.

Inv: Sí, continúa.

EST74: ¡Hum!

Inv: También tiene que cumplir la primera condición.
 EST74: ¿Cuál es la primera condición?
 Inv: La a . Esa es la primera condición, ¿cuánto vale el punto x ?
 EST74: Que f ... esa es la primera condición.
 Inv: ¿Cuánto vale x ?
 EST74: 1.
 Inv: Y cuanto vale y .
 EST74: 3, y el límite tiene que pasar por...
 Inv: Es una de las posibilidades, ¿podrías intentarlo?
 EST74: Cómo va a pasar, si tiene que pasar por aquí, por el 2, también por aquí.
 Inv: ¿Es complicado?
 EST74: No tiene que ser complicado, no sé,..., esto que hice aquí, no, ¿pero esto está bien? Pero esto es ese, no sé,...
 Inv: No lo sabes, ¿lo dejamos?
 EST74: Sí, por favor.
 Inv: Cambiamos de tarea, ¿pasamos a la sexta? ... En la sexta tarea solo respondes a la pregunta a .
 EST74: ¡Hum!, sí, porque aquí $f(x)$ dice que tiende... $f(x)$ parece que tiende, de la izquierda a la derecha parece que a 15, y luego...
 Inv: ¿A 15?
 EST74: No, a 15.5, sí a 15.5. Pero luego, aquí, de derecha a izquierda es 14, entonces...
 Inv: ¿Cómo podríamos contestar a la pregunta b ?
 EST74: ..., Pues,...
 Inv: O, ¿cómo podríamos contestar a la pregunta c ?
 EST74: Describe el comportamiento de la función $f(x)$ en relación al comportamiento de la variable x ; x tiende a 4.
 Inv: x tiende a 4.
 EST74: Eso lo sé. Pero $f(x)$, cuando llega a ese punto,..., es que cuando llega a este punto disminuye,..., no sé,...
 Inv: ¿Qué me podrías decir de $f(x)$?
 EST74: Parece que va, empieza con 15.5, 53, va bajando, ¿no?
 Inv: ¿Y a qué número se aproximaría?
 EST74: A 15.5.
 Inv: A 15.5. Ese movimiento que estás haciendo con el bolígrafo ¿va?
 EST74: De izquierda a derecha.
 Inv: Y estamos mirando donde.
 EST74: En la tabla. Y luego de derecha a izquierda. Se aproxima a 14.
 Inv: Se aproxima a 14.
 EST74: Entonces, y luego está 14, ¿Cómo?... va disminuyendo pero..., que este lo tengo claro, porque se ve, pero este (Figura 70).
 Inv: Cuando dices este que lo tengo claro, ¿a qué te refieres?
 EST74: Me refiero a la x , que es 4.
 Inv: ¿Y el que no tienes claro es?
 EST74: $f(x)$.
 Inv: Es $f(x)$. ¿Quieres que cambiemos de tarea?
 EST74: Sí.
 Inv: En la tarea 7,..., has contestado a la pregunta b .
 EST74: Sí. Dice, cuando x tome, sucesivamente los valores 3.9, 3.99, aquí.
 Inv: ¿Dónde estas señalando?
 EST74: Antes del 4.
 Inv: Antes del 4.
 EST74: En el eje de las x , anterior al 4.
 Inv: Anterior al 4.
 EST74: Aquí. ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

17:26

Inv: Y tú respondes que a...

EST74: A 15.

Inv: ¿Y cuando pasamos a la pregunta c?

EST74: Cuando x toma sucesivamente los valores 4.1, que esta después del 4.

Inv: ¿Después del 4?

EST74: ¿A qué número se aproxima la $f(x)$? Yo he puesto a 10, ¿no?

Inv: Sí.

EST74: Sube.

Inv: Si. Y después describes el comportamiento y dices.

EST74: Digo, cuando x es menor que 4, $f(x)$ se aproxima a 15 y cuando x es mayor que 4, $f(x)$ aproxima a 10.

Inv: Y con esa información, una respuesta sobre el límite no las das, y ahora, ¿la podrías dar?

EST74: El caso es que no me acuerdo cómo se hacían los límites, cómo se ponían, pero...

Inv: Cuando intentas responder al a pregunta e, pones límite, x tiende a 4, y escribes una raya. Esa raya, ¿qué significa?

EST74: Me acuerdo que se hacía como una fracción aquí, pero luego.

Inv: La raya que has puesto, ¿es un intento de hacer una fracción?

EST74: Sí, un intento, ..., aquí pondría, sí.

Inv: Se puede responder de muchas formas, una sería esa, ¿me podrías decir que me estas señalando?

EST74: El b y el c .Inv: El b o el c . Se puede responder de esa manera. Ahí no, por favor, en la hoja adjunta. ¿Qué dirías?EST74: Tarea 7. Si limite de $f(x)$ cuando x tiende a 4, $f(x)$..., si x tiende a 4, tiende a 10, ¿es a 10?, sí tiende a 4, es por aquí, es que no se si tiende a 15 o a 10, ..., porque si tiende a 4 puede tender por aquí o puede tender por aquí.

Inv: ¿Ese por aquí, qué estas indicando?

EST74: Puede ser de 3.9 tender a 4, o de 4.1 tender a 4. Si tiende de 4.1 sería 10, pero si es de 3.9 es 15. No, ...

Inv: Lo dejamos un momento. Después de lo que terminamos de hacer, podríamos volver a la tarea 1. ¿Serías capaz de responderme a la tarea 1, a la pregunta d?

Inv: Ponlo ahí (ahí es en la hoja aparte, figura 70).

6	$f(x)$	15'5	14
7	$\lim_{x \rightarrow 4}$	$f(x) = 15$	
1	$\lim_{x \rightarrow 3}$	$f(x) = 15$	
2	$\lim_{x \rightarrow 2}$	$f(x) = -5$	
3	$\lim_{x \rightarrow 2}$	$f(x) = 0'25$	

Figura 70. Respuesta de la EST74 a las Tareas 6, 7, 1, 2, y 3.

Inv: ¿Podrías responderme a la tarea 1?

EST74: Tarea 1.

Inv: ¿Podrías leerme lo que terminas de poner?

EST74: Si x tiende a 3, $f(x)$ tiende a 15 (Figura 70).

Inv: Podríamos pasar a la tarea 2, intenta responderme a la pregunta d .

EST74: Pongo 2.

Inv: Sí.

EST74: Yo puse aquí a -5 (Figura 70).

Inv: ¿Podrías responderme a la tarea 3?... ¿Podrías volver a leerme qué estás poniendo en la tarea 3?

EST74: Límite cuando x tiende a 2, de $f(x)$ es 0.25 (Figura 70).

22:15

Inv: ¿Podrías decirme algo aunque sea verbalmente del problema 6, otra vez?

EST74: Ese es el que no sabía hacer, a ver, si límite de x tiende a 4, $f(x)$,..., será 15.5 o 14, ¿es que no lo sé?

Inv: ¿Podrías indicarme el 15.5 por dónde?

EST74: Por aquí.

Inv: Por aquí, ¿Dónde es?

EST74: De izquierda a derecha.

Inv: De izquierda a derecha.

EST74: O 14, de derecha a izquierda.

Inv: Bien. Pasamos a la tarea 8.

EST74: Dónde estamos, ¡hum!

Inv: Esta es la que nos ha dado pie, estamos es la tarea 7; y es la que nos ha dado pie a volver atrás, pero si quieres volver a responder a la tarea 7, respondemos.

EST74: Puede ser 15 o puede ser 10, no sé.

Inv: Especificame.

EST74: Porque dice que x tiende a 4. Porque aquí hemos dicho: si tiende por 3.9 a 4, $f(x)$ sería 15, pero si es al contrario que tiende por 4.1 a 4, sería 10.

Inv: Yo pienso que está bien. Sí, vale. Intentamos hacer la tarea 8. Como en todo el cuestionario, respondes a la pregunta a que es completar la tabla, respondes a la b , respondes a la c , respondes a la d ; pero no eres capaz de dar, pero sigues poniendo la raya, ¿debo entender qué es un quebrado?

EST74: ¿Lo intento?

Inv: Sí, pero dime primero cómo llenas la tabla.

EST74: Pues igual sustituyendo aquí, sustituyo en la ecuación que me dan.

Inv: ¿Pero yo te doy dos ecuaciones?

EST74: Es verdad, no sé donde sustituyo, pero será igual, lo sustituí aquí, no, desde aquí sustituí en la primera.

Inv: Cuando dices desde aquí a dónde te refieres, especificame.

EST74: En los primeros cuatro cuadraditos.

Inv: ¿Podrías decirme que valores hay?

EST74: 0.8, 0.98.

Inv: No, no, me refiero en la x , que valores hay en la x .

EST74: -0.1 , -0.01 .

Inv: Y esos los sustituyes en.

EST74: En la primera ecuación, en la de arriba.

Inv: En la primera.

EST74: Y estos de aquí, en la derecha 0.1, 0.001, los sustituyo en la de abajo.

Inv: En la de abajo.

EST74: Sí.

Inv: No tienes problemas en responder a la pregunta a , a la pregunta b , perdón.

EST74: Se aproxima a 1 y a -3 , ya que es lo mismo que me has preguntado antes.

Inv: Que es lo mismo que te he preguntado antes.

EST74: Y este lo hago.

Inv: Bien, sí, dime algo respecto a la pregunta *e*.
 EST74: ..., Será igual, es lo mismo que esta.
 Inv: Cuando dices que es lo mismo que esta.
 EST74: Que la tara 6, que daba 15.5 y 14, y entonces aquí en está da 1, y -3.
 Inv: Sí me puedes matizar algo más.
 EST74: Yo sé que el límite de x tiende a 0, eso sí.
 Inv: Sí.
 EST74: Y $f(x)$ puede tender a 1 y a -3, puede ser lo mismo que en la tabla, no, que aquí.
 Inv: Seguramente será lo mismo.
 EST74: Sí, que por un lado puede ser 15 y por el otro 10.
 Inv: Eso de por un lado y por otro lado, ¿lo puedes especificar de alguna forma?
 EST74: Sí es de 3.9 a 4, tendía a 15, y si de 4.1 a 4 era 10. Pues esto será lo mismo.
 Inv: Lo mismo te refieres a..., cuando dices lo mismo, aplícalo aquí.
 27:35
 EST74: Pues que si es -0.001 tenderá a 1, y si es 0.001 tenderá a -3, eso creo, no sé.
 Inv: Vale.
 EST74: Uh, uh.
 Inv: Pasamos a la 8.
 EST74: A la 9, que no he puesto nada.
 Inv: No has puesto nada. ¿Quieres mirarla, quieres pasarla, te parece raro?
 EST74: La tabla ya me impresionó, tanto número. ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 2.5, para que la diferencia $3.5-f(x)$ en valor absoluto, sea menor que 0.001?
 Inv: Sí, que una milésima.
 EST74: Es que esto no, ¡hum!, y para qué me da estos; no lo sé.
 Inv: ¿Quieres que pasemos a la última? En la tarea 10, has marcado un punto.
 EST74: Sí.
 Inv: ¿Que corresponde a la x ?
 EST74: Cuando x vale 0, $f(x)$, la y 4.
 Inv: La y 4, pero los límites no has puesto ninguno.
 EST74: No he sabido.
 Inv: Tienes otro punto marcado, ¿dónde?
 EST74: Aquí he puesto que la x es 3 la y sería 1, sería el b , ¿no?
 Inv: Y tienes otro punto marcado.
 EST74: Sí, cuando aquí la x es 3 la y vale 1. La x vale -3.
 Inv: -3, yo creo que sí.
 EST74: Sí, y la y vale 0, eso, eso. Sí.
 Inv: Pero no has dibujado ninguna gráfica.
 EST74: No.
 Inv: ¿Podrías dibujar una? Intentarlo.
 EST74: ¿Una gráfica?
 Inv: Sí, en la misma hoja en la que estás trabajando ahora, intenta poner una gráfica.
 EST74: ..., Del b ,..., x es -3. Voy a hacer el c , x es -3, es que yo creo que aquí intenté imitar lo que había aquí, pero...
 Inv: Cuando dices imitar lo que había aquí, ¿a qué te refieres?
 EST74: A la tarea 7.
 Inv: Imitar la tarea 7.
 EST74: Sí, ..., no sé.
 Inv: Y lo estas intentando otra vez, intentar imitar la tarea 7.
 EST74: Sí, ¡hum!, sí, y no sé de otra manera, esto de dibujar, no me acuerdo (Figura 71).

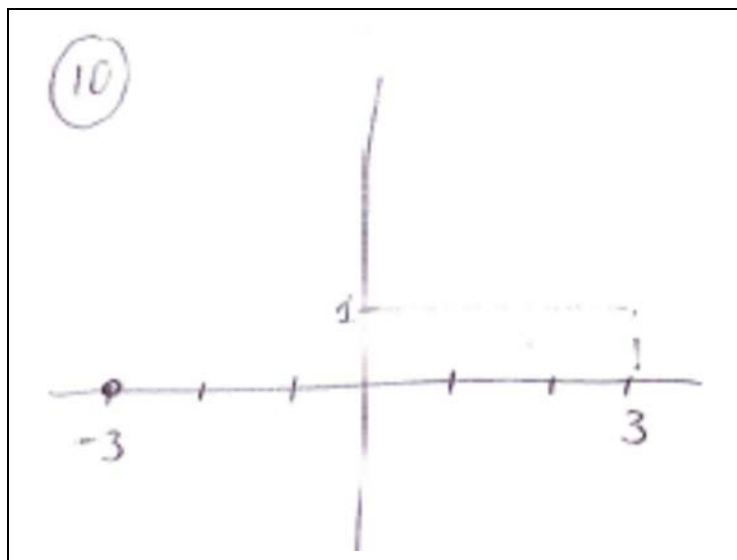


Figura 71. Respuesta de la EST74 a las Tareas 10

Inv: Lo dejamos.

EST74: Sí.

Inv: Muchas gracias.

EST74: De nada, a ti.

31:55



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Entrevista al EST90

Inv: ¡Hola buenos días!

EST90: ¡Buenos días, je, je!

Inv: Vamos a empezar por la tarea 1.

EST90: Vale.

Inv: Me podrías justificar por qué a la primera pregunta, ¿a qué número se aproxima la x ?, respondes que a 3.

EST90: Eh, porque los números que se aproximan a..., a 3 te están diciendo que, o sea que el límite de x es 3, se acerca a 3.

Inv: ¿En qué fila estás mirando?

EST90: En la de arriba. Pues los números se acercan a 3.

Inv: Has señalado, con el dedo has tocado a dos números.

EST90: Sí el 2.9999. Y el 3.0001, pues el número que está en medio es el 3.

Inv: El número que está en medio, ¿el número al que tienden?

EST90: Claro, je.

Inv: ¿Y a la pregunta b ?

EST90: Pues, lo mismo pero abajo, porque los números se aproximan a 15.

Inv: Ese movimiento del dedo, ¿podrías explicarme de alguna otra forma un poco más concisa?

EST90: Porque 14.999. Y 15.0008 se aproximan también a 15, igual que en la x , y toda la tabla se está acercando a ese número, tanto por la izquierda como por la derecha.

Inv: Gracias.

EST90: Je, Je.

Inv: Sí, bien, tanto por la izquierda como por la derecha, sí, sí, es ese movimiento del dedo. Y, respecto a la pregunta c , que no la contestas, describe el comportamiento de la función.

EST90: Hum, bueno, esto, no, si x crece, la función también, porque si x supera a 3, pues la función también va creciendo, se va alejando más de, de 0, no...

Inv: ¿Podrías intentar describirmela, mirando las respuestas a las preguntas a y b ?

EST90: Hum, hum, o sea que, que el límite de la función en 3, es 15.

Inv: El límite de la función en 3, es 15.

02:07

EST90: Cuando x es 3.

Inv: Vale. Cambiamos de pregunta.

EST90: Vale.

Inv: Pasemos a la tarea 2. Respondes a los apartados a , b , c , y e , y en el d te pediré otra vez que me describas. ¿Podrías explicarme como eliges un valor de la gráfica? Respondiendo a la pregunta a .

EST90: ¿Eh?, cómo, a ver...

Inv: Sí que me elijas un punto de la gráfica. ¿Por qué dices que cuando x es 2, la función es -5 ?

EST90: Porque aquí en la gráfica que está, se ve claramente que cuando x es 2, pues la...

Inv: ¿Podrías elegir otro punto de la gráfica?

EST90: Hum, pues, sí. Pero que se vea así tan claro no.

Inv: Pero indícame alguno.

EST90: Pues el 0.

Inv: Por ejemplo. Cuando x es 0, la y es...

EST90: -2.5 , más o menos.

Inv: Bien, sí.

EST90: Pero ese es el que veo más claro, el 2.

Inv: Y por ejemplo, para que la y sea 0.

EST90: La y para que sea 0, este, ¿no?.

Inv: Bien, sí.

EST90: O este.

- Inv: Sí bien, uno de los dos, o los dos, aunque sea aproximado.
- EST90: Casi 6, y casi -2 .
- Inv: Casi 6, y casi -2 , bien. ¿Y cuando respondes a la pregunta *b*?
- EST90: Hum.
- Inv: ¿Podrías indicarme dónde miras?
- EST90: Pues lo mismo. Cuando x se va acercando a 2, o sea, me está diciendo que toma los valores 1.9, 1.99, y tal. Esos valores se acercan a 2, entonces la función también se debe acercar a -5 . Porque es un valor al que se aproxima.
- Inv: Y respondiendo a la pregunta *c*.
- EST90: Pues igualmente los valores van de derecha a izquierda, porque 2.1 es más grande que 2.0001 que es el último valor que te da, y también te está diciendo que se acerca a 2.
- Inv: Ese movimiento de la mano.
- EST90: Por la derecha.
- Inv: Por la derecha, bien. Y el apartado *b*, ¿era por...?
- EST90: Por la izquierda.
- Inv: Por la izquierda.
- EST90: Sí.
- Inv: ¿Podrías describirme el comportamiento de la función mirando las preguntas, mirando las respuestas que has dado en las preguntas *b* y *c*?
- EST90: Eh, pues, la función se acerca a 2.
- Inv: ¿La...?
- EST90: La función, ..., cuando x está en 2, se acerca, la función es -5 .
- Inv: Bien, eso sí.
- EST90: Eso sí y que aumenta cuando..., eh, esto.
- Inv: Y respecto a la pregunta *e*, ¿podrías escribirme con un lenguaje un poco más formal o más matemático?
- EST90: Eh, pues, cuando el valor de x es 2.
- Inv: ¿Podrías intentar escribirlo, un poco más formal?
- EST90: ¿Formal...?
- Inv: Pon 2, que estamos en la tarea 2. T 2. Un poco más formal.
- EST90: Pero que pongo, es que no sé. Cuando, que cuando x es 2, el límite es -5 . Lo que no se es cómo explicarlo.
- Inv: Si en algún momento quieres volver a explicarlo un poco más formal, volvemos atrás y lo intentamos, ¿vale?
- EST90: Vale.
- Inv: ¿Pasamos a la tarea 3?
- EST90: Vale.
- Inv: Intenta argumentarme alguno de los valores con los que has completado la tabla, para responder a la pregunta *a*.
- EST90: Oh, pues, es que lo hice con la calculadora, pero...
- 06:00
- Inv: Sí, sí, con la calculadora.
- EST90: Pues esto es que, la x también se aproxima a 2, por aquí.
- Inv: Por aquí, ¿qué quieres decir?
- EST90: Que por la izquierda se aproxima a 2, y también por la derecha.
- Inv: También por la derecha.
- EST90: Y abajo están los valores que se acercan a 0.25.
- Inv: ¿Se acercan a?
- EST90: A 0.25, y.
- Inv: Tú en la pregunta contestaste que se acerca a 0.
- EST90: Ah, bueno, pero porque en 2 es 0. Hum, 0.25, bueno...
- Inv: ¿Pero a qué se aproximan?
- EST90: A 0.25.
- Inv: ¿En este momento qué respuesta darías a la pregunta *c*?

EST90: 0.25. Um, no me fijé mucho.

Inv: Y al describirme el comportamiento de la función, ¿qué me dirías ahora?

EST90: Que se acerca a 0.25.

Inv: ¿Cuándo?

EST90: Cuando x tiende a 2.

Inv: Cuando x tiende a 2. De todas maneras la pregunta que te había hecho al principio era cómo habías calculado algún valor con la calculadora, pero donde sustituías ese valor.

EST90: Pues el valor que te dan cuando x tiende a eso se sustituye en la función.

Inv: Se sustituye en la función.

EST90: Porque aunque no sea el valor 2, se acerca.

Inv: Vale.

EST90: Sí.

Inv: ¿Cambiamos de tarea?

EST90: Vale.

Inv: Estamos en la tarea 4, ..., tú respondes a las dos preguntas. ¿Podrías indicarme dónde miras para decir que para que la diferencia sea menor que 0.001, el número debe ser 0.5001 o menor, hasta 0.4999?

EST90: En valor absoluto, pues...

Inv: ¿En qué fila, en qué columna?

EST90: Pues a ver, te está preguntando por los valores de la x , entonces, eh, entonces, tendrías que restar esto al valor de...

Inv: Cuando dices esto te refieres a...

EST90: 1.5 menos.

Inv: 1.5 menos.

EST90: El límite de x , y tendrías que mirar cuando, cuando los...

Inv: ¿Podrías indicar, aunque sea con los dedos, dónde miraste para dar esa respuesta?

EST90: En la fila del límite de x .

Inv: Sí, ahí estas señalando la parte de la...

EST90: De la función.

Inv: Sí, ¿pero, qué parte? ¿En qué parte de la tabla tienes ese dedo?

EST90: Abajo donde $0.5-x$, en la izquierda.

Inv: En la izquierda, bien. Y, ¿qué columna miraste?

EST90: Eh, la de..., pues, cuando este valor se acerca más a...

Inv: Cuando dices ese valor, estas indicando un valor ¿de qué fila?

EST90: De, de $1.5-f(x)$, y bueno...

Inv: Y de los que hay ahí, ¿Cuáles elegiste?

EST90: Eh, ..., tiene que ser 0.5 menor, tendría que estar entre este y este; sí, ¿no?, ah, ahora no me acuerdo, ..., claro habría que mirar este valor y saber cuándo es menor que esto.

Inv: ¿Podrías volver a mirarlo?

09:56

EST90: Hum.

Inv: Cuándo dices este valor, ¿estás señalando la cuarta fila?

EST90: No. Sí, sí. Je, je, pues tendría que ser menor, pues aquí es mayor.

Inv: Cuando dices ahí es la primera columna.

EST90: En la primera columna es mayor que 0.01.

Inv: ¿Y en la segunda?

EST90: Hum, en la segunda, hum, esa también es mayor, la última.

Inv: También es mayor, en la última.

EST90: Por eso tiene que estar entre esos valores, entre este y este.

Inv: Cuando dices entre este y este, ¿te refieres a cero coma?

EST90: 0.4999 y 0.5001.

Inv: Bien. Y después a la pregunta b respondes que el límite es 1.5. ¿Dónde miras, para dar esa respuesta?

EST90: En la fila del límite de x , porque ahí te estás viendo que, también miras la x , que cuando se va acercando a 0.5 , y el límite se acerca a 1.5 .

Inv: ¿Qué filas estas mirando ahí?

EST90: La de x , y la del límite.

Inv: ¿Y la de $f(x)$?

EST90: La de la función.

Inv: ¿Cambiamos de tarea?

EST90: Ah, esta.

Inv: Estamos en la tarea 5 y piden una gráfica que cumpla tres condiciones. Tú has dibujado dos líneas. ¿Me podrías explicar alguna de las líneas a qué condición hace referencia? O si quieres vamos condición a condición.

EST90: Sí. Mejor. Por ejemplo, la a dice que tiene que..., que tiene que ser 3 para $f(1)$.

Inv: Sí. ¿Y eso en la gráfica es...?

EST90: Eh, sí, no..., no.

Inv: En la gráfica, ¿en qué sitio intentas decir que $f(1)$ es 3?

EST90: Cuando x es 1, la y es 3.

Inv: Si. ¿Y se refiere a un...?

EST90: Hum..., quiere decir cuando la x es 1.

Inv: Sí, la función es 3. ¿Pero eso que es?

EST90: Esto es cuando y es 1, no. Al revés.

Inv: No, no, está bien. No te marees.

EST90: ¿Esta bien dibujado?, ah.

Inv: Lo que intento decirte, es que me digas que es. ¿Una rama, un...?

EST90: Una curva, je, je, un punto.

Inv: Ah, un punto.

EST90: Ah, vale.

Inv: Está bien, no te pongas nerviosa.

EST90: Vale.

Inv: La condición a está bien puesta. Después intentas poner, la rama esa, ¿qué condición sería?

EST90: Eh, hum, la, la c . Porque cuando la x tiende a 2.

Inv: Sí.

EST90: Esto es 2, el límite es menos infinito.

Inv: Es menos infinito.

EST90: Se va acercando a menos infinito. No sé, hum. Y luego la b tiene que ser 2 cuando la x tiende a más infinito.

Inv: ¿Podrías intentar hacer la gráfica un poco más completa?

EST90: ¿Un poco más completa?

Inv: Sí.

EST90: Pero como, ¿dibujándola otra vez?

Inv: Sí, sí, dibújala otra vez, sí.

EST90: ...

Inv: Estas poniendo un punto que es la condición.

EST90: Sí (Figura 72)

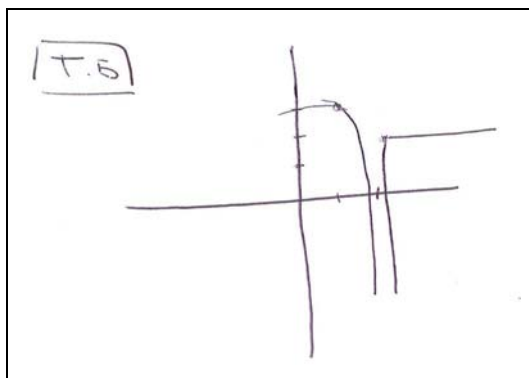


Figura 72. Respuesta del EST90 a la Tarea 5

Inv: ¿Esa rama intenta ser la respuesta a la pregunta c?

EST90: Sí.

Inv: Y ahí, te estás acercando, ¿por qué parte te acercas al 2?

EST90: Por la izquierda.

Inv: Por la izquierda.

EST90: Claro, hum.

Inv: En el límite pone cuando x tiende a 2.

EST90: Ah, o sea que tiene que pasar por 2, o no, hum. Cuando se va acercando a 2

Inv: Cuando x se va acercando a 2.

EST90: Por la izquierda y por la derecha.

Inv: Yo pienso que sí. Tú de momento...

EST90: Por los dos lados.

Inv: Intenta, intenta.

EST90: Hum, hum. ¿Esto está bien?

Inv: Yo diría...

EST90: Hum. A ver, sí...

Inv: Sí, pero a la pregunta que me estás haciendo, es sí; pero incompleto.

EST90: Entonces tendría que ir una por el otro lado, ¿no?

Inv: Sí, pero inténtalo.

EST90: Que también se acerque a 2.

Inv: Que se acerque a 2 y que cumpla la segunda condición.

EST90: Que esté aquí y baje.

Inv: Hazlo en el papel, ¡por favor!

EST90: ..., así, y luego esto así.

Inv: Podrías continuar un poco más hacia la izquierda.

EST90: Pero no te da valores, ni eso...

Inv: Continúa.

EST90: ¿Como yo quiera, oh...?

Inv: Continúa.

EST90: Hum, si, no sé.

Inv: ¿Podrías intentar continuar o...?

EST90: ¿A la izquierda?

Inv: Inténtalo.

EST90: Así, no sé.

Inv: ¿Me podrías poner una solución distinta a la que has puesto ahora?

EST90: ...creo que no.

Inv: Por lo menos hemos hecho más gráfica que la que había en el cuestionario. Vale.

EST90: Vale.

Inv: Pon, por favor, tarea 5. Aunque si en algún momento quieres que volvamos hacia atrás y que hagamos alguna otra cosa volvemos y lo hacemos. ¿Sí?

EST90: Sí.

Inv: Yo de todas maneras en algún momento volveré a preguntarte otras cosas. Estamos en la tarea 6. En la tarea 6 respondes a la pregunta *a*.

EST90: Sí.

Inv: ¿Podrías indicarme, cómo contestas a qué número se aproxima $f(x)$, en la pregunta *b* respondes que 15? ¿Podrías decirme donde miras?

EST90: En la segunda fila. En la de $f(x)$.

Inv: Sí.

EST90: Porque los valores se aproximan a 15 también.

Inv: ¿A?

EST90: A 15.

Inv: ¿Podrías decirme en voz alta, de qué valores estás hablando?

EST90: Eh, todos.

Inv: Sí.

EST90: Pues 15.530, 15.5254, 15.5015, 15.50001.

17:02

Inv: ¿A qué número se aproximan?

EST90: A 15, bueno, a 15.5.

Inv: a 15.5.

EST90: Pero aquí se aproximan a 14.

Inv: Ah, ¿cuando dices ahí, te estás refiriendo a...?

EST90: A la derecha.

Inv: A la derecha. ¿Si yo te volviera a preguntar a qué se aproxima $f(x)$, me dirías?

EST90: Pues, a 15.5 por la izquierda. Y a 14 por la derecha.

Inv: Y a 14 por la derecha.

EST90: Es eso, je, je.

Inv: ¿Podrías describirme el comportamiento?

EST90: Pues, eso, que cuando, que cuando la función se acerca, que cuando x se acerca a 4.

Inv: ¿Por...?

EST90: Por la derecha. La función se acerca a 14, y cuando x se acerca a 4 por la izquierda, eh, la función se acerca a 15.5.

Inv: Y con lo que terminas de decir, ¿podrías darme una respuesta a la pregunta *d*? ¿Podrías decirme cual es el límite de la función en $x=4$?

EST90: 15, es que no sé... no sé.

Inv: Vale. Cambiamos de tarea.

EST90: Vale.

Inv: Pasamos a la tarea 7. En la tarea 7 das una respuesta a las preguntas *a*, *b*, *c*. Describe el comportamiento de la función. ¿Podrías leer lo que has puesto como respuesta?

EST90: Cuando x es 0, $f(x)$ es 15 y al disminuir la x lo hace la $f(x)$. Desde un valor menor que 0 no indicado y mayor que -1 , hasta el valor 4 de la x sin incluir, la $f(x)$ no varía y su valor es 15. A partir de $x=4$ la $f(x)$ aumenta.

Inv: ¿Podrías volver a describirme el comportamiento, mirando los apartados *a*, *b*, y *c*?

EST90: Cuando x toma valores próximos a 4 por la izquierda. La función se aproxima a 15, y cuando x toma valores próximos a 4 por la derecha se aproxima a 10, la función.

Inv: Y por ejemplo, ¿Cuándo tú miras el dibujo, eso en la gráfica lo ves claramente?

19:26

EST90: Sí.

Inv: En la pregunta anterior, ¿cuándo mirabas la tabla no lo veías tan claro?

EST90: ... no

Inv: ¿Entiendes mi pregunta?

EST90: Sí. ¿A, pero es la misma?

Inv: ... Digamos, no es la misma.

EST90: A, vale.

Inv: Pero digamos, que son modelos similares de presentación distinta. ¿Y decirme el límite de la función? Estamos en la tarea 7, en $x=4$.

EST90: 10 , es así, ¿no? Cuando x es 4 , 10 ¿no?

Inv: Cambiamos de tarea. Estamos en la tarea 8. Completas la tabla. Indícame dónde has sustituido, por ejemplo el 0.1 .

EST90: Aquí.

Inv: Sí, ¿dónde has sustituido?

EST90: En la función.

Inv: Sí.

EST90: En $f(x)$.

Inv: Sí, ¿pero, en cuál de ellas?

EST90: Ah, de estas dos. Pues en la primera.

Inv: ¿Por qué has sustituido en la primera?

EST90: Porque 0.1 es menor que 1 , menor que 0 .

Inv: ¿Ah, sí?

EST90: A, no, no, no, vale. En la de abajo.

Inv: Vale. Has sustituido en la de abajo.

EST90: Sí.

Inv: Y cuando has cogido el -0.1 , ¿lo has sustituido en...?

EST90: En la de arriba.

Inv: Bien. Y si, quieres mirar la tarea 6, la 7, y la 8. En la 7, en la 6 respondiste 15 a la pregunta b. ¿Sí?

EST90: Sí.

Inv: Ahora, me has dado una respuesta que era 15.5 y 14.

EST90: Sí.

Inv: En la tarea 7 respondiste por derecha y por izquierda, números distintos. Vale.

EST90: Sí.

Inv: Y en la tarea 8, das una respuesta a que se acerca la función también por derecha y por izquierda.

EST90: Sí.

Inv: ¿Por qué respondes a las tareas 7, y 8 de una forma y en 6 no lo hiciste?

EST90: ...

Inv: Entiendes lo que te estoy preguntando.

EST90: Sí.

Inv: Tú has dado...

EST90: ¿Puedo mirar?

Inv: Sí, sí, mira, claro, ..., ¿Qué te hizo...?

EST90: Pues aquí solamente buscaba un valor para la función.

Inv: Sí, ¿pero eso no lo hiciste en las otras?

EST90: Porque...

Inv: ¿En la 7 y en la 8 no diste un valor?

EST90: Porque no me había fijado que por la derecha y por la izquierda tenía valores diferentes

Inv: Vale.

EST90: Luego aquí ya lo vi, sobretodo viendo la gráfica, y...

Inv: Vale. No lo viste. Bien.

EST90: Hum.

Inv: ¿Me podrías describir el comportamiento de la función, mirando las respuestas a los apartados b, y c?

EST90: Pues, cuando x tiende a 0 por la derecha, la función se acerca a -3 , y cuando x tiende a 0 por la izquierda, se acerca a 1 .

Inv: A 1 .

EST90: Sí.

Inv: E intentando dar una respuesta a la pregunta e. ¿El límite de la función en $x = 0$?

EST90: ¿Eh?, ¿cómo? ¿Cuándo? ¿eh?

Inv: Sí, eh, la pregunta que hacemos, con todo lo que hemos dicho, ¿cuál sería el límite si es posible?

EST90: En 0 .

Inv: Sí, en 0 .

EST90: Pues, no sé, pero -3 no, je, je, creo que no, je, je. No se puede decir, ¿no? Bueno sí, se hace aquí. ¿No? Si es mayor que 0 , se pone el 3 y se sustituye.

Inv: ¿Se pone el...?

EST90: Se pone el 0 y se sustituye. Como es $x=0$. Pues -3 . ¿No? Pues entonces, no sé.

23:42

Inv: ¿Debo entender que -3 es tú respuesta?

EST90: Sí lo sustituí ahí.

Inv: ¿Lo has sacado sustituyendo en el segundo tramo de la función?

EST90: Sí, pero esto último, no.

Inv: Vale.

EST90: Mirando la tabla, no.

Inv: No sabrías que decirme. Cambiamos de tarea... Das una respuesta, en la tarea 9 respondes 2.4999 tienes escrito superior e inferior y has tachado el superior. ¿Podrías decirme donde miras, porque pusiste primero superior, lo tachaste y después pusiste inferior?

EST90: Pues, a ver, te está diciendo como de próximos han de estar los valores de x de 2.5. Pues he mirado la columna de la x . Bueno, no. Hay que mirar la de 3.5 menos...

Inv: $3.5 - f(x)$, que es la que estás señalando.

EST90: En valor absoluto.

Inv: En valor absoluto.

EST90: Entonces hay que mirar cuando es menor que 0.0001 .

Inv: Sí.

EST90: Y entonces miras que valor de x se corresponde, y , y eso.

Inv: Que es lo que en la tabla está indicado con una rayita (ver cuestionario).

EST90: ¿Eh?, sí.

Inv: ¿Podría ser eso?

EST90: Sí.

Inv: ¿Ves la señal que pusiste?

EST90: Sí.

Inv: Y ahí, ¿de qué parte de la tabla estamos hablando?

EST90: De la parte superior.

Inv: De la parte superior. ¿Y cuándo miras la parte inferior de la tabla?

EST90: Tiene que ser menor a 0.001 , no hay..., no hay valores más pequeños que 0.001 .

Inv: No hay valores.

EST90: Ah, pues entonces me refería a inferior pero hasta aquí, ¿no?

25:44

Inv: Entonces, ¿eso es inferior o superior?

EST90: Superior.

Inv: Es 2.4999 o...

EST90: O..., je, je. No sé.

Inv: Los números son mayores, hablamos de la x , ¿son mayores que 2.4999 o son inferiores?

EST90: ¿Eh?,..., mayores.

Inv: ¿Mayores?

EST90: Sí, porque se acercan más a 2.5.

Inv: Porque se acercan más a 2.5. En un principio lo que habías escrito de superior era correcto

EST90: Hum.

Inv: Y después, respondiendo a la pregunta b dices que el límite será 2. ¿Porque dices que el límite será 2?

EST90: Porque, porque, mirando el punto para $x=2.5$.

Inv: Sí.

EST90: Los valores de la función, se aproximan a 2, por aquí, por la parte inferior.

Inv: De la tabla.

EST90: De la tabla.

Inv: ¿Se acercan a...?

EST90: A 2.

Inv: ¿Y en la parte superior?

EST90: A 3.5.

Inv: A 3.5.

EST90: A 3.5 por la izquierda.

Inv: ¿Cuál sería el límite?

EST90: ¿Eh? pues, 3.5 por la izquierda, y 2 por la derecha, ¿no? O, o en este punto. No se... no sé porque puse 2, tampoco.

Inv: ¿Qué pondrías ahora?

EST90: Por la izquierda y por la derecha.

Inv: Pues sí, por ejemplo, por la izquierda, ¿Cuánto?

EST90: 3.5 por la izquierda, y por la derecha 2.

Inv: Y para decir eso, ¿dónde estás mirando?

EST90: En la x , y en la $f(x)$.

Inv: En la primera y en la segunda columna.

EST90: Sí.

Inv: Vale, gracias. Cambiamos de tarea. La última, ¿no?

EST90: Hum.

Inv: ¿Quieres intentarlo?

EST90: Bueno, te lo dibujo, ¿aquí?

Inv: Sí, pon tarea 10.

28:13

EST90: Bueno, eh,... a ver, esto es que, que cuando x es 0, la f es 4.

Inv: Sí.

EST90: (0,4) y ahí habría un punto (Figura 73).



Figura 73. Respuesta del EST90 a la Tarea 10

Inv: Y ahí habría un punto. Que es la condición a .

EST90: Vale. Luego, la b que es que el límite, cuando la x tiende a 3 de $f(x)$ es 1. O sea que x se tiene que acercar a 3 por la derecha, o ¿no?, o no, no, no. A 3.

Inv: A 3.

EST90: Y el límite tiene que ser 1.

Inv: Esa es la condición b , sí.

EST90: Sí, pues esto sería 1, esto de aquí es 1, 1 sí, ¿o no?

Inv: ¿La x a qué tiende?

EST90: A 3.

Inv: La x tiende a 3.

EST90: O sea que la x tiene que estar en 3.

Inv: Que es donde estás señalando con el bolígrafo tú ahora.

EST90: Sí, y el límite tiene que ser 1, o sea que, pero la x llega a valer 3, ¿o no? Llega a tocar el 3, ¿o no?

Inv: Hum.

EST90: Es que eso es lo que no entiendo,..., bueno el límite tiene que ser 1.

Inv: El límite tiene que ser 1.

EST90: Je,..., 1 se refiere a este 1, se refiere a la y .

Inv: Se refiere a la y , a ese 1, exactamente a la y .

EST90: Pues, no sé, haría una curva, ¿no? O algo así.

Inv: ¿Y la tercera condición, dice?

EST90: Que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a -3 , es 0. Entonces, cuando x es -3 , la fun, cuando se acerca a -3 .

Inv: ¿La función se aproxima a...?

EST90: A 0.

Inv: A 0.

EST90: Sí, hum, pero eso no sabría como dibujarlo,..., así no, no sé.

Inv: Lo dejamos.

EST90: Vale.

30:58

Inv: Vale. Yo te he preguntado en la tarea 2 si me podías poner la respuesta un poco más formal, ¿sí? O en la tarea 1. ¿Podrías darme a la pregunta d, una respuesta un poco más formal?

EST90: ¿La escribo, o...?

Inv: Sí, sí. Pon, pon ahí, tarea 2.

EST90: Pero está es la tarea 1.

Inv: Perdón, sí, sí, bueno. Perdón. Pon tarea 1.

EST90: Pero no lo pongo, en plan así con límites.

Inv: Eso sería, eh, hum, jo, cuando, sí...

EST90: ¿Me estás pidiendo eso? Es que no sé si quieres que lo ponga redactado o puesto.

Inv: En un principio me daría lo mismo, pero cuando yo digo más formal, me refiero a algo más sintético, menos redactado, aunque estamos diciendo lo mismo que lo redactado.

EST90: Entonces pongo lim, ¿es eso?

Inv: Es que, la que debe responder eres tú.

EST90: Ya, pero, tampoco estoy segura, es que, así,..., esto es así (Figura 74)

Handwritten mathematical solutions for tasks 1d, 2e, 3e, 6d, 7e, and 8e. The solutions are arranged in a grid-like fashion with task labels T.1 through T.8. T.1: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 15$. T.2: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -5$. T.3: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0.25$. T.4: $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 10$. T.5: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 15.5$. T.6: $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 14$. T.7: $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 10$. T.8: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.

Figura 74. Respuesta del EST90 a las Tareas 1d, 2e, 3e, 6d, 7e y 8e

Inv: ¿Podríamos seguir con la tarea 2?

EST90: Lo pongo igual, ¿pero esto está bien, o...?

Inv: Podríamos seguir con la tarea 3,..., ¿el límite es...?
EST90: 0.
Inv: ¿Ah, sí?
EST90: No, 0.25.
Inv: ¿Podríamos seguir con la tarea 6?
EST90: Aquí pongo por la derecha, y por la derecha.
Inv: Ponlo.
EST90: Así.
Inv: ¿Dónde has puesto el menos ese?
EST90: Arriba.
Inv: Arriba del 4, ¿y eso indica?
EST90: Que es por la izquierda.
Inv: O sea, ¿que esa nomenclatura también la conoces?
EST90: Sí.
Inv: ¿Y por la izquierda es...?
EST90: Por la izquierda era 15.5.
Inv: 15.5.
EST90: Y por la derecha 14.
Inv: Y ahora has puesto un signo positivo, ¿en?
EST90: En el 4.
Inv: En el 4, ¿que indica que es por...?
EST90: Por la derecha.
Inv: Y después de todo lo que has escrito, dime algo sobre el límite en el punto 4
EST90: No sé, sí que no lo sé.
Inv: Y en la tarea 7, ¿podríamos volver a formalizar un poco más?
EST90: ..., así, así, pues ya está,..., no sé, yo creo que sí. ¿O tengo que poner...?no sé, aquí había puesto...
Inv: ¿Quieres dar una respuesta a la tarea 8?
EST90: ..., tengo que poner las dos. Por la derecha y por la izquierda, ¿sí?
Inv: Por la derecha.
EST90: Así,..., ¿o no?, no sé yo,..., ya está. ¿Está mal,..., me falta algo?
36:34
Inv: Yo no diría que está mal, podría ser.
EST90: Me falta por la derecha y por la izquierda, ¿Qué es?... 15. A vale, es que el 4 también está aquí.
Inv: No depende tanto de dónde este el 4 exactamente.
EST90: ¿De cuándo se acerque?
Inv: Sí.
EST90: O sea que tengo que poner por la derecha 10, cuando se acerca a 4 por la derecha vale 10, y cuando es por la izquierda 15.
Inv: Inténtalo.
EST90: ...
Inv: Vale, ¿lo dejamos?
EST90: Sí.
Inv: Muchas gracias.
37:22

Entrevista al EST98

Inv: ¡Hola, buenos días!

EST98: ¡Hola!

Inv: Estamos en la tarea 1, tú respondes a las cuatro preguntas. ¿Me podrías justificar o explicar por qué respondes a la primera pregunta, a qué se aproxima x , con un 3?

EST98: Porque es la tendencia que tiene la x cuando, eh, la función se acerca a, a 15.

Inv: Pero yo te estoy preguntando solo por, ¿a qué se aproxima x ?

EST98: A 3.

Inv: ¿Podrías explicarme porqué, dónde miras, cómo lo haces?

EST98: Me van dando, eh, la, los resultados de x para función, y cuando se acerca al número por los dos lados

Inv: ¿Cuando dices los dos lados, a qué te refieres?

EST98: Se acerca primero por la izquierda, y luego por la derecha

Inv: Y la x se acerca, ¿al...?

EST98: Al 3

Inv: Al 3. De la misma forma, contestando a la pregunta b , ¿a qué se aproxima la función?

EST98: Una se acerca por debajo, y la otra por encima. La de la izquierda por debajo, y la de la derecha por encima.

Inv: ¿Y se acerca a?

EST98: A 3.

Inv: Eso la x , estamos en el apartado b .

EST98: Eso, eh, eso, vale, a 15.

Inv: A 15, vale, ..., y respondes a la pregunta c , y después en la pregunta d , das un resultado. Voces externas, para que al terminar ella cierre la puerta.

Inv: ¿Podrías intentar responderme a la pregunta d ?

EST98: A la pregunta d . Eh.

Inv: ¿Cuál es el límite de la función en $x=3$?

EST98: 15.

Inv: ¿Podrías escribirmelo un poco más formal?

EST98: ¿Cómo?

Inv: Sí, una simbología un poco más matemática, no solo un números.

EST98: Cuando x tiende a 3, eh, no, cuando la x tiende a 3, la función tiende a 15.

Inv: Sí, sí. ¿Podrías escribirlo eso?

EST98: ¿Aquí o...?

Inv: No, no, en la hoja que te estoy dando ahora.

EST98: Huy, espera... (Figura 75)

①

$x \rightarrow 3$

$f(x) \rightarrow 15$

Figura 75. Respuesta del EST98 a la Tarea 1

Inv: Vale, gracias. ¿Cambiamos de tarea?

EST98: Sí.

Inv: De la misma forma, vuelves a contestar a todas las preguntas. Perdona un momento,... Podrías explicarme, en la pregunta *b*, ¿Dónde miras? ¿Por qué das la respuesta que das? ¿Por qué en la pregunta dices que x se aproxima a -5 ?

EST98: Eh, la gráfica.

Inv: La gráfica.

EST98: Se va viendo como con los valores 1.9 , 1.99 , 1.999 , se va aproximando al punto que viene marcado, eh, -5 .

Inv: ¿Estamos hablando de aproximarnos por...? Sí, ese movimiento que has hecho con el dedo, ¿qué parte de la gráfica estabas señalando?

EST98: La parte de la izquierda.

Inv: La parte de la izquierda, ¿la izquierda de qué número?

EST98: La izquierda de 2 .

Inv: Y de la misma forma, intentando responder a la pregunta *c*.

EST98: Se aproxima a -5 por la derecha de 2 .

Inv: Por la derecha de 2 . Después a la pregunta *d* das una respuesta un poco así, extraña. ¿Podrías describir el comportamiento de la función?

EST98: Cuando la x es menor que 2 , la función tiende a más infinito, y cuando es mayor también tiende a más infinito.

Inv: Pero cuando me dices esas dos respuestas, ¿Dónde estás mirando?

EST98: Eh, a la continuación de la gráfica, fuera de ella. Por la derecha, como por la izquierda.

Inv: Sí, pero las preguntas que yo te estoy haciendo en los apartados *b* y *c*, no son tanto en la prolongación, sino a un número muy concreto.

EST98: A 2 .

Inv: A 2 . ¿Podrías describirme el comportamiento de la función ahí?

EST98: Respecto a 2 , por la izquierda se acerca por encima.

Inv: ¿A qué número?

EST98: A -5 .

Inv: Sí.

EST98: Igualmente, se acerca por la derecha a -5 .

Inv: Muy bien, bien. ¿Podrías darme otra respuesta a la pregunta *e*? Vuelves a hacer lo mismo que en el problema anterior, pones un número. ¿Podrías formalizármelo un poco más?

EST98: ¿Como en la tarea anterior?

Inv: Por ejemplo,..., o mejor, si es posible.

05:21

EST98: Mejor, no sabría.

Inv: Bien, bien, bien.

EST98: ... (Figura 76)

The image shows a rectangular box containing handwritten mathematical work. At the top left, the number '2' is circled in red. Below this, the expression $x \rightarrow 2$ is written in blue ink. Underneath that, the expression $f(x) \rightarrow -5$ is written in blue ink.

Figura 76. Respuesta del EST98 a la Tarea 2

Inv: Cambiamos de tarea. Estamos en la tarea 3. La primera de las preguntas de la tarea 3 es: completa la tabla, ¿podrías explicarme con algún valor, cómo las has completado?

EST98: He ido sustituyendo los valores de x en la función de arriba y apuntando los resultados

Inv: Muy bien. Podrías contestarme de qué forma justificas, o ¿podrías justificarme en la pregunta *b*, a qué se aproxima x ?

EST98: Eh, x se va aproximando a 2, la tendencia del número que está ahí en la tabla, y por la izquierda y por la derecha de 2, y la función, ¿sí? Y la función de x , por la izquierda a 0.25, y por la derecha también.

Inv: Respondes a la pregunta *d*, ¿responderías de la misma forma, cambiarías la forma?

EST98: ..., no, respondería igual.

Inv: Y respecto a la pregunta *e*, das una respuesta escueta, con un número. ¿Podrías escribirme algo Un poco más formal?

EST98: Sí... (Figura 77)

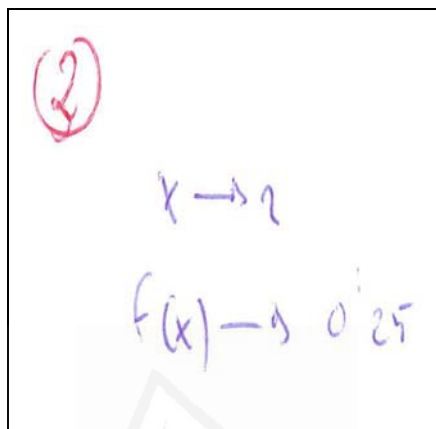


Figura 77. Respuesta del EST98 a la Tarea 3

Inv: Vale. Cambiamos de tarea. Pasamos a la tarea 4. En la tarea 4, ¿te pareció sorprendente la presentación, o te sorprendió el enunciado, oh?

EST98: Me costó comprenderlo, al principio.

Inv: ¿Podrías volver a leer lo que nos preguntan?

EST98: Alba, una estudiante de primero de bachillerato, con la ayuda de una hoja de cálculo, ha ido substituyendo los valores en una función, $f(x)$, y ha obtenido las dos primeras filas de la tabla. Después, ha construido dos filas más de diferencias en valor absoluto

Inv: Vale, y tú das una respuesta. ¿Podrías intentar decirme la respuesta como la has hecho, donde has mirado, si mantendrías la respuesta, si darías otra?

EST98: ..., hum, he mirado en la tabla donde hace las diferencias de las funciones, y no, mantendría la misma respuesta.

Inv: ¿Qué nos preguntan, en la pregunta *a*?

EST98: Nos pregunta, ¿cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5 para que la diferencia $1.5-f(x)$, en valor absoluto, sea menor que 0.1?

Inv: ¿Cero coma?

EST98: Perdón, 0.001.

Inv: 0.001, ¿y podrías indicarme en la tabla, en qué columnas y dónde miras para darme la respuesta que das?

EST98: A ver, puedo..., miro la segunda fila, y la primera

Inv: ¿Y...?

EST98: Para obtener la respuesta.

Inv: ¿Y...?

EST98: Y de las columnas.

Inv: La diferencia $1.5-f(x)$ en valor absoluto, ¿Dónde lo miras?

EST98: Esa cuenta la hago de cabeza.

Inv: ¿Ah, la haces de cabeza? ¿Y haciéndola de cabeza, qué número, qué valor de x miras para decirme que la diferencia es menor que 0.001?

EST98: Cuando x es mayor que 0.499 y menor que 0.501, esa es la respuesta a la pregunta *a*.

Inv: ¿Podrías mirar la tabla otra vez?

EST98: Sí.

Inv: Mira la tabla.

EST98: ...

Inv: Tenemos una columna, una fila que corresponde a x .

EST98: Sí.

Inv: Otra fila que corresponde a la función, una fila que corresponde en valor absoluto a $0.5-x$, y otra fila que corresponde a $1.5-f(x)$.

EST98: Sí.

Inv: Es que no termino de entender, cuando me dices de cabeza, ¿a qué número estás mirando para decir que la diferencia es de 0.001 ?

EST98: Eh, le resto a 1.5 el valor de $f(x)$.

Inv: Perfecto.

EST98: Entonces, para que, eh, ..., $1.5-f(x)$ sea menor que 0.01 , veo en la tabla.

Inv: Sí.

EST98: Tiene que ser cuando x está entre estos dos números.

Inv: Tú tienes puesto ahí $0.499 < x < 0.501$, vale, bien. Y das una respuesta al límite, ¿Cuándo das la respuesta a la pregunta b, al límite, dónde estás mirando; cómo lo haces?

EST98: ..., Estoy mirando en la tabla, cuando se acerca a los puntitos, el número al que tiende.

Inv: Sí, pero ¿qué filas miras exactamente, en qué fila estas mirando?

EST98: Para esto, en la segunda fila, en la de $f(x)$.

Inv: ¿Y podrías ponerme como en las anteriores, un resultado un poco más formal?

EST98: ... (Figura 78)

The image shows a handwritten note on a piece of paper. On the left, the number '4' is circled in red. To the right, there are two lines of text written in blue ink: $x \rightarrow 0.5$ and $f(x) \rightarrow 1.5$. The background of the paper has a faint watermark of the University of Alicante logo.

Figura 78. Respuesta del EST98 a la Tarea 4

Inv: ¿Podrías decirme, que número has escrito?

EST98: $x \rightarrow 0.5$, y $f(x) \rightarrow 1.5$

Inv: Sí.

EST98: Sí.

Inv: ¿ $f(x)$ a qué tiende, me estás diciendo...?

EST98: Ah, uy, perdón, a 1.5 .

Inv: Vale, sí 1.5 , lo mismo que tienes puesto en la hoja. Vale. Cambiamos de tarea. Estamos en la tarea 5, que pedimos una gráfica que cumpla tres condiciones. ¿Me podrías indicar la primera condición?

EST98: La primera condición es la función, que cuando x es 1 , sea igual a 3 .

Inv: ¿Y eso representa un...?

EST98: Un punto.

Inv: Un punto. ¿Me podrías indicar en el gráfico, la segunda condición dónde la has dibujado?

EST98: La segunda condición.

Inv: ¿Si en algún momento quisieras hacer un dibujo, en la otra hoja, eh?

EST98: ..., cuando, ..., hay, ..., que mal dibujado, ¿eh?, se supone que se tenía que aproximar pero nunca llegaría a ese valor.

Inv: Bien, pero en esa gráfica que me estás dibujando ahora, ¿a qué pregunta estás contestando?

EST98: A la b, cuando...

Inv: Ahí que límite estás calculando, ¿en la gráfica que acabas de hacer, qué límite estás calculando?

EST98: Es el límite de la $f(x)$.

Inv: ¿Cuándo x tiende a...?

EST98: A 2.

Inv: ¿A qué pregunta estás contestando?

EST98: A la b ,...

Inv: ¿Podrías decirme de palabra,..., qué límite estás calculando ahí?

EST98: Más infinito.

Inv: ¿Quién va a más infinito, en lo que terminas de dibujar?

EST98: La función, cuando x tiende a 2 (Figura 79).

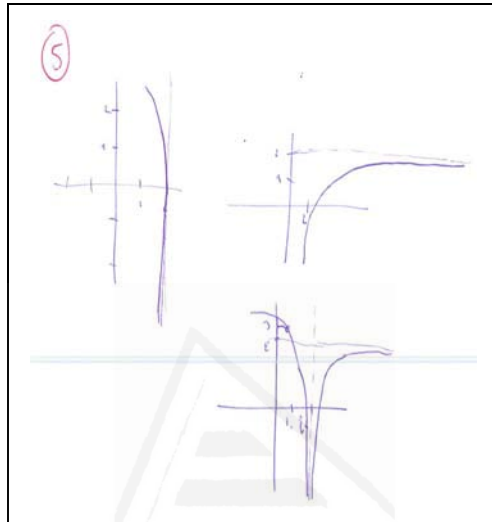


Figura 79. Respuesta del EST98 a la Tarea 5

14:12

Inv: x tiende a 2, ¿y la función va...?

EST98: ..., a más infinito, huy, creo que está mal representado,..., creo que la gráfica que hice está mal.

Inv: ¿Por qué,..., donde estás mirando ahora?

EST98: Aquí, cuando...

Inv: Cuando x .

EST98: Vale 2.

Inv: ¿La f vale,..., la f vale, a qué tiende la función en ese momento?

EST98: Oh, estoy mirando donde no es, vale, ¿eh?

Inv: Volvemos a empezar, vuelvo a preguntar.

EST98: Me estoy liando, sí.

Inv: No nos liemos, te vuelvo a preguntar, intento ayudar. La gráfica que has terminado de representar, ¿a qué apartado intentas responder?

EST98: Al c .

Inv: Pues sigamos, si al c . Estábamos intentando responder al b , sigamos.

EST98: Si el b ,..., más o menos.

Inv: Vale. De la misma forma que has representado el apartado b , podrías volver a representar el apartado c , y acuérdate del apartado a también.

EST98: ..., y así más o menos, por aquí más o menos,...

Inv: Por tanto, ¿eso sería el apartado...?

EST98: Ese sería el b , también.

Inv: El b , también.

EST98: Ostras, el b , el c .

Inv: El c , ¿y este?

EST98: El b .

Inv: Y está la gráfica completa.

EST98: Sí, más o menos, y este es el punto.

Inv: Perfecto, perfecto. Y otra cosa, ¿serías capaz de dibujarme otra solución?

EST98: ¿Diferente?

Inv: A ser posible, sí, porque lo que hemos hecho en la hoja, es más o menos la mismo. Sí, mi pregunta sería en este momento una solución distinta, una gráfica que cumpla las tres condiciones pero que no sea exactamente la que hemos hecho, hombre, determinadas cosas van a ser similares. Espera un momento, espera un momento.

EST98: ..., (Figura 80)

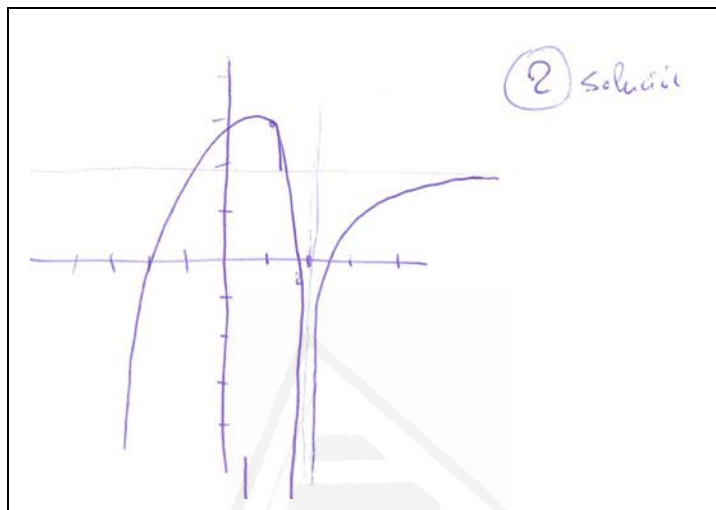


Figura 80. Respuesta del EST98 a la Tarea 5

Inv: ¿Qué estás dibujando ahora, una línea, una recta, cómo?

EST98: Una recta auxiliar,

Inv: Sí, pero es...

EST98: Es, vertical.

Inv: Vertical, ¿por qué punto?

EST98: Por el punto 2.

Inv: En $x = 2$, y ahora, estás dibujando...

EST98: Una horizontal, para $y...$

Inv: Para $y = 2$.

EST98: ...,hum,..., perdón.

Inv: Podríamos poner una segunda solución, ponme por ahí, bien,..., ¿y alguna más?

EST98: ..., (Figura 81).

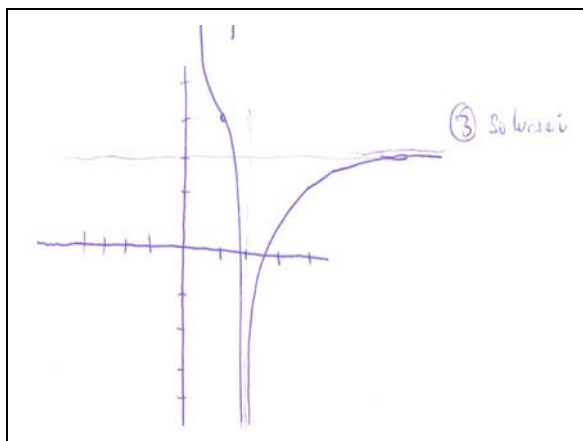


Figura 81. Respuesta del EST98 a la Tarea 5

Inv: Vuelves a representar las dos mismas líneas auxiliares.

EST98: Y el punto por el que tiene que pasar.

Inv: El punto por el que tiene que pasar.

EST98: ..., huy, no llega a tocarla,

Inv: Muy bien. Muchas gracias. Vamos a cambiar de tarea.

EST98: Tarea 6.

Inv: Sí, estamos en la tarea 6..., en la tarea 6 respondes a las cuatro preguntas. Voy a centrarme esta vez en la pregunta d.

EST98: En la pregunta d.

Inv: Sí, la última. Mira un poco, sitúate. ¿Cuál es el límite de la función en $x = 4$?

EST98: Hum, bien, cuando x tiende a 4 desde la izquierda.

Inv: Sí.

EST98: Eh, el límite es, eh, 15.5, y cuando viene desde la derecha el límite es 14.

Inv: Y exactamente, el límite en $x = 4$, ¿sería, qué me puedes decir de ese límite?

EST98: Serían los dos, no, no estoy seguro de la respuesta (Figura 82).

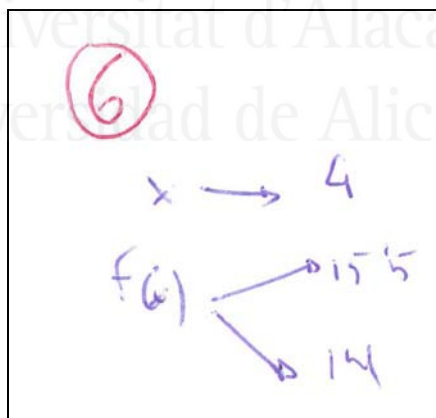


Figura 82. Respuesta del EST98 a la Tarea 6

Inv: Y me lo podrías, ¿me lo podrías poner un poco más formal?

EST98: ...eh, me acuerdo, no, no sabría cómo ponerlo más formalmente.

Inv: ¿No?

EST98: No, ahora mismo no,....

Inv: Vale, cambiamos de tarea..., estamos en la tarea 7, respondes a las tres primeras preguntas.

¿Podrías decirme a qué número se aproxima la función, cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99,... estamos intentando responder a la pregunta b?

EST98: A la pregunta b, eh, cuando x toma los valores 3.9, se aproxima a..., a 15.

Inv: ¿Podrías indicarme dónde has mirado, qué observas?

EST98: Sí, en el segundo trozo de la función.

Inv: En el segundo trozo de la función.

EST98: Por qué veo que en el tercero..., se supone...

Inv: Y ahí estaríamos respondiendo a la pregunta c .

EST98: Sí, aquí hay un circulito, representando que ese punto está arriba, entonces, en la pregunta c , cuando x tiende a 4 , la función se aproxima a 10 .

22:54

Inv: ¿Cuándo x tiende a 4 por donde?

EST98: Por la derecha.

Inv: ¿Y me podrías hacer la descripción del comportamiento de la función?

EST98: Sí.

Inv: Pero refiriéndonos a límites.

EST98: A límites.

Inv: ¿Y refiriéndonos a los apartados anteriores?

EST98: Hum, vale, cuando x tiende a menos infinito, el límite tiende a menos infinito; cuando x tiende a cero por la izquierda y por la derecha, el límite tiende a 15 ; y cuando x tiende a 4 por la izquierda, el límite tiende a 15 , y cuando tiende por la derecha el límite tiende a 10 .

Inv: Con una descripción tan detallada como la que has hecho, podrías terminar diciéndome cuándo x tiende a más infinito.

EST98: Cuando x tiende a más infinito, eh, la función tiende a más infinito.

Inv: Tiende a más infinito. Bien, centrémonos en la pregunta e .

EST98: Sí.

Inv: ¿Cuál es el límite de la función cuando x tiende a 4 ?

EST98: ..., eh, eh, tiende a 15 por la izquierda, y a 10 por la derecha, de 4 ... ¿Lo apunto?

Inv: ¿No me puedes decir nada más?

EST98: No sabría decir nada más.

Inv: Vale, muy bien. ¿Cambiamos de tarea?... Intenta justificarme, estamos en la tarea 8, la primera pregunta es que completes la tabla, justificame un par de valores, cómo los calculas

EST98: por ejemplo, cuando x es -0.1 .

Inv: Sí.

EST98: Sustituyo el valor en la función, en la parte cuando x es menor que 0 , 2 por -0.1 es -0.2 más 1 igual a 0.8 .

Inv: Y elígeme otro valor, por favor.

EST98: Cuando x es, por ejemplo, 0.1 lo sustituyo en la parte cuando x es mayor o igual que 0 , y es -2 por 0.1 es -0.2 menos 3 es -3.2 .

Inv: -3.2 , respondes a la pregunta b , respondes a la pregunta c , ¿podrías, responder a la pregunta d , describirme el comportamiento de la función?

EST98: Cuando x tiende a menos infinito, la función tiende a..., a menos infinito, cuando

Inv: ¿Dónde estas mirando para decirme eso?

EST98: A la función.

Inv: En la función.

EST98: Luego cuando x .

Inv: ¿En la parte de arriba, en la de abajo?

EST98: En la parte de arriba, cuando x es...

Inv: En la parte de arriba.

EST98: Menor que 0 .

Inv: Cuando x es menor que 0 .

EST98: Cuando x tiende a 0 por la izquierda, la función tiende a 1 , estoy mirando en la parte cuando x es menor que 0 ; luego, cuando x tiende a 0 por la derecha la función tiende a -3 .

Inv: ¿Dónde estás mirando ahora?

EST98: En la parte cuando x es mayor o igual que 0 .

Inv: Pero estás mirando, en la parte donde pone función.

EST98: Sí.

Inv: ¿En ningún momento miras la tabla?

EST98: ¿Eh?,..., no.

Inv: Vale.

EST98: Y cuando x tiende a más infinito, la función tiende a menos infinito.

Inv: Intentando responder a la pregunta e .

EST98: ¿A la pregunta e ?

Inv: ¿Cuál es el límite de la función en $x = 0$?

EST98: Cuando x tiende a 0 por la izquierda, el límite es 1, y cuando x tiende a 0 por la derecha, el límite es -3 .

Inv: Bien. ¿Cambiamos de tarea?... Estamos en la tarea 9, en la tabla de las diferencias métricas, ¿podrías intentar justificarme donde miras para dar la respuesta que das en el apartado a ?... para que la diferencia $3.5-f(x)$, en valor absoluto, sea menor que 0.001 .

EST98: Oh, eh, me fijo en la tercera columna.

Inv: Miras la tercera columna.

EST98: Y la comparo con la primera. Entonces, cuando los valores que se dan son menores que una milésima, eh, x es mayor que 4.4999 .

Inv: ¿Mayor qué?

EST98: Que 2.4999 , y menor que 5 , que 2.5001 .

Inv: ¿Y esos números, me los estás diciendo, mirando qué columna?

EST98: La columna primera, la de las x .

Inv: ¿Y dónde miras para decirme eso, en qué otra columna estas mirando al mismo tiempo?

EST98: En la tercera, $2.5-x$.

Inv: $2.5-x$, pero la pregunta a nos hace referencia, ¿a qué tipo de diferencias?

EST98: ..., oh, hace referencia a la diferencia $3.5-f(x)$.

Inv: Por tanto, ¿en qué columna debieras mirar?

EST98: Debiera de estar mirando en la cuarta columna, y en la primera columna

Inv: Vale. ¿Podrías intentar responderme al problema, otra vez?

EST98: ¿A la pregunta a ?

Inv: Sí.

EST98: Me fijo que..., cuando la diferencia es menor que 0.01 y es cuando x es menor que...

Inv: ¿Es, cuándo x es...?

EST98: Cuando x es mayor que 2.499 y menor que 2.501 ,..., y menor que 2.501 , pero no sé si está bien mi respuesta aquí, ahora tengo muchas dudas.

Inv: No tenemos ninguna prisa.

EST98: ..., así,..., bien, yo cambiaría la respuesta esta, y diría que es cuando x es mayor que 2.4999 y menor que 25 , que 2.5 perdón.

Inv: ..., y respecto al límite, dirías algo, intentando contestar a la pregunta b .

EST98: Eh, cuando x tiende a 2.5 por la izquierda es 3.5 , y cuando tiende a 2.5 por la derecha es 2 .

Inv: Esas respuestas las haces, mirando dónde.

EST98: Mirando $f(x)$, los valores más próximos a los puntitos.

Inv: ¿En la columna?

EST98: En la segunda.

Inv: En la segunda columna. Bien, ¿cambiamos de tarea? Estamos en la tarea 10, que hay una gráfica que cumple tres condiciones.

EST98: $f(0) = 4$.

Inv: Qué la has puesto, ¿dónde?

EST98: Eh, aquí, no sé si se ve muy bien.

Inv: Sí, señálame exactamente. Te volveré a preguntar lo mismo que en el problema anterior, si eres capaz de buscarme alguna solución más.

EST98: ..., hago la primera condición.

Inv: Cuando la x es...

EST98: Cuando la x es 0 , la función es 4 , y, ¿marco las demás condiciones?

Inv: Perfectamente.

EST98: Cuando x tiende a 3, el límite de la función es 1,..., a ver, entiendo que pasa por el punto $x=3$ y 1, y a ver, la c es que cuando x tiende a -3 , $f(x)$ tiende a 0, entiendo que me están diciendo que cuando la x es -3 , la función es 0, el punto este, -3 ,..

Inv: A mi podría interesarme que intentaras dibujarme varias soluciones, y a ser posible distintas de las que tienes en la hoja del cuestionario

EST98: ... (Figura 83).

Inv: ¿Has terminado de marcar?

EST98: Sí.

Inv: ¿Cuántos puntos?

EST98: Tres.

Inv: Tres.

EST98: ...

Inv: Y en un momento determinado, podría preguntarte, ¿cuántas funciones cumplen esas tres condiciones?

EST98: ..., creo que infinitas.

35:05

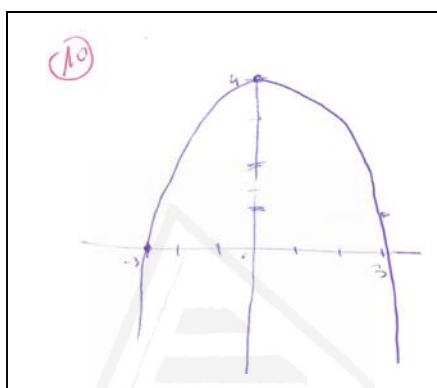


Figura 83. Respuesta del EST98 a la Tarea 10

Inv: ¿Podrías ponerme otra más?

EST98: ... (Figura 84)

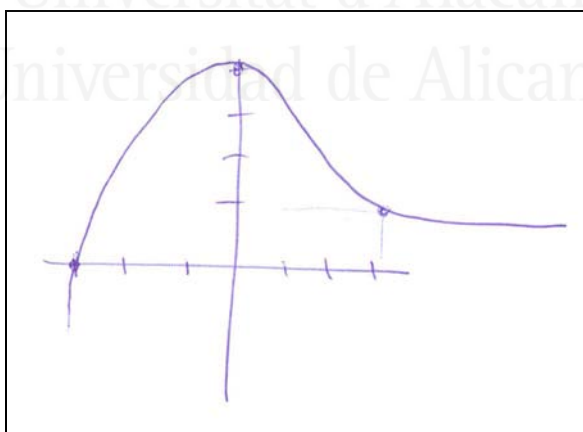


Figura 84. Respuesta del EST98 a la Tarea 10

Inv: Una pregunta, después de la respuesta que me has dado, las tres gráficas que llevas representadas, la del cuestionario, y las dos de hoy son gráficas continuas.

EST98: Sí.

Inv: ¿Podrías intentar dibujar la gráfica de un función que cumpliera las tres condiciones y no fuera continua?, por ejemplo...

EST98: ... (Figura 85)

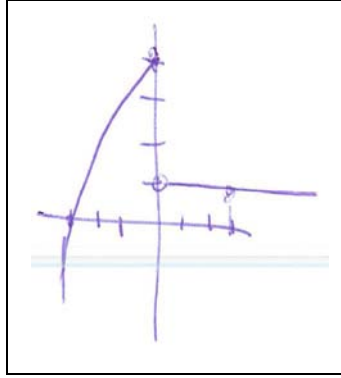


Figura 85. Respuesta del EST98 a la Tarea 10

Inv: Yo pienso que después del timbre, está muy bien, y muchas gracias.
36:00



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Entrevista al EST117

Inv: Hola bon dia!

EST117: Bon dia!

Inv: Anem a centrar-nos en la tasca 10 i en la tasca 5. En les dues et donen tres condicions i et demanen una gràfica. D'acord. Mira un poquet el problema, ara estem en la tasca 5, mira les condicions, ara la meua pregunta seria, em podries buscar alguna altra solució?

EST117: Mirant, jo crec que ...

Inv: Si necessites, o vols fer un altre intent en aquest full en blanc.

EST117: No, bo, no fa falta. El punt aquest està clar que és quan la funció és 1, bo quan la x és 1, la y és 3. Quan x tendeix a 2 ... la funció tendeix a menys infinit.

Inv: si

EST117: És una asímptota vertical, i aquesta part de la funció està clara. Quan la x tendeix a més infinit, podria ser que vinguera de dalt, no sé, tampoc estic segur, es que no me'n recorde molt bé del que vam veure l'any passat...

Inv: Tu has fet una gràfica, i la pregunta que jo estaria fent-te és: em podries fer alguna altra que fóra diferent? Dic diferent, però hi haurà coses que seran paregudes.

EST117: ...

Inv: Tu amb el dit abans has marcat les tres condicions. Has marcat el punt, has marcat l'asímtota vertical, i has marcat l'altra que també és una asímptota horitzontal.

EST117: Horitzontal.

Inv: Amb el dit has marcat les tres condicions. La pregunta és: em podries dibuixar un altra que complira eixes tres condicions?

EST117: Podria haver més asímptotes, amb aquestes condicions pot haver moltes gràfiques, però ..

Inv: En podries fer alguna més?

EST117: Podria, per exemple hi podria haver aquí una asímptota?

Inv: No, no, ahí no, en aquest full no per favor, espera.

EST117: Ja.

Inv: Posa't còmode, posat còmode, treballa bé.

02:45

EST117: ..., seria qüestió de ... (Figura 86).

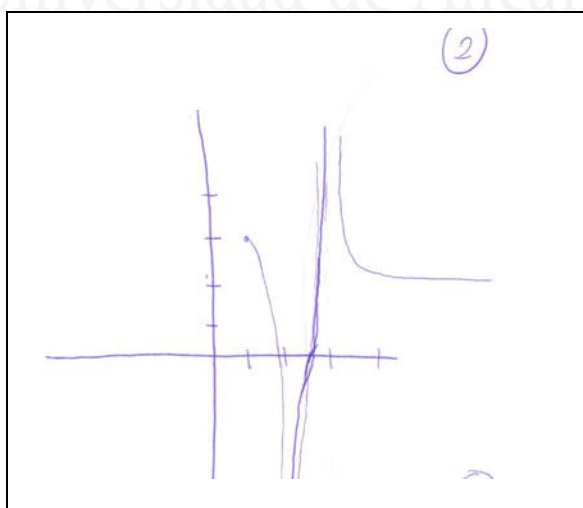


Figura 86. Resposta del EST117 a la Tasca 5

Inv: Què marques ara?

EST117: Un punt.

Inv: La primera condició.

EST117: Seria..., açò està clar

Inv: Això està clar (fa referència a la rama de l'esquerra).

EST117: I podria haver més asímptotes, que no te les donen i seguirien complint aquestes tres condicions. Podria ser aquí una asímptota, i aquí una altra asímptota i que pujaren. No sé, és que tampoc me'n recorde bé. Ho dic per dir alguna cosa. No és recte, no. Podria fer així. Bo, no ho he dibuixat molt bé, perquè dibuixant sóc un poc roí, no sé si m'entens?

Inv: Sí, sí.

EST117: Ja compleix aquestes condicions.

Inv: Tu en aquestos moments estàs dibuixant tres trossos de gràfica, marca'm una mica més el segon tros, el que està al mig.

EST117: El tros del mig?

Inv: Sí.

EST117: ..., seria com, ... um, bo, ..., seria posar un altra asímptota vertical.

Inv: L'estàs posant en x igual a molt?

EST117: A ..., um

Inv: Sí, no, aproximadament

EST117: Um, ..., no sé, això té igual on estiguera faria igual

Inv: D'acord, d'acord. Podries posar baix una variant d'eixa, canviant eixa asímptota que estàs posant vertical?

EST117: Sí.

Inv: Sí, intentant amb una altra.

EST117: ... (Figura 87)

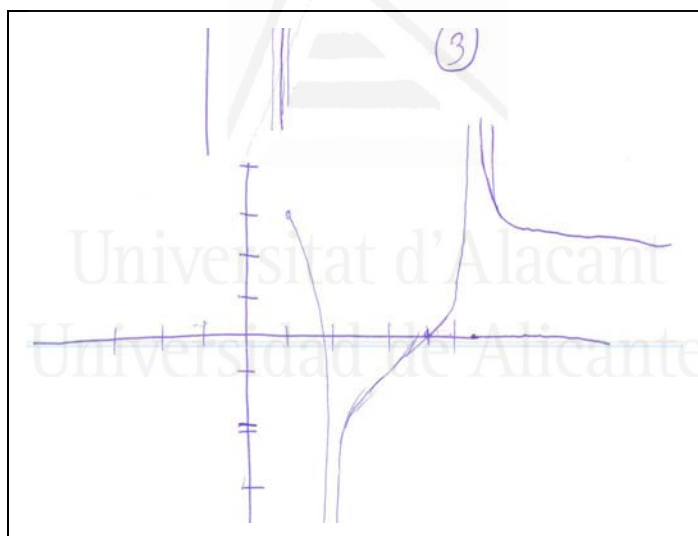


Figura 87. Resposta del EST117 a la Tasca 5

Inv: Sí, no patisques, sí, sense problemes.

EST117: ...

Inv: Estàs posant ara el punt, que és la primera condició.

EST117: Està clar que és així (fent referència al tros de l'esquerra), i després també hi ha el tros que puja.

Inv: Posa'm una distinta de la de dalt.

EST117: Sí, ara ..., si així, més cap a la dreta, no sé si m'entens, és que ...

Inv: Sí, sí, jo t'entenc perfectament. Ahí estaries posant una asímptota vertical en x igual a

EST117: A, ..., no he posat cap número.

Inv: Sí, sí, posa un número.

EST117: Podria ser 4, per posar-ne un, podria ser quatre coma, quatre per ...

Inv: D'acord, d'acord.

EST117: S'ha d'entendre el concepte.

Inv: Jo entenc el concepte, però necessite un poquet de precisió.

EST117: Um, ..., i esta se'n va al..., al 2.

Inv: Se'n va al 2. Podries posar ahí un 2, com a segona solució i a davall un 3. Un 2.

EST117: Ah!

Inv: Que seria la segona solució que em dones i, eixa seria la tercera solució que em dones. D'acord, gràcies. Fem el mateix amb la tasca 10.

06:24

EST117: I també podria ser el mateix en l'altre costat, bo ...

Inv: Espera un segon que no tenim cap pressa. Hi podries posar un altre model? Posa'm un 4 de quarta solució.

EST117: ...,

Inv: No tindràs un bolígraf roig.

EST117: No, ..., açò està clar! (Figura 88)

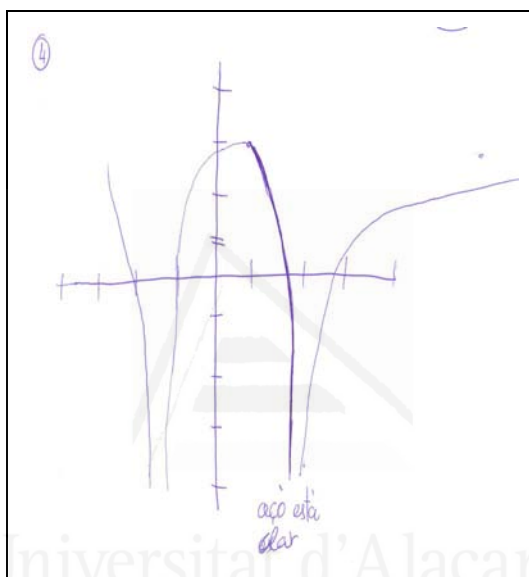


Figura 88. Resposta del EST117 a la Tasca 5

Inv: Espera un segon. Posa-hi davall açò està clar (veure full auxiliar). Escriu-me, sí, sí, escriu-me açò està clar!

EST117: Així.

Inv: No et preocupes, així està clar. És que necessite constatar que el que dius està clar. Bé continua.

EST117: ..., En posar el 2 i l'infinit i complir aquestes dues condicions hi pot haver més asíptotes, açò podria ..., um, bo és que no sé com posar-te que açò està clar després d'haver posat la gràfica sense posar a què em referia.

Inv: Ho entenc perfectament, és una llàstima no tenir diferents colors ara.

EST117: Però, ...

Inv: Però pense que en tinc prou, amb el que fas ara.

EST117: Poder, podríem ...

Inv: Posa alguna cosa a l'altra part, ho deixem, ho donem per entès, ja?

EST117: Ho donem per entès, bo. Puc posar el mateix que abans.

Inv: Em pareix bé.

EST117: Marque açò?

Inv: Si marca-ho ben gros, si un altre dia torne a fer una entrevista portaré bolígrafs de colors.

EST117: ... (Se sent com marca la rama de la figura 4) I per a què fas aquest projecte, ens va comentar Cesar que estaves fent un estudi.

Inv: Sí, faig una tesi doctoral o una cosa semblant, sí. I una pregunta, una pregunta, si jo et preguntara quantes solucions té el problema, què em respondries?

EST117: Infinites.

Inv: Infinites, d'acord. Anem a la tasca 10 i et preguntaré el mateix.

EST117: Um.

Inv: Canvia de full, canvia de full, pots canviar. Preguntaré el mateix. Tu tens una gràfica, i la pregunta és si me'n dibuixaries, si em donaries solucions diferents a la que tens. Complint les tres condicions.

09:28

EST117: ..., si, també, jo pense que està també en té d'infinites, ahí, mentre es complica la condició.

Inv: Posa me'n alguna per favor!

EST117: ...

Inv: Estàs marcant la primera condició, que és el punt. Quin punt és eixe?

EST117: El, el $(0,4)$ (Figura 89).

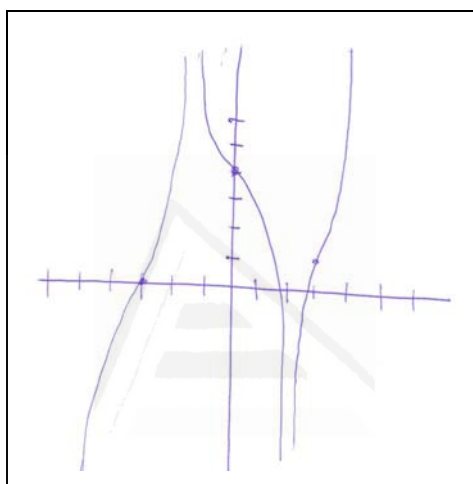


Figura 89. Resposta del EST117 a la Tasca 10

Inv: El $(0,4)$.

EST117: ... mentre complisca que passe per aquestos tres punts, hi pot haver-ne moltes.

Inv: Dibuixa me'n alguna!

EST117: Puc fer també asímptotes, també, no sé, ..., no me'n recorde massa del curs passat, però, ... hi pot haver corbes?, ... puc posar una paràbola? (Figura 90)

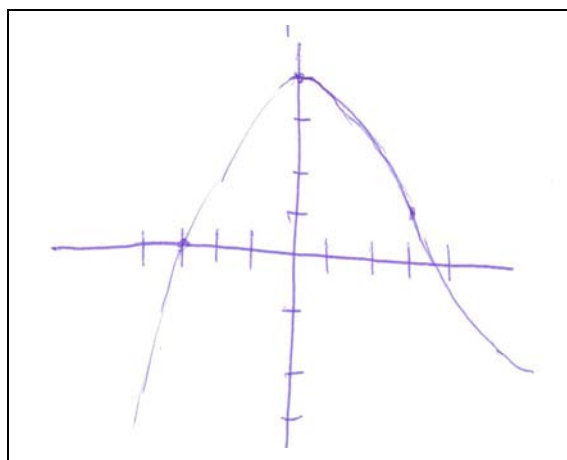


Figura 90. Resposta del EST117 a la Tasca 10

Inv: Posa-me-la baix, posa me'n una baix.
 EST117: Jo diria també que infinites, com la d'abans, ..., no dibuixa massa bé.
 Inv: No, no, dibuixes de meravella.
 EST117: Sí, de meravella!
 Inv: Sí.
 EST117: ..., tu ho entens, més o menys el que estic dibuixant
 Inv: Has marcat la primera condició. Bàsicament, quants punts acabes de posar?
 EST117: Tres.
 Inv: Tres.
 EST117: ..., um, bo, podria ser, ... qualsevol gràfica ...
 Inv: Jo pense que podem canviar de problema.
 Inv: Ara m'agradaria, estem en la tasca 3. Per què deixes en blanc el problema?
 EST117: Um, tu dius, això, omplir la taula i això.
 Inv: Sí, completa la taula.
 EST117: Doncs, Cesar ens va dir que no ens deixava la calculadora, i, no sé tampoc.
 Inv: Ah, no us va deixar la calculadora?
 EST117: No, i jo tampoc, va dir acabeu en casa, i com no compta per a la nota, eh!?
 Inv: No tenim una calculadora ara?
 EST117: No, però no té cap secret, és substituir la x ahí, a la funció, i és molt fàcil!
 Inv: A tu et sembla que eixe apartat és fàcil.
 EST117: SÍ, però no tenia ganes de posar-me ahí amb el 1'9 a fer restes i a dividir. A més teníem pressa perquè després teníem un examen. I ara també, tinc després un examen, que estic fent açò, però també ...
 Inv: Vols dir, que qui va fer això ho va fer manualment?
 EST117: O la calculadora sense que la deixaren, o no es va assabentar, però ...
 Inv: Les persones que van contestar no van utilitzar calculadora?
 EST117: No, és que jo ho vaig fer després. Ell va utilitzar dos dies, i jo ho vaig fer el tercer perquè no vaig anar el segon. Potser sí que els la va deixar, i jo ho vaig acabar a ma casa i em va dir que ho fera sense calculadora.
 Inv: D'acord ... I després m'interessaria, I ahí el mateix.
 EST117: Sí, clar!
 Inv: Estem en la tasca 8. Podries fer un esforç ara de calcular-me algun valor.
 EST117: Sí, sí em dona -0.1 seria...
 Inv: Posa-ho ací, si -0.1 .
 EST117: ... Eh seria, en aquesta ...
 Inv: Quan la x val -0.1 la y seria...
 EST117: 0.8 (Figura 91).

$$x = -0.1$$

$$f(-0.1) = 2 \cdot (-0.1) + 1 = 0.8$$

$$f(-0.01) = 2 \cdot (-0.01) + 1 = 0.98$$

$$f(0.0001) = 2 \cdot (0.0001) - 3 = -3.0002$$

$$f(0.001) = -2 \cdot (0.001) - 3 = -3.002$$

Figura 91. Resposta del EST117 a la Tasca 8

Inv: D'acord. Calcula-me'n un altre per favor!

EST117: ...

Inv: Quan la x val -0.01 dóna 0.98 .

EST117: Sí, i podem per la dreta.

Inv: Calcula-me'n algun per la dreta!

EST117: ... -3 ...

Inv: Sense problemes, no patisques per això.

EST117: ... En faig algun més, ...

Inv: Sí, fes me'n un altre. Quan la x val 0.0001 , dóna, lleva una mica la mà, dóna -3.0002 . I ara estàs calculant la imatge del 0.001 , ..., i et dóna -3.002 . D'acord. Intenta contestar-me la pregunta b . A què s'aproxima $f(x)$?

EST117: A quin número s'aproxima. A cap. Bo, per l'esquerra s'aproxima a 1 , i per la dreta a un altre.

17:48

Inv: Posa-m'ho ací!

EST117: ... (Figura 92)

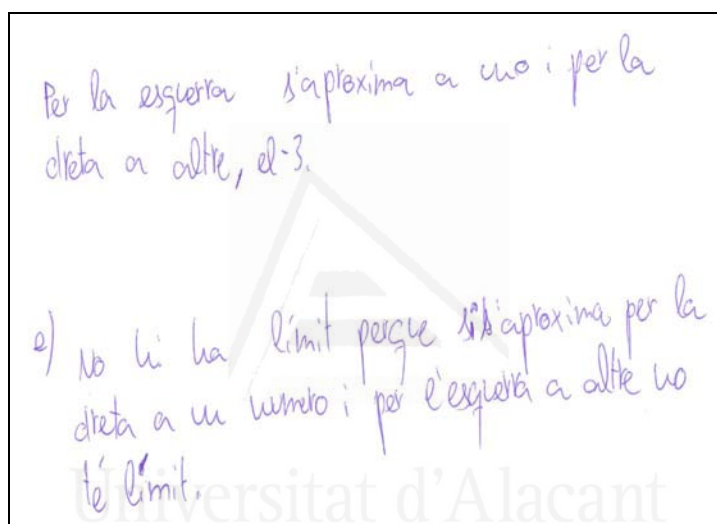


Figura 92. Respuesta del EST117 a la Tarea 8

Inv: Quan dius s'aproxima a 1 , què vols dir? De quin número estàs parlant?

EST117: Per l'esquerra a l' 1 , i per la dreta a un altre.

Inv: Podries posar al costat d'eixe altre a quin número s'aproxima. Posa coma.

EST117: ...

Inv: D'acord, i podries contestar-me la pregunta e . Quin és el límit de la funció en $x = 0$?

EST117: No hi ha límit.

Inv: Per què no hi ha límit?

EST117: Perquè si s'aproxima a un número per l'esquerra, i per la dreta a altre, no hi ha límit.

Inv: Escriu-me això ací.

EST117: ...

Inv: Has escrit que "No hi ha límit perquè si s'aproxima per la dreta a un número i per l'esquerra a un altre no té límit".

EST117: No s'aproxima.

Inv: Eixa seria la mateixa argumentació que has utilitzat en la tasca 7, no?

EST117: Sí.

Inv: Correcte?

EST117: Sí.

Inv: En la tasca 6, tu contestes la primera pregunta, contestes la segona, deixes en blanc la c . Podries descriure'm el comportament de la funció?

EST117: Ah, ..., ho pose?

Inv: M'ho pots dir de paraula, si vols?

EST117: Ho miraré millor.

Inv: No tinc gens de pressa, i quan acabem amb la tasca 6 pense que hem acabat l'entrevista, i ... el temps que necessites, el temps que necessites.

EST117: M'has dit que puc fer-ho amb paraules.

Inv: Sí.

EST117: Quan s'aproxima al 4 per l'esquerra és, seria 15.5. S'aproximaria a 15.5, tendiria, el límit seria 15.5 per l'esquerra, i per la dreta 14. Ho apunte ací, ...?

Inv: No, ja en tinc prou. I respecte a la pregunta d, tu marques el límit per l'esquerra, marques el límit per la dreta, i què em podries dir del límit de la funció en $x = 4$.

EST117: Que, no me'n recorde, crec que no existia. Però no estic segur, és així?. Jo deixe la meua resposta no canviaré, però que je je.

Inv: Ara respons tu, quan acabarem jo respondré a tot el que vulgues.

EST117: Això, que no existeix el límit, perquè si per l'esquerra és un i per la dreta un altre, no existeix.

Inv: D'acord.

EST117: Je, je, em pots dir això?

Inv: Moltes gràcies.

EST117: De res.

22:16



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Entrevista al EST120

Inv: Hola bon dia!

EST120: Bon dia!

Inv: Estem en la tasca 8. Jo voldria que em justificares com has omplert la taula, que em justificares algun valor.

EST120: Doncs ..., donant els valors que em donaven de la x els substituïa.

Inv: Concreta, dis-me un valor concret. De quin valors estàs parlant ara?

EST120: El de -0.1 , per exemple, seria 2 per -0.1 i ho sumava a 3.

Inv: Per què ho substituïes en la de dalt?

EST120: Perquè primer es va per un lloc i després per l'altre, es trau, en aquest cas seria per la dreta i per l'esquerra.

Inv: Quan dius que el -0.1 es substitueix en la de dalt, per quina raó?

EST120: Perquè la $f(x)$ seria la y , i aleshores el valors que donem són les x .

Inv: Sí, però per què en eixa i no en l'altra?

EST120: Però és que hem de substituir primer en un i després en l'altre, tant en el de dalt com en el de baix, i en un m'ha donat 0.8 , i en l'altre -2.8 .

Inv: D'acord. Després contestes a la pregunta b , a quin número s'aproxima $x?$, dius que a 0 ?

EST120: Sí perquè cada vegada quan la x és negativa, és cada vegada més xicoteta, i l'altra va baixant i el número que hi ha entre les dues està en un interval que s'aproxima a 0 .

Inv: Quant dius entre les dues, a què estàs referint-te?

EST120: Tant als valors negatius de la x , com als valors positius.

Inv: Per la dreta i per l'esquerra què has dit abans. A la pregunta c , a què s'aproxima la funció contestes a 1 i a -3 , per què?

EST120: Perquè quan he substituït primer en la de dalt em donava 0.8 , i d'ahi no arribava, i en els valors positius a 1.02 , 1.002 , i aleshores s'anava aproximant molt a 1 . Després quan he substituït en la de baix em donava -2.8 , i -3.02 , aleshores he arribat a la conclusió que s'anava aproximant al -3 .

Inv: Després en la pregunta e , escrius alguna cosa, i acaben escrivint que "*no tiene límite en $x=0$* ", perquè dones eixa resposta?

EST120: ..., ací m'hauria equivocat, jo crec que si que tindria límit, jo crec que el límit seria 0 .

Inv: En x igual a 0 .

EST120: Noestic segur, però els límits podrien haver sigut 1 i el 3 . No sé, ara mateixa estic una mica dubtós. Fa un any que ho vam veure, i ara estem començant. Però l'estudi de funcions encara no l'hem començat.

Inv: En aquestos moments no recordes per què havies escrit "*no tiene límite*" en $x=0$?

EST120: No, ho hauria de mirar.

Inv: Mira ho bé, no tinc pressa. No ens preocupa res.

EST120: Jo crec que el límit seria 1 i -3 . Podria ser, perquè quan ací substituïm quan $x=0$, és 2 per 0 que és 0 , més 1 que és 1 , i en el -2 per 0 dona 0 , i -3 , aleshores eixe podria ser 1 i -3 .

Inv: Podries escriure ho una mica més formal

EST120: El límit de $f(x)$ en $x=0$, tindria límit entre 1 i -3 .

05:07

Inv: Passem a la tasca 7. Contestes la pregunta a , contestes la b . En la pregunta b , podries dir-me quan respons 15 , on estàs mirant?

EST120: A veure, quan x ..., segons se va aproximant per ací al 4 .

Inv: Per ací, per on?

EST120: La x va aproximant-se.

Inv: Ací on has posat el dit.

EST120: 3.9 , 3.99 , 3.999 , i aquí com estava el punt sense agafar vol dir que aquí no existeix el valor, aleshores estaria aquí, que seria en el 15 .

Inv: En el 15 .

EST120: I en el 15 començaria en el punt sense agafar.

Inv: I quan respons la pregunta *b*?

EST120: Sí, aquí en 4.1 també s'aproximaria al 15, perquè se va aproximant a 4, i aleshores en el 4 no pot ser.

Inv: Sí, però aquí et pregunten per la funció. La funció a quin valor s'aproxima? La x s'aproxima a 4, correcte, però la funció a què s'aproxima?

EST120: A 15, que seria la y . Jo crec, ..., no sé.

Inv: Ho preguntaré d'una altra manera? Quan la x val 4.1, la funció més o menys quant val?

EST120: Es va aproximant a 10, però com està sense agafar no pot arribar el 4 al 10, perquè hi ha un bot, és una funció a trossos.

Inv: Sí, sí, correcte.

EST120: I jo crec que s'aproximaria a 15 la y .

Inv: D'acord. Passem a la tasca 6. Respons la pregunta *a*, i dius que la x s'aproxima a 4. On estàs mirant?

EST120: Perquè et van donant els valors pròxims al 4, tant a l'esquerra com a la dreta. 3.9, 3.99, 3.999, 3.9999, i per l'altre costat ens dona valors també molt pròxims a 4, com 4.001,

Inv: Per això dius que la x s'aproxima a?

EST120: A 4.

Inv: Després en la pregunta *b* respons que la funció s'aproxima a 15.

EST120: Sí.

Inv: Com ho fas, on mires?

EST120: Doncs, mire a l'esquerra i a la dreta, i els valors.

Inv: Dis-me algun valor.

EST120: El més pròxim que ens dona és 15.50001.

Inv: A quin número s'aproxima això?

EST120: A 15. I per l'altre costat està 14.003, 14.0003...

Inv: I a quin número s'aproxima això?

EST120: ... està pròxim a 14, però l'interval entre els dos seria el 15, crec jo.

Inv: Torna a mirar els números per l'esquerra, per favor, de la funció. Dis -me'n algun en veu alta.

EST120: 15.530, 15.5254.

Inv: A quin valor s'aproximen?

EST120: A 15.5.

Inv: A 15.5, per l'esquerra, i per la dreta?

EST120: A 14.

Inv: A 14.

EST120: Jo crec que seria el 15 més o menys, o 14.75 si el posem en un interval mig.

Inv: D'acord, i moltes gràcies.

