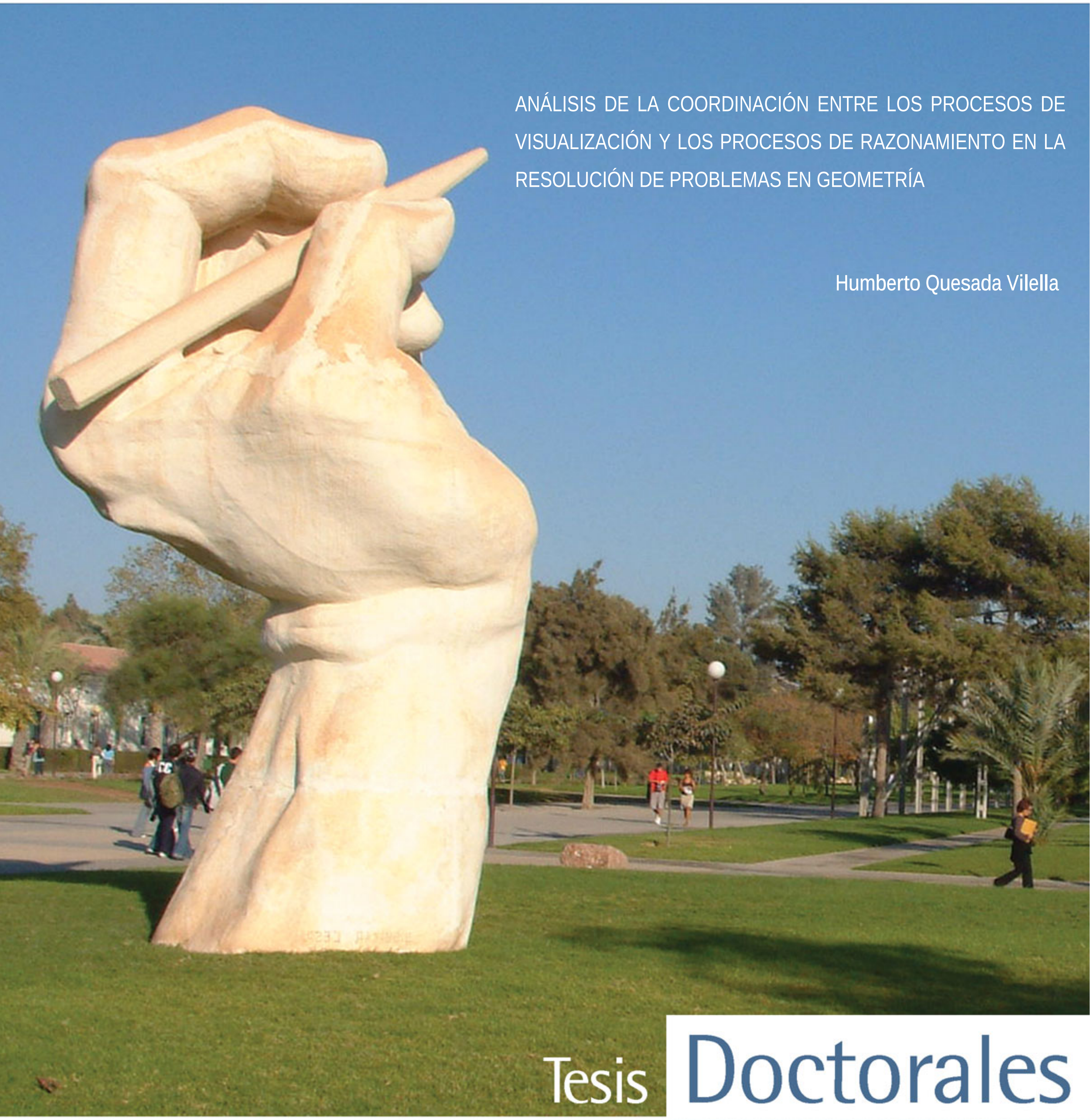
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



ANÁLISIS DE LA COORDINACIÓN ENTRE LOS PROCESOS DE VISUALIZACIÓN Y LOS PROCESOS DE RAZONAMIENTO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN GEOMETRÍA

Humberto Quesada Vilella

Tesis Doctorales

www.eltallerdigital.com

UNIVERSIDAD de ALICANTE

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

DEPARTAMENTO DE INNOVACIÓN Y FORMACIÓN DIDÁCTICA

ANÁLISIS DE LA COORDINACIÓN ENTRE LOS PROCESOS DE VISUALIZACIÓN Y LOS PROCESOS DE RAZONAMIENTO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN GEOMETRÍA

Tesis Doctoral

Humberto Quesada Vilella

Alicante, 2014

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

ANÁLISIS DE LA COORDINACIÓN ENTRE LOS PROCESOS DE VISUALIZACIÓN Y LOS PROCESOS DE RAZONAMIENTO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN GEOMETRÍA

Memoria que presenta Don Humberto Quesada Vilella para optar al grado de doctor

Fdo. Humberto Quesada Vilella

Realizado bajo la dirección del Dr. Don Germán Torregrosa Gironés

Fdo. Dr. Germán Torregrosa Gironés

Alicante, Octubre de 2014

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al director de esta Tesis, Dr. Don Germán Torregrosa Gironés, por su constante ayuda, por su paciencia, por su rigor y su contribución científica, y sobre todo por el apoyo personal y académico que me ha ofrecido, sin los cuales esta Tesis no se podría haber realizado. Muchas gracias por todo. Agradezco al Dr. D. Salvador Llinares Ciscar por sus comentarios durante la elaboración de esta memoria, que han contribuido a la mejora de su redacción. También agradecer a cada uno de los miembros del Departamento por todo su esfuerzo, tiempo y ayuda que me han dedicado en todos los seminarios compartidos.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

Esta investigación tiene como objetivo el estudio del comportamiento de los estudiantes para maestro ante la tarea de resolver problemas de probar en geometría. La amplitud del tema aconseja acotar el estudio a los procesos cognitivos que evidencian los estudiantes en sus producciones semióticas, que hemos obtenido como respuesta a la resolución de una colección de problemas geométricos de probar.

La resolución de problemas de geometría es uno de los objetivos prioritarios y un tema central para la construcción del conocimiento matemático en los procesos de enseñanza y aprendizaje, siendo una actividad cognitiva fundamental para la práctica educativa. En Didáctica de las Matemáticas, han aparecido durante los últimos años teorías cognitivas usando términos similares pero que no tienen el mismo significado. Conceptos tales como visualización, capacidad espacial, razonamiento geométrico, pensamiento espacial, visión espacial… A partir de 1991, en los *Proceedings of the 15th PME Internacional Conference* en Assisi (Italia), el término de visualización aparece como una categoría separada entre la lista de tópicos del congreso. Presmeg (2006) realiza un recorrido del concepto de la visualización desde sus orígenes en el PME hasta nuestros días observando el creciente interés que ha ido adquiriendo, siendo la visualización un término significativamente controvertido. En esta investigación se pretenden revisar algunos de estos conceptos utilizados para describir y caracterizar los procesos cognitivos que intervienen y desarrollan los estudiantes cuando resuelven problemas de probar en geometría.

El estudio de la resolución de problemas en geometría ha producido una diversidad de modelos teóricos que han servido para avanzar en el estudio de los procesos cognitivos que intervienen en el desarrollo de las capacidades geométricas (Bishop, 1983, 1989; Presmeg, 1986a, 1986b, 2006; Fischbein, 1987, 1993; Del Grande, 1990; Dörfler, 1991; Zazkis et al., 1996; Hershkovitz, 1996; Gutiérrez, 1996; Duval, 1998; entre otros).

En general, los modelos de Piaget, Presmeg y Dörfler, se han centrado en construir una clasificación de las distintas imágenes mentales. En estas clasificaciones los autores describen procesos o ciertas acciones que pueden modificar en un sentido amplio la imagen mental o su representación. Estas acciones son de especial interés para nuestra investigación. Comenzaremos haciendo referencia a los trabajos realizados por Piaget e Inheler (1971), Presmeg (1986b), Bishop (1983, 1989) y Dörfler (1991), en los que definen el concepto de imagen mental y describen distintas acciones cognitivas que permiten la identificación, la modificación y la manipulación de las imágenes mentales y de sus representaciones externas. Estos trabajos han originado estudios posteriores centrados en los procesos cognitivos, generando modelos integradores entre imágenes mentales, procesos y habilidades como el de Gutiérrez (1996). A partir de la teoría cognitiva de Duval (1998), en esta investigación proponemos un modelo para caracterizar la coordinación entre los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas de geometría, que permita identificar posibles causas por las que la coordinación no se da o se interrumpe en el proceso de resolución de problemas. En particular, para dar cuenta de cómo interviene la visualización y el razonamiento en la resolución de problemas de geometría.

Pretendemos obtener respuesta a las siguientes cuestiones:

- Identificar y caracterizar los procesos cognitivos que los estudiantes desencadenan a la hora de resolver problemas de probar en geometría.
- Caracterizar cómo interactúan los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de un problema de probar en geometría.

La investigación está ligada al análisis y estudio de los procesos cognitivos que evidencia el estudiante a la hora de resolver problemas de probar en geometría. El conocimiento de dichos procesos y sus relaciones van a servir para comprender las acciones que realiza. Según Gutiérrez (2005, p. 28):

> *"La principal dificultad está en la necesidad que tenemos de conocer lo que pasa por la cabeza de los estudiantes cuando están envueltos en una actividad matemática, cuáles son sus procesos de razonamiento, cómo analizan y transforman la información que nos llega del exterior, cuándo y cómo toman decisiones, etc. Todo ello para tratar de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje".*

La definición y caracterización de los procesos de visualización y razonamiento es un avance en esta línea de conocimiento, separando la acción cognitiva (el proceso) de las distintas representaciones e imágenes mentales. En particular, entendemos que la caracterización de los procesos de visualización y de razonamiento junto con el estudio de la coordinación de ambos procesos cognitivos es una puerta de entrada hacia el razonamiento deductivo y es de gran importancia para la resolución de los problemas geométricos. Según Arcavi (1999) la visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino que es también reconocida como una componente clave del razonamiento (profundamente unida a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo), a la resolución de problemas e incluso a la prueba. Por ello, consideramos los procesos de visualización y de razonamiento, y su coordinación, elementos esenciales de un modelo conceptual que nos ayuda a conocer la actividad de los estudiantes. Es decir, en la línea abierta por Bishop (1983), para conocer, en la medida de lo posible, la actividad matemática que desarrollan, cuando se enfrentan a la resolución de problemas en geometría.

La importancia de esta línea de investigación radica en el hecho de que si nos aproximamos a una interpretación de los procesos cognitivos que están involucrados en la resolución de los problemas geométricos, podemos intervenir mucho más eficazmente en el aprendizaje geométrico de los alumnos, y por tanto en su aprendizaje matemático en general, pues contaremos con una mayor comprensión de sus respuestas que nos ayudará a establecer pautas de actuación ajustadas a sus necesidades.

Estructuramos el contenido de esta memoria en 5 capítulos:

Capítulo 1: EL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN
Capítulo 2: MARCO TEÓRICO
Capítulo 3: DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN
Capítulo 4: RESULTADOS
Capítulo 5: DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el primer capítulo mostramos el contexto en el que situamos la investigación, resaltando los antecedentes en los que se apoya el estudio y la línea de investigación adoptada. El punto de partida es una aproximación al concepto de imagen mental y sus diversas clasificaciones realizadas. En estas clasificaciones observamos acciones de modificación que pueden realizarse sobre las imágenes mentales. A continuación describimos los procesos cognitivos, las habilidades geométricas y el concepto de representación. Estos cuatro elementos son necesarios para comprender nuestra idea de visualización.

En el segundo capítulo desarrollamos el marco teórico, adoptando las ideas y precisando los elementos pertinentes para el avance de la investigación. La parte final del capítulo está dedicada a describir los objetivos que se plantean en la investigación.

El tercer capítulo está dedicado al diseño de la investigación. En este apartado indicamos los participantes, el cuestionario y los datos utilizados, que consisten en las respuestas a una colección de problemas geométricos en los que se demanda la construcción de una prueba deductiva. También se exponen cómo hemos puesto en funcionamiento los elementos del marco teórico para desarrollar un esquema de análisis en el estudio de los distintos protocolos, para posteriormente explicar cómo se realizan los análisis a las respuestas dadas por los estudiantes para maestro.

En el cuarto capítulo se presentan los resultados obtenidos. Estas aportaciones nos permitirán la construcción de un modelo que explique razonablemente la coordinación entre los procesos cognitivos que evidencian los estudiantes.

En el quinto y último capítulo de esta investigación, realizamos la discusión de los resultados obtenidos y las conclusiones finales. Asimismo reflexionáremos sobre las posibles líneas de investigación futuras y cuestiones abiertas.

Finalizamos la memoria con las referencias bibliográfícas utilizadas en nuestra investigación.

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN

En el ámbito de la Educación Matemática y en particular en la resolución de problemas de geometría es de creciente interés el estudio de la visualización y los procesos cognitivos vinculados a la resolución de problemas de probar. En este primer capítulo describimos las ideas que sitúan a la visualización como un elemento fundamental del desarrollo cognitivo del alumno, siendo una puerta de entrada hacia la comprensión de los conocimientos geométricos.

Comenzamos este capítulo caracterizando tres conceptos básicos en el aprendizaje de la geometría como son las imágenes mentales, los procesos cognitivos y las habilidades, necesarios para comprender la idea de visualización. Cada uno de estos conceptos ha generado una amplia literatura en Didáctica de la Matemática. Posteriormente caracterizamos la idea de visualización y cómo ha ido concretándose hasta nuestros días. Terminamos el capítulo estudiando el concepto de representación como un elemento relevante para la Didáctica de la Matemática y estrechamente relacionado con la visualización.

1.1 Imágenes, Procesos y Habilidades

Preguntarnos por el significado de algo, ya sea una experiencia, una teoría, una palabra o un problema matemático, equivale a profundizar y reflexionar en la comprensión que de ello tenemos. Pero esta reflexión puede conducir a cada individuo a retener en su memoria tanto contenidos semánticos (significado de las palabras, conceptos sobre el mundo en el que vive, conocimientos especializados, etc.) como habilidades y destrezas (patinar, montar en bicicleta, resolver problemas, etc.).

Según Gutiérrez (1992) el elemento básico en las concepciones de percepción visual son las imágenes mentales, es decir representaciones mentales que las personas podemos hacer de los objetos físicos, de las relaciones, de los conceptos, etc. Diferentes estudios identifican y clasifican los tipos de imágenes mentales. Para Piaget e Inhelder (1971) las imágenes mentales son entendidas como la interiorización de los actos de la inteligencia y las clasifican en dos categorías que llamaron "reproductivas" (R) y "anticipatorias" (A).

Reproductivas (R) son imágenes mentales que representan mentalmente sucesos y objetos ya conocidos por las personas. Además las imágenes reproductivas se dividen en:

- Estáticas (RS), representan objetos estáticos o configuraciones inmóviles (una mesa, un hexágono o una línea recta).
- Cinéticas (RK), que evocan, en sentido figurado, movimiento (el balanceo de un péndulo o el movimiento de dos móviles que se cruzan a velocidad constante).
- Transformadas (RT), representan cuerpos que, por el movimiento, cambian su forma y no únicamente su posición (transformación de un arco en una línea recta o la división de un cuadrado en dos rectángulos).

Anticipatorias (A) son imágenes mentales que se dan cuando una persona representa objetos o sucesos que no ha percibido previamente. Estas imágenes también pueden ser clasificadas según suponga un cambio en la posición o en la forma en:

- Cinéticas (AK), estas imágenes representan sucesos u objetos que no son conocidos por el sujeto y evocan, en sentido figurado, movimiento.
- Transformadas (AT), imágenes mentales que representan cuerpos que, por el movimiento, cambian su forma y no únicamente su posición. Estas imágenes no son derivadas de objetos o sucesos percibidos previamente como son el caso de las imágenes reproductivas transformadas.

Piaget e Inhelder introducen además la actividad mental (P) y el proceso de modificación (M) como dos procesos mentales que ayudan a refinar aún más la clasificación anterior. La clasificación obtenida se representa gráficamente (figura 1.1) y en ella se distinguen las tres fases de refinamiento.

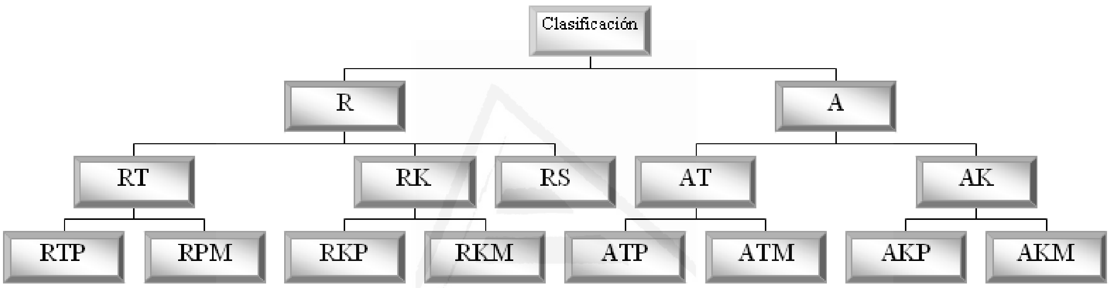


Figura 1.1. Clasificación imágenes mentales según Piaget e Inhelder.

Según Presmeg (1985), en la clasificación propuesta por Piaget e Inhelder hay celdas que no se pueden considerar disjuntas. En sus trabajos de 1985, 1986b, y 2006 define las imágenes mentales como un constructo mental que representa información espacial o visual y realiza una clasificación de las imágenes mentales, distinguiendo cinco tipos:

- *Imágenes concretas pictóricas*: se trata de imágenes figurativas de los objetos.
- *Imágenes de fórmulas*: consisten en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas.
- *Imágenes de patrones*: son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas. No se representa la relación propiamente dicha como en el caso anterior sino una representación gráfica de su significado.

- *Imágenes cinéticas*: se trata de imágenes que tienen una parte física y una parte mental, ya que en ellas tiene un papel importante el movimiento de las manos, cabeza, etc.
- *Imágenes dinámicas*: son imágenes mentales en las que los objetos o alguno de sus elementos se desplazan.

Al igual que Piaget e Inhelder introdujeron los procesos de actividad mental y de modificación para completar y mejorar la clasificación inicial, se puede considerar que en el trabajo de Presmeg, las imágenes cinéticas y dinámicas amplían el significado de las imágenes pictóricas, patrones y fórmulas. En ellas se introducen procesos cognitivos, entendidos como acciones, relacionados con la transformación o modificación de las imágenes mentales. Consideramos que ambas clasificaciones pueden compararse, incluso encontrar semejanzas entre las distintas categorías de imágenes mentales.

Un tercer tipo de clasificación de las imágenes mentales lo propone Dörfler (1991). Partiendo de la teoría cognitiva de Johnson (1987) y Lakoff (1987) define lo que ha llamado "imagen schemata" (que traducimos como imagen esquemática), estructura cognitiva que representa las principales características o procesos de aquello a lo que potencialmente se refieren las palabras. Dörfler distingue cuatro categorías de imágenes esquemáticas:

- *Figurativas*: son los esquemas puramente perceptivos, como por ejemplo los círculos, cuadrados, o los polígonos.
- *Operativas*: que se caracterizan por el movimiento, como el caso de las imágenes que realizan un giro central o una simetría axial.
- *Conectadas*: como el caso de varias imágenes relacionadas entre ellas y transformadas o movidas. Estas imágenes se compones de imágenes figurativas y de imágenes operativas.
- *Simbólicas*: fórmulas con símbolos y relaciones espaciales como el teorema de Pitágoras generalizado al espacio: $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ donde a, b, c son las dimensiones de un paralelepípedo y x la dimensión de la diagonal de mayor longitud.

Dörfler (1991) sugiere que la manipulación en el ámbito cognitivo de los conceptos matemáticos se facilita, en gran medida, por la construcción y disponibilidad de imágenes esquemáticas adecuadas. La construcción de significado para una idea matemática depende de la construcción de las anteriores imágenes.

Un punto de especial interés en estas tres clasificaciones es la necesidad de manipular, o transformar, las imágenes mentales mediante procesos cognitivos con el fin de explicar las distintas modificaciones que pueden sufrir. Estas modificaciones se producen en el mismo registro de representación y son importantes para nuestra investigación. En los primeros artículos de Bishop (1979, 1980) estos procesos cognitivos aparecen como procesos independientes, separados de las imágenes mentales, al introducir las ideas de los procesos VP (procesamiento visual) e IFI (interpretación de información figurativa). Posteriormente, Bishop (1989) distingue entre procesos de visualización y las imágenes mentales en el ámbito de la educación matemática.

Bishop (1989) identifica las imágenes mentales (físicas o mentales) como los objetos que se manipulan en la actividad de la visualización, manipulación que se realiza según dos procesos cognitivos, el procesamiento visual y la interpretación de información figurativa:

- *Procesamiento Visual (VP):* Es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y también el proceso de transformación de imágenes visuales ya formadas en otras.
- *Interpretación de información figurativa (IFI):* es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contiene.

Ambos procesos no sólo desarrollan modificaciones de las imágenes mentales sino que pueden generar transformaciones de las imágenes mentales en los distintos registros en las que son representadas. Consideramos que el procesamiento visual (VP) es un proceso importante para el desarrollo cognitivo, en especial para el desarrollo de las matemáticas, y que involucra a su vez dos procesos totalmente diferentes: el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales, y el proceso de transformación de imágenes visuales ya formadas en otras. No podemos considerar el proceso interpretación de información figurativa (IFI) como el inverso del procesamiento visual (VP), al menos con estas definiciones propuestas por Bishop. Con el proceso de interpretación de información figurativa extraemos información que contienen las representaciones visuales pero no rehacemos las manipulaciones o transformaciones que han sufrido las imágenes mentales. Es en este sentido en el que afirmamos que no son dos procesos contrarios. Según Bishop (1989) se debe fomentar el uso de las imágenes mentales teniendo en cuenta que el profesorado ha de ser consciente de los distintos procesos de visualización. La idea de que el profesorado ha de ser consciente de estos procesos que intervienen en la actividad geométrica es relevante para nuestra investigación y justifica la búsqueda, descripción y caracterización de dichos procesos. Bishop resalta la importancia de los procesos cognitivos en relación con la visualización por ser un objetivo necesario para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En los párrafos anteriores se han expuesto tres clasificaciones de imágenes mentales sobre las cuales podemos observar ciertos procesos cognitivos que pueden modificar o transformar las imágenes mentales. Piaget e Inhelder identifican la actividad mental (P) o el proceso de modificación (M) para completar el refinamiento de su clasificación, Dörfler señala en su clasificación la imagen esquemática operativa como un proceso que produce la movilidad de las imágenes, y Presmeg con las imágenes cinéticas y dinámicas que implican movimiento de las imágenes. Resaltamos la importancia que tienen estos procesos y los introducidos por Bishop (1983), el procesamiento visual y interpretación de información figurativa, en los que amplia el concepto de transformación de las imágenes mentales no a un solo registro de representación. Los autores citados describen acciones sobre las imágenes mentales, aunque unos las llamen habilidades, procesos o los consideren una clase particular de imagen mental, en nuestro estudio lo consideramos procesos cognitivos que modifican o transforman las imágenes mentales.

Uno de los objetivos que pretendemos es describir distintos procesos cognitivos que podemos identificar a través de las acciones que realiza el alumno, cuando resuelve problemas de geometría. Gutiérrez (1992) distingue tres componentes básicos de la visualización; *las imágenes mentales*, en el sentido de las clasificaciones de Piaget e Inhelder (1971), Presmeg (1986) y Dörfler (1991); *los procesos cognitivos* mencionados en Bishop (1983 y 1989), con los cuales el resolutor actúa sobre las imágenes mentales (moviendo, extrayendo e introduciendo elementos en la configuración, es decir, modificando la imagen mental), y *las habilidades* utilizadas por los individuos para la creación y procesamiento de imágenes.

Consideramos importante la distinción entre habilidades y procesos realizada por Gutiérrez (1992, 1996). Este autor indica que la descripción de un proceso incluye información sobre la acción a realizar, y ello es independiente de la forma en que se realice. Gutiérrez define un proceso como una acción física o mental donde las imágenes mentales están involucradas. Además, propone un ejemplo de la distinción entre habilidades y procesos mediante la rotación mental de una imagen. Esta rotación transforma una imagen en otra que representa al mismo objeto en una posición distinta. La manera de hacerlo varía si la rotación se hace en dos o tres dimensiones, con el eje interior o exterior al objeto, etc., lo que da lugar al uso de diferentes habilidades.

Según Gutiérrez para adquirir las habilidades de la visualización y del razonamiento que intervienen en la resolución de problemas geométricos, se debe tener en cuenta algunos procesos cognitivos como los descritos por Bishop. Los conceptos en geometría no pueden ser entendidos por los estudiantes a menos que puedan percibir visualmente ejemplos o identificar figuras y propiedades por asociación con conocimientos previos. Krutetskii (1976) proporciona una lista general de las habilidades que intervienen en la resolución de un problema: percepción de un problema, generalización, secuenciación del razonamiento lógico, adaptación de procesos de razonamiento, flexibilización del pensamiento, búsqueda de elegancia en la resolución, reversibilidad de los procesos mentales y memoria matemática. Una relación más detallada de las habilidades que pueden realizar los alumnos a la hora de resolver problemas nos la proporciona Del Grande (1990):

- La coordinación motriz de los ojos que consiste en la habilidad de seguir con los ojos el movimiento de los ojos de forma ágil y eficaz.
- La identificación visual es la habilidad de reconocer una figura aislándola de su contexto.

- La conservación de la percepción que consiste en la habilidad de reconocer un objeto aunque deje de verse total o parcialmente.
- El reconocimiento de posiciones en el espacio es una habilidad ligada a la relación que puede darse entre un objeto y el observador o con otro objeto que actúa como punto de referencia.
- El reconocimiento de las relaciones espaciales nos permite identificar correctamente las relaciones existentes entre objetos situados en el espacio.
- La discriminación visual y la memoria visual nos permiten comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.

Difícilmente se puede identificar la "frontera" de estas componentes de la visualización, es decir, dónde empieza y acaba una imagen mental, un proceso o una habilidad. A pesar de que han sido definidas cada una de estas componentes por Piaget et al. (1971), Bishop (1983) y Presmeg (1986) entre otros, el propio concepto de visualización ha dificultado la unanimidad de estas definiciones. Veamos la dificultad que conlleva el concepto de visualización junto con una breve evolución histórica y algunos de los términos que han sido utilizados como semejantes y han originado una amplia discusión.

Teniendo presente que en esta investigación nos centramos principalmente en los procesos cognitivos relacionados con la visualización, hemos considerado los procesos cognitivos como herramientas cognitivas que utiliza el estudiante para resolver los distintos problemas matemáticos.

1.2 Visualización

En la literatura revisada, conceptos básicos como visión, capacidad espacial, razonamiento geométrico, pensamiento espacial, visión espacial… no tienen el mismo significado, a pesar de que utilizan terminología parecida. Todo ello añade dificultades a la búsqueda de una definición de visualización y por ello en este capítulo analizamos el concepto de visualización desde una perspectiva general, observando cómo su significado ha ido acotándose hasta nuestros días.

El Diccionario de la Real Academia Española (2001) define la visualización como acción y efecto de visualizar. Y para el término "visualizar" da tres acepciones:

- Representar mediante imágenes ópticas fenómenos de otro carácter.
- Formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto.
- Imaginar con rasgos visibles algo que no se tiene a la vista.

Ninguna de estas acepciones es suficientemente completa y específica para ser desarrollada en el contexto de la geometría, por lo que consideramos que es necesario mostrar significados relevantes sobre el concepto de visualización que aparecen en la literatura de Didáctica de la Matemática.

Para Bishop *"la visualización no solo es importante por sí misma, sino también por el tipo de procesos mentales que intervienen, que son necesarios y se pueden transferir a otras áreas de las matemáticas"* (1983, p. 177).

Según Fischbein (1987, 1993) las representaciones visuales, es decir las representaciones externas de las imágenes mentales, contribuyen a la organización de la información de manera esquemática y son un factor importante de globalización, siendo además elementos que guían el desarrollo analítico de la solución. La representación es una componente crucial en el aprendizaje de los conceptos geométricos. Por otra parte, una imagen visual es un factor esencial para crear la sensación de auto-evidencia e inmediatez. Además, distingue tres categorías de entidades mentales cuando se refiere a figuras geométricas: la definición, la imagen (basada en la experiencia perceptiva-sensorial, como la imagen de un dibujo) y el concepto figural. El concepto figural debe ser entendido como entidad mental, siendo un constructo manejado por el razonamiento matemático en el dominio de la geometría. El término figura lo entiende como una imagen mental cuyas propiedades son controladas completamente por la definición, y la imagen mental de una figura es, usualmente, la representación interna o mental de su modelo materializado. Fischbein distingue entre las figuras que están ancladas a ciertas definiciones (figuras) y las que no lo están (imágenes mentales). Además, realiza cinco consideraciones para entender el papel del dibujo como representación particular y el de las entidades mentales:

1. Los objetos físicos, es decir los dibujos, solo son modelos materializados de las entidades mentales con las que el matemático trata.
2. Solo en un sentido conceptual uno puede considerar la perfección absoluta de las entidades geométricas: líneas rectas, círculos, cuadrados, cubos...
3. Las entidades geométricas no tienen correspondencia física congruente. Los puntos (objetos cero dimensionales), las líneas (objetos unidimensionales) y los planos (objetos bidimensionales) no existen, no pueden existir en realidad. Los objetos reales de nuestra experiencia práctica son necesariamente tridimensionales. Pero incluso el cubo o la esfera a los que el matemático se refiere no existen en realidad, aún siendo tridimensionales.
4. Todos estos constructos son representaciones generales como todo concepto, y nunca copias mentales de objetos particulares y concretos. Cuando se dibuja un cierto triángulo ABC en una hoja de papel para verificar alguna propiedad, no hacemos referencia al dibujo particular sino a una cierta forma que puede ser la forma general de una clase infinita de objetos.
5. Las propiedades de las figuras geométricas son impuestas o derivadas por las definiciones dadas en el dominio de un cierto sistema axiomático. Es decir un cuadrado puede ser visto como cuatro rayas en un papel o estar anclado a alguna definición; un cuadrado es un rectángulo que tiene cuatro lados iguales. Es en este sentido en el que Fischbein distingue entre una figura o dibujos anclados a definiciones matemáticas o no anclados a estas afirmaciones. Una figura geométrica puede ser descrita como "*poseedora"* de propiedades intrínsecamente conceptuales. En nuestro estudio la figura puede estar anclada a unas definiciones y ser dotadas de ciertas propiedades a través de las definiciones pero siempre este proceso de anclaje es una acción que realiza el resolutor sobre la figura.

Hershkowitz, (1990) afirma que la visualización, generalmente, se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual. Para Zimmerman y Cunningham (1991) es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con la ayuda de tecnología) y usar tales imágenes para el descubrimiento y el conocimiento matemático.

En los últimos años, la visualización ha adquirido una gran importancia en el campo de la Geometría. Los términos utilizados para definir el proceso se han concretado. La visualización es entendida como *“acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos”* (Zazkis et al., 1996, p. 441). Si bien Hershkowitz et al. 1996, p. 163, indican: *“se entiende visualización como la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual o viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra”*.

Para Alsina et al. (1997), visualizar es tener la capacidad de producir imágenes que ilustren o representen determinados conceptos, propiedades o situaciones, y también es la capacidad de realizar ciertas lecturas visuales a partir de determinadas representaciones. De este modo entiende visualización como dar forma mental o física a determinados conceptos y procedimientos matemáticos, no necesariamente figurados. Esto es, el asociar una imagen figurada de un concepto o procedimiento.

Plasencia (2000) define el término visualizar como *“los procesos que están involucrados cuando las personas construyen, transforman y relacionan imágenes mentales visuales, y en los que la mente tiene un papel activo, por ejemplo, rotando, trasladando o trasformando la imagen, además de los usados al dibujar figuras o diagramas o construir y manipular figuras en el ordenador”.* Un ejemplo que puede ilustrar esta concepción de visualización es la recogida en Plasencia (2000): Imaginemos un paseo por la playa; este paseo puede ser realizado o no, es decir, podemos construir ese paseo mentalmente o recordar un paseo realizado. Imaginando el paseo podemos:

- Sentir la arena en nuestros pies, el frescor del aire en la cara (sentido del tacto).
- Oír el sonido del mar (sentido auditivo).
- Oler una violeta (sentido del olfato).
- Ver la playa, las montañas, el paisaje (sentido visual).
- Saborear el pescado de un determinado bar (sentido del gusto).

También el sabor y el olor de la imagen visual de una comida sabrosa pues es una combinación de las anteriores.

Para Arcavi (2003) la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, de la interpretación, del uso y de la reflexión sobre las figuras, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, reflexionando sobre el desarrollo de ideas previamente desconocidas y el conocimiento avanzado.

Las descripciones anteriores determinan una convergencia de los distintos significados de visualización con el ofrecido por Hershkowitz et al. (1996). En particular a la idea de transferencia de "algo" mental hacia "algo" físico o viceversa. Para poder utilizar la idea de transferencia debemos resaltar al menos dos elementos fundamentales de la teoría cognitiva, las imágenes mentales (las cuales llamaremos figuras) y las representaciones de las mismas (dibujos). Estos dos conceptos están fuertemente relacionados en matemáticas, de manera que muchas veces, a menos que reflexionemos y profundicemos en ello, nos movemos de manera inconsciente de unas a otros. Para Duval (1995), comprender los procesos cognitivos involucrados en el estudio de la geometría, y en particular el proceso de visualización, implica considerar la diferencia entre el concepto de dibujo y el de figura, puesto que hay que distinguir entre el objeto representado y su representación. Por ejemplo, en el contexto de la geometría dinámica una figura es un objeto geométrico abstracto caracterizado por las propiedades matemáticas derivadas de los elementos y las herramientas usadas para su creación. Un dibujo es una representación particular en la pantalla de una figura (Laborde y Capponi, 1994). Una figura no se refiere a un objeto sino a una infinidad de objetos y las interpretaciones de un mismo objeto son múltiples tanto por las interpretaciones del lector y sus conocimientos como por la naturaleza misma del dibujo.

En este sentido, Fischbein (1993) afirma que *"los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, […], que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales – como idealidad, abstracción, generalidad, perfección*" (p. 143).

Por ello, en esta investigación consideramos *figura* como la imagen mental de un objeto físico. Cuando hablamos de *dibujo* entendemos como la representación gráfica de una figura, es decir, la representación gráfica en sentido amplio, ya sea sobre un papel, el ordenador o un modelo físico. Si una figura representa un objeto matemático, debe cumplir los siguientes requisitos específicos:

1. Ser una configuración. Esto es, ser un conjunto de conjuntos de puntos, que llamamos subconfiguraciones constituyentes, con relaciones entre ellos que caractericen la configuración.

2. Estar ligada a alguna afirmación que fije alguna propiedad representada por la configuración. Esta afirmación pueden proporcionar la puerta de entrada de la matemática en la configuración.

La importancia de las figuras y de sus representaciones, dibujos, radica en el hecho de que son un soporte intuitivo para desarrollar la actividad geométrica, es decir, permiten verificaciones subjetivas, ilustraciones de afirmaciones matemáticas, posibilitan el trabajo con afirmaciones matemáticas de manera sinóptica y permiten la exploración heurística de situaciones complejas. Laborde (1998) afirma que para los alumnos, que empiezan a aprender geometría, puede ser interesante presentar los objetos geométricos como algo diferente de los dibujos, pero también como algo relacionado con ellos. La geometría puede aparecer como una herramienta para explicar, producir o predecir el comportamiento del dibujo. La enseñanza puede tratar de conseguir que los alumnos aprendan a unir el fenómeno visual con los hechos geométricos, a reconocer visualmente propiedades geométricas, a interpretar dibujos en términos geométricos o a construirlos. Tal aprendizaje capacita a los alumnos para usar los dibujos o representaciones visuales de objetos como ayuda, a través de su conocimiento, para controlar la información que extraigan de las representaciones visuales. Por tanto, las representaciones cumplen un papel central en la adquisición, tratamiento y transformación de las imágenes mentales.

La codificación tradicional que adoptamos en esta investigación para las ilustraciones, esquemas, tablas, etc. consiste en el término “figura m.n” (donde m hace referencia al número del capítulo y n al orden que ocupa), no debe confundirse con la idea de “figura” (imagen mental de un objeto físico). Mantenemos esta denominación ya que se considera que el contexto no da lugar a confusión.

1.3 Representación

En Didáctica de la matemática se considera la noción de representación clave para entender el modo en el que los seres humanos conocen y comprenden. Para Gallardo y González (2005) *comprender* es sinónimo de responder o de elaborar y emitir una respuesta adaptada. Si un sujeto emite una respuesta adaptada, podemos decir que comprende en los términos de la situación o del problema propuesto. El término *conocer* tiene un significado más amplio, según Cuervo (1998) consiste en tener la idea o noción de alguna cosa; llegar a saber por el ejercicio de las facultades intelectuales la naturaleza, cualidades y relaciones de las cosas.

Diferentes investigadores han utilizado el término representación como elemento básico para la comprensión y adquisición del conocimiento matemático, siendo conscientes de la complejidad del significado de representación y del contexto utilizado por cada autor. Para Radford (1998) las representaciones matemáticas se entienden, en sentido amplio, como todas aquellas herramientas -signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas.

En su estudio sobre los sistemas de representación para el concepto de número racional, Behr et al. (1983) sostienen que las representaciones son consideradas como medios en la formación de la comprensión conceptual. Además diferencian entre representaciones transparentes y opacas. Una representación transparente no tiene ni más ni menos significado que las ideas o las estructuras representadas. Una representación opaca acentúa algunos aspectos de las ideas o de las estructuras y desacentúa otras. La capacidad de moverse entre varias representaciones del mismo concepto se considera como un indicativo de la comprensión conceptual y también como meta para la instrucción.

También Janvier (1987) proporciona algunos resultados que muestran la importancia de las representaciones y la necesidad de efectuar “un proceso de traducción” entre representaciones, concibiéndolo como una etapa importante en la construcción del concepto. Janvier desarrolla su teoría contextualizada en las dificultades sobre la comprensión del concepto de función basado en las representaciones básicas.

Kaput (1987) desarrolla la teoría de los sistemas de notación para explicar el uso de símbolos matemáticos, distinguiendo que cualquier concepto de representación implica dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas: el mundo representante y el mundo representado. Es decir símbolo y su concepto asociado son dos términos totalmente diferentes. Además Kaput señala esta dualidad y las dificultades que se derivan de ella. Así pues tenemos el objeto *representante* (símbolo o representación) y el objeto *representado* (concepto) y también está implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados. De esta manera, cualquier especificación particular de la noción de representación debiera describir, al menos, cinco entidades:

1. Los objetos representados.
2. Los objetos representantes.
3. Qué aspectos del mundo representado se representan.
4. Qué aspectos del mundo representante realizan la representación.
5. La correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.

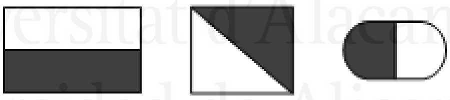
Según Kaput en buena parte de los casos importantes uno o ambos de los mundos pueden ser entidades hipotéticas e, incluso, abstracciones.

Duval (1993, 1995, 1999b) caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación siempre y cuando permita las siguientes tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis (aprehensión o producción de una representación):

1. La *identificación* de una representación. Constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles, que sean identificables, como la representación de alguna cosa en un sistema determinado.
2. El *tratamiento* de una representación, que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada. Es decir, se transforman las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
3. La *conversión,* que consiste en la transformación de una representación dada en un registro concreto a otra representación realizada en otro registro distinto.

Como ejemplo mostramos algunas representaciones semióticas en dos registros diferentes para la noción mitad de la unidad:

"Identifica cual es la mitad de la unidad":

- Registro aritmético: $\frac{1}{2}$, 0'5, 5.10^{-1}
- Registro pictográfico: 

Se observa un tratamiento al pasar de $\frac{1}{2}$ a 0,5, por ejemplo. Se observa una conversión al pasar de cualquier representación del registro aritmético a cualquier representación del registro pictográfico o viceversa.

Palarea y Socas (1994a, 1994b), resaltan la importancia de potenciar los registros geométricos, proponiendo una interacción entre las diferentes representaciones semióticas que se articulan en estrategias de enseñanza.

Diferentes autores señalan que en matemáticas, la asimilación conceptual de un objeto pasa necesariamente por la adquisición de una o más representaciones semióticas (Chevallard, 1991; Duval 1995; Godino y Batanero, 1994; D'Amore, 2006a, 2013). Y como sugiere Duval (1995), la construcción de los conceptos matemáticos depende, estrechamente, de la capacidad de usar diferentes registros de sus representaciones semióticas para:

- Representarlos en un registro seleccionado.
- Realizar un tratamiento de las representaciones en un mismo registro.
- Convertir tales representaciones de un registro dado a otro.

Por ello consideramos que estas tres actividades deben tener un papel relevante en la planificación y desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

1.3.1 Representación y Aprendizaje

Duval (1999b) insiste en la importancia del análisis semiótico en el ámbito matemático y cognitivo. Vuelve a los orígenes de la semiótica con el fin de sugerir motivaciones para el análisis de los signos, así como de las relaciones de semejanza, referencia, causalidad y oposición. Este foco de atención es útil tanto para el desarrollo de las matemáticas como para el análisis de su aprendizaje (D'Amore, 2006a). Para Duval tres ideas son clave para poder analizar la condición del aprendizaje:

- El carácter paradójico del conocimiento matemático: Los sistemas de representación semiótica para el pensamiento matemático son esenciales, ya que no hay otras maneras de acceder a los objetos matemáticos. Las representaciones semióticas son imágenes o descripciones sobre algunos fenómenos del mundo real externo, a los que no podemos tener un acceso perceptivo e instrumental sin estas representaciones. Si bien la comprensión de las matemáticas requiere no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones.

- El significado ambiguo del término "representación": Este término se usa frecuentemente referido tanto a entidades mentales como materiales. Duval distingue dos clases de representaciones cognitivas, las que son producidas intencionalmente usando cualquier sistema semiótico: oraciones, gráficos, diagramas, dibujos… su producción puede ser mental o externa. Y las que están automáticamente producidas por un sistema orgánico (las imágenes visuales del sueño o de la memoria) o por un dispositivo físico (reflexiones, fotografías…). Es decir la división básica no se toma como la distinción entre la representación mental (interna) y la representación externa, la cual es usada frecuentemente en las ciencias cognitivas, sino la que está entre la representación semiótica y la representación física/orgánica.

- La necesidad del uso de varios sistemas semióticos para la adquisición de los conceptos matemáticos: los objetos de las matemáticas, incluso los objetos más elementales en aritmética y geometría, no son directamente accesibles como los objetos físicos. Cada registro semiótico de representación tiene una manera específica de ser tratado y, en situaciones de resolución de problemas, la actividad matemática requiere la capacidad de cambiar el registro. Desde un punto de vista didáctico, solamente los estudiantes que pueden realizar el cambio de registro no confunden un objeto matemático con su representación y pueden transferir su conocimiento matemático a otros contextos diferentes.

Para enfatizar el carácter paradójico del conocimiento matemático, debido por un lado a los sistemas de la representación semiótica y por otro lado los objetos matemáticos, señalamos la paradoja de Duval (1995, p. 38):

> *“De una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual, y de otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos sólo pueden tener relación con las representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿cómo pueden ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados con las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifican actividades matemáticas y actividades conceptuales y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas.”*

Para asimilar y conocer tanto los objetos matemáticos como los distintos procesos cognitivos que los estudiantes realizan cuando interactúan con ellos, es necesario considerar el desarrollo de las distintas representaciones semióticas con distintos tratamientos de cada registro y diferentes conversiones que pueden darse entre los registros de representación. De ahí la importancia del uso de las representaciones para la visualización.

1.3.2 Visión, Visualización y Representación

Para Duval (1999b) la "visión" se refiere a la percepción visual y, por extensión, a imágenes visuales. Distingue entre visión y visualización. La visión proporciona un acceso directo al objeto, la visualización se basa en la producción de una representación semiótica:

> *"La percepción visual necesita la exploración a través de los movimientos físicos porque nunca da una aprehensión completa del objeto. Por el contrario, la visualización puede conseguir inmediatamente una aprehensión completa de cualquier organización [...] la visualización puede hacer visible todo lo que no es accesible para la visión. La visualización se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica, es decir, ni mental ni física. Además en matemáticas es necesaria porque exhibe la organización de relaciones, pero no es primitiva, no es una mera percepción visual"* Duval (1999b, pp. 13-14).

La visualización es una actividad cognitiva compleja y que puede venir desencadenada por factores que ayuden o por el contrario inhiban esta visualización. Autores como Poincaré (1902), Padilla (1990), Cordier y Cordier (1991), Duval (1995), Mesquita (1998), entre otros, han incidido en los factores que inhiben la visualización. Es decir, factores que aumentan las dificultades que tienen los alumnos para reconocer el papel que desempeña la configuración (representación semiótica aplicada al contexto de resolución de problemas) y para la identificación de las subconfiguraciones relevantes para la resolución del problema. En particular, Mesquita (1998) muestra una amplia recopilación de las dificultades encontradas en el reconocimiento de las configuraciones relevantes que permiten la resolución de problemas geométricos. A continuación describimos algunos factores responsables de estas dificultades y sus características.

Para Poincaré (1902) el *espacio geométrico*, el espacio de los objetos geométricos, es muy diferente del *espacio representativo*, el marco de nuestras representaciones y sensaciones. Estos dos espacios tienen naturalezas muy diferentes y, consecuentemente, diferentes propiedades. Cuando representamos un triángulo o cualquier otro concepto geométrico, utilizando una hoja de papel u otro soporte, usamos un espacio representativo en vez de uno geométrico.

Según Mesquita (1989) una de las mayores dificultades de la representación externa es la que llama *doble estatus* de una representación. De hecho, al representar un concepto o situación geométrica, el trazo material o dibujo puede sugerir dos posibilidades diferentes:

- *Finitud*, en el sentido de formas finitas y diversificadas (Gestalt) en su espacio-temporalidad.
- Forma geométrica ("forma") en su *objetividad ideal* separada de las restricciones materiales vinculadas a la representación externa.

De esta manera una misma configuración puede ser entendida como un elemento particular con medidas concretas o como la representación del objeto ideal.

La tipicidad es una propiedad de elementos de una categoría y corresponde a la idea de que algunos elementos son "mejores" ejemplos que otros de la categoría a la que ambos pertenecen; esto es, hay ejemplos más típicos que otros. Por ejemplo, una silla con cuatro patas es más típica que otra con tres. En geometría ocurre lo mismo, un triángulo equilátero es más prototípico que un triángulo obtusángulo.

Las representaciones no tienen la misma función en todos los problemas geométricos. Podemos distinguir tres roles principales de una representación externa:

- *Papel descriptivo*: La representación externa ilustra las múltiples relaciones y propiedades que aparecen en el problema sin sugerir procedimientos de solución.
- *Papel ilustrativo*: La representación externa parece que no cumple las relaciones y propiedades que aparecen en el problema. La configuración no evidencia visualmente las propiedades que se le atribuyen en el enunciado del problema. Es

decir, no es posible extraer directamente de la representación externa una relación geométrica.

- *Papel heurístico*: La representación externa actúa como apoyo para la intuición, sugiriendo transformaciones que conducen a la solución del problema.

Estos roles hacen referencia a cómo el individuo percibe las distintas configuraciones. Pero las configuraciones poseen características que pueden despertar o inhibir en el alumno estas percepciones. Mesquita (1989), Padilla (1990) y Duval (1988, 1995) concretan en sus trabajos algunos factores que dificultan la visualización cuando resolvemos problemas:

- La convexidad de las subconfiguraciones relevantes. Según Mesquita (1989), en una figura es más difícil destacar una subfigura no convexa que una subfigura convexa, ya que la no convexidad no respeta la ley gestáltica de simplicidad del contorno.
- La complementariedad de las subconfiguraciones constituyentes. La idea de que las subconfiguraciones deben ser identificadas como partes que se complementan para formar una configuración más compleja, no es un proceso intuitivo ni fácil de detectar.
- La existencia de subconfiguraciones visualmente predominantes, como áreas sombreadas o líneas más gruesas en la configuración, que enmascaran la subconfiguración relevante.
- La no congruencia entre los registros de representación gráfico y lingüístico. Esta dificultad se da cuando la configuración no muestra las mismas características a las que el enunciado del problema se refiere.

Ejemplo: *Calcula el área del polígono ABCD sabiendo que el área del cuadrado es de 4 cm^2 y que los puntos A y C son puntos medios de sus respectivos lados.*

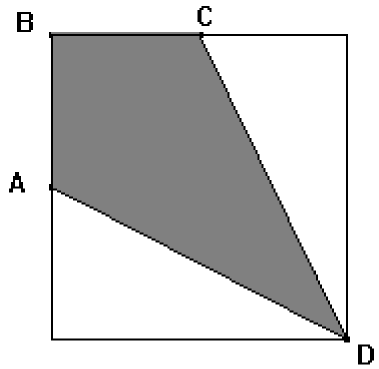


Figura 1.2

En la figura 1.2 la subconfiguración predominante es el polígono ABCD pues aparece sombreado. Pero para resolver el problema, según la solución dada en la figura 1.3, las subconfiguraciones relevantes son los triángulos rectángulos cuyo reconocimiento es menos inmediato, ya que el polígono ABCD es visualmente predominante y la superficie sin sombrear no es convexa. Ambos triángulos son complementarios para formar un rectángulo que tiene de área la mitad del cuadrado.

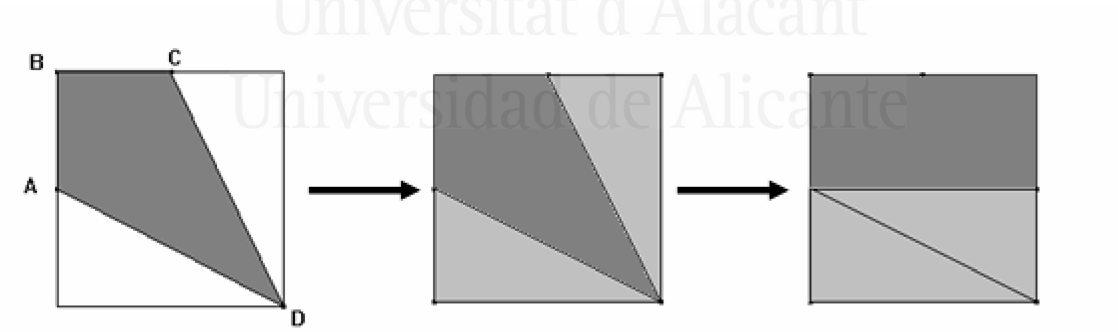


Figura 1.3

En el ejemplo anterior también se ponen de manifiesto dos dificultades que según Duval (1995, 1999b) conlleva la visualización en la resolución de problemas de geometría:

1. *La dificultad de la discriminación*. Lograr un conocimiento completo de una configuración a través de la visualización es una tarea difícil de realizar que requiere entrenamiento geométrico, y aún más difícil se hace la discriminación de los elementos que son pertinentes para la resolución del problema de los que no lo son.
2. *La dificultad del tratamiento*. Realizar operaciones y transformaciones dentro de un registro figural necesita de una identificación y de una discriminación de las figuras que forman la configuración, de ahí la importancia de este proceso.

Los factores que favorecen o dificultan la visualización son, en ocasiones, determinantes para la resolución de problemas. La visualización que realiza un alumno sobre la configuración inicial de un problema de probar, tiene como finalidad la identificación de configuraciones relevantes y la realización de conjeturas que permitan generar soluciones al problema.

1.4 Funciones de la Prueba. Visualización.

La resolución de problemas geométricos está íntimamente ligada al desarrollo y a la construcción de pruebas matemáticas. Bell (1976) es pionero en el análisis de las distintas funciones de la prueba, en particular este autor analiza los distintos intentos por construir una prueba matemática, por parte de estudiantes entre 14 y 15 años de edad, distinguiendo entre la categoría empírica y la categoría deductiva. Siguiendo esta línea de investigación Balacheff (1988) diferencia ampliamente entre distintas funciones de la prueba. Su investigación produce la distinción entre pruebas pragmáticas (empirismo naïf, experimento crucial y ejemplo genérico) y pruebas conceptuales (experimento mental). De Villiers (1993) critica a los que sólo adjudican a la prueba la función tradicional de verificación, incluyendo en su lista las funciones de explicación, comunicación, descubrimiento y la de sistematización. Hanna (2000), siguiendo los trabajos de Bell y De Villiers incorpora la función de construcción de una teoría empírica, la de exploración del significado de las distintas definiciones y la incorporación de un nuevo hecho a una nueva estructuración.

Harel y Sowder (1998) definen los esquemas de prueba de una persona como aquellos esquemas cognitivos que permiten indagar en la veracidad de una afirmación para esa persona, distinguiendo tres grandes categorías: convicción externa (a su vez pueden ser autoritarios, rituales y simbólicos, empíricos (inductivos y perceptivos) y analíticos (transformativos y axiomáticos). Estos modelos han sido desarrollados y completados en posteriores investigaciones (Marrades y Gutiérrez, 2000; Ibáñes, 2001 y Rodríguez y Gutiérrez, 2006).

En las distintas funciones de la prueba distinguimos el valor de la capacidad intuitiva, entendida como la capacidad de realizar conjeturas, que es necesaria para la construcción de la prueba. Mariotti (1998) señala el importante legado que Fischbein nos ha dejado, siendo ciertamente original su enfoque hacia los problemas educativos centrados en la compleja noción de intuición. La síntesis de este enfoque está contenida en su libro "*Intuition in Science and Mathematics*" (1987), donde se esboza la "teoría de la intuición" que ofrece a la comunidad de investigadores una herramienta útil para la interpretación de fenómenos en educación. Así como no es posible concebir una teoría matemática sin sus significados intuitivos, tampoco es posible concebir a la matemática sin su organización teórica: axiomas, definiciones, y teoremas. Mariotti (1998) afirma que debemos considerar cuidadosamente las relaciones entre las aproximaciones teórica e intuitiva. En la enseñanza tradicional los estudiantes aprenden teoremas que otros produjeron y solamente muy tarde en su vida escolar, imitando los productos que ellos aprendieron. Pero limitar la práctica educativa a repetir pruebas que otros produjeron, y hacer eso muy frecuentemente con enunciados que son obvios y no parece requerir ninguna justificación, parece inútil si el propósito es construir las relaciones complejas entre las actitudes intuitiva y teórica. El análisis de las relaciones entre teoremas (enunciados, prueba, y teoría) e intuición puede emprenderse según una de dos direcciones opuestas:

- Por una parte, un enunciado expresa las relaciones implícitas entre los principios asumidos en la teoría y la tesis del teorema, bajo las condiciones establecidas en las hipótesis. Hacer explícitas estas relaciones, que son implícitas al nivel intuitivo (Fischbein, 1987) constituye el primer paso hacia la construcción de un argumento, el cuál dentro del marco de una teoría, puede convertirse en una prueba.
- Por otra parte, un teorema representa un objeto de conocimiento, y como tal debe ser aprehendido por quien aprende. Para poder usar productivamente un teorema cuando razonamos el teorema debe tener cierto status de intuición, pero ello solo puede ocurrir si la unidad entre el enunciado y la prueba, de momento separados artificialmente, se realiza: el enunciado y la prueba deben condensarse en conocimiento intuitivo (Fischbein, 1982)

En este sentido el desarrollo de pruebas geométricas a través de la resolución de problemas puede facilitar el tránsito de una actitud intuitiva a otra teórica. Con el fin de desarrollar las capacidades que generan la construcción de pruebas geométricas y facilitar el tránsito de una actitud intuitiva a una teórica vemos necesario la resolución de problemas geométricos que requieran de prueba formal y fomenten la distinción entre los pasos de inferencia (hipótesis, afirmación matemática y tesis). En el mismo sentido Mariotti (1997) plantea la necesidad de realizar un análisis para entender los procesos mentales involucrados en el razonamiento geométrico, en particular los relacionados con los de naturaleza visual y su papel en las demostraciones.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

Nuestra investigación está ligada al análisis y estudio de los *procesos cognitivos* que evidencia el estudiante al resolver un problema de geometría. El conocimiento de dichos procesos y sus relaciones va a servir para diagnosticar el aprendizaje del estudiante y dirigir el posterior desarrollo de las nociones y conceptos geométricos asociados. De igual manera, entender su desarrollo, evolución, tratamiento e integración en el currículo escolar puede ayudarnos a conocer el mapa cognitivo de los alumnos, facilitando su aprendizaje.

La caracterización de estos procesos no sólo es fundamental para el investigador sino también para el profesorado, que debe constantemente interpretar las producciones de los estudiantes y ofertar pautas de actuación en aras de mejorar sus capacidades geométricas. Si somos capaces de aproximarnos a una interpretación sobre los procesos de resolución de los problemas geométricos, podemos intervenir mucho más eficazmente en el aprendizaje geométrico de los alumnos, y por ende en el matemático, lo cual nos ayudará a establecer métodos de enseñanza adecuados a sus necesidades.

2.1 Procesos Cognitivos

En este capítulo, a partir de la teoría cognitiva de Duval y de nuestros propios estudios (Torregrosa, Quesada y Penalva, 2007, 2010), proponemos un modelo para caracterizar las interacciones entre los procesos de visualización y razonamiento que intervienen en la resolución de problemas de geometría. Adoptamos cuatro hipótesis en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje que conlleva la resolución de problemas geométricos:

1. La actividad geométrica involucra tres clases de procesos cognitivos: la visualización, el razonamiento y la construcción.

   - Los procesos de *visualización* intervienen en las representaciones espaciales, en la representación de resultados, en la exploración heurística de una situación compleja, en el logro de una visión sinóptica de la misma y en la obtención de una verificación subjetiva de la misma.
   - Los procesos de *razonamiento,* en relación con procesos discursivos, posibilitan la extensión del conocimiento, la demostración y la explicación.
   - Los procesos de *construcción* (mediante herramientas), sirven para construir configuraciones como modelos en los que la acción sobre los representantes y los resultados obtenidos están relacionados con los objetos matemáticos representados.

2. Estas tres clases de procesos deben ser desarrollados separadamente. Se puede realizar un proceso de razonamiento mediante un discurso teórico sin haber realizado ningún proceso de visualización, basado únicamente en afirmaciones matemáticas como definiciones, proposiciones o axiomas.

3. Durante el desarrollo del currículo escolar, desde la educación Primaria hasta el fin de la Educación Secundaria, es necesario realizar un trabajo de diferenciación entre diferentes procesos de visualización y entre diferentes procesos de razonamiento, pues existen varias formas de ver una figura; de la

misma manera que hay varias formas de razonar. No obstante estos procesos cognitivos están íntimamente conectados y su sinergia es necesaria para la adquisición de competencia en la resolución de problemas geométricos.

4. La coordinación entre los procesos de visualización, razonamiento y construcción puede ocurrir realmente solo después de este trabajo de diferenciación. La coordinación es el acto o efecto de concertar medios, esfuerzos, etc. para una acción común (Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua, 2001). Entendemos la coordinación como la interacción ordenada de procesos cognitivos en la resolución de problemas geométricos.

A continuación nos centramos en desarrollar los procesos de visualización y los procesos de razonamiento que permiten establecer un marco teórico para el análisis de la resolución de los problemas de geometría.

2.2 Procesos de Visualización

Siguiendo a Hershkowitz, Parzysz y Van Dermolen (1996), entendemos visualización como "la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra" (p. 163).

Si visualizamos un dibujo podemos obtener un objeto mental o figura, que no es necesariamente la misma para todos los observadores, ya que está unida a unas afirmaciones matemáticas (definiciones, propiedades o relaciones), que el dibujo no posee, pero que le son atribuidas por el observador.

Una figura (imagen mental de un objeto físico) se puede representar mediante una configuración geométrica (dibujo) y se compone de otras figuras mostradas por subconfiguraciones geométricas más simples, de dimensión geométrica menor o igual que la original, las cuales también están vinculadas a afirmaciones matemáticas.

Aprehensión

Para llevar a cabo nuestro estudio sobre el papel del proceso de la visualización en la resolución de problemas de geometría, consideramos conveniente restringir el significado de visualización, distinguiendo las acepciones vinculadas a las características de la acción hecha por el sujeto sobre una configuración. De ahí que introduzcamos el término *aprehensión*, cuya definición, según el Diccionario de la Real Academia de Española (2001), es “concebir las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar”, mientras que *aprehensión simple* se describe como “la aprehensión que capta las formas de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar”. De este modo tratamos de hacer operativa para su estudio, la acción de “transferencia” de la definición de visualización dada por Hershkowitz et al. (1996) puesto que al introducir características de dicha transferencia obtenemos formas de aprehender (formas de ver la figura matemáticamente). En palabras de Duval (1998, p. 39):

“Lo que un dibujo nos deja ver es una o varias figuras 1D/2D (de dimensión 1 representada en 2 dimensiones) o 2D/2D (líneas rectas o curvas, la frontera cerrada de un triángulo, de un cuadrilátero, etc.) o bien figuras 3D/2D (cubos, esferas, etc.). La identificación visual de estas figuras se basa en leyes de organización perceptiva, y estas figuras se pueden usar para representar objetos reales u objetos matemáticos”.

Por ejemplo, observamos los siguientes dibujos:

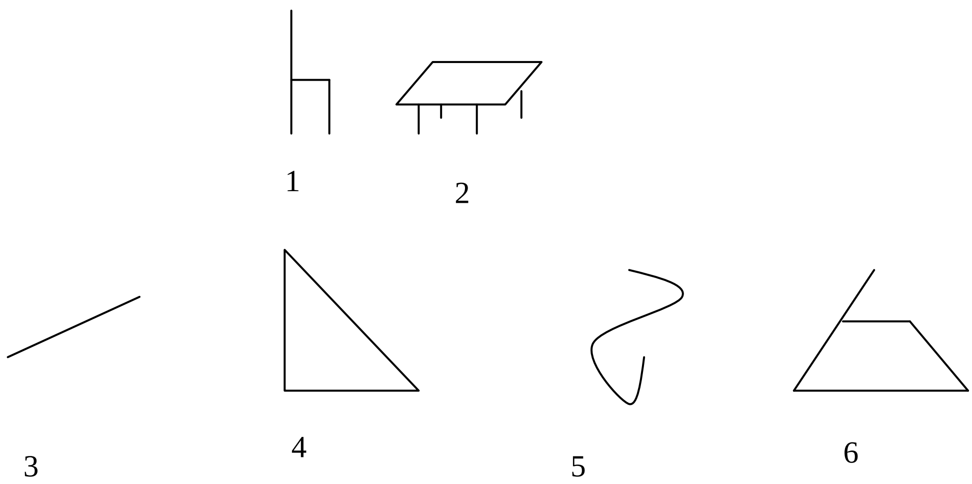


Figura 2.1

Podrían ser identificados, en virtud de leyes de organización perceptiva, como: silla (1), mesa (2), segmento (3), triángulo (4), línea curva (5) y dibujo de cuatro segmentos (6). Todos, salvo el número (5), están constituidos por líneas rectas, que pueden representar figuras 1D/2D; el (1) y el (2) se pueden ver como figuras 3D/2D y el (4) puede representar una figura 2D/2D; el (5) sería como la representación de una figura 1D/2D y está formada por una línea curva. El (6) puede 'verse' como una figura 2D/2D (un trapecio) unión con una figura 1D/2D (segmento que prolonga un lado), pero también puede 'verse' como una configuración (la unión de cuatro segmentos de una manera imprecisa).

También es claro que los dibujos (1), (2) y (4) pueden representar figuras que están constituidas por configuraciones que guardan alguna relación que las caracteriza, respectivamente, como silla, mesa y triángulo. Pero solo la configuración representada por el (4) podría vincularse a una afirmación (la definición de triángulo, en este caso) que fija algunas propiedades de la figura representada (triángulo), y esto da paso a la entrada de las matemáticas en la figura.

Si asignamos características (indicadores) a las acciones que permiten realizar la transferencia entre dibujo-figura, podemos obtener distintos tipos de aprehensión (entendidas como distintas formas de "ver" una figura). Por ejemplo, establecer una relación entre las acciones que un alumno manifiesta cuando resuelve problemas de geometría y los diferentes tipos de aprehensión. En esta investigación distinguimos tres tipos de aprehensión: perceptiva, discursiva y operativa.

Aprehensión Perceptiva

La *aprehensión perceptiva* es la identificación simple de una configuración. Es la primera en ser usada a lo largo de toda la etapa educativa y también la primera en aparecer en el desarrollo cognitivo del alumno.

Figura 2.2

Por ejemplo, la configuración anterior puede ser vista como el tejado de una casa, como la parte superior de una mesa, como cuatro rayas dibujadas en el papel, como la representación (el dibujo) de una figura geométrica (objeto mental). Cada una de estas respuestas puede ser entendida como el resultado de una aprehensión perceptiva, al ser el proceso más intuitivo.

Aprehensión Discursiva

Llamamos *aprehensión discursiva* a la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas...). Tal vínculo puede realizarse de dos maneras, según las direcciones de la transferencia realizada, a la que se le denomina cambio de anclaje y puede ser:

a) Del anclaje visual $\longrightarrow$ al anclaje discursivo

Por ejemplo, cuando al dibujo de la figura 2.3 se le asocia la afirmación "ABC es un triángulo rectángulo", señalando los vértices con las letras A, B y C. Para efectuar esta asociación con sentido, el observador debe haber identificado en el dibujo lo que caracteriza a un triángulo rectángulo; es decir, relacionar las características de una de las definiciones relativas al triángulo y al triángulo rectángulo.

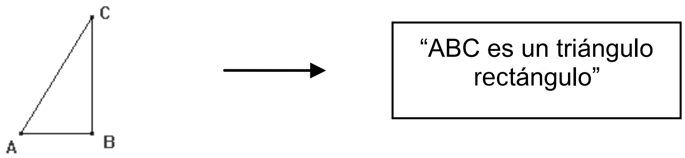
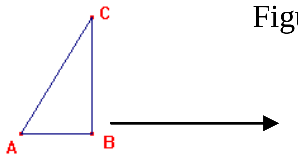


Figura 2.3

b) Del anclaje disc  al anclaje visual

Se produce cuando el resolutor ante la afirmación “ABC es un triángulo rectángulo”, es capaz de realizar el dibujo de un polígono que refleja las características de ser triángulo y rectángulo. Esta configuración no tiene por qué ser la misma para todos los estudiantes, al igual que las afirmaciones matemáticas asociadas a las distintas configuraciones, no han de coincidir necesariamente (como se da en el caso de la equivalencia de caracterizaciones-definiciones).

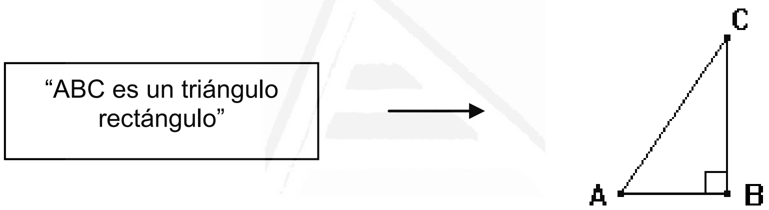


Figura 2.4

Para mostrar un ejemplo de aprehensión discursiva consideramos el siguiente problema: *Un albañil apoya una escalera de 5 metros contra un muro vertical. El pie de la escalera está a 2 metros del muro. Calcula la altura a la que se encuentra la parte superior de la escalera.*

Lo primero que debe hacer un resolutor del problema es elaborar una representación gráfica de la situación planteada, por ejemplo la figura 2.5:

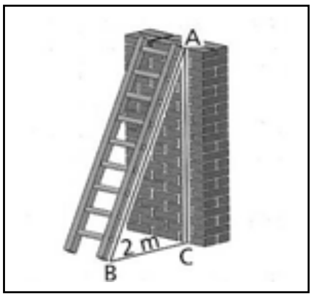
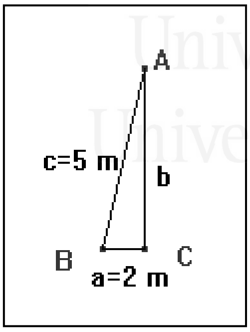


Figura 2.5

El cambio del enunciado del problema (texto) a la ilustración de la escalera apoyada en el muro (dibujo) no implica la asociación con ninguna afirmación matemática. Una vez identificada dicha situación con un triángulo rectángulo, llamamos aprehensión discursiva a la asociación del conocido Teorema de Pitágoras con la configuración elaborada. En este caso el sentido de la transferencia realizada va desde un anclaje visual a un anclaje discursivo. Este cambio de anclaje viene representado en la figura 2.6:



$\longrightarrow$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$

Figura 2.6

En este ejemplo también se ponen de manifiesto los conceptos de conversión y tratamiento, así como de codificación (como caso particular de conversión) y que están relacionados con los registros que se usan en el planteamiento y en la resolución del problema.

En la figura 2.7 se indica cómo estos conceptos afectan a los sistemas de representación hasta llegar a una solución del problema.

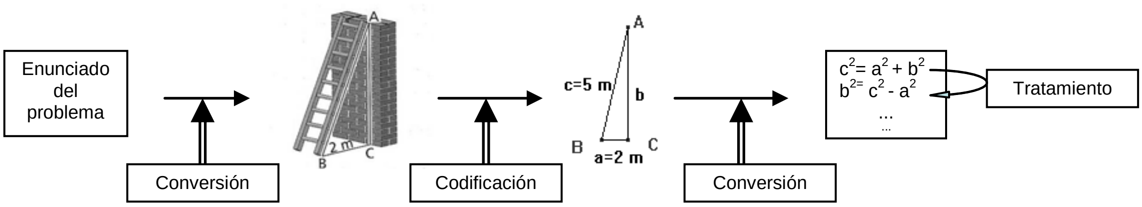


Figura 2.7

Aprehensión Operativa

La *aprehensión operativa* es la acción física o mental realizada por el estudiante que produce alguna modificación de la configuración pudiendo extraer, introducir o manipular las distintas subconfiguraciones identificadas. Dependiendo de la modificación producida, podemos distinguir dos tipos:

- *Aprehensión operativa de cambio figural*: a la configuración inicial se le añaden o quitan nuevos elementos geométricos (nuevas subconfiguraciones).

Ejemplo: En la figura 2.8, $\overline{AD} \equiv \overline{EB}$ y $\overline{AB} \equiv \overline{ED}$. Probar que $\hat{B} \equiv \hat{D}$.

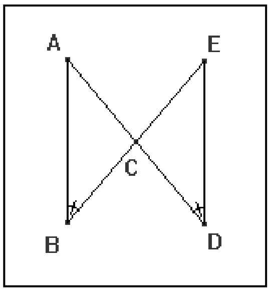


Figura 2.8

Una posible solución es introducir un nuevo elemento geométrico en la configuración inicial, el segmento $\overline{AE}$ (figura 2.9).

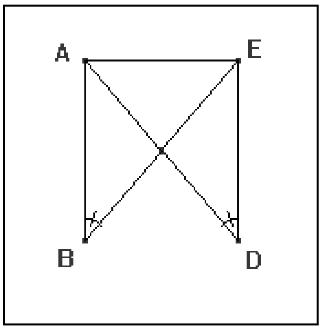


Figura 2.9

Al introducir el segmento $\overline{AE}$ es posible resolver el problema utilizando el criterio de congruencia de triángulos L-L-L ($A\overset{\Delta}{B}E$ y $E\overset{\Delta}{D}A$ son dos triángulos que tienen los lados correspondientes congruentes, entonces $A\overset{\Delta}{B}E \equiv E\overset{\Delta}{D}A$) y de aquí se deduce la congruencia de ángulos pedida. Al proceso, en este caso, de introducir un segmento en la configuración inicial lo llamamos aprehensión operativa de cambio figural.

- *Aprehensión operativa de reconfiguración*: las subconfiguraciones iniciales son manipuladas como las piezas de un puzzle.

Ejemplo: Sea el cuadrado ACDF de la figura 2.10 que tiene de área 1 m^2. Se pide el área del paralelogramo BCEF sabiendo que B y E son puntos medios.

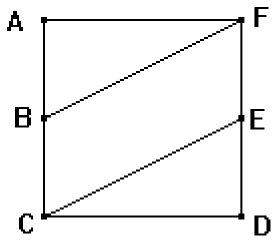


Figura 2.10

Una posible solución consiste en identificar el triángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{ECD}}$ y desplazarlo verticalmente para unirlo al triángulo $\overset{\Delta}{\mathrm{ABF}}$, formando un paralelogramo como se indica en la figura 2.11:

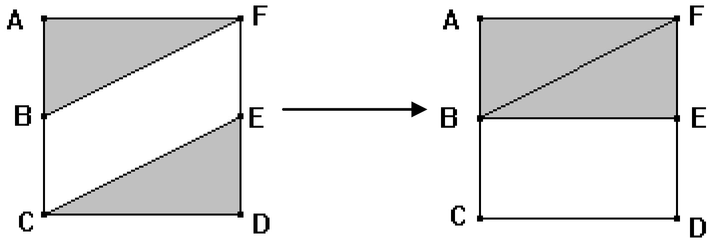


Figura 2.11

Hay evidencia de una aprehensión operativa de reconfiguración en la solución dada para calcular el área del paralelogramo (la mitad que el área del cuadrado), ya que una vez realizada la identificación de las configuraciones, éstas son movidas como piezas de un puzzle. Este problema también puede resolverse como se muestra en la figura 2.12 en la que se tiene evidencias de una aprehensión operativa de cambio figural, es decir, se añade a la configuración inicial un nuevo elemento geométrico (segmento $\overline{\mathrm{BE}}$).

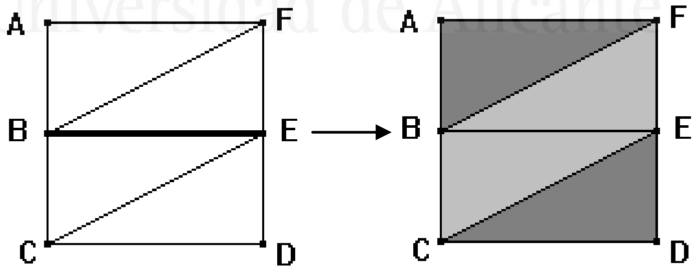


Figura 2.12

En la figura podemos distinguir cuatro triángulos de misma superficie tras introducir en la configuración inicial el segmento $\overline{\mathrm{BE}}$.

En la figura 2.13, se muestra una prueba del Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, realizada por Bhaskara en el siglo XII, en donde se ponen de manifiesto ambas aprehensiones operativas. En esta prueba aparecen las siguientes configuraciones:

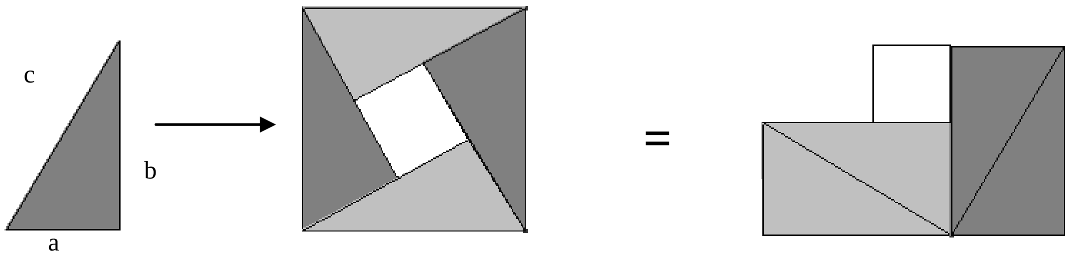


Figura 2.13. Bhaskara siglo XII, obtenida del libro Proofs Without Words, Roger Nelson, 1993.

En las modificaciones hechas, en primer lugar el triángulo rectángulo inicial se incluye en una configuración más amplia, un cuadrado de lado c, realizándose lo que hemos llamado aprehensión operativa de cambio figural. Una vez identificadas las subconfiguraciones formadas por los triángulos y sus correspondientes lados, además del cuadrado situado entre ellos, podemos cambiar la configuración moviéndolas como piezas de un puzzle para obtener otra configuración (aprehensión operativa de reconfiguración). Dicha acción está precedida de otras, en las que a cada subconfiguración le asociamos afirmaciones matemáticas, es decir, se realizan distintas aprehensiones discursivas con cambio de anclaje de visual a discursivo. Por ejemplo que el lado del cuadrado central mide b-a y el lado del cuadrado grande mide c.

Si analizamos los pasos descritos en la figura 2.13, podemos generar el siguiente discurso, que desarrollado algebraicamente resulta:

$$c^2 = 2ab + (b-a)^2 = 2ab + b^2 + a^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

Relación entre las aprehensiones

En relación a los tipos de aprehensión entendemos que la aprehensión perceptiva está conectada con las otras dos aprehensiones (discursiva y operativa). Con la figura 2.14 tratamos de poner de manifiesto que la aprehensión perceptiva es básica para el desenvolvimiento de los otros procesos de visualización. A medida que se desarrollan la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva queda más atenuada la acción en la que subyace la aprehensión perceptiva, la cual queda como mero nexo entre ellas (Torregrosa y Quesada, 2007).

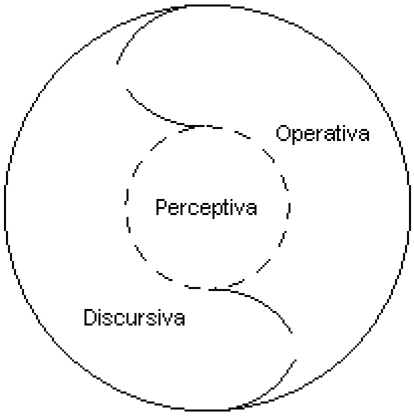


Figura 2.14. Torregrosa y Quesada (2007, p.287)

Consideramos que caracterizar las distintas aprehensiones (perceptiva, discursiva y operativa) puede facilitar por un lado el análisis de las respuestas a problemas de geometría y por otro, mostrar los cambios (de anclaje y configural) que manifieste el estudiante. Por ejemplo, una aprehensión discursiva está caracterizada por el uso que hace el alumno de un cambio de anclaje, y una aprehensión operativa por el cambio configural (ya sea de reconfiguración o de cambio figural).

Destacamos que el cambio de anclaje es de gran importancia para coordinar los distintos modos de representación al resolver problemas geométricos. Respecto a los modos de representación señalamos que, debido a las características del contenido geométrico, gran cantidad de tareas vienen dadas en el modo figurativo y demandan traslaciones al modo numérico/simbólico y viceversa (Escudero, 2003). Si la formación de conceptos implica una coordinación de sistemas de representación, entonces es importante en el aprendizaje de las matemáticas no solo la automatización de ciertas técnicas operatorias (cálculo) sino también el aprendizaje de dicha coordinación (Penalva y Torregrosa, 2001). Como consecuencia, se deriva la gran importancia de la coordinación entre las distintas aprehensiones y los cambios de representación (conversiones), para el desarrollo de los procesos de razonamiento, relacionados con el discurso, en la resolución de problemas de geometría.

2.3 Procesos de Razonamiento

Los procesos de visualización están profundamente ligados a los procesos de razonamiento en la resolución de problemas de geometría. Asimismo, los procesos de razonamiento son objeto de investigación en trabajos de Didáctica de la Matemática de corte psicológico (Gutiérrez, 1998; Presmeg, 2006). Debido al creciente interés en las ideas geométricas, es importante aclarar los aspectos sobre la naturaleza del razonamiento y cómo éste se desarrolla (Jones, 1998).

Según Fischbein (1993) *"el razonamiento tanto en situaciones de la vida diaria como en la científica, incluye una interacción permanente entre las dinámicas conceptuales e imaginativas [...]. Además hay razones para admitir que en el curso de esa interacción, los significados cambian de una categoría a otra, las imágenes obtienen significados más generalizados y los conceptos enriquecen ampliamente sus connotaciones y su poder combinatorio"* (p. 144), en particular también se verifica para el razonamiento en geometría. Para Mariotti (1995) el razonamiento geométrico puede ser interpretado en términos de un proceso dialéctico entre los aspectos figurales y conceptuales. Es decir, el razonamiento geométrico involucra una relación entre las imágenes y los conceptos. Jones (1998), siguiendo las ideas de Fischbein, argumenta que el razonamiento geométrico puede ser caracterizado como la interacción entre el aspecto figural y el aspecto conceptual de las representaciones. Estas descripciones del razonamiento geométrico introducen características del proceso de visualización, tales como la modificación de las representaciones y la asociación de aspectos conceptuales. Esta situación nos conduce a definir nuestra idea de razonamiento de la siguiente manera:

Entendemos *razonamiento* en un sentido amplio, como cualquier acción, ensayo y error o estrategia para resolver una dificultad, que permita obtener nueva información a partir de informaciones previas, sean éstas proporcionadas por el problema o derivadas del conocimiento previo.

Además, los procesos de razonamiento que realizan los estudiantes son considerados como una variedad de acciones que realizan los estudiantes con el fin de comunicar y explicar tanto a otros, como a ellos mismos, lo que ellos ven, lo que ellos descubren y lo que ellos piensan y concluyen (Hershkowitz, 1998). Por este motivo diferenciamos dos tipos de razonamiento en relación con los procesos discursivos:

1. *Razonamiento discursivo natural:* Este proceso se realiza espontáneamente en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación.

2. *Razonamiento discursivo teórico*: Este proceso utiliza sólo teoremas, axiomas o definiciones para llegar a la conclusión, a través de la deducción. Puede ser realizado en un registro estrictamente simbólico o en el registro natural, pero siempre mediante una estructura deductiva.

Razonamiento discursivo natural

Este proceso de razonamiento se realiza espontáneamente en lenguaje natural a través de descripciones, explicaciones o argumentaciones. Para poder identificar el proceso es necesario distinguir las operaciones discursivas básicas, los conectores, así como símbolos verbales, entre otros que puedan aparecer en la resolución de problemas de geometría, como se puede ver en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: "Comprueba que las figuras siguientes tienen la misma área."

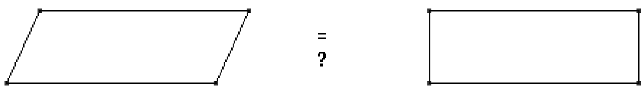


Figura 2.15

Para la resolución del ejemplo (figura 2.16) debemos darle sentido a los conectores (como es la flecha, el signo "igual" o el signo "suma") y describir las 'manipulaciones' realizadas a la configuración inicial. Dividimos la configuración inicial en dos subconfiguraciones que visualmente pueden reorganizarse para formar el rectángulo. Los conectores (signos "igual" y "suma", así como la flecha) dan sentido a la reorganización como proceso discursivo, de tal manera que el signo "más" lo podemos entender como unión de dos áreas y la flecha indica el lugar en donde se une el triángulo rectángulo y el trapecio rectángulo. Por último el signo "igual" puede ser entendido como "da lugar a". Resulta evidente que se puede manejar otros argumentos para este problema, pero estaremos hablando del mismo tipo de razonamiento.

Posible solución:

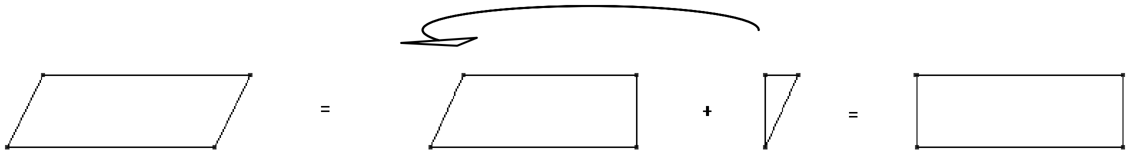


Figura 2.16

El proceso discursivo natural se divide en dos niveles, en relación con la organización del discurso (Duval, 1998):

- Un nivel global estructurado en un número finito de pasos y cada uno de ellos se puede ver como una proposición

- Un nivel local, interno en cada paso, donde las subconfiguraciones se ven como palabras (este triángulo es igual a este otro…) y los conectores ("y" "o") así como los símbolos verbales simplificados (= significa produce,+ significa se añade, - significa se quita de,…) son necesarios para organizar cada paso.

Describimos a continuación una posible prueba del teorema de Pitágoras que está estructurada en un número finito de pasos. En el nivel global distinguimos tres pasos, observando que cada una de las subconfiguraciones se pueden entender como palabras (el área de este triángulo más esta otra área es igual al área de este rectángulo, o este cuadrado es igual a este cuadrado más este otro…) y los conectores ("y", "o") así como los símbolos verbales simplificados (=,+,-,…) se precisan para organizar cada paso. A cada uno de estos pasos se le llama nivel local.

Ejemplo 2: Prueba que en un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa ($a^2 + b^2= c^2$).

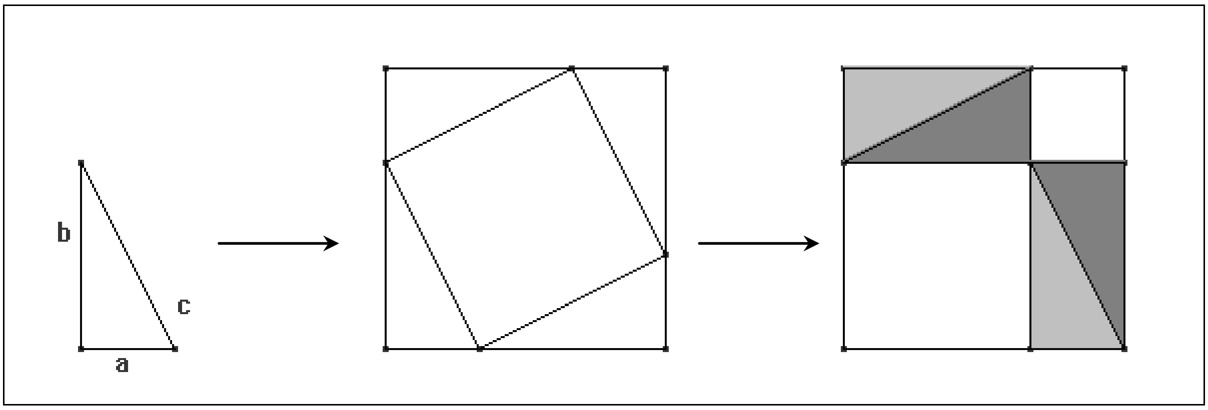
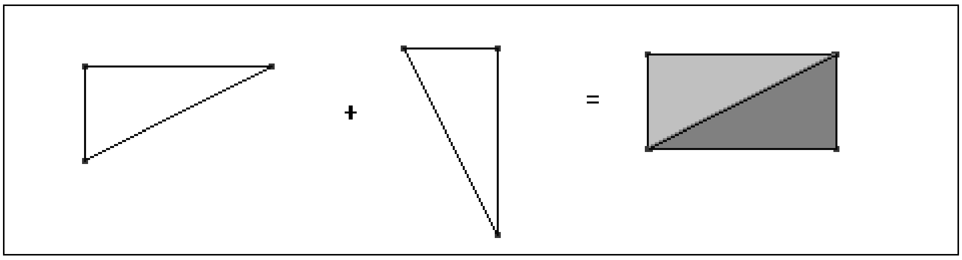


Figura 2.17. Una demostración clásica.

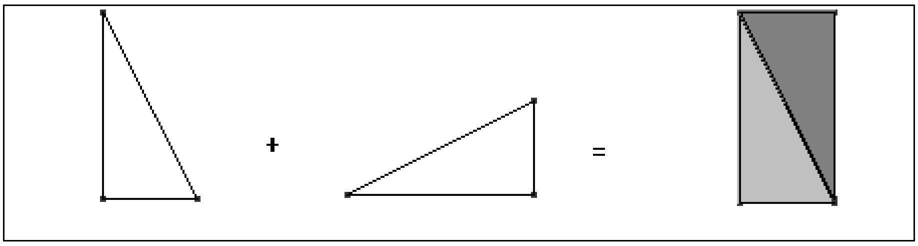
Posible solución al ejemplo:

En la figura 2.17 se da una demostración clásica de dicho teorema. Dado el triángulo rectángulo de catetos a y b, e hipotenusa c, añadimos tres triángulos iguales al original dentro del cuadrado de lado (b+c) como se indica en la figura, pudiendo reconocer otro cuadrado de menor tamaño y lado c.

La suma de las áreas de dos de los triángulos es la misma área que la del rectángulo horizontal.



Y la suma de las áreas de los otros dos triángulos también es la misma que la del rectángulo vertical



Luego el área del cuadrado grande (de lado c), en la figura 2.18, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados b y c

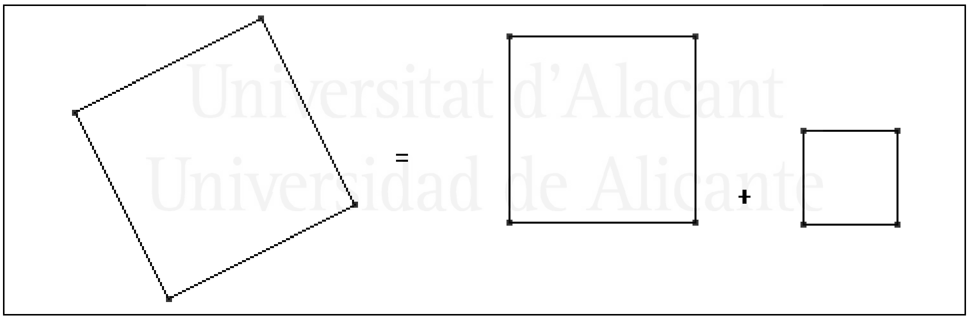


Figura 2.18

Razonamiento discursivo teórico

Este proceso de razonamiento utiliza sólo teoremas, axiomas o definiciones para llegar a la conclusión, a través de la deducción. Puede ser realizado en un registro estrictamente simbólico o en el registro natural, pero siempre mediante una estructura deductiva. Presentamos un ejemplo que nos sirve para mostrar características de este proceso.

Ejemplo: Sean los segmentos AB, BC, CD y DA tangentes a la circunferencia como se indica en la figura 2.19. Probar que AB + CD = BC + DA.

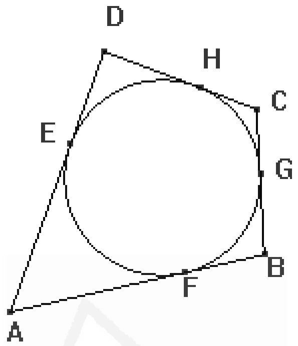


Figura 2.19. Geometría práctica y agrimensura, segundo grado. Ed. Luis Vives, 1951. Pág.50.

Una forma de resolver el problema es identificar, o cambiar la configuración inicial, por la siguiente subconfiguración:

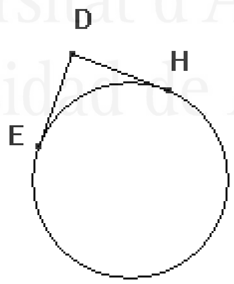


Figura 2.20

Una vez que se identifica la subconfiguración, la prueba se puede realizar mediante un cambio de anclaje (de visual a discursivo) asociando a la subconfiguración la proposición siguiente: "Dada una circunferencia y un punto exterior a ella, los segmentos tangentes a la circunferencia que pasan por dicho punto son congruentes". Con ello podemos identificar 8 segmentos, iguales dos a dos (DE = DH, AE = AF, BF =

BG, CG = CH). Finalmente al sumar adecuadamente las igualdades, llegamos a la igualdad pedida.

La exploración heurística provoca la “idea” que puede resolver el problema cuando se identifica la subconfiguración de la figura 2.20 (aprehensión operativa) y se asocia la proposición enunciada (aprehensión discursiva) vinculada al conocimiento previo. La solución adopta una estructura deductiva y, en este caso, se expresa en lenguaje natural:

- Los segmentos AB, BC, CD y DA son tangentes a la circunferencia dada.
- Los segmentos tangentes a una circunferencia por un punto exterior a ella son congruentes.
- Luego DE = DH, AE = AF, BF = BG, y CG = CH.
- Sumando ordenadamente estas igualdades demostramos la igualdad pedida.

En nuestro campo de estudio la designación de objetos, el hecho de expresar alguna característica de la configuración (enunciar una propiedad), de tal forma que ésta tenga un valor epistémico (las propiedades identificadas están relacionadas con la manera en la que se ha interpretado la configuración) y generar propiedades a partir de otras conocidas, son respectivamente distintas expresiones del discurso natural y hay un salto estructural entre la descripción, la explicación y la argumentación con el proceso de deducción (Duval, 1999a). La estructura de una respuesta a un problema geométrico está formada en el proceso discursivo teórico por distintos niveles de organización de la información:

- Un nivel global en el que los pasos están relacionados según su conclusión.
- Un nivel local en cada paso donde al menos tres proposiciones se organizan según su estatus (hipótesis o conclusión previa, definición o teorema, conclusión local).
- Un micro-nivel interno a las proposiciones usadas como reglas (definiciones, teoremas…). En cada una de las proposiciones aplicadas se deben distinguir dos partes: la parte de las condiciones a verificar y la de la conclusión a establecer.

A pesar de utilizar los mismos nombres en ambos procesos discursivos no se han de confundir los distintos niveles locales y globales en cada proceso discursivo. El nivel local del proceso discursivo teórico está organizado en tres afirmaciones según su estatus, es decir, “Hipótesis (no necesariamente hay una sola)→Afirmación matemática (ya sea definición, lema, proposición, axioma, teorema, corolario…)→Tesis o conclusión de la afirmación matemática”. En el nivel global identificamos los distintos niveles locales, que están relacionados según su conclusión como en la figura 2.21.

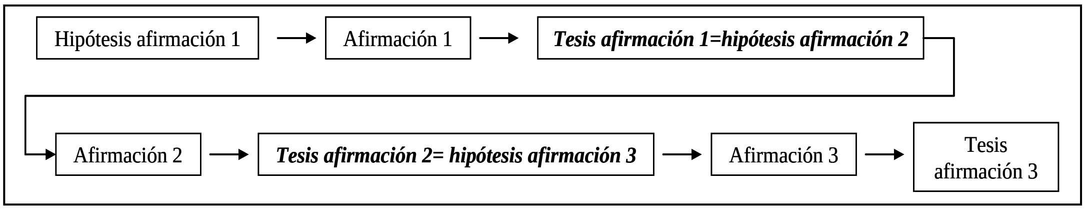


Figura 2.21

La conclusión de la afirmación 1 es hipótesis de la afirmación 2 y la conclusión de ésta es hipótesis de la afirmación 3 y así sucesivamente, siendo estas acciones necesarias para la construcción del discurso teórico.

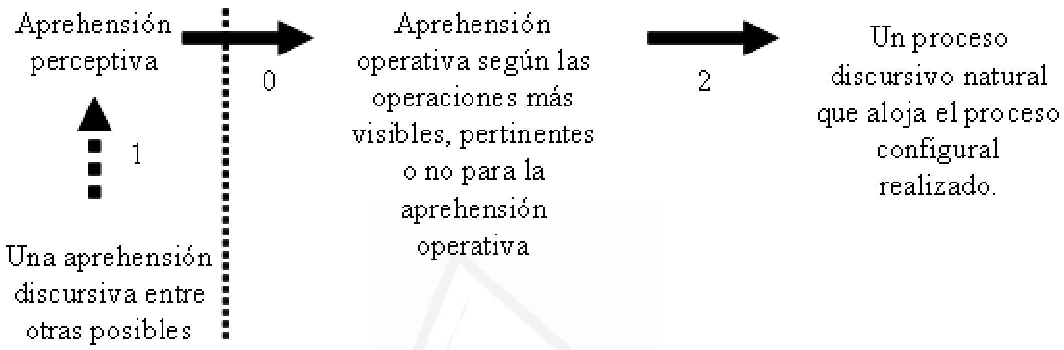
Si se comparan los distintos niveles estructurales de ambos procesos discursivos distinguimos que el nivel local del discurso natural lo constituyen afirmaciones o configuraciones unidas e interrelacionadas mediante conectores y símbolos. No está constituido por afirmaciones según su estatus (hipótesis, afirmación matemática o conclusión) como ocurre en el discurso teórico. El nivel global, en el discurso natural, está formado por un número finito de pasos, niveles locales, que no necesariamente han de estar relacionados entre sí, mientras que en el discurso teórico los niveles locales deben estar unidos por su conclusión formando un continuo.

2.4 Sobre Visualización y Razonamiento

Adoptamos una clasificación de los comportamientos del individuo, a la hora de resolver problemas de geometría, derivada de las relaciones que se dan entre los procesos de visualización y los procesos de razonamiento:

"En geometría, la visualización cubre tanto la aprehensión perceptiva, discursiva y operativa de una figura como una representación del espacio. Y aunque no requiere conocimiento matemático, la visualización juega un rol heurístico básico y a través de la aprehensión operativa, puede proporcionar algo parecido a la evidencia convincente. ¿Cuáles son estas relaciones con las diferentes clases de razonamiento? A fin de dar una presentación corta, podemos empezar desde los dos comportamientos típicos siguientes:" Duval (1998, p. 48).

El comportamiento ingenuo



El comportamiento matemático

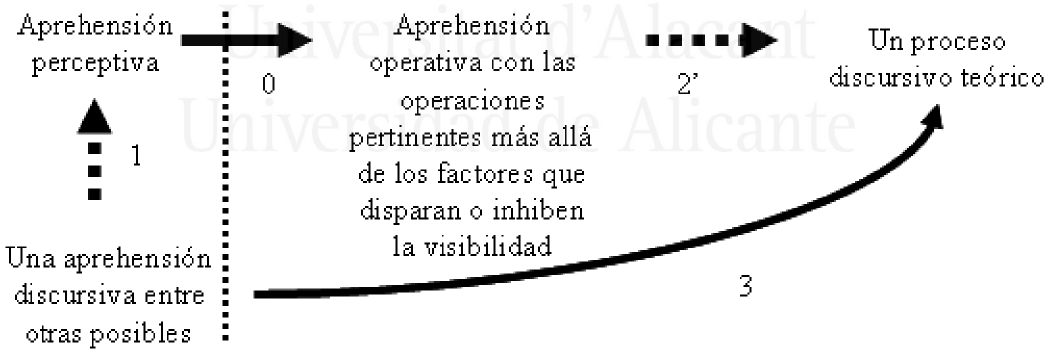


Figura 2.22

"Ambas figuras empiezan de la misma situación geométrica y son posibles dos comportamientos totalmente diferentes. Uno reacciona a lo que es espontáneamente visible (0) y el razonamiento trabaja como una descripción de los pasos del cambio configural que guía a la solución (2). En el otro, el razonamiento empieza solo con la aprehensión discursiva y es independiente de la visualización (3). El cambio configural no proporciona los pasos y la organización del razonamiento deductivo para la demostración, pero muestra algunos puntos clave, o una idea que permite seleccionar el teorema principal a ser usado (flecha punteada 2') [...]" Duval (1998, p. 48).

2.5 Objetivos de la Investigación

Partiendo de la perspectiva teórica expuesta realizamos el análisis de los procesos de visualización y de los procesos de razonamiento en relación con el discurso, estudiando las distintas relaciones que pueden darse entre ellos y observando su posible coordinación. De esta manera buscamos cómo se caracterizan, qué relaciones se establecen entre ellos en la solución del problema y cómo influyen en el proceso de resolución. Es decir, el objetivo general de investigación es:

"Identificar características de la coordinación de los procesos cognitivos que los estudiantes evidencian cuando resuelven problemas de geometría".

A la luz de los referentes teóricos analizados, en la investigación nos planteamos los siguientes objetivos:

1. Realizar un refinamiento de los distintos comportamientos del individuo identificados por Duval (1998), ante la tarea de resolver problemas de geometría.

2. Caracterizar interacciones entre los procesos de visualización y de razonamiento que evidencia el alumno en la resolución de problemas de geometría que demandan una prueba formal.

3. Construir un modelo que explique la coordinación de los procesos cognitivos y las posibles dificultades encontradas por los estudiantes para lograr dicha coordinación.

Identificar las acciones que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas de geometría aporta mayor conocimiento de cómo actúa el estudiante. Esta información nos permitirá estudiar las diferentes relaciones que pueden darse entre los procesos cognitivos y las dificultades que los alumnos deben superar cuando resuelven problemas que demandan una prueba en un contexto de lápiz y papel.

CAPÍTULO 3: DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 3: DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se describen las decisiones tomadas para el diseño del estudio con la finalidad de analizar los procesos cognitivos que evidencian los estudiantes. En concreto, hacemos referencia a los participantes, el diseño del instrumento de recogida de información y el proceso de análisis seguido.

3.1 Participantes y Contexto

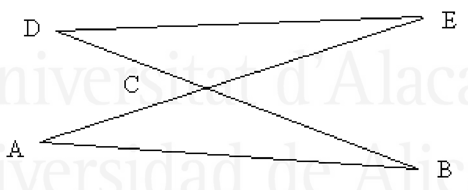
Los datos utilizados en la investigación son las repuestas dadas por 55 estudiantes para maestro a 5 problemas de geometría, extraídos del examen final de la asignatura Didáctica de la Geometría ofertada en segundo curso de la carrera de magisterio, con una duración total de 60 horas. Los estudiantes habían recibido instrucción sobre conceptos, definiciones, caracterizaciones y teoremas de geometría básica para la resolución de los problemas propuestos (Penalva y Torregrosa 1997).

El examen final constaba de 8 problemas, de los cuales los estudiantes debían responder, al menos, 4 de ellos. Entre estos 8 problemas hemos seleccionado 5 para realizar esta investigación. Estos problemas tenían como objetivo que el estudiante mostrase en su respuesta evidencias de los distintos procesos de visualización y de razonamiento, de tal manera que se observe si el estudiante identifica las configuraciones relevantes, si las modifica y si les asocia algunas afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas, propiedades, etc.) para resolver el problema.

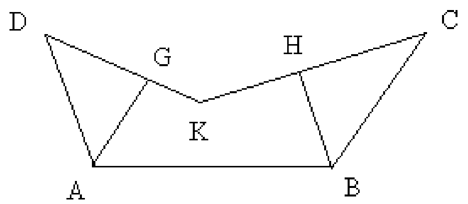
3.2 Instrumento de Recogida de Datos

En la elaboración de la colección de problemas se ha tenido en cuenta la presencia o no de configuración en el enunciado del problema, el número de subconfiguraciones relevantes, la demanda de demostración formal y la complejidad de la estructura deductiva. La colección de problemas utilizados en la investigación la forman los 5 problemas siguientes:

2º Dada la figura con $\overline{CE} \equiv \overline{CB}$ y $\hat{E} \equiv \hat{B}$, probar que $\hat{D} \equiv \hat{A}$.



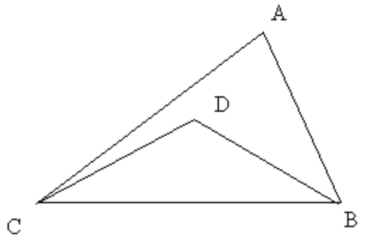
3º Si $\overline{DG} \equiv \overline{CH}$, $\hat{D} \equiv \hat{C}$ y $\overline{AG} \perp \overline{DK}$ y $\overline{BH} \perp \overline{CK}$, probar que $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.



6º En un plano, la recta L es mediatriz de $\overline{QT}$. Sea P un punto del mismo semiplano, de recta borde L, que Q. La recta PT corta a L en el punto R.

Probar que m$\overline{PT}$ = m$\overline{PR}$ + m$\overline{PQ}$.

7º En la figura, $\overline{BD} \equiv \overline{CD}$. Probar que $A\hat{B}C > D\hat{C}B$.



8º En la Figura, □DEBF es un paralelogramo y $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$. Probar que □ABCD es un paralelogramo.

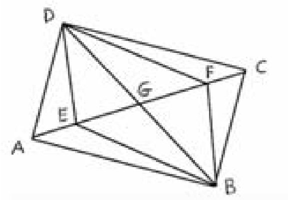
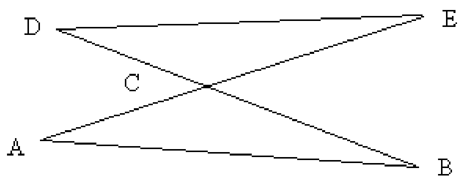


Figura 3.1. Los problemas. La numeración de cada uno de los problemas es la utilizada originalmente en la prueba final.

A continuación describimos los problemas, sus características y los procesos cognitivos que pueden demandar a los resolutores. Las soluciones a estos problemas no son únicas y dependen en gran medida de la forma en la que se observa la configuración inicial y las afirmaciones matemáticas que se le asocian.

PROBLEMA 2

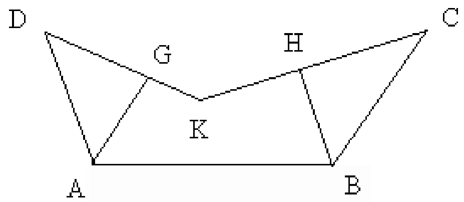
Dada la figura con $\overline{CE} \equiv \overline{CB}$ *y* $\hat{E} \equiv \hat{B}$*, probar que* $\hat{D} \equiv \hat{A}$.



Además de las hipótesis dadas por el problema, se puede observar que $D\hat{C}E \equiv A\hat{C}B$ por ser ángulos opuestos por el vértice. Aplicando el axioma Ángulo-Lado-Ángulo de congruencia de triángulos (las hipótesis necesarias para aplicar este teorema ya están verificadas) obtenemos $D\overset{\Delta}{C}E \equiv A\overset{\Delta}{C}B \rightarrow \hat{D} \equiv \hat{A}$. Este problema presenta una configuración inicial y demanda una demostración. Para ello hay que identificar los triángulos $\overset{\Delta}{DCE}$ (no es prototípico) y $\overset{\Delta}{ACB}$ para asociarles el axioma Ángulo-Lado-Ángulo. Estas acciones pueden ser entendidas como evidencias de una aprehensión operativa (identificación de los triángulos $\overset{\Delta}{DCE}$ y $\overset{\Delta}{ACB}$) y de una aprehensión discursiva (asociación del axioma A-L-A a dichos triángulos).

PROBLEMA 3

Si $\overline{DG} \equiv \overline{CH}$, $\hat{D} \equiv \hat{C}$ *y* $\overline{AG} \perp \overline{DK}$ *y* $\overline{BH} \perp \overline{CK}$, *probar que* $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.



El problema proporciona una configuración inicial y requiere de una demostración formal para su resolución. Una posible solución consiste en aplicar el teorema A-L-A a los triángulos $\overset{\Delta}{DGA}$ y $\overset{\Delta}{CHB}$, verificando sus hipótesis, con lo que $\overset{\Delta}{DGA} \equiv \overset{\Delta}{CHB} \rightarrow \overline{AD} \equiv \overline{BC}$. La identificación de triángulos la entendemos como aprehensión operativa y la asociación del teorema A-L-A es evidencia de una aprehensión discursiva.

PROBLEMA 6

En un plano, la recta L es mediatriz de $\overline{QT}$. *Sea P un punto del mismo semiplano, de recta borde L, que Q. La recta PT corta a L en el punto R.*

Probar que $m\overline{PT} = m\overline{PR} + m\overline{PQ}$.

En la figura 3.2 mostramos una posible configuración inicial del problema. Para su resolución hay que probar que $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$, lo que es evidente por ser R un punto de la mediatriz. Entonces d(P,T) = d(P,R) + d(R,T) = d(P,R) + d(R,Q) por la congruencia probada de segmentos. En este problema es conveniente realizar una conversión del registro en el que se encuentra el enunciado del problema a un registro gráfico como mostramos en la figura 3.2. Asociar la definición de mediatriz es evidencia de una aprehensión discursiva e identificar los distintos elementos geométricos (puntos y segmentos) son evidencias de diversas aprehensiones operativas. El problema demanda una prueba formal. Una vez realizada esta conversión el estudiante podría modificar la configuración (aunque no es necesario) y asociar alguna afirmación matemática para resolver el problema de otra manera distinta a la señalada.

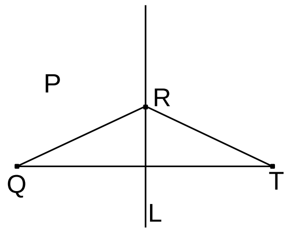
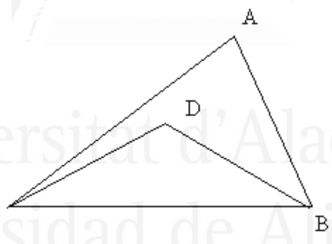


Figura 3.2

PROBLEMA 7

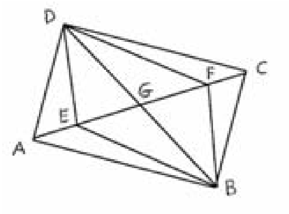
En la figura, $\overline{BD} \equiv \overline{CD}$. *Probar que* $A\hat{B}C > D\hat{C}B$.



El triángulo $C\overset{\Delta}{D}B$ es isósceles (por hipótesis) y el ángulo $A\hat{B}C > D\hat{B}C$ (pues D es un punto interior de $A\hat{B}C$), luego $A\hat{B}C > D\hat{C}B$ ya que $D\hat{C}B$ es congruente al ángulo $D\hat{B}C$ por ser triángulo isósceles. EL problema proporciona la configuración inicial y demanda una prueba formal. Respecto a los procesos cognitivos es necesario identificar los dos triángulos, sus ángulos y sus lados (aprehensiones operativas) y asociar el teorema de congruencia de ángulos en un triángulo isósceles (aprehensión discursiva). El enunciado del problema dificulta el reconocimiento del ángulo $D\hat{B}C$ relevante para su resolución.

PROBLEMA 8

En la figura, □DEBF es un paralelogramo y $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$. *Probar que □ABCD es un paralelogramo.*



Para su resolución se puede comprobar que G es el punto medio de las diagonales $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$ del cuadrilátero ABCD. Se cumple que G es punto medio de $\overline{DB}$ (pues es diagonal del paralelogramo DEBF) y que d(A,E) + d(E,G) = d(F,C) + d(G,F) → $\overline{AG} \equiv \overline{CG}$, luego G es punto medio de $\overline{AC}$. En este problema ha aumentado el número de subconfiguraciones existentes (paralelogramo, diagonales y triángulos) que pueden identificarse a partir de la configuración inicial, estando unas contenidas en otras. La identificación de las subconfiguraciones relevantes son evidencias de aprehensiones operativas y la asociación de la propiedad de paralelogramos, la definición de punto medio y la congruencia de segmentos son consideradas aprehensiones discursivas. La configuración inicial puede dificultar el reconocimiento de las subconfiguraciones relevantes.

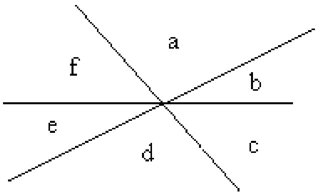
En la descripción realizada de los problemas se ha detallado una solución y los procesos cognitivos que pueden intervenir. Estos problemas demandan al estudiante la realización de un discurso encadenando distintos pasos de inferencia del proceso deductivo con el fin de encontrar la solución al problema. Es decir, los problemas demandan identificar o modificar las distintas configuraciones relevantes y a su vez el estudiante debe asociar afirmaciones matemáticas para generar el discurso.

Desde el punto de vista de los procesos de visualización y de razonamiento, esta clase de problemas son los más interesantes para la investigación ya que es necesario modificar o incluso construir la configuración inicial y así identificar cuáles son las subconfiguraciones relevantes para resolverlo y qué afirmaciones matemáticas permite desarrollar el discurso teórico.

Los otros problemas del examen final

El examen final constaba de otros tres problemas de geometría que no han sido utilizados en la investigación. Sin embargo, consideramos conveniente mostrar los motivos por los que no los hemos seleccionado. Los problemas son:

1º En la figura, tres rectas coplanarias se cortan en un punto. Si a=85º y e=30º, encontrar b, c, d y f.



4º ¿Qué conclusión puedes sacar de las hipótesis: $\overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{DEF}$ y $\overset{\triangle}{EDF} \equiv \overset{\triangle}{RST}$? Haz un dibujo que aclare tu razonamiento.

5º a) Combina las dos afirmaciones siguientes en un único enunciado de la forma “si y sólo si”:

Si un triángulo es equilátero, es isósceles.

Si un triángulo es isósceles, es equilátero.

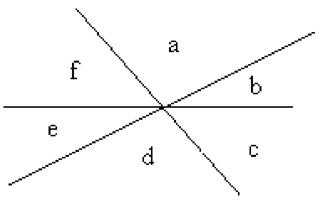
b) ¿Es cierto el enunciado final? Razona tu respuesta.

Figura. Los tres problemas eliminados.

A continuación describimos los problemas con una posible solución, sus características y los procesos cognitivos que pueden demandar a los resolutores.

PROBLEMA 1

En la figura, tres rectas coplanarias se cortan en un punto. Si a=85º y e=30º, encontrar b, c, d y f.



Para resolver el problema, el estudiante debe asociar a la configuración dada una afirmación matemática que relacione ángulos opuestos. Dado que dos ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo tenemos que $\hat{b} = 30º$; $\hat{c} = 65º$; $\hat{d} = 85º$; $\hat{f} = 65º$. También puede asociar la propiedad que afirma: Un ángulo llano mide 180º. Este problema presenta una configuración inicial y no requiere de una demostración formal sino que es suficiente con identificar los ángulos para resolverlo (aprehensiones operativas) y asociar alguna de las afirmaciones matemáticas anteriores (aprehensión discursiva). Puede generarse un discurso para resolver el problema mediante varios ciclos de *identificación* (ángulo)-*asociación* (teorema), es decir son evidencias de aprehensión operativa y aprehensión discursiva interactuando.

El problema requiere de alguna afirmación matemática utilizada como instrumento para resolver el problema. Es decir, el problema no demanda al estudiante el desarrollo de una prueba formal sino una solución, normalmente numérica, que lo resuelva. Este es el motivo por el cual no consideramos el análisis de las respuestas al problema 1 como instrumento de la investigación.

PROBLEMA 4

¿Qué conclusión puedes sacar de las hipótesis: $\overset{\Delta}{ABC} \equiv \overset{\Delta}{DEF}$ *y* $\overset{\Delta}{EDF} \equiv \overset{\Delta}{RST}$ *? Haz un dibujo que aclare tu razonamiento.*

Si $\overset{\Delta}{ABC} \equiv \overset{\Delta}{DEF}$ y $\overset{\Delta}{EDF} \equiv \overset{\Delta}{RST}$, tenemos que $\overset{\Delta}{DEF} \equiv \overset{\Delta}{SRT}$ y por la transitividad de la congruencia, $\overset{\Delta}{ABC} \equiv \overset{\Delta}{SRT}$. Por tanto los ángulos y lados respectivos son congruentes. En este problema no se proporciona ninguna configuración inicial ni se demanda una prueba formal sino que se pretende conocer si los participantes operan con cuestiones de equivalencia lógica. Además, se pide realizar un dibujo. Para ello es necesario convertir la información del enunciado que está en un registro simbólico a un registro gráfico. Es decir, es necesario realizar una conversión.

PROBLEMA 5

a) Combina las dos afirmaciones siguientes en un único enunciado de la forma "si y sólo si":

Si un triángulo es equilátero, es isósceles.

Si un triángulo es isósceles, es equilátero.

b) ¿Es cierto el enunciado final? Razona tu respuesta.

a) La proposición resultante sería: "Un triángulo es equilátero si y solo si es isósceles"
b) El enunciado es falso, pues si un triángulo es equilátero, es isósceles pero el recíproco es falso en general, es suficiente elegir un triángulo isósceles rectángulo.

Para resolver este ejercicio es necesario que los estudiantes conozcan y manejen cuestiones de equivalencia lógica. El problema no requiere de una prueba formal, ni proporciona configuración inicial ni demanda conversión.

Los problemas 4 y 5 se centran principalmente en el conocimiento de la estructura deductiva (hipótesis, afirmación matemática y tesis) y de las posibles equivalencias lógicas que pueden deducirse. Estos problemas tampoco son considerados en nuestra investigación.

Con el fin de tener una idea de los procesos de visualización y de razonamiento que demuestran los estudiantes se han analizado las repuestas escritas a los 5 problemas destacados previamente. Para ello, hemos diseñado un procedimiento de análisis que nos permite encontrar evidencias de los distintos procesos cognitivos utilizados.

3.3 Procedimiento del Análisis

Se ha realizado un análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a la colección de problemas, que se ha llevado a cabo en dos fases. En la figura 3.3 se muestra un esquema de las dos fases del análisis. En la primera fase se identifican evidencias de los distintos tipos de aprehensiones (perceptiva, discursiva y operativa) y el discurso seguido (natural o teórico) en las respuestas realizadas por los estudiantes (flecha 1 de la figura 3.3).

En esta primera fase del análisis se han observado interacciones entre los distintos tipos de aprehensión en las respuestas escritas. Este hecho ha sugerido la necesidad de realizar un segundo análisis para obtener evidencias de la potencial coordinación existente en dichas interacciones. Para realizar sistemáticamente esta segunda fase del análisis, se procedió a transcribir las respuestas dadas por los estudiantes y cada uno de los protocolos se divide en secciones analizables numeradas, que hemos llamado unidades de información (flecha 2 de la figura 3.3). Después de la transcripción y su posterior división, se realiza la identificación de errores en la solución del estudiante, tarea que hemos llamado carencias. Tras estas tareas, se buscan los elementos que configuran los pasos de inferencia (hipótesis, afirmaciones matemáticas y tesis) de la respuesta realizada por el estudiante y que permiten construir un esquema, que llamamos mapa de estructura, con el fin de observar el discurso seguido globalmente. Por último, con los datos obtenidos, estudiamos las interacciones de los procesos cognitivos que evidencia la respuesta dada por el estudiante (flecha 3 de la figura 3.3).

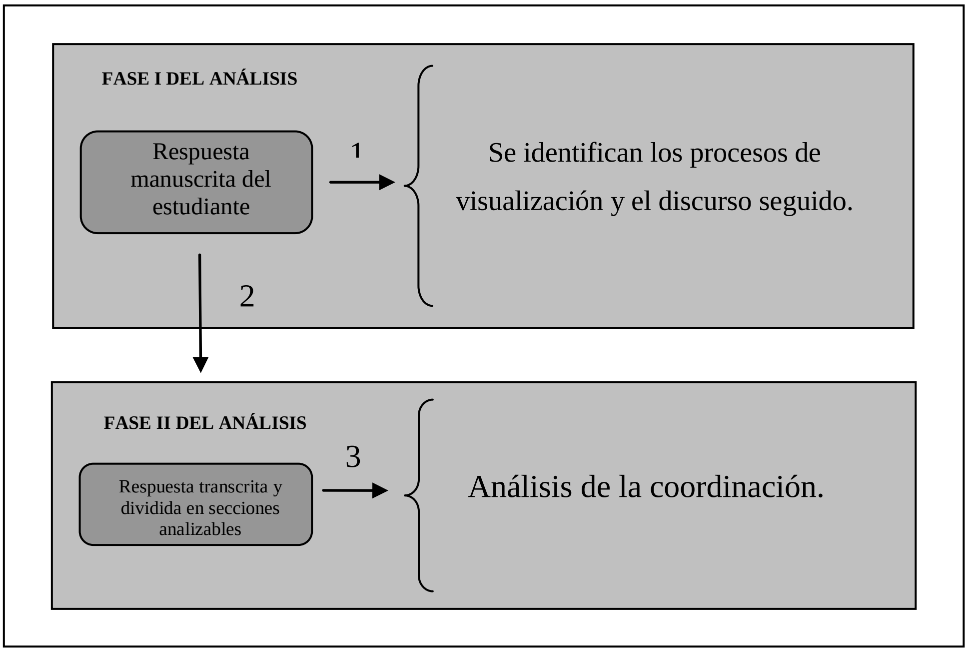


Figura 3.3. Esquema-resumen de los dos análisis realizados.

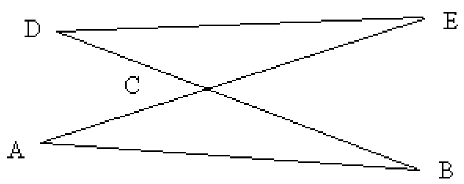
3.3.1 Fase I: Identificación de los procesos de visualización y del discurso seguido

Las acciones mentales que realizan los estudiantes cuando resuelven un problema no son observables, si bien sus respuestas escritas aportan información sobre los procesos cognitivos realizados. En primer lugar analizamos los procesos cognitivos, descritos en el marco teórico, que se evidencian en las respuestas dadas por los estudiantes. Para identificar en la investigación la respuesta de un estudiante a un problema geométrico, hemos utilizado un par ordenado de números:

- La primera componente del par ordenado tiene un rango del 1 al 55 y representa al estudiante que resuelve el problema.
- La segunda componente tiene un rango del 1 al 8 e indica el número del problema (por ejemplo, la solución realizada por el estudiante 41 al problema 3, se denota por (41, 3)).

A continuación se muestra un ejemplo de la primera fase del análisis:

2º Dada la figura con $\overline{CE} \equiv \overline{CB}$ *y* $\hat{E} \equiv \hat{B}$, *probar que* $\hat{D} \equiv \hat{A}$.



Respuesta dada por el estudiante 55:

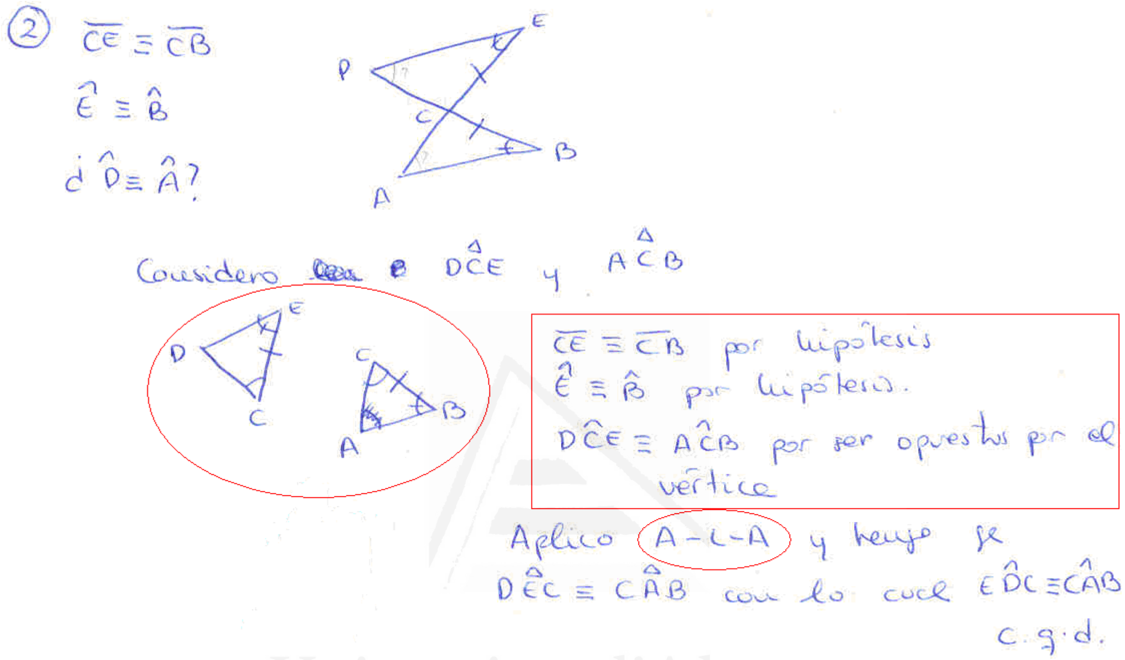


Figura 3.4. Respuesta escaneada (55, 2) con marcas que muestran evidencias de procesos cognitivos.

Descripción:

El estudiante extrae de la configuración inicial los dos triángulos interiores a la elipse grande de la figura 3.4. Esta acción se identifica con una aprehensión operativa. El estudiante asocia a los triángulos una afirmación matemática necesaria para generar una solución al problema, el axioma A-L-A. Esta asociación la hemos denominado aprehensión discursiva. Además, para poder realizar esta asociación, en una de las hipótesis que hay que verificar, el alumno aísla en la configuración inicial dos ángulos opuestos por el vértice (de nuevo realiza una aprehensión operativa) y asocia la propiedad (afirmación matemática): "ángulos opuestos por el vértice son congruentes" (de nuevo realiza una aprehensión discursiva). Es decir, en primer lugar el estudiante asocia el axioma de congruencia A-L-A a los dos triángulos identificados, subconfiguraciones relevantes, para resolver el problema (el axioma se ha marcado con una elipse pequeña en la figura). Además, el estudiante verifica una de las hipótesis del teorema A-L-A (marcadas con un rectángulo en la figura) que no está dada en las hipótesis del enunciado y utiliza la propiedad de ángulos opuestos por el vértice para verificar que $D\hat{C}E \equiv A\hat{C}B$. Finalmente concluye con el resultado pedido. El estudiante resuelve el problema generando un discurso teórico.

De la aprehensión operativa se resalta dos condiciones para identificar este proceso en las respuestas de los estudiantes:

1. Los estudiantes pueden realizar, en la configuración, modificaciones en las que intervengan elementos geométricos, sea cual sea su dimensión. Por ejemplo introducir, extraer o modificar puntos, segmentos, rectas, triángulos, polígonos regulares... Las marcas son acciones que realizan los estudiantes a la hora de operar con los distintos registros (gráfico, simbólico). Las marcas de congruencia o indicadores de ángulos, entre otros, no son considerados como aprehensiones operativas realizadas sobre la configuración a no ser que las marcas vayan dirigidas a la identificación de subconfiguraciones relevantes.
2. Las modificaciones han de ser útiles o justificables para la resolución del problema, es decir, deben tener como objetivo ayudar a elaborar una repuesta del estudiante (entendemos que realizar un pictograma como pintar una cara "☺ mediante elementos geométricos, como puntos, arcos y circunferencias, debe tener algún tipo de justificación en la solución del problema para ser considerado una aprehensión operativa y no simplemente una acción que nada tiene que ver con la resolución del problema planteado). Las modificaciones que no tengan relevancia para el desarrollo del discurso no son entendidas como unidades de información ni como procesos de visualización.

En esta fase I del análisis se ha caracterizado el tipo de razonamiento utilizado por los alumnos en relación con los procesos discursivos generados. Distinguimos dos tipos de discurso: proceso discursivo teórico y proceso discursivo natural. Esta caracterización junto con los distintos procesos de visualización observados nos ha servido para clasificar a los alumnos según dos tipos de comportamiento:

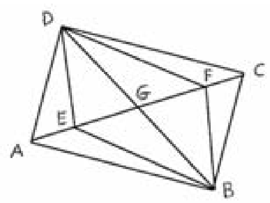
- El comportamiento ingenuo que viene caracterizado por la generación de un proceso discursivo natural en la resolución de problemas geométricos.
- El Comportamiento matemático que se caracteriza por la generación de un proceso discursivo teórico en la resolución de problemas de geometría.

En particular, la observación de la pertinencia o no de las afirmaciones matemáticas usadas por el alumno en sus respuestas a cada uno de los problemas nos ha permitido refinar la clasificación de los comportamientos observados.

La función que desempeña la configuración inicial es determinante para caracterizar estos comportamientos. En un primer momento la configuración posee un papel heurístico hasta que se obtienen las ideas claves que permitan resolver el problema. Una vez logradas estas ideas, el estudiante puede desarrollar un proceso discursivo teórico y la configuración pasa a tener una función de esquema o resumen de los elementos geométricos que aparecen en el problema.

Mostramos la respuesta del estudiante 22 al problema 8 como ejemplo de un comportamiento matemático:

En la figura, □DEBF es un paralelogramo y $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$. *Probar que □ABCD es un paralelogramo.*



Solución escaneada:

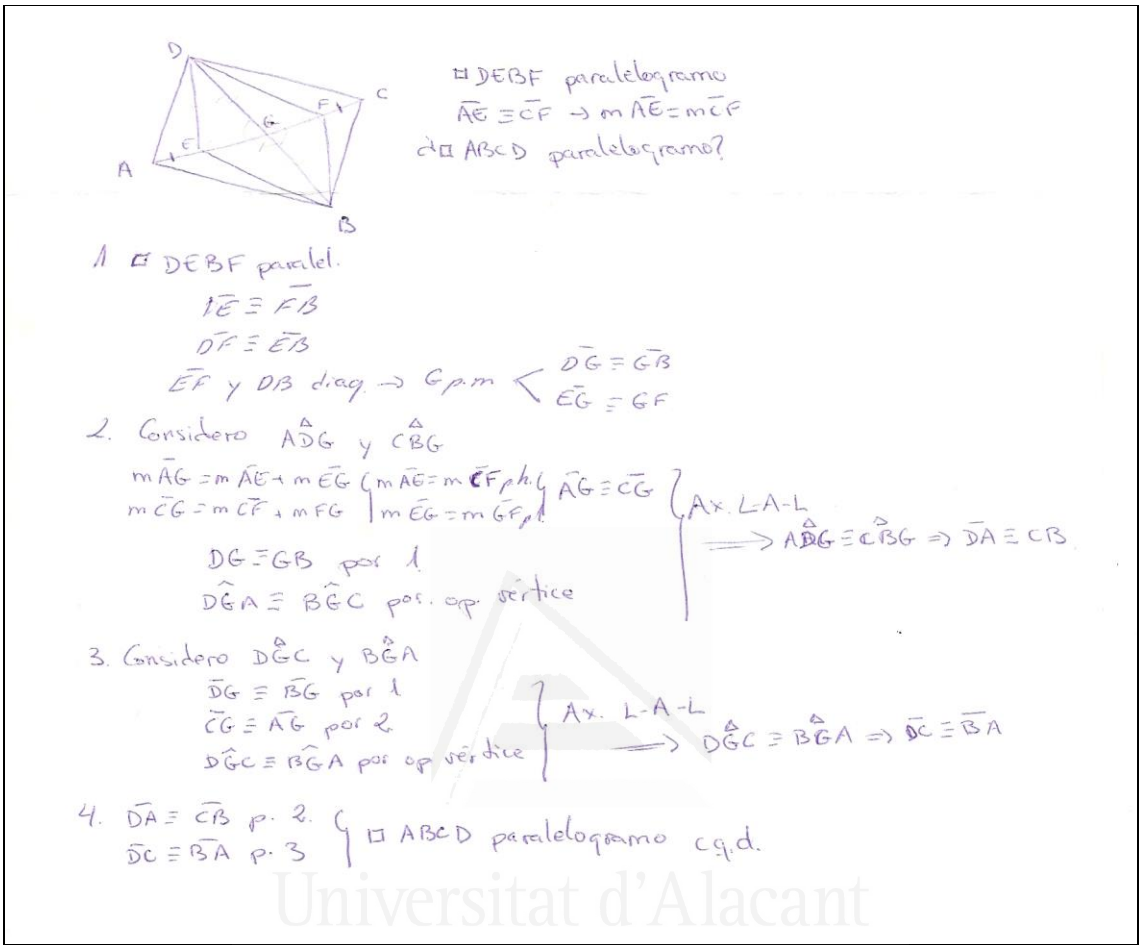


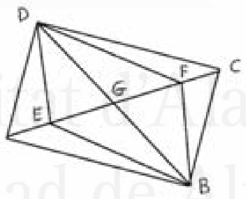
Figura 3.5. Respuesta escaneada (22, 8) en la que se identifica un discurso teórico característico de los comportamientos matemáticos.

La respuesta del estudiante 22 está dividida en 4 proposiciones (niveles locales). En ellas distinguimos las hipótesis a verificar, la afirmación matemática utilizada y, por último, la conclusión que obtiene el estudiante de cada una de ellas. Además, estas proposiciones están unidas por su conclusión estructurando su respuesta como un discurso teórico. Esta manera de proceder permite clasificar la respuesta como un comportamiento matemático.

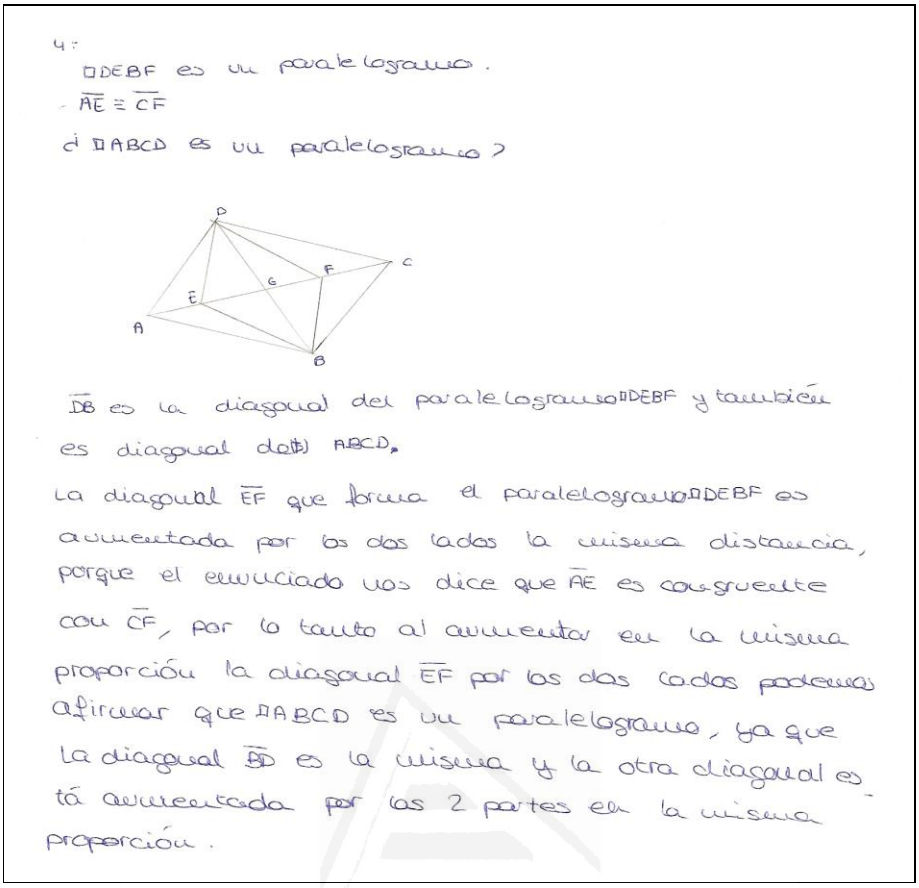
Un comportamiento matemático no deja de serlo por una notación en ocasiones inadecuada ni tampoco por una deficiente organización matemática a la hora de presentar la solución del problema. Encontramos algunas respuestas con errores de notación pero que construyen de manera correcta el discurso teórico realizado. Por ejemplo, en la respuesta (22, 8) de la figura 3.5, observamos que el estudiante en la proposición número 4 no especifica el teorema de caracterización de paralelogramos para concluir el problema (aunque sí lo utiliza). El discurso seguido implica el conocimiento de afirmaciones matemáticas y la verificación de sus hipótesis pero no necesariamente de elementos contextuales como los nombres propios por las que son conocidas estas afirmaciones (Teorema de Pitágoras, Teorema de Thales…). Además el discurso no ha de ser necesariamente mediante un registro simbólico, sino que se ajuste a una estructura deductiva matemática pudiendo expresarse en lenguaje natural.

En un comportamiento ingenuo el estudiante realiza un discursivo natural. La respuesta realizada por el participante 26 al problema 8 muestra cómo la manipulación de la configuración inicial es suficiente como solución del problema. Esta respuesta es un ejemplo de comportamiento ingenuo.

En la figura, □DEBF es un paralelogramo y $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$. *Probar que □ABCD es un paralelogramo.*



Respuesta (26, 8):


4:

□DEBF es un paralelogramo.

- $\overline{AE} \cong \overline{CF}$

¿□ABCD es un paralelogramo?

$\overline{DB}$ es la diagonal del paralelogramo□DEBF y también es diagonal del ABCD.
La diagonal $\overline{EF}$ que forma el paralelogramo□DEBF es aumentada por los dos lados la misma distancia, porque el enunciado nos dice que $\overline{AE}$ es congruente con $\overline{CF}$, por lo tanto al aumentar en la misma proporción la diagonal $\overline{EF}$ por los dos lados podemos afirmar que □ABCD es un paralelogramo, ya que la diagonal $\overline{BD}$ es la misma y la otra diagonal está aumentada por las 2 partes en la misma proporción.

Figura 3.6. Respuesta escaneada (26, 8) en la que se identifica un discurso natural característico de los comportamientos ingenuos.

El estudiante identifica las diagonales del paralelogramo □DEBF y utiliza la congruencia de segmentos para manipular la configuración de manera que añadiendo los segmentos congruentes $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ a la diagonal $\overline{EF}$ se obtenga el segmento $\overline{AC}$. El participante percibe que el cuadrilátero ABCD tiene dos diagonales que se cortan en el punto medio y concluye que ABCD es un paralelogramo. El estudiante visualmente percibe las propiedades, no las justifica, y conjetura que ABCD es un paralelogramo. La respuesta del estudiante está realizada mediante un discurso natural con la finalidad de comunicar su conjetura.

Identificar alguna propiedad visualmente, sin requerir la verificación de la misma, y utilizarla como instrumento para resolver el problema, es característico del comportamiento ingenuo. En relación con esta idea, algunos problemas enuncian hipótesis que deben ser utilizadas para probar alguna de las tesis propuestas. Si el participante no utiliza las hipótesis dadas, las omite o no es capaz de relacionarlas con ninguna afirmación matemática, siendo necesarias para la resolución del problema y más cuando se usan configuraciones particulares, la respuesta también la hemos asignado al comportamiento ingenuo.

Se completa la fase I del análisis, organizando las respuestas dadas por cada estudiante a todos los problemas, identificando tipo de aprehensión y tipo de discurso seguido. Para ello, construimos una tabla de doble entrada que agrupe los protocolos según los procesos cognitivos identificados y el tipo de discurso generado (figura 3.7). En la primera columna mostramos los procesos de visualización considerados (aprehensión perceptiva, aprehensión discursiva y aprehensión operativa y sus combinaciones) y en la primera fila se muestra los problemas considerados en este estudio y los procesos de razonamiento en relación con el discurso seguido, discurso natural (DN) y teórico (DT). La finalidad de la clasificación de las respuestas dadas a los problemas de geometría, es la de agrupar y diferenciar distintos comportamientos del individuo según los procesos de visualización evidenciados y el discurso generado, natural o teórico.

	Problema 2		Problema 3		Problema 6		Problema 7		Problema 8	
	DN	DT	DN	DT	DN	DT	DN	DT	DN	DT
A. Perceptiva										
A. Perceptiva y A. Operativa										
A. Perceptiva y A. Discursiva										
A. Discursiva y A. Operativa										

Figura 3.7

La identificación de las aprehensiones discursivas y operativas y las características del discurso seguido (fase I del análisis) ha permitido observar interacciones entre dichos procesos. La búsqueda de evidencias de estás interacciones nos ha llevado a la necesidad de realizar un refinamiento del primer análisis para observar cómo actúan los procesos cognitivos entre sí durante la resolución de los problemas.

3.3.2 Fase II. Identificación de elementos que configuran los pasos de inferencia y Coordinación

A raíz de la fase I del análisis de las respuestas de los estudiantes a los distintos problemas se ha visto la necesidad de describir algunos aspectos de los procesos de visualización y de razonamiento con mayor detalle, con la finalidad de mejorar la observación de las interacciones detectadas entre las aprehensiones y qué relación tienen con el discurso generado. Para ello, se ha examinado cada respuesta en tres etapas. Las tres se muestran mediante tres tablas con dos columnas cada una, donde la primera columna, en todas las tablas, consiste en la transcripción de la respuesta y la segunda columna se basa en el análisis de las carencias (etapa 1), identificación de los procesos de visualización, recuperando los datos de la fase I, (etapa 2) y el análisis de los pasos de inferencia (etapa 3). En la figura 3.8 se muestra un esquema de las tres etapas.

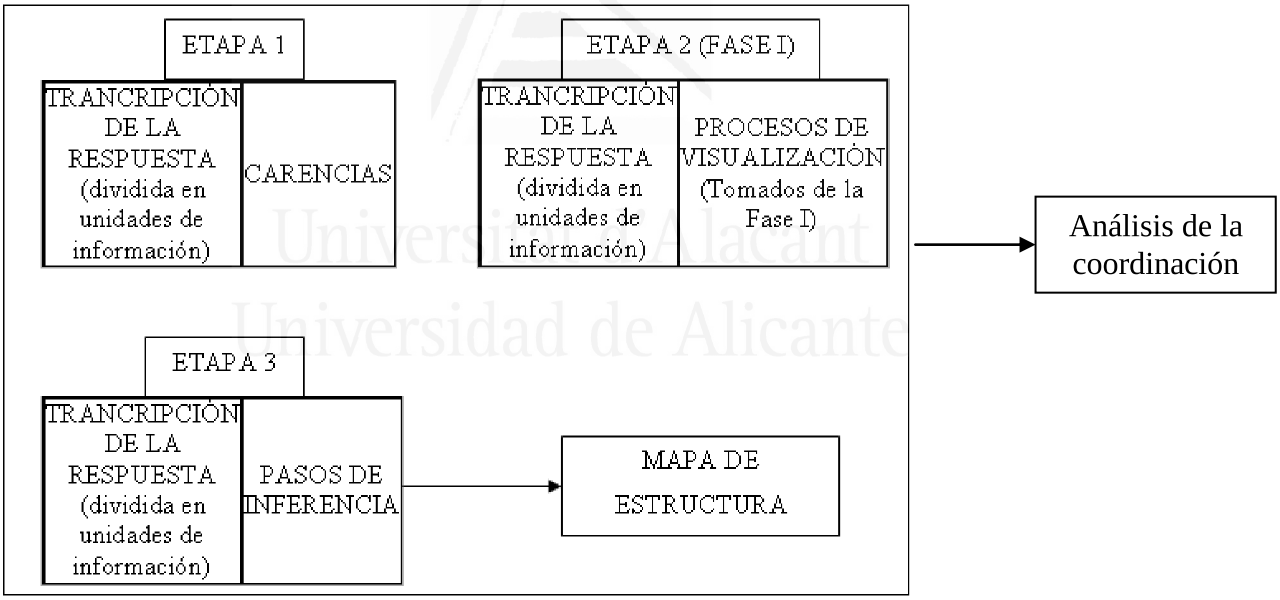
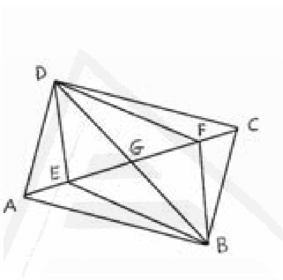


Figura 3.8. Esquema del análisis de la fase II. Este análisis incluye también los resultados obtenidos en la fase I, procesos de visualización.

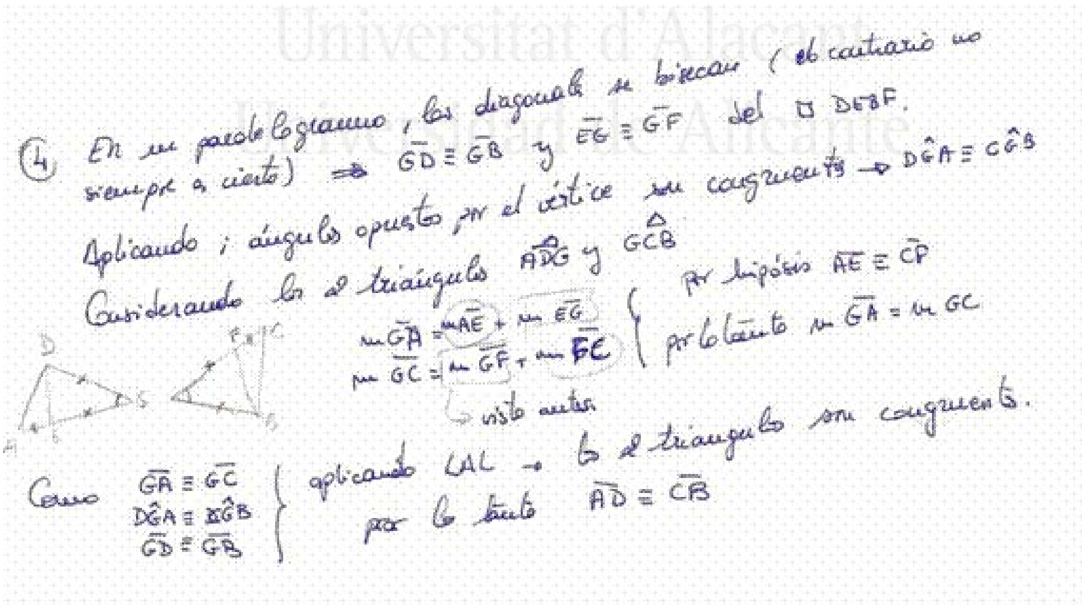
La trascripción de la respuesta, primera columna de cada tabla, se muestra en cada etapa para facilitar el seguimiento del análisis. Tras la realización la tercera etapa construimos el mapa de estructura para observar globalmente el discurso seguido. A continuación describimos con detalle cada una de las etapas.

La primera tarea realizada en la fase II del análisis consiste en transcribir y dividir las respuestas. En la trascripción de la repuesta dada por el estudiante surge la necesidad de definir lo que hemos llamado *unidad de información*. Llamamos unidad de información a un fragmento de la solución del problema en el que es posible identificar evidencias de algún proceso de visualización o un tipo del discurso generado. El objetivo aquí consiste en identificar los pasos de inferencia que realiza un estudiante cuando hace mención a una hipótesis, a una propiedad matemática o a su conclusión. Como ejemplo mostramos un fragmento de la respuesta (40, 8), junto con la transcripción y división en unidades de información. En el ejemplo de la figura 3.9 se muestra el fragmento de la respuesta (40,8) dividido en cinco unidades de información:

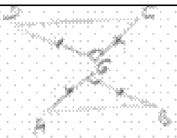
Problema 8: En la figura, □DEBF es un paralelogramo y $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$. *Probar que □ABCD es un paralelogramo.*



Respuesta realizada por el estudiante 40:



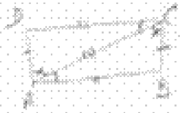
Haciendo lo mismo con



$\overline{DG} \equiv \overline{GB}$
$\overline{GA} \equiv \overline{GC}$ } LAL → obtenemos $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$
$D\hat{G}C \equiv A\hat{G}B$ → los ángulos opuestos por el vértice son congruentes

Así tenemos dos pares de lados opuestos del paralelogramo ADCB

Para comprobar que tienen los ángulos iguales dos a dos;



Comparando los 2 triángulos; tienen los tres lados iguales $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$, $\overline{DA} \equiv \overline{CB}$, AC lado común } LLL son congruentes por lo que sus ángulos también lo son $C\hat{A}B \equiv D\hat{C}A$, $C\hat{B}A \equiv A\hat{D}C$, $D\hat{A}C \equiv A\hat{C}B$

También se puede demostrar por transversal que corta dos rectas y cuyos ángulos alternos internos son congruentes entonces las dos rectas son paralelas.

Fragmento de la respuesta:

En un paralelogramo, las diagonales se bisecan (el contrario no siempre es cierto) → $\overline{GD} \equiv \overline{GB}$ y $\overline{EG} \equiv \overline{GF}$ del □ DEBF.
Aplicando; ángulos opuestos por el vértice son congruentes → $D\hat{G}A \equiv C\hat{G}B$
Considerando los 2 triángulos $\overset{\Delta}{ADG}$ y $\overset{\Delta}{GCB}$

Transcripción del fragmento:
En un paralelogramo, las diagonales se bisecan (el contrario no siempre es cierto) →

$\overline{GD} \equiv \overline{GB}$ y $\overline{EG} \equiv \overline{GF}$ del □DEBF.

Aplicando; ángulos opuestos por el vértice son congruentes → $D\hat{G}A \equiv C\hat{G}B$

Considerando los dos triángulos $A\overset{\Delta}{D}G$ y $G\overset{\Delta}{C}B$

División en unidades de información:
1) En un paralelogramo, las diagonales se bisecan (el contrario no siempre es cierto)

2) → $\overline{GD} \equiv \overline{GB}$ y $\overline{EG} \equiv \overline{GF}$ del □DEBF.
3) Aplicando; ángulos opuestos por el vértice son congruentes

4) → $D\hat{G}A \equiv C\hat{G}B$

5) Considerando los dos triángulos $A\overset{\Delta}{D}G$ y $G\overset{\Delta}{C}B$

Figura 3.9

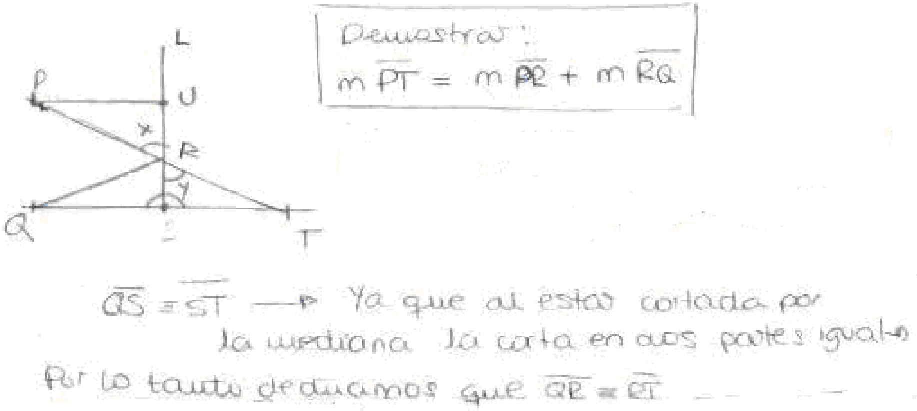
Una unidad de información debe ser evidencia de un proceso de visualización o algún elemento de una afirmación matemática (en la investigación hemos distinguido tres: las hipótesis a demostrar, el enunciado de la afirmación o proposición matemática y su tesis o conclusión). Sin embargo, puede ocurrir que en alguna respuesta no todo lo que un estudiante escribe constituya una unidad de información. Es decir, podría darse el caso de que un fragmento del protocolo no sea evidencia de un proceso de visualización ni una sección del discurso generado (hipótesis, propiedad matemática, conclusión). Por ejemplo, pensemos el caso en que un estudiante introduzca algunos dibujos en la configuración inicial que no tienen relación con el problema.

CARENCIAS (etapa 1)

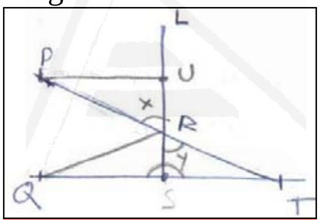
Esta fase del análisis tiene como objetivo identificar las ideas incompletas o parcialmente incorrectas en las respuestas de los estudiantes. Una pregunta que surge es si podemos tener evidencias de procesos discursivos teóricos con partes incompletas o incluso erróneas. Para responder a esta cuestión hemos identificado las unidades de información erróneas o incompletas. Como ejemplo, se muestra el problema 6 y una sección de la transcripción realizada por el estudiante 2:

Problema 6: En un plano, la recta L es mediatriz de $\overline{QT}$. *Sea P un punto del mismo semiplano, de recta borde L, que Q. La recta PT corta a L en el punto R.*

Probar que $m\,\overline{PT} = m\,\overline{PR} + m\,\overline{PQ}$.



1) Demostrar $m\,\overline{PT} = m\,\overline{PR} + m\,\overline{PQ}$
2) Configuración inicial y subconfiguraciones introducidas por el estudiante:



3) $\overline{QS} \equiv \overline{ST}$ → Ya que al estar cortada por la ***mediana***, la corta en dos partes iguales.

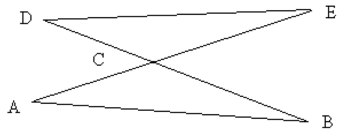
4) Por lo tanto deducimos que $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$

[…]

Figura 3.10. Sección de la transcripción al protocolo (2, 6).

El estudiante 2 parece utilizar en su solución una caracterización de mediatriz para el problema 6 y además es pertinente para resolverlo. Pero al analizar la respuesta se observa en el punto 3) que el estudiante afirma: “utilizando la caracterización de la *mediana*”… y no menciona para nada la mediatriz, aunque realmente esté usando su caracterización. Es decir, un estudiante puede mezclar conceptos, definiciones, caracterizaciones, etc.

Hemos utilizado el análisis de las carencias para mostrar lo que se ha entendido de algunas de las unidades de información incompletas o erróneas parcialmente sin modificar la intención de las mismas, según las evidencias que nos ofrezca la solución del participante. Nos centraremos en exponer cómo hemos entendido los errores de notación o de expresión matemática evitando modificar la evidencia y el sentido de la unidad de información. A continuación proponemos dos ejemplos más que muestran estas características (figura 3.11).

<table>
<tr><td colspan="2">Problema 2: Dada las figuras con $\overline{CE} \equiv \overline{CB}$ y $\hat{E} \equiv \hat{B}$, probar que $\hat{D} \equiv \hat{A}$.

</td></tr>
<tr><td>Unidades de información incorrectas o incompletas</td><td>Unidades de información corregidas</td></tr>
<tr><td>Estudiante 35: $\hat{C} \equiv \hat{C}$ por la propiedad reflexiva y por ser ángulos opuestos por el vértice.

Estudiante 34: El $D\hat{C}E$ y $A\hat{C}B$ son opuestos por el vértice con lo que $D\hat{C}E \equiv A\hat{C}B$ por T^{a}. conocido de oposición de vértices.</td><td>Estudiante 35: $D\hat{C}E \equiv A\hat{C}B$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

Estudiante 34: El $D\hat{C}E$ y $A\hat{C}B$ son opuestos por el vértice con lo que $D\hat{C}E \equiv A\hat{C}B$ por ser ángulos opuestos al mismo vértice (T^{a}. Conocido).</td></tr>
</table>

Figura 3.11

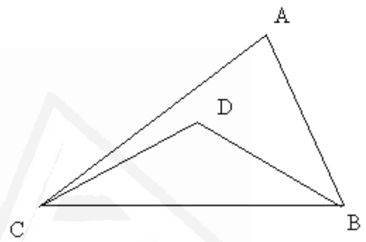
La figura 3.11 muestra en la primera columna dos unidades de información realizadas por los estudiantes 34 y 35 al problema 2. En la columna de la derecha se muestra cómo hemos entendido las unidades de información sin cambiar el sentido que el estudiante planteó. Entonces, si sólo se modifica o se corrige errores de notación ¿es realmente necesario este apartado de "carencias"? Al fijarnos solamente en errores de notación matemática ($\hat{C} \equiv \hat{C}$ en vez de $D\hat{C}E \equiv A\hat{C}B$) o en términos equivocados (mediana en vez de mediatriz) es difícil que se cambie el sentido de la unidad de información, pero aun así se cree necesario expresar cómo se ha entendido cada una de las unidades de información para evitar confusiones con el fin de ser más sistemáticos.

PROCESOS DE VISUALIZACIÓN (Etapa 2)

La etapa 2 consiste en la identificación de los procesos de visualización en la transcripción de la respuesta. Se ha recuperado la información obtenida en la fase I del análisis con el fin de homogeneizar la representación de los datos.

En el siguiente ejemplo, solución (1, 7), se observa unidades de información en las que podemos identificar procesos de visualización enfatizando las marcas realizadas sobre la configuración inicial:

Problema 7: *En la figura,* $\overline{BD} \equiv \overline{CD}$. *Probar que* $A\hat{B}C > D\hat{C}B$.



Solución realizada por el estudiante 1:

$\overline{BD} \equiv \overline{CD}$ → por hipótesis (nos lo da el problema)

Probar que $A\hat{B}C > D\hat{C}B$:

$\overline{BD} \equiv \overline{CD} \to D\hat{C}B \equiv D\hat{B}C$ → A lados congruentes se oponen ángulos ~~congruentes~~

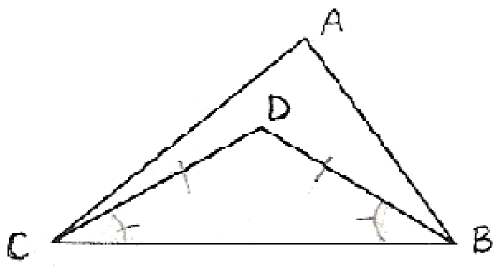


Figura 3.12. Respuesta (1, 7). Se muestra las marcas que realiza el estudiante sobre la configuración inicial.

En la figura 3.13 mostramos los procesos de visualización identificados. En la columna de la izquierda las unidades de información numeradas, en este caso del uno al cuatro, que representa una parte de la trascripción de la respuesta. En la columna de la derecha se indican los comentarios realizados a cada unidad de información. La numeración señala cómo se relacionan las unidades de información que aparecen en la columna de la izquierda con la función que desempeñan dentro de los procesos de visualización (columna de la derecha).

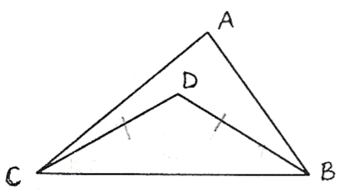
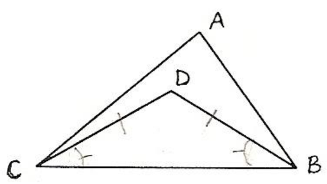
Trascripción de un fragmento de la respuesta dada al problema 7	**Análisis de los procesos de visualización**
1) $\overline{BD} \equiv \overline{CD} \rightarrow$ por hipótesis (Nos lo da el problema)  **2)** Probar que $A\hat{B}C > D\hat{C}B$: **3)** $\overline{BD} \equiv \overline{CD} \rightarrow D\hat{C}B \equiv D\hat{B}C$  **4)** $\rightarrow$ A lados congruentes se oponen ángulos congruentes.	**1)** Configuración inicial en la que introduce las marcas de congruencia de segmentos derivadas de la aprehensión discursiva con cambio de anclaje realizada en los puntos 1) y 3). Las marcas son evidencia de un cambio de anclaje del registro discursivo (enunciado) al visual (a la configuración) que se identifican debido a las marcas en los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$ que realiza el estudiante sobre su configuración. **3)** Aprehensión discursiva. Cambio de anclaje del discursivo (enunciado) al visual (a la configuración) identificado por las marcas de ángulos que ha realizado sobre la configuración. **4)** El estudiante asocia la afirmación 1 (en un triángulo, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes.) a la configuración. Esta acción se entiende como evidencia de una aprehensión discursiva.

Figura 3.13

La unidad de información *“**1)** $\overline{BD} \equiv \overline{CD} \rightarrow$ por hipótesis (Nos lo da el problema)”* se identifica con una aprehensión discursiva con cambio de anclaje, de discursivo a visual (el estudiante introduce las marcas de la congruencia de segmentos sobre la configuración inicial). Esta acción se repite en el punto 3) y las marcas de congruencia de ángulos que introduce en la configuración inicial. En el punto “***4)*** *→ A lados congruentes se oponen ángulos congruentes”* asocia una afirmación matemática a su configuración siendo esta acción evidencia de una aprehensión discursiva. En la columna de la derecha no aparece ningún comentario sobre el punto 2). Esto hecho se debe a que la unidad de información no es analizable desde el punto de vista de los procesos de visualización. Entendemos que si se identifica una aprehensión operativa en una unidad de información es debido a que anteriormente el estudiante ha realizado una identificación simple de la configuración (aprehensión perceptiva).

PASOS DE INFERENCIA. MAPA DE ESTRUCTURA (Etapa 3)

Esta sección se centra en los procesos de razonamiento en relación con los procesos discursivos (natural y teórico). Con las respuestas de los estudiantes transcritas y divididas en unidades de información se identifica la estructura del discurso de manera sistemática, observando los elementos que componen los pasos de inferencia (hipótesis, afirmaciones matemáticas y tesis) y posteriormente organizándolos en un esquema que hemos denominado mapa de estructura.

Como ejemplo, utilizamos el mismo fragmento de la respuesta (1, 7) que ha sido utilizada en el apartado anterior. En la columna de la izquierda de la figura 3.14 mostramos un fragmento de la trascripción de esta respuesta dividida en unidades de información, y en la columna de la derecha la identificación de cada uno de los elementos que componen los pasos de inferencia.

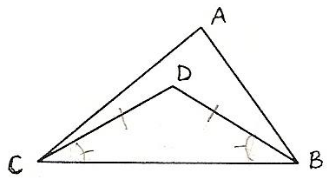
Trascripción de una sección de la respuesta dada al problema 7	**Pasos de inferencia**
1) 	
2) $\overline{BD} \equiv \overline{CD} \rightarrow$ por hipótesis (Nos lo da el problema)	**2)** Hipótesis del problema e hipótesis de la afirmación 1: En un triángulo, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes.
3) Probar que $A\hat{B}C > D\hat{C}B$:	**3)** Tesis a demostrar.
4) $\overline{BD} \equiv \overline{CD} \rightarrow D\hat{C}B \equiv D\hat{B}C$	**4)** Tesis de la afirmación 1.
5) $\rightarrow$ A lados congruentes se oponen ángulos congruentes.	**5)** Afirmación 1 (En un triángulo, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes).

Figura 3.14

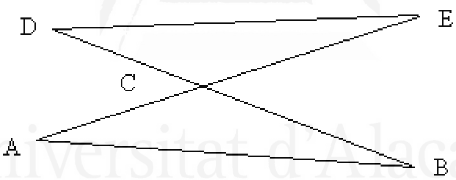
En la figura 3.14, las unidades de información están numeradas del uno al cinco. La numeración que hay en ambas columnas indica la relación entre las unidades de información (columna de la izquierda) y la función que realizan dentro del discurso seguido (columna de la derecha). Por ejemplo, *"**2)** $\overline{BD} \equiv \overline{CD} \rightarrow$ por hipótesis (Nos lo da el problema)"* es una unidad de información que cumple dos funciones dentro de la estructura deductiva, que son: *"**2)** Hipótesis del problema e hipótesis de la afirmación 1"*. Las unidades de información no tienen un orden establecido a la hora de aparecer en el discurso ya que las evidencias de los procesos de visualización y los pasos de inferencia van surgiendo en función de la habilidad del estudiante. Por este motivo se observa en la respuesta del estudiante cómo el punto **4)** es la tesis de la afirmación 1 y el punto **5)** corresponde al enunciado de la afirmación 1.

Algunas de las unidades de información son elementos que componen los pasos de inferencia que, en ocasiones, no se da totalmente ordenada en la solución del problema, dificultando la observación del discurso seguido. Por este motivo introducimos un esquema que organiza las unidades de información. En estos casos, identificar los niveles locales, organizarlos y tener una visión general del nivel global puede facilitar el reconocimiento del discurso desarrollado. A este esquema lo llamamos *mapa de estructura*.

Ejemplo mapa de estructura

A continuación presentamos un ejemplo (27, 2) con la finalidad de mostrar la construcción del mapa de estructura. Para ello se indica el enunciado del problema, la respuesta dada por el estudiante, la tabla que muestra el paso 3 del análisis y el mapa de estructura:

***2º** Dada las figuras con* $\overline{CE} \equiv \overline{CB}$ *y* $\hat{E} \equiv \hat{B}$, *probar que* $\hat{D} \equiv \hat{A}$.



Respuesta del participante 27 al problema 2.

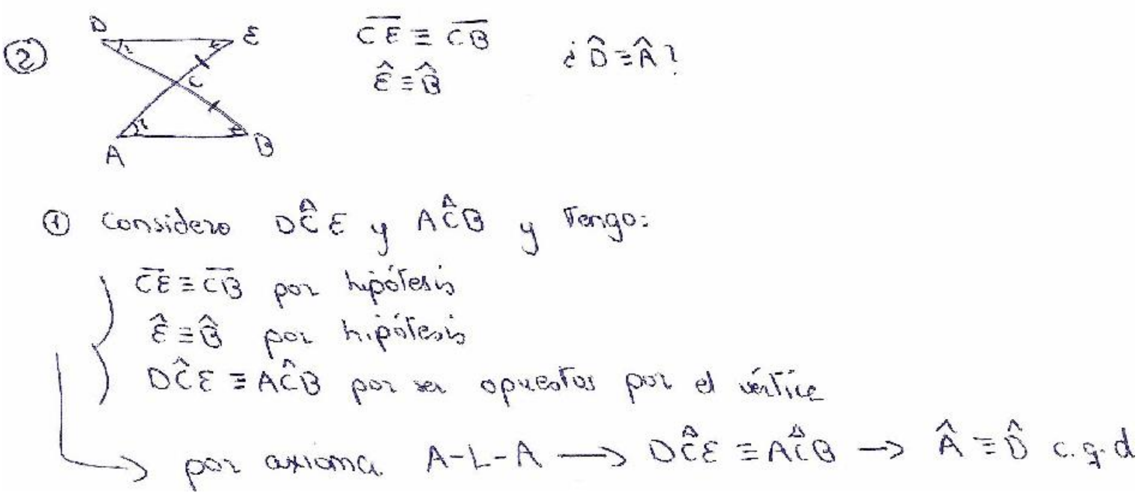


Figura 3.15

En la siguiente tabla se muestra la trascripción de la respuesta y la descripción de los pasos de inferencia necesarios para construir el mapa de estructura (etapa 3).

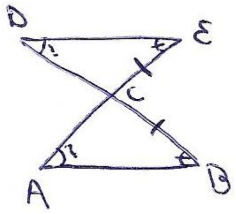
Trascripción completa de la respuesta dada al problema 2	**Pasos de inferencia**
1) 	
2) $\overline{CE}\equiv\overline{CB}$	**2)** Hipótesis dada por el problema.
3) $\hat{E}\equiv\hat{B}$	**3)** Hipótesis dada por el problema.
4) ¿$\hat{D}\equiv\hat{A}$?	**4)** Tesis del problema a demostrar.
5) 1 Considero $D\overset{\Delta}{C}E$ y $A\overset{\Delta}{C}B$ y tengo:	
6) $\overline{CE}\equiv\overline{CB}$ por hipótesis	**6)** Hipótesis del problema e hipótesis de la afirmación 1(axioma de congruencias de triángulos Ángulo-Lado-Ángulo).
7) $\hat{E}\equiv\hat{B}$ por hipótesis	**7)** Hipótesis del problema y otra hipótesis necesaria para aplicar la afirmación 1.
8) $D\hat{C}E\equiv A\hat{C}B$ por ser opuestos por el vértice	**8)** Hipótesis también necesaria para utilizar la afirmación 1.
9) Por axioma A-L-A	**9)** Afirmación 1: Axioma Ángulo-Lado-ángulo.
10) $\rightarrow D\overset{\Delta}{C}E\equiv A\overset{\Delta}{C}B$	**10)** tesis de la afirmación 1.
11) $\rightarrow \hat{A}\equiv\hat{D}$	**11)** Consecuencia de la tesis anterior y tesis del problema ya demostrado.

Figura 3.16

Mapa de estructura del estudiante 27 al ejercicio 2 (27, 2):

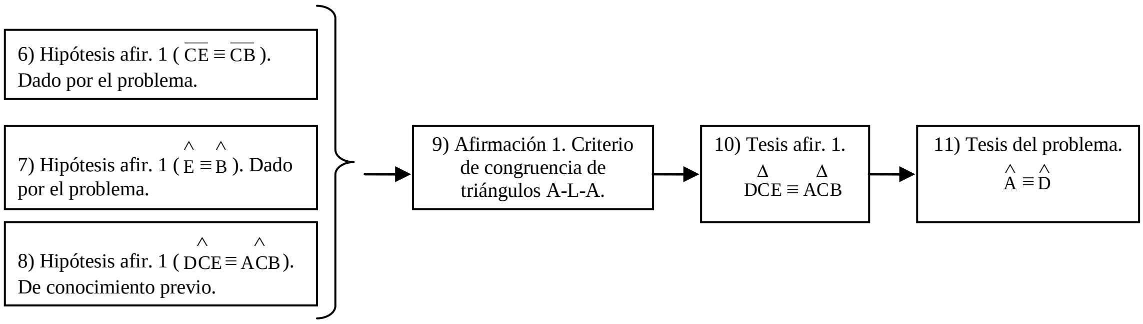


Figura 3.17

En el mapa de estructura identificamos de manera esquemática las hipótesis, las afirmaciones matemáticas y sus correspondientes conclusiones que utiliza el estudiante. El número seguido de un paréntesis que aparece en la parte izquierda de cada celda nos ayuda a identificar de qué unidad de información proviene. Por ejemplo, *"6) Hipótesis afir.1"* quiere decir que la unidad de información *6)* desempeña la función de ser una hipótesis de la afirmación (axioma A-L-A), dentro del discurso seguido. Las flechas y las llaves son símbolos que utilizamos para ver las distintas relaciones entre los niveles. En el mapa de estructura se observa que las hipótesis *6)*, *7)* y *8)* están conectadas con la afirmación: *9) afirmación 1*, de la que se obtiene la conclusión $\overset{\Delta}{DCE} \equiv \overset{\Delta}{ACB}$ (en la unidad de información *10)*. A partir de esta conclusión se deriva la tesis pedida por el problema en la unidad de información *11)*. Los mapas de estructura pueden ser más complejos, aunque siguen ofreciendo la organización del discurso de forma esquemática y relativamente sencilla de visualizar.

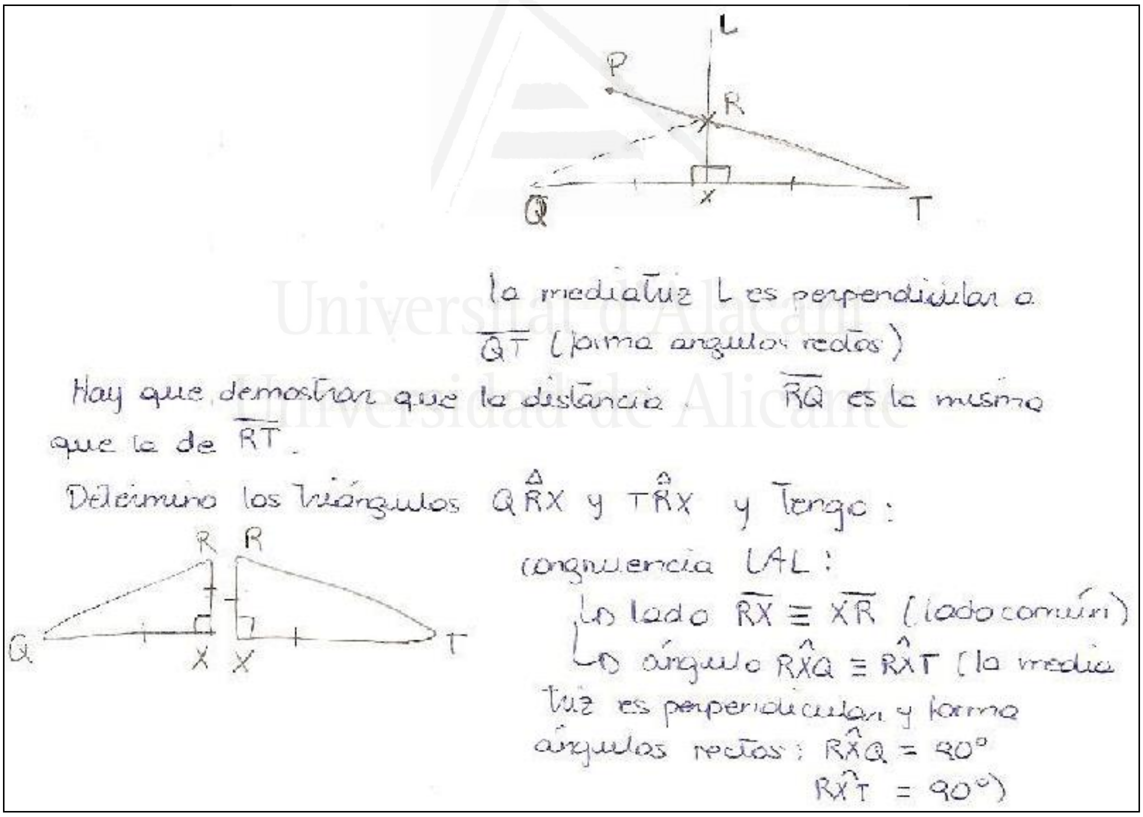
3.3.3 Ejemplo de la fase II del análisis

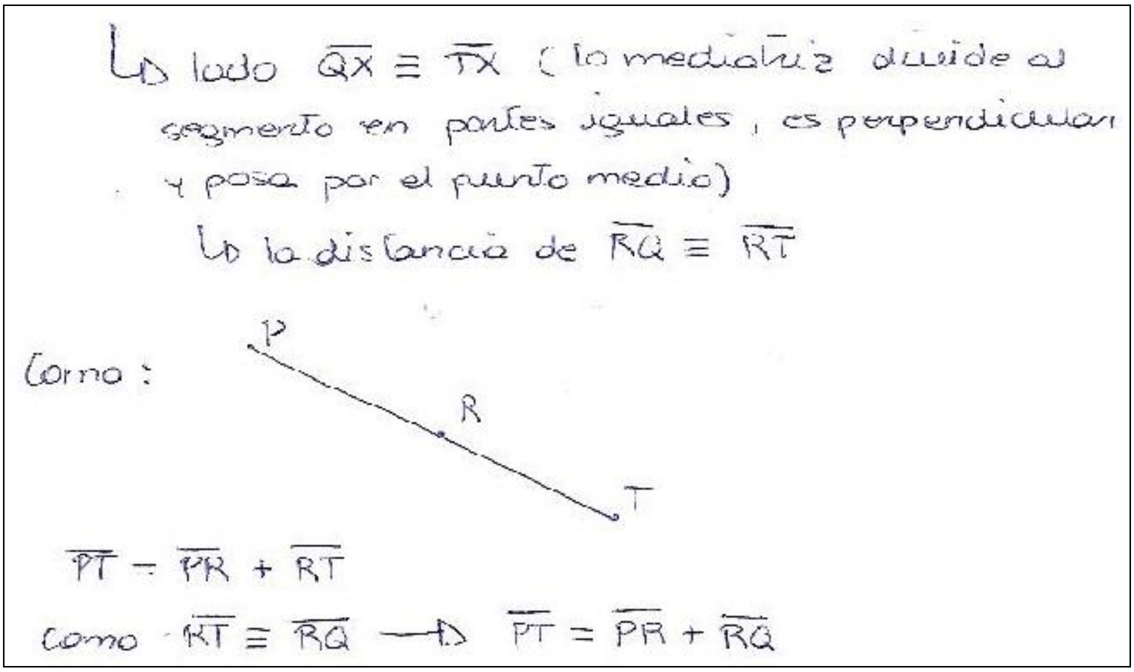
Presentamos un ejemplo de análisis a la respuesta dada por el estudiante 8 al problema 6. En este problema, el enunciado no ofrece una configuración inicial directamente sino que el estudiante debe construirla, es decir, realizar una conversión, del enunciado del problema a una configuración inicial.

Problema 6: *En un plano, la recta L es mediatriz de* $\overline{QT}$. *Sea P un punto del mismo semiplano, de recta borde L, que Q. La recta PT corta a L en el punto R.*

Probar que $m\overline{PT} = m\overline{PR} + m\overline{RQ}$.

Respuesta realizada por el estudiante 8:




↳ lado $\overline{QX} \equiv \overline{TX}$ (la mediatriz divide al segmento en partes iguales, es perpendicular y pasa por el punto medio)

↳ la distancia de $\overline{RQ} \equiv \overline{RT}$

Como:

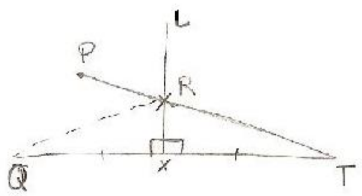
$\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RT}$

Como $\overline{RT} \equiv \overline{RQ} \longrightarrow \overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RQ}$

Figura 3.18

La respuesta del estudiante es trascrita, dividida en unidades de información y se realiza el análisis de las carencias (etapa 1), el análisis de los procesos de visualización (etapa 2) y el análisis de los elementos que constituyen los pasos de inferencia con la finalidad de la construcción de un esquema que ilustre la estructura de su proceso discursivo (etapa 3).

ETAPA 1

Trascripción	**Carencias**
1)  **2)** La mediatriz L es perpendicular a $\overline{QT}$ (forma ángulos rectos) **3)** Hay que demostrar que la distancia $\overline{RQ}$ es la misma que la de $\overline{RT}$. **4)** Determino los triángulos $\overset{\Delta}{QRX}$ y $\overset{\Delta}{TRX}$ y tengo:	

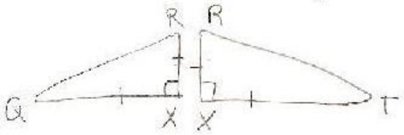
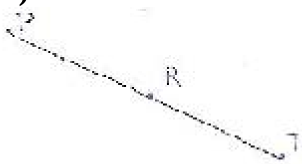
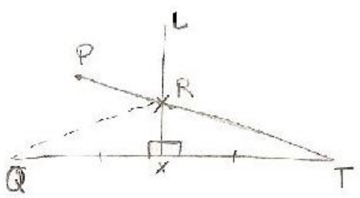
 **5)** congruencia LAL	
6) Lado $\overline{RX} \equiv \overline{XR}$ (lado común)	
7) ángulo $R\hat{X}Q \equiv R\hat{X}T$ (La mediatriz es perpendicular y forma ángulos rectos: $R\hat{X}Q = 90º$ $R\hat{X}T = 90º$)	
8) Lado $\overline{QX} \equiv \overline{TX}$ (la mediatriz divide al segmento en partes iguales, es perpendicular y pasa por el punto medio).	**8)** Lado $\overline{QX} \equiv \overline{XT}$ (la mediatriz divide al segmento $\overline{QT}$ en dos congruentes, es perpendicular y pasa por el punto medio).
9) La distancia de $\overline{RQ} \equiv \overline{RT}$ **10)** Como 	**9)** La medida de $\overline{RQ}$ = la medida de $\overline{RT}$.
11) $\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RT}$	**11)** $m\,\overline{PT} = m\,\overline{PR} + m\,\overline{RT}$.
12) como $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$	
13) $\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RQ}$	**13)** $m\,\overline{PT} = m\,\overline{PR} + m\,\overline{RQ}$.

Figura 3.19

ETAPA 2

Trascripción	Análisis procesos de visualización
1) 	**1)** El estudiante 8 asocia la definición de mediatriz a la configuración (aprehensión discursiva) para construir su configuración inicial.
2) La mediatriz L es perpendicular a $\overline{QT}$ (forma ángulos rectos)	**2)** El estudiante 8 destaca el hecho de que la mediatriz forma ángulos rectos con el segmento QT. Es decir, asocia una caracterización del concepto de mediatriz a la configuración (aprehensión

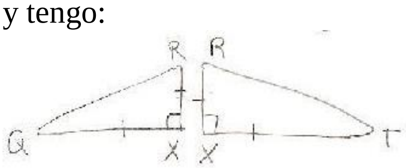
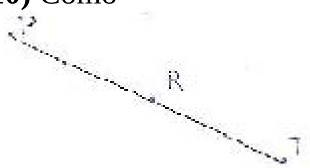
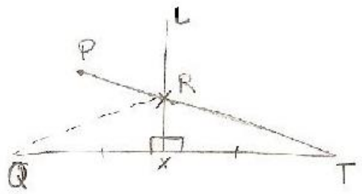
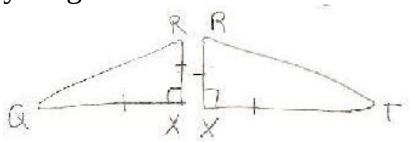
	discursiva).
3) Hay que demostrar que la distancia $\overline{RQ}$ es la misma que la de $\overline{RT}$.	**3)** Entendemos, como consecuencia del dibujo realizado y a partir de lo que pide el problema, identifica los segmentos $\overline{RT}$, $\overline{RQ}$ y además destaca la necesidad de probar que ambos son congruentes. Es decir, la acción de identificar los segmentos puede ser entendida como una aprehensión operativa y junto con la necesidad de probar su congruencia sugiere que estas acciones le dan la idea para generar el discurso y que le permiten resolver el problema. Esta aprehensión operativa se deduce de manera explícita en la unidad de información 10.
4) Determino los triángulos $Q\overset{\triangle}{R}X$ y $T\overset{\triangle}{R}X$ y tengo: 	**4)** El estudiante extrae de la configuración inicial ambos triángulos, siendo este hecho una acción que caracteriza a una aprehensión operativa de reconfiguración.
5) congruencia LAL	**5)** Asociar el axioma LAL a la subconfiguración del punto 4) es evidencia de una aprehensión discursiva.
6) Lado $\overline{RX} \equiv \overline{XR}$ (lado común) **7)** ángulo $R\hat{X}Q \equiv R\hat{X}T$ (La mediatriz es perpendicular y forma ángulos rectos: $R\hat{X}Q = 90º$ $R\hat{X}T = 90º$) **8)** Lado $\overline{QX} \equiv \overline{TX}$ (la mediatriz divide al segmento en partes iguales, es perpendicular y pasa por el punto medio).	**6)**, **7)** y **8)** Son evidencias de aprehensiones discursivas con cambio de anclaje, debido a que el estudiante introduce las marcas de ángulos rectos y congruencia de segmentos en la configuración de los triángulos.
9) La distancia de $\overline{RQ} \equiv \overline{RT}$	
10) Como 	**10)** Aprehensión operativa de reconfiguración análoga al punto 4).
11) $\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RT}$ **12)** como $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$ **13)** $\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RQ}$	

Figura 3.20

ETAPA 3

Trascripción	**Pasos de inferencia**
1) 	
2) La mediatriz L es perpendicular a $\overline{QT}$ (forma ángulos rectos)	**2)** Afirmación 1. Dados 2 puntos definimos mediatriz como la recta de puntos los cuales equidistan de ambos.
3) Hay que demostrar que la distancia $\overline{RQ}$ es la misma que la de $\overline{RT}$.	**3)** Tesis a demostrar.
4) Determino los triángulos $\overset{\triangle}{QRX}$ y $\overset{\triangle}{TRX}$ y tengo: 	
5) congruencia LAL	**5)** Afirmación 2. Axioma de congruencias de triángulos Lado-Ángulo-Lado.
6) Lado $\overline{RX} \equiv \overline{XR}$ (lado común)	**6)** Identificación de una de las hipótesis de la afirmación 2.
7) ángulo $R\hat{X}Q \equiv R\hat{X}T$ (La mediatriz es perpendicular y forma ángulos rectos: $R\hat{X}Q = 90º$ $R\hat{X}T = 90º$)	**7)** Identificación de la hipótesis de la afirmación 2. Hipótesis obtenida a partir de la definición de mediatriz como punto medio del segmento (afirmación 1).
8) Lado $\overline{QX} \equiv \overline{TX}$ (la mediatriz divide al segmento en partes iguales, es perpendicular y pasa por el punto medio).	**8)** Hipótesis de la afirmación 2= tesis afirmación 1.
9) La distancia de $\overline{RQ} \equiv \overline{RT}$	**9)** Tesis de la afirmación 2.
10) Como 	
11) $\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RT}$	**11)** Hipótesis de la afirmación 3 (Afirmación 3. Propiedad de la adición de segmentos).
	12) Hipótesis de la afirmación 3.

12) como $\overline{RT}\equiv\overline{RQ}$ **13)** $\overline{PT}=\overline{PR}+\overline{RQ}$	**13)** Tesis de la afirmación 3 y solución del problema.

Figura 3.21

Mapa de estructura

Con el análisis realizado en la figura 3.21 organizamos un esquema que facilita el análisis del discurso seguido (figura 3.22).

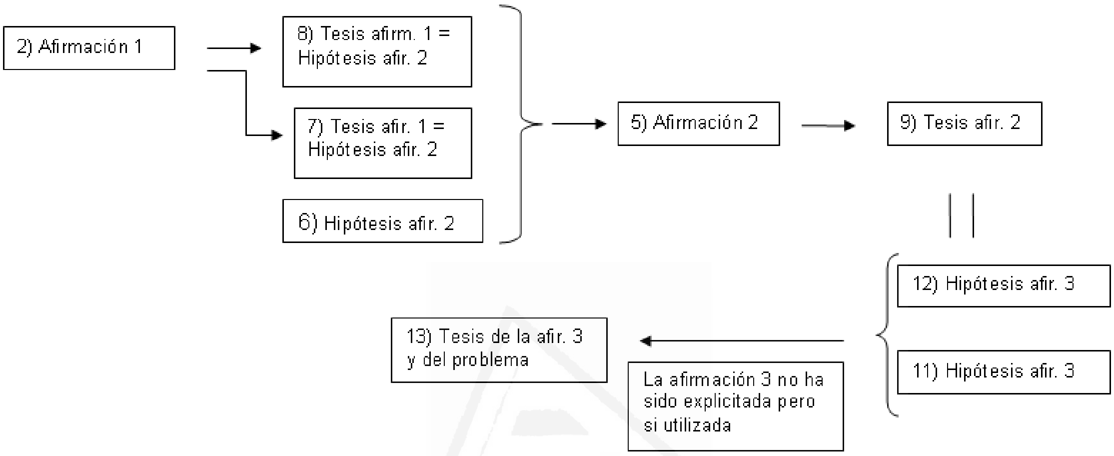


Figura 3.22. Los niveles locales están bien determinados y unidos por su conclusión formando un nivel global.

Las unidades de información 6), 7) y 8) son las hipótesis de la afirmación 2 (axioma lado-ángulo-ángulo), cuya tesis consiste en que ambos triángulos son congruentes. Como consecuencia de esta afirmación se infiere que RQ y RT son congruentes, en la unidad de información 9. Esta afirmación junto con la unidad 11) con necesarias para obtener la tesis del problema (unidad 13).

En la respuesta dada por el estudiante 8 se realiza una conversión, es decir un cambio del registro discursivo, en el que se propone el enunciado del problema, a un registro gráfico con el que se construye la configuración inicial. En la unidad de información 2) se distingue una aprehensión discursiva ya que el estudiante asocia una caracterización de la mediatriz a la configuración inicial. La unidad 3, como ya se ha comentado anteriormente, da “la idea” para resolver el problema y puede ser fruto de una aprehensión operativa. En la unidad 4 el participante extrae de la configuración inicial los triángulos $\overset{\Delta}{QRX}$ y $\overset{\Delta}{TRX}$. Esta acción es evidencia de una aprehensión operativa. En la unidad 5 el estudiante asocia el axioma Lado-Ángulo-Lado a estos triángulos. Las unidades 6) 7) y 8) son las hipótesis necesarias para aplicar el axioma y la unidad 9) es la tesis que se obtiene del axioma. En la unidad 10 el participante extrae una nueva subconfiguración de la configuración inicial, el segmento PT. A esta subconfiguración se le asocia una propiedad aditiva de los segmentos que una vez verificada su hipótesis, unidad de información 12, se obtiene la solución del problema (unidad 13).

La configuración realiza dos papeles distintos para la resolución del problema. En un primer momento la configuración inicial juega un papel heurístico en los que las modificaciones le permiten encontrar las ideas claves para resolver el problema, estas ideas pueden ser consideradas, en este caso, como conjeturas que deben ser probadas. Una vez encontradas estas ideas, la configuración le sirve de información sinóptica del problema, es decir, muestra elementos relacionados entre sí facilitando su visión conjunta. Las acciones realizadas sobre la configuración inicial (aprehensiones operativas), extrayendo ambos triángulos y posteriormente el segmento, unido a las asociaciones del axioma LAL, la definición de mediatriz y la propiedad de la adición de segmentos (aprehensiones discursivas), permite observar una interacción entre ambos tipos de aprehensión (operativa y discursiva). Además, el estudiante desarrolla un proceso discursivo teórico en su respuesta. Es decir, la solución dada por el participante 8 es evidencia de una coordinación entre la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva generando una serie de ideas claves que desemboca en un proceso discursivo teórico.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS

CAPÍTULO 4: RESULTADOS

En este capítulo describimos los resultados obtenidos del análisis de respuestas dadas por los estudiantes a la colección de problemas geométricos. En la primera parte, presentamos la clasificación de las respuestas analizadas según los procesos de visualización y de razonamiento. En ella, se distinguen dos tipos de comportamiento, ingenuo y matemático, que dependen del proceso discursivo seguido. Posteriormente, la fase II nos ha permitido distinguir maneras de proceder similares en la resolución de problemas que son repetidas por los estudiantes. Como resultado se presenta, en la última sección, un modelo general de la coordinación de los procesos de visualización entre sí y su relación con los procesos discursivos a la hora de resolver problemas.

4.1 Procesos de Visualización y Discurso

El análisis de las producciones de los estudiantes ha permitido obtener una primera aproximación del estado general del grupo. A continuación se muestra una clasificación del número de respuestas realizadas por los estudiantes a cada uno de los problemas. El número de soluciones a cada uno de los problemas es distinto, al ser respuestas procedentes de una prueba de elección múltiple.

	Problema 2	Problema 3	Problema 6	Problema 7	Problema 8
Total Respuestas	33	12	33	49	32

Figura 4.1

En la figura 4.2 proponemos la clasificación de las respuestas según los procesos cognitivos reconocidos. En cada celda indicamos el número de respuestas clasificadas según los procesos de visualización y de razonamiento identificados. En la primera fila se identifica el número del problema al que hacemos referencia. En la segunda fila mostramos el tipo de razonamiento seguido en relación con el discurso, natural (DN) o teórico (DT). En la primera columna mostramos los procesos de visualización.

	Problema 2		Problema 3		Problema 6		Problema 7		Problema 8	
	DN	DT	DN	DT	DN	DT	DN	DT	DN	DT
A. Perceptiva					4		5		2	
A. Perceptiva y A. Operativa										
A. Perceptiva y A. Discursiva										
A. Discursiva y A. Operativa	1	31+1*	1	11	2	25+2*	5	35+4*	5	18+7*

Figura 4.2. (*) Son el número de respuestas, que además de evidenciar los procesos de visualización y razonamiento indicados, asocian alguna afirmación inadecuada para resolver el problema.

Observando la figura 4.2, se identifican regularidades en la distribución de las respuestas. Es decir, las respuestas de los alumnos se agrupan en un número reducido de celdas.

4.2 Comportamientos del Individuo

A partir del agrupamiento señalado, hemos realizado una clasificación de los distintos comportamientos del individuo ante la tarea de resolver un problema de geometría. Hemos utilizado las características de los comportamientos matemáticos y los comportamientos ingenuos, añadiendo los procesos de visualización detectados en las respuestas y el proceso discursivo generado por el alumno.

En la figura 4.3 definimos los tipos de comportamiento del individuo que hemos encontrado: En el comportamiento matemático (CM), que se caracteriza por el uso de un proceso discursivo teórico, distinguimos dos tipos de comportamientos según los procesos de visualización usados, el comportamiento matemático tipo 1 (CM1) y el comportamiento matemático tipo 2 (CM2). En las respuestas que muestran un proceso discursivo natural, comportamiento ingenuo (CI), también distinguimos dos tipos de comportamientos. Comportamiento ingenuo particular (CIP) y Comportamiento ingenuo General (CIG).

	Visualización	**Razonamiento**
CIG **CIP**	Aprehensión perceptiva Aprehensión operativa Aprehensión discursiva	Proceso discursivo natural
CM1	Aprehensión operativa Aprehensión discursiva (asociaciones adecuadas)	Proceso discursivo teórico
CM2	Aprehensión operativa Aprehensión discursiva (asociaciones inadecuadas)	

Figura 4.3

El comportamiento matemático tipo 2 (CM2) coordina los mismos procesos de visualización y razonamiento que el CM1 pero las asociaciones matemáticas no son adecuadas para resolver el problema. Pero el estudiante muestra en su respuesta las características de un discurso teórico. A pesar de no resolver correctamente el problema sí desarrollan un discurso teórico. En el comportamiento ingenuo no encontramos dos subcategorías disjuntas sino un subgrupo del comportamiento ingenuo general (CIG) que llamamos comportamiento ingenuo particular (CIP) caracterizado por el uso de configuraciones particulares que no permiten generalizar la respuesta.

4.2.1 Comportamientos Matemáticos

El comportamiento matemático está caracterizado por la generación de un proceso discursivo teórico en la resolución de problemas de geometría. Además, hemos detectado, en el análisis de las respuestas, una interacción entre la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva, realizando asociaciones matemáticas pertinentes o no para resolver el problema, y cuyo razonamiento se representa mediante un discurso teórico. Consideramos dos tipos de comportamientos matemáticos. El comportamiento matemático tipo 1 (CM1) y el comportamiento matemático tipo 2 (CM2). A continuación se describen cada uno de ellos.

Comportamiento matemático tipo 1

Las respuestas clasificadas como comportamiento matemático tipo 1 son aquellas en las que identificamos las aprehensiones operativas y discursivas. Las distintas acciones realizadas por el estudiante le permiten reconocer afirmaciones matemáticas adecuadas y asociarlas a las subconfiguraciones relevantes identificadas. La solución del problema se organiza mediante un discurso teórico respetando una estructura deductiva.

Un ejemplo de este comportamiento es la respuesta realizado por el estudiante 8 al problema 6. Esta respuesta ha sido analizada con detalle en el capítulo de diseño de la investigación y ha servido como ejemplo para mostrar el proceso de análisis seguido. El estudiante es capaz de desarrollar un discurso teórico tras realizar interacciones entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa que le permiten reconocer las subconfiguraciones relevantes y asociarles afirmaciones matemáticas pertinentes para la resolución del problema.

Problema 6. *En un plano, la recta L es mediatriz de* $\overline{\mathrm{QT}}$. *Sea P un punto del mismo semiplano, de recta borde L, que Q. La recta PT corta a L en el punto R.*

Probar que $m\,\overline{\mathrm{PT}} = m\,\overline{\mathrm{PR}} + m\,\overline{\mathrm{RQ}}$.

Respuesta (8, 6):

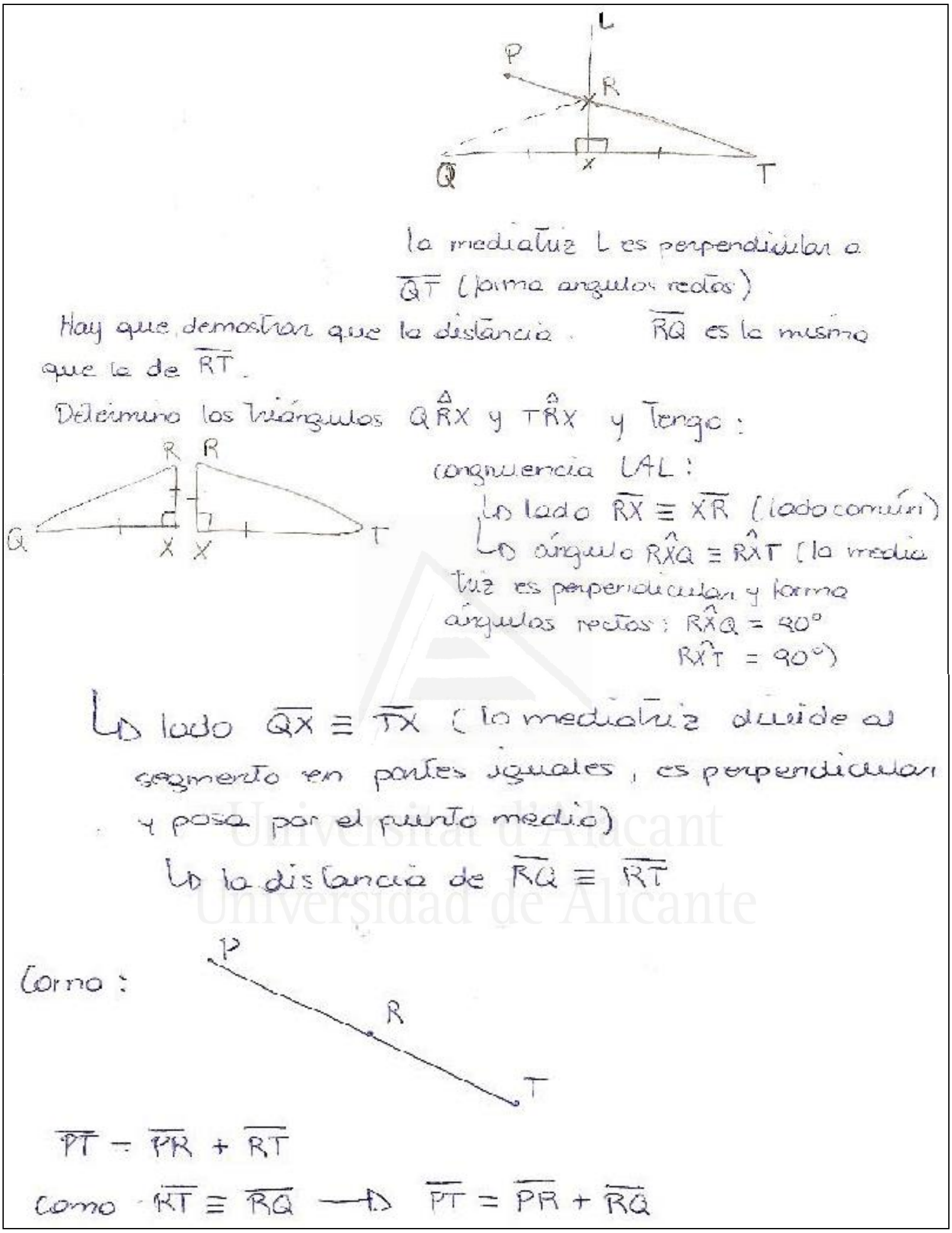


Figura 4.4

El estudiante realiza una conversión para construir una posible representación de la situación geométrica inicial. Asocia la definición de mediatriz, es decir, realiza una aprehensión discursiva. A continuación extrae de la configuración inicial los triángulos

RXQ y RXT, esta acción es evidencia aprehensión operativa. A estos triángulos le asocia el axioma de congruencia Lado-Ángulo-Lado, de nuevo realiza una aprehensión discursiva, siendo una afirmación matemática pertinente para resolver el problema. Además, verifica sus hipótesis siguiendo un discurso teórico. A continuación, extrae el segmento PT de la configuración inicial, de nuevo aprehensión operativa y le asocia una propiedad aditiva de segmentos adecuada para resolver el problema (aprehensión discursiva). El estudiante termina probando la tesis pedida del problema mediante un discursivo teórico.

Comportamiento matemático tipo 2

Las respuestas clasificadas como comportamiento matemático tipo 2 son aquellas en las que identificamos los procesos de aprehensión operativa y de aprehensión discursiva como procesos de visualización. Pero a diferencia del comportamiento anterior, alguna de las asociaciones matemáticas que realiza el estudiante no son adecuadas para resolver el problema. La solución del problema también se organiza mediante un discurso teórico respetando una estructura deductiva.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es la respuesta realizada por el estudiante 55 al problema 6 (figura 4.6). En la respuesta y tras realizar un cambio del registro discursivo al registro gráfico para construir una configuración inicial, el estudiante asocia una caracterización de la mediatriz a la configuración inicial (aprehensión discursiva). Posteriormente identifica los triángulos $Q\overset{\Delta}{S}R$ y $T\overset{\Delta}{S}R$ de la configuración inicial (aprehensión operativa) y les asocia el teorema ALA (aprehensión discursiva) para resolver el problema. Hemos marcado con una elipse en la respuesta las igualdades $\overline{PT} = \overline{TR} + \overline{RP}$ y $\overline{QP} = \overline{QR} + \overline{RP}$. Identificar el segmento $\overline{QP}$ (aprehensión operativa) y asociar la relación $\overline{QP} = \overline{QR} + \overline{RP}$ (aprehensión discursiva) no es pertinente para concluir el problema. La tesis del problema que hay que demostrar no se obtiene de estas igualdades.

Problema 6. *En un plano, la recta L es mediatriz de* $\overline{\mathrm{QT}}$. *Sea P un punto del mismo semiplano, de recta borde L, que Q. La recta PT corta a L en el punto R.*

Probar que $m\,\overline{\mathrm{PT}} = m\,\overline{\mathrm{PR}} + m\,\overline{\mathrm{RQ}}$.

Solución (55, 6):

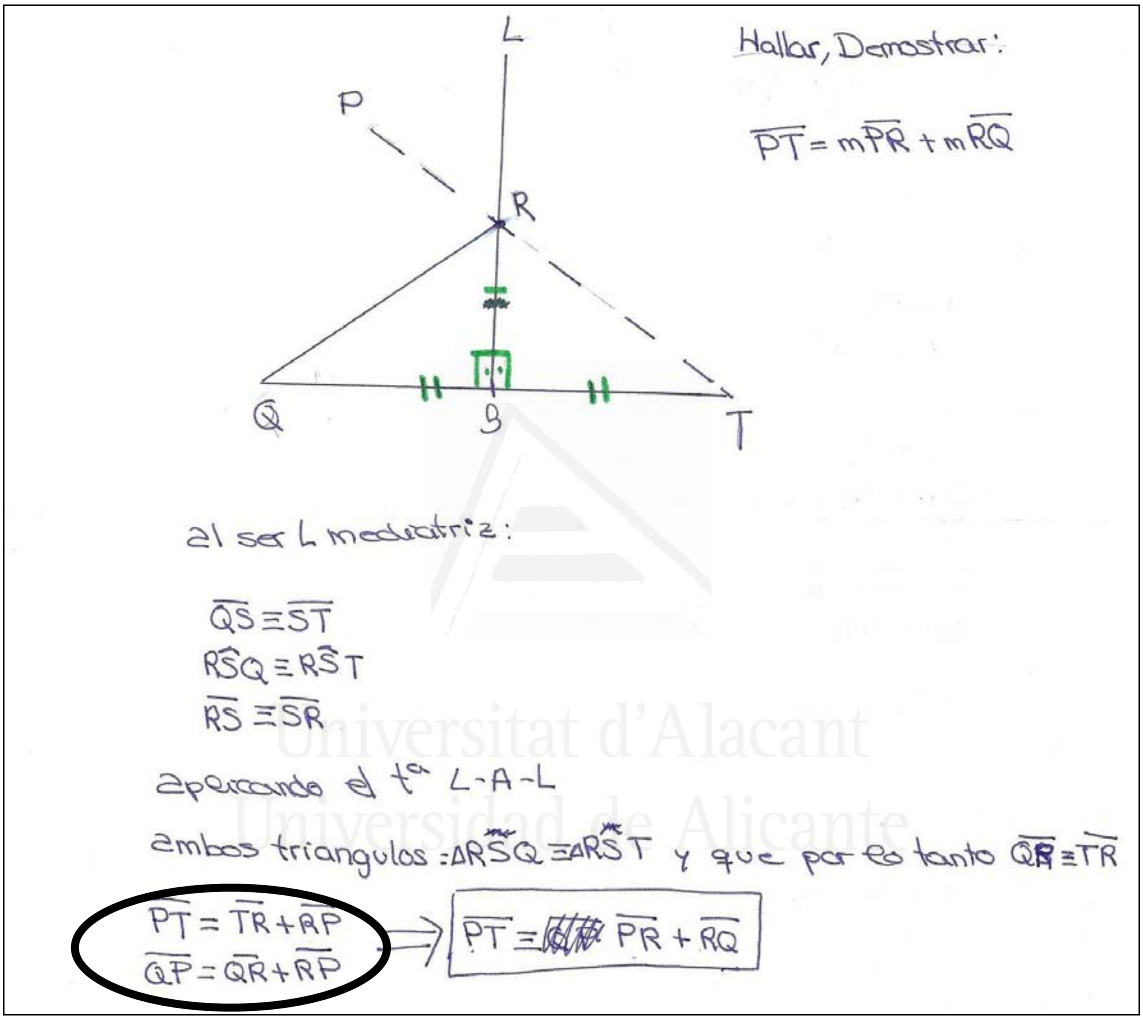
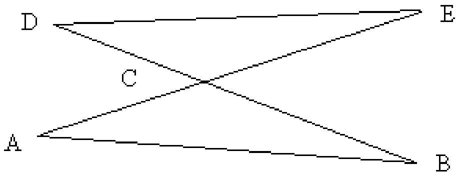


Figura 4.6

En otro ejemplo, realizado por el participante 27 al ejercicio 2, observamos en su respuesta un caso particular de los comportamientos matemático. Esta respuesta presenta dos soluciones centradas principalmente en los axiomas de congruencia de triángulos. Una solución evidencia asociaciones adecuadas y en la otra muestra asociaciones inadecuadas. A pesar de ser un caso especial, cada una de las respuestas por separado son ejemplos representativos de dos comportamientos distintos. La primera respuesta es un ejemplo del comportamiento matemático tipo 1 y la segunda, tipo 2 (figura 4.7).

2º Dada la figura con $\overline{CE} \equiv \overline{CB}$ y $\hat{E} \equiv \hat{B}$, probar que $\hat{D} \equiv \hat{A}$.



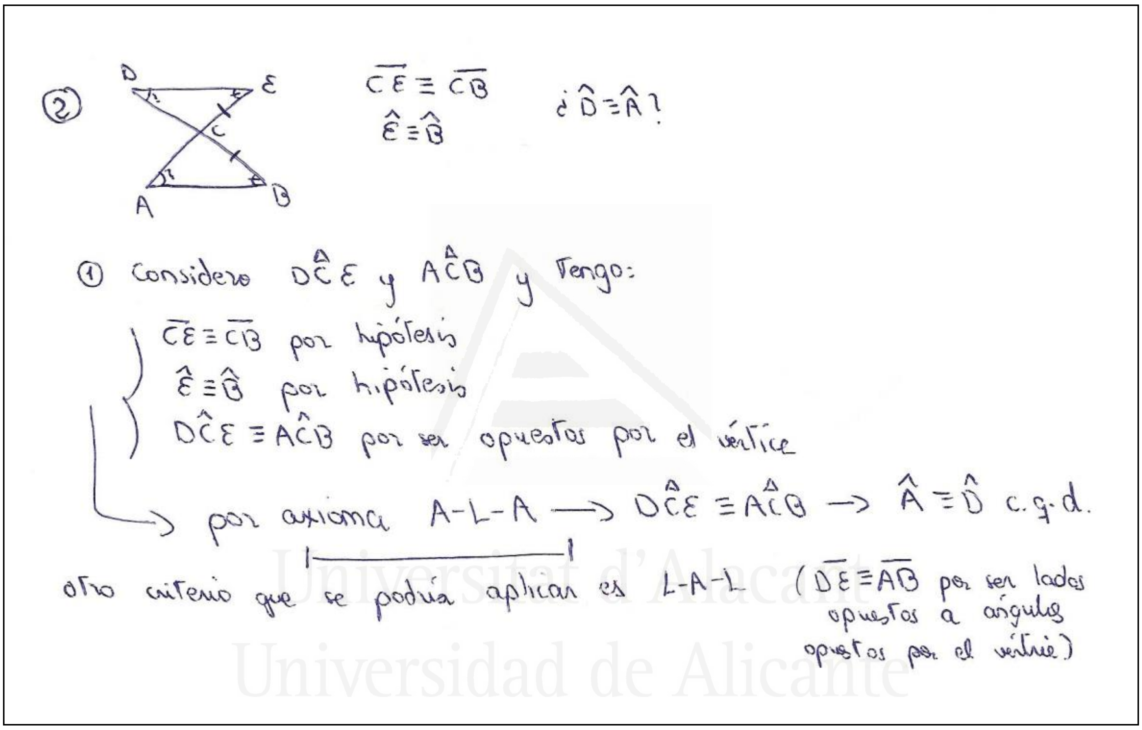


Figura 4.7. Respuesta realizada por el participante 27 al ejercicio 2.

En la primera respuesta observamos asociaciones adecuadas que permiten al estudiante resolver el problema, principalmente el axioma A-L-A es conveniente como consecuencia de las hipótesis proporcionadas por el problema. En su segunda respuesta asocia una afirmación matemática de manera inadecuada, el axioma L-A-L no se puede aplicar pues una de sus hipótesis no se puede verificar. La afirmación última del alumno es incorrecta.

4.2.2 Comportamientos Ingenuos

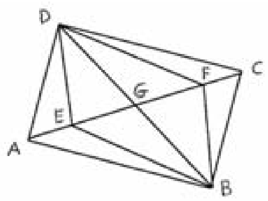
El comportamiento ingenuo está caracterizado por la generación de un proceso discursivo natural en la resolución de problemas de geometría. En este grupo de respuestas hemos detectado un subgrupo que se caracteriza por el uso de configuraciones iniciales particulares. Por este motivo, distinguimos dos tipos de comportamientos ingenuos: el comportamiento ingenuo general (CIG) y dentro de éste, el comportamiento ingenuo particular (CIP). Se describen a continuación cada uno de estos dos casos.

Comportamiento Ingenuo General

El comportamiento ingenuo general se caracteriza por la generación de un discursivo natural mediante aprehensiones discursivas y operativas con la finalidad de comunicar el proceso seguido.

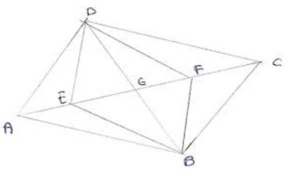
Un ejemplo de este comportamiento es la respuesta realizada por el participante 26 al problema 8. Esta respuesta muestra cómo la manipulación de la configuración inicial es suficiente como solución del problema.

Problema 8. *En la figura, □DEBF es un paralelogramo y* $\overline{\mathrm{AE}} \equiv \overline{\mathrm{CF}}$. *Probar que □ABCD es un paralelogramo.*



Respuesta (26, 8):

4:
□DEBF es un paralelogramo.
- $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$
¿□ABCD es un paralelogramo?



$\overline{DB}$ es la diagonal del paralelogramo □DEBF y también es diagonal del ABCD.
La diagonal $\overline{EF}$ que forma el paralelogramo □DEBF es aumentada por los dos lados la misma distancia, porque el enunciado nos dice que $\overline{AE}$ es congruente con $\overline{CF}$, por lo tanto al aumentar en la misma proporción la diagonal $\overline{EF}$ por los dos lados podemos afirmar que □ABCD es un paralelogramo, ya que la diagonal $\overline{BD}$ es la misma y la otra diagonal está aumentada por las 2 partes en la misma proporción.

Figura 4.8

El participante identifica las diagonales del paralelogramo □DEBF y utiliza la congruencia de segmentos para manipular la configuración de manera que añadiendo los segmentos congruentes $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ a la diagonal $\overline{EF}$ se obtenga el segmento $\overline{AC}$. El participante percibe que el cuadrilátero ABCD tiene dos diagonales que se cortan en el punto medio y concluye que ABCD es un paralelogramo. El estudiante justifica esta conclusión afirmando que aumentando la diagonal $\overline{EF}$ en la misma distancia (proporción) a ambos lados (por hipótesis del problema) se transforman las diagonales del paralelogramo DEBF en las diagonales del paralelogramo ABCD.

Comportamiento Ingenuo Particular

El comportamiento ingenuo particular es un subcategoría del comportamiento ingenuo general. Este comportamiento se caracteriza por utilizar configuraciones particulares, no adecuadas para generalizar, en el desarrollo de la respuesta. Además la aprehensión perceptiva como proceso de identificación de la configuración inicial adquiere importancia en la respuesta, pudiendo estar seguida del uso de instrumentos o herramientas ya sean físicas (como un transportador de ángulos, una regla, un compás…) o conceptuales (afirmaciones matemáticas sin verificación alguna) para explicar lo realizado.

El siguiente ejemplo, el alumno 35 muestra un caso particular de la configuración inicial en el problema 6. Esta configuración inicial muestra la idea de configuración particular que no permite generalizar donde la aprehensión perceptiva adquiere relevancia en la solución del estudiante.

Problema 6. *En un plano, la recta L es mediatriz de* $\overline{\mathrm{QT}}$. *Sea P un punto del mismo semiplano, de recta borde L, que Q. La recta PT corta a L en el punto R.*

Probar que $m\overline{\mathrm{PT}} = m\overline{\mathrm{PR}} + m\overline{\mathrm{RQ}}$.

Respuesta (35, 6):

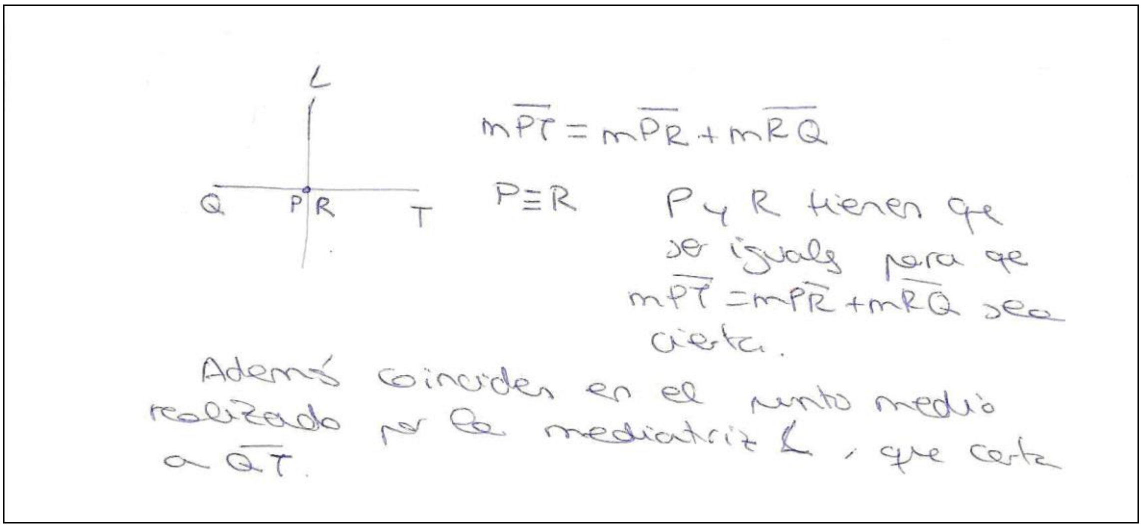


Figura 4.9

El alumno identifica la mediatriz representada por la recta L y el segmento $\overline{\text{QT}}$. Pero el punto P no es un punto genérico del semiplano de recta borde L. En el documento original muestra una búsqueda, realizado en lápiz y posteriormente borrado, de un caso de configuración en donde la tesis del problema sea visualmente inmediata. Por tanto, no identificamos aprehensión discursiva salvo en el caso de la definición de mediatriz para construir la configuración inicial. La identificación y manipulación de las distintas subconfiguraciones queda reducida al punto P, al punto R, a los segmentos $\overline{\text{PT}}$, $\overline{\text{PR}}$, $\overline{\text{TR}}$, $\overline{\text{RQ}}$, $\overline{\text{QT}}$ y a la recta L (dados por el enunciado del problema) e insuficientes para resolver el problema. El papel de la configuración es importante para su respuesta sobre todo cuado argumenta "P y R tienen que ser iguales para…" con lo que su respuesta queda condicionada por su configuración inicial.

Otro ejemplo para este comportamiento, en el que identificamos una configuración particular, es la respuesta realizada por el participante 2 al mismo problema 6. El estudiante no es capaz de desarrollar un discursivo teórico (estructura deductiva), a pesar de efectuar su solución en un registro simbólico.

Problema 6. *En un plano, la recta L es mediatriz de* $\overline{\text{QT}}$. *Sea P un punto del mismo semiplano, de recta borde L, que Q. La recta PT corta a L en el punto R. Probar que* $m\,\overline{\text{PT}} = m\,\overline{\text{PR}} + m\,\overline{\text{RQ}}$.

Respuesta (2, 6):

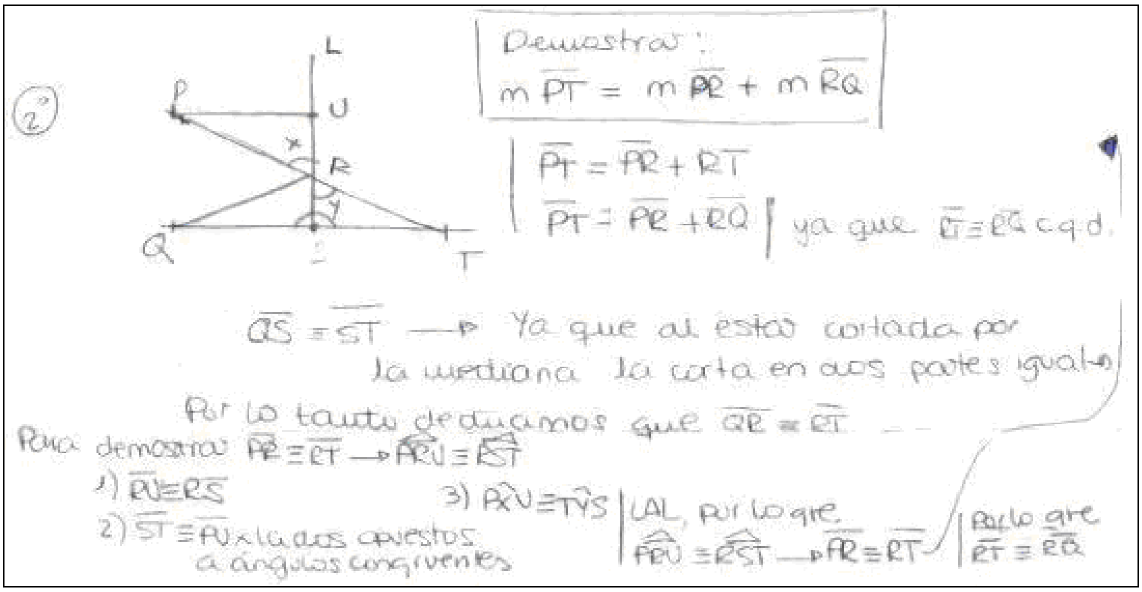


Figura 4.10

El estudiante introduce una nueva subconfiguración en la configuración inicial (segmento $\overline{PU}$), esta acción la entendemos como una aprehensión operativa. Esta nueva configuración le permite asociar algunas afirmaciones matemáticas (la mediana-mediatriz y el axioma LAL). El estudiante intenta probar que los triángulos $\overset{\Delta}{PRU}$ y $\overset{\Delta}{RST}$ son congruentes, pero no es posible. Es decir, la forma prototípica (triángulos visualmente congruentes) que adquiere su configuración inicial dificulta un posterior desarrollo del discurso teórico. Aunque la respuesta sí muestra una interacción entre la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva (realiza modificaciones de la configuración y asocia afirmaciones matemáticas), el estudiante no es capaz de generar un discurso teórico que mantenga una estructura deductiva, sino que da una solución al problema mediante un discurso natural en un registro simbólico.

En la figura 4.11 mostramos un resumen de los distintos tipos de comportamientos encontrados y el número de respuestas clasificadas en cada una de estas categorías.

<table>
<tr><th></th><th>Visualización</th><th>Razonamiento</th><th>Frecuencia de respuestas</th></tr>
<tr><td>CIG CIP</td><td>Aprehensión perceptiva
Aprehensión operativa
Aprehensión discursiva</td><td>Proceso discursivo natural</td><td>25 respuestas son CIG de las cuales 6 son CIP</td></tr>
<tr><td>CM1</td><td>Aprehensión operativa
Aprehensión discursiva
(asociaciones adecuadas)</td><td rowspan="2">Proceso discursivo teórico</td><td>120 respuestas</td></tr>
<tr><td>CM2</td><td>Aprehensión operativa
Aprehensión discursiva
(asociaciones inadecuadas)</td><td>14 respuestas</td></tr>
</table>

Figura 4.11

4.3 Razonamiento Configural

La descripción de los comportamientos del individuo descritos en los apartados anteriores y el agrupamiento realizado de las respuestas nos ha mostrado que, en la mayoría de las respuestas, existe una interacción coordinada entre la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva. Por este motivo se consideró necesario refinar el proceso de análisis (fase II) para observar sistemáticamente estos procesos de visualización y su interacción (secuencia de realización, instante de realización, orden de realización, desencadenantes,…). Para ello se transcriben las respuestas de los alumnos, se dividen en fragmentos analizables y se numeran, tras lo cual se procede a completar las tres etapas de la fase II descritas en el capítulo anterior.

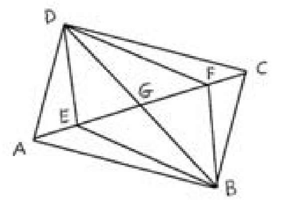
Las observaciones de la fase II, siguiendo las tres etapas (carencias, tipos de aprehensiones y pasos de inferencia) nos han permitido encontrar diferentes características de la coordinación identificada en las interacciones entre los procesos de visualización. Estas características determinan tres diferentes desenlaces del razonamiento generado que nos permite desarrollar un modelo general de razonamiento en geometría. Como primer resultado de la fase II mostramos las distintas clases de coordinación encontradas en las respuestas.

4.3.1 Primer Tipo de Coordinación

En este apartado mostramos un tipo de coordinación, entre la aprehensión operativa, para modificar la configuración (ya sea un cambio figural o una reconfiguración), y la aprehensión discursiva, (asociando afirmaciones matemáticas a las distintas subconfiguraciones relevantes), que permite obtener alguna idea clave que ayude a resolver deductivamente el problema. Es decir, el estudiante utiliza esta coordinación para obtener las ideas que permitan una posterior organización del discurso teórico.

Para describir esta coordinación se muestra el análisis de la repuesta dada al problema 8 por el estudiante 40. Inicialmente, mostramos el escaneado de las notas realizadas por el alumno, escritas a lápiz y alrededor del enunciado del problema, donde se puede observar que el sentido de la escritura no es el habitual de izquierda a derecha.

Problema 8. *En la figura, □DEBF es un paralelogramo y* $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$. *Probar que □ABCD es un paralelogramo.*



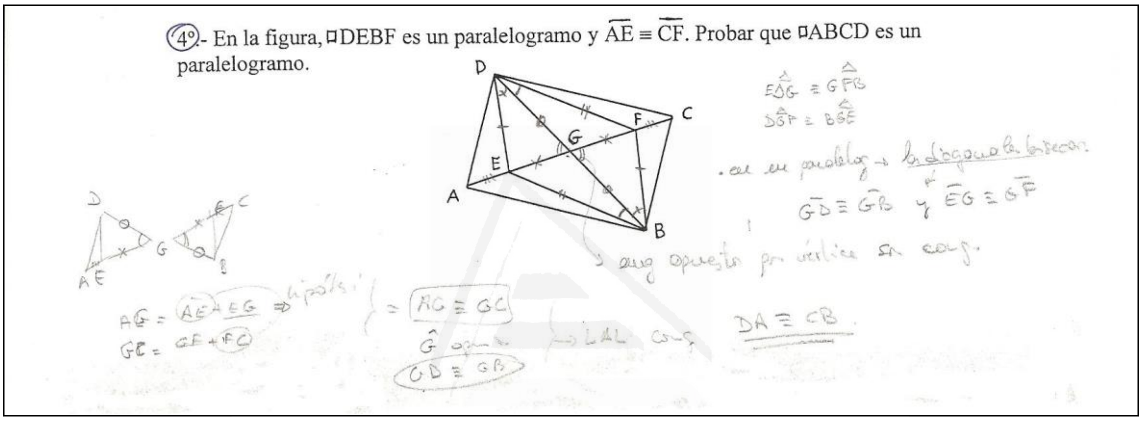


Figura 4.12

En la figura 4.12 se pone de manifiesto un esbozo impreciso de la interacción entre la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva, hasta que el alumno consigue la «idea» que resuelve el problema (logra probar la congruencia de dos lados opuestos del cuadrilátero ABCD, cuando escribe DA ≡ CB). Interrumpe su razonamiento, se produce un truncamiento del razonamiento realizado y genera un discurso deductivo, para lograr la solución pedida solicitada.

Solución (40, 8):

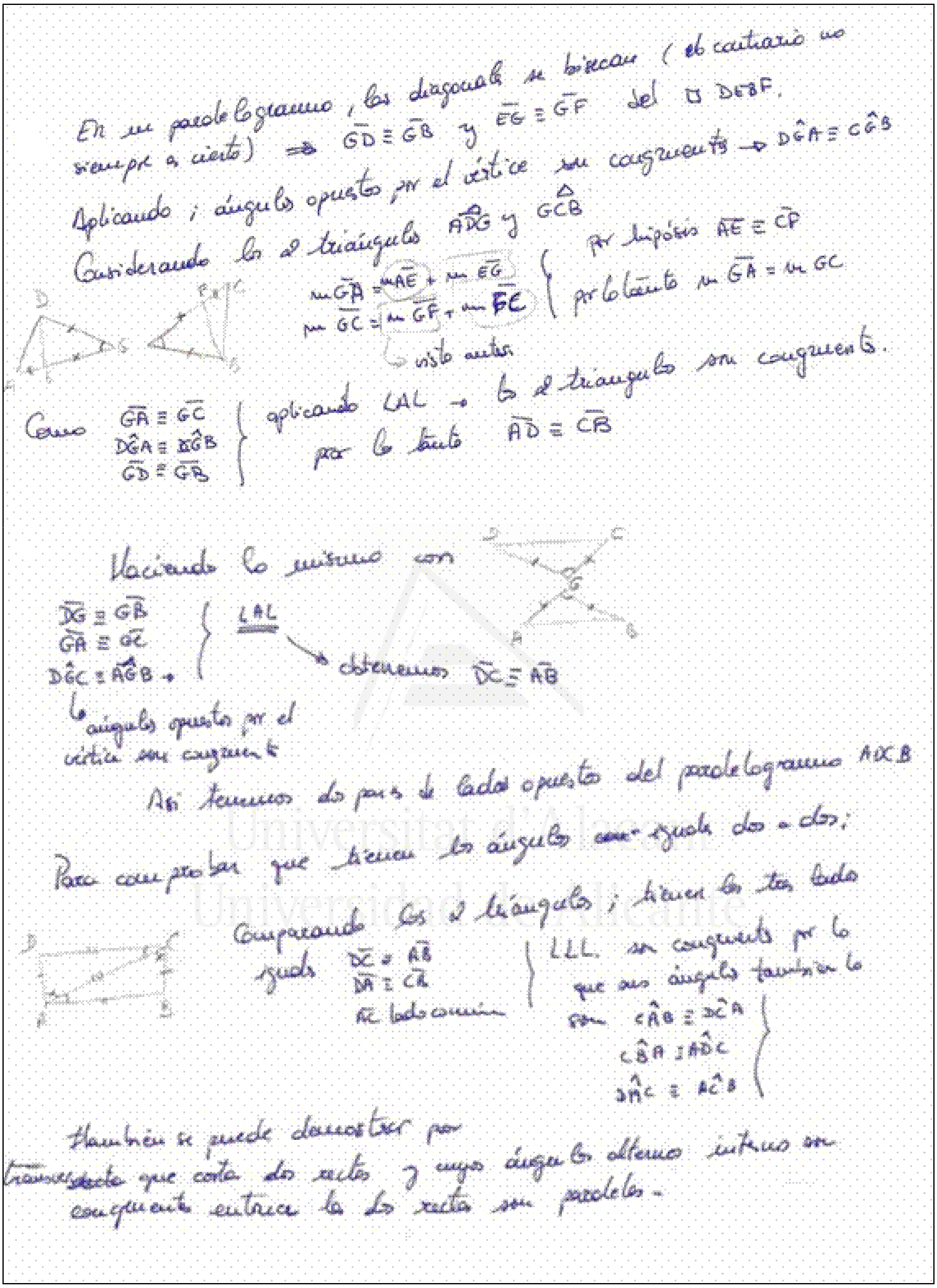
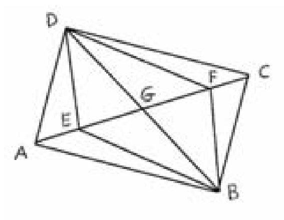


Figura 4.13

ETAPA 1

Trascripción de la respuesta

En la Figura, □DEBF es un paralelogramo y $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$. Probar que □ABCD es un paralelogramo.



1) En un paralelogramo, las diagonales se bisecan

2) → $\overline{GD} \equiv \overline{GB}$ y $\overline{EG} \equiv \overline{GF}$ del □DEBF.

3) Aplicando; ángulos opuestos por el vértice son congruentes

4) → $D\hat{G}A \equiv C\hat{G}B$

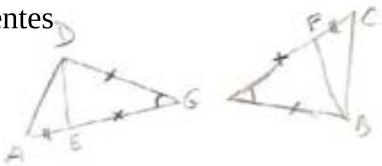


Figura 4.14

5) Considerando los dos triángulos $\overset{\Delta}{ADG}$ y $\overset{\Delta}{GCB}$

6) $m\overline{GA} = m\overline{AE} + m\overline{EG}$ 7) por hipótesis $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$

8) $m\overline{GC} = m\overline{GF} + m\overline{FC}$ 9) por lo tanto $m\overline{GA} = m\overline{GC}$

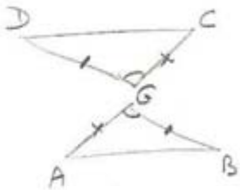


Figura 4.15

10) Como $\overline{GA} \equiv \overline{GC}$,

11) $D\hat{G}A \equiv C\hat{G}B$,

12) $\overline{GD} \equiv \overline{GB}$

13) aplicando LAL

14) los 2 triángulos son congruentes. Por lo tanto $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$

15) Haciendo lo mismo con ∴DGC y ∴BGA

16) $\overline{DG} \equiv \overline{GB}$, 17) $\overline{GA} \equiv \overline{GC}$, 18) $D\hat{G}C \equiv A\hat{G}B$.Ángulos opuestos por el vértice son congruentes

19) LAL 20) → obtenemos $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$

21) Así tenemos dos pares de lados opuestos ≡ del paralelogramo □ADCB.

22) Para comprobar que tienen los ángulos iguales dos a dos;

23) Comparando los 2 triángulos;

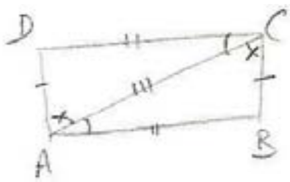


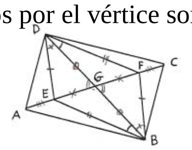
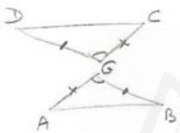
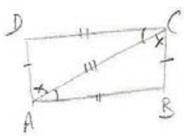
Figura 4.16

24) $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$,25) $\overline{DA} \equiv \overline{CB}$, 26) $\overline{AC}$ lado común

27) LLL 28) Son congruentes por lo que. $C\hat{A}B \equiv D\hat{C}A$, $C\hat{B}A \equiv A\hat{D}C$, $D\hat{A}C \equiv A\hat{C}B$.

Figura 4.17. No hay columna de carencias ya que no hay errores de notación significativos.

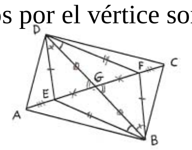
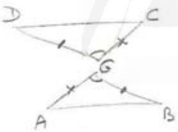
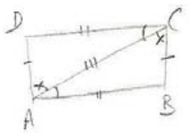
ETAPA 2

Trascripción	Análisis procesos de visualización
1) En un paralelogramo, las diagonales se bisecan 2) → $\overline{GD} \equiv \overline{GB}$ y $\overline{EG} \equiv \overline{GF}$ del □DEBF.	1) El estudiante asocia esta afirmación a la configuración inicial (aprehensión discursiva), realizando un cambio de anclaje de discursivo a visual debido a las marcas de lados congruentes que realiza sobre la configuración.
3) Aplicando; ángulos opuestos por el vértice son congruentes  4) → $\widehat{DGA} \equiv \widehat{CGB}$	3) Asocia "*ángulos opuestos por el vértice son congruentes*" a la configuración realizando también un cambio de anclaje de discursivo a visual debido a las marcas de ángulos congruentes que realiza sobre la configuración. Proceso que hemos definido como aprehensión discursiva.
5) Considerando los dos triángulos $\overset{\Delta}{ADG}$ y $\overset{\Delta}{GCB}$ 6) m $\overline{GA}$ = m $\overline{AE}$ + m $\overline{EG}$ 7) por hipótesis $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$  F.4.14 8) m $\overline{GC}$ = m $\overline{GF}$ + m $\overline{FC}$ 9) por lo tanto m $\overline{GA}$ =m $\overline{GC}$ 10) Como $\overline{GA} \equiv \overline{GC}$, 11) $\widehat{DGA} \equiv \widehat{CGB}$, 12) $\overline{GD} \equiv \overline{GB}$  F. 4.15	5) El estudiante extrae de la configuración inicial ambos triángulos (figura 4.14). Entendemos este proceso como una aprehensión operativa de reconfiguración. 6), 8) Se identifica una aprehensión discursiva debido a que el estudiante asocia una propiedad de adición de los segmentos a la figura 4.14.
13) aplicando LAL 14) los 2 triángulos son congruentes. Por lo tanto $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$	13) Asocia el axioma Lado-Ángulo-Lado a la figura 4.14 (Aprehensión discursiva).
15) Haciendo lo mismo con $\therefore$DGC y $\therefore$BGA 16) $\overline{DG} \equiv \overline{GB}$, 17) $\overline{GA} \equiv \overline{GC}$, 18) $\widehat{DGC} \equiv \widehat{AGB}$.	15) El estudiante extrae de la configuración inicial dos triángulos (figura 4.15). Aprehensión operativa de reconfiguración.
Ángulos opuestos por el vértice son congruentes 19) LAL 20) → obtenemos $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$ 21) Así tenemos dos pares de lados opuestos ≡ del paralelogramo □ADCB.	19) Asocia el axioma Lado-Ángulo-Lado a la figura 4.15. Aprehensión discursiva.
22) Para comprobar que tienen los ángulos iguales dos a dos;  F. 4.16 23) Comparando los 2 triángulos; 24) $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$,25) $\overline{DA} \equiv \overline{CB}$, 26) $\overline{AC}$ lado común	23) Extrae de la configuración inicial dos triángulos (figura 4.16). Aprehensión operativa de reconfiguración.

27) LLL 28) Son congruentes por lo que. $C\hat{A}B \equiv D\hat{C}A$, $C\hat{B}A \equiv A\hat{D}C$, $D\hat{A}C \equiv A\hat{C}B$.	27) Asocia el axioma L-L-L a la figura 4.16 (Aprehensión discursiva).

Figura 4.18

ETAPA 3

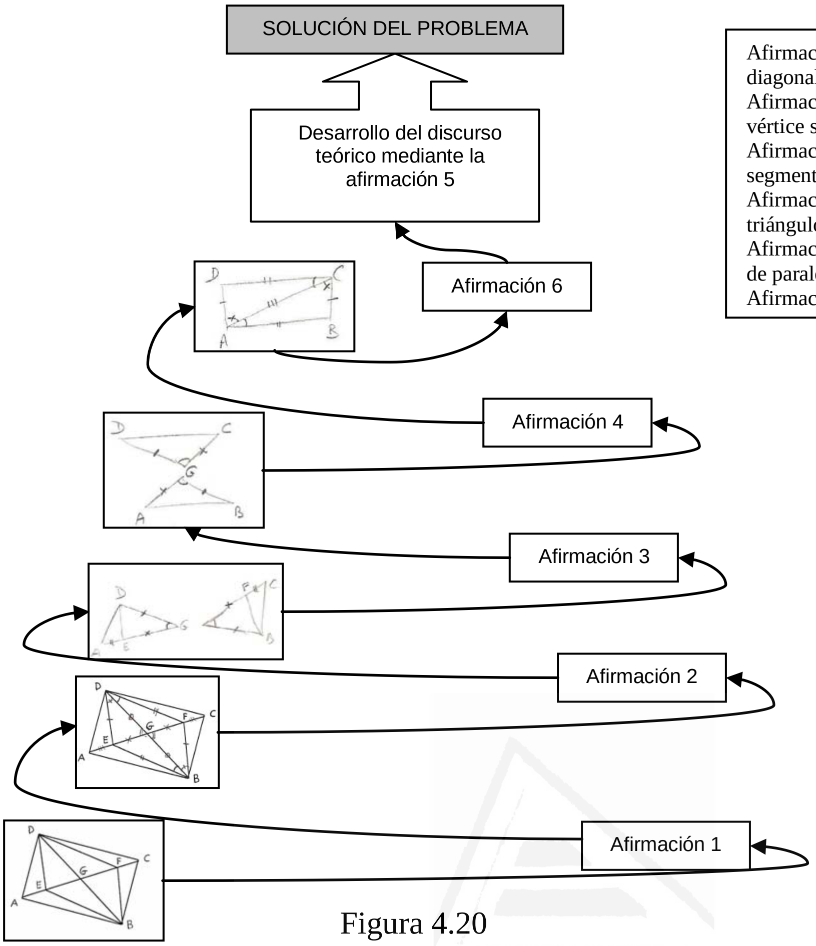
Trascripción	**Pasos de inferencia**
1) En un paralelogramo, las diagonales se bisecan	1) Afirmación 1. En un paralelogramo, las diagonales se bisecan.
2) $\rightarrow$ $\overline{GD} \equiv \overline{GB}$ y $\overline{EG} \equiv \overline{GF}$ del □DEBF.	2) Tesis de la afirmación 1.
3) Aplicando; ángulos opuestos por el vértice son congruentes 	3) Afirmación 2. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
4) $\rightarrow$ $D\hat{G}A \equiv C\hat{G}B$	4) Tesis de la afirmación 2.
5) Considerando los dos triángulos $A\overset{\Delta}{D}G$ y $G\overset{\Delta}{C}B$	
6) m $\overline{GA}$ = m $\overline{AE}$ + m $\overline{EG}$ 7) por hipótesis $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$ 8) m $\overline{GC}$ = m $\overline{GF}$ + m $\overline{FC}$  F.4.14	6), 7) y 8) hipótesis de la afirmación 3. Propiedad de la adición de segmentos.
9) por lo tanto m $\overline{GA}$ =m $\overline{GC}$	9) Tesis afirmación 3.
10) Como $\overline{GA} \equiv \overline{GC}$, 11) $D\hat{G}A \equiv C\hat{G}B$, 12) $\overline{GD} \equiv \overline{GB}$  F. 4.15	10), 11), 12) Hipótesis de la afirmación 4. Axioma de congruencia de triángulos Lado-Ángulo-Lado.
13) aplicando LAL	13) Afirmación 4.
14) los 2 triángulos son congruentes. Por lo tanto $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$	14) Tesis de la afirmación 4) e hipótesis de la afirmación 5). Teorema de caracterización de los paralelogramos.
15) Haciendo lo mismo con ∴DGC y ∴BGA 16) $\overline{DG} \equiv \overline{GB}$, 17) $\overline{GA} \equiv \overline{GC}$, 18) $D\hat{G}C \equiv A\hat{G}B$. Ángulos opuestos por el vértice son congruentes	16), 17), 18) Hipótesis de la Afirmación 4 obtenidas del enunciado del problema (afirmación 1), hechos obtenidos con anterioridad (afirmación 3), y hechos geométricos generales.
19) LAL 20) $\rightarrow$ obtenemos $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$	19) Afirmación 4. 20) Tesis de la afirmación 4) e hipótesis de la afirmación 5.
21) Así tenemos dos pares de lados opuestos ≡ del paralelogramo □ADCB.	21) Hipótesis de la afirmación 5.
22) Para comprobar que tienen los ángulos iguales dos a dos;  F. 4.16	22) Hipótesis de la afirmación 5 que debe comprobar para obtener la tesis pedida por el problema.
23) Comparando los 2 triángulos;	

24) $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$,25) $\overline{DA} \equiv \overline{CB}$, 26) $\overline{AC}$ lado común	24), 25), 26) Hipótesis de la afirmación 6. Axioma de congruencia de triángulos Lado-Lado-Lado.
27) LLL	27) Afirmación 6.
28) Son congruentes por lo que. $C\hat{A}B \equiv D\hat{C}A$, $C\hat{B}A \equiv A\hat{D}C$, $D\hat{A}C \equiv A\hat{C}B$.	28) Tesis de la afirmación 6 e hipótesis de la afirmación 5 necesarias para obtener la conclusión pedida por el problema.

Figura 4.19

En la respuesta del estudiante 8, observamos el papel heurístico que desempeña la configuración inicial y las distintas modificaciones hasta encontrar las ideas claves que permitan desarrollar el discurso teórico. Una vez que el estudiante encuentra estas ideas (congruencia *de los segmentos AD y CB*) para resolver el problema, utiliza la configuración como un esquema para tener la información del problema de manera sinóptica, es decir, la configuración muestra elementos relacionados entre sí, facilitando su visión conjunta. Además, las acciones realizadas por el estudiante sobre la configuración inicial: extrayendo los triángulos ADG-GCB, DGC-AGB, ADC-CBA, las distintas marcas que realiza sobre ella, la asociación del teorema de caracterización de paralelogramos, junto con las propiedades aditivas de segmentos y los axiomas Lado-Ángulo-Lado y Lado-Lado-Lado, nos permiten identificar una interacción coordinada entre las asociaciones de las afirmaciones matemáticas mencionadas y las configuraciones obtenidas mediante la modificación de la configuración inicial.

A continuación mostramos la representación de la coordinación (figura 4.20). En la izquierda están las distintas configuraciones identificadas (aprehensiones operativas) y a la derecha las afirmaciones asociadas (aprehensiones discursivas) a cada una de ellas. Están numeradas del 1 al 6 como aparecen en la respuesta y la afirmación 5 (teorema de caracterización de paralelogramos que no está asociada a ninguna subconfiguración) es la que dirige el desarrollo del discurso teórico hacia la solución del problema. Evidenciamos que los procesos de visualización están coordinados y dirigidos hacia la solución del problema.



Afirmación 1: en un paralelogramo las diagonales se bisecan.
Afirmación 2: los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
Afirmación 3: propiedad de la adición de segmentos.
Afirmación 4: axioma de congruencia de triángulos Lado-Ángulo-Lado.
Afirmación 5: teorema de caracterización de paralelogramos.
Afirmación 6: axioma Lado-Lado-Lado.

Figura 4.20

Parece claro que el estudiante ha realizado, en varias ocasiones, el ciclo aprehensión discursiva/aprehensión operativa señalado anteriormente hasta que ha encontrado la “idea” que resuelve el problema. En la unidad de información 15) el estudiante dice: “haciendo lo mismo con…”. Esta frase nos permite afirmar que la idea que le ha llevado a la prueba solicitada ha sido conseguir demostrar que dos lados opuestos del cuadrilátero ABCD son congruentes. Una vez que se ha obtenido esta idea el razonamiento se trunca, con lo que no es necesario seguir con este proceso ya que se tienen las ideas que permiten desarrollar el proceso deductivo.

El mapa de estructura muestra el discurso teórico realizado por el estudiante 40:

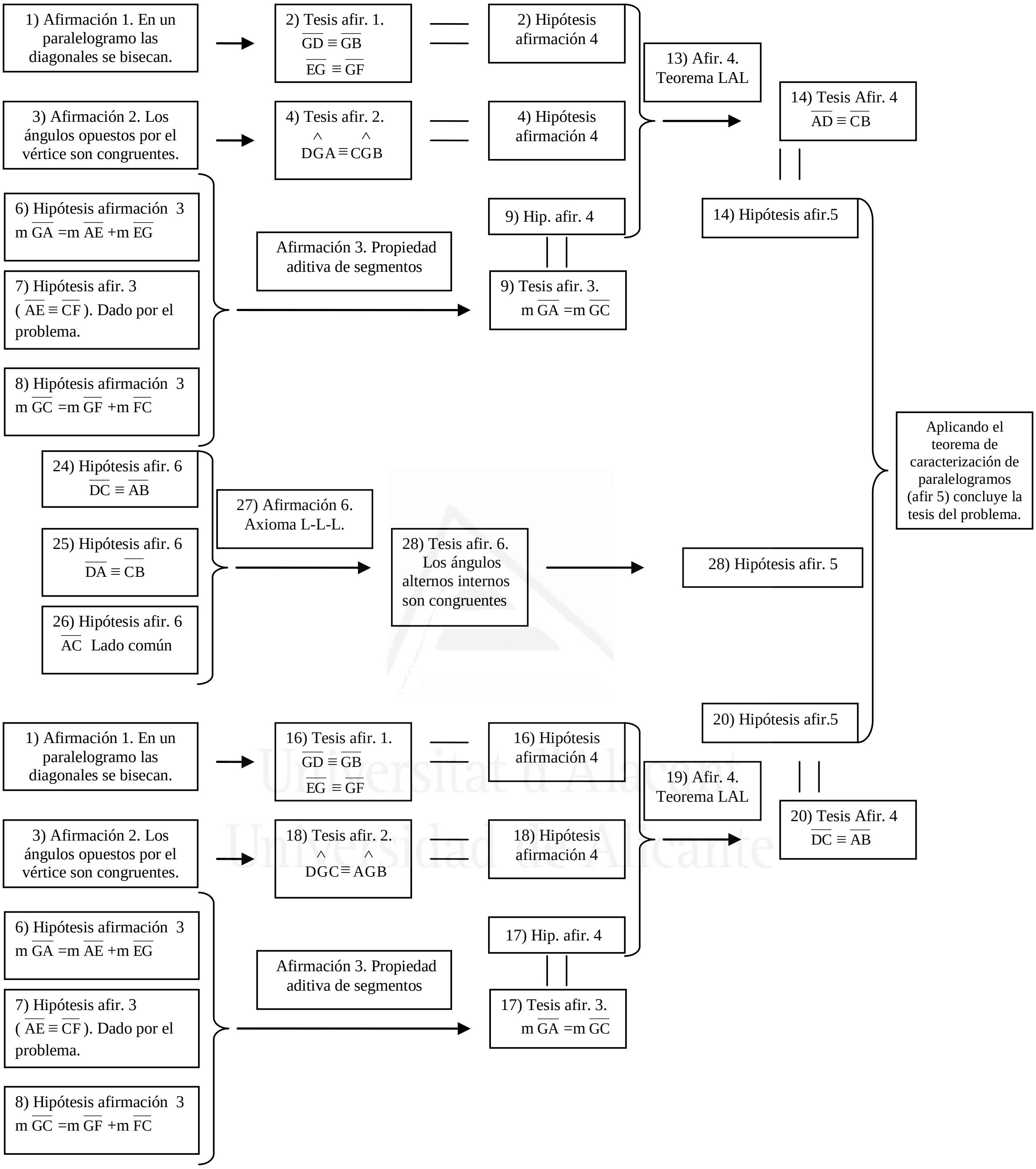


Figura 4.21. Representación del discurso teórico realizado por el estudiante 40 en su respuesta al problema 8.

4.3.2 Segundo Tipo de Coordinación

El segundo tipo de coordinación está formado por aquellas respuestas en las que la modificación de la configuración, con afirmaciones matemáticas que son asociadas a las subconfiguraciones relevantes, permite resolver el problema aceptando conjeturas mediante percepción simple. Es decir, el papel heurístico de la configuración inicial puede desarrollar una solución intuitiva del problema que puede ser aceptada como respuesta. En algún caso la respuesta puede estar inmersa en un proceso discursivo natural con el fin de comunicar a otros o a uno mismo el razonamiento. En este tipo de coordinación no hay necesidad de probar deductivamente las propiedades que se ponen en juego para resolver el problema sino que son aceptadas mediante percepción simple. Esto puede producir en ocasiones que la respuesta realizada sea errónea o al menos esté condicionada por cómo es la configuración inicial.

Presentamos como un ejemplo de este tipo de coordinación la respuesta realizada por el estudiante 2 al problema 6. En esta respuesta la coordinación está inmersa en un discurso natural con el fin de comunicar el proceso seguido.

Problema 6. En un plano, la recta L es mediatriz de $\overline{QT}$. Sea P un punto del mismo semiplano, de recta borde L, que Q. La recta PT corta a L en el punto R.

Probar que m $\overline{PT}$ = m $\overline{PR}$ + m $\overline{PQ}$.

Respuesta (2, 6):

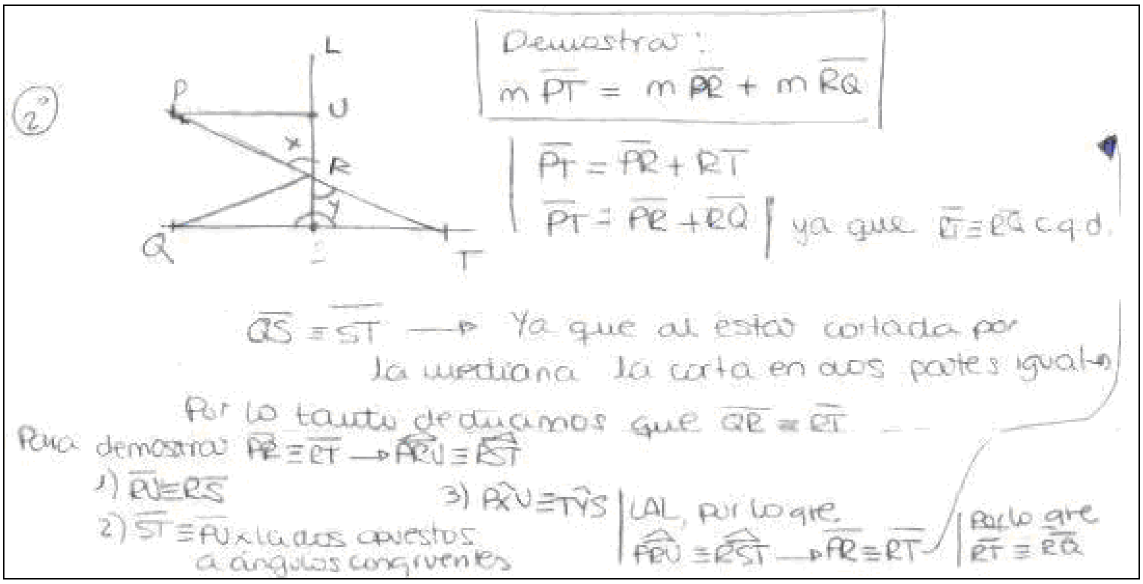


Figura 4.22

ETAPA 1

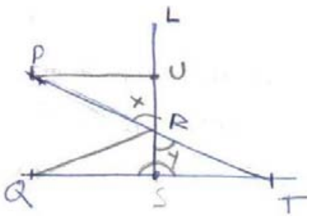
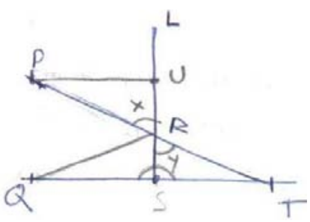
Trascripción	Carencias
1) Demostrar m $\overline{PT}$ = m $\overline{PR}$ + m $\overline{PQ}$ 2)  Figura 4.23 3) $\overline{QS} \equiv \overline{ST}$ → Ya que al estar cortada por la mediana, la corta en dos partes iguales. 4) Por lo tanto deducimos que $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$ 5) Para demostrar $\overline{PR} \equiv \overline{RT} \rightarrow \overset{\Delta}{PRU} \equiv \overset{\Delta}{RST}$ 6) 1) $\overline{RU} \equiv \overline{RS}$ 7) 2) $\overline{ST} \equiv \overline{PU}$ x lados opuestos a ángulos congruentes. 8) 3) $P\hat{X}U \equiv T\hat{Y}S$ 9)LAL, por lo que $\overset{\Delta}{PRU} \equiv \overset{\Delta}{RST} \rightarrow \overline{PR} \equiv \overline{RT}$ 10) Por lo que $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$ 11) $\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RT}$ $\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RQ}$ Ya que $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$ c.q.d.	3) $\overline{QS} \equiv \overline{ST}$ ya que al estar cortada por *L mediatriz*, la corta en dos partes congruentes. 4) Por ser L mediatriz, deducimos que $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$ 5) $\overline{PR}$ no es necesariamente congruente a $\overline{RT}$. Luego está demostrando la tesis en el caso particular de la configuración. 6) Hipótesis sin demostrar ya que es falsa en general y solo puede ser cierta en el caso particular en su configuración. 7) En un triángulo a lados congruentes se oponen ángulos congruentes.

Figura 4.24

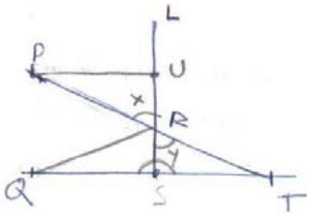
ETAPA 2

Trascripción	Análisis procesos de visualización
1) Demostrar m $\overline{PT}$ = m $\overline{PR}$ + m $\overline{PQ}$ 2)  Figura 4.23 3) $\overline{QS} \equiv \overline{ST}$ → Ya que al estar cortada por	2) Introduce nuevas subconfiguraciones como los segmentos $\overline{QR}$ y $\overline{PU}$ además de los ángulos $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ que no son elementos geométricos dados en el enunciado del problema. Estas acciones son evidencias de una aprehensión operativa. 3) El estudiante asocia la definición de *mediatriz* a la configuración (aprehensión

la mediana, la corta en dos partes iguales. 4) Por lo tanto deducimos que $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$ 5) Para demostrar $\overline{PR} \equiv \overline{RT} \rightarrow \overset{\Delta}{PRU} \equiv \overset{\Delta}{RST}$ 6) 1) $\overline{RU} \equiv \overline{RS}$ 7) 2) $\overline{ST} \equiv \overline{PU}$ x lados opuestos a ángulos congruentes. 8) 3) $P\hat{X}U \equiv T\hat{Y}S$ 9)LAL, por lo que $\overset{\Delta}{PRU} \equiv \overset{\Delta}{RST} \rightarrow \overline{PR} \equiv \overline{RT}$ 10) Por lo que $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$ 11) $\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RT}$ $\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RQ}$ Ya que $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$ c.q.d.	discursiva). Además realiza un cambio de anclaje de discursivo a visual (elabora su configuración inicial que representa un caso particular de la situación geométrica planteada en el enunciado). 6) Percibe en su configuración que la congruencia de segmentos es cierta, visualmente parece serlo pero no es así (aprehensión perceptiva). 7) El estudiante identifica que en su configuración son iguales (aprehensión Perceptiva) y lo intenta demostrar con una afirmación que no es adecuada en este caso. 8) Identifica la relación de las subconfiguraciones $P\hat{X}U$ y $T\hat{Y}S$ sin asociar ninguna afirmación que le permita probarla (aprehensión perceptiva). 9) Asocia el axioma L-A-L a su configuración, entendemos que esta acción puede ser evidencia de una aprehensión discursiva. 11) El estudiante asocia una propiedad aditiva de segmentos a la configuración (aprehensión discursiva).

Figura 4.25

ETAPA 3

Trascripción	**Pasos de inferencia**
1) Demostrar $m\,\overline{PT} = m\,\overline{PR} + m\,\overline{PQ}$ 2)  Figura 4.23 3) $\overline{QS} \equiv \overline{ST}$ → Ya que al estar cortada por la mediana, la corta en dos partes iguales. 4) Por lo tanto deducimos que $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$ 5) Para demostrar $\overline{PR} \equiv \overline{RT} \rightarrow \overset{\Delta}{PRU} \equiv \overset{\Delta}{RST}$ 6) 1) $\overline{RU} \equiv \overline{RS}$	1) Solución del problema por demostrar. 2) Afirmación 1. Dados 2 puntos definimos mediatriz como el lugar geométrico que equidista de ambos puntos. (En este caso la definición de mediatriz no necesita de ninguna verificación de hipótesis iniciales ya que el enunciado del problema nos dice que L es mediatriz). 4) Conclusión obtenida de la afirmación 1: $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$ 5) Identifica la conclusión de la afirmación 2 como paso previo para demostrar la solución del problema. 6), 7) y 8) son las hipótesis necesarias para utilizar la afirmación 2.

7) 2) $\overline{ST} \equiv \overline{PU}$ x lados opuestos a ángulos congruentes. 8) 3) $P\hat{X}U \equiv T\hat{Y}S$ 9)LAL, por lo que $P\overset{\Delta}{R}U \equiv R\overset{\Delta}{S}T \rightarrow \overline{PR} \equiv \overline{RT}$ 10) Por lo que $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$ 11) $\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RT}$ $\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RQ}$ Ya que $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$ c.q.d.	9) Afirmación 2 (axioma de congruencia de triángulos Lado-Ángulo-Lado) y conclusión de la afirmación. 10) Hipótesis necesaria para la afirmación 3 (Propiedad de la adición de segmentos). 11) Utiliza la afirmación 3 para obtener la tesis del problema.

Figura 4.26

En el punto 2) construye la representación de la situación geométrica planteada en el enunciado. En la configuración inicial introduce algunos elementos geométricos “nuevos” tales como los segmentos $\overline{QR}$ y $\overline{PU}$ además de los ángulos $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ (aprehensión operativa de cambio figural), indicada en el punto 5). En 3) usa la definición de mediatriz (aunque el resolutor la nombra como mediana), es decir, realiza una aprehensión discursiva para deducir impropiamente en 4) que $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$.

En los puntos anteriores, dejando aparte las inexactitudes o los errores existentes, observamos una coordinación entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa. En el punto 4) se conjetura que para demostrar $\overline{PR} \equiv \overline{RT}$ debe demostrar $P\overset{\Delta}{R}U \equiv R\overset{\Delta}{S}T$ (congruencia LAL). Esta congruencia no es relevante para la resolución del problema ya que puede ser cierta en este caso particular por la forma que ha tomado la configuración, pero no en el caso general que demanda el problema. El papel heurístico de la configuración y las modificaciones realizadas le permiten construir una configuración cuya forma es suficiente para resolver el problema. Este proceso lo resumimos en la figura 4.28.

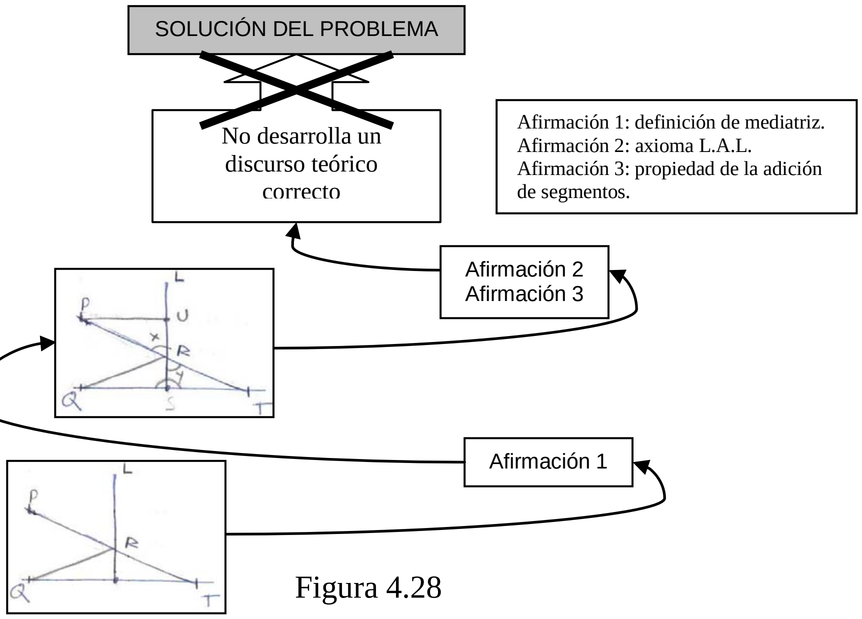


Figura 4.28

Este tipo de discurso vinculado a una información procedente de la configuración creada, y no de una coordinación adecuada entre las aprehensiones realizadas por el estudiante, caracterizan un determinado desenlace. En este caso, el estudiante dibuja el punto P (la situación del punto "cualquiera" P) en ese lugar tan "adecuado", tiene consecuencias en la solución que presenta, ya que le hace asumir que los segmentos PU y QS son congruentes, con lo que estas subconfiguración desvían su atención de otros elementos geométricos.

Mapa de estructura (2, 6):

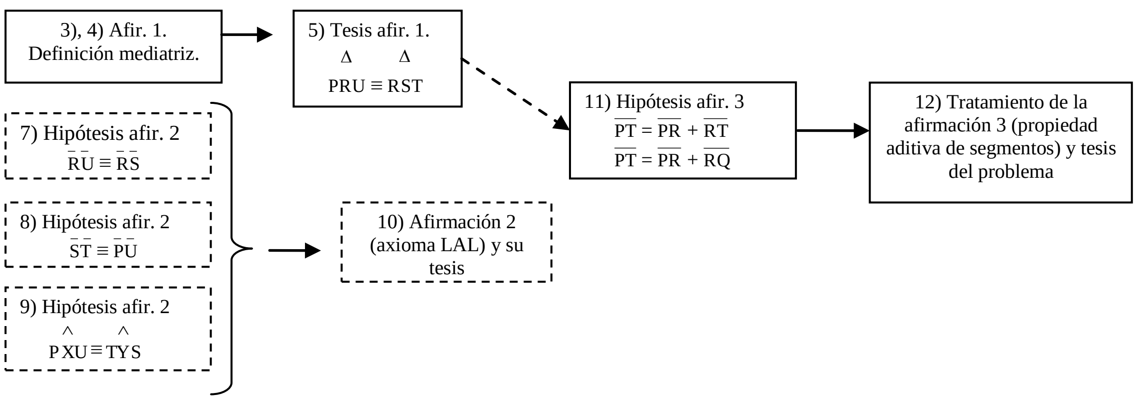
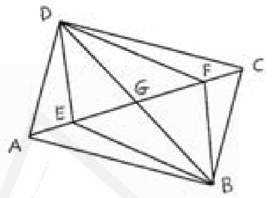


Figura 4.27. Algunos niveles locales no están completos ni, como consecuencia, están totalmente conectados para formar el nivel global.

4.3.3 Tercer Tipo de Coordinación

El tercer tipo de coordinación está formado por aquellas respuestas en las que la coordinación conduce a una situación de bloqueo, que no permite el avance hacia la solución y por tanto un estancamiento del razonamiento producido. El bloqueo puede ocurrir ya sea porque no asocia una afirmación matemática a una subconfiguración relevante o no realiza una modificación productiva de la configuración. Un ejemplo de este desenlace es el realizado por el estudiante 16 para resolver el problema 8.

Problema 8. *En la figura, □DEBF es un paralelogramo y* $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$. *Probar que □ABCD es un paralelogramo.*



A continuación mostramos la respuesta escaneada, su transcripción y una sección del análisis:

Solución (16, 8):

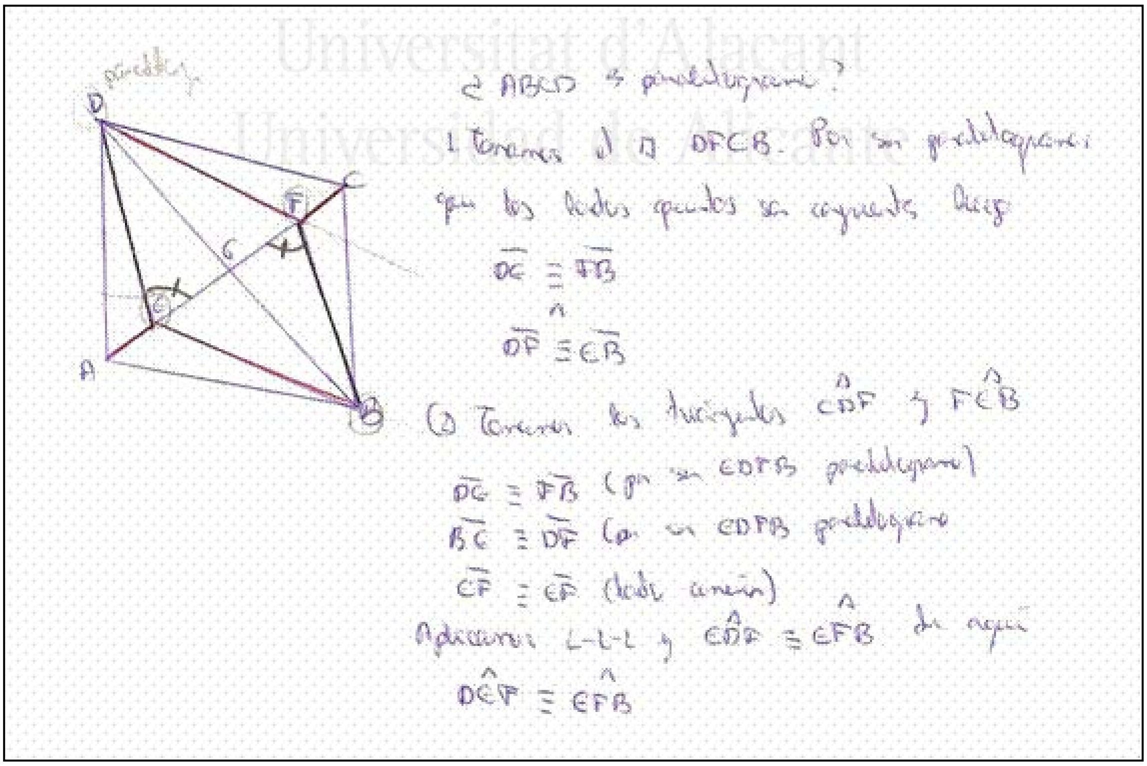


Figura 4.29

ETAPA 1

Trascripción de la respuesta

1) Figura 4.32
2) ¿□ ABCD es un paralelogramo?
3) Tenemos el □ DFEB. Por ser paralelogramo los lados opuestos son congruentes luego
4) $\overline{DE} \equiv \overline{FB} \wedge \overline{DF} \equiv \overline{EB}$
5) Tomemos los triángulos $\overset{\Delta}{EDF}$ y $\overset{\Delta}{FEB}$
6) $\overline{DE} \equiv \overline{FB}$ (por ser EDFB paralelogramo)
7) $\overline{BE} \equiv \overline{DF}$ (por ser EDFB paralelogramo)
8) $\overline{EF} \equiv \overline{EF}$ (lado común)
9) Aplicamos L-L-L
10) $\overset{\Delta}{EDF} \equiv \overset{\Delta}{EFB}$ de aquí $D\hat{E}F \equiv E\hat{F}B$

Figura 4.30

Figura 4.31. No hay errores de notación significativos.

ETAPA 2

Trascripción	Análisis procesos de visualización
1) Figura 4.32 2) ¿□ ABCD es un paralelogramo? 3) Tenemos el □ DFEB. Por ser paralelogramo los lados opuestos son congruentes luego 4) $\overline{DE} \equiv \overline{FB} \wedge \overline{DF} \equiv \overline{EB}$ 5) Tomemos los triángulos $\overset{\Delta}{EDF}$ y $\overset{\Delta}{FEB}$ 6) $\overline{DE} \equiv \overline{FB}$ (por ser EDFB paralelogramo) 7) $\overline{BE} \equiv \overline{DF}$ (por ser EDFB paralelogramo)  F. 4.30 8) $\overline{EF} \equiv \overline{EF}$ (lado común) 9) Aplicamos L-L-L 10) $\overset{\Delta}{EDF} \equiv \overset{\Delta}{EFB}$ de aquí $D\hat{E}F \equiv E\hat{F}B$	3) El estudiante asocia la definición de paralelogramo a la configuración inicial (aprehensión discursiva). 4) Se identifica un cambio de anclaje debido a las marcas de congruencias de segmentos. 5) Extrae de la configuración inicial los triángulos $\overset{\Delta}{EDF}$ y $\overset{\Delta}{FEB}$ (aprehensión operativa). 9) Asocia a los triángulos anteriores la afirmación 2.

Figura 4.32

ETAPA 3

Trascripción	Pasos de inferencia
1) Figura 4.30 2) ¿□ ABCD es un paralelogramo? 3) Tenemos el □ DFEB. Por ser paralelogramo los lados opuestos son congruentes luego 4) $\overline{DE} \equiv \overline{FB} \wedge \overline{DF} \equiv \overline{EB}$ 5) Tomemos los triángulos $\overset{\Delta}{EDF}$ y $\overset{\Delta}{FEB}$	2) Tesis del problema a demostrar. 3) Afirmación 1. Consecuencia de la definición de paralelogramo. 4) Tesis de la afirmación 1.

6) $\overline{DE} \equiv \overline{FB}$ (por ser EDFB paralelogramo) 7) $\overline{BE} \equiv \overline{DF}$ (por ser EDFB paralelogramo) 8) $\overline{EF} \equiv \overline{EF}$ (lado común) 9) Aplicamos L-L-L 10) $\overset{\Delta}{EDF} \equiv \overset{\Delta}{EFB}$ de aquí $\widehat{DEF} \equiv \widehat{EFB}$  F. 4.30	6) Hipótesis de la afirmación 2. Axioma L-L-L. 7) Hipótesis de la afirmación 2. 8) Hipótesis de la afirmación 2. 9) Afirmación 2. 10) Tesis de la afirmación 2.

Figura 4.33

El estudiante identifica en la configuración inicial los triángulos $\overset{\Delta}{EDF}$, $\overset{\Delta}{FEB}$ y algunas congruencias tales como $\overline{DE} \equiv \overline{FB}$, $\overline{BE} \equiv \overline{DF}$ y $\overline{EF} \equiv \overline{EF}$, estas acciones junto con la acción de asociarle las afirmaciones 1 y 2, son evidencia de una coordinación entre la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva, aunque las asociaciones realizadas (aprehensiones discursivas), que se identifican en el dibujo por las marcas realizadas, se reducen al mínimo. Además, las únicas marcas que se observan no son relevantes para la solución del problema. En 3), el estudiante realiza una aprehensión discursiva al asociar una característica de los paralelogramos con los elementos geométricos (lados opuestos) del dibujo. El cambio de anclaje es de discursivo a visual. En 5) identifica una subconfiguración, el paralelogramo □EBFD, pero constituido por los dos triángulos $\overset{\Delta}{EDF}$ y $\overset{\Delta}{FEB}$. Esta acción es una aprehensión operativa de reconfiguración ya que divide, aunque sea mentalmente, el paralelogramo en dos subconfiguraciones constituyentes (los dos triángulos). En 6), 7) y 8) verifica las hipótesis de la afirmación 2 (L-L-L) y concluye en 9) que los triángulos considerados son congruentes. Como consecuencia concluye la congruencia de los ángulos DEF y EFB y no escribe nada más. Una vez realizada estas acciones la respuesta del estudiante sufre un bloqueo (figura 4.34). Esta situación podría haberse superado de varias formas, por ejemplo identificando otras subconfiguraciones relevantes como los triángulos $\overset{\Delta}{DFC}$, $\overset{\Delta}{DAE}$, $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{FBC}$, $\overset{\Delta}{DAC}$ o $\overset{\Delta}{ABC}$ o las diagonales del paralelogramo □DEBF. Estas subconfiguraciones son relevantes para resolver el problema y la identificación de ellas podría generar nuevas asociaciones matemáticas y no bloquear el proceso.

En la siguiente figura la línea gruesa horizontal y en negrita indica el momento en el que el estudiante entra en la situación de bloqueo.

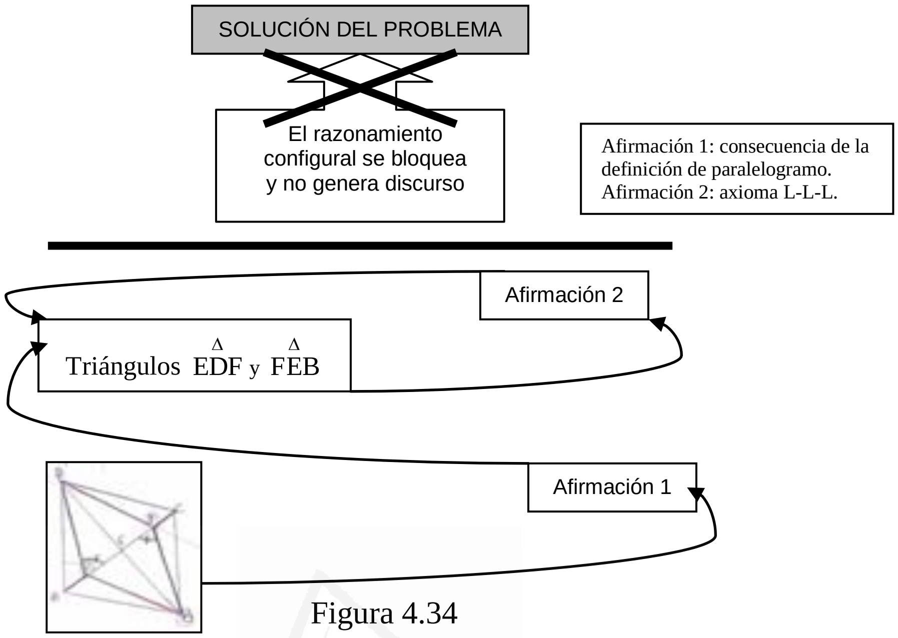


Figura 4.34

El estudiante 16 entra en una situación de bloqueo durante el proceso de resolución pero sin encontrar una salida viable. El hecho de hacer una deducción más o menos útil y no ser capaz de continuar en su resolución del problema, indica que el estudiante ha llegado a un bloqueo.

4.3.4 Desenlaces

Tras realizar el análisis de la coordinación de cada una de las respuestas a cada uno de los problemas las clasificamos en dos grandes grupos: Aquellas respuestas cuya coordinación da solución al problema y aquellas que no la dan, como muestra la figura 4.35.

En el primer grupo, respuestas que dan solución al problema, hemos considerado a su vez dos categorías que hemos llamado truncamiento y conjetura sin demostración:

- En la primera de ellas hemos clasificamos aquellas respuestas en las que la coordinación favorece que el estudiante obtenga la “idea” que permite resolver deductivamente el problema, para seguidamente generar un discurso teórico. A esta categoría la llamamos *Truncamiento*.

- En la segunda categoría clasificamos las respuestas que permiten resolver el problema aceptando conjeturas mediante percepción simple. La coordinación no ayuda a generar un discurso teórico correcto.

En el segundo grupo, la coordinación no consigue ninguna solución. La coordinación conduce a una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución y que hemos denominado “bucle”.

La coordinación da una solución al problema	“Truncamiento”: la coordinación proporciona un discurso teórico correcto, habiendo obtenido la “idea” que permite resolver deductivamente el problema.
	“Conjetura sin demostración”: la coordinación no proporciona un discurso teórico correcto pero sí permite resolver el problema aceptando las conjeturas mediante percepción simple.
La coordinación no da solución	“Bucle”: la coordinación conduce a una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución.

Figura 4.35

En la figura 4.36 mostramos los tres tipos de coordinación obtenidos del análisis de las respuestas. Tanto si la coordinación da respuesta como si no, detectamos que en todas existe una interacción ordenada entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa.

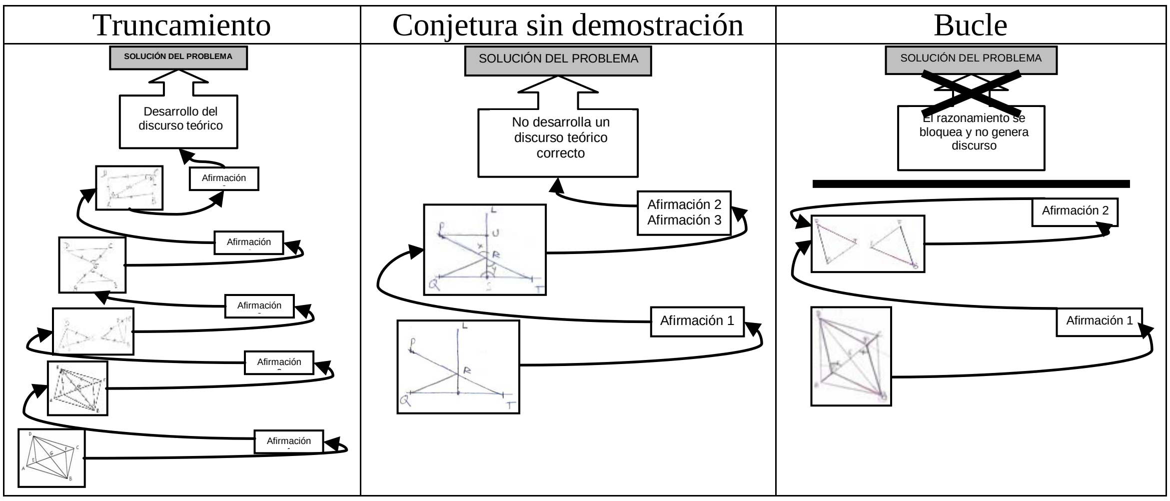


Figura 4.36

Nos planteamos un modelo que explique las situaciones anteriormente descritas.

Llamamos **Razonamiento Configural** al desarrollo de la acción coordinada entre las aprehensiones discursivas y operativas cuando se resuelven problemas de geometría.

La solución de un problema mediante un razonamiento configural involucra una coordinación entre la configuración inicial y las posibles modificaciones de ésta con las afirmaciones matemáticas pertinentes. Esta coordinación se entiende como el conjunto de acciones que realiza el resolutor del problema para razonar en geometría y debe distinguirse de las acciones que realiza en los procesos de comunicación. Es decir, el razonamiento configural es el desarrollo de las aprehensiones (aprehensión discursiva/aprehensión operativa) realizadas y coordinadas por el estudiante cuando está resolviendo un problema de geometría. Para representar gráficamente esta interacción usamos la figura 4.37.

Representación del razonamiento configural:

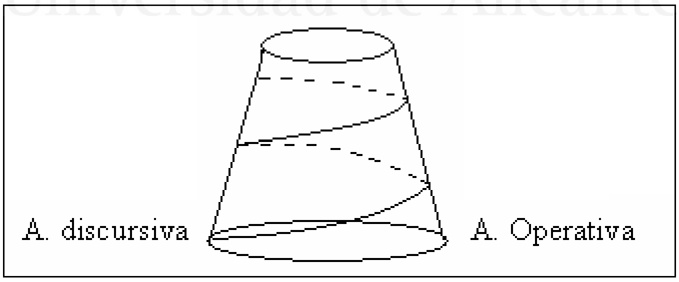


Figura 4.37. Coordinación de la aprehensión discursiva y operativa en la resolución de problemas de geometría.

La figura 4.37 muestra nuestra idea de razonamiento configural, un cono truncado donde la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa actúan coordinadamente convergiendo hacia la solución del problema. Este razonamiento puede desembocar en estas situaciones:

- "*Truncamiento*", cuando la coordinación proporciona la «idea» para resolver deductivamente el problema. Es decir, el razonamiento configural se interrumpe cuando se obtiene la «idea» que resuelve el problema (la prueba). A partir de esa idea se genera el discurso deductivo. El papel que desarrolla la configuración inicial es heurístico, hasta obtener la idea o ideas que permitan desarrollar el discurso. Un vez encontradas, el rol de la configuración cambia a un papel sinóptico que sirve para tener los elementos geométricos del problema presentes.
- "*Conjetura sin demostración*", es decir, el razonamiento configural permite resolver el problema aceptando conjeturas mediante percepción simple y expresando la solución mediante el lenguaje natural, el lenguaje simbólico o siendo el propio tratamiento heurístico de la configuración suficiente para resolver el problema, sin necesidad de validar las relaciones ni afirmaciones usadas.
- Un "*bucle*" es definido como el razonamiento configural en el que se ha llegado a una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución y por tanto un estancamiento del razonamiento producido. El papel heurístico de la configuración inicial no cambia como en el truncamiento y tampoco es suficiente para resolver aunque sea intuitivamente el problema.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

En este capítulo se realiza la discusión de los resultados obtenidos, reflexionando sobre las características del razonamiento configural y su relación con la resolución de problemas. Comenzaremos recuperando y dando respuesta a los objetivos de la investigación, indicados en el Capítulo 2. A continuación, distinguimos algunas dificultades que pueden bloquear la coordinación de los procesos de visualización. Posteriormente, hacemos hincapié en la relevancia que el razonamiento configural tiene en la resolución de problemas geométricos y, en particular, para el desarrollo de pruebas matemáticas. Por último, se indican limitaciones y perspectivas de futuro que plantea la investigación realizada.

5.1 Conclusiones

A continuación se analizan los resultados y conclusiones alcanzados en relación con los objetivos de la investigación, expuestos en el Capítulo 2:

Objetivo 1. Realizar un refinamiento de los distintos comportamientos del individuo identificados por Duval (1998), ante la tarea de resolver problemas de geometría.

Como resultado de la fase I del análisis, las respuestas de los estudiantes se han agrupado según los procesos de visualización (aprehensión perceptiva, aprehensión discursiva y aprehensión operativa) y el discurso seguido (natural o teórico). Esta clasificación la que hemos utilizado para realizar un refinamiento de los comportamientos del individuo señalados por Duval (1998), según los procesos cognitivos involucrados. En este refinamiento, el comportamiento matemático se ha subdividido en dos nuevos tipos de comportamiento según las asociaciones matemáticas realizadas. Por otro lado, hemos encontrado evidencias de un subgrupo del comportamiento ingenuo cuya característica consiste en el uso de una configuración inicial particular que dificulta la generalización de la respuesta.

El resumen de los comportamientos del individuo obtenidos los mostramos en el siguiente cuadro (figura 5.1):

	Visualización	**Razonamiento**	**Frecuencia de respuestas**
CIG **CIP**	Aprehensión perceptiva Aprehensión operativa Aprehensión discursiva	Proceso discursivo natural	25 respuestas son CIG de las cuales 6 son CIP
CM1	Aprehensión operativa Aprehensión discursiva (asociaciones adecuadas)	Proceso discursivo teórico	120 respuestas
CM2	Aprehensión operativa Aprehensión discursiva (asociaciones inadecuadas)		14 respuestas

Figura 5.1

Las respuestas clasificadas como comportamiento matemático tipo 1 son aquellas en las que identificamos aprehensiones operativas y discursivas como procesos de visualización. Las distintas acciones realizadas por el estudiante y su interacción le permiten reconocer afirmaciones matemáticas adecuadas y asociarlas a las subconfiguraciones relevantes identificadas. En este comportamiento, la solución del problema se organiza mediante un discurso teórico respetando una estructura deductiva.

Las respuestas clasificadas como comportamiento matemático tipo 2 son aquellas en las que identificamos también aprehensiones operativas y discursivas como procesos de visualización. Pero a diferencia del comportamiento anterior, alguna de las asociaciones matemáticas que realiza el estudiante no son adecuadas para resolver el problema. La solución del problema también se organiza mediante un discurso teórico respetando una estructura deductiva.

El comportamiento ingenuo general (CIG) se caracteriza por interacciones realizadas entre aprehensiones discursivas y operativas, inmersas en el desarrollo de un discurso natural con la finalidad de comunicar el proceso seguido. El comportamiento ingenuo particular (CIP) se caracteriza por el uso de una configuración particular que no permite generalizar. La aprehensión perceptiva es especialmente importante en este tipo de comportamientos ya que es la identificación simple de características, obtenidas visualmente de la configuración, la que condiciona el desarrollo de este tipo de respuestas. Además puede estar seguida del uso de instrumentos o herramientas, ya sean físicas (como un transportador de ángulos, una regla, un compás…) o conceptuales (afirmaciones matemáticas sin verificación alguna), para explicar lo realizado. Su razonamiento está representado por un proceso discursivo natural.

En otras palabras, hemos añadido características a los comportamientos ingenuo y matemático de Duval (1998), evidenciando, como consecuencia, nuevas subcategorías que permiten refinar la clasificación de los comportamientos del individuo.

Objetivo 2. Caracterizar interacciones entre los procesos de visualización y de razonamiento que evidencia el alumno en la resolución de problemas de geometría que demandan una prueba formal.

En la tabla, (Figura 5.2), mostramos los tres tipos de interacción entre las aprehensiones operativas y discursivas que se han identificado en la fase II del análisis. Tanto si las interacciones dan respuesta al problema como si no, lo que hemos observado es que estas interacciones se producen de manera regular, con un ritmo, con un orden entre las aprehensiones discursivas y las aprehensiones operativas. Esta interacción ordenada es el indicador que nos permite hablar de coordinación entre las aprehensiones. De manera que una respuesta en donde el ritmo de esta interacción sea A.O./A.D. de manera continua da idea de la consecución de esta coordinación.

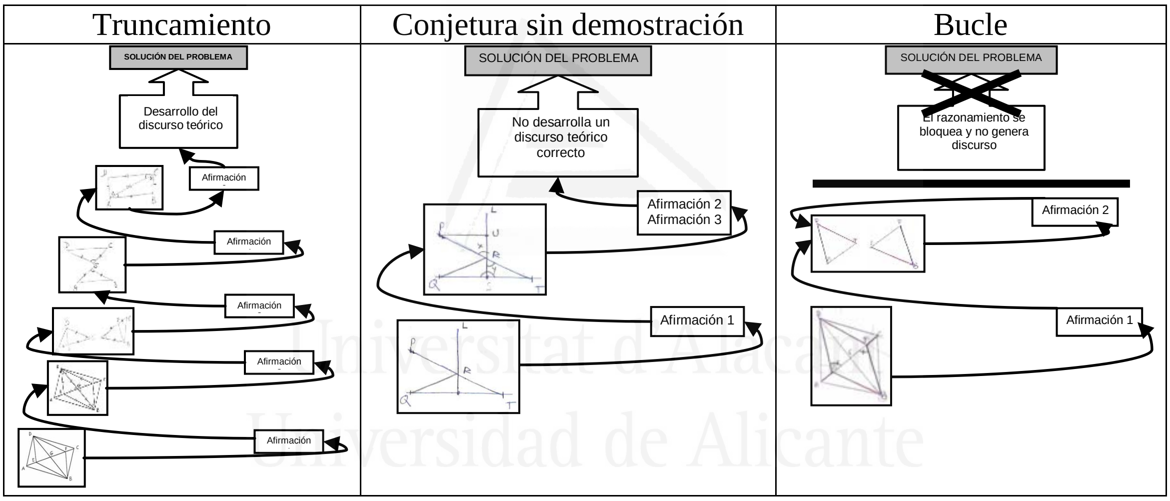


Figura 5.2.

Los ejemplos de representación de la coordinación han permitido definir y caracterizar la interacción ordenada entre los procesos de visualización y su relación con los procesos discursivos. Podemos distinguir dos situaciones:

-La coordinación genera una solución al problema.

Si ocurre esta situación distinguimos a su vez dos clases de procesos:

"*Truncamiento*": la coordinación favorece que el estudiante obtenga la "idea" que permite resolver deductivamente el problema, para seguidamente generar un discurso teórico.

"*Conjetura sin demostración*": la coordinación permite resolver el problema aceptando conjeturas mediante percepción simple. Pero no ayuda a generar un discurso teórico correcto.

-La coordinación no genera ninguna solución ("*Bucle*").
La coordinación (o la falta de ella) conduce a una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución.

Objetivo 3. Construir un modelo que explique la coordinación de los procesos cognitivos y posibles dificultades encontradas por los estudiantes para lograr dicha coordinación.

Hemos construido un modelo para explicar la coordinación de los procesos de visualización y su relación con los procesos discursivos. La idea central del modelo es el razonamiento configural (figura 5.3) donde la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva interactúan convergiendo hacia la solución del problema.

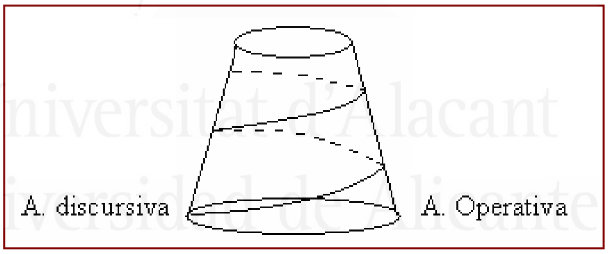


Figura 5.3

El modelo pretende destacar, entre los múltiples factores que pueden interactuar en un proceso de razonamiento (de ahí el modelo en el espacio tridimensional, en cualquier dirección), el papel desempeñado por los procesos de visualización: aprehensión operativa y aprehensión discursiva que, al interactuar coordinadamente, orientan el proceso de razonamiento hacia la solución del problema (Clemente, F. y Llinares, S., 2013; Llinares S. y Clemente, F., 2014).

5.2 Factores que Dificultan el Razonamiento Configural

La aprehensión discursiva juega un papel importante dentro del razonamiento configural. Las afirmaciones matemáticas asociadas a las distintas configuraciones pueden ser entendidas como adecuadas o inadecuadas para resolver el problema dependiendo si permite resolverlo o no.

Veamos un ejemplo sencillo que ilustre la diferencia entre estas dos circunstancias en el mismo problema y que le pueden ocurrir a los estudiantes cuando trabajan con afirmaciones matemáticas: el torreón más alto del palacio de Whitehall en un determinado momento del día arroja una sombra de 10 metros. En ese mismo momento, una maqueta del mismo palacio de 100 centímetros de altura arroja una sombra de 20 centímetros. ¿Qué altura tiene el torreón del palacio?

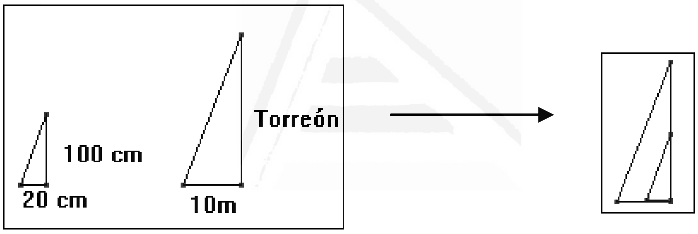


Figura 5.4

En la figura 5.4 se indica una posible situación geométrica inicial del problema. Respecto al discurso, si un estudiante utiliza el teorema de Thales, el teorema es adecuado para resolverlo. Por el contrario, asociar el teorema de Pitágoras no es adecuado para resolver este problema a pesar de aparecer en la configuración inicial triángulos rectángulos. Con el teorema de Pitágoras y los datos ofrecidos por el problema es improbable que el estudiante sea capaz de resolverlo. Este ejemplo sirve para ilustrar como una asociación inadecuada puede llevarnos a un bloqueo del razonamiento configural y a un estancamiento del discurso (lo que hemos llamado bucle).

La respuesta dada por el estudiante 27 al problema 2 es un ejemplo en la que se evidencia un discurso teórico mediante afirmaciones adecuadas. Pero al terminar su respuesta afirma que también se podría realizar una respuesta similar con una afirmación que es inadecuada para resolverlo.

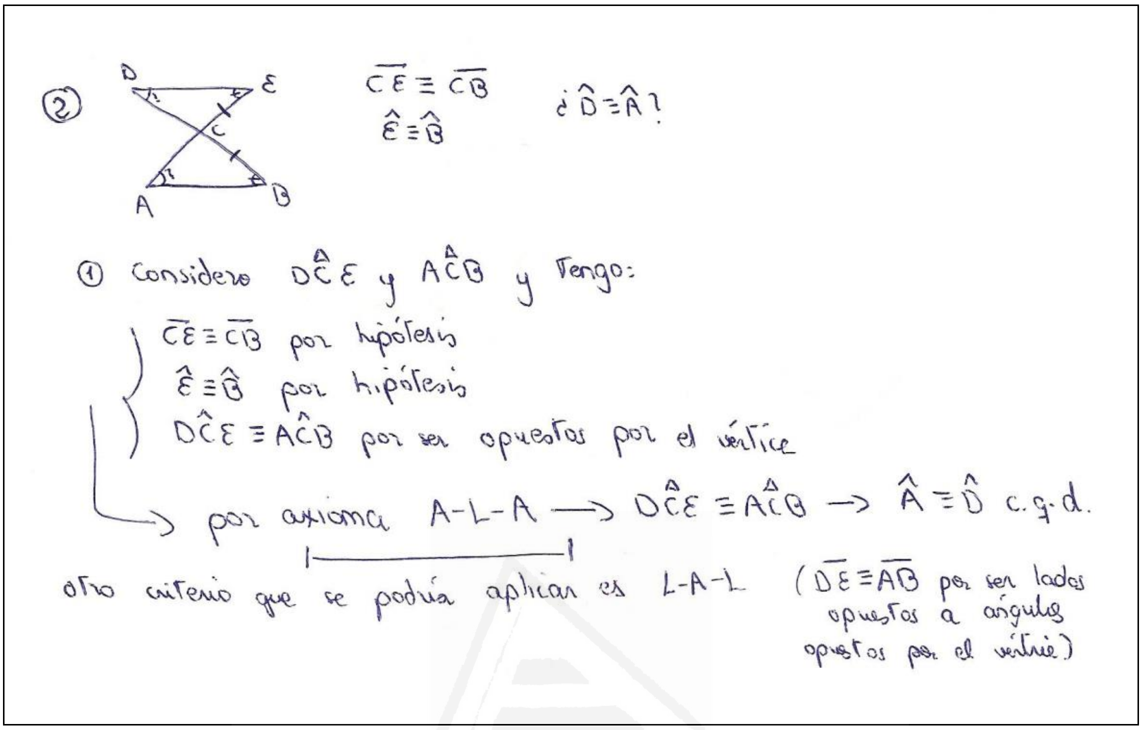


Figura 5.5

La solución es derivada de la coordinación entre la asociación de afirmaciones matemáticas (el axioma de congruencias de triángulos Ángulo-Lado-Ángulo) y la manipulación de la configuración inicial en la que se identifica los triángulos $\overset{\Delta}{DCE}$ y $\overset{\Delta}{ACB}$, probando que son congruentes para resolver el problema. El análisis realizado muestra cómo la configuración tiene dos papeles distintos en la resolución del problema. En un primer momento la configuración inicial tiene un papel heurístico, tras realizar modificaciones, marcas e identificar los triángulos $\overset{\Delta}{DCE}$ y $\overset{\Delta}{ACB}$, que son las dos subconfiguraciones constituyentes, la configuración le sirve ahora para tener la información dada por el problema de una forma sinóptica. Además el estudiante desarrolla un proceso discursivo teórico en su primera respuesta mediante el axioma Ángulo-Lado-Ángulo.

Destacamos que en su segunda solución el axioma Lado-Ángulo-Lado no es conveniente para resolver el problema. Su configuración inicial es ahora dos triángulos congruentes, en la que percibe la relación $\overline{DE} \equiv \overline{AB}$, sin demostrarla. En la respuesta se realiza una interacción entre el reconocimiento de las subconfiguraciones relevantes (los dos triángulos, aprehensión operativa) y la asociación de una afirmación matemática (aprehensión discursiva). El criterio L-A-L, es inadecuado para resolver este problema ya que necesita probar la hipótesis $\overline{DE} \equiv \overline{AB}$ que en general es falsa. Mostramos a continuación un contraejemplo en la figura 5.3.

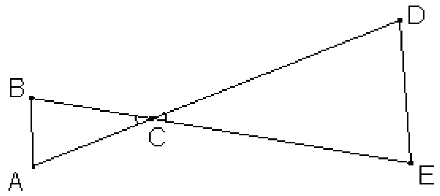


Figura 5.6

Los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{DE}$ son lados opuestos por el vértice (los ángulos $B\hat{C}A$ y $D\hat{C}A$ son opuestos), pero como es visualmente evidente los segmentos no son congruentes. Consideramos que los triángulos dados por el enunciado del problema pueden ser prototípicos y éste puede ser un factor que haya producido la asociación inadecuada.

Por otro lado subrayamos la importancia de identificar subconfiguraciones relevantes en la resolución de problemas. Pero la acción de identificar una subconfiguración relevante es una dificultad añadida al desarrollo del razonamiento configural. En el siguiente ejemplo mostramos un problema donde mostramos este hecho.

El radio de la circunferencia mide 2 cm. Halla la longitud del segmento AB.

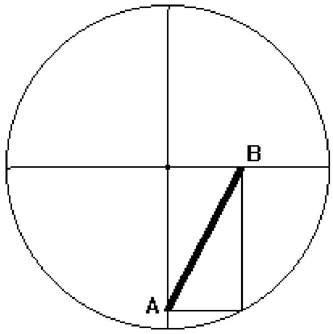


Figura 5.7

Para resolver el problema identificamos qué subconfiguraciones son relevantes para resolverlo y cuales no. Una posible solución consiste en identificar el paralelogramo ACBD y sus dos diagonales. El estudiante debe asociar alguna afirmación matemática que le permita deducir que las diagonales de un paralelogramo miden lo mismo (son congruentes). Como el segmento CD coincide con el radio de la circunferencia entonces el segmento AB mide 2 cm.

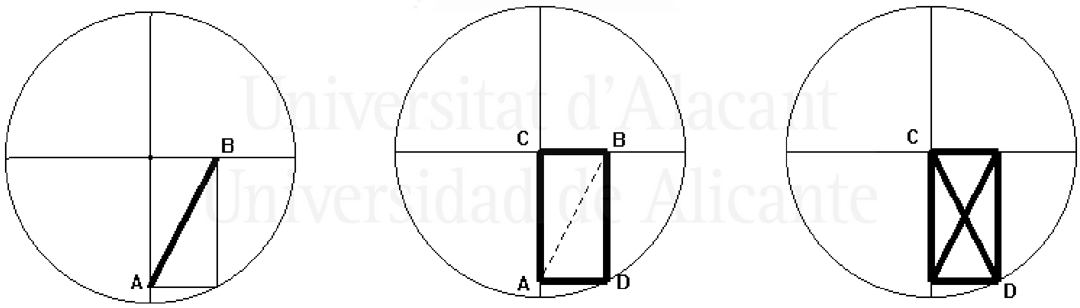


Figura 5.8

Parece evidente que identificar el paralelogramo es relativamente sencillo, pero no es necesariamente así. Identificar otras subconfiguraciones como el triángulo ABD puede llevar al estudiante a un bloqueo del razonamiento configural, siendo incapaz de avanzar hacia la solución pedida aunque asocie afirmaciones matemáticas a esta subconfiguración. Podemos imaginarnos un caso el que un estudiante identifica el triángulo rectángulo ABD y asocia el teorema de Pitágoras, esto producirá un estancamiento del razonamiento configural, el cual ya no avanzaría hacia la solución del problema y entramos en el bucle.

A continuación mostramos un ejemplo de cómo la configuración inicial condiciona la solución. El problema 6 realizado por el participante 35 construye un ejemplo de cómo la situación geométrica inicial no permite resolver el problema.

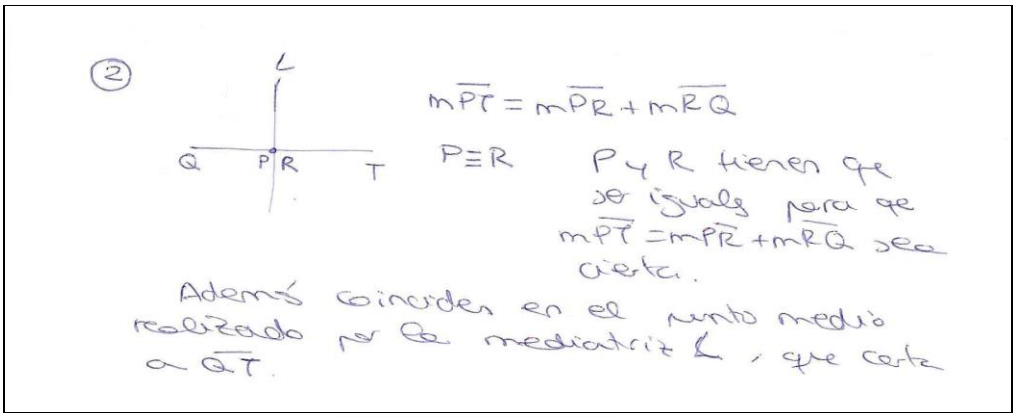


Figura 5.9

El estudiante asocia la definición de mediatriz con la que representa la recta L y el segmento $\overline{QT}$. Pero el punto P no es un punto genérico del semiplano de recta borde L. Es aquí donde el participante muestra la búsqueda de un caso particular, en donde la tesis del problema sea visualmente evidente. Por tanto no asocia ninguna afirmación matemática salvo el caso de la definición de mediatriz. Posteriormente a esta acción no relaciona ninguna afirmación matemática a ninguna subconfiguración. El papel que desempeña la aprehensión operativa es básico, es decir, la identificación y manipulación de las distintas subconfiguraciones queda reducida al punto P, al punto R, a los segmentos $\overline{PT}$, $\overline{PR}$, $\overline{TR}$, $\overline{RQ}$, $\overline{QT}$ y a la recta L, elementos insuficientes para probar el problema.

Estas dificultades pueden generar en el razonamiento configural un estancamiento o bloqueo del desarrollo de la respuesta al problema. Los factores que ayudan o dificultan el reconocimiento de las configuraciones relevantes, Mesquita (1989), Padilla (1990) y Duval (1988, 1995) entre otros, deben ser tenidos en cuenta para el desarrollo del razonamiento configural. Consideramos necesario conocer las afirmaciones matemáticas y saber identificar las distintas configuraciones geométricas, coordinándolas con la finalidad de generar respuestas adaptadas, que resuelvan problemas de geometría. Además, el estudio de los factores que facilitan o dificultan el reconocimiento de configuraciones relevantes permite analizar y categorizar el grado de dificultad de las distintas tareas a realizar.

5.3 Aportaciones e Implicaciones

En la investigación tratamos de comprender, en la medida de lo posible, el comportamiento de los estudiantes durante la resolución de problemas de geometría, con la finalidad de encontrar elementos de una estructura global en relación con los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas. Es decir, proponemos un modelo de coordinación, de estos procesos, para describir las interacciones que realizan los estudiantes en la resolución de problemas geométricos. Además, el modelo ofrece características que nos permiten detectar dificultades concretas de los estudiantes en sus producciones escritas.

Otros modelos constatan que la coordinación es fundamental para la resolución de problemas. El trabajo de Arzarello (1998) presenta las transiciones y las interacciones entre los distintos procesos como el eje fundamental de la resolución de problemas que requieren demostración. Arzarello afirma que los estudiantes pueden quedarse bloqueados en el proceso de búsqueda de conjeturas, no ser capaces de encontrar la forma de realizar la demostración deductiva, etc. Pero en las resoluciones que sí llegan a realizar demostraciones deductivas define dos fases que caracterizan las relaciones entre la actividad empírica de elaboración de conjeturas y la actividad deductiva de su demostración:

1. Una *fase ascendente* caracterizada por la actividad empírica dirigida a la mejor comprensión del problema, la búsqueda de una conjetura y su posterior validación o rechazo.
2. Una *fase descendente* caracterizada por la actividad argumentativa (deductiva o no) dirigida a la elaboración de una demostración de la conjetura planteada.

Según este modelo, la resolución de un problema que requiere demostración se caracteriza por la transición de la fase ascendente a la fase descendente. En la práctica, la resolución de un problema puede estar formada por varias transiciones en una u otra dirección entre ambas fases. Estas transiciones corresponden a unos momentos de trabajo empírico y otros momentos de trabajo deductivo, a avances por caminos que no llevan al resultado deseado seguidos de retrocesos para iniciar nuevas fases ascendentes de búsqueda o verificación empíricas que dan paso a nuevas fases descendentes de producción deductiva. Resaltamos la importancia de la coordinación entre una actividad empírica, que en nuestro estudio está muy relacionado con los procesos de visualización, y una actividad argumentativa, relacionada con los procesos discursivos. Garuti, Boero y Lemut (1998) explican esta interacción como que el estudiante progresivamente trabaja en su enunciado mediante una actividad argumentativa progresiva funcionalmente entremezclada con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones. Durante la posterior etapa de demostración del enunciado, el estudiante conecta con este proceso de forma coherente, organizando algunos de los argumentos previamente producidos en una cadena lógica.

La descripción, caracterización y modelización del razonamiento configural puede aportar un enfoque que ayude a describir el proceso de razonar en geometría. Además, el análisis realizado ha constatado que hay estudiantes que consiguen desarrollar esta coordinación. Conjuntamente hemos expuesto algunas causas razonables por las que no todos los estudiantes consiguen dar este paso en la resolución de problemas de geometría. Aún así la visualización sigue siendo un tema controvertido y que ofrece multitud de cuestiones. Presmeg (2006) propone trece cuestiones abiertas relativas a la investigación de la visualización en educación matemática. Estas preguntas abiertas marcan un punto de partida desde el cual consideramos que nuestra investigación es una fuente de elementos que pueden ayudar a encontrar respuestas a algunas de estas cuestiones:

- ¿Qué aspectos del uso de diferentes clases de imágenes y visualización son eficaces en la solución de problemas matemáticos de varios niveles?

Un aspecto a tener en cuenta para poder responder a esta cuestión es el papel que desempeña la configuración inicial, que ha sido determinante para caracterizar los comportamientos de los estudiantes ante la tarea de resolver problemas geométricos. En las respuestas de los problemas de geometría analizadas, en un primer momento la configuración posee un papel heurístico (manipulativo) hasta que se obtienen las ideas claves que permitan resolverlo. Una vez logradas estas ideas, la configuración pasa a mostrar elementos geométricos relacionados entre sí facilitando su visión conjunta (papel sinóptico).

- ¿Qué procesos de conversión están implicados en el cambio flexible entre los varios registros matemáticos, incluyendo los de una naturaleza visual, combatiendo así el fenómeno de compartimentalización?

Consideramos que el sentido de transferencia que ha aportado el concepto de visualización es un elemento clave en el aprendizaje de la geometría y por tanto un elemento que puede ayudar a combatir el fenómeno de la compartimentalización. Además resaltamos que los factores que ayudan o dificultan el reconocimiento de las configuraciones relevantes para la resolución de problemas de geometría son importantes para el desarrollo de procesos de conversión de naturaleza visual.

- ¿Cuál es la estructura y cuáles son las componentes de una teoría central sobre visualización para la educación matemática?

Consideramos que los elementos que forman parte de una posible teoría central son, en nuestro caso, los tres procesos de visualización cuya coordinación es esencial para lograr un razonamiento en geometría, al cual que hemos llamado Razonamiento Configural.

5.3.1 Modelo de Coordinación y Prueba Matemática

En este apartado veremos algunas implicaciones que pueden surgir cuando prestamos atención a los procesos cognitivos desarrollados en matemáticas y, en particular, en los desarrollados en geometría.

Dos agendas de investigación están siendo ampliamente desarrolladas como campos importantes en la resolución de problemas. Una de ellas se centra en la prueba y en los distintos desarrollos de la misma (Balacheff, N., 1988; Harel, G., Sowder, L., 1998; Ibañes, M.J., 2001; Rodríguez, F., Gutiérrez, A. 2006; entre otros). La otra agenda en Educación Matemática que destacamos está centrada en el desarrollo de los procesos cognitivos que ponen de manifiesto los estudiantes a la hora de resolver problemas de geometría (Bishop, A. J., 1983, 1989; Fischbein, E., 1987; Del Grande, J., 1990; Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J., 1996; Hershkovitz, R., 1996; Duval R., 1998; entre otros).

Las investigaciones que centran el aprendizaje de la geometría y de los procesos cognitivos señalan la importancia que tiene el desarrollo de la prueba como fin indispensable dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje matemático. Según Soucy y Martín (2006) los profesores afirman que trabajar con pruebas dentro del campo de la geometría ayuda a pensar de manera lógica y a desarrollar argumentos coherentes que expliquen porqué un resultado es cierto. Pero esta dicotomía entre las acciones cognitivas que desarrolla el estudiante y las demandadas por la disciplina matemática producen una serie de dificultades que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Ya sea desde el punto de vista matemático o el desde el punto de vista cognitivo el estudiante debe coordinar los distintos procesos cognitivos y los distintos registros de representación para ordenar y construir pruebas en la resolución de problemas. En la investigación hemos desarrollado un modelo que permite describir las acciones que desarrollan los estudiantes cuando resuelven problemas de geometría, este modelo puede ayudar a comprender la elaboración de soluciones en tareas de probar.

Duval (2007) señala dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dos puntos de vista, el matemático y el cognitivo, ambos de gran importancia para la educación matemática. Así Reiss, K., Hellmich, F. y Reiss, M. (2002) enumeran algunas habilidades que deben ser desarrolladas desde el punto de vista matemático: tales como el conocimiento básico de hechos matemáticos y la argumentación, el conocimiento de los métodos de pruebas y evaluación de la exactitud de las pruebas y por último el razonamiento científico. Además de estas habilidades deben desarrollarse estrategias para superar las distintas dificultades que el discurso deductivo puede ocasionar. Pero este desarrollo de habilidades debe ir unido a un desarrollo específico y cognitivo para los problemas geométricos que requieren prueba. Es ahí donde el razonamiento configural y su desarrollo son importantes para la asimilación de ideas que permitan generar un discurso coherente.

El proceso discurso teórico, y en consecuencia la prueba deductiva, se nutre en parte de las afirmaciones matemáticas que pueden surgir de la coordinación entre los procesos de visualización en los que el estudiante encuentra diversas dificultades: los factores que disparan o inhiben la visualización de las distintas configuraciones (Mesquita, A. 1989), el conocimiento de propiedades de las distintas configuraciones (Reiss, K. et al. 2002) y la conversión continuada entre el registro figural y el registro algebraico. Debido a estas dificultades la coordinación entre la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva puede desembocar en las situaciones tratadas con anterioridad (truncamiento, conjetura sin demostración y bucle).

Consideramos que nuestra investigación contribuye al desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje que permiten resolver problemas de geometría. Pero en general, el desarrollo de la prueba en geometría también puede contribuir al aprendizaje de la prueba en otras áreas del conocimiento matemático. En palabras de Duval (2007) es evidente que las pruebas en la mayoría de los campos de las matemáticas no son fundamentadas ni desarrolladas como en geometría, porque no trabajamos con la misma representación de los registros, es decir, con figuras geométricas y con lenguaje natural. Pues, ¿De qué forma puede contribuir a este aprendizaje? Dos experiencias parecen fundamentales para seguir desarrollándolo. En primer lugar, el descubrimiento de qué razonamiento es válido y que es tan importante como la exactitud en computación. En segundo lugar, la toma de conciencia de las diferentes maneras de trabajar con el lenguaje natural y con las distintas configuraciones.

5.3.2 Algunas Implicaciones sobre el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje

Hemos adoptado y adaptado, en esta investigación, las siguientes hipótesis:

1. La visualización y el razonamiento deben ser desarrollados separadamente.

2. El trabajo de diferenciación entre diferentes procesos de visualización y entre diferentes procesos de razonamiento es necesario en el currículo, pues existen varias formas de ver una figura; de la misma manera hay varias formas de razonar.
3. La coordinación de la visualización y el razonamiento puede ocurrir realmente solo después de este trabajo de diferenciación.

Proponemos la idea de **Razonamiento Configural** como un modelo sobre la coordinación que nos permite conocer de manera razonable la forma en que los procesos cognitivos de visualización interactúan. El modelo no jerarquiza el desarrollo de ningún proceso cognitivo para la evolución del conocimiento del alumno ni tampoco su aprendizaje. Pero sí proporciona una explicación de cómo interactúan los distintos procesos. Por ello, el modelo nos permite afrontar la enseñanza y aprendizaje de geometría secuenciando situaciones didácticas según el grado de dificultad. Para facilitar esta secuenciación, debemos considerar los factores que favorecen o dificultan la visualización pues permiten analizar y categorizar el grado de dificultad de las distintas tareas a realizar.

El desarrollo de la visualización ayuda a conseguir habilidades que permiten distinguir las posibles subconfiguraciones relevantes a partir de una configuración inicial. La aprehensión discursiva que consiste en asociar afirmaciones matemáticas a subconfiguraciones relevantes, sólo será posible si el estudiante conoce estas afirmaciones. Esto incide en la falsa idea de que las matemáticas sólo hacen falta entenderlas y no conocerlas. La aprehensión operativa que básicamente consiste en la manipulación de la configuración, es parte esencial del razonamiento. Por ello se debería entrenar la aprehensión operativa desde los primeros niveles de la educación.

La descripción, explicación o argumentación del razonamiento configural permite comunicarlo a los demás. Los procesos discursivos, sus estructuras y su funcionamiento deben ser aprendidos y desarrollados por el alumno. En particular, el proceso discursivo teórico debe enseñarse como un proceso discursivo con reglas de uso lógico-deductivas particulares (pasos de inferencia).

5.4 Cuestiones Abiertas

Nuestro estudio propone un modelo que permite abordar algunos aspectos de la didáctica de la geometría desde un punto de vista cognitivo. El modelo no jerarquiza el conocimiento del alumno ni tampoco su aprendizaje. Pero sí proporciona una explicación de cómo pueden interactuar los distintos procesos. Debido al uso en la investigación de las producciones de los estudiantes como evidencias de los distintos procesos cognitivos, procesos a los que directamente no tenemos acceso y son importantes en la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes, entendemos que se nos planteen cuestiones relacionadas con el modelo y con posibles implicaciones en otros contextos. Así, planteamos algunas cuestiones que podrían estudiarse en el futuro, como por ejemplo la introducción del proceso de construcción, como un elemento importante en la resolución de problemas de geometría. Así nos preguntamos;

- ¿Cómo se desarrolla la coordinación de los procesos de visualización y de razonamiento cuando se añaden al modelo los procesos de construcción?
- ¿Este nuevo modelo servirá para describir más detalladamente el comportamiento de los estudiantes y mejorar nuestro conocimiento cognitivo de los estudiantes?
- ¿Qué factores pueden ayudar o dificultar la construcción de las configuraciones?

Consideramos que debemos seguir realizando investigaciones que potencien la funcionalidad del Razonamiento Configural, pero también de sus componentes. Algunos autores como Duval R. (1999b), Marmolejo G. y Vega M. (2004), Elia I., et al. (2009), Deliyianni, E., et al. (2011), han trabajado sobre un refinamiento de la aprehensión operativa, distinguiendo las modificaciones mereológicas (a partir de una configuración se divide en subconfiguraciones mediante las cuales se puede transformar en otra de un contorno diferente o no), modificaciones ópticas (se agranda, disminuye o se deforma la configuración) y modificaciones posiciónales (si es posible desplazar o rotar tanto la configuración inicial como las subconfiguraciones que las componen, en relación con la orientación del campo en el que se destaca). ¿Pueden ayudar estas nuevas categorías de la aprehensión operativa a un mejor entendimiento del razonamiento configural?

El cuestionario utilizado y los ejemplos utilizados en la investigación son problemas cuyas configuraciones geométricas están en dos dimensiones, ¿se podría generalizar las conclusiones de la investigación a tres dimensiones?

¿Existe algún tipo de correlación entre las respuestas de los estudiantes que evidencian un razonamiento configural que ha desembocado en truncamiento en la resolución de problemas con los problemas 4 y 5 de la investigación?

¿Es posible aplicar estos resultados a otros contextos fuera de la geometría y a otros temas en Didáctica de las Matemáticas? Es decir, ¿Puede el modelo cognitivo estudiar y diagnosticar al estudiante a partir de las respuestas que realiza en tareas de resolución de problemas no necesariamente geométricos?

Otro punto interesante para aplicar el modelo de coordinación consiste en estudiar el conocimiento que evidencian los profesores para maestro y qué relación tiene con su práctica educativa.

Terminamos la investigación como la empezamos con un número considerable de cuestiones abiertas, reconociendo que queda mucho por hacer en el campo de investigación que siempre hemos tenido en mente; la educación matemática de los estudiantes y su constante mejora.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Alsina, C., Fortuna, J.M., Pérez, R. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid, España: Síntesis.

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En F. Hitt, M. Santos (Eds), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME,* Cuernavaca, México (pp. 55-80). Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52***,** 215–241.

Arzarello F., Michelletti C., Olivero F., Paola D. y Robutti O. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry, *Proceedings of the 22nd PME Conference 2,* 24-31.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). London: Hodder&St.

Bell, A. W. (1976). A study of pupil' proof-explanations in mathematical situation. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23-40.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, 91-125. New York: Academic Press.

Bishop, A. J. (1979). Visualising and mathematics in a pre-technological culture, *Educational Studies in Mathematics 10*, 135–146.

Bishop, A. J. (1980). Spatial Abilities and Mathematics Education. A review. *Educational Studies in Mathematics 11(3)*, 257-269.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. En Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 125-203. New York: Academic Press.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11(1)*, 7-16.

Chevallard Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble. Francia.

Clemente, F. Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en educación primaria. En *Investigación en Educación Matemática XVII*. pp. 229-236. Ainhoa Berciano Alcaraz [et al.] (eds.). Bilbao: SEIEM, 2013.

Cordier, F y Cordier, J. (1991). L'application du théoréme de Thales. Un exemple du role des representations typiques comme biais cognitifs. *Recherches en didactique des Mathématique 11(1)*, 45-64.

Cuervo, R. J. (1998) *Diccionario de construcción y régimen de la lengua castellana. Tomo II*. Barcelona: Herder.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Kalogirou, P. y Kusniak A. (2011). Towards comprehensive theoretical model of students´ geometrical figure understanding and its relation with proof. *Proceedings VII of European Research in Mathematics Education CERME 7*, 598-607. Obtenido en Diciembre 28, 2012: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/4/WG4_deliyianni.pdf.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Revista Epsilon*, 26, 15-30.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher 37 (6)*, 14-20.

Dörfler, W. (1991). Meaning: Image schemata and protocols. *Proceedings of the fifteenth Annual of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 17-32. Assisi, Italia.

D'Amore, B. (2006a). Conclusiones y perspectivas de investigación futura. *Relime*, número especial, pp. 301-306. México D.F., México.

D'Amore, B. (2006b). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime*, número especial, pp. 177-195. México D.F., México.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla M. I. y Iori M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Bologna: Pitagora.

Duval, R. (1988). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol 1,7-25. IREM de Strasbourg.

Duval R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive?, *Petit x 3.* Grenoble, Francia: IREM.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques etapprentissages intellectuels*. Berne, Suisse: Peter Lang [tr. española *Semiosis y pensamento humano.* Cali: Universidad del Valle 1999].

Duval R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana and V.Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st*, 37-51. Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999a). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. *La lettre de la Preuve* Noviembre/Diciembre 1999. Obtenido en marzo 30, 2007 de http://www .lettredelapreuve .it/index.html.

Duval, R. (1999b). Representation, Vision and Visualisation: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. En F. Hitt, M. Santos (Eds), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*, Cuernavaca, México (pp. 3-26). Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.) *Theorems in School From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp.137-162). Rotterdam, Netherland: Sense Publishers.

Elia I., Gagatsis A., Deliyianni E. Monoyiou A. y Michael S. (2009). A structural model of Primary school students' operative apprehension of the geometrical figure. En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp.1-9). Thessaloniki, Greece: PME.

Escudero I. (2003). La semejanza como objeto de enseñanza y aprendizaje en la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. Ponencia presentada en el 7º. *Simposio de la Sociedad Española de la Investigación en Educación Matemática*. Obtenido en abril 2, 2007 del sitio web personal: http://www.uv.es/ Angel.Gutierrez/marcotex.html.

Fischbein, E. (1982) Intuition and Proof. *For the learning of mathemarics 3 (2),* 8-24.

Fischbein, E. (1987). Intuition *in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht, Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics 24(2)*, 139-162.

Gallardo, J. y González J. L. (2005). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. Ponencia presentada en el *9º*. *Simposio de la Sociedad Española de la Investigación en Educación Matemática*. Obtenido en Enero 7, 2007 del sitio web: http://www.uco.es/~ma1mamaa/Simposio_Cordoba/8-Gallardo,Gonzalez.pdf.

Garuti, R., Boero, P. y Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof, *Proceedings of the 22th PME Conference 2*, 345-352.

Godino J. D. y Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques 3*, 325-355.

Godino J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción.* Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad, de Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Granada. Noviembre de 2003. http://www.ugr.es/local/jgodino/.

Gutiérrez, A. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial, *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría*, 44-59.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th PME Conference* 1, 3-19. Valencia, España.

Gutiérrez, A. (1998). *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización*. Texto de la ponencia en el Encuentro de Investigación en Educación Matemática, TIEM-98. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, España. Obtenido el abril 2, 2007, del sitio web personal http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/ archivos1/textospdf/Gut98b.pdf.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, Ponencia presentada en el *9º Simposio de la Sociedad Española de la Investigación en Educación Matemática*, 27-44. Versión Electrónica obtenida en abril 2, 2007 del sitio web personal http://www.uv.es/Angel. Gutierrez/marcotex.html.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1/2), 5-23.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. III, pp. 234-283). Providence, USA: American Mathematical Society.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning Geometry. En Nesher & Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition*, 70-95. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dermolen, J. (1996). Space and Shape. En Bishop and others (Eds.), *International handbook of Mathematics Education* Part 1, 161-204. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Plublishers.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. En Mammana and V.Villani (eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century*, 29-37. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Plublishers.

Ibáñes, M. J. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis de doctorando. Valladolid, España: Universidad de Valladolid.

Janvier, C. (ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N. J.: Lawrence Erlbaum.

Johnson, M. (1987). *The Body in the Mind*. Chicago. EE.UU.: The University of Chicago Press.

Jones K. (1998). *Geometry Working Group*. Informe del encuentro en King's College, University of London, febrero 28, 1998. Obtenido en abril 2, 2007, del sitio web de la British Society for Research into Learning Mathematics: http://www.bsrlm.org.uk.

Kaput, J. (1987). Toward a theory of symbol use in Mathematics. En Janvier, C. (Ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

Koleza E. y Kabani E. (2006). The use of reasoning in the resolution of geometric problems. *Nordic Studies in Mathematics Education 11(3)*, 31-56.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical habilitéis in schoolchildren.* Chicago, EE.UU: The University of Chicago Press.

Laborde, C. y Capponi, B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques 14 (1/2)*, 165-209. Grenoble, France: Ed. La Pensée Sauvage.

Laborde, C. (1998). Visual Phenomena in the Teaching/Learning of Geometry in a Computer-Based Environment. En Mammana and V.Villani (eds.). *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Plublishers.

Lakoff, G. (1987). Women, *Fire and Dangerous Things*. Chicago, EE.UU: The University of Chicago Press.

Llinares, S. y Clemente, F. (2014). Characteristics of Pre-service Primary School Teachers' Configural Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning 16(3)*, 234-250.

Luis Vives S. A. Editorial (1952). *Geometría práctica y agrimensura, segundo grado*. Zaragoza, España.

Mariotti, M. A. (1995), Images and Concepts in Geometrical Reasoning. En R Sutherlandand J Mason (Eds). *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education.* Berlín, Alemania: Springer.

Mariotti M. A. (1997). Justifying and proving: figural and conceptual aspects. En M. Hejny, J. Novotna (Eds.), *Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education*. Podebrady, Republica Checa.

Mariotti, M. A. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein. *La lettre de la Preuve* Noviembre/Diciembre 1998. Obtenido en marzo 30, 2007 de http://www.lettredelapreuve.it/index.html.

Marmolejo G. y Vega G. (2004). Geometría desde una perspectiva semiótica: visualización, figuras y áreas. *XV Encuentro de Geometría y sus aplicaciones y III Encuentro de aritmética*, Bogotà, Colombia.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.

Mesquita, A. (1989). *L' influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: Elements pour une typologie.* Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strabourg, France.

Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behaviour 17(2)*, 183-195.

Nelsen, R. (1993). *Proofs without word: Exercises in visual thinking*. Wasington D.C., EE.UU.: The Mathematical Association of America.

Padilla V. (1990). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux sur l'apprentissage des mathématiques.* Thèse. Strasbourg: Université Louis Pasteur. France.

Palarea, M. M. y Socas, M. M. (1994a). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma*. *Monográfico Lenguaje y Matemáticas 16*, 91-98.

Palarea, M. M. y Socas, M. M. (1994b). Élaborations sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignement - apprentissage de l'algèbre scolaire (12-16 ans). *Actas de la 46ème Rencontre de la CIEAEM.* Vol II. Toulouse. Francia.

Penalva C. y Torregrosa G. (1997). *Apuntes de geometría*. España: Editorial Club Universitario.

Penalva C. y Torregrosa G. (2001). Representación y aprendizaje de las matemáticas. En E. Tonda y A. Mula (Eds.). *Scripta in Memoriam*, 649-658. Alicante, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1971). *Mental imagery in the child*. New York, EE.UU.: Basic Books Inc., Publishers.

Plasencia, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos.* Tesis de doctorando. Las Palmas de Gran Canaria, España: Universidad de la Laguna.

Poincaré, H (1902). *La science et l'hypothèse*. Paris, France: Flammarion.

Presmeg, N. C. (1985). *The role of visually mediated processes in high school mathematics: a class investigation.* Unpublished Ph. D. dissertation. University of Cambridge. England.

Presmeg, N. C. (1986a). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics 17(3)*, 297-311.

Presmeg, N. C. (1986b). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics 6(3)*, 42-46.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.).*Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 205-235. Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Radford, L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentali, 35 (1)*, 277-302.

Real Academia Española, (2001). *Diccionario de la lengua española.* Vigésima segunda edición. Madrid, España: Espasa Calpe S.A.

Reiss, K., Hellmich, F. y Reiss, M. (2002). Reasoning and proof in geometry: prerequisites of knowledge acquisition in secondary school students. In A.D. Cockburn & E. Nardo (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 113-120). Norwich: PME.

Soucy, S. y Martín, T. (2006). Going beyond the rules: making sense of Proof. En Alatorre, S. Cortina, J.L., Sáiz, M. y Méndez, A. (Eds.), *Proceedings of the Twenty Eight Annual Meeting of the North American Chapter of the Internacional group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2 (pp. 235-236). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Rodríguez, F. y Gutiérrez, A. (2006): Analysis of proofs produced by university mathematics students, and the influence of using Cabri software, en Novotná, J.; Moraová, H.; Krátká, M.; Stehliková, N. (eds.), *Proceedings of the 30th P.M.E. Conference* 4, pp. 433-440.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Relime*, 10(2), 275-300.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2008). The Coordination of Cognitive Processes in Solving Geometric Problems Requiring Formal Proof, en Figueras, O. & Sepúlveda, A. (eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter*, 4, pp. 321-328. Morelia, México: Cinvestav-UMNSH.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2009). Factors limiting configural reasoning in geometrical proof. En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 477-477. Thessaloniki, Greece: PME.

Torregrosa Gironés, G., Quesada Vilella, H. y Penalva Martínez, M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las ciencias*, Vol. 28(3), 327–340.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analitic strategies: a students' understanding of the group D_4. *Journal for Research in Mathematic Education 27(4*), 435-457.

Zimmerman, W. y Cunningham S. (1991), *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington DC., EE.UU.: The Mathematical Association of America Inc.

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha acordó otorgar, por a la Tesis Doctoral de Don/Dña.
La calificación de

Alicante, de de

El Presidente, El Secretario,

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Comisión de Doctorado

La presente Tesis de D.____ha sido registrada con el nº__________________del registro de entrada correspondiente.

Alicante______de__________________de__________.

El encargado del registro,