Esta tesis doctoral contiene un índice que enlaza a cada uno de los capítulos de la misma.
Existen asimismo botones de retorno al índice al principio y final de cada uno de los capítulos.

Ir directamente al índice

Para una correcta visualización del texto es necesaria la versión de Adobe Acrobat Reader 7.0 o posteriores

Aquesta tesi doctoral conté un índex que enllaça a cadascun dels capítols.
Existeixen així mateix botons de retorn a l'index al principi i final de cadascun deis capítols .

Anar directament a l'index

Per a una correcta visualització del text és necessària la versió d' Adobe Acrobat Reader 7.0 o posteriors.

PROPIEDADES DEL CONO CARACTERíSTICO

DE UN

SISTEMA DE DESIGUALDADES LINEALES.

REDUNDANCIA Y ESTABILIDAD.

Memoria presentada por

Germán Torregrosa Gironés

para optar al grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

Alicante, 1997

D. JUAN ANTONIO MIRA LóPEZ, Profesor Titular de Análisis Matemático de la Universidad de Alicante,

CERTIFICA: Que la presente memoria **Propiedades del cono característico de un sistema de desigualdades lineales. Redundancia y Estabilidad**, ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada de la Universidad de Alicante por D. Germán Torregrosa Gironés, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firma el presente certificado en Alicante, a doce de Junio de mil novecientos noventa y siete.

Juan Mira

AGRADECIMIENTOS

Al Profesor D. Manuel Valdivia Ureña por concederme el honor de ser codirector de esta memoria.

Al Dr. D. Juan Antonio Mira López que me ha guiado durante toda mi vida profesional, y en quien he encontrado siempre el apoyo preciso.

A los doctores Miguel Angel Goberna Torrent y Marco Antonio López Cerdá, por su asesoramiento técnico y disponibilidad en el estudio de sus trabajos en PSI.

Al Dr. D. Gaspar Mora Martínez por su desinteresada corrección de los originales.

INDICE

INTRODUCCIÓN

La memoria que presentamos está dividida en cuatro Capítulos que estudian sistemas (infinitos) de desigualdades lineales, definidos sobre espacios vectoriales topológicos (EVT) localmente convexos (LC), desde puntos de vista diferenciados claramente. A estos cuatro capítulos se ha añadido, para facilitar la lectura de la memoria, el Capítulo 0, en el que se citan resultados conocidos, pero dispersos en la literatura sobre el tema, que se usan a lo largo de todo el trabajo. Igualmente, en cada capítulo, cuando se ha considerado oportuno, se recuerdan definiciones o conceptos de uso poco frecuente que ayudan a seguir nuestro trabajo.

En el primer capítulo se caracterizan los sistemas consistentes en EVT normados usando el valor de un Programa Lineal particular, y en espacios de Hilbert se da una condición necesaria para que un sistema Σ sea consistente ($T^{\underline{a}}$ 1.1).

También probamos, para EVTLC, la equivalencia entre condiciones de resolubilidad del sistema homogéneo asociado, Σ_0, a un sistema consistente, Σ, con la dimensionalidad plena de una cuña asociada a Σ. Estas condiciones , a su vez, son necesarias para que el conjunto factible $F(\Sigma)$ sea $\tau_s(X)$-acotado ($T^{\underline{a}}$ 1.2), sin embargo no son suficientes, como mostramos mediante un contraejemplo. A continuación caracterizamos los sistemas equivalentes, mediante la igualdad de las clausuras de las respectivas cuñas características $K(\Sigma_i)$ ($T^{\underline{a}}$ 1.3); también estudiamos relaciones dimensionales del espacio afín generado por el conjunto factible de un sistema consistente Σ, $\overline{\text{aff}}^{\,s}\,[F(\Sigma)]$, y el espacio linealidad de la clausura de la cuña característica, $L_{\mathrm{cl}K(\Sigma)}$, particularizando estas relaciones dimensionales al caso de dimensión finita.

En este primer capítulo también se estudia la caracterización de los sistemas consistentes cuyo conjunto factible es un poliedro convexo, estudiando la cuña (cone) $\mathrm{cl}K(\Sigma)$ (T$^{\underline{a}}$ 1.5). Damos una condición necesaria para que $F(\Sigma)$ sea un poliedro, usando otra cuña asociada a Σ: $\mathrm{cl}M(\Sigma)$ (Corolario 1.5.1). Igualmente se caracteriza el que $F(\Sigma)$ sea variedad afín usando el cono asociado a $\mathrm{cl}K(\Sigma)$ (T$^{\underline{a}}$ 1.6).

Acabamos el capítulo dando una condición suficiente para que la cuña característica $K(\Sigma)$, asociada a un sistema consistente Σ, sea cerrada (tales sistemas se llaman de Farkas-Minkowski (FM)), para lo que utilizamos el concepto de "conjuntos positivamente equivalentes" y los teoremas técnicos 1.7 y 1.8, que si bien en dimensión finita son recíprocos, nosotros los hemos separado, en dimensión infinita, con el correspondiente contraejemplo.

En el segundo capítulo se estudian las restricciones redundantes de los sistemas, y las clasificamos en semi-redundantes, débilmente redundantes y fuertemente redundantes, dando ejemplos de cada tipo. Hacemos distinción entre el caso de dimensión infinita y dimensión finita, ilustrando las situaciones con los ejemplos correspondientes. Caracterizamos las restricciones fuertemente redundantes a partir de la redundancia en un subsistema finito (T$^{\underline{a}}$ 2.2), y para espacios normados con espacio dual separable reducimos la semi-redundancia y la redundancia débil en un sistema Σ, a la semi-redundancia y la redundancia débil de un sistema numerable (T$^{\underline{a}}$ 2.3).

En el teorema 2.4 estudiamos el cambio del tipo de redundancia de una restricción al considerar subsistemas del sistema inicial, con el fin de estudiar la invariabilidad del conjunto de soluciones de Σ al eliminar una cantidad finita arbitraria de restricciones redundantes ($T^{\underline{a}}$ 2.5).

Acabamos esta parte dando una condición necesaria para la semi-redundancia, en la que intervienen las dimensiones de las envolturas lineales del conjunto factible de Σ y de un subsistema Σ^s ($T^{\underline{a}}$ 2.6).

En el capítulo 3 se estudia la redundancia en los sistemas FM y en los sistemas finitos, haciendo uso de la teoría de la dualidad en Programación Infinita Lineal [5, Remark 2.1]. Finalizando el capítulo deduciendo, a partir de resultados obtenidos para sistemas FM, dos criterios de identificación y eliminación de restricciones redundantes en sistemas finitos.

En el último capítulo, tras definir el espacio de parámetros (o de sistemas) (Θ,δ) como un espacio pseudométrico, estudiamos la estabilidad de sistemas Σ en los que se permite perturbar arbitrariamente todos los coeficientes en todas las restricciones. Esto lo realizamos mediante el estudio respectivo de los interiores de los subconjuntos de Θ que llamamos: sistemas consistentes (LC) y sistemas inconsistentes (LI). A su vez este estudio está íntimamente relacionado con el estudio de las propiedades de continuidad de la aplicación "conjunto factible" F.

El resultado más importante de este capítulo es el teorema 4.1, en el que se prueba que son equivalentes la propiedad de semicontinuidad inferior de la aplicación F, antes mencionada, con

Volver al Indice/Tornar a l'index

propiedades del sistema consistente considerado Σ^0 (entre ellas, $\Sigma^0 \in$ int LC). En particular separamos un caso, para espacios de Hilbert el teorema incluye una equivalencia más que no se verifica en espacios metrizables cualesquiera, T^as 4.2 y 4.3, dando el correspondiente contraejemplo. En el teorema 4.4 damos una condición suficiente para que la aplicación F sea dimensionalmente estable.

Posteriormente ponemos de manifiesto, mediante un contraejemplo, que, si bien en el caso en que $X = R^n$ la acotación de $F(\Sigma^0)$ (o la plena dimensionalidad de $F(\Sigma^0)$) implica la semicontinuidad superior de F en Σ^0, en el caso en que X tiene dimensión infinita esto no es cierto. Para ello necesitamos el teorema 4.5.

El capítulo, y la memoria, concluye, tras analizar las condiciones que se mantienen para sistemas inconsistentes, con un teorema que proporciona una condición necesaria y otra suficiente para que un sistema inconsistente $\Sigma^0 \in$ int LI, T^a 4.6.

CAPÍTULO 0.

Sea X un espacio localmente convexo real y de Hausdorff. Designemos por X' su dual algebraico (conjunto de todas las funcionales lineales sobre X) y por X^* su dual topológico (funcionales lineales continuas).

Sea $J \neq \emptyset$ un conjunto arbitrario de índices. Dados los conjuntos

$$\{ x_j : j \in J \} \subset X \quad \text{y} \quad \{ c_j : j \in J \} \subset R,$$

consideremos el sistema de desigualdades lineales

$$\Sigma : = \{ \langle x_j , \varphi \rangle \geq c_j \ , \ j \in J \},$$

este sistema de (posiblemente) infinitas inecuaciones lineales sobre un espacio localmente convexo real, es **consistente** cuando posee soluciones ordinarias, es decir, $\exists\ \varphi \in X^*$ satisfaciendo Σ. Cuando un sistema Σ no es consistente, decimos que es **inconsistente**.

A lo largo de todo el trabajo se supondrá X^* dotado de la topología débil, excepto en aquellos casos en que se indique otra topología. Al conjunto de soluciones de Σ, que llamamos **conjunto factible** de Σ, lo simbolizamos por $F(\Sigma)$. Si existe $\varphi° \in X^*$ tal que $\langle x_j , \varphi° \rangle > c_j$, $j \in J$, diremos que $\varphi°$ es una **solución estricta** de Σ.

El sistema **homogéneo asociado** a Σ es:

$$\Sigma_o : = \{ \langle x_j , \varphi \rangle \geq 0 \ , \ j \in J\}$$

Obviamente, $\theta \in X^*$ (vector nulo de X^*) es solución del sistema Σ_0, que llamamos **solución trivial**.

Para realizar un análisis completo de la redundancia en Σ haremos uso de los conceptos de solución asintótica o solución débil, pues ambos conceptos son equivalentes [7,Teorema 2.1].

DEFINICIÓN 0.1

Diremos que la red $\{ \varphi_\delta : \delta \in D\} \subset X^*$ es una solución asintótica del sistema Σ si, para cada $j \in J$, se tiene que

$$\liminf_\delta \langle x_j, \varphi_\delta \rangle \geq c_j .$$

Sea $Y = R^J$, el producto cartesiano de card(J) copias de R, con la topología producto.

Definimos la aplicación afín $S: X^* \longrightarrow R^J$,

$$\varphi \longrightarrow S(\varphi)$$

donde $S(\varphi)$ es el vector de R^J, cuya componente j-ésima es $c_j - \langle x_j, \varphi\rangle$, o sea $(S(\varphi))_j = c_j - \langle x_j, \varphi\rangle$, $j \in J$. Con esta notación el sistema Σ se puede escribir:

$$S(\varphi) \leq 0 \ , \ \varphi \in X^* \quad (0 \in R^J).$$

DEFINICIÓN 0.2

La red $\{\varphi_\delta : \delta \in D\} \subset X^*$ es solución débil de Σ, si existen dos redes $\{y'_\delta : \delta \in D\} \subset R^J$ e $\{y''_\delta : \delta \in D\} \subset R^J$ tales que $S(\varphi_\delta) = y'_\delta + y''_\delta$, con $y'_\delta \leq 0$ y $\lim_\delta y''_\delta = 0$.

A lo largo de este trabajo seguiremos la notación del libro de Holmes [8], en particular, dado un subconjunto $Z \neq \emptyset$, de un espacio localmente convexo real, cl Z, co Z y cone Z, denotarán la clausura topológica de Z, la envoltura convexa de Z y la cuña (wedge) generada por Z (conjunto de las combinaciones lineales no negativas de elementos de Z, es decir, cone Z : = $[0,\infty[$.co Z), respectivamente.

Si $\lambda = (\lambda_j) \in R^J$, definimos el soporte de λ de la siguiente forma:

$$\text{supp } \lambda = \{ j \in J : \lambda_j \neq 0 \}$$

Se denotarán por $R^{(J)} = \{ \lambda \in R^J : \text{card}(\text{supp } \lambda) < \infty \}$, la suma directa de card(J) copias de R.

Definimos por último las cuñas asociadas a Σ :

$$M(\Sigma) := \text{cone } \{ (x_j, c_j),\ j \in J \}$$

$$N(\Sigma) := \text{cone } \{ x_j,\ j \in J \}$$

$$K(\Sigma) := \text{cone } [\{ (x_j, c_j),\ j \in J \} \cup \{(\Theta, -1)\}]$$

donde Θ denota el vector nulo del espacio vectorial X.

DEFINICIÓN 0.3

Un sistema inconsistente que posee alguna solución débil (asintótica) diremos que es débilmente inconsistente. En caso contrario, diremos que el sistema es fuertemente inconsistente.

Para facilitar la lectura de esta memoria, incluimos los siguientes resultados:

TEOREMA 0.1 [7, Theorem 3.1]

Un sistema inconsistente Σ, es débilmente inconsistente si y sólo si todo subsistema finito de Σ es consistente.

Volver al Indice/Tornar a l'index

TEOREMA 0.2 **[7, Theorem 4.1]**

i) Σ es consistente si y sólo si $(\Theta,1) \notin$ cl M

ii) Σ es débilmente inconsistente si y sólo si $(\Theta,1) \in$ clM\M

iii) Σ es fuertemente inconsistente (es decir, no posee soluciones débiles), si y sólo si $(\Theta,1) \in$ M.

COROLARIO 0.2.1 [7, Remark 4.3]

Dado un sistema inconsistente Σ , entonces Σ es débilmente inconsistente si $\Theta \notin$ co{ x_j : $j \in J$ } .

TEOREMA 0.3 [7, Theorem 4.4]

Dado un sistema inconsistente Σ y el sistema homogéneo asociado Σ_o, se cumple:

i) Si Σ_o tiene una solución estricta, entonces Σ no es fuertemente inconsistente.

ii) Si X es un espacio de dimensión finita, y Σ es débilmente inconsistente, entonces Σ_o tiene solución no trivial.

TEOREMA 0.4 [19, Theorem 2]

Es condición necesaria y suficiente para que toda solución de Σ satisfaga la inecuación $\langle x,\varphi\rangle \geq c$, (en cuyo caso se dice que dicha inecuación es consecuencia de Σ), que $(x,c) \in$ cl K.

CAPÍTULO 1.

ALGUNAS PROPIEDADES DEL CONO CARACTERÍSTICO DE UN SISTEMA

Sea $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ un conjunto convexo y cerrado. Definimos la cuña de recesión C_A y el espacio de linealidad L_A del siguiente modo:

$$C_A = \{x \in X : x + A \subset A\} \quad ; \quad L_A = \{x \in X : x + A = A\}$$

LEMA 1.1

Si $A \subset X$ es convexo y cerrado, se tiene:

i) C_A es una cuña cerrada ;

ii) $L_A = C_A \cap (- C_A)$;

iii) $a + L_A$, $a \in A$, es un subespacio afín maximal, entre los subespacios afines contenidos en A.

Prueba.-

i) Sea $x \in C_A$, por tanto $x + A \subset A$, de donde

$$2x + A = x + (x+A) \subset x + A \subset A,$$

y más generalmente

$$nx + A \subset A \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Puesto que A es convexo, esto significa que para $0 \leq t < 1$, puesto que $x + A \subset A$, $x + y = z$ con $y, z \in A$, luego

$$tx + y = (1-t)y + tz$$

y en consecuencia $tx + A \subset A$.

Ahora si $t \geq 1$, denotando $[t]:=$ parte entera de t,

$$tx + A = (t - [t])x + [t]x + A \subset [t]x + A \subset A \quad \text{por } (1),$$

luego se tiene :

$$tx + A \subset A, \ t\geq 0,$$

esto es

$$tx \in C_A \text{ si } t\geq 0.$$

Ahora si $x,y \in C_A$ y $0 < t < 1$, tenemos que

$$\Big((1-t)x + ty\Big) + A = (1-t)(x + A) + t(y + A) \subset (1-t)A + tA = A,$$

usando la convexidad de A. Esto prueba que C_A es una cuña, que podría haberse definido como $C_A = \{x \in X : tx + A \subset A, \ t \geq 0\}$.

Veamos que C_A es cerrada en X. Supongamos que $x \notin C_A$, entonces existe $a \in A$ y $t_0 > 0$, tal que $a + tx \notin A$, $t \geq t_0$. Puesto que $a + t_0x \notin A$, existe un Θ-entorno abierto absolutamente convexo U, tal que

$$(a + t_0x + U) \cap A = \emptyset .$$

El cono engendrado (sin el origen) por el abierto $t_0x + U$, es abierto, contiene el rayo $\{tx, \ t > 0\}$ en su interior, y ninguno de sus rayos está en C_A (porque todos cortan a $t_0x + U$), luego $X\backslash C_A$ es abierto.

ii) $L_A = C_A \cap (-C_A)$.

En efecto, si $x \in C_A \cap (-C_A)$ entonces $x + A \subset A$ y $-x + A \subset A$, luego

$$x + A \subset A \ \text{ y } \ A \subset x + A \text{ (sumando } x),$$

de donde

$$x + A = A, \text{ y } x \in L_A .$$

Si $x \in L_A$, entonces $x + A = A \subset A$, luego $x \in C_A$. Por otra parte

$$-x + A = -x + (x + A) = A,$$

de donde $-x \in C_A$, es decir $x \in C_A \cap (-C_A)$.

iii) Demostremos ahora que $a + L_A$, $a \in A$, es un subespacio afín maximal, entre los subespacios afines contenidos en A.

Desde luego $a + L_A \subset A \quad \forall a \in A$ (por la definición de L_A).

Si L_1 es un subespacio vectorial tal que

$$a_1 + L_1 \subset A \quad y \quad L_A \subset L_1,$$

veamos que $L_1 = L_A$.

En efecto, si existiera $x_1 \in L_1 \setminus L_A$, tendríamos, por la definición de L_A, que existiría $a_2 \in A$, tal que $x_1 + a_2 := b \notin A$.

Por otra parte, la recta

$$C := \{a_1 + \lambda x_1,\ \lambda \in R\} \subset a_1 + L_1 \subset A,$$

y $a_2 \notin C$ (pues si $a_2 = a_1 + \lambda x_1$, entonces

$$x_1 + a_2 = (1+\lambda)\, x_1 + a_1 \in a_1 + L_1 \subset A, \text{ contradicción}).$$

Veamos que para $\lambda \geq 0$ $[a_2, a_1 + \lambda x_1] \cap [a_1, b] \neq \emptyset$;

igualemos

$$(1-t)a_2 + t(a_1 + \lambda x_1) = (1-\mu)a_1 + \mu(x_1 + a_2)$$

y obtenemos

$$ta_1 + (1-t)a_2 + t\lambda x_1 = (1-\mu)a_1 + \mu a_2 + \mu x_1,$$

de donde

$$\mu + t = 1,\ \mu = t\lambda.$$

Entonces si $\lambda = 0$, es $\mu = 0$ y $t = 1$, siendo la intersección $\{a_1\}$. Si $\lambda > 0$, es $\mu = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$, $t = \dfrac{1}{\lambda+1}$, de modo que el punto de intersección es :

$$\frac{1}{\lambda+1} a_1 + \frac{\lambda}{\lambda+1} (a_2 + x_1) \in A,$$

ya que el segmento $[a_2, a_1 + \lambda x_1] \subset A$.

Haciendo que $\lambda \longrightarrow +\infty$, obtenemos que

$$a_2 + x_1 := b \in \mathrm{cl}A = A,$$

contradicción que demuestra que $L_1 = L_A$

■

DEFINICIóN 1.1

Un conjunto A convexo y cerrado de un espacio localmente convexo real X se llama línea libre si $L_A=\{\Theta\}$.

Si A es un conjunto convexo y cerrado de R^n, la descomposición $A = L_A + (A \cap L_A^{\perp})$, como suma de su espacio de linealidad y de la "sección" $A \cap L_A^{\perp}$ (que es línea libre), es la única manera de expresar A como la suma ortogonal de un subespacio cerrado y de un conjunto cerrado convexo línea libre (ver [8], 8B, fórmula 8.4). Este resultado también es cierto si X es un espacio de Hilbert real, como vemos a continuación:

LEMA 1.2

Si X es un espacio de Hilbert real, A convexo y cerrado, entonces $A = L_A + (A \cap L_A^{\perp})$ y esta descomposición es única.

Prueba .-

Si A es línea libre entonces $L_A = \{\Theta\}$ y $L_A^{\perp} = X$, y entonces $A = \{\Theta\} + A$.

Si A no es línea libre, es $L_A \neq \{\Theta\}$. L_A es cerrado y por tanto existe $L_A^{\perp}$ tal que $X = L_A \oplus L_A^{\perp}$.

Para probar que $A = L_A + (A \cap L_A^{\perp})$, basta probar que $A \subset L_A + (A \cap L_A^{\perp})$, ya que $L_A + (A \cap L_A^{\perp}) \subset L_A + A = A$ (por definición de L_A).

Puesto que $A = L_A + A, \forall a \in A$ existen $x \in L_A$ y $a_1 \in A$ tales que $a = x + a_1$; por otra parte

$$a_1 = x_1 + x_1^{\perp} , \text{ con } x_1 \in L_A, \; x_1^{\perp} \in L_A^{\perp} ,$$

y como

$$A - L_A = A + L_A = A, \; x_1^{\perp} = a_1 - x_1 \in A - L_A = A,$$

por tanto

$$a = x + (x_1 + x_1^{\perp}) = (x + x_1) + x_1^{\perp} \in L_A + (A \cap L_A^{\perp}).$$

Luego $A = L_A + (A \cap L_A^{\perp})$.

Probemos ahora que $A \cap L_A^{\perp}$ es línea libre.

En efecto, si $A \cap L_A^{\perp}$ que es convexo y cerrado, contuviera un subespacio afín $a + L_B$, con L_B ortogonal a L_A, entonces

$$L_A \subset A - \{a\} \text{ y } L_B \subset A - \{a\} \Rightarrow L_A \oplus L_B \subset A - \{a\}$$

(ya que $A - \{a\}$ es convexo), con lo que A contendría al subespacio afín $a + (L_A \oplus L_B)$, siendo $L_A \subsetneqq L_A \oplus L_B$, lo que contradice la maximalidad de L_A.

Veamos por último que la descomposición es única.

Supongamos ahora que $A = M + C$, con $C \subset M^{\perp}$, C cerrado, convexo y línea libre, y M subespacio vectorial cerrado; vamos a probar que

$$M = L_A \text{ y } C = L_A^{\perp} \cap A.$$

Se tiene:

i) $A + M = A$.

En efecto, $A \subset A + M$, pues $\Theta \in M$.

Recíprocamente, si $a := m_1 + c_1 \in M + C = A$, y $m \in M$, entonces

$$a + m = m_1 + c_1 + m = (m_1 + m) + c_1 \in M + C = A,$$

luego $A + M \subset A$.

ii) $M \subset L_A$.

Esto es consecuencia de la definición de L_A.

iii) $C = A \cap M^{\perp}$.

En efecto, $C \subset A - M = A + M = A$, y como $C \subset M^{\perp} \Rightarrow C \subset A \cap M^{\perp}$.

Recíprocamente, si $c \in A \cap M^{\perp}$, entonces por ser $c \in A = M + C$, será

$$c = m + c_1,\ m \in M,\ c_1 \in C \subset M^{\perp}$$

entonces

$$<c,m> = <m,m> + <c_1,m> \Leftrightarrow 0 = \|m\|^2,$$

de donde

$$m = \Theta,\ y\ \ c = c_1 \in C.$$

Por tanto $A \cap M^{\perp} \subset C$, y se cumple la igualdad.

iv) De iii) resulta que $A = M + (A \cap M^{\perp})$. Vamos a probar que $M = L_A$.

En efecto, de ii) $M \subset L_A$, si suponemos que $M \subsetneqq L_A$, sea N el complemento ortogonal de M relativo a L_A, $L_A = M \oplus N$, $N = M^{\perp} \cap L_A$.

Se tiene que $N + C = C$, pues $C \subset N + C$, ya que $\Theta \in N$.

Sea ahora $n \in N$ y $c \in C$. Tenemos que $n \in M^{\perp}$ y $c \in M^{\perp} \cap A$ por iii), de donde $n + c \in M^{\perp} + M^{\perp} = M^{\perp}$. Por otra parte, ya que $c \in A$,

$$c = y + c_1,\ y \in L_A,\ c_1 \in L_A^{\perp} \cap A.$$

Luego

$$n + c = (n + y) + c_1 \in (L_A + L_A) + (L_A^{\perp} \cap A) = L_A + (L_A^{\perp} \cap A) = A.$$

Por tanto $n + c \in M^{\perp} \cap A = C$ por iii).

Se concluye pues que $N + C = C$, y de aquí que $N \subset L_C$.

Luego $L_C \neq \{\Theta\}$, lo que contradice que C sea línea libre.

Por tanto $M = L_A$ y $C = M^{\perp} \cap A = L_A^{\perp} \cap A$. ■

Si X es un espacio localmente convexo real, y A es un subconjunto cerrado y convexo, la descomposición anterior ya no tiene sentido, pero en algunos casos podemos encontrar descomposiciones semejantes, aunque no únicas. Consideremos en lo que sigue el par dual (X,X^*) y la forma bilineal $\langle x,\varphi\rangle$, $x \in X$, $\varphi \in X^*$, asociada.

LEMA 1.3

Si $A \subset X$ es convexo y cerrado, y el espacio de linealidad L_A (que siempre es cerrado) tiene complemento topológico en X, entonces $A = L_A + (A \cap F^\perp)$, donde F es un $\tau_s(X)$-complemento de $L_A^\perp$ en X^*.

Prueba.-

Si $X = L_A \oplus G$, donde G es un complemento topológico de L_A en X, entonces $X^* = L_A^\perp \oplus G^\perp$ es una $\tau_s(X)$-descomposición de X^*, y hacemos $F := G^\perp$ (ver [10], T^a 20.5.1). Se tiene que $X = L_A \oplus F^\perp$, (pues G coincide con $G^{\perp\perp}$).

Veamos que $A = L_A + (A \cap F^\perp)$.

En efecto, $A = L_A + A$, luego $\forall a \in A$ $\exists$ $x \in L_A$ y $\exists$ $a_1 \in A$ tales que $a = x + a_1$.

Como $X = L_A \oplus F^\perp$, será

$$a_1 = x_1 + y_1, \quad x_1 \in L_A, \quad y_1 \in F^\perp,$$

y como

$$A - L_A = A + L_A = A, \quad y_1 \in A - L_A = A.$$

Por tanto

$$a = x + y_1 \in L_A + (A \cap F^\perp).$$

Luego $A \subset L_A + (A \cap F^\perp) \subset L_A + A = A$. ■

LEMA 1.4

$A \cap F^{\perp}$ es línea libre (con las mismas hipótesis del **Lema 1.3**).

Prueba .-

En efecto, si $A \cap F^{\perp}$ contuviera un subespacio afín $a+M$ (necesariamente M sería subespacio de $F^{\perp}$), entonces

$L_A \subset A - a$ y $M \subset A - a \Rightarrow L_A + M \subset A - a$ (pues $A - a$ es convexo).

Es decir,

$$a + L_A \oplus M \subset A, \quad \text{con} \quad L_A \subset L_A \oplus M \Rightarrow M = \{\Theta\}$$

debido a la maximalidad de L_A.

Por tanto $A \cap F^{\perp}$ es línea libre.

■

NOTA 1.1

La descomposición $A = L_A + (A \cap F^{\perp})$ depende del complemento topológico $F^{\perp}$ del espacio linealidad, ahora bien, es claro que si

$$A = L_A + C, \text{ con } C \subset F^{\perp},$$

entonces $C = A \cap F^{\perp}$.(ver iii) de la prueba del **Lema 1.2**).

DEFINICIóN 1.2

Si K es una cuña cerrada en X y L_K tiene complemento topológico $F^{\perp}$ ($X = L_K \oplus F^{\perp}$), a la cuña $\bar{K} := K \cap F^{\perp}$ (que es un cono, porque es línea libre), se le llama el cono asociado a K con respecto a $F^{\perp}$.

Sea $\Sigma = \{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j \ : \ j\in J\ \}$, un sistema consistente, diremos que Σ es una **representación** de su conjunto factible.

Si $c_j \leq 0$, $j \in J$, entonces $\theta \in F(\Sigma)$ y Σ es consistente. Es un caso carente de interés. Lo mismo puede decirse si $x : \begin{array}{l} J \longrightarrow X \\ j \longrightarrow x_j \end{array}$ es la función nula.

Un **programa lineal** es un problema de optimización con una función objetivo lineal y restricciones lineales. Por ejemplo:

$$\text{Hallar inf } \langle b,\varphi\rangle,\ b \in X\ ,\ \varphi \in X^*,\ b \text{ fijo} \qquad \text{(función objetivo)}$$

$$\text{sujeto a las restricciones } \langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j\ ,\ j \in J$$

Llamando (P) al programa, suponiendo que el programa tiene solución finita v(P), que llamamos **valor del programa**, el conjunto de **soluciones óptimas** de (P) es el conjunto factible de

$$\Sigma^* := \{\ \varphi \in X^*\ :\ \langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j\ ,\ j \in J,\ \langle b,\varphi\rangle = v(P)\ \}$$

Cuando el sistema $\Sigma := \{\ \langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j,\ j \in J\ \}$ es consistente y Σ^* inconsistente, el programa se dice que es **no resoluble**. Todo elemento de $F(\Sigma)$ se dice que es **factible** para (P).

Supongamos que X es un espacio normado. La resolución del programa siguiente, (P), permite decidir la consistencia o no de Σ, y determinar, en algún caso, la distancia de $F(\Sigma)$ a θ en X^* (llamada **mínima norma** de $F(\Sigma)$)

$$\text{Sea (P):} \qquad \sup t,\ t \in \mathbb{R}$$

$$\text{sujeto a } (x,t) \in K(\Sigma)\ ,\ \|x\| = 1$$

Tenemos el siguiente criterio, en donde v(P) representa el valor del programa ($v(P):= \sup \{ t \in R : (x,t) \in K(\Sigma), \|x\| = 1 \}$).

TEOREMA 1.1

Sea X un espacio normado y supongamos que rel-int$K(\Sigma) \neq \emptyset$. Si existe $j \in J$ tal que $c_j > 0$, y la función $j \longrightarrow x_j$ de $J \longrightarrow X$, no es la función nula, entonces:

I.- Σ es consistente si y sólo si $v(P) < +\infty$.

II.- Si Σ es consistente y X es un espacio de Hilbert, entonces

$$v(P) = \text{mínima norma de } \Sigma.$$

Prueba.-

I.- Supongamos que Σ es inconsistente. En este caso $(\Theta,1) \in \mathrm{cl}K(\Sigma)$.

Sea $(x,t)\in$ rel-int$K(\Sigma)$ con $x\neq\Theta$.

Entonces se tiene que el segmento en $X\times R$, $](\Theta,1),(x,t)] \subset K(\Sigma)$, luego

$$\lambda(x,t) + (1-\lambda)(\Theta,1) \in K(\Sigma) \ , \ 0<\lambda\leq 1.$$

Los puntos

$$\|x\|^{-1}[(x,t) + (r-1)(\Theta,1)] = \|x\|^{-1}(x,t + (r-1)), \ r = 1,2,...$$

son factibles para (P) y

$$\lim_{r \to \infty} \frac{t+(r-1)}{\|x\|} = +\infty ,$$

luego $v(P) = +\infty$.

Por tanto, si $v(P) < +\infty$, entonces Σ es consistente.

Supongamos que Σ es consistente. Probaremos la desigualdad

$$v(P)\leq \inf \|\varphi\| \ , \ \varphi \in F(\Sigma) \ ,$$

donde $\|\varphi\| := \sup\{ |\langle x,\varphi\rangle| : \|x\| \leq 1 \}$.

En efecto, sea $\varphi \in F(\Sigma)$ y (x,t) factible para (P), arbitrariamente elegidos. Por ser $(x,t) \in K(\Sigma)$, se puede escribir

$$(x,t) = \sum_{j\in J} \lambda_j (x_j, c_j) + \lambda_0 (\Theta,-1) \ , \ \lambda \in R_+^{(J)} \ , \ \lambda_0 \geq 0. \qquad (1)$$

Multiplicando (1) por $(\varphi,-1) \in X^* \times R$,

tenemos

$$\langle x,\varphi \rangle - t = \sum_{j\in J} \lambda_j (\langle x_j,\varphi\rangle - c_j) + \lambda_0 \geq 0 \ , \qquad (2)$$

de donde

$$t \leq \langle x,\varphi\rangle \leq |\langle x,\varphi\rangle| \leq \|\varphi\|.$$

Por tanto, tomando supremos al variar (x,t) e ínfimos al variar φ en $F(\Sigma)$, se obtiene que $v(P) \leq \inf \{\|\varphi\|, \ \varphi \in F(\Sigma) \} < +\infty$.

II.- Supongamos ahora que X es un espacio de Hilbert y sea φ^0 la proyección de la funcional cero θ sobre $F(\Sigma)$ $(X^* = X)$.

Entonces $\langle -\varphi^0, \varphi-\varphi^0\rangle \leq 0$ para todo $\varphi \in F(\Sigma)$ (ver [2] , T^a 15.1,(2)), de donde $\langle\varphi^0,\varphi\rangle \geq \|\varphi^0\|^2$ para todo $\varphi \in F(\Sigma)$.

Llamemos $z := \varphi^0$, entonces la relación $\langle \|z\|^{-1}z,\varphi\rangle \geq \|z\|$ es consecuencia de Σ, por lo que $\bar{y} := (\|z\|^{-1}z, \|z\|) \in clK(\Sigma)$, es decir: $\bar{y}$ pertenece a la clausura del conjunto factible de (P).

Sea $\bar{y}_r := (z_r, t_r)$, $r = 1,2,\ldots$ una sucesión de puntos factibles de (P), tales que $\lim_r \bar{y}_r = \bar{y}$. Entonces $\lim_{r\to\infty} t_r = \|z\| \leq v(P)$. Considerando la segunda parte de la prueba de I.-, tenemos que $v(P) = \|z\| = \min \|\varphi\|$, $\varphi \in F(\Sigma)$

■

Dado el sistema $\Sigma := \{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j, j\in J\}$, sabemos que el conjunto $F(\Sigma)$

es convexo y $\tau_s(X)$-cerrado. El teorema que sigue da algunas condiciones necesarias para la acotación de $F(\Sigma)$ en $X^*[\tau_s(X)]$.

TEOREMA 1.2

Sea $\Sigma := \{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j\ ,\ j \in J\}$ un sistema consistente. Si

I) $F(\Sigma)$ es $\tau_s(X)$- acotado,

II) θ es la única solución del sistema homogéneo asociado

$$\Sigma_0 := \{\langle x_j,\varphi\rangle \geq 0,\ j \in J\},\ \text{y}$$

III) $\mathrm{cl}\ N := \overline{\mathrm{cone}}\ \{x_j:\ j \in J\} = X$.

Se tiene que I => II <=> III.

Prueba.-

I => II. Puesto que $F(\Sigma)$ es acotado, su cono de recesión

$$C_{F(\Sigma)} = \{\theta\},\ \text{pero}\ C_{F(\Sigma)} = \{\ \varphi \in X^*\ :\ \langle x_j,\varphi\rangle \geq 0\} = F(\Sigma_0)\ ,$$

luego $F(\Sigma_0) = \{\theta\}$.

II => III. Se tiene que $\mathrm{cl}N = (C_{F(\Sigma)})^0$, pues si $x \in (C_{F(\Sigma)})^0$, es

$$\langle x,\varphi\rangle \geq 0 \quad \forall\varphi \in F(\Sigma_0)\ ,$$

luego $(x,0)$ es una relación consecuente de Σ_0,

y por tanto

$$(x,0) \in \overline{\mathrm{cone}}(\{(x_j,0)\ :\ j \in J\} \cup \{(\theta,-1)\})$$

de donde

$$x \in \overline{\mathrm{cone}}\{x_j\ : j \in J\}.$$

Recíprocamente, si $x \in \mathrm{cl}\ N$, $x = \lim_\delta y_\delta$ $\delta \in D$,siendo D un conjunto dirigido, $y_\delta \in N$, y como $\langle x,\varphi\rangle = \lim_\delta \langle y_\delta,\varphi\rangle$,

si $\varphi \in F(\Sigma_0)$, será $\langle y_\delta,\varphi\rangle \geq 0$.

Luego también $\langle x,\varphi\rangle \geq 0$, con lo que $x \in (F(\Sigma_0))^0 = (C_{F(\Sigma)})^0$.

En nuestro caso cl $N = (C_{F(\Sigma)})^0 = \{\theta\}^0 = X$.

III => II Si existiera $\varphi_0 \in F(\Sigma_0)$, $(\varphi_0 \neq \theta)$, existiría un vector $x_0 \in X$ tal que $\langle x_0,\varphi_0\rangle \neq 0$. Consideremos los casos:

a) $\langle x_0,\varphi_0\rangle < 0$. Entonces como $X = \text{cl}N = [F(\Sigma_0)]^0$, (1)

se tendría que $x_0 \in [F(\Sigma_0)]^0$, lo que implica que $\langle x_0,\varphi\rangle \geq 0 \quad \forall\varphi \in F(\Sigma_0)$ y en particular $\langle x_0,\varphi_0\rangle \geq 0$. Absurdo.

b) $\langle x_0,\varphi_0\rangle > 0$. Sea $t < 0$, el vector $tx_0 \in [F(\Sigma_0)]^0$ por (1), luego $\langle tx_0,\varphi_0\rangle = t\langle x_0,\varphi_0\rangle \geq 0$. Pero $t\langle x_0,\varphi_0\rangle < 0$, luego de nuevo se llega a un absurdo.

■

El ejemplo que sigue prueba que II (ni III) no es suficiente para I:

EJEMPLO 1.1 Sea $X := \ell^2$, las sucesiones reales de cuadrado sumable, entonces $X^* \simeq X = \ell^2$. A X^* lo supondremos dotado de la topología de la norma (que es compatible con el par dual (X, X^*)).

Sea $A := \{ \eta \in X^*,\ \eta = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots),$ con $|y_n| \leq n,\ n \in N\}$.

Se tiene que:

i) A es convexo, pues si $\eta_1, \eta_2 \in A$ y $0 < \tau < 1$,

tenemos que

$$|((1-\tau)\eta_1 + \tau\eta_2)_n| = |(1-\tau)y_{1n} + \tau y_{2n}| \leq (1-\tau)n + \tau n = n.$$

ii) A es cerrado, pues si $\eta \in \bar{A}$, existe una sucesión $\eta_n \in A$ tal que

$\|\eta-\eta_n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, pero esto implica que $|y_k-y_{kn}| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ $\forall k$, y entonces si $|y_{kn}| \le k$ para cada n, resulta $|y_k| \le k$, luego $\eta \in A$.

iii) A no es acotado, pues la sucesión $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$,donde

$$\eta_1 := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$$

$$\eta_2 := (1, 2, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta_n := (1, 2, \ldots, n, \frac{1}{n+1} \ldots\ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

está en A y $\|\eta_n\| > n$.

iv) A es, por i) y ii), la intersección de todos los semiespacios cerrados que lo contienen; cada uno de estos semiespacios queda definido por un vector $\mathfrak{X} \neq \Theta$, $\mathfrak{X} \in \ell^2$ y un número $c_{\mathfrak{X}}$. Asi pues, si llamamos B al conjunto de todos estos $\mathfrak{X}$, se tiene que :

$$A := \bigcap_{\mathfrak{X} \in B} \{\eta : \langle \mathfrak{X}, \eta \rangle \ge c_{\mathfrak{X}} \}.$$

De este modo A queda como el conjunto factible del sistema

$$\Sigma := \{ \langle \mathfrak{X}, \eta \rangle \ge c_{\mathfrak{X}} \ , \ \mathfrak{X} \in B \}.$$

v) $C_A = C_{F(\Sigma)} = \{\theta\}$.

En efecto, supongamos que $\eta \in C_A$. Entonces si $\eta_0 \in A$ y $t>0$,

$$\eta_0 + t\eta \in A \quad \forall t>0.$$

Ahora bien, esto implica que la coordenada n-sima $|y_{0n}+ty_n| \le n$ para todo $t>0$ y para cada n, luego $y_n = 0$ para cada n.

Por tanto $C_{F(\Sigma)} = \{\theta\}$, o sea θ es la única solución del sistema homogéneo $\Sigma_0 := \{\langle \mathfrak{X}, \eta \rangle \ge 0 \ , \ \mathfrak{X} \in B\}$, y sin embargo $F(\Sigma)$ es no acotado. Por tanto II no implica I.

DEFINICIÓN 1.3

Decimos que dos sistemas Σ_1 y Σ_2 son equivalentes cuando $F(\Sigma_1) = F(\Sigma_2)$.

TEOREMA 1.3

Sean Σ_1 y Σ_2 dos sistemas consistentes. Se tiene:

I) $F(\Sigma_1) \subset F(\Sigma_2) \Leftrightarrow K(\Sigma_2) \subset \mathrm{cl}K(\Sigma_1)$.

II) Σ_1 y Σ_2 son equivalentes si y sólo si $\mathrm{cl}K(\Sigma_1) = \mathrm{cl}K(\Sigma_2)$.

Prueba.-

Si $F(\Sigma_1) \subset F(\Sigma_2)$, toda relación (x,c) consecuente de Σ_2 es consecuente de Σ_1. Luego todo $(x,c) \in \mathrm{cl}K(\Sigma_2)$, pertenece a $\mathrm{cl}K(\Sigma_1)$, lo que implica que $K(\Sigma_2) \subset \mathrm{cl}K(\Sigma_1)$.

Recíprocamente, supongamos que $K(\Sigma_2) \subset \mathrm{cl}K(\Sigma_1)$.

Si existiera un $\psi \in F(\Sigma_1)$ tal que $\psi \notin F(\Sigma_2)$, aplicando el corolario 11F de [8], existe un $x \in X$ $\left(=\left[X^*(\tau_s(X))\right]^*\right)$ tal que $\langle x,\varphi-\psi\rangle > \alpha > 0$ $\forall\varphi \in F(\Sigma_2)$.

Como la relación $(x,\langle x,\psi\rangle + \alpha)$ es consecuente de Σ_2, deberá ser

$$(x,\langle x,\psi\rangle + \alpha) \in \mathrm{cl}K(\Sigma_2) \subset \mathrm{cl}K(\Sigma_1).$$

Por tanto la relación $(x,\langle x,\psi\rangle + \alpha)$ es consecuente de Σ_1, y como $\psi \in F(\Sigma_1)$, será $\langle x,\psi\rangle \geq \langle x,\psi\rangle + \alpha \Rightarrow \alpha \leq 0$, contradicción.

■

La codimensión del conjunto $\overline{\mathrm{aff}}^{s}\, F(\Sigma) :=$ $\tau_s(X)$-clausura de $\mathrm{aff}[F(\Sigma)]$ también está relacionada con $K(\Sigma)$. Así:

TEOREMA 1.4

Si Σ es consistente y codim $\tau_s(X)$-clausura de $[F(\Sigma)-F(\Sigma)]<\infty$ entonces $\dim L_{clK(\Sigma)} = \operatorname{codim} \overline{[F(\Sigma)-F(\Sigma)]}^{s}$.

En particular, si codim $F(\Sigma) = 0$, entonces $L := L_{clK(\Sigma)} = \{(\Theta,0)\}$.

Prueba.-

Llamemos $M := \tau_s(X)$-clausura de $[F(\Sigma)-F(\Sigma)]$.

Si codim $M = n$, entonces existe $F := [u_1,\dots,u_n]$, tal que $X^* = M \oplus F$, siendo F complemento topológico de M (con la topología $\tau_s(X)$, (ver [10], 15.8.2)

Entonces (por 20.5.4 de [10]), $X = M^{\perp} \oplus F^{\perp}$, es una $\tau_s(X^*)$-descomposición topológica de X, y $M^{\perp}$ tiene dimensión n (por 9.2.7a de [10]).

Sea $\{x_1,\dots,x_n\}$ una base de $M^{\perp}$, tenemos pues que

$$[F(\Sigma)-F(\Sigma)] \subset M \subset M^{\perp\perp} = \bigcap_{i=1}^{n} [x_i;0],$$

por lo que $F(\Sigma) \subset \bigcap_{i=1}^{n} [x_i;c_i]$ para ciertos números c_i, $i = 1,2,..n$. Esto significa que las relaciones $\pm(x_i,c_i)$, $i = 1,\dots,n$, son consecuencia de Σ, o sea que $\pm(x_i,c_i) \in clK(\Sigma)$, y por tanto que

$$\{ (x_i,c_i) \text{ , } i = 1,\dots,n \} \subset L.$$

Como $\{ (x_i,c_i) \text{ , } i = 1,\dots,n \}$ es libre, se tiene que $\dim L \geq n$.

Si $\{ (x_j,c_j) \text{ , } j = 1,\dots,p \}$ son vectores l.i. de L, se tiene que

$$\overline{\operatorname{aff}}^{s} F(\Sigma) \subset \bigcap_{j=1}^{p} [x_j;c_j]$$

por lo que $\operatorname{codim} M = \operatorname{codim} \overline{\operatorname{aff}}^{s} F(\Sigma) \geq \operatorname{codim} \bigcap_{j=1}^{p} [x_j;c_j] = p$, luego $n \geq p$, de donde $n \geq \dim L$, y de aquí que $\dim\ L = \operatorname{codim} M$.

Por último, si $\operatorname{codim} F(\Sigma) = 0$, entonces $\operatorname{codim} M = 0$ implica

$$\dim L = 0 \Rightarrow L = \{(\theta,0)\}.$$

■

COROLARIO 1.4.1

Si $\dim X < +\infty$, entonces $\dim L_{clK(\Sigma)} = \operatorname{codim} F(\Sigma)$.

Prueba.-

En efecto, en este caso

$$M := \tau_s(X)\text{-clausura } \overline{[F(\Sigma)-F(\Sigma)]} = [F(\Sigma)-F(\Sigma)],$$

luego $\dim L_{clK(\Sigma)} = \operatorname{codim} M = \operatorname{codim} F(\Sigma)$.

■

COROLARIO 1.4.2

Si $\dim X = n$, y $F(\Sigma)$ tiene dimensión n, entonces $K(\Sigma)$ es un cono.

■

En el **Teorema 1.4** la hipótesis de ser $\operatorname{codim} \overline{[F(\Sigma)-F(\Sigma)]}^{s} < \infty$ es esencial para su validez, como vemos en el siguiente

EJEMPLO 1.2 Consideremos los espacios reales ℓ^1 y ℓ^∞ , que forman el par dual (ℓ^1,ℓ^∞). Sea el conjunto $B \subset \ell^1$,

$B := \{x \in \ell^1 : x = (0,b_2,0,b_4,\ldots)$, con $b_{2n} = 0$ salvo un número finito$\}$

y $J :=$ card B, con lo que cada elemento de B lo designaremos por x_j , $j \in J$.

Sea el sistema $\Sigma := \{ \langle x_j, \varphi \rangle \geq 0 \ , \ j \in J \}$. Entonces es fácil ver que

$$F(\Sigma) = \{ \varphi \in \ell^{\infty} : \varphi = (\varphi_1, 0, \varphi_2, 0, \ldots), \text{ y que}$$

$$\mathrm{cl}K(\Sigma) \subset B\times]-\infty, 0].$$

Puesto que el mayor subespacio contenido en $B\times]-\infty,0]$ es

$$B\times\{0\} := \{(b,0) : b \in B\},$$

tenemos que $L_{\mathrm{cl}K(\Sigma)} \subset B\times\{0\}$, fallando la tesis del **Teorema 1.4**, ya que $\dim L_{\mathrm{cl}K(\Sigma)} \leq \aleph_0$, mientras que $\mathrm{codim}\ F(\Sigma) = \dim \ell^{\infty}/F(\Sigma) > \aleph_0$ pues $F(\Sigma)$ es un subespacio cerrado del espacio de Banach ℓ^{∞}.

La identificación de los sistemas cuyo conjunto factible es un poliedro convexo (es decir, una intersección finita de semiespacios cerrados de $X^*(\tau_s(X))$, $\bigcap_{i=1}^{n} \{ \varphi : \langle x_i, \varphi \rangle \geq c_i, i=1,\ldots,n \}$) permite, en algunos casos, la transformación de un programa infinito lineal en uno finito. Los semiespacios cerrados de la forma $\{ x \in X : \langle x, \varphi \rangle \geq 0, \varphi \in X^* \}$, los llamaremos **semiespacios cerrados que tienen a $\ominus$ como punto frontera**.

Recordemos que una cuña se dice que es **poliédrica** si es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados que tienen el $\ominus$ como punto frontera, y que una cuña K se dice que es **finitamente generada** si existe un subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$, tal que

$$K := \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i=1,\ldots,n\}.$$

Si $\dim X < +\infty$, ambos conceptos coinciden (ver p.e. T^a 4.18 Van Tiel), ahora bien, si $\dim X = \infty$, los conceptos son distintos, ya que:

i) Un semiespacio de X, $\{ x : \langle x, \varphi \rangle \geq 0 \ , \ \varphi \in X^* \}$, sería una cuña poliédrica que no es finitamente generada.

ii) Si $x_1 \neq x_2 \neq \Theta$, son dos vectores de X, entonces

$$K := \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\},$$

está en un subespacio vectorial a lo sumo de dimensión 2, que nunca puede ser intersección finita de semiespacios, a menos que dim $X<\infty$.

Es claro que toda cuña poliédrica es cerrada. También es cierta esta propiedad para las cuñas finitamente generadas.

LEMA 1.5

Si K es una cuña finitamente generada en X, entonces K es cerrada en X.

Prueba.-

Sea $K := \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n : \lambda_i \geq 0,\ i=1,\ldots,n\}$,y sea $F := [x_1,\ldots,x_n]$, el subespacio engendrado por $\{x_1,\ldots,x_n\}$. F es un subespacio cerrado de X, cuya dimensión es menor o igual que n, por lo que K es cerrada en F (ver [18] T^a4.17 b)), y por tanto K cerrada en X.

■

TEOREMA 1.5

Dado un sistema consistente Σ, entonces $F(\Sigma)$ es un conjunto convexo poliédrico si y sólo si $\mathrm{cl}K(\Sigma)$ es finitamente generada.

Prueba.-

Si $F(\Sigma)$ es un poliedro, entonces

$$F(\Sigma) = \{\varphi : \langle \bar{x}_i, \varphi \rangle \geq \bar{c}_i,\ i=1,\ldots,n\},$$

es decir $F(\Sigma) = F(\bar{\Sigma})$, donde $\bar{\Sigma} := \{\langle \bar{x}_i, \varphi \rangle \geq \bar{c}_i, i=1,..,n\}$.

Entonces por el **Teorema 1.3** II), $clK(\Sigma) = clK(\bar{\Sigma}) = K(\bar{\Sigma})$, que está generada por el sistema finito $\{(\bar{x}_i, \bar{c}_i), i=1,...,n ; (\theta,-1)\}$.

Recíprocamente, si $clK(\Sigma) = K\{(x_r, c_r), r=1,...,p\}$, entonces $F(\Sigma)$ es el conjunto factible del sistema finito

$$\{\langle x_r, \varphi \rangle \geq c_r,\ r=1,...,p\},$$

es decir

$$\{\ \varphi : \langle x_r, \varphi \rangle \geq c_r,\ r=1,...,p\}.$$

■

COROLARIO 1.5.1

Sea $M(\Sigma)$ la cuña $K\{(x_j, c_j) : j\in J\} := \text{cone}\ \{(x_j, c_j),\ j\in J\}$, llamada "cono de momentos de Σ", y supongamos que Σ es consistente. Si $clM(\Sigma)$ es finitamente generada entonces $F(\Sigma)$ es un poliedro.

Prueba.-

Si $clM(\Sigma) = K\{(\bar{\bar{x}}_j, \bar{\bar{c}}_j) : j=1,...,p\} = M(\Sigma)$, entonces

$$K(\Sigma) := K\{(\bar{\bar{x}}_j, \bar{\bar{c}}_j) : j=1,...,p ; (\theta,-1)\} = clK(\Sigma)$$

y se aplica el **Teorema 1.5**.

■

TEOREMA 1.6

Si $\text{codim}\ F(\Sigma) < \infty$, entonces $F(\Sigma)$ es una variedad afín, si y sólo si el cono asociado a $clK(\Sigma)$ con respecto a cualquier complemento topológico $F^{\perp}$ de su espacio de linealidad $L := L_{clK(\Sigma)}$, en $X\times R$, es una semirrecta.

Prueba.-

Por el **Teorema 1.4**, L es de dimensión finita y (por T[a] 20.5.5 de [10]), tiene complemento topológico $F^{\perp}$, es decir

$$X\times R = L \oplus F^{\perp}.$$

Supongamos que

$$F(\Sigma) = \{\varphi \in X^* : \langle\bar{x}_j,\varphi\rangle = \bar{c}_j,\ j=1,\dots,m\} =$$

$$\bigcap_{j=1}^{m} [\bar{x}_j;c_j] \quad ,\ \bar{x}_j \in X,\quad c_j \in R,\ j = 1,\dots,m .$$

Sea $\bar{\Sigma}$ el sistema finito

$$\bar{\Sigma} = \{\langle\bar{x}_j,\varphi\rangle \geq \bar{c}_j, \langle-\bar{x}_j,\varphi\rangle \geq -\bar{c}_j,\ j = 1,\dots,m\}.$$

Entonces Σ y $\bar{\Sigma}$ son equivalentes y, por **Teorema 1.3** II),

$$\text{clK}(\Sigma) = \text{clK}(\bar{\Sigma}) = \text{cone}\{\pm(\bar{x}_j,\bar{c}_j),\ j = 1,\dots,m;\ (\Theta,-1)\} \qquad (1)$$

De aquí que

$$L = [\{(\bar{x}_j,\bar{c}_j), j = 1,\dots,m\}] \quad \text{(envoltura lineal), y}$$

$$\bar{K} := \text{clK}(\Sigma) \cap F^{\perp} \neq \{(\Theta,0)\},$$

dado que $(\Theta,-1) \notin L$, puesto que Σ es consistente.

Sea $(x,c) \in \bar{K}\setminus\{(\Theta,0)\}$. Es claro que

$$L + \text{cone}\ \{(x,c)\} = L + \{\lambda(x,c) : \lambda \geq 0\} \subset \text{clK}(\Sigma). \qquad (2)$$

Puesto que $(x,c) \in \text{clK}(\Sigma)$, (1) permite escribir:

$$(x,c) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(\bar{x}_j,\bar{c}_j) + \mu(\Theta.-1),\ \alpha_j \in R\ ,\ j=1,\dots,m\ ,\ \mu\geq 0. \qquad (3)$$

Entonces:

i) Si existe $\varphi \in F(\Sigma)$, tal que $\langle x,\varphi\rangle > c$, multiplicando ambos miembros de (3) por $(\varphi,-1) \in X^* \times R$, tenemos que

$$0 < \langle x,\varphi\rangle - c = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(\langle\bar{x}_j,\varphi\rangle - \bar{c}_j) + \mu$$

luego $\mu > 0$, y de (3) obtenemos que:

$$(\Theta,-1) = \frac{1}{\mu}(x,c)+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{-\alpha_j}{\mu}\right)(\bar{x}_j,\bar{c}_j) \in L + \{\lambda(x,c) : \lambda > 0\},$$

lo que prueba la inclusión

$$\mathrm{cl}K(\Sigma) \subset L + \{\lambda(x,c),\ \lambda > 0\}. \tag{4}$$

De (2) y (4) se sigue que

$$\mathrm{cl}K(\Sigma) = L + \mathrm{cone}\ \{(x,c)\} = L + \bar{K} \text{ (ver } \textbf{Lema 1.3}).$$

Por tanto $\bar{K} = \mathrm{cone}\{(x,c)\}$, es una semirrecta.

ii) Si $\forall\varphi \in F(\Sigma)$ es $<x,\varphi> = c$, entonces $(-x,-c)$ y (x,c) están en $\mathrm{cl}K(\Sigma)$, es decir $(x,c) \in (\mathrm{cl}K(\Sigma) \cap (-\mathrm{cl}K(\Sigma)) = L_{\mathrm{cl}K(\Sigma)}$, y puesto que $(x,c) \in \mathrm{cl}K(\Sigma) \cap F^{\perp}$, ha de ser $(x,c) = (\Theta,0)$, luego ii) no puede ocurrir. Por tanto $\bar{K}$ es una semirrecta.

Recíprocamente, supongamos que $\bar{K} = \mathrm{cone}\ \{(x,c),\ (x,c)\neq(\Theta,0)\}$, y sea $\{(\bar{x}_j,\bar{c}_j) : j = 1,\ldots,m\}$ una base de L. Dado que $(\Theta,-1) \in \mathrm{cl}K(\Sigma)$, podemos escribir:

$$(\Theta,-1) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(\bar{x}_j,\bar{c}_j) + \mu(x,c)\ ,\ \alpha_j\in R,\ j = 1,\ldots,m\ ,\ \mu \geq 0.$$

Si $\mu = 0$, $(\Theta.-1) \in L$, luego $(\Theta,1) \in L \subset \mathrm{cl}K(\Sigma)$, y Σ no sería consistente; por tanto $\mu > 0$ y

$$(x,c) = \mu^{-1}(\Theta,-1)+\sum_{j=1}^{m}(-\alpha_j\mu^{-1})(\bar{x}_j,\bar{c}_j) \in \mathrm{cone}\ \{(\Theta,-1)\} + L.$$

Entonces

$$\mathrm{cl}K(\Sigma) = L + \bar{K} \subset L + L + \mathrm{cone}\ \{(\Theta,-1)\} = L + \mathrm{cone}\ \{(\Theta,-1)\} \subset \mathrm{cl}K(\Sigma).$$

Así pues,

$$\mathrm{cl}K(\Sigma) = L + \mathrm{cone}\ \{(\Theta,-1)\} = \mathrm{cone}\ \{\pm(\bar{x}_j,\bar{c}_j) : j = 1,\ldots,m\ ;\ (\Theta,-1)\},$$

por lo que Σ es equivalente al sistema

$$\{<\bar{x}_j,\varphi> = \bar{c}_j\ ,\ j = 1,\ldots,m\},$$

y $F(\Sigma) = \bigcap_{j=1}^{m}[\bar{x}_j;\bar{c}_j]$. ■

DEFINICIóN 1.4

Dos conjuntos A y B de X son positivamente equivalentes si cone A = cone B.

TEOREMA 1.7

Dado $C \subset X$, $C \neq \emptyset$, supongamos que $L_{cone(C)}$ tiene complemento topológico $F^{\perp}$. Entonces cone (C) cerrado y localmente compacto $\Rightarrow$ C es positivamente equivalente a $Y \cup Z$, tal que Z es compacto y convexo, cone (Y) es cerrado, y el sistema $\begin{Bmatrix} <z,\varphi>>0, z\in Z \\ <y,\varphi>\geq 0, y\in Y \end{Bmatrix}$ es consistente.

Prueba.-

Sea $K := \text{cone } (C)$, localmente compacto y cerrado. Entonces $\bar{K} := K \cap F^{\perp}$ es cerrado.

Supongamos primero que $\bar{K} \neq \{\Theta\}$. Como $\bar{K}$ es un cono apuntado localmente compacto, por Teorema 25.4.2 de [10] , $\bar{K}$ está generado por un conjunto Z convexo y compacto tal que $\Theta \notin Z$, además se puede tomar $Z \subset [\varphi;1]$ para cierta $\varphi \in X^{*}$.

Si además $\{v_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ es una base de $L_{cone(C)}$ y tomamos $Y := \{\pm v_{\alpha}, \alpha\in I\}$, resulta cone $(Y) = L_{cone(C)}$ que es cerrado, y que

$$K = L_{cone(C)} + \bar{K} = \text{cone}(Y) + \text{cone}(Z) = \text{cone}(Y \cup Z).$$

Además, ya que $co(Z) = Z$,

$$co(Z) + \text{cone}(Y) \text{ es cerrado, y } \Theta \notin co(Z) + \text{cone}(Y),$$

pues si $x \neq \Theta$ y $(-x)$ pertenecieran a $co(Z)$ y cone(Y) respectivamente entonces $\pm x \in \text{cone}(Y) = L_K$, y $x \in Z \subset F^{\perp}$. Absurdo.

Aplicando el Corolario 1.5.1 de [11], se tiene que el sistema $\left\{\begin{matrix} <z,\varphi>>0, z\in Z \\ <y,\varphi>\geq 0, y\in Y \end{matrix}\right\}$ es consistente.

Por último, si $\bar{K} = \{\Theta\}$, podemos tomar $Z = \emptyset$, $Y := L_K$.

∎

En dimensión infinita no se puede prescindir, en el **Teorema 1.7**, de la hipótesis de que cone(C) sea localmente compacto, como pone de manifiesto el siguiente

EJEMPLO 1.3 En $[\ell^2, \tau_s(\ell^2)]$ consideramos

$$C := \{ \kappa \in \ell^2 : \|\kappa\| \leq 1 \} \cap R^N_+ .$$

Entonces, $\mathrm{cone}(C) = \ell^2 \cap R^N_+$ es cerrado en ℓ^2 y no es $\tau_s(\ell^2)$-localmente compacto, pues si lo fuera, existiría un entorno débil

$$V_{\eta_1,\dots,\eta_n;\varepsilon} := \{ \kappa \in \ell^2 : \sup |<\kappa,\eta_i>| \leq \varepsilon,\ i = 1,\dots,n \}$$

tal que $V_{\eta_1,\dots,\eta_n;\varepsilon} \cap \mathrm{cone}(C)$ sería $\tau_s(\ell^2)$-compacto, y por tanto acotado en ℓ^2 (T^a 20.11.8, de [10]). Pero esto es absurdo ya que el subespacio M de codimensión n,

$$M := \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\eta_i) = \{ \kappa \in \ell^2 : <\kappa,\eta_i> = 0,\ i = 1,\dots,n\}$$

corta a R^N_+ en puntos $\kappa \neq \Theta$, y si $\kappa \in M \cap R^N_+ \subset \mathrm{cone}(C) \cap V_{\eta_1,\dots,\eta_n;\varepsilon}$, entonces $\lambda\kappa \in \mathrm{cone}(C) \cap V_{\eta_1,\dots,\eta_n;\varepsilon}$ $\forall\lambda > 0$,

y por tanto $\|\lambda\eta\| = \lambda\|\kappa\| \longrightarrow +\infty$ cuando $\lambda \longrightarrow +\infty$, con lo que

$$\mathrm{cone}(C) \cap V_{\eta_1,\dots,\eta_n;\varepsilon} \text{ no está acotado en } \ell^2.$$

Luego cone(C) no es localmente compacto.

Entonces tomando $Z := C$, $Y := \{\theta\}$, Z es compacto y convexo en $[\ell^2, \tau_s(\ell^2)]$, $Z \cup Y = Z$, $\text{cone}(Y) = \{\theta\}$ es cerrado, y el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle z,\varphi\rangle > 0 & z \in Z \\ \langle y,\varphi\rangle \geq 0 & y \in Y \end{array} \right. \quad \text{es inconsistente.}$$

Luego la hipótesis sobre cone(C), de ser localmente compacto, es esencial para la validez del **Teorema 1.7**.

Los sistemas consistentes Σ, tales que $K(\Sigma)$ es cerrado son de gran interés en la teoría de sistemas lineales (sistemas de Farkas-Minkowski). El teorema siguiente es básico para establecer una condición suficiente para que $K(\Sigma)$ sea cerrado.

TEOREMA 1.8

Dado $C \subset X$, $C \neq \emptyset$. C es positivamente equivalente al conjunto $Y \cup Z$, tal que Z es compacto y convexo, cone(Y) cerrado, y el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle z,\varphi\rangle > 0,\ z \in Z \\ \langle y,\varphi\rangle \geq 0,\ y \in Y \end{array} \right\} \text{es consistente} \quad \Rightarrow \quad \text{cone}(C) \text{ es cerrado.}$$

Prueba.-

Si $Z = \emptyset$, no hay nada que probar.

Tenemos que $\text{cone}(C) = \text{cone}(Y) + \text{cone}(Z)$. Entonces por ser el sistema consistente, $\theta \notin Z$ y por estar $\text{co}(Z) = Z$ estrictamente separado de θ por hipótesis, resulta que cone(Z) es un cono (Lema 1.5, de [11]), y ya que Z es compacto, cone(Z) es localmente compacto y por tanto cerrado (Teorema 25.4.2 de [10]).

Además, $Z + \text{cone}(Y) = \text{co}(Z) + \text{cone}(Y)$ es cerrado, y (Corolario 1.5.1, de [11]) $\Theta \notin co(Z) + cone(Y)$, de donde tenemos que

$$-cone(Z) \cap cone(Y) = \{\Theta\}.$$

Llamando $A := -cone(Z)$, $B := cone(Y)$, se tiene que

$$C_A = -cone(Z), \quad C_B = cone(Y),$$

con A convexo, cerrado y localmente compacto, B convexo y cerrado, y $C_A \cap C_B = \{\Theta\}$, por lo que aplicando el Lema 15.D de [8], se tiene que B-A es cerrado, es decir $cone(Z) + cone(Y) = cone(C)$ es cerrado.

■

Los **teoremas 1.7** y **1.8** no son recíprocos, como muestra el siguiente

EJEMPLO 1.4 Sea $C := \{ \kappa \in \ell^2 : \|\kappa\| = 1 \} \cap R^N_+$. Entonces

$$cone(C) = \ell^2 \cap R^N_+$$

Se tiene que:

i) cone(C) es cerrado en ℓ^2 y no es localmente compacto.

ii) si llamamos $Z = \emptyset$ e $Y = C$, entonces Z es compacto y convexo, cone(Y) es cerrado, y el sistema

$$\begin{cases} \langle z,\varphi\rangle > 0 & z \in Z \\ \langle y,\varphi\rangle \geq 0 & y \in Y \end{cases} \quad \text{tiene a } \varphi = \theta \text{ como solución.}$$

Luego de la hipótesis del **Teorema 1.8** no se puede deducir la hipótesis del **Teorema 1.7**.

COROLARIO DE LOS TEOREMAS 1.7 Y 1.8

Si $C \subset X$, $C \neq \emptyset$ y $\dim X < +\infty$, son equivalentes las dos proposiciones siguientes:

I) cone(C) es cerrado.

II) C es positivamente equivalente a $Y \cup Z$, con Z compacto, cone(Y) cerrado y el sistema $\left\{ \begin{array}{l} <z,\varphi>>0, z\in Z \\ <y,\varphi>\geq 0, y\in Y \end{array} \right\}$ consistente.

Prueba.-

I $\Rightarrow$ II.- Si cone(C) es cerrado, es localmente compacto. Además $L_{cone(C)}$ tiene complemento topológico. Luego aplicamos el **Teorema 1.7**.

II $\Rightarrow$ I.- Si Z es compacto, tomamos $Z_1 := \overline{co}\,(Z)$ que es compacto y convexo, y además cone(Z) = cone(Z_1).

Por otro lado, si el sistema

$$\begin{cases} <z,\varphi> \; > 0 & , \; z \in Z \\ <y,\varphi> \; \geq 0 & , \; y \in Y \end{cases} \tag{1}$$

es consistente, entonces también es consistente el sistema

$$\begin{cases} <z,\varphi> \; > 0 & , \; z \in Z_1 \\ <y,\varphi> \; \geq 0 & , \; y \in Y \end{cases} \tag{2}$$

En efecto: sea φ solución del sistema (1), y sea

$$0 < m_0 := \min \{ \varphi(z) \; : \; z \in Z \} = \varphi(z_0), \text{ para algún } z_0 \in Z.$$

Tomamos

$$\bar{z} \in co(Z), \; \bar{z} = \sum_{i=1}^{p} a_i z_i \; , \; a_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{p} a_i = 1, \quad z_i \in Z \quad , \quad i = 1,\ldots,p \quad ,$$

y tenemos que

$$\varphi(\bar{z}) = \varphi(a_1 z_1 + \ldots + a_p z_p) = a_1 \varphi(z_1) + \ldots + a_p \varphi(z_p) \geq (a_1 + \ldots + a_p) m_0 = m_0,$$

con lo que $\varphi(\bar{z}) \geq m_0 > 0$, $\forall\ \bar{z} \in co(Z)$.

Por último, si $\hat{z} \in \overline{co}(Z)$, sea $\bar{z}_n \xrightarrow[n]{} \hat{z}$ con $\bar{z}_n \in co(Z)$ $\forall\ n \in N$.

Entonces, al ser $\varphi(\bar{z}_n) \geq m_0$ $\forall\ n \in N$, debe ser $\varphi(\hat{z}) \geq m_0 > 0$. Por tanto el sistema (2) es consistente.

Finalmente se aplica el **Teorema 1.8**.

■

Para el teorema siguiente asociamos al sistema

$$\Sigma = \{<x_j,\varphi> \ \geq \ c_j \ , j \in J\}$$

el conjunto $C:=\{(x_j,c_j),\ j \in J\}$ de $X\times R$.

TEOREMA 1.9

Supongamos que el conjunto C asociado al sistema Σ es positivamente equivalente a $Y\cup Z$, donde cone(Y) es cerrado, Z compacto y convexo, y que $\Psi^0 := (\varphi^0,s)\in X^*\times R$, cumple que

$$\begin{cases} <z,\Psi^0> \ > 0, & \forall z\in Z \\ <y,\Psi^0> \ \geq 0, & \forall y\in Y \end{cases} \qquad (1)$$

Si una de las condiciones siguientes se cumple, entonces Σ es consistente y $K(\Sigma)$ es cerrado:

I) $s < 0$

II) $s = 0$ y $(\theta,1) \notin$ cone(Y).

Prueba.-

En primer lugar, aplicando el **Teorema 1.8**,

$$M(\Sigma) := \text{cone}(C) \text{ es cerrado.}$$

Probaremos ahora que Σ es consistente bajo cualquiera de las condiciones I) o II). Por el Teorema 1.2 de [11], la inconsistencia de

Σ equivale a que

$$(\Theta,1)\in \mathrm{clM} = \mathrm{cone}(C) = \mathrm{cone}(Y\cup Z),$$

y por (1)

$$<(\Theta,1),\Psi^0> = <(\Theta,1)(\varphi^0,s)> = s \geq 0.$$

Así pues I implica la consistencia de Σ.

Si suponemos ahora que $s = 0$, $(\Theta,1) \notin \mathrm{cone}(Y)$ y Σ inconsistente, como

$$(\Theta,1) \in \mathrm{cone}(C) = \mathrm{cone}(Y\cup Z),$$

será

$$(\Theta,1) = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_p y_p + \mu_1 z_1 + \ldots + \mu_q z_q, \quad \lambda_i \geq 0,\ \mu_i \geq 0,$$

pero al menos algún $\mu_i > 0$ (pues de lo contrario $(\Theta,1) \in \mathrm{cone}(Y)$), y por (1) se tiene $<(\Theta,1),(\varphi^0,s)> = s > 0$, contradicción.

Así, II implica también la consistencia de Σ.

Probaremos finalmente que $K(\Sigma)$ es cerrado. En efecto, sean

$$A := \mathrm{cone}\{(\Theta,1)\},\quad B := \mathrm{cone}(C).$$

Tenemos que A y B son cerrados y convexos de $X\times R$, A es localmente compacto, $C_A = A$, y $C_B = B$, siendo $C_A \cap C_B = \{(\Theta,0)\}$ (pues de otro modo $(\Theta,1) \in \mathrm{cone}(C) = \mathrm{clM}$, y Σ sería inconsistente).

Aplicando el Lema 15.D de [8], tenemos que

$$\mathrm{cone}(C) - \mathrm{cone}\{(\Theta,1)\} = \mathrm{cone}(C) + \mathrm{cone}\{(\Theta,-1)\} = K(\Sigma) \text{ es cerrado.}$$

■

Volver al Indice/Tornar a l'index

NOTAS

1.2.- En el **Teorema 1.1** el resultado es igualmente válido cuando se sustituye $K(\Sigma)$ por $\text{cone}\{(x_j,c_j)\ ,\ j \in J\} = M(\Sigma)$ en (P), pues ambos programas tienen igual valor.

1.3.- La equivalencia de dos sistemas garantiza la igualdad entre las clausuras de sus conos característicos: $K(\Sigma_i)$ $i = 1,2$, pero no entre dichos conos, como muestra el siguiente

EJEMPLO 1.5

$$\Sigma_1 := \{\langle t,x\rangle \geq -1\ ,\ t \geq 0\}$$

y

$$\Sigma_2 := \{\langle t,x\rangle \geq -1\ ,\ t \geq 0\ ;\ \langle 1,x\rangle \geq 0\}$$

——

1.4.- No vale el recíproco del **Corolario 1.4.2**.

EJEMPLO 1.6

Sea $\Sigma := \{\langle \cos t,x\rangle \geq \operatorname{sen} t\ ,\ t \in]\pi,2\pi[\}$.

Es evidente que $K(\Sigma)$ es apuntado y que $F(\Sigma) = \{0\}$, conjunto que no tiene dimensión máxima.

——

CAPÍTULO 2.

RESTRICCIONES REDUNDANTES: CLASIFICACIÓN

Como es bien sabido, la redundancia es un fenómeno de considerable trascendencia en el terreno de los métodos numéricos en programación matemática, con eventuales efectos positivos (mejorar el condicionamiento del problema o posibilitar la aplicación de métodos más eficientes) y negativos (incrementar el esfuerzo computacional o propiciar la formación de ciclos).

Aquí se analiza el fenómeno de la redundancia en sistemas de infinitas desigualdades lineales sobre un espacio localmente convexo real, X, proporcionando diferentes criterios para la clasificación de una restricción dada en redundante o no redundante.

Se han escrito multitud de trabajos acerca de la redundancia de sistemas de finitas inecuaciones en espacios de dimensión finita, véase Karwan-Lofti-Telgen-Zionts [9] y los trabajos que allí se mencionan, pero tan sólo en Eckhardt [4] y Goberna-López [6] se hace referencia a la redundancia en sistemas de infinitas inecuaciones, pero en ambos casos, sobre un espacio de dimensión finita, $X = R^n$.

DEFINICIóN 2.1

Sea Σ un sistema consistente. Diremos que una restricción $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es **redundante** en Σ, cuando todas las soluciones del sistema resultante de eliminar dicha restricción :

$$\Sigma_s := \{<x_j,\varphi> \geq c_j \ , \ j \in J\backslash\{s\}\}$$

lo son de Σ, es decir $F(\Sigma) = F(\Sigma_s)$.

Cuando una restricción no es redundante, se dice que es **activa**.

TEOREMA 2.1

Si $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es activa, entonces el hiperplano:

$$H_s = \{ \varphi \in X^* : <x_s,\varphi> = c_s\}$$

contiene algún punto de $F(\Sigma)$. Es decir, es consistente el sistema :

$$\Sigma^s := \{<x_j,\varphi> \geq c_j \ , \ j \in J\backslash\{s\} \ ;<x_s,\varphi> = c_s \}.$$

Prueba .-

Por ser Σ consistente, existe $\hat{\varphi} \in F(\Sigma)$ y $<x_s,\hat{\varphi}> \geq c_s$. Por hipótesis la restricción $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es activa, luego existe una solución $\bar{\varphi}$ de Σ_s tal que $<x_s,\bar{\varphi} > < c_s$.

Definimos las aplicaciones :

$$\begin{aligned} \Phi_s \ : \ X^* &\longrightarrow R \\ \varphi &\longrightarrow \Phi_s(\varphi) = <x_s,\varphi> - c_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \ : \ [0,1] &\longrightarrow X^* \\ t &\longrightarrow g(t) = (1-t)\ \hat{\varphi} + t\ \bar{\varphi} \end{aligned}$$

Ambas son claramente continuas, por lo que si $f := \Phi_s \circ g$, f es continua en [0,1], y

$$f(0).f(1) = \Phi_s(\hat{\varphi}).\Phi_s(\bar{\varphi}) = (<x_s,\hat{\varphi}> - c_s).(<x_s,\bar{\varphi}> - c_s) \leq 0 \ .$$

Por el teorema de Bolzano existe $\alpha \in [0,1]$, tal que :

$$0 = f(\alpha) = \Phi_s[(1-\alpha)\hat{\varphi} + \alpha\bar{\varphi}] := \Phi_s(\varphi_1) = \langle x_s, \varphi_1\rangle - c_s .$$

Es claro que $\varphi_1 \in H_s \cap F(\Sigma)$.

■

DEFINICIóN 2.2

Si $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es redundante en Σ y Σ^s es consistente, diremos que $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es **semi-redundante** en Σ.

Puesto que la inconsistencia de Σ^s garantiza la redundancia de $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ en Σ, dos nuevos conceptos se derivan de la clasificación de los sistemas inconsistentes.

DEFINICIóN 2.3

$\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es **débilmente redundante** en Σ , cuando Σ^s es débilmente inconsistente.

$\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es **fuertemente redundante** en Σ , cuando Σ^s es fuertemente inconsistente.

El ejemplo que sigue ilustra cada uno de los tipos de redundancia.

EJEMPLO 2.1

Sea $X = \ell^1$, $X^* = \ell^\infty$, y sea $A \subset X$ formado por todos los vectores $\kappa = (x_n)$, $x_n \geq 0$, con sólo un número finito de componentes no nulas y al menos $x_p = 1$ para algún p.

Consideremos el sistema:

$$\Sigma := \{\langle\kappa,\eta\rangle \geq 1 \ , \ \kappa \in A\backslash u^1; \langle u^1,\eta\rangle \geq 0, \ \eta \in \ell^\infty \}.$$

Es claro que las unidades $u^n = (0,\overset{(n}{\ldots\ldots},1,0,\ldots) \in A$, y que cualquier $\kappa \in A$ es combinación lineal de los u^n, de coeficientes positivos, siendo al menos uno de ellos igual a 1.

Se tiene que el sistema Σ es consistente, pues tomando $\eta = (y_p)$, con $y_p = 1 \ \ \forall \ p \in N$, tenemos que

$$\eta \in \ell^\infty \quad (\|\eta\|_\infty = 1) \text{ y } \langle\kappa,\eta\rangle = \sum_{p=1}^{\infty} x_p \geq 1$$

i) Las restricciones $\langle\kappa_s,\eta\rangle \geq 1$, $\kappa_s \neq u^n$, $n \in N$, son redundantes en Σ, ya que si $\eta \in \ell^\infty$ es una solución del sistema:

$$\Sigma_s := \{\langle\kappa,\eta\rangle \geq 1, \ \kappa \neq \kappa_s \ , \ \kappa \in A\backslash u^1; \ \langle u^1,\eta\rangle \geq 0\} \ ,$$

tenemos que $\langle u^n,\eta\rangle \geq 1$, si $n \geq 2$,

lo que implica que $y_n \geq 1$ para $n = 2,3,\ldots$.

También $y_1 \geq 1$, pues si suponemos que

$$\kappa_s := x_1 u^{n_1} + x_2 u^{n_2} + \ldots + x_t u^{n_t},$$

consideramos el vector

$$u^1 + \frac{1}{n} u^p \ , \ n \in N \ , \text{ siendo } u^p \neq u^{n_1}, u^{n_2}, \ldots, u^{n_t}, \ u^1,$$

entonces este vector está en $A\backslash\{u_1\}$ y es distinto de κ_s, por lo que: $\langle u^1 + \frac{1}{n} u^p, \ \eta\rangle \geq 1$, o sea

$\langle u^1,\eta\rangle + \frac{1}{n} \langle u^p,\eta \rangle \geq 1 \quad \forall \ n \in N$, luego $\langle u^1,\eta\rangle = y_1 \geq 1$. Por tanto

$$\langle\kappa_s,\eta\rangle = x_1 y_{n_1} + \ldots + x_t y_{n_t} \geq x_1 + \ldots + x_t > 1,$$

y η es solución de Σ .

ii) Las restricciones $\langle u^n,\eta\rangle \geq 1$, $n > 1$, son también redundantes en Σ, ya que si $x_p \longrightarrow 0$ cuando $p \longrightarrow \infty$, siendo $x_p > 0 \ \forall \ p \in N$, el punto $x_p u^1 + u^n \in A\backslash\{u^1\}$ y es distinto de u^n. Por lo que si $\eta \in \ell^\infty$, es solución de

$$\Sigma_n := \{\langle\kappa,\eta\rangle \geq 1 \ , \ \kappa \in A \setminus\{u^1\} \ , \ \kappa \neq u^n, \ \langle u^1,\eta\rangle \geq 0 \ \},$$

se tiene que

$$\langle x_p u^1 + u^n,\eta\rangle \geq 1, \text{ es decir } x_p\langle u^1,\eta\rangle + \langle u^n,\eta\rangle \geq 1,$$

y haciendo que $p \longrightarrow \infty$ tenemos que $\langle u^n,\eta\rangle \geq 1$.

Luego η es solución de Σ .

Como el sistema Σ^s para $\kappa_s = u^n$, $n > 1$ es consistente, ($\eta = (y_p)$ con $y_p = 1 \quad \forall\ p \in N$ es solución), las restricciones $\langle u^n,\eta\rangle \geq 1$ son <u>semi-redundantes</u> en Σ, para $n > 1$.

El sistema Σ^s para $\kappa_s \neq u^n$, $n \in N$ es inconsistente.En efecto, si

$$\kappa_s := x_{n_1} u^{n_1} + \ldots + x_{n_p} u^{n_p} + u^q, \qquad q \geq 1 \ , q \neq n_1, \ldots, n_p$$

entonces cualquier solución η de Σ^s ha de tener $y_p \geq 1$, $p \geq 1$, por lo que $\langle\kappa_s,\eta\rangle \geq x_{n_1} + \ldots + x_{n_p} + 1 > 1$.

iii) Estudiemos el tipo de redundancia de la restricción $\langle\kappa_s,\eta\rangle \geq 1$.

a) Supongamos primero que $q > 1$. Entonces el subsistema finito S_Δ de Σ^s:

$S_\Delta := \{\langle u^{n_1},\eta\rangle \geq 1, \ldots, \langle u^{n_p},\eta\rangle \geq 1, \langle u^q,\eta\rangle \geq 1, \langle\kappa_s,\eta\rangle = 1\}$ es inconsistente, pues si η cumple las (p+1)-desigualdades cuyos segundos miembros son ≥ 1, no puede cumplir la última $\langle\kappa_s,\eta\rangle = 1$, ya que $\langle\kappa_s,\eta\rangle \geq x_{n_1} + \ldots + x_{n_p} + 1 > 1$.

b) Si suponemos ahora que $q = 1$ y que $x_{n_1} + \ldots + x_{n_p} > 1$, en este caso el subsistema finito

$$S_\Delta = \{\langle u^{n_1},\eta\rangle \geq 1, \ldots, \langle u^{n_p},\eta\rangle \geq 1, \ \langle u^1,\eta\rangle \geq 0, \ \langle\kappa_s,\eta\rangle = 1 \ \}$$

es claramente inconsistente.

En los casos a) y b) la restricción $\langle\kappa_s,\eta\rangle \geq 1$ es <u>fuertemente redundante</u>, por ser el sistema Σ^s <u>fuertemente inconsistente</u>, en virtud del **Teorema 0.1**.

c) Supongamos por último que q = 1, y que $0 < x_{n_1} + \ldots + x_{n_p} \leq 1$, entonces el subsistema finito

$$S_{\Delta_2} := \{\langle u^{n_1},\eta\rangle\geq 1, \ldots, \langle u^{n_p},\eta\rangle\geq 1, \langle u^1,\eta\rangle\geq 0, \langle\kappa_s,\eta\rangle = 1, \langle\kappa_{s_n},\eta\rangle\geq 1\},$$

$$\text{donde} \quad \kappa_{s_n} = u^1 + \frac{1}{n}\,(x_{n_1} u^{n_1} + \ldots + x_{n_p} u^{n_p}) \ , \ n\geq 2$$

es inconsistente, pues si $\eta = (y_1,y_2,\ldots,y_m,\ldots) \in \ell^\infty$, fuera solución de S_{Δ_2} , tendríamos:

$$\langle\kappa_s,\eta\rangle = 1 \Leftrightarrow 1 = y_1 + x_{n_1} y_{n_1} + \ldots + x_{n_p} y_{n_p}$$

$$\langle u^{n_i},\eta\rangle \geq 1 \Leftrightarrow y_{n_i} \geq 1 \quad \forall\ i = 1,2,\ldots,p$$

$$\langle\kappa_{s_n},\eta\rangle \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq y_1 + \frac{1}{n}(x_{n_1} y_{n_1} + \ldots + x_{n_p} y_{n_p})$$

lo que implica que $(1-y_1)n \leq 1-y_1$, y como $y_{n_i}\geq 1$, $i = 1,\ldots,p$, se deduce que $0 \leq 1-y_1 \leq 0$, es decir que $y_1 = 1$, y por tanto

$$x_{n_1} y_{n_1} + \ldots + x_{n_p} y_{n_p} = 0.$$

Contradición.
Por tanto la restricción $\langle\kappa_s,\eta\rangle \geq 1$ es fuertemente redundante en Σ también.

iv) Finalmente, la restricción $\langle u^1,\eta\rangle \geq 0$ es débilmente redundante en Σ, puesto que el sistema:

$\Sigma^1 := \{\langle\kappa,\eta\rangle \geq 1,\ \kappa \in A\backslash\{u^1\},\ \langle u^1,\eta\rangle = 0\}$, que es inconsistente, admite a la sucesión $\eta^n := \{\frac{1}{n},n,n,\ldots\}$ de ℓ^∞ , $n \in N$, como solución débil.

Parece conveniente observar que

$$\Sigma_0^s := \{\langle x_j,\varphi\rangle \geq 0,\ j \in J\backslash\{s\}\ ;\ \langle x_s,\varphi\rangle = 0\},$$

carece de soluciones estrictas, por lo que la condición suficiente del **Teorema 0.3** i) no puede utilizarse para clasificar una restricción como débilmente redundante. No obstante, resaltamos que cuando la dimensión de X es finita, la parte ii) de este teorema nos permite afirmar que en las representaciones casi-lineales de conjuntos acotados no puede darse la redundancia débil. En efecto:

Sea el sistema

$$\Sigma := \{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j\ ,\ j \in J,\ x_j \in R^n,\ \varphi \in (R^n)^* = R^n,\ c_j \in R\}$$

consistente, tal que

$$F(\Sigma) := \{\ \varphi \in X^*\ :\ \langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j,\ j \in J\ \}$$

sea un subconjunto acotado. Entonces el cono de recesión de $F(\Sigma)$ es

$$C_{F(\Sigma)} = \{\ \varphi \in X^*\ :\ \langle x_j,\varphi\ \rangle \geq 0\ ,\ j \in J\ \} = \{\theta\}\ ,$$

por lo que el cono de recesión de $F(\Sigma) \cap H_s$ es también $\{\theta\}$,de modo que Σ_0^s sólo tiene la solución trivial y por el **Teorema 0.3** ii), $\langle x_s,\varphi\rangle \geq 0$ no puede ser débilmente redundante.

Si $\dim X = \infty$, supongamos que $F(\Sigma) \neq \emptyset$ sea acotado en X^* y que Σ^s sea inconsistente. Entonces $A := \{\langle x_s,\varphi\rangle\ :\ \varphi \in F(\Sigma)\ \}$ tiene a c_s por cota inferior, y es un conjunto acotado convexo de R, luego es un intervalo acotado. Si $c = \inf A$, puede ocurrir:

i) que exista $\varphi_0 \in F(\Sigma)$, tal que $\langle x_s,\varphi_0\rangle = c$, en cuyo caso $c_s < c$, y la restricción $\langle x_s,\varphi\rangle = c_s$, por ser paralela a $\langle x_s,\varphi\rangle = c$, sería fuertemente redundante. Esto, que ocurre necesariamente en dimensión finita, pues $F(\Sigma)$ es compacto, está ilustrado en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.2

Sea $A := \{\kappa \in \ell^2 : \|\kappa\|_2 \le 1\}$, y consideremos el sistema $\Sigma := \{ \langle\kappa,\eta\rangle \ge -1,\ \|\kappa\|_2 \le 1 \}$, entonces

$$F(\Sigma) := \{ \eta \in \ell^2 : \langle\kappa,\eta\rangle \ge -1 \ ,\ \kappa \in A \} = A^o .$$

Por otra parte

$$A^o = \{ \eta \in \ell^2 : \langle\kappa,\eta\rangle \ge -1 \ ,\ \|\kappa\|_2 = 1 \} ,$$

luego todas las restricciones $\langle\kappa,\eta\rangle \ge -1$ de Σ, con $\|\kappa\|_2 < 1$, son redundantes, y si $\|\kappa_o\|_2 < 1$ y $\eta \in A^o$, se tiene que

$$|\langle\kappa_o,\eta\rangle| \le \|\kappa_o\|_2 . \|\eta\|_2 \le \|\kappa_o\|_2 < 1 ,$$

luego $-1 < -\|\kappa_o\|_2 < \langle\kappa_o,\eta\rangle$, lo que implica que el sistema

$$\Sigma^o := \{\langle\kappa,\eta\rangle \ge -1,\ \kappa \in A\backslash\{\kappa_o\},\ \langle\kappa_o,\eta\rangle = -1\}$$

es inconsistente, y dicha restricción no es semi-redundante.

Sea $\kappa_o := (\frac{1}{2},0,0,\ldots)$; es claro que $\|\kappa_o\|_2 = \frac{1}{2} < 1$ y que $\{\langle\kappa_o,\eta\rangle : \|\eta\|_2 \le 1 \} = \left[-\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right]$. Por tanto, en este caso, la restricción $\langle\kappa_o,\eta\rangle \ge -1$ es fuertemente redundante, ya que el hiperplano en X^*, $\langle\kappa_o,\varphi\rangle = -1$ es paralelo al hiperplano soporte $\langle\kappa_o,\varphi\rangle = -\frac{1}{2}$, que deja al conjunto factible $F(\Sigma)$ en el semiespacio $\langle\kappa_o,\varphi\rangle \ge -\frac{1}{2}$.

---

ii) que no exista $\varphi_o \in F(\Sigma)$ tal que $\langle x_s,\varphi_o\rangle = c$, en cuyo caso para cada $n \in N$ existe $\varphi_n \in F(\Sigma)$ tal que $c_s \le c < \langle x_s,\varphi_n\rangle < c + \frac{1}{n}$. Como $\varphi_n \in F(\Sigma)$, será para cada $j \in J$, $\langle x_j,\varphi_n\rangle \ge c_j$, luego

$$\liminf_n \langle x_j,\varphi_n\rangle \ge c_j \quad \forall\ j \in J\backslash\{s\}, \quad \text{y}$$

$$\liminf_n \langle x_s,\varphi_n\rangle = c.$$

Por tanto, si $c = c_s$, la restricción $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ sería débilmente redundante, pues $\{\varphi_n : n \in N\}$ sería una solución débil del sistema Σ^s. El ejemplo que sigue ilustra esta situación:

EJEMPLO 2.3

Consideremos el par dual $\langle \ell^1, \ell^\infty \rangle$, y dotemos a ℓ^∞ de cualquier topología compatible con el par dual, por ejemplo $\sigma(\ell^\infty, \ell^1) \equiv \tau_s(\ell^1)$, entonces ℓ^1 es el dual continuo de $\ell^\infty[\sigma(\ell^\infty, \ell^1)]$.

Sea $\Sigma := \{\langle \kappa, \eta\rangle \geq -1,\ \|\kappa\|_\infty \leq 1\}$. Entonces

$$F(\Sigma) = \{\ \eta \in \ell^1 :\ \|\eta\|_1 \leq 1\}.$$

$F(\Sigma)$ es absolutamente convexo, cerrado y acotado en ℓ^1, pero no es compacto.

Si $\kappa_0 := (1-1, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, \ldots, 1-\frac{1}{n}, \ldots)$, se tiene que $\|\kappa_o\|_\infty = 1$ y si $\eta \in \ell^1$, $\eta = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1$, entonces $\langle \kappa_o, \eta\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \frac{1}{n})$ está estrictamente comprendido entre -1 y 1, es decir, la imagen de $F(\Sigma)$ mediante la funcional continua κ_o es el intervalo abierto $]-1,1[$.

La restricción $\langle \kappa_o, \eta\rangle \geq -1$ es débilmente redundante, pues el sistema inconsistente

$$\Sigma^o := \{\ \langle \kappa, \eta\rangle \geq -1,\ \kappa \neq \kappa_o,\ \|\kappa\|_\infty \leq 1,\ \langle \kappa_o, \eta\rangle = -1\ \}$$

es débilmente inconsistente, siendo $\{\eta_n : n=1,2,\ldots\}$ una solución débil, donde $\eta_n := (0, \ldots, \overset{(n}{-1}, 0, \ldots)$.

En los sistemas finitos no puede darse tampoco la redundancia débil, pues Σ^s no puede ser, en este caso, débilmente inconsistente.

El concepto de redundancia débil es un concepto de transición entre las otras dos formas de redundancia y, por consiguiente, participa alternativamente de las propiedades de una y otra, según ponen de manifiesto los resultados que siguen.

LEMA 2.1

$\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es fuertemente redundante en Σ si y sólo si existen $\lambda \in R_+^{(J\setminus\{s\})}$, y $\delta > 0$ tales que

$$(x_s, c_s) = \sum_{j\in J\setminus\{s\}} \lambda_j (x_j, c_j) + \delta(\Theta, -1) . \qquad (1)$$

Prueba.-

Si $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es fuertemente redundante, Σ^s es fuertemente inconsistente, y por el **Teorema 0.2** iii)

$$(\Theta, 1) \in \text{cone } \{ (x_j, c_j) , j \in J ; (-x_s, -c_s) \}, \qquad (2)$$

por lo que existen $\gamma \in R_+^{(J)}$ y $\mu \geq 0$ tales que

$$(\Theta, 1) = \sum_{j\in J} \gamma_j (x_j, c_j) - \mu(x_s, c_s) =$$

$$= \sum_{j\in J\setminus\{s\}} \gamma_j (x_j, c_j) + (\gamma_s - \mu) (x_s, c_s) .$$

Si fuese $\gamma_s - \mu \geq 0$, sería Σ fuertemente inconsistente, luego $\gamma_s - \mu < 0$. Denotando $\delta := (\mu - \gamma_s)^{-1}$ y $\lambda_j := \delta \gamma_j$, obtenemos (1).

Recíprocamente, si se cumple (1), puede escribirse

$$(\Theta, 1) = \sum_{j\in J\setminus\{s\}} \delta^{-1} \lambda_j (x_j, c_j) + \delta^{-1} (-x_s, -c_s),$$

por lo que se cumple (2), y Σ^s es fuertemente inconsistente.

■

TEOREMA 2.2

$<x_s,\varphi> \geq c_s$ es fuertemente redundante en Σ si y sólo si, $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es fuertemente redundante en un subsistema finito de Σ.

Prueba.-

Si $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es fuertemente redundante en Σ, aplicando el **Lema 2.1** (cuya notación utilizamos), $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es fuertemente redundante en el sistema finito

$$\{<x_j,\varphi> \geq c_j,\ j \in \text{supp } \lambda;\ <x_s,\varphi> \geq c_s\}$$

Recíprocamente, si $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es fuertemente redundante en el subsistema finito

$\Sigma_\Delta := \{<x_j,\varphi> \geq c_j\ ,\ j \in \Delta\ ;\ <x_s,\varphi> \geq c_s\},\quad \Delta \subset J\backslash\{s\},\ \text{card}(\Delta) < \infty,$ entonces por el **Lema 2.1** existen $\lambda \in R_+^\Delta$ y $\delta > 0$, tales que

$$(x_s,c_s)= \sum_{j\in\Delta} \lambda_j(x_j,c_j) + \delta(\Theta,-1)$$

Definiendo $\lambda_j = 0$ para $j \in (J\backslash\{s\})\backslash\Delta$, obtenemos el $\lambda \in R_+^{(J\backslash\{s\})}$ que nos exige el **Lema 2.1** para concluir que $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es fuertemente redundante en Σ.

■

Para el siguiente resultado requerimos que X sea un espacio normado tal que su dual X^* sea separable (con la topología de la norma).

TEOREMA 2.3

i) Si $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es semi-redundante en Σ, entonces $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es semi-redundante en un subsistema numerable de Σ.

ii) Si $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es débilmente redundante en Σ, entonces $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es débilmente redundante en un subsistema numerable de Σ.

Prueba.-

i) Como X^* es normado separable, y $F(\Sigma) = F(\Sigma_s)$, existe un subconjunto T de $J\setminus\{s\}$, numerable, tal que $F(\Sigma)$ puede representarse como $\{ \varphi \in X^* : <x_j,\varphi> \geq c_j \ , \ j \in T \}$.

Sea $\hat{\Sigma} := \{<x_j,\varphi> \geq c_j, \ j \in T \cup \{s\} \}$. Se tiene que

$$F(\hat{\Sigma}) \subset F(\hat{\Sigma}_s) = F(\Sigma) \subset F(\hat{\Sigma}),$$

de donde $F(\hat{\Sigma}_s) = F(\hat{\Sigma})$, y $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es redundante en $\hat{\Sigma}$.

Además

$$\hat{\Sigma}^s := \{<x_j,\varphi> \geq c_j \ , \ j \in T \ ; \ <x_s,\varphi> = c_s \}$$

es un subsistema del sistema consistente Σ^s , luego la restricción $<x_s,\varphi> \geq c_s$ es semi-redundante en $\hat{\Sigma}$.

ii) Consideremos $T \subset J \setminus \{s\}$ como en i). Es evidente que $<x_s, \varphi> \geq c_s$ no es semi-redundante en $\hat{\Sigma}$, pues $F(\Sigma) \cap H_s = F(\hat{\Sigma}) \cap H_s = \emptyset$.

Tampoco puede ser fuertemente redundante en $\hat{\Sigma}$ por el **Teorema 2.2**, puesto que lo sería en un subsistema finito de $\hat{\Sigma} \subset \Sigma$, lo que obligaría a que $<x_s, \varphi> \geq c_s$ fuese fuertemente redundante en Σ, en contra de la hipótesis.

■

TEOREMA 2.4

Sean $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ y $\langle x_k, \varphi\rangle \geq c_k$ dos restricciones redundantes en Σ.

i) Si $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ no es semi-redundante en Σ, entonces $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ es redundante y no es semi-redundante en Σ_s.

ii) Si $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ y $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ son débilmente redundantes en Σ, también $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ lo es en Σ_s.

iii) Si $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ y $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ son fuertemente redundantes en Σ, también $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ lo es en Σ_s.

Prueba.-

i) En efecto, $H_k \cap F(\Sigma_s) = H_k \cap F(\Sigma) = \emptyset$, luego $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ no es semi-redundante en Σ_s.

iii) Como Σ^k es fuertemente inconsistente, existe un conjunto finito $\Delta \subset J$, $k \in \Delta$, tal que el sistema

$$\{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j \ ,j \in \Delta\setminus \{k\} \ ; \ \langle x_k,\varphi\rangle = c_k\}$$

es inconsistente.

Si $s \notin \Delta$, entonces $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ es fuertemente redundante en Σ_s en virtud del **Teorema 2.2**. Si $s \in \Delta$, al ser $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ redundante en un subsistema finito de Σ (**Teorema 2.2**) existe un conjunto finito $T \subset J$ ($s \notin T$), tal que $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ es fuertemente redundante en el subsistema

$$\{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j \ , \ j \in T \ ; \ \langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s\}$$

(es decir, $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ es consecuencia del sistema

$$\{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j \ , \ j \in T \}).$$

Al ser inconsistente el sistema

$$\{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j \ , \ j \in \Delta \cup T \setminus \{s,k\} \ ; \ \langle x_k,\varphi\rangle = c_k \},$$

la restricción $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ es fuertemente redundante en el subsistema $\{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j \ , \ j \in \Delta \cup T \setminus\{s\} \}$, y siendo éste un subsistema finito de Σ_s , se concluye que $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ es fuertemente redundante en Σ_s.

ii) Dos casos son posibles por i):

1.- $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ es débilmente redundante en Σ_s

2.- $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ es fuertemente redundante en Σ_s.

Descartemos 2. En efecto, si fuera cierto 2, existiría un subconjunto finito $\Delta \subset J \setminus \{s\}$, con $k \in \Delta$, tal que $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ sería fuertemente redundante en $\{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j \ , \ j \in \Delta \}$ por el **Teorema 2.2**, o sea , el sistema $\{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j \ , j \in \Delta \setminus \{s,k\} \ ; \ \langle x_k,\varphi \rangle = c_k\}$ es inconsistente; pero entonces el sistema Σ^k tendría un subsistema finito inconsistente, y por tanto $\langle x_k,\varphi\rangle \geq c_k$ no sería débilmente redundante en Σ, en contra de la hipótesis.

■

TEOREMA 2.5

El conjunto de soluciones de Σ no varía al eliminar (simultáneamente) un conjunto finito arbitrario de restricciones redundantes, no semi-redundantes.

Prueba.-

Razonamos por inducción sobre el cardinal n de las restricciones eliminadas.

Si $n = 1$, el resultado es claro por definición de redundancia. Supongamos que es cierto para $n = k$, y probémoslo para $n = k+1$.

Consideremos pues un conjunto de k+1 restricciones redundantes en Σ, no semi-redundantes. Designemos por Σ_{k+1} el sistema resultante de suprimirlas. Sea $\langle x_{j_o},\varphi\rangle \geq c_{j_o}$ una de estas k+1 restricciones, Σ_1 el sistema que resulta de suprimirla en Σ, y Σ_k el sistema resultante de eliminar de Σ las otras k restricciones. Tenemos que $F(\Sigma) = F(\Sigma_1)$. Ahora bien Σ_{k+1} es el sistema que resulta también al suprimir en Σ_1 las restantes k restricciones, las cuales por el **Teorema 2.4** i) son no semi-redundantes en Σ_1, luego por la hipótesis de inducción

$$F(\Sigma_1) = F(\Sigma_{k+1}) \text{ , y por tanto } F(\Sigma) = F(\Sigma_{k+1}) .$$

■

Sea $E := [F(\Sigma) - F(\Sigma)] \subset X^*$, la envoltura lineal de $F(\Sigma)$-$F(\Sigma)$. El teorema siguiente permite clasificar la restricción $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$, cuando $F(\Sigma^s) \neq \emptyset$ y el subespacio vectorial $E_1 := [F(\Sigma^s) - F(\Sigma^s)] \subset E$, cumple que $\dim (E_1) < \dim (E) - 1$. El enunciado engloba tanto el caso finito como el infinito, observando que en este último caso

$$\dim (E) - 1 = \dim (E).$$

TEOREMA 2.6

Si $F(\Sigma^s) \neq \emptyset$ y $\dim (E_1) < \dim (E) - 1$, entonces

$\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ es semi-redundante en Σ.

Prueba.-

Sea $\gamma := \dim (E)$. Si $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ fuera activa en Σ, existiría una $\varphi_o \in F(\Sigma_s) \setminus F(\Sigma)$ tal que $\langle x_s,\varphi_o\rangle < c_s$. Puesto que

$$\dim (\text{aff } (F(\Sigma) \cup \{\varphi_o\})) \geq \dim (\text{aff } F(\Sigma)) = \gamma ,$$

existirá un conjunto $C \subset F(\Sigma)$, con card $(C) \geq \gamma$, tal que el conjunto

$$B := \{ \varphi - \varphi_o : \varphi \in C \}$$

es un sistema libre en E.

Ya que en el segmento $[\varphi,\varphi_o]$ existe $\Psi_\varphi \in X^*$ tal que $\langle x_s,\Psi_\varphi\rangle = c_s$, encontramos un $\lambda_\varphi > 0$, $\lambda_\varphi \leq 1$, tal que $\Psi_\varphi = \varphi_o + \lambda_\varphi (\varphi - \varphi_o) \in H_s$.

Por otra parte, todo el segmento cerrado $[\varphi,\varphi_o] \subset F(\Sigma_s)$ (por ser $F(\Sigma_s)$ convexo) , luego $\Psi_\varphi \in F(\Sigma^s)$ $\forall\ \varphi \in C$. La familia $\{\Psi_\varphi : \varphi \in C\}$ es afinmente independiente, pues si $\alpha_1,\dots,\alpha_q$ son escalares tales que

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 0 \quad y \quad \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \Psi_{\varphi_i} = \theta ,$$

al ser

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \Psi_{\varphi_i} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i [\varphi_0 + \lambda_{\varphi_i} (\varphi_i - \varphi_0)] = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \lambda_{\varphi_i} (\varphi_i - \varphi_0) ,$$

y puesto que la familia $\{\varphi - \varphi_0 : \varphi \in C\}$ es libre, se tiene que

$$\alpha_i \lambda_{\varphi_i} = 0,\ i = 1,\dots,q,\ \text{es decir}\ \alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0.$$

Por tanto $\dim (E_1) \geq \text{card } (C) \geq \gamma = \dim (E)$.

Contradicción.

∎

Terminaremos esta sección mostrando que, conocer la relación entre las dimensiones de $F(\Sigma)$ y $F(\Sigma^s)$ puede ser útil en algunas ocasiones, pero que no proporciona un criterio para la clasificación de $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ (obsérvese que dos restricciones iguales en Σ son siempre redundantes, cualquiera que sea la dimensión de $F(\Sigma^s)$).

Se sabe que, cuando $F(\Sigma^s) = \emptyset$, $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ es redundante (débil o fuertemente) en Σ. Es fácil ver que $\dim F(\Sigma^s) = \dim F(\Sigma) - 1$ es un caso dudoso: $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ puede ser tanto redundante como activa en Σ, lo que se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo

EJEMPLO 2.4

Sea $\Sigma:=\{<(r,-1),(x_1,x_2)> \geq -1,\ r \geq 1;$

$<(1,0),(x_1,x_2)> \geq 0;$

$<(-1,0),(x_1,x_2)> \geq -3\ \}.$

Considerando la restricción $<(1,0),(x_1,x_2)> \geq 0$, se verifica que $\dim F(\Sigma^s) = \dim F(\Sigma) - 1$, y la restricción es redundante. Mientras que si consideramos $<(-1,0),(x_1,x_2)> \geq -3$, también se verifica $\dim F(\Sigma^s) = \dim F(\Sigma) - 1$, y sin embargo la restricción es activa.

NOTAS.-

2.1.- En la clasificación de las restricciones de un sistema desde el punto de vista de la redundancia, son clases inestables las dos intermedias: las semi-redundantes y las débilmente redundantes. En efecto, en ambos casos una pequeña perturbación en los parámetros correspondientes las puede convertir en activas o fuertemente redundantes.

2.2.- No vale el recíproco del **Teorema 2.3** i), tanto si el subsistema es finito como numerable.

EJEMPLO 2.5 Sea el sistema en R^2

$$\Sigma :=\{<(-1,-1),(x_1,x_2)> \geq 1\ ;<(-1,-1),(x_1,x_2)> \geq 0;$$
$$<(-1,0),(x_1,x_2)> \geq 0\ ;<(0,-1),(x_1,x_2)> \geq 0\ \}.$$

Es fácil verificar que $<(-1,-1),(x_1,x_2)> \geq 0$ es semi-redundante en Σ_1, a pesar de ser fuertemente redundante en Σ.

2.3.- No vale el recíproco del **Teorema 2.3** ii).

EJEMPLO 2.6

Sea $\Sigma :=\{<(-e^t,1),(x_1,x_2)> \geq (1-t)e^t\ ,\ t \in R\ ;$

$<(1,0),(x_1,x_2)> \geq 0\ ;\ <(0,1),(x_1,x_2)> \geq 0\}.$

Puesto que $<(0,1),(x_1,x_2)> \geq 0$ es redundante en el subsistema finito (tómese $t = 0$) :

$\hat{\Sigma} := \{<(-1,1),(x_1,x_2)> \geq 1\ ;<(1,0),(x_1,x_2)> \geq 0\ ;<(0,1),(x_1,x_2)> \geq 0\ \}$

cuyas soluciones satisfacen $<(0,1),(x_1,x_2)> \geq 1$, es evidente que $<(0,1),(x_1,x_2)> \geq 0$ es fuertemente redundante en Σ.

Sin embargo el sistema

$\Sigma_Q := \{<(-e^t,1),(x_1,x_2)> \geq (1-t)e^t, t \in Q;\ <(0,1),(x_1,x_2)> = 0\ \}$

es débilmente inconsistente, por lo que $<(0,1),(x_1,x_2)> \geq 0$ es débilmente redundante en un subsistema numerable de Σ.

2.4.- En el **Teorema 2.3** no puede sustituirse numerable por finito.

EJEMPLO 2.7

$<(0,1),(x_1,x_2)> \geq 0$ no es redundante en ningún subsistema finito de $\{<-e^t,1),(x_1,x_2)> \geq (1-t)e^t\ ,\ t \in R\ ;<(0,1),(x_1,x_2)> \geq 0\ \}$

2.5.- Es posible eliminar secuencialmente restricciones redundantes de un sistema consistente sin alterar su conjunto de soluciones, pero siempre que la restricción a eliminar sea redundante en el sistema reducido, pues debe tenerse en cuenta que una restricción redundante en el sistema inicial puede dejar de serlo después de la reducción. El **Teorema 2.4** prueba que esto último no ocurre cuando la redundancia es fuerte o débil. Lo dicho vale incluso en los sistemas finitos (considérese un sistema formado por una inecuación no trivial y un múltiplo positivo de la misma).

2.6.- En el caso finito puede eliminarse en bloque todas las restricciones fuertemente redundantes y alcanzar sistemas minimales al eliminar secuencialmente las "semi-redundantes" (el orden en que son escogidas las restricciones semi-redundantes en el sistema inicial determina el sistema minimal resultante del proceso; véase [14]. Las cosas no son tan simples en el caso de sistemas de infinitas inecuaciones. Aunque el sistema carezca de restricciones semi-redundantes, puede ser imposible alcanzar un subsistema minimal equivalente. Hablando con más precisión, la eliminación simultánea de restricciones débilmente o fuertemente redundantes, en cantidad no finita, puede alterar sustancialmente el conjunto de soluciones. Esto es así incluso en el mejor de los casos, i.e. cuando existe un conjunto de restricciones fuertemente redundantes.

EJEMPLO 2.8

$\Sigma := \{ -x \geq 0;\ x \geq -\frac{1}{r},\ r = 1,2,\ldots \}$ es una representación lineal del origen. Al ser $\Sigma_o^r = \{x = 0\}$ para $r = 1,2,\ldots$,del **Teorema 0.3** ii) se deduce que todas las restricciones, excepto $-x \geq 0$, son fuertemente redundantes en Σ. Pero su eliminación simultánea conduce a una representación lineal del intervalo $]-\infty,0]$.

CAPíTULO 3.

REDUNDANCIA EN SISTEMAS FARKAS-MINKOWSKI (FM) Y EN SISTEMAS FINITOS

Esta sección está dedicada al estudio de la redundancia en los sistemas FM y, en particular, en los sistemas finitos.

DEFINICIóN 3.1

Un sistema consistente $\Sigma := \{ \langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j,\ j \in J \}$ se dice que es de **Farkas-Minkowski (FM)** si la cuña $K(\Sigma)$ asociada a Σ es cerrada. Equivalentemente (en virtud del **Teorema 0.4**), un sistema consistente Σ es FM si toda inecuación que es consecuencia de Σ es también consecuencia de un subsistema finito

Sea Σ un sistema consistente cualquiera:

$$\Sigma := \{ \langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j,\ j \in J \}.$$

Una forma natural de abordar la clasificación de la restricción $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ en Σ, consiste en asociarle el problema (P_s) de Programación Infinita Lineal (P.I.L.) siguiente:

$$(P_s)\ \mathrm{Inf}\ \{\langle x_s,\varphi\rangle, \varphi \in F(\Sigma_s)\}$$

Denotaremos por $v(P_s)$ el valor de P_s. Obviamente la inecuación $\langle x_s,\varphi\rangle \geq \gamma$ es consecuencia de Σ_s si y sólo si $\gamma \leq v(P_s)$.

Las propiedades de P_s sólo permiten clasificar groseramente la restricción $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ como redundante o activa. La clasificación completa sólo es posible para ciertas clases de sistemas.

TEOREMA 3.1

i) $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es activa en Σ si y sólo si $v(P_s) < c_s$.

ii) $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es semi-redundante en Σ si y sólo si $v(P_s) = c_s$ y P_s es resoluble.

iii) $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es débilmente redundante en Σ si $v(P_s) = c_s$ y P_s no es resoluble.

iv) Si $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es fuertemente redundante en Σ, entonces $v(P_s) > c_s$.

Prueba.-

i) $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es activa en Σ si y sólo si existe $\varphi_1 \in F(\Sigma_s)$ tal que $\langle x_s, \varphi_1\rangle < c_s$, en cuyo caso $v(P_s) \leq \langle x_s, \varphi_1\rangle < c_s$.
El recíproco es trivial.

ii) $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es semi-redundante en Σ si y sólo si $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es consecuencia de Σ_s y $F(\Sigma_s) \cap H_s \neq \emptyset$. Por lo primero $c_s \leq v(P_s)$ y por lo segundo $\exists\ \varphi_2 \in F(\Sigma_s) \cap H_s$ tal que $\langle x_s, \varphi_2\rangle = c_s$, de donde concluimos que $v(P_s) = c_s$.
El recíproco también es inmediato.

Para concluir la prueba basta probar iv). Por el **Lema 2.1** existen $\lambda \in R_+^{(J\setminus\{s\})}$ y $\delta > 0$, tales que:

$$(x_s, c_s) = \sum_{j \in J\setminus\{s\}} \lambda_j (x_j, c_j) + \delta(\Theta, -1). \tag{1}$$

Sea $\hat{\varphi}$ una solución arbitraria de Σ_s, multiplicando por $(\hat{\varphi}, -1)$ ambos miembros de (1), se obtiene:

$$\langle x_s,\hat{\varphi}\rangle - c_s = \sum_{j\in J\setminus\{s\}} \lambda_j(\langle x_j,\hat{\varphi}\rangle - c_j) + \delta \geq \delta > 0$$

De donde $v(P_s) \geq c_s + \delta > c_s$.

■

COROLARIO 3.1.1

$\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ es redundante en Σ si y sólo si $v(P_s) \geq c_s$.

COROLARIO 3.1.2

Si Σ_s es FM, se tiene:

i) $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ es activa en Σ si y sólo si $v(P_s) < c_s$.

ii) $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ es semi-redundante en Σ si y sólo si $v(P_s) = c_s$ y P_s es resoluble.

iii) $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ es débilmente redundante en Σ si y sólo si $v(P_s) = c_s$ y P_s no es resoluble.

iv) $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s$ es fuertemente redundante en Σ si y sólo si $v(P_s) > c_s$.

Prueba.-

Bastará demostrar el recíproco del **Teorema 3.1** iv). Sea $\delta = v(P_s) - c_s > 0$. Como la restricción $\langle x_s,\varphi\rangle \geq c_s + \delta$ es consecuencia de Σ_s, por el **Teorema 0.4** , $(x_s,c_s+\delta) \in \mathrm{cl}\, K(\Sigma_s) = K(\Sigma_s)$ (por ser Σ_s, FM), luego existen $\lambda \in R_+^{(J\setminus\{s\})}$ y $\mu \geq 0$, tales que

$$(x_s,c_s+\delta)=\sum_{j\in J\setminus\{s\}} \lambda_j(x_j,c_j) + \mu(\Theta,-1),$$

es decir

$$(x_s, c_s) = \sum_{j\in j\setminus\{s\}} \lambda_j (x_j, c_j) + (\mu+\delta)(\Theta, -1) ,$$

lo que , por el **Lema 2.1**, nos indica que $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es fuertemente redundante en Σ.

■

Desde luego, si Σ es finito, puede aplicarse el **Corolario 3.1.2**, bien entendido que iii) no se da nunca.

Aplicaremos ahora la teoría de la dualidad en P.I.L. (ver [7] **Remarks 2.1**, pag.138), para obtener condiciones más operativas. Tales condiciones involucran el conjunto siguiente:

$$\Gamma := \{ \gamma \in R^{(J)} : \gamma_s = -1;\ \gamma_j \geq 0,\ j \in J\setminus\{s\} \}$$

Consideremos, para evitar repeticiones innecesarias, las proposiciones:

(A) Existe un $\gamma \in \Gamma$ que satisface $\sum_{j\in J} \gamma_j x_j = \Theta$ (1)

y $\sum_{j\in J} \gamma_j c_j = 0$ (2)

(B) Existe un $\gamma \in \Gamma$ que satisface (1), y $\sum_{j\in J} \gamma_j c_j > 0$ (3)

TEOREMA 3.2

i) Se verifica (B) si y sólo si $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es fuertemente redundante.

ii) Si se verifica (A) y no (B), entonces $\langle x_s, \varphi\rangle \geq c_s$ es semi-redundante o débilmente redundante.

Prueba.-

i) Es consecuencia del **Lema 2.1**.

ii) Por ser falso (B), se tiene que $x_s = \sum_{j\in J\setminus\{s\}} \lambda_j x_j$ implica que

$$\sum_{j\in J\setminus\{s\}} \lambda_j c_j \le c_s, \text{ cualquiera que sea } \lambda \in R_+^{J\setminus\{s\}}.$$

Por tanto, $v(D_s) \le c_s$, si representamos por D_s el problema dual de P_s. Al cumplirse (A), $v(D_s) = c_s$ (siendo además D_s resoluble). Entonces por el teorema de dualidad de Golštein [8,pag.94], tenemos que $c_s \le v(P_s)$, y por el **Corolario 3.1.1** $\langle x_s,\varphi\rangle \ge c_s$ es redundante en Σ, no pudiendo ser fuertemente redundante por i).

■

COROLARIO 3.2.1

Supongamos que Σ_s es FM. Se tiene:

i) $\langle x_s,\varphi\rangle \ge c_s$ es semi-redundante o débilmente redundante en Σ, si y sólo si se verifica (A) y no (B).

ii) $\langle x_s,\varphi\rangle \ge c_s$ es fuertemente redundante en Σ, si y sólo si existe una $\gamma \in \Gamma$ que satisface (B).

Prueba.-

Bastará demostrar el recíproco de ii) en el **Teorema 3.2**. Por el **Corolario 3.1.2** ii) y iii), $v(P_s) = c_s$ y P_s será resoluble o no. Por otra parte la inecuación $\langle x_s,\varphi\rangle \ge c_s$ es consecuencia de Σ_s (por ser $c_s \le v(P_s)$), y por ser Σ_s FM, es $(x_s,c_s) \in K(\Sigma_s)$, luego existen un $\gamma \in R_+^{J\setminus\{s\}}$ y $\mu \ge 0$ tales que:

$$(x_s, c_s) = \sum_{j\in J\setminus\{s\}} \gamma_j (x_j, c_j) + \mu(\Theta, -1), \quad \text{de donde}$$

$$c_s \le \sum_{j\in J\setminus\{s\}} \gamma_j c_j \le v(D_s).$$

Por tanto $v(P_s) = v(D_s)$ y D_s es resoluble, siendo $\gamma \in R_+^{J\setminus\{s\}}$ una solución de D_s, luego $\sum_{j\in\setminus\{s\}} \gamma_j c_j - c_s = 0$, de donde (poniendo $\gamma_s = -1$) tenemos que:

$$\sum_{j\in J} \gamma_j c_j = 0, \text{ o sea la condición } (2).$$

Además $x_s = \sum_{j\in J\setminus\{s\}} \gamma_j x_j$, luego $\sum_{j\in J} \gamma_j x_j = \Theta$ poniendo $\gamma_s = -1$, por tanto se verifica (A).

Si suponemos ahora que $\gamma \in \Gamma$ y cumple (1), como $v(D_s) = c_s \ge \sum_{j\in J\setminus\{s\}} \gamma_j c_j$, entonces $\sum_{j\in J} \gamma_j c_j \le 0$.

Luego se cumple no (B).

■

Una vez más, si Σ es finito o $F(\Sigma)$ es compacto (y Σ_s FM), obtenemos un criterio de clasificación:

i) caracteriza a las restricciones semi-redundantes, y

ii) a las fuertemente redundantes,

mientras que

$$\sum_{j\in J} \gamma_j x_j = \Theta \implies \sum_{j\in J} \gamma_j c_j < 0$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, caracteriza a las restricciones activas en Σ.

También se deduce, en particular, para tales sistemas que $\langle x, \varphi_s \rangle \ge c_s$ es redundante en Σ si y sólo si existe un $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\sum_{j\in J} \gamma_j x_j = \Theta \quad \text{y} \quad \sum_{j\in J} \gamma_j c_j \ge 0 .$$

Para poner de manifiesto la potencia de los resultados anteriores derivaremos, a partir de ellos, dos de los criterios más utilizados para identificación y eliminación de restricciones redundantes en sistemas finitos, empezando por el denominado "criterio general" de Cheng [1].

COROLARIO 3.2.2

Sean $\mathcal{A}$ una matriz mxn (cuyas filas denotamos por $A_1, \ldots, A_m : A_i \in R^n$, $i=1,\ldots,m$) y $b \in R^m$. Supongamos consistente el sistema $\Sigma := \{ \mathcal{A}x \le b;\ x \ge \Theta_n \}$. La restricción $\langle A_k^t, x\rangle \le b_k$ es redundante en Σ si y sólo si existen escalares $\theta_i \ge 0$, $i = 1,\ldots,m$, con $\theta_k = 0$, tales que

$$A_k = \sum_{i=1}^{m} \theta_i A_i \quad \text{y} \quad b_k \ge \sum_{i=1}^{m} \theta_i b_i$$

Prueba.-

Basta aplicar la última observación al sistema

$$\Sigma = \{ \langle -A_i^t, x\rangle \ge -b_i \ ,\ i = 1,\ldots,m;\ x \ge 0_n \}$$

■

La presencia de restricciones de igualdad en Σ no impide aplicar el **Teorema 3.2**, según se pone de manifiesto a continuación.

COROLARIO 3.2.3

Dado el sistema consistente $\Sigma := \{ \mathcal{A}x = a;\ \mathcal{B}x \le b\}$, donde $\mathcal{A}$ (mxn), $\mathcal{B}$ (pxn), $a \in R^m$ y $b \in R^p$, $<\mathcal{B}_k^t, x> \le b_k$ es redundante en Σ si y sólo si existen vectores $w \in R^m$ y $v \in R^p$ tales que

$$\mathcal{A}^t w + \mathcal{B}^t v = \Theta$$
$$a' w + b' v \le 0$$
$$v_i \ge 0, \quad \forall\, i \ne k$$
$$v_k = -1$$

Prueba.-

Reformulando el sistema en la forma $\ge$, la condición de redundancia se reduce a la existencia de escalares $\alpha_i (i = 1,\dots,m)$ y $\gamma_j (j = 1,\dots,p)$, con $\gamma_k = -1$ y $\gamma_j \ge 0$ $j \ne k$, tales que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j B_j = \Theta \quad y \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j b_j \le 0,$$

bastando tomar $w = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)^t$ y $v = (\gamma_1,\dots,\gamma_p)^t$.

■

NOTAS

3.1.- En las proposiciones iii) y iv) del **Teorema 3.1** los recíprocos son generalmente falsos. En otras palabras, no es supérflua la hipótesis del **Corolario 3.1.2**.

EJEMPLO 3.1

Sea Σ el sistema en R^2 definido por:

$\Sigma = \{ <(-e^t,1),(x_1,x_2)> \ge (1-t)e^t,\ t \in R;\ <(0,1),(x_1,x_2)> \ge -1\}$.

Se comprueba que $x_2 \ge -1$ es débilmente redundante en Σ, mientras que $v(P_s) = 0 > -1$, no siendo P_s resoluble.

Volver al Indice/Tornar a l'index

3.2.- Tampoco es válido, en general, el recíproco del **Teorema 3.2** ii).

EJEMPLO 3.2

Sea $\Sigma = \{ x \geq - \frac{1}{r},\ r = 1,2,\ldots;\ x \geq 0 \}$. $x \geq 0$ es semi-redundante en Σ. No se cumple, sin embargo, (A) al ser imcompatibles (1) y (2), es decir:

$$\sum_{r=1} \gamma_r = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{r=1} (-r)^{-1} \gamma_r = 0 \ , \ \gamma_r \geq 0, \ r = 1,2,\ldots$$

3.3.- El **Corolario 3.2.2** es valorado de esta forma por su autor: "Esta caracterización general no sólo unifica algunas de las técnicas existentes para identificar restricciones redundantes (en sistemas finitos), sino que proporciona también bases teóricas para tales técnicas". En apoyo de esta afirmación muestra Cheng [1] cómo ciertos resultados de Thompson, Tonge y Zionts [15], Eckhardt [3], Gal [5] y Telgen [13], son consecuencias inmediatas del **Corolario 3.2.2**. Lo que omite Cheng es que pueden eliminarse simultáneamente todas aquellas restricciones en que la desigualdad $b_k \geq \sum_{i=1} \theta_i b_i$ es estricta. Los sistemas como los del enunciado del **Corolario 3.2.2** son los estudiados en el exhaustivo "survey" de Karwan, Lofti, Telgen y Zionts [9] acerca de la redundancia en sistemas lineales finitos.

3.4.- El **Corolario 3.2.3** es el Teorema 2.2 en Telgen [14], resultado que tampoco permite distinguir entre restricciones semi-redundante y fuertemente redundantes.

CAPÍTULO 4.

ESTABILIDAD

Sea X un espacio vectorial topológico, localmente convexo, Hausdorff, y metrizable, cuya topología viene definida por una sucesión (creciente) $\mathfrak{N}$ de seminormas $\{p_n : n \in N\}$ continuas. Entonces sabemos que la topología τ de X está definida por la métrica

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \right) \frac{1}{2^n} \quad ,$$

que es invariante por traslación,([17], pag.214, ej.5).

Por X^* denotaremos el dual continuo de $X[\tau]$, al que supondremos dotado de la topología débil $\sigma(X^*,X)$.

Dado un subconjunto arbitrario de índices $J \neq \emptyset$, consideremos las funciones: $x : J \longrightarrow X$, $j \longrightarrow x_j$, $c : J \longrightarrow R$, $j \longrightarrow c_j$, con lo que tenemos que $(x,c) \in X^J \times R^J := \Theta$.

A cada par $(x,c) \in \Theta$, le asociamos el sistema de desigualdades lineales $\Sigma := \{\langle x_j, \varphi\rangle \geq c_j \ , \ j \in J\}$, $\varphi \in X^*$, e identificamos los pares (x,c) con los sistemas Σ.

La primera parte de este capítulo está dedicada al estudio de la estabilidad de sistemas Σ en los que se permite perturbar arbitrariamente todos los coeficientes en todas las restricciones. Para definir el tamaño de una perturbación, vamos a establecer una pseudométrica δ en Θ, que definirá el espacio de parámetros (o de sistemas) (Θ,δ).

$$\text{Si } \Sigma_1,\Sigma_2 \in \Theta, \text{ siendo } \begin{cases} \Sigma_1 := (x,c) := \{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j \ , \ j\in J\} \\ \Sigma_2 := (y,d) := \{\langle y_j,\varphi\rangle \geq d_j \ , \ j\in J\} \end{cases}$$

definimos $\delta : \Theta \times \Theta \longrightarrow [0,+\infty]$ así:

$$(\Sigma_1,\Sigma_2) \longrightarrow \delta(\Sigma_1,\Sigma_2)$$

$$\delta(\Sigma_1,\Sigma_2) := \sup_{j\in J} \{\max\ [d(x_j,y_j), |d_j-c_j|]\}$$

Es claro que δ es una pseudométrica que define una topología Hausdorff en Θ, que satisface el primer axioma de numerabilidad. En lo que sigue se considera a R^J identificado con el subespacio (θ_J,c) de (Θ,δ), en donde $\theta_J : \begin{array}{l} J \longrightarrow X \\ j \longrightarrow \theta_J(j)=\theta \end{array}$, o sea R^J es un espacio pseudométrico, siendo $\delta(f,g) := \sup_{j\in J} |f_j - g_j|$.

Asociamos a cada sistema dado Σ su conjunto factible $F(\Sigma) \subset X^*$ y las cuñas ("wedges") definidas en el **Capítulo 0** (pag.7).

Denotaremos por **LC**, **LW** y **LS** los subconjuntos de Θ correspondientes a "sistemas consistentes", "débilmente inconsistentes" y "fuertemente inconsistentes" respectivamente. De acuerdo con el **Teorema 0.2**, $\Sigma \in$ LC (LW,LS) si y sólo si $(\theta,1) \notin$ clM [$(\theta,1) \in$ clM\M , $(\theta,1) \in$ M , respectivamente].

El conjunto de los "sistemas inconsistentes" será representado por **LI** = LW $\cup$ LS.

Uno de nuestros propósitos es la caracterización del interior (respecto a la δ-topología de Θ), de los conjuntos anteriores. La respuesta dada a esta cuestión está íntimamente relacionada con el motivo principal: el estudio de las propiedades de continuidad de la **aplicación conjunto factible**

$$\begin{aligned} F : \Theta &\longrightarrow 2^{X^*} \\ \Sigma &\longrightarrow F(\Sigma) \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 4.1

Sean X e Y espacios vectoriales topológicos, localmente convexos y de Hausdorff, y sea $S : X \longrightarrow 2^Y$ una función de conjunto.

1. S se dice **semicontinua superiormente** en el punto $x_0 \in X$ si y sólo si, para cada conjunto abierto W de Y, con $S(x_0) \subset W$, existe un conjunto abierto V en X, con $x_0 \in V$, tal que $S(x) \subset W$, para cada $x \in V$.

2. S es **semicontinua inferiormente** en el punto $x_0 \in X$, si y sólo si para cada conjunto abierto W de Y, tal que $W \cap S(x_0) \neq \emptyset$, existe un conjunto abierto V en X, $x_0 \in V$, tal que $S(x) \cap W \neq \emptyset$ para todo $x \in V$.

3. S es **cerrada** en el punto $x_0 \in X$, si sólo si para cada par de redes $(x_\alpha) \subset X$ e $(y_\alpha) \subset Y$, que satisfacen $x_\alpha \longrightarrow x_0$ en X, $y_\alpha \longrightarrow y_0$ en Y, con $y_\alpha \in S(x_\alpha)$ para todo α, se tiene que $y_0 \in S(x_0)$.

NOTA 4.1. La aplicación conjunto factible $\begin{aligned} F : \Theta &\longrightarrow 2^{X^*} \\ \Sigma &\longrightarrow F(\Sigma) \end{aligned}$ no es cerrada en general, como lo prueba el siguiente

EJEMPLO 4.1. Sea $X := \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n = R$ para todo n, la suma directa de una sucesión de espacios iguales a R, con la topología usual, considerada como subespacio topológico de $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$.

Cada elemento $\hat{x} \in X$ puede considerarse como un elemento de X^*. Sea $X_0 \subset X$ el conjunto de los $x = (1, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, en donde los x_n no nulos están en $[\frac{1}{2}, 1]$. Sea $J \neq \emptyset$ tal que card J = card X_0, con lo que cada $x \in X_0$ se puede representar por un $x_j = (1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n}, \ldots)$ para $j \in J$.

Consideremos el sistema $\Sigma_1 := \{\langle x_j, \varphi\rangle \geq 1 \ , \ j \in J\}$, $\varphi \in X^*$ y definamos $\Sigma_n := \{\langle x_j^{(n)}, \varphi\rangle \geq 1 \ , \ j \in J\}$, siendo

$$x_j^{(n)} = \begin{cases} (1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-1}}, nx_{j_n}, x_{j_{n+1}}, \ldots) & \text{si } x_{j_n} \neq 0 \\ (1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-1}}, n, x_{j_{n+1}}, \ldots) & \text{si } x_{j_n} = 0 \end{cases} \qquad j \in J$$

para n>1.

$$\text{Sea} \quad \varphi_n := (\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0, \overset{(n}{\frac{2}{n}}, 0, \ldots) \quad \text{para} \quad n>1.$$

Entonces $\varphi_n \in F(\Sigma_n)$ n>1, pues $\langle x_j^{(n)}, \varphi_n\rangle = \begin{cases} \frac{1}{n} + 2x_{j_n} > 1 \\ \frac{1}{n} + 2 \ \ > 1 \end{cases}$.

Veamos que $\tau_s(X)\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = \theta$ (función cero de X^*); para ello sea $x \in X$, y vemos que $\langle x, \varphi_n\rangle = \frac{x_1}{n} + \frac{2x_n}{n} \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$. Entonces tenemos que $\Sigma_n \xrightarrow{\delta} \Sigma_1$, que $\varphi_n \in F(\Sigma_n)$ y $\varphi_n \longrightarrow \theta \notin F(\Sigma_1)$. Luego F no es cerrada.

Si suponemos que X es un B-espacio reflexivo y que X^* tiene la topología fuerte, entonces en este caso $F : \Theta \longrightarrow 2^{X^*}$ es cerrada. En efecto, la aplicación bilineal $\begin{array}{ccc} X\times X^* & \longrightarrow & R \\ (x,\varphi) & \longrightarrow & \langle x,\varphi\rangle \end{array}$ es entonces continua, ya que es separadamente continua ([10],40.2.1,pag.158), y se tiene que si $\Sigma_n \xrightarrow{\delta} \Sigma_1$, esto obliga a que $x_j^{(n)} \longrightarrow x_j$ en X, y que $d_j^{(n)} \longrightarrow c_j$ en R, para cada $j \in J$, y si además $\varphi_n \in F(\Sigma_n)$ y $\varphi_n \longrightarrow \varphi_1$ en X^*, entonces $(x_j^{(n)},\varphi_n) \longrightarrow (x_j,\varphi_1)$ en $X\times X^*$, lo que por la continuidad de la forma bilineal, implica que $\langle x_j^{(n)},\varphi_n\rangle \longrightarrow \langle x_j,\varphi_1\rangle$ en R, y como $\langle x_j^{(n)},\varphi_n\rangle \geq d_j^{(n)}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_j^{(n)},\varphi_n\rangle \geq \lim\limits_{n\to\infty} d_j^{(n)}$, es decir $\langle x_j,\varphi_1\rangle \geq c_j$ para cada $j \in J$, luego $\varphi_1 \in F(\Sigma_1)$ y F es cerrada.

Sea $\Sigma^0 := \{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j \ , \ j \in J\}$.

DEFINICIóN 4.2

a) Σ^0 satisface la "**condición de Slater**" si existe $\bar{\varphi} \in X^*$ tal que $\langle x_j,\bar{\varphi}\rangle > c_j \quad \forall j \in J$.

b) Σ^0 satisface la "**condición fuerte de Slater**" si existe un escalar $\varepsilon>0$ y un $\bar{\varphi} \in X^*$ (llamado **elemento SS**) tal que $\langle x_j,\bar{\varphi}\rangle \geq c_j + \varepsilon$, $\forall j \in J$.

c) Σ^0 es "**no crítico**" (en el sentido de Tuy) si $0_J \notin bd[S(X^*)-R_+^J]$, donde $\begin{array}{cccc} S : & X^* & \longrightarrow & R^J \\ & \varphi & \longrightarrow & S(\varphi) \end{array}$, $\Big(S(\varphi)\Big)_j := \langle x_j,\varphi\rangle - c_j$, R_+^J es el cono positivo de R^J $(:= \{f : f_j \geq 0 \quad \forall j \in J\})$, y $\begin{array}{cccc} 0_J : & J & \longrightarrow & R \\ & j & \longrightarrow & 0_J(j) = 0 \end{array}$.

d) Σ^0 es "**regular**" (en el sentido de Robinson) si $c \in \mathrm{int}[S_0(X^*)-R^J_+]$, donde $S_0 : X^* \longrightarrow R^J$ se define $\left(S_0(\varphi)\right)_j = \langle x_j,\varphi\rangle$, es decir si perturbaciones suficientemente pequeñas de las funciones $c = (c_j)_{j\in J}$ no afectan la consistencia del sistema.

e) $F : \Theta \longrightarrow 2^{X^*}$ es "**R-estable**" en Σ^0 (en el sentido de Robinson), si Σ^0 es consistente y para cada $\varphi^0 \in F(\Sigma^0)$ y cada seminorma p_n, n=1,2,..., de las que definen la topología de X, existen $\varepsilon,\beta > 0$ (dependientes de φ^0 y p_n) , tales que se verifique la desigualdad

$d_n[\varphi^0,F(\Sigma)] \le \beta.v(\varphi^0,\Sigma)$, para todo Σ tal que $\delta(\Sigma^0,\Sigma) < \varepsilon$, siendo

$$d_n[\varphi^0,F(\Sigma)] := \inf_{\varphi\in F(\Sigma)} \{\sup[|\langle\varphi^0-\varphi,x\rangle| : p_n(x) \le 1]\}$$

y $d_n[\varphi^0,F(\Sigma)] := +\infty$ si $F(\Sigma) = \emptyset$, y donde si $\Sigma:=\{\langle y_j,\varphi\rangle \ge d_j, j \in J\}$

$$v(\varphi^0,\Sigma) := \max\{0,\sup_{j\in J} (d_j - \langle y_j,\varphi^0\rangle)\} \in [0,+\infty]$$

es una medida de la no factibilidad, para Σ, del punto φ^0.

SISTEMAS CONSISTENTES

Establecemos ahora los resultados principales de este capítulo.

Sea $\Sigma^0 := \{\langle x_j,\varphi\rangle \ge c_j , j \in J\}$ un sistema consistente dado. Consideremos los siguientes enunciados:

i) F es semicontinua inferiormente en Σ^0.

ii) $\Sigma^0 \in \mathrm{int}\, LC$.

iii) Σ^0 es no crítico.

iv) Σ^0 es regular.

v) $(\Theta,0) \notin \mathrm{cl}[\mathrm{conv}\{(x_j,c_j) : j \in J\}]$ en $X\times R$.

vi) Σ^0 satisface la condición fuerte de Slater.

vii) F es R-estable en Σ^0.

TEOREMA 4.1

Los enunciados i) a vi) son equivalentes.

Prueba.-

i) $\Rightarrow$ ii). Si F es semicontinua inferiormente en Σ^0, para cada conjunto abierto $W \subset X^*$ tal que $W \cap F(\Sigma^0) \neq \emptyset$, existe un conjunto abierto V en Θ con $\Sigma^0 \in V$, tal que $F(\Sigma) \cap W \neq \emptyset$ para todo $\Sigma \in V$, luego $\Sigma^0 \in \mathrm{int}\ LC$ en Θ.

ii) $\Rightarrow$ iii). En efecto, sea $\varepsilon>0$ tal que $\bar{B}(\Sigma^0,\varepsilon) \subset LC$, y sea

$\Sigma \in \bar{B}(\Sigma^0,\varepsilon)$. Sea $f : J \longrightarrow R$ tal que $|f_j| \leq \varepsilon \quad \forall j \in J$.

Puesto que

$$\Sigma_1 := \{\langle x_j,\varphi\rangle \geq c_j + f_j \ , \ j \in J\} \in \bar{B}(\Sigma^0,\varepsilon) \subset LC ,$$

podemos tomar algún $\varphi_1 \in F(\Sigma_1)$. Entonces

$$p_j := \langle x_j,\varphi_1\rangle - c_j - f_j \geq 0 \quad \text{para todo } j \in J, \text{ es decir}$$

$$f_j = \langle x_j,\varphi_1\rangle - c_j - p_j \ , (\text{siendo } \langle x_j,\varphi_1\rangle - c_j = [S(\varphi_1)]_j \ ).$$

Luego la función $f \in S(X^*)-R^J_+$, es decir, la bola cerrada de centro la función 0_J y radio ε en R^J, está contenida en $S(X^*)-R^J_+$.

Luego $0_J \notin \mathrm{bd}\ [S(X^*)-R^J_+]$.

iii) $\Rightarrow$ iv). Puesto que Σ^0 es consistente y no crítico, se verifica que la función $0_J \in \operatorname{int}[S(X^*)-R_+^J]$. Entonces existirá un $\varepsilon > 0$ tal que $f \in S(X^*)-R_+^J$, si $|f_j| \le \varepsilon \quad \forall j \in J$. Para una tal función f, se tiene que $(c+f):= \left(c_j+f_j\right)_{j\in J} \in S_0(X^*)-R_+^J$, o sea que $c \in \operatorname{int}\ [S_0(X^*)-R_+^J]$.

iv) $\Rightarrow$ v). Supongamos que Σ^0 es regular y que

$$(\Theta,0) \in \operatorname{cl}\operatorname{conv}\{(x_j,c_j) : j \in J\} \subset X\times R.$$

Entonces existe una sucesión $\{ \lambda_n : n \in N \}$ en el cono convexo $R_+^J \subset R^J$, de sucesiones finitas positivas (funciones reales no negativas sobre J que se anulan en todas partes excepto sobre un subconjunto finito de J), tales que $\sum_{j\in J} \lambda_{nj} = 1,\ n \in N$, y

$$(\Theta,0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J} \lambda_{nj}(x_j,c_j).$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ dado, tal que $c+f \in S_0(X^*)-R_+^J$, para cualquier $f : J \longrightarrow R$ tal que $\sup\{|f_j| : j \in J\} \le \varepsilon$. En particular, si $f_j := \varepsilon$ $\forall j \in J$, el sistema $\Sigma_\varepsilon := \{\langle x_j,\varphi\rangle \ge c_j+\varepsilon\ ,\ j \in J\} \in LC$. Pero

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J} \lambda_{nj}(x_j,c_j+\varepsilon) = (\Theta,\varepsilon),$$

por tanto $(\Theta,\varepsilon) \in \operatorname{cl} M(\Sigma_\varepsilon)$, lo cual es una contradicción.

v) $\Rightarrow$ vi). La consistencia de Σ^0 nos permite separar $(\Theta,1)$ de $\operatorname{cl} M(\Sigma^0)$, y por v) podemos separar fuertemente $(\Theta,0)$ de $\operatorname{conv}\{(x_j,c_j) : j \in J\}$ ([8] 11F. Cor.).

Sea $\Phi:= (\varphi;t)$, $\varphi \in X^*$, $t \in R$, tal que $\langle(\Theta,1),\Phi\rangle < 0$ (equivale a tomar $t < 0$) y $\langle(x_j,c_j),\Phi\rangle \ge 0 \quad \forall j \in J$. Análogamente, sea $\Psi:= (\psi;s)$, $\psi \in X^*$, $s \in R$ y $\delta > 0$ tal que $\langle(x_j,c_j),\Psi\rangle \ge \delta > 0 \quad \forall j \in J$.

Consideremos ahora un punto $\Omega := (\omega; r) \in \{ \Psi + \alpha\Phi : \alpha \geq 0 \} \subset X^* \times R$, tal que $r < 0$. Entonces para $\bar{\varphi} := - \frac{1}{r}\omega$, se tiene que

$$\langle x_j, \bar{\varphi}\rangle - c_j = - \frac{1}{r} \langle (x_j, c_j), \Omega\rangle \geq - \frac{\delta}{r} > 0, \ \forall j \in J,$$

por tanto $\bar{\varphi}$ es un elemento SS para Σ^0.

vi) $\Rightarrow$ i). Sea $\bar{\varphi} \in X^*$, tal que $\langle x_j, \bar{\varphi}\rangle \geq c_j + \varepsilon \quad \forall j \in J$, y cierto $\varepsilon > 0$. Sea $W \subset X^*$ un conjunto abierto tal que $W \cap F(\Sigma^0) \neq \emptyset$. Demostraremos que $W \cap F(\Sigma^0)$ contiene un elemento SS para Σ^0 .

Tomemos un $\psi \in W \cap F(\Sigma^0)$ y consideremos $\omega := (1-\lambda)\ \psi + \lambda\bar{\varphi}$, para algún $\lambda \in]0,1]$, tal que $\omega \in W \cap F(\Sigma^0)$. Se tiene

$$\langle x_j, \omega\rangle = (1-\lambda)\ \langle x_j, \psi\rangle + \lambda\langle x_j, \bar{\varphi}\rangle \geq c_j + \lambda\varepsilon \ ;$$

por tanto ω es un elemento SS para Σ^0 . Puesto que la aplicación que a cada x asocia $|\langle x, \omega\rangle|$, definida de X en R^+ , es una seminorma continua, existe $m \in N$ tal que $|\langle \circ, \omega\rangle| \leq m p_m$.

Sea $\Sigma := \{\langle y_j, \varphi\rangle \geq d_j \ , \ j \in J \}$ un sistema arbitrario tal que

$$\delta(\Sigma.\Sigma^0) < \beta := \frac{\lambda\varepsilon}{2^m(2m+\lambda\varepsilon)} .$$

Entonces $\dfrac{p_m(x_j - y_j)}{1 + p_m(x_j - y_j)} < \dfrac{\frac{\lambda\varepsilon}{2m}}{1 + \frac{\lambda\varepsilon}{2m}} \Rightarrow p_m(x_j - y_j) < \dfrac{\lambda\varepsilon}{2m}, \ j \in J$;

y también $|d_j - c_j| < \dfrac{\lambda\varepsilon}{2^m(2m+\lambda\varepsilon)} < \dfrac{\lambda\varepsilon}{2^m} \leq \dfrac{\lambda\varepsilon}{2}$, $j \in J$, y así :

$$\langle y_j, \omega\rangle = \langle y_j - x_j + x_j, \omega\rangle = \langle y_j - x_j, \omega\rangle + \langle x_j, \omega\rangle \geq \langle x_j, \omega\rangle - m p_m(x_j - y_j) \geq$$

$$\geq c_j + \lambda\varepsilon - \frac{\lambda\varepsilon}{2} = c_j + \frac{\lambda\varepsilon}{2} > d_j \ ,$$

o sea que $\omega \in F(\Sigma) \cap W$, y F es semicontinua inferiormente en Σ^0.

■

TEOREMA 4.2

El enunciado vii) implica los enunciados (equivalentes) desde i) a vi).

Prueba.-

En efecto, supongamos que F es R-estable en Σ^0 y que

$$c \in bd\{S_0(X^*) - R_+^J\}.$$

Tomemos $\varphi^0 \in F(\Sigma^0)$, $p_m \in \mathfrak{N}$, y consideremos $\beta, \varepsilon > 0$ para los que se verifica la desigualdad

$$d_n[\varphi^0, F(\Sigma)] \le \beta\ v(\varphi^0, \Sigma),$$

para todo Σ tal que $\delta(\Sigma^0, \Sigma) < \varepsilon$.

Podemos hallar $f : J \longrightarrow R$, tal que $|f_j| \le \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $j \in J$, de modo que $c + f \notin S_0(X^*) - R_+^J$.

Entonces si $\Sigma := \{\langle x_j, \varphi\rangle \ge c_j + f_j \ , j \in J\}$,tenemos que

$\delta(\Sigma^0, \Sigma) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, y Σ es inconsistente.

Por tanto,

$$v(\varphi^0, \Sigma) = \sup\ (c_j + f_j - \langle x_j, \varphi^0\rangle) \le$$

$$\le \sup f_j + \sup\ (c_j - \langle x_j, \varphi^0\rangle) \le \frac{\varepsilon}{2} + 0 < \varepsilon \text{ , mientras que}$$

$d_m[\varphi^0, F(\Sigma)] = +\infty$ (pues $F(\Sigma) = \emptyset$), y tenemos la contradicción $+\infty < \beta\varepsilon$.

■

Sin embargo no es cierto que las condiciones de i) a vi) impliquen la vii), como prueba el siguiente

EJEMPLO 4.2 Sea $X_0 \subset R^N$, el conjunto de todos los vectores $\mathfrak{x}$ cuya primera componente es 1, y las restantes no negativas. Sea $J \neq \emptyset$ tal que card J = card X_0. Se puede por tanto representar cada elemento de X_0 como un $\mathfrak{X}_j$, para $j \in J$.

Sea $\Sigma^0 := \{\langle \mathfrak{X}_j, \varphi\rangle \geq 1 \ , \ j \in J \}$, donde $\varphi \in R^{(N)}$; $\Sigma^0 := \ (\mathfrak{X}, c)$, donde

$$c:\ J \longrightarrow R \ . \qquad j \longrightarrow c(j)=1$$

Es claro que $\Sigma^0 \in LC$, pues $\varphi^0 := (1,0,\ldots,0,\ldots) \in F(\Sigma^0)$.

1.- Veamos que

$$F(\Sigma^0) = \{ \ \varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots) \in R^{(N)} \ : \ \varphi_1 \geq 1;\ \varphi_n \geq 0,\ n > 1 \ \} .$$

En efecto, es claro que un tal $\varphi \in F(\Sigma^0)$.

Recíprocamente, si $\varphi \in F(\Sigma^0)$, puesto que $e_1 = (1,0,\ldots,0,\ldots) \in X_0$, ha de ser $\langle e_1,\varphi\rangle = \varphi_1 \geq 1$. También $\varphi_n \geq 0$ para $n > 1$, pues supongamos que $\varphi := (\varphi_1,0,\ldots,0,\varphi_{i_2},0,\ldots,0,\varphi_{i_p},0,\ldots)$ y algún $\varphi_{i_p} < 0$, entonces podríamos hallar $\mathfrak{X}_j$ $(\mathfrak{X}_j := (1,x_{j_1},\ldots,x_{j_n},\ldots))$ en X_0 con la coordenada x_{j_p} suficientemente grande para que el producto $\langle \mathfrak{X}_j,\varphi\rangle = \sum_{r=1}^{p} x_{j_{i_r}} \varphi_{i_r}$ fuese menor que 1.

2.- Consideremos ahora el sistema $\Sigma := \{ \ \langle \eta_j,\varphi\rangle \geq 1 + \varepsilon \ , \ j \in J \ \}$, donde $\eta_j := \mathfrak{X}_j - \varepsilon\mathfrak{u}$, siendo $\mathfrak{u} := (1,1,\ldots,1,\ldots)$ y $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$; entonces se tiene que si $\eta_j := (y_{j_1},\ldots,y_{j_n},\ldots)$,

$$\text{es } |y_{j_n} - x_{j_n}| = \varepsilon < \frac{1}{2} \ , \ n \in N \ \text{ y } \ F(\Sigma) \neq \emptyset \ ,$$

$$\text{pues } \bar{\varphi} := \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \ ,0,\ldots,0,\ldots \right) \in F(\Sigma).$$

Supongamos ahora que $\varphi := (\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots) \in F(\Sigma)$, entonces

$$\varphi_1 \ \geq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \text{ , pues si tomamos}$$

$$\eta_{j_0} := (1-\varepsilon,0,\dots,0,\dots) = (1,\varepsilon,\varepsilon,\dots) - (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\dots),$$

$$\text{es } \langle\eta_{j_0},\varphi\rangle = (1-\varepsilon)\varphi_1 \geq 1+\varepsilon \text{ , luego } \varphi_1 \geq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} .$$

También $\varphi_n \geq 0$ para $n > 1$, pues podemos escoger un η_j cuya componente n-sima $y_{j_n} = x_{j_n} - \varepsilon$, fuese tan grande como quisiéramos, de modo que si φ_n fuera menor que cero, entonces $\langle\eta_j,\varphi\rangle = \sum_{r=1}^{p} y_{j_r}\varphi_r < 0$, con lo que φ no pertenecería a $F(\Sigma)$. Contradicción.

Por tanto se tiene que

$$\varnothing \neq F(\Sigma) \subset \{ \varphi \in R^{(N)} : \varphi_1 \geq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} , \varphi_n \geq 0, n>1 \}$$

3.- La topología de R^N viene definida por la sucesión de seminormas

$$\mathfrak{N} := (p_n)_{n=1}^{\infty} \text{ , donde } p_n(\mathfrak{x}) = |x_n| \text{ , por lo que}$$

$$\delta(\Sigma,\Sigma^0) := \sup_{j\in J} [\max \{ d(\mathfrak{x}_j,\eta_j) , |d_j - c_j| \}] = \varepsilon ,$$

ya que

$$d(\mathfrak{x}_j,\eta_j) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{|x_{j_n} - y_{j_n}|}{1+|x_{j_n} - y_{j_n}|} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \varepsilon \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = \varepsilon ,$$

y $|c_j - d_j| = |1-1-\varepsilon| = \varepsilon$, para cada $j \in J$.

Sea $\varphi^0 := (1,0,\dots,0,\dots) \in F(\Sigma^0)$ y p_n con $n > 1$ fijado . Todos los vectores $\mathfrak{x} := ke_1 = (k,0,0,\dots)$, con $k > 0$ arbitrario, están en la bola $\{ \mathfrak{x} \in R^N : p_n(\mathfrak{x}) \leq 1 \}$, y se tiene para $\varphi \in F(\Sigma)$ que

$$\sup_{p_n(\mathfrak{x})\leq 1} |\langle\varphi^0-\varphi,\mathfrak{x}\rangle| \geq |\langle\varphi^0-\varphi,ke_1\rangle| = (\varphi_1 - 1)k \geq \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} k.$$

Por tanto

$$d_n[\varphi^0,F(\Sigma)] := \inf_{\varphi\in F(\Sigma)} [\sup \{|\langle\varphi^0-\varphi,\mathfrak{x}\rangle| : p_n(\mathfrak{x}) \leq 1\}] = +\infty ,$$

mientras que

$$v(\varphi^0,\Sigma) := \max \{ 0, \sup_{j\in J} [1+ \varepsilon - (1 - \varepsilon)]\} = 2\varepsilon ,$$

por lo que F no es R-estable en Σ^0 .

4.- Sin embargo $\Sigma^0 \in \text{int } LC$. En efecto, veamos que la bola $B(\Sigma^0,r) \subset LC$, con $0 < r \le \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$ (siendo $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, como antes).

Sea $\Sigma = (\eta,d) \in B(\Sigma^0, \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)})$, $\eta := (\eta_j)_{j\in J}$, $d := (d_j)_{j\in J}$, y $\Sigma^0 := (\mathfrak{X},c)$. $\Sigma \neq \Sigma^0$.

Se tiene que $\delta(\Sigma,\Sigma^0) < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$ implica $d(\mathfrak{X}_j,\eta_j) < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$ y $|d_j-c_j| < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$ para todo $j \in J$, luego $|x_{j_1}-y_{j_1}| < \varepsilon$, y por tanto

$$1- \varepsilon \le y_{j_1} \le 1+ \varepsilon \ , \ 1- \varepsilon \le d_j \le 1+ \varepsilon \quad \text{para cada } j \in J.$$

Sea $m > \frac{1+ \varepsilon}{1- \varepsilon}$, y definamos $\varphi := (m,0,...,0,...)$, entonces $\varphi \in F(\Sigma)$ ya que $\langle\eta_j,\varphi\rangle = y_{j_1}.m \ge (1- \varepsilon)m > 1+ \varepsilon \ge d_j$, para todo $j \in J$.

Por tanto $\Sigma \in LC$, y $\Sigma^0 \in \text{int } LC$. Luego la condición ii) no implica vii).

TEOREMA 4.3

Si X es un espacio de Hilbert, los enunciados de i) a vii) son equivalentes.

Prueba.-

Sólo nos falta probar que los enunciados i) a vi) implican vii).

Sea $\varphi^0 \in F(\Sigma^0)$ dado . Puesto que se verifica ii) , $F(\Sigma) \neq \emptyset$, para

$$\Sigma := \{ <y_j,\varphi> \geq d_j \ , \ j \in J \} \ ,$$

suficientemente δ-próximo a Σ^0, y existe un punto $\varphi^F \in F(\Sigma)$, tal que

$$\rho[\varphi^0,F(\Sigma)] := \inf \{ \|\varphi^0-\varphi\| : \varphi \in F(\Sigma) \} = \|\varphi^F-\varphi^0\| \ .$$

Nos limitaremos a aquellos sistemas Σ tales que $\varphi^F \neq \varphi^0$ y que $v(\varphi^0,\Sigma) := \max \{0, \sup_{j\in J} (d_j - <y_j,\varphi^0>) \} < +\infty$ (pues de otro modo la desigualdad deseada se verifica trivialmente).

Como φ^F es la proyección de φ^0 sobre el cerrado convexo $F(\Sigma)$, se verifica ([2] , T^{a}15.1 (2)) que $<\varphi^0-\varphi^F,\varphi-\varphi^F> \leq 0$, $\forall \ \varphi \in F(\Sigma)$, de donde $<\varphi^F-\varphi^0,\varphi> \geq <\varphi^F-\varphi^0,\varphi^F>$ es una relación consecuente de Σ, por lo que el par $(\varphi^F-\varphi^0,<\varphi^F-\varphi^0,\varphi^F>) \in \text{cl } K(\Sigma)$, y por tanto existen sucesiones $(\lambda^r)_{r=1}^{\infty} \in R_+^{(J)}$ y $(\mu_r)_{r=1}^{\infty} \subset R_+$, tales que

$$(\varphi^F-\varphi^0,<\varphi^F-\varphi^0,\varphi^F>) = \lim_{r\to\infty} \left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j^r \ (y_j,d_j) + \mu_r(\Theta,-1) \right\}. \qquad (1)$$

Multiplicando escalarmente por $(\varphi^F,-1)$ ambos miembros de (1), obtenemos

$$\lim_{r\to\infty} \left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j^r \ (<y_j,\varphi^F> - d_j) + \mu_r \right\} = 0 \qquad (2)$$

lo que a su vez implica que $\lim_{r\to\infty} \mu_r = 0$, y que

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{j\in J} \lambda_j^r \ (<y_j,\varphi^F> - d_j) = 0 \qquad (3)$$

a causa de la no negatividad del término general en ambas sucesiones.

Análogamente, multiplicando (1) por $(\varphi^F-\varphi^0,0)$, se tiene

$$\|\varphi^F-\varphi^0\|^2 = \lim_{r\to\infty} \sum_{j\in J} \lambda_j^r \ [(<y_j,\varphi^F> - d_j) + (d_j - <y_j,\varphi^0>)]$$

Entonces de (3) se deduce

$$\|\varphi^F-\varphi^0\|^2 = \lim_{r\to\infty} \sum_{j\in J} \lambda_j^r(d_j - <y_j,\varphi^0>) \leq v(\varphi^0,\Sigma) \ \limsup_{r\to\infty} \sum_{j\in J} \lambda_j^r \qquad (4)$$

Puesto que vi) también se verifica, consideremos un elemento SS, $\bar{\varphi}$

para Σ^0, y $\varepsilon>0$ tal que $<x_j,\bar{\varphi}> - c_j \geq \varepsilon$, $\forall j \in J$.

Recurriendo de nuevo a (1), obtenemos

$$<\varphi^F-\varphi^0,\bar{\varphi} -\varphi^F> = <\varphi^F-\varphi^0,\bar{\varphi} > - <\varphi^F-\varphi^0,\varphi^F> =$$

$$<\lim_{r\to\infty} \sum_{j\in J}\lambda_j^r y_j ,\bar{\varphi} > - \lim_{r\to\infty} \left[\sum_{j\in J}(\lambda_j^r d_j) - \mu_r\right] =$$

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{j\in J} \lambda_j^r[<y_j,\bar{\varphi}> - d_j] + \lim_{r\to\infty} \mu_r = \lim_{r\to\infty} \sum_{j\in J}\lambda_j^r [<y_j,\bar{\varphi}> - d_j]$$

o sea

$$<\varphi^F-\varphi^0,\bar{\varphi} - \varphi^F> = \lim_{r\to\infty} \sum_{j\in J}\lambda_j^r [<y_j,\bar{\varphi}> - d_j]. \qquad (5)$$

Sea $\varepsilon_1:= \varepsilon(2+2\|\bar{\varphi}\|)^{-1}$. Si $\delta(\Sigma,\Sigma^0) < \varepsilon_1$, escribiendo

$$y_j:= x_j+z_j \ , \ d_j:= c_j+f_j \ ,$$

se tiene para todo $j \in J$

$$<y_j,\bar{\varphi}> - d_j = <x_j,\bar{\varphi}> - c_j + <z_j,\bar{\varphi}> - f_j \geq$$

$$\varepsilon + (- \|z_j\|.\|\bar{\varphi}\| - |f|_j) =$$

$$\varepsilon - (\|z_j\|.\|\bar{\varphi}\| + |f_j|) \geq$$

$$\varepsilon - \varepsilon_1(\|\bar{\varphi}\| + 1) = \frac{\varepsilon}{2} .$$

Por tanto, de (5),

$$<\varphi^F-\varphi^0,\bar{\varphi} -\varphi^F> \geq \frac{\varepsilon}{2} \limsup_{r\to\infty}\sum_{j\in J} \lambda_j^r \ ,$$

de donde resulta

$$\limsup_{r\to\infty}\sum_{j\in J} \lambda_j^r \leq \frac{2}{\varepsilon} \|\varphi^F-\varphi^0\|.\|\bar{\varphi} -\varphi^F\|. \qquad (6)$$

Ahora consideremos el conjunto abierto

$$W:= \{\varphi \in X^* = X : \|\varphi - \varphi^0\| < \varepsilon \}$$

que satisface obviamente la relación $W \cap F(\Sigma^0) \neq \emptyset$. Puesto que F es semicontinua inferiormente en Σ^0 ((i)), existe ε_2 , $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$,tal que $W \cap F(\Sigma) \neq \emptyset$ para cualquier Σ que verifique $\delta(\Sigma,\Sigma^0) < \varepsilon_2$.

En este caso

$$\rho(\varphi^0,F(\Sigma)) = \|\varphi^0-\varphi^{F(\Sigma)}\| < \varepsilon ,$$

y tenemos que

$$\|\bar{\varphi} -\varphi^{F(\Sigma)}\| \le \|\bar{\varphi} -\varphi^0\| + \|\varphi^0-\varphi^{F(\Sigma)}\| < \varepsilon + \|\bar{\varphi} -\varphi^0\|$$

Sustituyendo en (6) , y tomando $\beta := 2\left(1 + \dfrac{\|\bar{\varphi} - \varphi^0\|}{\varepsilon} \right)$,

se tiene

$$\limsup_{r \to \infty} \sum_{j\in J} \lambda_j^r \le \frac{2}{\varepsilon} \|\varphi^F-\varphi^0\|.(\varepsilon + \|\bar{\varphi} -\varphi^0\|) = \beta \|\varphi^F-\varphi^0\| \qquad (7)$$

Multiplicando el primer y el último miembro de (7) por $v(\varphi^0,\Sigma)$, y teniendo presente (4), resulta

$$\rho(\varphi^0,F(\Sigma)) = \|\varphi^F-\varphi^0\| \le \beta\ v(\varphi^0,\Sigma)$$

que es la desigualdad buscada.

■

DEFINICIóN 4.3

$F: \Theta \longrightarrow 2^{X^*}$ es **dimensionalmente estable** en Σ, si Σ es consistente y existe un entorno abierto de Σ, V, tal que para cada $\Sigma_1 \in V$ se cumple codim $[\overline{F(\Sigma_1)-F(\Sigma_1)}^{s}]$ = codim $[\overline{F(\Sigma)-F(\Sigma)}^{s}]$.

TEOREMA 4.4

Si $\Sigma \in$ int LC y codim $[\overline{F(\Sigma_1)-F(\Sigma_1)}^{s}] < \infty$ para cada Σ_1 de un cierto entorno U de Σ, U contenido en LC, entonces F es dimensionalmente estable en Σ.

Prueba.-

Como $\Sigma \in$ int LC, entonces se verifican todas las condiciones desde i) hasta vi) del teorema anterior. Tomemos un elemento SS, $\bar{\varphi} \in X^*$, es decir

$$\langle x_j, \bar{\varphi} \rangle \geq c_j + \varepsilon \ , \ \forall j \in J \ \text{ y cierto } \varepsilon > 0.$$

Si $(\hat{x}, s) \neq (\Theta, 0)$ pertenece a $L_{clK(\Sigma)} \subset clK(\Sigma)$, entonces tanto $(\hat{x}, s)$ como $(-\hat{x}, -s)$ pertenecen a $clK(\Sigma)$ y por tanto se pueden obtener como límites de sucesiones en $K(\Sigma)$. Es decir, podemos hallar sucesiones en $R_+^{(J)}$, $\{\lambda^r\}$ y $\{\gamma^r\}$, y sucesiones en R_+, $\{\mu_r\}$ y $\{\eta_r\}$, tales que

$$(\hat{x}, s) = \lim_r \left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j^r \ (x_j, c_j) + \mu_r \ (\Theta, -1) \right\} \tag{1}$$

$$(-\hat{x}, -s) = \lim_r \left\{ \sum_{j\in J} \gamma_j^r \ (x_j, c_j) + \eta_r \ (\Theta. -1) \right\} \tag{2}$$

Multiplicando (1) y (2) por $(\bar{\varphi}, -1) \in X^* \times R \simeq (X\times R)^*$, resulta

$$\langle \hat{x}, \bar{\varphi} \rangle - s = \lim_r \left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j^r \ [\ \langle x_j, \bar{\varphi} \rangle - c_j \ ] + \mu_r \right\} \geq 0 \tag{3}$$

$$\langle -\hat{x}, \bar{\varphi} \rangle + s = \lim_r \left\{ \sum_{j\in J} \gamma_j^r \ [\ \langle x_j, \bar{\varphi} \rangle - c_j \ ] + \eta_r \right\} \geq 0 \tag{4}$$

Se sigue pues que $\langle \hat{x}, \bar{\varphi} \rangle - s = 0$, y que las sucesiones

$$\left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j^r \ [\ \langle x_j, \bar{\varphi} \rangle - c_j \ ] \right\},$$

$$\left\{ \sum_{j\in J} \gamma_j^r \ [\ \langle x_j, \bar{\varphi} \rangle - c_j \ ] \right\},$$

$\{\mu_r\}$ y $\{\eta_r\}$ convergen a cero.

Finalmente, ya que

$$\sum_{j\in J} \lambda_j^r \ [\ \langle x_j, \bar{\varphi} \rangle - c_j \ ] \geq \varepsilon \sum_{j\in J} \lambda_j^r \ ,$$

obtenemos que

$$\lim_r \sum_{j\in J} \lambda_j^r = 0 \quad \text{y, análogamente,} \quad \lim_r \sum_{j\in J} \gamma_j^r = 0.$$

Si $\delta(\Sigma,\Sigma_1) < \infty$, donde $\Sigma_1 := \{ \langle y_j,\varphi\rangle \geq d_j \ , \ j \in J \}$, existe un $k > 0$ tal que $\forall j \in J$ se verifica

$$\max [\ d(x_j,y_j)\ ,\ |d_j - c_j|\ ] \leq k\ .$$

Entonces por la propiedad triangular

$$d\left[\sum_{j\in J} \lambda_j^r\ (x_j,y_j) \right] + \left| \sum_{j\in J} \lambda_j^r\ (d_j - c_j) \right| \leq$$

$$\sum_{j\in J} \lambda_j^r\ d(x_j,y_j) + \sum_{j\in J} \lambda_j^r\ |d_j - c_j| \leq 2k \sum_{j\in J} \lambda_j^r$$

de donde

$$\lim_r \sum_{j\in J} \lambda_j^r\ d(x_j,y_j) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_r \sum_{j\in J} \lambda_j^r\ |d_j - c_j| = 0,$$

lo que implica que para cada seminorma p_n de las que definen la topología de X, se tiene que

$$\lim_r \sum_{j\in J} \lambda_j^r\ p_n(x_j - y_j) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_r \sum_{j\in J} \lambda_j^r\ |d_j - c_j| = 0.$$

Entonces en X×R, la sucesión

$$\sum_{j\in J} \lambda_j^r\ (x_j - y_j, d_j - c_j) = \left(\sum_{j\in J} \lambda_j^r\ (x_j - y_j)\ ,\ \sum_{j\in J} \lambda_j^r\ (d_j - c_j) \right)$$

tiende a $(\Theta,0)$.

Recordando (1), establecemos que

$$\lim_r \left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j^r\ (y_j,d_j) + \mu_r\ (\Theta,-1) \right\} =$$

$$\lim_r \sum_{j\in J} \lambda_j^r\ (y_j - x_j\ ,\ d_j - c_j) + \lim_r \left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j^r\ (x_j,c_j) + \mu_r (\Theta,-1) \right\} =$$

$$(\Theta,0) + (\hat{x},s) = (\hat{x},s)\ .$$

De modo similar obtendríamos que

$$\lim_r \left\{ \sum_{j\in J} \gamma_j^r\ (y_j,d_j) + \eta_r\ (\Theta,-1) \right\} = (-\hat{x},-s) = -(\hat{x},s)$$

y por tanto

$$(\hat{x},s) \in \mathrm{clK}(\Sigma_1) \cap [-\mathrm{clK}(\Sigma_1)] = L_{\mathrm{clK}(\Sigma_1)} ,$$

es decir $L_{\mathrm{clK}(\Sigma)} \subset L_{\mathrm{clK}(\Sigma_1)}$.

Puesto que $\Sigma \in U$, podemos tomar un $\alpha > 0$ tal que

$$V := \{ \Sigma_1 \in \Theta : \delta(\Sigma_1,\Sigma) < \alpha \} \subset U.$$

Si $\Sigma_1 \in V$, $\Sigma_1 \in \mathrm{int}\, LC$, e intercambiando los papeles de Σ_1 y Σ, obtenemos que $L_{\mathrm{clK}(\Sigma_1)} \subset L_{\mathrm{clK}(\Sigma)}$, es decir $L_{\mathrm{clK}(\Sigma)} = L_{\mathrm{clK}(\Sigma_1)}$.

Aplicando ahora el **teorema 1.4**, obtenemos que

$$\mathrm{codim}\ \overline{[F(\Sigma_1)-F(\Sigma_1)]}^{s} = \dim L_{\mathrm{clK}(\Sigma_1)} = \dim L_{\mathrm{clK}(\Sigma)} = \mathrm{codim}\ \overline{[F(\Sigma)-F(\Sigma)]}^{s} .$$

■

Hacemos algunas observaciones adicionales en relación al **Teorema 4.1**, en el caso en que X sea un espacio de Hilbert, que demuestran, hablando sin precisión, que la estabilidad de los sistemas de desigualdades lineales tiene el mismo significado para la mayoría de los autores. Tuy [16] prueba, en una versión más general, la equivalencia entre iii) y otro concepto de estabilidad [16, Definición 1], señalando que " resultados muy parecidos ... han sido obtenidos ya por S.M. Robinson " [16, p.33], sin dar un resultado concreto. De hecho, Robinson [12] probó iv) $\Leftrightarrow$ vii) para una clase de sistemas lineales que no incluye a Θ, dando una cota explícita para $\rho[\varphi_0,F(\Sigma)]$ [12, Teorema 1]. Nuestro **Teorema 4.1** también da una cota del error, $\beta\, v(\varphi_0,\Sigma)$, que depende del elemento SS que tomamos, $\bar{\varphi}$, y el escalar positivo asociado ε:

$$\beta := 2\left(1 + \frac{\|\bar{\varphi} - \varphi^0\|}{\varepsilon} \right)$$

Observamos que la estabilidad, en el sentido de semicontinuidad inferior, se reduce a la estabilidad con respecto a las funciones del " lado derecho " $[c_j = c(.)]$.

El **Teorema 4.1** se puede aplicar directamente incluso a modelos en los que sólo tiene sentido la perturbación de c(.). Este es el caso, por ejemplo, para el siguiente problema de aproximación: dada una función $f : \begin{array}{l}[\alpha,\beta] \longrightarrow R \\ j \longrightarrow f(j)\end{array}$,encontrar un polinomio, P, de grado menor que $n \in N$ dado, tal que $|f(j)-P(j)| \le \varepsilon$, $(\varepsilon>0)$ $\forall\ j \in [\alpha,\beta]$
Podemos suponer sin pérdida de generalidad $0 < \alpha < \beta$, de modo que las incógnitas son los coeficientes de $P(j) = \varphi_1 + \varphi_2 j + \ldots + \varphi_n j^{n-1}$.
Tomando $J = [-\beta,-\alpha] \cup [\alpha,\beta]$, el problema consiste en encontrar una solución de $\Sigma^0 := \{ \langle x_j,\varphi\rangle \ge c_j \ ,\ j \in J,\ x_j \in R^n,\ \varphi \in (R^n)^* = R^n \}$, donde sólo c_j depende de $f(j)$:

$$x_j := (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_i}, \ldots, x_{j_n})$$

$$x_{j_i} = \begin{cases} -(-j)^{i-1} & ;\ -\beta \le j \le -\alpha \\ j^{i-1} & ;\ \alpha \le j \le \beta \end{cases} \quad ,\ i = 1,2,\ldots,n\ ,\ y$$

$$c_j = \begin{cases} -f(-j) - \varepsilon & ;\ -\beta \le j \le -\alpha \\ f(j) - \varepsilon & ;\ \alpha \le j \le \beta \end{cases}$$

Cuando X es R^n se cumple que si $F(\Sigma^0)$ es acotado (o todo X), entonces la aplicación conjunto factible F es semicontinua superiormente en Σ^0. En el caso en que dim X = ∞, la acotación de $F(\Sigma)$ no implica la semicontinuidad superior, como veremos a continuación.

Necesitaremos el Teorema siguiente

TEOREMA 4.5

Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, existe un conjunto abierto A en X tal que $B(X) \subset A$, $d[B(X),X\backslash A] = 0$, donde B(X) es la bola unidad cerrada, y

$$d[B(X),X\backslash A] = \inf \{ \|x-y\| : x\in B(X),\ y\in X\backslash A \}$$

Prueba.-

Sea S(X) la esfera unidad, i.e.

$$S(X) := \{ x \in X : \|x\| = 1 \}.$$

Puesto que S(X) no es precompacto, existen un $\alpha > 0$ y una sucesión $\{ x_n \} \subset S(X)$ de manera que $\|x_n - x_m\| > \alpha$, $m\neq n$, $m,n \in N$.

Ponemos $y_n := \left(1 + \frac{1}{n} \right) x_n$, $n \in N$. Entonces si

$$\delta := \inf \{ \|y_m - y_n\| : m\neq n;\ m,n \in N \},$$

se tiene que $\delta > 0$.

Para cada $n \in N$, hallamos la bola cerrada B_n de centro y_n y de radio $\rho_n > 0$, con $\rho_n < \frac{1}{4}\delta$ y $B_n \cap B(X) = \emptyset$.

Definimos ahora una función real f_n en X, poniendo

$$\begin{cases} f_n(x) = 0 & , x \notin B_n \\ f_n(x) = \rho_n^{-1}(\rho_n - \|x - y_n\|), & x \in B_n \end{cases}$$

Obviamente, f_n es continua, $n \in N$ y $f_n(y_n) = 1$.

Tomamos $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (1)

Puesto que $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ son disjuntos dos a dos, la serie (1) converge puntualmente, por lo que f es una función real bien definida en X.

Tomamos $x_0 \in X$. Sea B la bola de centro x_0 y de radio $\frac{1}{4}\delta$. Si $B \cap B_n = \emptyset$, $\forall n \in N$, entonces $f_n(x) = 0$ si $x \in B$ y por tanto f es continua en x_0.

Supongamos ahora que existe $p \in N$ tal que $B \cap B_p \neq \emptyset$. Sea $q \in N$, $q \neq p$. Veamos que $B \cap B_q = \emptyset$. Si no fuera así, tomaríamos $z_1 \in B \cap B_p$ y $z_2 \in B \cap B_q$, entonces

$$\|y_p - y_q\| \leq \|y_p - z_1\| + \|z_1 - x_0\| + \|x_0 - z_2\| + \|z_2 - y_q\| \leq$$

$$\rho_p + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{4}\delta + \rho_q < \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{4}\delta = \delta,$$

lo que es una contradicción con la definición de δ.

Consecuentemente, $f_n(x) = 0$, $x \in B$, $n > p$; y así f es continua en x_0. Luego f es continua en X.

Obviamente, f vale cero en B(X).

Ponemos

$$A := \{ x \in X : f(x) < 1 \},$$

A es un abierto de X, y $B(X) \subset A$.

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, hallamos $r \in N$ tal que $\frac{1}{r} < \varepsilon$. Entonces $x_r \in B(X)$, $y_r \in X\backslash A$ y

$$d[B(X), X\backslash A] \leq \|y_r - x_r\| = \frac{1}{r} < \varepsilon,$$

de donde se deduce que $d[B(X), X\backslash A] = 0$.

■

NOTA 4.2 Si X es un espacio de Banach no reflexivo, el teorema de James proporciona un abierto débil que cumple las condiciones del enunciado ([8], 19 A).

Damos ahora el contraejemplo anunciado:

EJEMPLO 4.3 Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita, y consideramos el sistema $\Sigma := \{ \langle \mathfrak{X},\eta\rangle \geq -1,\ \|\mathfrak{X}\| \leq 1 \}$, entonces

$$F(\Sigma) := \{ \eta \in X^{*} : \|\eta\| \leq 1 \}.$$

Dado un ε tal que $0 < \varepsilon < 1$, sea

$$\Sigma_{\varepsilon} := \{\langle \mathfrak{X},\eta\rangle \geq -1 \ ,\ \|\mathfrak{X}\| \leq 1-\varepsilon \} = \{ \langle (1-\varepsilon)\mathfrak{X},\eta\rangle \geq -1 \ ,\ \|\mathfrak{X}\| \leq 1 \}.$$

Entonces

$$F(\Sigma_{\varepsilon}) = \{ \eta \in X^{*} : \|\eta\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \}.$$

Sea A un abierto en X^{*}, tal que $A \supset F(\Sigma)$ y que $d[F(\Sigma),X\backslash A] = 0$, entonces $\forall\ \varepsilon > 0$, en la bola $B(\Sigma,\varepsilon)$ en Θ, existe Σ_{ε} tal que $F(\Sigma_{\varepsilon})$ no está contenido en A, por lo que la aplicación conjunto factible

$$\begin{aligned} F : \Theta &\longrightarrow 2^{X^{*}} , \\ \Sigma &\longrightarrow F(\Sigma) \end{aligned}$$

no es semicontinua superiormente en Σ, a pesar de ser $F(\Sigma)$ acotado.

SISTEMAS INCONSISTENTES

A lo largo de esta sección $\Sigma^{0} := \{\langle x_{j},\varphi\rangle \geq c_{j}\ ,\ j \in J\}$ será un sistema inconsistente dado.

En primer lugar, observemos que la aplicación conjunto factible $F : \Theta \longrightarrow 2^{X^{*}}$ es semicontinua inferiormente en Σ^{0} de modo trivial (puesto que $F(\Sigma^{0}) = \emptyset$), mientras que no es ni R-estable ni regular, y no satisface la condición de Slater. Por tanto, nuestra atención estará dirigida sobre las propiedades restantes.

TEOREMA 4.6

Condiciones necesarias para que $\Sigma^0 \in \text{int LI}$ son:

i) Σ^0 es no crítico.

ii) F es semicontinua superiormente en Σ^0.

La condición ii) es también suficiente.

Prueba.-

i) Supongamos lo contrario, es decir, $0_J \in \text{bd}[S(X^*) - R_+^J]$. Entonces existe una sucesión $\{f_r,\ r \in N\} \subset S(X^*) - R_+^J \subset R^J$, tal que $\delta\text{-}\lim_{r \to \infty} f_r(j) = 0$ (es decir, $\lim_{r \to \infty} f_r(j) = 0$ uniformemente en J). Consideremos la sucesión en Θ ,

$$\Sigma_r := \{\langle x_j, \varphi\rangle \geq c_j + f_r(j)\ ,\quad j \in J\},\ r \in N.$$

Obviamente, $\Sigma_r \in LC$, $r \in N$, y $\lim_{r \to \infty} \Sigma_r = \Sigma^0$, por tanto $\Sigma^0 \in \text{bd LC}$, en contra de que $\Sigma^0 \in \text{int LI}$.

ii) Si $\Sigma^0 \in \text{int LI}$, existe un conjunto abierto $V \subset \Theta$ tal que

$$\Sigma^0 \in V \subset LI\ .$$

Entonces, para cada conjunto abierto $W \subset X^*$,

$$W \supset F(\Sigma) \text{ para cada } \Sigma \in V.$$

Por tanto F es semicontinua superiormente en Σ^0.

En orden a demostrar la afirmación recíproca, supongamos lo contrario. Sea $\{\Sigma_r\}_{r=1}^{\infty} \subset LC$ tal que $\delta\text{-}\lim_{r \to \infty} \Sigma_r = \Sigma^0$. Tomando $W = \emptyset$, tenemos que $\emptyset = F(\Sigma^0) \subset W$, mientras que $F(\Sigma) \subset W$ falla para $r = 1,2,\ldots$. Esto

Volver al Indice/Tornar a l'index

significa que F no puede ser semicontinua superiormente en Σ^0.

■

El **Teorema 4.6** muestra que la estabilidad, para sistemas inconsistentes, puede ser identificada con semicontinuidad superior. Obsérvese que i) no es suficiente para que $\Sigma^0 \in \operatorname{int} LI$, pues considerando

$$\{\langle\Theta,\varphi\rangle \geq 0,\ \Theta = 0 \in R,\ \varphi \in R\},$$

tenemos que

$$0 \in \operatorname{bd}\ [S(X^*)-R_+^1] = \operatorname{bd}(]-\infty,0[)\ ,$$

luego $\langle 0,\varphi\rangle \geq 1$ es no crítico y sin embargo $\langle\pm\varepsilon,\varphi\rangle \geq 1 \pm \varepsilon$ δ-dista de él menos que ε, y es consistente. Luego $\langle 0,\varphi\rangle \geq 1$ no pertenece al interior de LI.

———

REFERENCIAS

1. M.C. CHENG, General Criteria for redundant and non redundant linear inequalitites, J. Opt. Theory and Appl. **53**(1987), 37-42.

2. G. CHOQUET, "Cours d'Analyse.Tome II.Topologie", 2^{e} ed., Masson, Paris, 1969.

3. U. ECKHARDT, Redundante Ungleichungen bei linearen Ungleichungs-Systemen, Unternehmensforschung **12**(1971), 279-286.

4. U. ECKHARDT, Representation of convex sets, en "Extremal Methods and Systems Analysis" (A.V. Fiacco and K.O. Kortanek, Eds.), pp. 374-383, Springer-Verlag, New York, (1980).

5. T. GAL, Redundancy in systems of linear inequalities revisited, Fernuniversität Hagen Working Paper No.19, (1978).

6. M.A. GOBERNA AND M.A. LóPEZ, A theory of linear inequality systems, Linear Algebra and its Appl.**106** (1988), 77-115.

7. M.A. GOBERNA, M.A. LóPEZ, J.A. MIRA AND J. VALLS, On the existence of solutions for linear inequality systems, J. of Mathe. Analysis and Appl. **192** (1995), 133-150.

8. R.B. HOLMES, "Geometric Functional Analysis and its Applications", Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin, 1975.

9. M.H. KARWAN, V. LOFTI, J. TELGEN AND S. ZIONTS, "Redundancy in Mathematical Programming", Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, 1983.

10. G. KÖTHE, "Topological Vector Spaces I -II ", Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/New York, 1983.

11. J.A. MIRA Y J. VALLS, Generalización de los Teoremas de Alternativa de Sistemas de Inecuaciones Lineales, Revista de la R.A.C.E., Tomo LXXXVIII, Cuadernos Segundo-Tercero (1994),187-202.

12. S.M. ROBINSON, Stability theory for systems of inequalities. Part I: Linear Systems, SIAM J. Numer. Anal., **12** (1975), 754-769.

13. J. TELGEN, Redundancy and Linear Programs, (Mathematical Center), Amsterdam, (1981).

14. J. TELGEN, Minimal representation of convex polyhedral sets, J.Opt. Theory and Appl.**38** (1982), 1-24.

15. G.L. THOMPSON, F.M. TONGE AND S. ZIONTS, Techniques for removing nonbinding constraints and extraneous variables from linear programming problems, Manag. Sci. **12** (1966), 588-608.

16. H. TUY, Stability property of a system of inequalities, Math. Operationsforsch. Statist. Optimiz.,**8** (1977), 27-39.

17. M. VALDIVIA, "Análisis V", U.N.E.D., Madrid, 1979

18. J. VAN TIEL, "Convex Analysis. An introductory text", John Wiley & Sons, Chichester/New York/Brisbane/Toronto/Singapore,1984.

19. Y.J. ZHU, Generalizations of some fundamental theorems on linear inequalities, Acta Math. Sinica **16** (1966), 25-40.