Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Esta tesis doctoral contiene un índice que enlaza a cada uno de los capítulos de la misma.
Existen asimismo botones de retorno al índice al principio y final de cada uno de los capítulos.

Ir directamente al índice

Para una correcta visualización del texto es necesaria la versión de Adobe Acrobat Reader 7.0 o posteriores

Aquesta tesi doctoral conté un índex que enllaça a cadascun dels capítols. Existeixen així mateix botons de retorn a l'index al principi i final de cadascun deis capítols .

Anar directament a l'index

Per a una correcta visualització del text és necessària la versió d' Adobe Acrobat Reader 7.0 o posteriors.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universidad de Alicante

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

UNIVERSITAT D'ALACANT
COMISSIÓ DE DOCTORAT
ENTRADA EIXIDA
Núm. 1163 Núm.

Teoremas de convergencia y de comparación para particiones y multiparticiones

Memoria presentada para optar al grado de doctor en Ciencias Matemáticas por Mari Carmen Perea Marco.

Alicante, 16 de Diciembre de 1997

UNIVERSITAT D'ALACANT ARXIU
ARCHIVO UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Don MIGUEL ÁNGEL GOBERNA TORRENT, Catedrático de Universidad del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante y tutor del doctorando Doña MARI CARMEN PEREA MARCO,

CERTIFICA:

Que la presente memoria *Teoremas de convergencia y de comparación para particiones y multiparticiones*, realizada bajo la dirección de Don JOAN JOSEP CLIMENT COLOMA, en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante, por la licenciada Doña MARI CARMEN PEREA MARCO, constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, se ratifica en la autorización de la presentación de la referida tesis doctoral ante la comisión de Doctorado de la Universidad de Alicante, firmando el presente certificado.

Alicante, 16 de Diciembre de 1997.

Fdo.: Miguel Ángel Goberna Torrent

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Don JOAN JOSEP CLIMENT COLOMA, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Tecnología Informática y Computación de la Universidad de Alicante,

CERTIFICA:

Que la presente memoria *Teoremas de convergencia y de comparación para particiones y multiparticiones*, ha sido realizada bajo su dirección, en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante, por la Licenciada Doña MARI CARMEN PEREA MARCO, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, autoriza la presentación de la referida tesis doctoral ante la comisión de Doctorado de la Universidad de Alicante, firmando el presente certificado.

Alicante, 16 de Diciembre de 1997.

Joan Climent

Fdo.: Joan Josep Climent Coloma

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

A la memoria de mi padre,

A mi madre y a mi hermano,
por el apoyo que me han dado para seguir adelante.

A Cayetano,
por su paciencia y comprensión.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento

- al profesor Joan Josep Climent Coloma por haberme dado la oportunidad de trabajar con él y por su constante orientación, sin cuya ayuda y dirección habría sido imposible la realización de esta memoria,
- al profesor José Requena Ruiz, por haberme sugerido la posibilidad de trabajar con el profesor Joan Josep Climent Coloma,
- a los miembros del Grupo de Computación Paralela del Departamento de Tecnología Informática y Computación de la Universidad de Alicante por haberme transmitido el ambiente agradable que existe entre ellos,
- al profesor Daniel B. Szyld del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Temple, Philadelphia, por su constante colaboración,
- al Departamento de Estadística e Investigación Operativa por haber aceptado la presentación de esta tesis.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Índice

Prólogo xv

1 Preliminares 1

1.1 Espacios vectoriales normados 1

1.2 Sistemas parcialmente ordenados. Conos 4

1.3 Operadores acotados 8

1.3.1 Propiedades generales de operadores acotados en espacios de Banach 8

1.3.2 Operadores acotados no negativos en espacios de Banach reales . . 9

1.3.3 Operadores acotados en espacios de Hilbert complejos 11

1.4 Teoría espectral de operadores acotados 13

1.4.1 Definiciones y propiedades generales 14

1.4.2 Espectro de un operador no negativo 16

1.4.3 Espectro de un operador definido no negativo 18

2 Métodos iterativos 21

2.1 Introducción 21

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

2.2 Métodos iterativos secuenciales 22

2.3 Métodos iterativos paralelos 28

2.4 Antecedentes y estado actual 29

2.5 Objetivos de la memoria 32

3 Teoremas de convergencia para particiones 35

3.1 Introducción 35

3.2 Particiones débiles no negativas y particiones débiles 37

3.3 Particiones definidas positivas 47

4 Teoremas de comparación para particiones 55

4.1 Introducción 55

4.2 Particiones débiles no negativas 57

4.3 Particiones débiles 88

4.4 Particiones definidas positivas 111

5 Relaciones entre condiciones de comparación 117

5.1 Introducción 117

5.2 Particiones débiles no negativas y particiones débiles 118

5.3 Particiones definidas positivas 157

6 Multiparticiones de matrices 161

6.1 Introducción 161

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

6.2 Multiparticiones débiles no negativas 163

6.3 Multiparticiones definidas positivas 175

A Líneas futuras **181**

Bibliografía **183**

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Prólogo

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales es una de las herramientas más utilizadas en matemática aplicada puesto que, gran cantidad de problemas de campos tan diferentes como la simulación de sistemas de naturaleza estocástica, problemas de ingeniería o economía, pueden ser resueltos mediante la resolución de un sitema lineal. Por lo tanto, el desarrollo de algoritmos eficientes para su resolución es de vital importancia.

Los avances acaecidos en los últimos años en computación paralela, han provocado la necesidad de renovar los algoritmos clásicos de la computación matricial.

Centrando nuestra atención en los métodos iterativos, en principio parece bastante lógico que las posibles líneas de desarrollo van a girar entorno a la paralelización de los algoritmos secuenciales clásicos, así como la obtención de nuevos algoritmos paralelos que obtengan el máximo rendimiento de la arquitectura paralela con la que se vaya a trabajar.

Tanto la adecuación de los algoritmos clásicos como el desrrollo de nuevos algoritmos paralelos, llevan consigo la necesidad de utilizar no sólo las herramientas desarrolladas para los métodos secuenciales, sino otras más complejas y generales. De ahí, la importancia de obtener nuevas herramientas.

La teoría de convergencia y comparación de particiones es, ha sido y puede ser la herramienta fundamental a la hora de desarrollar algoritmos secuenciales. Además ésta también es útil en el desarrollo de los algoritmos paralelos. Con el objetivo de ampliar la teoría de convergencia y comparación para particiones, así como dar un paso en el desarrollo de una teoría general de convergencia y comparación para multiparticiones en esta memoria tratamos los siguientes aspectos:

En el capítulo 1 introduciremos los conceptos y resultados básicos sobre teoría de

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Volver al índice/Tornar a l'index

operadores acotados en espacios de Banach, necesarios para un completo entendimiento de la memoria. En el capítulo 2 recordaremos los conceptos y resultados básicos sobre métodos iterativos secuenciales y paralelos.

Los restantes capítulos contribuyen la parte fundamental de la memoria. En los capítulos 3 y 4 generalizamos los resultados de convergencia y comparación que hasta ahora se han introducido para matrices a operadores acotados en espacios de Banach reales y a operadores acotados en espacios de Hilbert complejos, además introducimos nuevos resultados de convergencia también para operadores. En el capítulo 5 establecemos las relaciones existentes entre las distintas condiciones de comparación introducidas en el capítulo 4. Finalmente, en el capítulo 6 generalizamos e introducimos nuevos resultados de convergencia y comparación para multiparticiones de matrices.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos, de la forma más clara y escueta posible, los conceptos y resultados necesarios para el completo entendimiento del desarrollo de esta memoria. Haremos uso de los resultados más generales y elementales, en muchas ocasiones, sin mención explícita de ellos.

1.1 Espacios vectoriales normados

Las definiciones y resultados que presentamos en esta sección pueden encontrarse en Dunford y Schwartz [24].

Denotaremos por $\mathbb{E}$ un espacio vectorial definido sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Llamaremos vectores a los elementos de $\mathbb{E}$ y escalares a los elementos de $\mathcal{K}$. Diremos que $\mathbb{E}$ es un **espacio vectorial normado** si a cada vector $x \in \mathbb{E}$ le corresponde un número real $\|x\|$ llamado **norma** que satisface las condiciones siguientes:

(i) $\|0\| = 0$; $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$;

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cualesquiera $x,\ y \in \mathbb{E}$;

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para cualesquiera $\alpha \in \mathcal{K}$ y $x \in \mathbb{E}$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

En los espacios vectoriales normados, la convergencia de una sucesión se define en función de la norma como

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x} \quad si \quad \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| = 0.$$

En general, si una sucesión de vectores $\{\boldsymbol{x}_n\}$ es convergente, entonces satisface la condición de Caulıcy, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m\| = 0;$$

sin embargo, en general el recíproco no es cierto, es decir, una sucesión que satisface la condición de Cauchy, no tiene porqué ser convergente. Un espacio vectorial normado para el cual toda sucesión que satisface la condición de Cauchy es una sucesión convergente, se dice que es completo. Diremos que $\mathbb{E}$ es un **espacio de Banach** si es un espacio normado completo. Notemos que todo espacio vectorial normado de dimensión finita es un espacio de Banach.

Si consideramos ahora dos espacios vectoriales normados cualesquiera y un operador lineal T entre ellos, entonces se satisface el siguiente resultado.

Lema 1.1. *Sea T un operador lineal entre dos espacios vectoriales normados. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) *T es continuo;*

(ii) *T es continuo en algún punto;*

(iii) $\sup_{\|\boldsymbol{x}\|\leq 1} \|T\boldsymbol{x}\| < \infty$;

(iv) $\|T\boldsymbol{x}\| \leq \alpha\|\boldsymbol{x}\|$ *para algún escalar α y para todo $\boldsymbol{x}$.*

A partir del resultado anterior introducimos la siguiente definición de norma de un operador lineal.

Definición 1.1. Sea T un operador lineal entre dos espacios vectoriales. Llamamos **norma** de T y denotamos por $\|T\|$ al siguiente valor

$$\sup_{\|\boldsymbol{x}\|\leq 1} \|T\boldsymbol{x}\|.$$

Diremos que el operador T es **acotado** si $\|T\|$ es un número finito.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Como consecuencia directa del lema 1.1 y de la definición anterior, tenemos que un operador lineal T es continuo si, y sólo si, es acotado. Normalmente llamaremos operadores acotados a las aplicaciones lineales continuas entre dos espacios vectoriales normados. Notemos también, que en el caso particular en que el espacio vectorial es de dimensión finita, los conceptos de aplicación lineal y de aplicación continua son equivalentes. Una consecuencia directa de la definición 1.1 que se usa con bastante frecuencia es la siguiente

$$\|TS\| \leq \|T\|\|S\|,$$

donde T y S son dos operadores lineales, tales que el dominio de T está contenido en el rango de S.

Por otra parte, si $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son dos espacios de Banach, denotaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales y continuas de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{F}$. Por simplificación denotaremos $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ al espacio vectorial $\mathcal{B}(\mathbb{E},\mathbb{E})$. Utilizando esta notación, introducimos la siguiente definición.

Definición 1.2. Llamaremos **espacio dual** de $\mathbb{E}$, y lo denotaremos por $\mathbb{E}'$, al espacio vectorial formado por las aplicaciones lineales y continuas de $\mathbb{E}$ en el cuerpo $\mathcal{K}$, es decir, $\mathcal{B}(\mathbb{E},\mathcal{K})$.

Análogamente, denotaremos por $\mathbb{E}''$ el espacio dual de $\mathbb{E}'$ que llamaremos **espacio bidual** de $\mathbb{E}$.

Como consecuencia de la definición anterior y el lema siguiente tenemos que $\mathbb{E}'$ es un espacio de Banach.

Lema 1.2. *Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ dos espacios vectoriales normados. Si $\mathbb{F}$ es completo, entonces $\mathcal{B}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ es un espacio de Banach con la norma introducida en la definición 1.1.*

Definición 1.3. Diremos que un espacio de Banach es **reflexivo** si la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \aleph: & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E}'' \\ & x & \longmapsto & \hat{x} \end{array}$$

con $\hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{x}$ para $\boldsymbol{y}' \in \mathbb{E}'$ es sobreyectiva.

Notemos que en dimensión finita todos los espacios vectoriales normados son reflexivos, puesto que las dimensiones de $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ y $\mathbb{E}''$ coinciden.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Un caso muy particular y especial de espacio de Banach reflexivo es el que introducimos en la definición siguiente.

Definición 1.4. Un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial $\mathbb{E}$ sobre el cuerpo de los números complejos, junto con la función compleja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida en $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ y que satisface las propiedades siguientes:

(i) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ si, y sólo si, $\boldsymbol{x} = 0$;

(ii) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$, para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}$;

(iii) $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$, para cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{E}$;

(iv) $\langle \alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, para todo $\alpha \in \mathcal{K}$ y para cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{E}$;

(v) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}$;

(vi) Si $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{E}$, y $\lim\limits_{n,m\to\infty} \langle \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m \rangle = 0$, entonces existe un $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}$ tal que $\lim\limits_{n,m\to\infty} (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}) = 0$.

La función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama **producto escalar** o producto interno en $\mathbb{E}$ y $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ se llama producto escalar de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$. La **norma** en $\mathbb{E}$ es $\|\boldsymbol{x}\| = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle^{1/2}$.

Como consecuencia del teorema siguiente podemos identificar $\mathbb{E}'$ con $\mathbb{E}$.

Teorema 1.1. *Todo $y' \in \mathbb{E}'$ determina un único $\boldsymbol{y} \in \mathbb{E}$ tal que*

$$\boldsymbol{y}'\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle, \quad \textit{para todo } \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}.$$

1.2 Sistemas parcialmente ordenados. Conos

En el desarrollo de esta sección, consideraremos que $\mathbb{E}$ es un espacio vectorial normado y $\mathbb{E}'$ su dual.

Introducir en un espacio vectorial normado lo que a continuación definiremos como orden parcial, puede resultar muy útil, como podremos comprobar en el desarrollo de esta memoria.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Definición 1.5 (Definición I.A.2.1 de [24]). Diremos que $(F, \leq)$ es un **sistema parcialmente ordenado**, si F es no vacío y $\leq$ es una relación de orden parcial, es decir

(i) $a \leq a$ para todo $a \in F$;

(ii) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Como veremos a continuación algunas estructuras algebraicas permiten introducir un orden parcial en $\mathbb{E}$.

Definición 1.6 (Definición 1.1 de [35]). Un conjunto $K \subset \mathbb{E}$ es un **semigrupo lineal** si satisface las propiedades siguientes:

(i) Si $\boldsymbol{x} \in K$, entonces $\lambda \boldsymbol{x} \in K$ para todo $\lambda \geq 0$;

(ii) Si $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in K$, entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in K$.

Un semigrupo K se dice que tiene interior si contiene puntos interiores. Denotamos por int(K) al conjunto de puntos interiores de K.

La definición anterior nos permite definir el siguiente orden parcial.

Definición 1.7. Sean $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{E}$, diremos que

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \quad \text{si, y sólo si,} \quad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in K. \tag{1.1}$$

En particular, diremos que $\boldsymbol{x} \geq 0$ si $\boldsymbol{x} \in K$, en cuyo caso diremos que $\boldsymbol{x} \geq 0$ es un vector no negativo.

Es fácil comprobar que la relación (1.1) define una relación de orden parcial en $\mathbb{E}$. De las definiciones 1.6 y 1.7 se deducen las siguientes propiedades (véase Kreĭn y Rutman [35]):

(a) Si $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$, entonces $-\boldsymbol{y} \leq -\boldsymbol{x}$.

(b) Si $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ y $\lambda > 0$, entonces $\lambda \boldsymbol{x} \leq \lambda \boldsymbol{y}$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(c) Si $x_1 \leq y_1$ y $x_2 \leq y_2$, entonces $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.

Además, si K es un semigrupo lineal con interior, entonces podemos introducir también la relación siguiente.

Definición 1.8. Si K es un semigrupo lineal con interior diremos que

$$x < y, \quad \text{si, y sólo si,} \quad x - y \in \text{int(K)}. \tag{1.2}$$

En particular, $x > 0$ si x es un elemento de int(K), en cuyo caso diremos que $x > 0$ es un vector positivo.

Es fácil observar que la relación $x < y$ implica la relación $x \leq y$. A continuación, presentamos propiedades análogas a las introducidas para el orden parcial $\leq$, introducido en la definición 1.6, para la relación definida en (1.2).

Si K es un semigrupo lineal con interior, entonces se satisfacen las propiedades siguientes (ver Kreĭn y Rutman [35]):

(a) Si $x < y$ e $y \leq z$, entonces $x < z$.

(b) Si K es distinto de $\mathbb{E}$, entonces para todo $x > 0$ se tiene que $-y \notin K$.

(c) Si $x < y$ y $\lambda > 0$, entonces $\lambda x < \lambda y$.

(d) Si $x_1 < y_1$ y $x_2 \leq y_2$ entonces $x_1 + x_2 < y_1 + y_2$.

(e) Cada elemento $x \in \mathbb{E}$ puede representarse como

$$x = u - v, \quad \text{con } u, v > 0.$$

Ahora, vamos a presentar las características del dual del semigrupo lineal K.

Definición 1.9 (Definición 1.2 de [35]). Llamaremos **dual** de K al semigrupo lineal K' de las aplicaciones lineales $x' \in \mathbb{E}'$, tales que $x'(x) \geq 0$ para todo $x \in K$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Notemos, que todas las consideraciones realizadas para K y $\mathbb{E}$ son válidas para K' y $\mathbb{E}'$ puesto que K' es un semigrupo lineal de $\mathbb{E}'$.

A continuación introducimos uno de los casos particulares más utilizados de semigrupo lineal.

Definición 1.10 (Definición 2.2 de [35]). Diremos que $K \subset \mathbb{E}$ es un **cono** si es un semigrupo lineal cerrado y para cada $\boldsymbol{x} \in K$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ se satisface que $-\boldsymbol{x} \notin K$.

Si además, para $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in K$ existe un $\sigma > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \geq \sigma \|\boldsymbol{x}\|,$$

diremos que K es un **cono normal**.

Si K es un cono normal de $\mathbb{E}$, es fácil comprobar que K' es un cono normal de $\mathbb{E}'$.

En los capítulos 3–5 consideraremos el caso en el que $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach generado por un cono nornal K, es decir $\mathbb{E} = K - K$. Además, en dichos capítulos presentaremos diversos ejemplos, para los cuales consideraremos siempre el caso particular en el que $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach real de dimensión n y $K = \mathbb{R}^n_+$, es decir, $\boldsymbol{x} \in K$ o $\boldsymbol{x} \geq 0$ denota un vector cuyas componentes son no negativas y $\boldsymbol{x} \in \text{int(K)}$ o $\boldsymbol{x} > 0$ denota un vector cuyas componentes son positivas.

Notemos que Marek y Szyld [38] reemplazan el concepto de int(K) por el concepto más general de d-interior:

$$K^d = \{\boldsymbol{x} \in K \ : \ \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x}) > 0, \text{ para todo } \boldsymbol{x}' \in K', \ \boldsymbol{x}' \neq 0\}.$$

No obstante, si $\text{int(K)} \neq \emptyset$, entonces $\text{int(K)} = K^d$ (véase Kreĭn y Rutman [35, Corolario 1.4]).

En todo lo que sigue, cuando aparezca una desigualdad estricta, estamos suponiendo implícitamente que $\text{int(K)} \neq \emptyset$. Sin embargo, para desigualdades no estrictas, los resultados son válidos independientemente de que el interior sea vacío o no lo sea.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

1.3 Operadores acotados

En esta sección vamos a introducir en primer lugar, los conceptos y resultados básicos del conjunto de operadores acotados $\mathcal{B}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Presentaremos las principales particularidades del conjunto de operadores acotados no negativos de un espacio de Banach real así como algunos resultados característicos de los operadores acotados en un espacio de Hilbert complejo, en particular de operadores definidos positivos y definidos no negativos.

1.3.1 Propiedades generales de operadores acotados en espacios de Banach

Sea T un operador de $\mathcal{B}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, diremos que es no **singular** o **invertible**, si existe un elemento T^{-1} de $\mathcal{B}(\mathbb{F}, \mathbb{E})$ tal que

$$TT^{-1} = I_{\mathbb{E}} \quad \text{y} \quad T^{-1}T = I_{\mathbb{F}}.$$

El operador adjunto T' de T es una aplicación del espacio $\mathbb{F}'$ en $\mathbb{E}'$ definido como $T'y' = y'T$. Si consideramos el caso particular $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y consideramos A la matriz de tamaño $n \times m$ que define al operador T, entonces el operador T' está definido por la matriz traspuesta A^T. Si consideramos $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ podemos determinar si un operador es no singular por medio del determinante de la matriz A asociada a dicho operador. Sin enbargo, en el caso en el que el espacio es de dimensión infinita no podemos definir funciones como el determinante o la traza (suma de los elementos diagonales de una matriz) definidas para matrices, puesto que dichas funciones están definidas haciendo uso de forma explícita del concepto de base.

Para el caso general, presentamos alguno de los resultados más elementales y relevantes.

Teorema 1.2 (Proposición 12.5 de [9]). *Un operador T de $\mathcal{B}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ es no singular si, y sólo si, T es acotado y sobreyectivo.*

Teorema 1.3 (Lema.VI.7 de [24]). *Sea T un operador de $\mathcal{B}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, existe T^{-1} definido en todo $\mathbb{F}$, si, y sólo si, para el operador adjunto T' existe $(T')^{-1}$. Si existen dichas inversas, entonces $(T^{-1})' = (T')^{-1}$.*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Otras propiedades fundamentales para operadores acotados, que son bastante conocidas en el caso particular en el que el espacio es de dimensión finita, son las siguientes (véase Brown y Pearcy [9]).

Lema 1.3. *Sean S y T en $\mathcal{B}(\mathbb{E})$.*

(i) *Si T es no singular, entonces $(T^{-1})^{-1} = T$ y $(T^n)^{-1} = (T^{-1})^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Si S y T son no singulares, entonces ST es no singular y $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.*

(iii) $(ST)' = T'S'$.

En algunas ocasiones, nos encontraremos que para poder generalizar resultados para matrices a operadores acotados en $\mathcal{B}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, es imprescindible que dichos operadores sigan manteniendo características similares a las de las matrices. Una clase de operadores, que como pondremos de manifiesto en la sección siguiente goza de características muy similares a la de los operadores lineales en dimensión finita, son los operadores compactos.

Definición 1.11. Diremos que un operador T en $\mathcal{B}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ es **compacto** o **completamente continuo** si la sucesión de las imágenes $\{Tx_n\}$ de cualquier sucesion acotada $\{x_n\}$ de $\mathbb{E}$ contiene una subsucesión de Cauchy.

Las características generales de los operadores compactos mas importantes están recogidas en en los dos resultados siguientes.

Teorema 1.4 (Teorema VI.5.2 de [24]). *Un operador T en $\mathcal{B}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ es compacto si, y sólo si, su operador adjunto T' lo es.*

Teorema 1.5 (Teorema VI.5.4 de [24]). *Una combinación lineal de operadores compactos es un operador compacto. El producto de un operador compacto por un operador acotado es también un operador compacto.*

1.3.2 Operadores acotados no negativos en espacios de Banach reales

Consideremos ahora el conjunto de operadores $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ con $\mathbb{E}$ un espacio de Banach real generado por el cono normal K. Como generalización de los órdenes parciales inducidos

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

por el cono K en el espacio normado $\mathbb{E}$, definidos en 1.7 y 1.8, introducimos el siguiente orden parcial en $\mathcal{B}(\mathbb{E})$.

Definición 1.12. Diremos que un operador T de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ es **no negativo** (respectivamente, **positivo**) si $TK \subseteq K$ (respectivamente, $T(K \setminus \{0\}) \subset \text{int}(K)$) y lo denotaremos por $T \geq 0$ (respectivamente, $T > 0$). Análogamente para T y S en $\mathcal{B}(\mathbb{E})$, denotaremos $T - S \geq 0$ (respectivamente, $T - S > 0$) si $T \geq S$ (respectivamente, $T > S$).

Notemos que si consideramos el caso particular $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $K = \mathbb{R}^n_+$, $T \geq 0$ (respectivamente, $T > 0$) denota las matrices cuyos elementos son no negativos (respectivamente, positivos). El caso particular anterior será el considerado en todos los ejemplo que consideremos en el desarrollo de esta memoria para operadores no negativos.

Aunque el resultado siguiente es válido para K un semigrupo lineal, nosotros lo introducimos para un cono K (para más detalle ver Kreĭn y Rutman [35]).

Lema 1.4. *Si consideramos T un operador de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ y un cono K con interior, se satisfacen las propiedades siguientes:*

(i) *Si $TK \subset K$ y $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ con $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{E}$ entonces*
$$T\boldsymbol{x} \leq T\boldsymbol{y}.$$

(ii) *Si $TK \subset K$, entonces $T'K' \subset K'$. Recíprocamente, si K es cerrado y $T'K' \subset K'$ entonces $TK \subset K$.*

(iii) *Si $TK \subset K$ y existe un $\boldsymbol{x}$ en $\mathbb{E}$ tal que $T\boldsymbol{x} > 0$, entonces $T\boldsymbol{y} > 0$ para cada $\boldsymbol{y} > 0$. En particular, de $\boldsymbol{x}_1 < \boldsymbol{x}_2$ se sigue que $T\boldsymbol{x}_1 < T\boldsymbol{x}_2$.*

Dentro del conjunto de operadores no negativos, operadores con características particulares como los que introducimos a continuación, jugarán un papel muy importante, tanto en la sección siguiente, como en el capítulo 4.

Definición 1.13 (Definición 6.1 de [35]). Sea K un cono normal con interior y T un operador acotado de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$. Diremos que T es K-**irreducible**, si para todo $\boldsymbol{x} \geq 0$ con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, existe un número natural $m = m(\boldsymbol{x})$, tal que $T^m \boldsymbol{x} > 0$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Definición 1.14. Sea K un cono normal con interior y T un operador acotado de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$. Diremos que T es **K-primitivo**, si existe un número natural m tal que para todo $\boldsymbol{x} \geq 0$ con $\boldsymbol{x} \neq 0$, $T^m\boldsymbol{x} > 0$.

Como consecuencia inmediata de las definiciones 1.13 y 1.14, si un operador es K-primitivo entonces es K-irreducible y todo operador $T > 0$, con T en $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ es K-irreducible y K-primitivo.

Berman y Plemmons [8], introducen conceptos y resultados análogos a los presentados en esta sección, para el caso en el que $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ es de dimensión finita. Además, para el caso particular en el que $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ y $K = \mathbb{R}^n_+$, haciendo uso de la traza de una matriz, presentan la siguiente relación entre la definición 1.13 y 1.14.

Teorema 1.6 (Corolario 2.28 de [8]). *Una matriz K-irreducible es K-primitiva si su traza es positiva.*

1.3.3 Operadores acotados en espacios de Hilbert complejos

Consideremos en el desarrollo de esta subsección que T es un operador de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ con $\mathbb{E}$ un espacio de Hilbert complejo. En primer lugar, tenemos que por ser $\mathbb{E}$ reflexivo se tiene que $T'' = T$. Sin embargo, la característica más importante de los operadores acotados en espacios de Hilbert, es la que introducimos en la definición siguiente.

Definición 1.15. Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Hilbert y T un operador de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$. Existe un único operador T' en $\mathcal{B}(\mathbb{E})$, que recibe el nombre de **adjunto del espacio de Hilbert** de T, que satisface la siguiente igualdad

$$\langle T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, T'\boldsymbol{y}\rangle.$$

Por simplificación heremos referencia a T' simplemente como operador **adjunto** de T.

En el siguiente resultado introducimos las propiedades generales de los operadores acotados en espacios de Hilbert.

Lema 1.5 (Lema VI.10 de [25]). *Sean T y S dos operadores acotados en un espacio de Hilbert, entonces*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(i) $(T+S)' = T' + S'$;

(ii) $(\alpha T)' = \overline{\alpha} T'$;

(iii) $I' = I$ *donde* I *es el operador identidad.*

(iv) $\|T'\| = \|T\|$.

A continuación, introducimos diferentes tipos de operadores bastante conocidos por sus aplicaciones en otros campos como en teoría de la perturbación o en tratamiento de operadores diferenciables, que nosotros también utilizaremos de forma especial en el desarrollo de esta memoria.

Definición 1.16. Diremos que un operador T de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ es **normal** si $TT' = T'T$.

Dentro de los diferentes tipos de operadores normales que podemos encontrar en la literatura de espacios de Hilbert, nosotros haremos uso especialmente de los que presentamos en la definición siguiente.

Definición 1.17. Sea T un operador acotado en un espacio de Hilbert, diremos que T es

- **autoadjunto** o **hermítico** si $T' = T$;
- **definido no negativo** si es hermítico y $\langle T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \geq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}$;
- **definido positivo** si $\langle T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle > 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}$ con $\boldsymbol{x} \neq 0$.

Los conceptos de operadores definidos no negativos y definidos positivos nos permiten introducir el siguiente orden parcial

Definición 1.18. Sean S y T operadores en $\mathcal{B}(\mathbb{E})$. Diremos que

$$S \succ T \quad \text{si, y sólo si,} \quad S - T \quad \text{es definido positivo.} \tag{1.3}$$

Análogamente,

$$S \succeq T \quad \text{si, y sólo si,} \quad S - T \quad \text{es definido no negativo.} \tag{1.4}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Es fácil comprobar que (1.4) es una relación de orden parcial sobre $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ (véase Dunford y Schwartz [25]). Para dicho orden se satisfacen las propiedades presentadas para el orden parcial introducido en la definición 1.7.

Por otra parte, a partir de la definición de operador definido no negativo y definido positivo Dunford y Schwartz [25] presentan la siguiente caracterización de operador no singular.

Lema 1.6. *Un operador T definido no negativo es no singular si, y sólo si, para algún $\epsilon > 0$, $T - \epsilon I$ es un operador definido positivo.*

Como consecuencia inmediata del lema anterior tenemos que todo operador definido positivo es no singular.

Otra característica interesante de los operadores definidos no negativos, que en algunas ocasiones utilizaremos, es que tienen raíz cuadrada definida no negativa, es decir, un operador S se dice que es raíz cuadrada de T si $S^2 = T$. Al operador raíz cuadrada de T lo denotaremos por $T^{1/2}$.

Finalmente, si consideramos el caso particular $\mathbb{E} = \mathbb{C}^n$ podemos considerar la siguiente extensión del concepto de operador definido no negativo y definido positivo introducido en la definición 1.17.

Definición 1.19 (Definición 2.2 de [63]). Diremos que una matriz A es

- **real no negativa** si $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- **real positiva** si $\langle Ax, x\rangle > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0$.

1.4 Teoría espectral de operadores acotados

En esta sección consideramos que T es un operador acotado de un espacio de Banach complejo en sí mismo. En primer lugar, presentaremos los conceptos y resultados generales más importantes y en las subsecciones 1.4.2 y 1.4.3 presentaremos características y resultados particulares del espectro de los diferentes tipos de operadores estudiados en las secciones 1.3.2 y 1.3.3, respectivamente.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

1.4.1 Definiciones y propiedades generales

Se llama **resolvente** de T y lo denotamos por $\varrho(T)$ al conjunto de números complejos λ para los cuales $\lambda I - T$ es no singular. Se llama **espectro** de T y lo denotamos por $\sigma(T)$ al conjunto complementario de $\varrho(T)$.

La resolvente $\varrho(T)$ es un conjunto abierto y el espectro $\sigma(T)$ es un conjunto compacto. Llamaremos **radio espectral** de T y lo denotaremos por $\rho(T)$ a

$$\rho(T) = \sup \|\sigma(T)\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Por otra parte, en algunas ocasiones resulta interesante dividir los puntos de $\sigma(T)$ en los siguientes subconjuntos (ver Dunford y Schwartz [24]):

(a) El **espectro puntual** de T, denotado por $\sigma_p(T)$, que está formado por el conjunto de puntos $\lambda \in \sigma(T)$ tal que $\lambda I - T$ no es biyectiva. Es decir,

$$\lambda \in \sigma_p(T) \quad \text{si, y sólo si,} \quad Tx = \lambda x \quad \text{para algún} \quad x \in \mathbb{E},\ x \neq 0.$$

(b) El **espectro continuo** de T, denotado por $\sigma_c(T)$, que está formado por el conjunto de puntos $\lambda \in \sigma(T)$ tal que $\lambda I - T$ es biyectiva y $(\lambda I - T)\mathbb{E}$ es denso en $\mathbb{E}$, pero $(\lambda I - T)\mathbb{E} \neq \mathbb{E}$.

(c) El **espectro residual** de T, denotado por $\sigma_r(T)$, que está formado por el conjunto de puntos $\lambda \in \sigma(T)$ tal que $\lambda I - T$ es biyectiva pero $(\lambda I - T)\mathbb{E}$ no es denso en $\mathbb{E}$.

Los conjuntos $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ y $\sigma_r(T)$ son disjuntos y

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

además se satisfacen las siguiente cadena de inclusiones:

$$\sigma_r(T) \subseteq \sigma_p(T') \subseteq \sigma_r(T) \cup \sigma_p(T) \tag{1.5}$$

Notemos que si T es un operador compacto, entonces $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. En el caso en el que $\mathbb{E}$ sea de dimensión finita, es decir, T una matriz, entonces $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

En el siguiente resultado presentamos algunas de las propiedades más importantes del espectro de un operador (ver Brown y Pearcy [9]).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Lema 1.7. *Sean S y T dos operadores de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$.*

(a) $\rho(TS) = \rho(ST)$;

(b) $\sigma(T') = \sigma(T)$;

(c) *Si existe un operador no singular B en $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ tal que $S = BTB^{-1}$, entonces $\sigma(S) = \sigma(T)$.*

A continuación presentamos uno de los resultados más importantes y útiles a la hora de caracterizar el espectro de un operador (véase Dunford Schwartz [24]).

Teorema 1.7 (Teorema de aplicaciones espectrales). *Si f está en $\mathcal{F}(T)$, entonces*

$$f(\sigma(T)) = \sigma(f(T)),$$

donde $\mathcal{F}(T)$ es el conjunto de funciones analíticas en algún entorno de $\sigma(T)$.

Del resultado anterior se deduce que si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $\lambda^n \in \sigma(T^n)$.

Por otra parte, como ponen de manifiesto los siguientes resultados, el radio espectral juega un papel muy importante en la determinación de la convergencia de sucesiones y series de operadores (véase, por ejemplo Kato [34]).

Teorema 1.8. *Sea T un operador de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} T^n = 0 \quad \textit{si, y sólo si,} \quad \rho(T) < 1.$$

Para terminar esta sección, introducimos el siguiente resultado que nos caracteriza la convergencia y la suma, de una serie de operadores, en función del valor del radio espectral de dicho operador, que se conoce con el nombre de "series de Neumann".

Teorema 1.9. *Sea T un operador acotado. Si $\rho(T) < 1$, entonces $I-T$ es no singular y se satisface la siguiente igualdad*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

1.4.2 Espectro de un operador no negativo

Consideramos $\mathbb{E}$ un espacio de Banach real generado por el cono normal K. En esta subsección vamos a centrar nuestra atención en las propiedades y características que satisface $\rho(T)$, donde $T \geq 0$ es un operador de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$.

Kreĭn y Rutman [35] como generalización a operadores de los conocidos resultados introducidos por Frobenius sobre el radio espectral de matrices no negativas introducen los siguientes teoremas para el caso en el que el operador T sea compacto.

Teorema 1.10 (Teorema 6.1 de [35]). *Sea $T \geq 0$ un operador compacto, tal que $\sigma(T)$ contiene por lo menos un punto distinto de cero. Entonces existe un valor propio $\rho = \rho(T)$, mayor o igual en módulo que el resto de valores propios, para el cual existe por lo menos un vector propio $\boldsymbol{x} \geq 0$ tal que $T\boldsymbol{x} = \rho\boldsymbol{x}$ y también existe por lo menos un vector propio $\boldsymbol{x}' \geq 0$ tal que $T'\boldsymbol{x}' = \rho\boldsymbol{x}'$.*

Si además T es K-irreducible, entonces se satisface el siguiente resultado.

Teorema 1.11 (Teorema 6.3 de [35]). *Supongamos que K es un cono normal con interior y T un operador compacto K-irreducible. Entonces T satisface las condiciones siguientes:*

(a) *T tiene un único vector propio $\boldsymbol{x} > 0$ tal que $T\boldsymbol{x} = \rho(T)\boldsymbol{x}$.*

(b) *T tiene un único vector propio $\boldsymbol{x} > 0$ tal que $T'\boldsymbol{x}' = \rho(T)\boldsymbol{x}'$.*

(c) *$\rho(T)$ es mayor en módulo que el resto de valores propios de T.*

Recíprocamente, si un operador $T \geq 0$ satisface las condiciones (a), (b) *y* (c) *entonces T es K-irreducible.*

Kreĭn y Rutman [35] también introdujeron resultados análogos a los teoremas 1.10 y 1.11 para el caso en el que $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, que también podemos encontrarlos en Berman y Plemmons [8].

Por otra parte Marek y Szyld [38] para poder generalizar algunos resultados de matrices no negativas a operadores introducen la llamada propiedad "d", diciendo que un operador

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

$T \in \mathcal{B}(\mathbb{E})$ tiene la propiedad "d" si para el operador T' existe un vector $\boldsymbol{x}' \in K'$, tal que, $T'\boldsymbol{x}' = \rho(T)\boldsymbol{x}'$, pero en la mayoría de sus resultados exigen la existencia de un vector $\boldsymbol{x} \in K$ tal que $T\boldsymbol{x} = \rho(T)\boldsymbol{x}$, por tanto, nosotros utilizaremos la siguiente definición de propiedad "d".

Definición 1.20. Diremos que un operador $T \in \mathcal{B}(\mathbb{E})$ tiene la **propiedad "d"** si para los operadores T y T' existen vectores $\boldsymbol{x} \in K$ y $\boldsymbol{x}' \in K'$, respectivamente, tales que,

$$T\boldsymbol{x} = \rho(T)\boldsymbol{x} \quad \text{y} \quad T'\boldsymbol{x}' = \rho(T)\boldsymbol{x}'.$$

El motivo de introducir la propiedad "d" es poder generalizar a operadores acotados resultados análogos a los de las matrices, sin tener que exigir que estos sean compactos.

Utilizando la propiedad "d" en el sentido de Marek y Szyld [38] tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.8. (i) *(Corolario 3.2 de [38]) Sea $T \geq 0$ y $\boldsymbol{x} \geq 0$ tal que $T\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x} \geq 0$. Entonces $\alpha \leq \rho(T)$. Además si T tiene la propiedad "d" y $T\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x} > 0$, entonces $\alpha < \rho(T)$.*

(ii) *(Lema 3.3 de [38]) Sea $T \geq 0$ con la propiedad "d" y sea $\boldsymbol{x} > 0$ tal que $\alpha\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x} \geq 0$. Entonces $\rho(T) \leq \alpha$. Además, si $\alpha\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x} > 0$ entonces $\rho(T) < \alpha$.*

Resultados análogos al lema anterior junto con un estudio bastante amplio en el que no sólo aparecen caracterizaciones del radio espectral, si no de todos los elementos del espectro de T, podemos encontrarlos en Berman y Plemmons [8] para el caso particular en el que $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$.

El siguiente teorema es otro tipo de resultados que también podemos encontrar en Berman y Plemmons [8] para matrices y que Kreĭn y Rutman [35] introdujeron para operadores.

Teorema 1.12 (Lema 6.1 de [35]). *Sea $T \geq 0$, tal que para algún $\boldsymbol{v} > 0$ se satisface $T\boldsymbol{v} = \rho(T)\boldsymbol{v}$. Entonces para todo $\boldsymbol{x} > 0$, la sucesión $\left\{ \left(\frac{T}{\rho(T)} \right)^j \boldsymbol{x} \right\}_{j=1}^{\infty}$ se encuentra a una distancia positiva de la frontera de K.*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Notemos que para $y_j = \left(\frac{T}{\rho(T)}\right)^j x$, en el caso en el que el espacio sea de dimensión finita y $K = \mathbb{R}^n_+$ el teorema 1.12 nos dice que para una matriz $T \geq 0$, la sucesión de vectores $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ satisface la condición $y_j \geq \delta u > 0$ para algún $\delta > 0$ y u un vector con todas las componentes iguales a 1.

Nosotros, para el caso en el que el operador T sea K-primitivo y satisfaga la propiedad "d" introducimos el siguiente resultado.

Teorema 1.13. *Sea T un operador K-primitivo con la propiedad "d", entonces para todo $x \geq 0$ con $x \neq 0$ existe un entero $j_0 \geq 0$ tal que la sucesión $\left\{\left(\frac{T}{\rho(T)}\right)^j x\right\}_{j=j_0}^{\infty}$ se encuentra a una distancia positiva de la frontera de K.*

Demostración. Si T es K-primitivo, en particular es K-irreducible, por lo tanto del teorema 1.11 tenemos que existe un vector $x > 0$ tal que $Tx = \rho(T)x$.

Por otra parte, por la K-primitividad de T tenemos que para todo $x \geq 0$ existe un número natural m tal que $y = T^m x > 0$. Entonces, por el teorema 1.12 la sucesión de vectores $\left\{\left(\frac{T}{\rho(T)}\right)^k y\right\}_{k=1}^{\infty}$ está a una distancia positiva de la frontera de K, o lo que es equivalente, para todo $x \geq 0$ la sucesión de vectores $\left\{\left(\frac{T}{\rho(T)}\right)^j x\right\}_{j=j_0}^{\infty}$ con $j_0 = m + 1$ se encuentra a una distancia positiva de K. ∎

1.4.3 Espectro de un operador definido no negativo

Ahora vamos a considerar T un operador acotado de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ con $\mathbb{E}$ un espacio de Hilbert complejo. Concretamente, vamos a presentar las propiedades más importantes del espectro de operadores normales.

Lema 1.9 (Lema X.3.3.(ii) de [25]). *Sea T un operador normal de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$, entonces se satisface*

(i) $\rho(T) = \|T\|$;

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Volver al índice/Tornar a l'index

(ii) *el espectro residual* $\sigma_r(T)$ *es vacío.*

Como consecuencia directa del lema anterior y las inclusiones (1.5) tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.1. *Sea* T *un operador normal de* $\mathcal{B}(\mathbb{E})$. *Si* $\lambda \in \sigma_p(T)$, *entonces* $\lambda \in \sigma_p(T')$.

Por otra parte, el espectro de los diferentes tipos de operadores normales introducidos en la definición 1.16, queda totalmente caracterizado por el siguiente resultado.

Teorema 1.14 (Teorema X.4.1.2 de [25]). *Un operador normal* T *de* $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ *es hermítico (respectivamente, definido positivo) si, y sólo si, su espectro está contenido en el conjunto de los números reales (respectivamente, en el conjunto de los números reales no negativos).*

Finalmente, en el resultado siguiente, haciendo uso del orden parcial introducido en la subsección 1.3.3, se establece una relación entre el espectro de dos operadores compactos y hermíticos.

Teorema 1.15 (Teorema X.4.3 de [25]). *Sean* T *y* S *dos operadores compactos y hermíticos. Sean* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *las respectivas sucesiones de valores propios positivos ordenadas en orden decreciente con las repeticiones de acuerdo con la multiplicidad para cada uno de los valores propios. Si* $T \preceq S$, *entonces* $\lambda_n \leq \mu_n$ *para* $n = 1, 2, \ldots$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Capítulo 2

Métodos iterativos

2.1 Introducción

Los métodos iterativos para la resolución de un sistema lineal de la forma

$$Ax = \boldsymbol{b} \tag{2.1}$$

donde A es una matriz no singular de tamaño $n \times n$, $\boldsymbol{x}$ es el vector de incógnitas y $\boldsymbol{b}$ es un vector dado; están basados en la idea de construir de alguna manera un sistema equivalente de la forma

$$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c},$$

que resolvemos generando una sucesión de vectores que converja a la única solución $A^{-1}\boldsymbol{b}$ del sistema (2.1).

Dada la cantindad de problemas de diversa naturaleza que se reducen a resolver un sistema lineal de la forma (2.1), se han desarrollado numerosos métodos iterativos para su resolución, los cuales podemos clasificar en dos grandes grupos: secuenciales y paralelos, para los cuales en las secciones 2.2 y 2.3, respectivamente, serán introducidos los conceptos y propiedades más importantes de cada uno de ellos.

La modelización matemática de diversos problemas como la simulación de sistemas, o los procesos estocásticos pueden dar lugar a un sitema lineal de la forma (2.1) donde A es

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

un operador acotado en un espacio de Banach general. Por tanto, realizaremos el estudio de los métodos iterativos secuenciales para dicho caso general.

En la sección 2.4 realizaremos una breve exposición sobre las diversas líneas de investigación que hasta ahora han llevado a cabo los diversos autores que han abordado el problema de determinar la convergencia, así como la velocidad de convergencia de los métodos iterativos secuenciales y paralelos, que es el principal objeto de esta trabajo. Por último, especificaremos las líneas de investigación que nosotros continuamos y los puntos que de cada una de ellas trataremos en el desarrollo de la memoria.

2.2 Métodos iterativos secuenciales

En esta sección como ya hemos mencionado antes, vamos a considerar el sistema lineal (2.1) donde A es un operador acotado en un espacio de Banach general.

En primer lugar, como generalización del concepto clásico de partición para matrices presentamos la siguiente definición.

Definición 2.1. Sea A un operador acotado, diremos que $A = M - N$ es una **partición** de A si M es no singular y el operador N no es idénticamente nulo.

Ahora, si consideramos la partición $A = M - N$ del sistema (2.1) obtenemos el esquema iterativo secuencial

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b, \quad k \geq 0, \tag{2.2}$$

donde el operador $M^{-1}N$ recibe el nombre de **operador de iteración**.

La convergencia del esquema iterativo (2.2) se puede estudiar mediante el siguiente análisis del error.

Sea $x^\star$ la solución exacta del sistema (2.1), entonces

$$x^\star = M^{-1}Nx^\star + M^{-1}b.$$

Consideremos $e^{(j)} = M^{-1}Ne^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots,$ donde

$$e^{(j)} = x^{(j)} - x^\star$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

es el **vector error** en la j-ésima iteración, entonces:

$$e^{(j)} = (M^{-1}N)^j e^{(0)}, \quad j = 1, 2, \dots ,$$

por lo tanto, el esquema iterativo será convergente si, y sólo si,

$$\lim_{j \to \infty} (M^{-1}N)^j = 0,$$

por consiguiente, de la expresión anterior y como consecuencia directa del teorema 1.8 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.1. *El esquema iterativo (2.2) converge a la solución* $A^{-1}\boldsymbol{b}$ *del sistema (2.1) si, y sólo si,* $\rho(M^{-1}N) < 1$, *donde* $\rho(M^{-1}N)$ *es el radio espectral del operador de iteración* $M^{-1}N$.

Por lo tanto, el problema de determinar la convergencia del esquema iterativo secuencial (2.2) se reduce a determinar el valor de $\rho(M^{-1}N)$. Por otra parte, el valor del radio espectral también nos proporciona el siguiente concepto de velocidad de convergencia.

Definición 2.2. Se llama **velocidad asintótica de convergencia** de un operador acotado T al valor

$$R_\infty(T) = -\ln \rho(T).$$

De la definición anterior se deduce que el estudio de la velocidad de convergencia del esquema iterativo (2.2), se reduce a determinar el valor de $\rho(M^{-1}N)$, además, cuanto más pequeño sea éste, mayor será la velocidad de convergencia.

Los métodos iterativos secuenciales clásicos, para el caso particular en el que A es una matriz, son los siguientes:

- **Jacobi**

$$M = D \quad \text{y} \quad N = -L - U.$$

- **JOR**

$$M = \omega^{-1}D \quad \text{y} \quad N = \omega^{-1}[(1-\omega)D - \omega L - \omega U].$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

- **Gauss-Seidel**

$$M = D - L \quad \text{y} \quad N = -U.$$

- **SOR**

$$M = \omega^{-1}(D - \omega L) \quad \text{y} \quad N = \omega^{-1}[(1-\omega)D - \omega U].$$

donde D es la diagonal de A, $-L$ es la parte estrictamente triangular inferior de A y $-U$ es la parte estrictamente triangular superior de A.

A continuación introducimos algunos tipos de matrices a partir de los cuales se puede establecer la convergencia de los métodos iterativos clásicos.

Definición 2.3. Sea $A = [a_{ij}]$ con $1 \leq i, j \leq n$ una matriz real, se dice que

(i) A es **diagonal dominante** si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.3}$$

(ii) A es **irreduciblemente diagonal dominante** si es una matriz irreducible y diagonal dominante con al menos una de las desigualdades (2.3) estricta.

(iii) A es una M-**matriz**, si $a_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$ y $A^{-1} \geq 0$.

El teorema siguiente recoge una serie de resultados para los métodos iterativos clásicos que son bastante conocidos (véase por ejemplo Young [63]).

Teorema 2.1. *Sea A una matriz no singular.*

(i) *Si A es una M-matriz, el método de Jacobi y Gauss-Seidel convergen.*

(ii) *Si A es irreduciblemente diagonal dominante, entonces los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel, JOR y SOR (estos últimos para $0 < w \leq 1$) convergen.*

Teorema 2.2. *Sea A una matriz no singular real y simétrica con elementos positivos en la diagonal. Entonces, el método JOR converge si, y sólo si, A y $2w^{-1}D - A$ son definidas positivas*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

En el siguiente resultado, que puede verse en Young [63], se comparan las velocidades de convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.

Teorema 2.3 (Teorema de Stein-Rosemberg). *Sea $\mathcal{J}$ la matriz de iteración de método de Jacobi y $\mathcal{L}$ la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel. Si $\mathcal{J} \geq 0$, entonces se satisface una y sólo una de las siguientes relaciones:*

(i) $\rho(\mathcal{J}) = \rho(\mathcal{L}) = 0$;

(ii) $\rho(\mathcal{L}) < \rho(\mathcal{J}) < 1$;

(iii) $\rho(\mathcal{J}) = \rho(\mathcal{L}) = 1$;

(iv) $1 < \rho(\mathcal{J}) < \rho(\mathcal{L})$.

Los resultados anteriores de convergencia y de comparación, no se pueden generalizar a operadores acotados en un espacio de Banach general porque utilizan de forma explícita, el concepto de base de un espacio vectorial. Sin embargo, Varga [56] como generalización de los resultados de convergencia y comparación para los métodos iterativos clásicos, introduce la definición y el resultado siguiente.

Definición 2.4. Sea A una matriz, diremos que la partición $A = M - N$ es **regular** si $M^{-1} \geq 0$ y $N \geq 0$.

Teorema 2.4 (Teorema 3.2 de [56]). *Sea A una matriz no singular y $A = M - N$ una partición regular. Entonces*

$$\rho(M^{-1}N) < 1 \quad \textit{si, y sólo si,} \quad A^{-1} \geq 0$$

A partir de la definición 2.4 se han introducido diferentes tipos de particiones que a continuación presentamos generalizándolos a operadores.

Definición 2.5. Sea A un operador acotado diremos que la partición $A = M - N$ es

- **regular** si $M^{-1} \geq 0$ y $N \geq 0$,
- **no negativa** si $M^{-1} \geq 0$, $M^{-1}N \geq 0$ y $NM^{-1} \geq 0$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

- **débil no negativa del primer tipo** si $M^{-1} \geq 0$ y $M^{-1}N \geq 0$, **débil no negativa del segundo tipo** si $M^{-1} \geq 0$ y $NM^{-1} \geq 0$,

- **débil del primer tipo** si $M^{-1}N \geq 0$, **débil del segundo tipo** si $NM^{-1} \geq 0$.

Nos referiremos a las particiones introducidas en la definición anterior con el nombre de *particiones no negativas.* Además, por simplificación, diremos que la partición es **débil no negativa** (respectivamente, **débil**) si es débil no negativa del primer o del segundo tipo (respectivamente, si es débil del primer o del segundo tipo).

Notemos que no todos los autores utilizan la misma clasificación para particiones no negativas introducida en la definición 2.5. La definición de partición no negativa dada en dicha definición, es la misma que la de débil regular de Ortega y Rheinboldt [47], aunque otros autores, como Amedjoe [2], Beauwens [4], Berman y Plemmons [8], Elsner [26], Neumann y Plemmons [44] y O'Leary y White [45] consideran partición débil regular como débil no negativa del primer tipo y partición no negativa como partición débil del primer tipo. Marek y Szyld [38] también utilizan partición débil regular como partición débil no negativa del primer tipo y partición débil como partición débil del primer tipo.

Entre los diferentes tipos de particiones que hemos englobado con el nombre de particiones no negativas, se satisfacen las relaciones que recoge el siguiente resultado, que es una generalización de los Corolarios 3.1 y 6.1 de Woźnicki para operadores acotados en espacios de Banach reales.

Teorema 2.5. *Sea A un operador no singular. Una partición regular de A es una partición no negativa de A. Una partición no negativa de A es una partición débil no negativa del primer y del segundo tipo de A. Una partición débil no negativa del primer (respectivamente, segundo) tipo de A es es una partición del primer (respectivamente, segundo) tipo de A. Los recíprocos no son ciertos.*

Como veremos en la sección 2.4 y como pondremos de manifiesto en el capítulo 3, a partir del teorema 2.4 se ha desarrollado toda una teoría de convergencia para particiones no negativas.

Por otra parte, en función del concepto de matriz definida positiva también se introduce el siguiente tipo de partición.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Definición 2.6. Sea A una matriz, diremos que la partición $A = M - N$ es **P-regular** si $M^T + N$ es definida positiva.

En cambio, a partir de las particiones P-regulares no se han introducido ningún otro tipo de partición, y excepto el resultado de convergencia que recordaremos en el capítulo 3, tampoco se han introducido nuevos resultados. Con el objetivo de introducir nuevos resultados de convergencia en función de operadores definidos positivos en espacios de Hilbert complejos, generalizamos en la definición siguiente el concepto de partición P-regular a operadores e introducimos nuevos tipos de particiones.

Definición 2.7. Sea A un operador acotado en un espacio de Hilbert complejo. Diremos que la partición $A = M - N$ es

- **P-regular** si $M' + N \succ 0$;
- **débil definida no negativa del primer tipo** si $M^{-1}N \succeq 0$ y **débil definida no negativa del segundo tipo** si $NM^{-1} \succeq 0$.

Nos referiremos a los diferentes tipos de particiones introducidos en la definición anterior con el nombre de *particiones definidas positivas.* Por simplificación también diremos que una partición es **débil definida no negativa** si es débil definida no negativa del primer o del segundo tipo.

Como generalización del teorema 3.1 de Woźnicki [61] a operadores y de la definición 2.1 de partición de un operador acotado y no singular A, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.1. *Sea A un operador acotado no singular en un espacio de Banch general y $A = M - N$ una partición, entonces*

$$M^{-1}NA^{-1} = A^{-1}NM^{-1}$$

y los operadores $M^{-1}N$ y $A^{-1}N$ conmutan, así como los operadores NM^{-1} y NA^{-1} también conmutan, es decir

$$M^{-1}NA^{-1}N = A^{-1}NM^{-1}N \quad y \quad NM^{-1}NA^{-1} = NA^{-1}NM^{-1}.$$

Finalmente, para culaquier partición también se pueden establecer las relaciones que introducimos en el resultado siguiente.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Lema 2.2. *Sea A un operador acotado no singular en un espacio de Banach general y $A = M - N$ una partición. Entonces se satisfacen las siguientes relaciones*

(i) $M^{-1}N = (I + A^{-1}N)^{-1}A^{-1}N$.

(ii) $M^{-1}N = (A^{-1}M)^{-1}(A^{-1}M - I)$.

(iii) $NM^{-1} = NA^{-1}(I + NA^{-1}N)^{-1}$.

(iv) $NM^{-1} = (MA^{-1} - I)(MA^{-1})^{-1}$.

Como consecuencia directa del lema anterior y el teorema 1.7 obtenemos el lema siguiente.

Lema 2.3. *Sea A un operador acotado no singular en un espacio de Banach general.*

(i) *Si $\lambda \in \sigma(M^{-1}N)$, $\mu \in \sigma(A^{-1}N)$ con $\mu \neq -1$ y $\beta \in \sigma(A^{-1}M)$ con $\beta \neq 0$, entonces*

(a) $\lambda = \dfrac{\mu}{1+\mu}$.

(b) $\lambda = \dfrac{\beta - 1}{\beta}$.

(ii) *Si $\lambda \in \sigma(NM^{-1})$, $\mu \in \sigma(NA^{-1})$ con $\mu \neq -1$ y $\beta \in \sigma(MA^{-1})$ con $\beta \neq 0$, entonces se satisfacen las igualdades* (a) *y* (b).

2.3 Métodos iterativos paralelos

En los últimos años los avances de la computación paralela hacen efectivo la utilización de algoritmos paralelos para la resolución del sistema lineal (2.1). Uno de esos esquemas iterativos paralelos consiste en la paralelización del esquema iterativo secuencial (2.2), que fue introducido por O'Leary y White [45] a partir del concepto de multipartición que a continuación presentamos.

Definición 2.8. Diremos que $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ es una **multipartición** de A si

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

(i) $A = M_l - N_l$ es una partición de A, $l = 1 \ldots p$

(ii) $E_l \geq 0$ es una matriz diagonal, $l = 1 \ldots p$

(iii) $\sum_{l=1}^{p} E_p = I$.

De esta forma obtenemos el esquema iterativo paralelo

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + Gb, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

donde

$$H = \sum_{l=1}^{p} E_l M_l^{-1} N_l \quad \text{y} \quad G = \sum_{l=1}^{p} E_l M_l^{-1}. \tag{2.5}$$

Mediante un razonamiento análogo al realizado para el análisis del error del esquema iterativo secuencial (2.2) obtenemos que el esquema iterativo paralelo (2.4) converge a la solución del sistema (2.1) si, y sólo si, $\rho(H) < 1$.

Por otra parte, como generalización de la definiciones 2.5 y 2.7 diremos que: la multipartición $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ es **regular, débil no negativa del primer** (respectivamente, **segundo**) **tipo, débil del primer** (respectivamente, **segundo**) **tipo**, si cada una de las particiones que la forman lo son.

Análogamente, diremos que la multipartición $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ es P-**regular, débil definida no negativa del primer**(respectivamente, **segundo**), **tipo** si cada una de las particiones que la forman lo son.

2.4 Antecedentes y estado actual

Como ya hemos mencionado en la introducción de este capítulo, los problemas cuyo modelo matemático nos conducen a la resolución de un sistema lineal de la forma (2.1), pueden tener naturalezas tan distintas como puede ser el cálculo de estructuras, la discretización de una ecuación en derivadas parciales, etc; lo cual se traduce en la obtención

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

de matrices de coeficientes A con características diferentes. En la práctica, la mayoría de dichas matrices pueden clasificarse en dos grupos: matrices monótonas, es decir, aquellas para las cuales $A^{-1} \geq 0$ y las matrices definidas positivas.

A la hora de determinar la convergencia del esquema iterativo secuencial (2.2), a partir del resultado introducido por Varga en 1960 (véase Varga [56]) para matrices monótonas y particiones regulares, se ha desarrollado toda una teoría de convergencia para particiones no negativas siguiendo diferentes líneas de investigación. Por una parte, Vandergraft [57] introduce la generalización del teorema 2.4 para particiones débiles no negativas del primer tipo respecto al orden parcial inducido por un cono normal K. Posteriormente, autores como Miller y Neumann [40], Song [52, 53] introducen nuevas condiciones necesarias y sufiecientes para particiones débiles del primer tipo de matrices no singulares en general. Más recientemente, Woźnicki [61] al introducir las particiones del segundo tipo, presenta nuevas condiciones de convergencia, tanto para particiones débiles no negativas del primer y segundo tipo, como para particiones débiles del primer y del segundo tipo, pero en ambos casos para matrices monótonas. Siguiendo una línea diferente, Berman y Plemmons [8] introducen, para particiones débiles del primer tipo de una matriz no singular en general, una condición suficiente de convergencia en función de productos del tipo matriz–vector. En cambio, para matrices definidas positivas sólo contamos con el resultado de convergencia para particiones P-regulares, a partir del cual no se han introducido nuevos resultados ni otro tipo de particiones.

Respecto al problema de comparar la velocidad de convergencia de dos métodos iterativos de una misma matriz, es decir, comparar los radios espectrales de sus respectivas matrices de iteración, al que nos referimos como resultados de comparación, partiendo del resultado introducido por Varga [56] y el resultado posterior de la tesis doctoral de Woźnicki en 1973 (ver trabajos suyos posteriores [61]), ambos para particiones regulares de matrices monótonas se ha desarrollado toda una teoría de comparación para particiones no negativas. Autores como Csordas y Varga [22] trabajando con particiones regulares de matrices monótonas introducen condiciones más generales. Sin embargo, otros autores lo que hacen es generalizar los resultados de comparación introducidos por Varga y Woźnicki antes mencionados, para otros tipos de particiones. Por ejemplo, Elsner [26] gneraliza dichos resultados para el caso en el que una partición sea regular y la otra débil no negativa del primer tipo, Marek y Szyld [38] los generalizan para particiones débiles y convergentes, pero como novedad importante, para operadores acotados en espacios de Banach reales

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

generado por un cono normal K, además también introducen para particiones regulares de operadores acotados la equivalencia entre la condición de comparación introducida por Woźnicki en 1973 (véase su trabajo posterior [61]) y la monotonía de sucesiones generadas a partir del esquema iterativo (2.2). Woźnicki [61] utilizando las particiones del segundo tipo, generaliza el mencionado resultado de Varga y el suyo propio para particiones débiles no negativas del mismo tipo y para particiones débiles no negativas de diferentes tipo, respectivamentes; además utilizando la matriz traspuesta en una de las matrices de una de las particiones introducen nuevas condiciones de comparación para particiones débiles no negativas del mismo y distinto tipo, aunque dichos resultados sin la condición adicional de que la matriz A sea simétrica, no son ciertos en general como pondremos de manifiesto en el capítulo 4. Autores con Miller y Neumann [40], Beauwens [4] y Song [52, 53] siguiendo la línea de Csordas y Varga [22] introducen nuevas condiciones generales, esta vez para particiones débiles del primer tipo de matrices no singulares en general. Para matrices definidas positivas, al igual que en el problema de determinar la convergencia del esquema iterativo (2.2), solo contamos con un resultado de comparación introducido recientemente por Nabben [41].

Los resultados de convergencia y comparación para matrices monótonas y particiones débiles no negativas del primer tipo y el resultado de convergencia para matrices definidas positivas y particiones P-regulares, que acabamos de mencionar, son utilizados como herramienta para introducir resultados de convergencia y comparación para métodos iterativos alternativos. Por ejemplo, Lankzron, Rose y Szyld [36] los utilizan para aportar teoremas de convergencia y comparación del método iterativo en dos etapas, es decir, los métodos que consisten en aproximar la solución del sistema

$$Mx^{(k+1)} = Nx^k + b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $A = M - N$ recibe el nombre de partición externa, de forma iterativa, considerando para ello la partición interna $M = P - Q$; así como para los llamados métodos iterativos anidados, obtenidos como generalización de los métodos en dos etapas al realizar sucesivas particiones internas. Benzi y Szyld [5] también utilizan dichos resultados para introducir teoremas de convergencia y comparación para el método iterativo

$$\begin{aligned} x^{(k+1/2)} &= M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b, \\ x^{(k+1)} &= P^{-1}Qx^{(k+1/2)} + P^{-1}b, \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.6}$$

donde $A = M - N = P - Q$ son dos particiones.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Por otra parte, a la hora de abordar el problema de resolver el sistema de ecuaciones lineales (2.1) por métodos iterativos paralelos también se han seguido diferentes líneas de investigación. Autores como White [59], Frommer y Mayer [30] y Deren [23] han presentado la paralelización de algoritmos secuenciales clásicos. Otros autores como Bru, Elsner y Neumann [10], Frommer [29], Elsner y Neumann [28] y Bru, Migallón y Penadés [12, 13] han introducido y estudiado nuevos algoritmos paralelos centrados en obtener el mayor rendimiento posible de la arquitectura paralela y el problema en concreto con el que se esté trabajando, centrando para ello su investigación en el reparto del trabajo entre los diferentes procesadores y en la forma de actualizar la aproximación a la solución obtenida en las diferentes iteraciones. Sin embargo, los únicos resultados de convergencia generales para el esquema iterativo pararelo (2.4) son los introducidos por O'Leary y White [45] para el caso en el que la matriz A sea monótona y la multipartición débil no negativa del primer tipo, así como para el caso en el que la matriz A sea definida positiva y la multipartición P-regular. Para dichos casos, Elner [26] y Nabben [41], respectivamente, introducen cotas superiores e inferiores del radio espectral de la matriz de iteración del esquema iterativo paralelo (2.4).

2.5 Objetivos de la memoria

El objetivo global de esta memoria es establecer resultados de convergencia y comparación de los esquemas iterativos (2.2) y (2.4) para los distintos tipos de particiones y multiparticiones, respectivamente, introducidos en las secciones anteriores.

Para el esquema iterativo secuencial (2.2) nuestros objetivos son: para particiones no negativas, utilizando las particiones del segundo tipo introduciremos nuevas condiciones de convergencia para particiones débiles no negativas y para particiones débiles de operadores acotados en espacios de Banach, además siguiendo una línea similar a la de Marek y Szyld [38] también extenderemos e introduciremos nuevas condiciones de comparación para particiones no negativas de operadores acotados en un espacio de Banach real. Para las particiones definidas positivas, extenderemos el resultado de convergencia para particiones P-regulares de matrices definidas positivas a operadores acotados en espacios de Hilbert complejos, e introduciremos nuevas condiciones de convergencia para particiones débiles definidas no negativas de operadores acotados en espacios de Hilbert, por primera vez sin ninguna condición adicional sobre el operador acotado A, excepto la de ser no singu-

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Volver al índice/Tornar a l'index

lar. Además también extenderemos el resultado de comparación introducido por Nabben [41] para particiones P-regulares de matrices definidas positivas a operadores acotados en espacios de Hilbert, e introduciremos nuevos resultados de comparación para particiones débiles definidas no negativas. En el capítulo 5 estableremos las diversas relaciones existentes entre las distintas condiciones de comparación introducidas en el capítulo 4.

En el capítulo 6 utilizando los nuevos resultados de convergencia y comparación para particiones, generalizaremos el resultado de convergencia de O'Leary y White [45] para multiparticiones débiles no negativas del primer tipo, para multiparticiones débiles no negativas del segundo tipo, aunque con la condición adicional de que las matrices E_l para $l = 1, 2, \ldots, p$ sean escalares. Utilizando la misma condición adicional también introduciremos resultados de convergencia para particiones débiles definidas no negativas, tanto del primer tipo como del segundo tipo. Por otra parte, utilizando el concepto de matriz real positiva, introduciremos un resultado de convergencia para multiparticiones débiles. Finalmente, extenderemos el resultado de comparación de Elsner [26] para multiparticiones débiles no negativas del segundo tipo e introduciremos nuevos resultados de comparación para particiones débiles no negativas, débiles definidas no negativas y débiles.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Capítulo 3

Teoremas de convergencia para particiones

3.1 Introducción

En este capítulo, así como en los capítulos 4 y 5, consideramos el sistema lineal

$$Ax = b, \tag{3.1}$$

donde A es un operador no singular y acotado en un espacio de Banach real o en un espacio de Hilbert complejo, x es el vector de incógnitas y b es un vector dado. La solución del sistema (3.1) puede obtenerse a partir del esquema iterativo secuencial

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b, \quad k \geq 0, \tag{3.2}$$

donde $A = M - N$ es una partición de A.

Nuestro objetivo en este capítulo va a ser la primera y principal cuestión que se debe abordar a la hora de resolver el problema que acabamos de plantear, es decir, establecer condiciones necesarias y suficientes para que el esquema iterativo secuencial (3.2) sea convergente, o lo que es equivalente según hemos visto en la sección 2.2, que se satisfaga la desigualdad $\rho(M^{-1}N) < 1$.

La convergencia del esquema iterativo (3.2) ha sido abordada por diversos autores para el caso particular en el que el espacio vectorial es de dimensión finita y principalmente,

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

para dos tipos de matrices; es decir, para matrices monótonas y para matrices definidas positivas, que son las que normalmente aparecen en la práctica.

A partir de los resultados de convergencia introducidos por Varga [56] en 1960 para particiones regulares de matrices monótonas, y que podemos considerar como la generalización de los resultados de convergencia para métodos iterativos concretos como Jacobi y Gauss–Seidel, diversos autores han introducido resultados de convergencia para los diferentes tipos de particiones que en la definición 2.5 hemos denominado particiones no negativas. Más concretamente, autores como Berman y Plemmons [8], Beauwens [4] y Song [52, 53] introducen resultados de convergencia para particiones débiles no negativas del primer tipo y para particiones débiles del primer tipo; recientemente, Woźnicki al introducir las particiones débiles no negativas del segundo tipo y las particiones débiles del segundo tipo aporta resultados de convergencia para dichos tipos de particiones.

Partiendo de los resultados de convergencia aportados por los diferentes autores que acabamos de mencionar, en la sección 3.2 introduciremos resultados de convergencia para particiones débiles no negativas (del primer y segundo tipo) y para particiones débiles (del primer y segundo tipo) de operadores acotados en espacios de Banach reales.

Por otra parte, como ya hemos mencionado, otro tipo de matrices que aparece con bastante frecuencia son las matrices definidas positivas, para las cuales John [33] introduce una condición necesaria y suficiente cuando la partición es P-regular, que también podemos considerarlo como generalización de los resultados de convergencia de métodos iterativos concretos para matrices definidas positivas. En cambio, a partir de dicho resultado no se han introducido nuevas condiciones generales de convergencia ni otro tipo de particiones más generales como ocurre para particiones no negativas.

Con el objetivo de ampliar la clase de operadores y particiones para los cuales podamos asegurar la convergencia del esquema iterativo secuencial (3.2), en la sección 3.3 generalizaremos a operadores acotados en un espacio de Hilbert complejo el resultado de convergencia para matrices definidas positivas y particiones P–regulares. Además introduciremos resultados de convergencia para particiones débiles definidas no negativas (del primer y segundo tipo) introducidas en la definición 2.7 dentro de lo que hemos denominado particiones definidas positivas, también para operadores acotados en un espacio de Hilbert complejo. Finalmente, utilizando el concepto de operador real positivo, introduciremos un resultado de convergencia para particiones débiles de operadores acotados en

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

un espacio de Hilbert, alternativo a los que introduciremos en la sección 3.2.

3.2 Particiones débiles no negativas y particiones débiles

En esta sección, dentro de lo que hemos denominado particiones no negativas, solo introduciremos resultados para particiones débiles y para particiones débiles no negativas de operadores acotados en espacios de Banach, pero como consecuencia del teorema 2.5 dichos resultados también son válidos para particiones regulares y no negativas.

Uno de los resultados más representativos obtenidos a partir del teorema 2.4 es el siguiente resultado, introducido por Song [53] para matrices, que contiene como caso particular, a la mayoría de condiciones necesarias y suficientes para que una partición débil del primer tipo sea convergente.

Teorema 3.1 (Lema 9.3 de [53]). *Sea A una matriz no singular y $A = M - N$ una partición débil del primer tipo. Son equivalentes:*

(i) $A^{-1}M \geq 0$.

(ii) $A^{-1}N \geq 0$.

(iii) $\rho(M^{-1}N) < 1$.

(iv) $\rho(M^{-1}N) = \dfrac{\rho(A^{-1}M) - 1}{\rho(A^{-1}M)}$.

(v) $\rho(M^{-1}N) = \dfrac{\rho(A^{-1}N)}{\rho(A^{-1}N) + 1}$.

Por otra parte, Woźnicki [61] al introducir las particiones débiles del segundo tipo introduce las siguientes condiciones necesarias de convergencia.

Teorema 3.2 (Theorem 6.1 de [61]). *Sea A una matriz no singular y $A = M - N$ una partición convergente y débil de A con $A^{-1} \geq 0$. Entonces:*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

(i) $A^{-1} \geq M^{-1}$.

(ii) $\rho(M^{-1}N) = \rho(NM^{-1}) < 1$.

(iii)
- *Si* $M^{-1}N \geq 0$ *entonces* $A^{-1}N \geq M^{-1}N$.
- *Si* $NM^{-1} \geq 0$ *entonces* $NA^{-1} \geq NM^{-1}$.

(iv) $\rho(M^{-1}N) = \dfrac{\rho(A^{-1}N)}{\rho(A^{-1}N)+1}$.

Nosotros, utilizando tanto las particiones débiles del primer como las del segundo tipo, introducimos para operadores acotados los dos resultados siguientes que contiene al teorema 3.1 así como a los resultados introducidos por Woźnicki [61] como casos particulares.

Teorema 3.3. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sea $A = M - N$ una partición débil del primer tipo con $M^{-1}N$ y $A^{-1}N$ teniendo la propiedad "d". Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) $A^{-1}M \geq 0$.

(ii) $\rho(M^{-1}N) = \dfrac{\rho(A^{-1}M)-1}{\rho(A^{-1}M)}$.

(iii) $\rho(M^{-1}N) = \rho(NM^{-1}) \leq 1$.

(iv) $(I - M^{-1}N)^{-1} \geq 0$.

(v) $A^{-1}N \geq 0$.

(vi) $A^{-1}N \geq M^{-1}N$.

(vii) $\rho(M^{-1}N) = \dfrac{\rho(A^{-1}N)}{1+\rho(A^{-1}N)}$.

Demostración. (i) $\rightarrow$ (ii) Como $A^{-1}M \geq 0$, por la propiedad "d" existe un vector propio $\boldsymbol{x} \geq 0$ tal que

$$A^{-1}M\boldsymbol{x} = \rho(A^{-1}M)\boldsymbol{x}.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Ahora, de

$$M^{-1}N = (A^{-1}M)^{-1}(A^{-1}M - I) \tag{3.3}$$

tenemos que

$$M^{-1}N\boldsymbol{x} = \frac{\rho(A^{-1}M) - 1}{\rho(A^{-1}M)}\boldsymbol{x},$$

y por el apartado (i) del lema 1.8 tenemos que

$$\frac{\rho(A^{-1}M) - 1}{\rho(A^{-1}M)} \leq \rho(M^{-1}N). \tag{3.4}$$

Por otra parte, por ser $M^{-1}N \geq 0$, por la propiedad "d" existe un vector propio $\boldsymbol{y} \geq 0$ tal que

$$M^{-1}N\boldsymbol{y} = \rho(M^{-1}N)\boldsymbol{y}.$$

En este caso, de (3.3) tenemos que

$$\rho(M^{-1}N)\boldsymbol{y} = (A^{-1}M)^{-1}(A^{-1}M - I)\boldsymbol{y}$$

y por el apartado (i) del lema 1.8

$$\rho(M^{-1}N) \leq \frac{\rho(A^{-1}M) - 1}{\rho(A^{-1}M)}. \tag{3.5}$$

Finalmente, de las desigualdades (3.4) y (3.5) obtenemos (ii).

(ii) $\rightarrow$ (iii) Obvio.

(iii) $\rightarrow$ (iv) Por ser $M^{-1}N \geq 0$, si $\rho(M^{-1}N) < 1$, del teorema 1.9 tenemos que

$$(I - M^{-1}N)^{-1} = I + M^{-1}N + (M^{-1}N)^2 + \cdots \geq 0,$$

por tanto, $(I - M^{-1}N)^{-1} \geq 0$.

(iv) $\rightarrow$ (v) De $A = M - N$ tenemos que

$$A^{-1}N = (M - N)^{-1}MM^{-1}N = (I - M^{-1}N)^{-1}M^{-1}N \geq 0$$

ya que $(I - M^{-1}N)^{-1} \geq 0$ y $M^{-1}N \geq 0$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(v) $\leftrightarrow$ (vi) De $A = M - N$ tenemos que

$$M^{-1} = (A+N)^{-1} = A^{-1}(I + NA^{-1})^{-1},$$

o también

$$A^{-1} = M^{-1} + M^{-1}NA^{-1}$$

y por tanto,

$$A^{-1}N = M^{-1}N + A^{-1}NM^{-1}N,$$

de donde

$$A^{-1}N - M^{-1}N = A^{-1}NM^{-1}N \geq 0,$$

ya que $A^{-1}N \geq 0$ y $M^{-1}N \geq 0$.

El recíproco es trivial.

(v) $\rightarrow$ (vii) Siguiendo un razonamiento análogo al llevado a cabo en la implicación (i) $\rightarrow$ (ii) utilizando $A^{-1}N$ en lugar de $A^{-1}M$ y la igualdad $M^{-1}N = (I + A^{-1}N)^{-1}A^{-1}N$ en lugar de la igualdad (3.3).

(v) $\rightarrow$ (i) De $M = A + N$ tenemos que

$$A^{-1}M = I + A^{-1}N \geq 0,$$

por ser suma de operadores no negativos.

(vii) $\rightarrow$ (iii) Obvio. ■

Análogamente, para particiones débiles del segundo tipo tenemos el siguiente resultado, cuya demostración se lleva a cabo probando las mismas implicaciones y siguiendo los mismos razonamientos que en el teorema anterior.

Teorema 3.4. *Sea A un operador no singular y sea $A = M - N$ una partición débil del segundo tipo con $M^{-1}N$ y $A^{-1}N$ teniendo la propiedad "d". Las condiciones siguientes son equivalentes:*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(i) $MA^{-1} \geq 0$.

(ii) $\rho(NM^{-1}) = \dfrac{\rho(MA^{-1}) - 1}{\rho(MA^{-1})}$.

(iii) $\rho(M^{-1}N) = \rho(NM^{-1}) \leq 1$.

(iv) $(I - NM^{-1})^{-1} \geq 0$.

(v) $NA^{-1} \geq 0$.

(vi) $NA^{-1} \geq NM^{-1}$.

(vii) $\rho(NM^{-1}) = \dfrac{\rho(NA^{-1})}{1 + \rho(NA^{-1})}$.

Por otra parte, Berman y Plemmons [8] establecen, para matrices, las siguientes condiciones suficientes para que una partición débil del primer tipo sea convergente en función de productos matriz–vector.

Teorema 3.5 (Corolario 5.4 de [8]). *Sea A una matriz no singular y sea $A = M - N$ una partición. Si A, M y N satisfacen las condiciones siguientes:*

(i) $A^T\boldsymbol{y} \geq 0$ *implica* $N^T\boldsymbol{y}$,

(ii) $M^T\boldsymbol{y} \geq 0$ *implica* $N^T\boldsymbol{y} \geq 0$,

entonces

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

Nosotros, además de generalizar dicha condición para operadores acotados, introducimos nuevas condiciones similares. Para ello, previamente introducimos el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sea A un operador no singular y $A = M - N$ una partición cualquiera.*

(i) *Son equivalentes:*

(1) $A'\boldsymbol{y}' \geq 0$ *implica* $N'\boldsymbol{y}' \geq 0$,

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(2) $A^{-1}N \geq 0$.

(ii) *Son equivalentes:*

(1) $A'\boldsymbol{y}' \geq 0$ *implica* $M'\boldsymbol{y}' \geq 0$,

(2) $A^{-1}M \geq 0$.

(iii) *Son equivalentes:*

(1) $M'\boldsymbol{y}' \geq 0$ *implica* $N'\boldsymbol{y}' \geq 0$,

(2) $M^{-1}N \geq 0$.

(iv) *Son equivalentes:*

(1) $A\boldsymbol{y} \geq 0$ *implica* $N\boldsymbol{y} \geq 0$,

(2) $NA^{-1} \geq 0$.

(v) *Son equivalentes:*

(1) $A\boldsymbol{y} \geq 0$ *implica* $M\boldsymbol{y} \geq 0$,

(2) $MA^{-1} \geq 0$.

(vi) *Son equivalentes:*

(1) $M\boldsymbol{y} \geq 0$ *implica* $N\boldsymbol{y} \geq 0$,

(2) $NM^{-1} \geq 0$.

Demostración. (i) Sea $\boldsymbol{x}' = A'\boldsymbol{y}'$, entonces $(A')^{-1}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}'$, por tanto, podemos escribir la condición (i)(1) como

$$\boldsymbol{x}' \geq 0 \quad \text{implica} \quad N'(A')^{-1}\boldsymbol{x}' \geq 0,$$

con lo que, $(A^{-1}N)' = N'(A')^{-1} \geq 0$ y en consecuencia, $A^{-1}N \geq 0$.

Recíprocamente, si $A^{-1}N \geq 0$ entonces $N'(A')^{-1} = (A^{-1}N)' \geq 0$. Además, si $\boldsymbol{x}' = A'\boldsymbol{y}' \geq 0$, tenemos que

$$N'\boldsymbol{y}' = N'(A')^{-1}\boldsymbol{x}' \geq 0.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(ii) Análogo al apartado (i) cambiando N por M.

(iii) Análogo al apartado (i) cambiando A por M.

(iv) Sea $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y}$, entonces $A^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, por tanto, podemos escribir la condición (iv)(1) como

$$\boldsymbol{x} \geq 0 \quad \text{implica} \quad NA^{-1}\boldsymbol{x} \geq 0,$$

con lo que, $NA^{-1} \geq 0$.

Recíprocamente, si $NA^{-1} \geq 0$ y $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y} \geq 0$, tenemos que

$$N\boldsymbol{y} = NA^{-1}\boldsymbol{x} \geq 0.$$

(v) Análogo al apartado (iv) cambiando N por M.

(vi) Análogo al apartado (iv) cambiando A por M. ■

Como consecuencia del lema anterior obtenemos el corolario siguiente que contiene como caso particular al teorema 3.5.

Corolario 3.1. *Sea A un operador no singular y $A = M - N$ una partición.*

(i) *Supongamos que $M^{-1}N$ y $A^{-1}N$ tienen la propiedad "d". Si se satisfacen alguna de las condiciones siguientes:*

  (1) $A'\boldsymbol{y}' \geq 0$ *implica* $N'\boldsymbol{y}' \geq 0$, *y* $M'\boldsymbol{y}' \geq 0$ *implica* $N'\boldsymbol{y}' \geq 0$

  (2) $A'\boldsymbol{y}' \geq 0$ *implica* $M'\boldsymbol{y}' \geq 0$, *y* $M'\boldsymbol{y}' \geq 0$ *implica* $N'\boldsymbol{y}' \geq 0$,

  entonces $\rho(M^{-1}N) < 1$.

(ii) *Supongamos que NM^{-1} y NA^{-1} tienen la propiedad "d". Si se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

  (1) $A\boldsymbol{y} \geq 0$ *implica* $N\boldsymbol{y} \geq 0$, *y* $M\boldsymbol{y} \geq 0$ *implica* $N\boldsymbol{y} \geq 0$,

  (2) $A\boldsymbol{y} \geq 0$ *implica* $M\boldsymbol{y} \geq 0$, *y* $M\boldsymbol{y} \geq 0$ *implica* $N\boldsymbol{y} \geq 0$,

  entonces $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Demostración. (i) La demostración es consecuencia directa de los apartados (i) y (iii) del lema 3.1 y el teorema 3.3 si se satisface la condición (1) y de los apartados (ii) y (iii) del lema 3.1 y el teorema 3.3 si se satisface la condición (2).

(ii) Consecuencia directa de los apartados (iv) y (vi) del lema 3.1 y el teorema 3.4 si se satisface la condición (1) y de los apartados (v) y (vi) del lema 3.1 y el teorema 3.4 si se satisface la condición (2). ■

Los recíprocos del corolario anterior no se satisfacen, como ponemos de manifiesto en el ejemplo siguiente, es decir, del hecho de ser $\rho(M^{-1}N) < 1$ no se puede deducir ninguna de las condiciones (1) y (2) de los apartados (i) y (ii) del corolario 3.1.

Ejemplo 3.1. *Consideremos la matriz no singular*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

y la partición $A = M - N$, donde

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad y \quad N = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{13}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces $\rho(M^{-1}N) = 0.7965 < 1$. Sin embargo, no se satisfacen ninguna de las partes (1) *y* (2) *de los apartados* (i) *y* (ii) *del corolario 3.1 (ver las correspondientes equivalencias estableciadas en el lema 3.1 con las dondiciones condiciones* (1) *y* (2) *de los apartados* (i) *y* (ii) *del corolario 3.1).*

Woźnicki [61] establece que el teorema 3.2 sigue siendo válido si cambiamos "partición convergente y débil" por "débil no negativa". A continuación, teniendo en cuenta dichas implicaciones y siguiendo la misma línea que en los teoremas 3.3 y 3.4 establecemos los dos resultados análogos para el caso en el que la partición sea débil no negativa del primer tipo y débil no negativa del segundo tipo, respectivamente.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Teorema 3.6. *Sea A un operador no singular y $A = M - N$ una partición débil no negativa del primer tipo con los operadores $M^{-1}N$ y $A^{-1}N$ teniendo la propiedad "d". Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) $A^{-1} \geq 0$.

(ii) $A^{-1} \geq M^{-1}$.

(iii) $A^{-1}M \geq 0$.

(iv) $\rho(M^{-1}N) = \dfrac{\rho(A^{-1}M) - 1}{\rho(A^{-1}M)}$.

(v) $\rho(M^{-1}N) = \rho(NM^{-1}) \leq 1$.

(vi) $(I - M^{-1}N)^{-1} \geq 0$.

(vii) $A^{-1}N \geq 0$.

(viii) $A^{-1}N \geq M^{-1}N$.

(ix) $\rho(M^{-1}N) = \dfrac{\rho(A^{-1}N)}{1 + \rho(A^{-1}N)}$.

Demostración. Por el teorema 2.5 y el teorema 3.3, las condiciones (iii)–(ix) son equivalentes. Por lo tanto, para que el teorema quede demostrado será suficiente probar las siguientes implicaciones: (i) $\leftrightarrow$ (ii), (i) $\rightarrow$ (v) y (vi) $\rightarrow$ (i).

(i) $\leftrightarrow$ (ii) De $M = A + N$ se sigue que

$$M^{-1} = A^{-1}(I + NA^{-1})^{-1}.$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad anterior por la derecha por $I + NA^{-1}$, obtenemos que

$$A^{-1} - M^{-1} = M^{-1}NA^{-1} \geq 0,$$

ya que $M^{-1}N \geq 0$ y $A^{-1} \geq 0$.

El recíproco es trivial puesto que $M^{-1} \geq 0$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(i) $\to$ (v) Sea $T = M^{-1}N$, para $m = 0, 1, 2, \ldots$ tenemos que

$$I - T^{m+1} = \sum_{j=0}^{m} T^j (I - T).$$

De $A = M - N$ tenemos que $M^{-1}A = I - T$, de donde se sigue que

$$\sum_{j=0}^{m} T^j M^{-1} = (I - T^{m+1})A^{-1} \leq A^{-1}.$$

Si consideramos un vector $\boldsymbol{x} > 0$ tenemos que $M^{-1}\boldsymbol{x} > 0$ y $A^{-1}\boldsymbol{x} > 0$.

Sea ahora $\boldsymbol{x}_0' \geq 0$ tal que $\boldsymbol{x}_0' T = T' \boldsymbol{x}_0' = \rho(T)\boldsymbol{x}_0'$, entonces

$$\boldsymbol{x}_0' A^{-1}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{x}_0' \sum_{j=0}^{m} T^j M^{-1}\boldsymbol{x} = \sum_{j=0}^{m} \rho(T)^j \boldsymbol{x}_0' M^{-1}\boldsymbol{x},$$

de donde

$$\frac{\boldsymbol{x}_0' A^{-1}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}_0' M^{-1}\boldsymbol{x}} \geq \begin{cases} m+1, & \text{para } \rho(T) = 1 \\ \\ \dfrac{\rho(T)^{m+1} - 1}{\rho(T) - 1}, & \text{para } \rho(T) > 1 \end{cases}$$

lo cual es una contradicción, por tanto, $\rho(T) < 1$.

(vi) $\to$ (i) De $A = M - N$ se sigue que

$$A^{-1} = (M - N)^{-1} M M^{-1} = (I - M^{-1}N)^{-1} M^{-1} \geq 0,$$

por ser $(I - M^{-1}N)^{-1} \geq 0$ y $M^{-1} \geq 0$. ∎

Si consideramos ahora que la partición es débil no negativa del segundo tipo obtenemos el siguiente resultado análogo al teorema anterior. En este caso, las condiciones (iii)–(ix) son equivalentes por el teorema 3.4 y el resto de la demostración se realiza probando las mismas implicaciones que en el teorema anterior siguiendo razonamientos similares.

Teorema 3.7. *Sea A un operador no singular y $A = M - N$ una partición débil no negativa del segundo tipo con los operadores NM^{-1} y NA^{-1} teniendo la propiedad "d". Las condiciones siguientes son equivalentes:*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

(i) $A^{-1} \geq 0$.

(ii) $A^{-1} \geq M^{-1} \geq 0$.

(iii) $MA^{-1} \geq 0$.

(iv) $\rho(NM^{-1}) = \dfrac{\rho(MA^{-1}) - 1}{\rho(MA^{-1})}$.

(v) $\rho(M^{-1}N) = \rho(NM^{-1}) \leq 1$.

(vi) $(I - NM^{-1})^{-1} \geq 0$.

(vii) $NA^{-1} \geq 0$.

(viii) $NA^{-1} \geq NM^{-1}$.

(ix) $\rho(NM^{-1}) = \dfrac{\rho(NA^{-1})}{1 + \rho(NA^{-1})}$.

3.3 Particiones definidas positivas

A lo largo de esta sección, aunque no lo mencionemos de forma explícita, consideraremos que el espacio normado es un espacio de Hilbert, puesto que vamos a trabajar con operadores definidos no negativos y definidos positivos.

Como hemos mencionado en la sección 3.1, a pesar de que las matrices definidas positivas aparecen con bastante frecuencia al discretizar una ecuación en derivadas parciales, hasta ahora, en función de matrices definidas positivas sólo se han definido las particiones P-regulares, para las cuales el resultado más importante es el siguiente. Podemos encontrar dicho resultado en Berman y Plemmons [8] y para el caso particular en el que la matriz A sea real en Ortega [46].

Teorema 3.8. *Sea A una matriz compleja y hermítica y $A = M - N$ una partición P-regular. Entonces*

$$\rho(M^{-1}N) < 1 \quad \textit{si, y sólo si,} \quad A \succ 0.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Puesto que en la definición 2.7 hemos dado el concepto de partición P-regular para operadores acotados en espacios de Hilbert, en esta sección generalizamos el teorema 3.8 para una partición P–regular de un operador acotado; empezaremos con la generalización del teorema de Stein, cuya versión para matrices puede verse, por ejemplo en Ortega [46] o Young [63].

Lema 3.2. *Sea A un operador definido positivo y H un operador para el cual existe un vector $\boldsymbol{x} \neq 0$ tal que $H\boldsymbol{x} = \rho(H)\boldsymbol{x}$. Si $A - H'AH$ es definido positivo, entonces $\rho(H) < 1$.*

Demostración. Puesto que A y $A - H'AH$ son definidos positivos, tenemos que

$$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} > 0 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}'(A - H'AH)\boldsymbol{x} > 0,$$

por tanto,

$$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{x}'H'AH\boldsymbol{x} = (\rho(H)\boldsymbol{x})'A(\rho(H)\boldsymbol{x}) = \rho(H)^2\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x},$$

de donde $\rho(H) < 1$.

La demostración del lema anterior, así como la demostración que presentamos a continuación de la generalización del teorema 3.8 a operadores, es similar a la que presenta Ortega [46] para matrices,

Teorema 3.9. *Sea A un operador definido positivo. Sea $A = M - N$ una partición P-regular y $M^{-1}N$ un operador para el cual existe $\boldsymbol{x} \neq 0$ tal que $M^{-1}N\boldsymbol{x} = \rho(M^{-1}N)\boldsymbol{x}$, entonces $\rho(M^{-1}N) < 1$.*

Demostración. Por el lema 3.2 será suficiente probar que el operador

$$Q = A - (M^{-1}N)'A(M^{-1}N)$$

sea definido positivo.

De $N = M - A$ tenemos que $M^{-1}N = I - M^{-1}A$, por tanto

$$\begin{aligned} Q &= A - (I - M^{-1}A)'A(I - M^{-1}A) \\ &= A(M^{-1}A) + (M^{-1}A)'A - (M^{-1}A)'A(M^{-1}A), \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

ahora teniendo en cuenta que $(M^{-1}A)' = A(M^{-1})'$ y que podemos expresar el operador A como

$$A = MM^{-1}A \quad \text{y} \quad A = A(M^{-1}A)',$$

de (3.6) tenemos que

$$Q = (M^{-1}A)'(M' + M - A)(M^{-1}A)$$

o equivalentemente,

$$Q = (M^{-1}A)'(M' + N)(M^{-1}A)$$

ya que $N = M - A$, entonces por ser la partición P-regular y $M^{-1}A$ no singular tenemos que Q es definido positivo. ∎

Igual que en la sección anterior hemos introducido resultados de convergencia para los distintos tipos de particiones que se han ido introduciendo a partir del concepto de partición regular, en esta sección, utilizando el concepto de partición débil definida no negativa (del primer y segundo tipo), introducido en la definición 2.7, aportamos los siguientes resultados de convergencia, con el objetivo de introducir resultados alternativos al teorema 3.9.

Teorema 3.10. *Sea A un operador no singular y $A = M - N$ una partición débil definida no negativa del primer tipo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) $A^{-1}M \succ 0$.

(ii) $\rho(M^{-1}N) = \dfrac{\rho(A^{-1}M) - 1}{\rho(A^{-1}M)}$.

(iii) $\rho(M^{-1}N) = \rho(NM^{-1}) < 1$.

(iv) $(I - M^{-1}N)^{-1} \succ 0$.

(v) $A^{-1}N \succeq 0$.

(vi) $A^{-1}N \succeq M^{-1}N$.

(vii) $\rho(M^{-1}N) = \dfrac{\rho(A^{-1}N)}{1 + \rho(A^{-1}N)}$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Demostración. (i) $\to$ (ii) Por los lemas 2.2 y 2.3 tenemos que

$$M^{-1}N = (A^{-1}M)^{-1}(A^{-1}M - 1)$$

y que se satisface la relación $\mu = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$ donde μ y λ denotan los elementos del espectro de $M^{-1}N$ y $A^{-1}M$, respectivamente . Además por ser $A^{-1}M \succ 0$ y no singular, y $M^{-1}N \succeq 0$, sabemos que sus espectros están contenidos en el conjunto de los números reales positivos y no negativos respectivamente, por tanto, como la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ es monótona para valores de $x > 0$ obtenemos el apartado (ii).

(ii) $\to$ (iii) Obvio.

(iii) $\to$ (iv) Por ser $M^{-1}N \succeq 0$ y $\rho(M^{-1}N) = \|M^{-1}N\| < 1$ por el teorema 1.9 sabemos que $(I - M^{-1}N)^{-1}$ es hermítico y que su espectro está contenido en el conjunto de los números reales positivos. Ahora, por el teorema 1.14, $(I - M^{-1}N)^{-1} \succ 0$.

(iv) $\to$ (v) De ser $M^{-1}N \succeq 0$ y $(I - M^{-1}N)^{-1} \succ 0$ se deduce que los valores del espectro de $(I - M^{-1}N)^{-1}$ además de ser reales positivos han de ser mayores o iguales que uno. Por otra parte de la definición de partición tenemos que

$$A^{-1}M = (M - N)^{-1}M = (I - M^{-1}N)^{-1} \tag{3.7}$$

así como,

$$A^{-1}N = A^{-1}(M - A) = A^{-1}M - I = (I - M^{-1}N)^{-1} - I \tag{3.8}$$

De donde se deduce que $A^{-1}N$ es hermítica, puesto que $(I - M^{-1}N)^{-1}$ lo es. Además, como el espectro de $A^{-1}N$ está contenido en el conjunto de lo reales no negativos, de nuevo el teorema 1.14, $A^{-1}N \succeq 0$.

(v) $\to$ (vi) De la definición de partición tenemos que $A^{-1}M$ es no singular y utilizando las expresiones (3.7) y (3.8) obtenemos que

$$A^{-1}N - M^{-1}N = A^{-1}M - I - (I - M^{-1}A) = A^{-1}M + M^{-1}A - 2I. \tag{3.9}$$

Además, de la expresión (3.8) también se deduce que $A^{-1}M \succ 0$; por lo tanto, si μ denota un valor perteneciente al espectro de $A^{-1}N - M^{-1}N$, por el teorema 1.7 y la expresión (3.9) tenemos que

$$\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 = \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

con $\lambda > 0$ perteneciente al espectro de $A^{-1}M$. En consecuencia, tenemos que $A^{-1}N - M^{-1}N$ es hermítica y tiene su espectro contenido en los reales no negativos, luego, por el teorema 1.14 $A^{-1}N - M^{-1}N \succeq 0$, es decir, $A^{-1}N \succeq M^{-1}N$.

(vi) $\rightarrow$ (vii) Por ser $A^{-1}N \succeq M^{-1}N$ es evidente que $A^{-1}N \succeq 0$ y utilizando la expresión $M^{-1}N = (A^{-1}N + I)^{-1}A^{-1}N$ tenemos por los lemas 2.2 y 2.3 que $\mu = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$, con $\lambda \geq 0$ perteneciente al espectro de $A^{-1}N$. Entonces como $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ es una función monótona para $x \geq 0$ obtenemos (vii).

(vii) $\rightarrow$ (iii) Obvio. ■.

Para particiones débiles definidas no negativas del segundo tipo tenemos el siguiente resultado cuya demostración se lleva a cabo probando las mismas implicaciones y siguiendo razonamientos análogos a los del teorema 3.10, pero en este caso sobre los operadores NM^{-1}, NA^{-1} y MA^{-1} en lugar de $M^{-1}N$, $A^{-1}N$ y $A^{-1}M$ respectivamente.

Teorema 3.11. *Sea A un operador no singular y $A = M - N$ una partición débil no negativa definida del segundo tipo. Las condiciones siguientes son equivalentes.*

(i) $MA^{-1} \succ 0$

(ii) $\rho(NM^{-1}) = \dfrac{\rho(MA^{-1}) - 1}{\rho(MA^{-1})}$.

(iii) $\rho(M^{-1}N) = \rho(NM^{-1}) < 1$.

(iv) $(I - NM^{-1})^{-1} \succ 0$.

(v) $NA^{-1} \succeq 0$

(vi) $NA^{-1} \succeq NM^{-1}$.

(vii) $\rho(NM^{-1}) = \dfrac{\rho(NA^{-1})}{1 + \rho(NA^{-1})}$.

Notemos que en los teoremas 3.10 y 3.11 hemos introducido nuevas condiciones necesarias y suficientes para que el esquema iterativo (3.2) sea convergente, sin exigir condiciones

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

adicionales al operador A, excepto que sea no singular. Además, es fácil observar, que tienen la misma estructura que los teoremas 3.3 y 3.4 respectivamente, aunque los órdenes parciales considerados en cada caso son distintos y además de que los teoremas 3.3 y 3.4 son válidos para operadores acotados en espacios de Banach reales y los teoremas 3.10 y 3.11 son válidos para operadores acotados en espacios de Hilbert complejos.

También cabe destacar que no existe ninguna relación entre la definición de partición P-regular y partición débil definida no negativa y por lo tanto, tampoco existe relación entre los teoremas 3.10 y 3.11 con el teorema 3.9 para particiones P-regulares, como existe entre las particiones regulares y el resto de particiones englobadas en la definición 2.5 como particiones no negativas y las respectivas condiciones de convergencia, como ponemos de manifiesto en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.2. *Consideremos la matriz definida positiva*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix},$$

y la partición $A = M - N$ donde

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad y \quad N = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

que es P-regular como se comprueba fácilmente. Sin embargo,

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \quad y \quad NM^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

no son definidas no negativas ni del primer tipo ni del segundo tipo.

Por otra parte, si consideramos la matriz A del ejemplo 3.1 y las particiones $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ con

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{10}{21} & \frac{25}{21} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{5}{7} & \frac{25}{14} \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{10}{21} & \frac{29}{42} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{5}{7} & \frac{29}{28} \end{bmatrix}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

y

$$M_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{25}{14} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{5}{7} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{28} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{5}{7} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Es fácil comprobar que $A = M_1 - N_1$ es débil definida no negativa del primer tipo y que $A = M_2 - N_2$ es débil definida no negativa del segundo tipo. Sin embargo, ninguna de las dos particiones son P-regulares.

Para terminar, considerando el caso particular $\mathbb{E} = \mathbb{C}^n$ y utilizando el concepto de matriz real positiva introducido en la definición 1.19, presentamos el siguiente resultado similar al introducido por Plemmons [48] para el caso en el que A es una matriz definida no negativa y $A = M - N$ una partición débil del primer tipo.

Teorema 3.12. *Sea A una matriz no singular y real positiva. y sea $A = M - N$ una partición débil. Si M es real positiva, entonces $\rho(M^{-1}N) < 1$.*

Demostración. Supongamos que la partición es débil del primer tipo, entonces $M^{-1}N \geq 0$ y por el teorema 1.10 sabemos que existe un vector $x \geq 0$ tal que

$$M^{-1}Nx = \rho(M^{-1}N)x.$$

Por otra parte, como

$$A = M(I - M^{-1}N),$$

y A es real positiva, tenemos que

$$0 < x'Ax = (1 - \rho(M^{-1}N))x'Mx$$

de donde $\rho(M^{-1}N) < 1$ ya que $x'Mx > 0$ por ser M real positiva. ∎

Notemos que en el resultado anterior hemos establecido, en el caso de dimensión finita, una nueva condición de convergencia para particiones débiles del primer y del segundo

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Volver al índice/Tornar a l'index

tipo, alternativa a las condiciones introducidas en los teoremas 3.3 y 3.4, que nos permiten averiguar la convergencia de la partición sin necesidad de conocer matrices como $A^{-1}N$ o NA^{-1}. Además, el teorema 3.12 nos será útil para establecer en el capítulo 6 resultados de convergencia para multiparticiones débiles.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Capítulo 4

Teoremas de comparación para particiones

4.1 Introducción

Una vez que nos hemos asegurado que la partición considerada es convergente, o equivalentemente que el esquema iterativo (3.2) converge a la solución del sistema para cualquier vector inicial considerado, es de vital importancia conseguirlo con la precisión deseada en el menor número de iteraciones posible, es decir, con la mayor velocidad posible. Por tanto, en este capítulo nuestro objetivo será comparar la velocidad de convergencia de dos particiones distintas, y evidentemente convergentes, de un mismo operador acotado. Para ello, según vimos en la sección 2.2 tendremos que comparar el valor de los radios espectrales de los respectivos operadores de iteración.

La teoría de particiones no negativas, además de ser una herrramienta muy útil en el análisis de la convergencia del esquema iterativo (3.2), como ya pudimos comprobar en la sección 3.2, nos aporta resultados de comparación muy interesantes que aparecen también como generalización de los teoremas de comparación muy conocidos, introducidos por Varga [56], así como los no tan conocidos introducidos por Woźnicki en su tesis doctoral en 1973 (véase por ejemplo Woźnicki [61]), en ambos casos, para particiones regulares de matrices monótonas. Estas condiciones forman parte de lo que Woźnicki [61] denomina condiciones naturales, es decir, condiciones fáciles de comprobar en la práctica, puesto

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

que están en función de matrices que en muchos de los métodos iterativos obtenidos a partir del esquema iterativo (3.2) calculamos o son fáciles de hacerlo.

En los últimos años, el problema de comparar los radios epectrales de los operadores de iteración, para los distintos tipos de particiones englobadas con el nombre de particiones no negativas, ha sido estudiado por diversos autores desde distintos puntos de vista. Csordas y Varga [22], también para particiones regulares de matrices monótonas, introducen una nueva condición de comparación más general y en ese mismo trabajo aparece por primera vez un recíproco parcial a dicha condición de comparación. Sin embargo, Elsner [26] generaliza los resultados de Varga [56] y los que aparecen en la tesis de Woźnicki (véase por ejemplo [61]) para el caso en el que ambas particiones son débiles no negativas del primer tipo y para el caso en el que una partición es débil no negativa del primer tipo y la otra partición es regular, respectivamente. Autores como Beauwens [4], Miller y Neumann [40], Song [52, 53] introducen condiciones generales, igual que Csordas y Varga [22] pero, para particiones débiles del primer tipo y sin la hipótesis de que la matriz A sea monótona. Dichas condiciones, aunque son más generales, desde el punto de vista práctico son poco útiles, puesto que son muy difíciles de comprobar, sin embargo, pueden utilizarse como herramienta para probar resultados de comparación de otros métodos (ver por ejemplo, Lanzkron, Rose y Szyld [36]).

Por otra parte, Marek y Szyld [38] extienden los teoremas clásicos para particiones regulares de matrices monótonas introducidos por Varga [56] y Woźnicki [61] antes mencionados, para particiones convergentes débiles del primer tipo, ahora de operadores acotados en espacios de Banach reales y conos normales. Recientemente, Woźnicki [61] al introducir las particiones débiles no negativas del segundo tipo y las particiones débiles del segundo tipo extiende también los citados resultados de Varga y Woźnicki. Además, mediante la utilización de la matriz traspuesta en una de las matrices de una de las particiones aporta nuevas condiciones naturales de comparación, aunque como pondremos de manifiesto en la sección 4.2 dichos resultados no son ciertos en general.

No obstante, para los diferentes tipos de particiones englobados con el nombre de particiones definidas positivas, hasta ahora sólo contamos con el resultado de comparación introducido recientemente por Nabben [41] para particiones P-regulares de matrices definidas positivas.

En este capítulo, considerando las particiones del segundo tipo para operadores, junto

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

con el operador adjunto en uno de los operadores de una de las particiones y siguiendo una línea similar a la llevada a cabo por Marek y Szyld [38], en las secciones 4.2 y 4.3, extenderemos las condiciones de comparación introducidas por los diferentes autores antes mencionados e introduciremos nuevas condiciones de comparación para particiones débiles no negativas y para particiones débiles, respectivamente. Por último, en la sección 4.4 extenderemos el resultado de comparación de Nabben [41] para particiones P-regulares de matrices a operadores, e introduciremos resultados de comparación para particiones débiles definidas no negativas, analizando para cada uno de los resultados las diferencias y similitudes con algunos de los resultados introducidos en las secciones 4.2 y 4.3.

4.2 Particiones débiles no negativas

En el transcurso de esta sección vamos a presentar teoremas de comparación para particiones débiles no negativas de operadores acotados con inversa no negativa, que por los teoremas 3.6 y 3.7 son particiones convergentes. Por lo tanto, en los resultados que probemos a lo largo de la sección daremos por supuesta la convergencia de las particiones sin mención alguna y únicamente haremos hincapié en la demostración de la desigualdad entre los radios espectrales de los respectivos operadores de iteración.

Antes de dar paso a los resultados propios de la sección establecemos un par de lemas técnicos que nos serán de utilidad para el desarrollo de la misma.

Lema 4.1. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones cualesquiera. Entonces,*

(i) $N_1 \leq N_2$ *si, y sólo si,* $M_1 \leq M_2$.

(ii) $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1}$ *si, y sólo si,* $A^{-1}M_1A^{-1} \leq A^{-1}M_2A^{-1}$.

Demostración. (i) Si $N_1 \leq N_2$ entonces $M_1 - A \leq M_2 - A$, de donde $M_1 \leq M_2$.

Recíprocamente, si $M_1 \leq M_2$, entonces $A + N_1 \leq A + N_2$ y por tanto $N_1 \leq N_2$.

(ii) Si $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1}$, entonces $A^{-1}(M_1 - A)A^{-1} \leq A^{-1}(M_2 - A)A^{-1}$, de donde $A^{-1}M_1A^{-1} \leq A^{-1}M_2A^{-1}$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Recíprocamente, si $A^{-1}M_1A^{-1} \leq A^{-1}M_2A^{-1}$, entonces

$$A^{-1}(N_1 + A)A^{-1} \leq A^{-1}(N_2 + A)A^{-1},$$

de donde $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1}$. ∎

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Si consideramos ahora un espacio de Hilbert y A un operador no singular y hermítico, mediante un razonamiento análogo al anterior y utilizando que $A = A'$ obtenemos el resultado siguiente.

Lema 4.2. *Sea A un operador no singular y hermítico en un espacio de Hilbert. Si $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ son dos particiones cualesquiera. Entonces*

(i) $N_1 \leq N_2'$ *si, y sólo si,* $M_1 \leq M_2'$.

(ii) $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2'A^{-1}$ *si, y sólo si,* $A^{-1}M_1A^{-1} \leq A^{-1}M_2'A^{-1}$.

Observación 4.1. *Los lemas 4.1 y 4.2 siguen siendo válidos si cambiamos $\leq$ por $<$ en los apartados* (i) *y* (ii).

A continuación recordamos uno de los primeros resultados de comparación introducido en 1960 por Varga [56] para particiones regulares de matrices monótonas, a partir del cual, se han desarrollado el resto de condiciones de comparación existentes hasta el momento.

Teorema 4.1 (Teorema 3.15 de [56]). *Sea A una matriz no singular con $A^{-1} > 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones regulares. Si*

$$N_1 \leq N_2, \quad N_1 \neq N_2, \tag{4.1}$$

entonces

$$\rho(M_1^{-1}N_1) < \rho(M_2^{-1}N_2) < 1.$$

Si en lugar de considerar particiones regulares consideramos particiones débiles no negativas del mismo tipo, el teorema anterior deja de ser cierto como ponemos de manifiesto en el ejemplo siguiente.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Ejemplo 4.1. *Sea* $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$. *Es fácil comprobar que* $A^{-1} > 0$. *Consideremos las particiones* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *donde*

$$N_1 = \begin{bmatrix} \frac{21}{2} & -7 \\ -9 & \frac{27}{2} \end{bmatrix} \quad y \quad N_2 = \begin{bmatrix} 11 & -7 \\ -9 & \frac{27}{2} \end{bmatrix}.$$

Ambas particiones son débiles no negativas del segundo tipo, se satisface $N_1 \leq N_2$ *y* $N_1 \neq N_2$, *pero*

$$\rho(M_1^{-1}N_1) = \frac{9}{10} = \rho(M_2^{-1}N_2).$$

Notemos que ambas particiones son convergentes.

Posteriormente, Woźnicki [61] separa, para particiones débiles no negativas del mismo tipo, el teorema 4.1 en dos. El primer caso, en el que no excluye la igualdad en la expresión (4.1), demostrando que $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ y en el segundo caso considera la expresión (4.1) con desigualdad estricta, demostrando entonces que $\rho(M_1^{-1}N_1) < \rho(M_1^{-1}N_2)$.

Por otra parte, Marek y Szyld [38] generalizan el teorema 4.1 a operadores acotados en espacios de Banach reales y conos normales, considerando sólo particiones débiles del primer tipo, introduciendo el siguiente resultado.

Teorema 4.2 (Teorema 3.5 de [38]). *Se A un operador no singular en un espacio de Banach con* $A^{-1} \geq 0$. *Sean* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *dos particiones convergentes y débiles del primer tipo. Supongamos que* $M_1^{-1}N_1$ *y* $M_2^{-1}N_2$ *tienen la propiedad "d ". Sean* $\boldsymbol{x} \geq 0$ *y* $\boldsymbol{z} > 0$ *dos vectores tales que*

$$M_1^{-1}N_1\boldsymbol{x} = \rho(M_1^{-1}N_1)\boldsymbol{x} \quad y \quad M_2^{-1}N_2\boldsymbol{z} = \rho(M_2^{-1}N_2)\boldsymbol{z}.$$

Si se satisface alguna de las condiciones siguientes

$$N_1\boldsymbol{z} \leq N_2\boldsymbol{z} \quad o \quad N_1\boldsymbol{x} \leq N_2\boldsymbol{x},$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

entonces

$$\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2).$$

Si además $A^{-1} > 0$ y $N_1 \neq N_2$, entonces

$$\rho(M_1^{-1}N_1) < \rho(M_2^{-1}N_2).$$

Siguiendo una línea similar a la del teorema anterior, extendemos a continuación el teorema 4.1 para particiones débiles no negativas no sólo del mismo tipo, sino también de diferente tipo, aunque exigiendo en este caso que $N_2 - N_1$ transforme el cono K en sí mismo; esto es $N_1 \leq N_2$. El caso de particiones débiles será abordado en la sección 4.3.

Teorema 4.3. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas del mismo o diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_k M_k^{-1}$ y $N_k A^{-1}$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo. Si*

$$N_1 \leq N_2, \tag{4.2}$$

entonces

$$\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2) < 1. \tag{4.3}$$

Además si $A^{-1} > 0$ y

$$N_1 < N_2, \tag{4.4}$$

entonces

$$\rho(M_1^{-1}N_1) < \rho(M_2^{-1}N_2) < 1. \tag{4.5}$$

Demostración. En primer lugar, supondremos que $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo. Como $A^{-1} \geq 0$, de la desigualdad (4.2) y del apartado (vii) del teorema 3.6 tenemos que

$$0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2. \tag{4.6}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Como $A^{-1}N_1$ tiene la propiedad "d", existe un vector propio $\boldsymbol{x} \geq 0$ tal que

$$A^{-1}N_1\boldsymbol{x} = \rho(A^{-1}N_1)\boldsymbol{x},$$

y de la desigualdad (4.6) tenemos que

$$A^{-1}N_2\boldsymbol{x} - \rho(A^{-1}N_1)\boldsymbol{x} \geq 0,$$

de donde se sigue por el apartado (i) del lema 1.8 que

$$\rho(A^{-1}N_1) \leq \rho(A^{-1}N_2). \tag{4.7}$$

Si $A = M_2 - N_2$ es también del primer tipo, aplicando el apartado (ix) del teorema 3.6 a la desigualdad (4.7) y teniendo en cuenta que la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ es creciente para valores de $x \geq 0$ obtenemos la desigualdad (4.3).
Si $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo, teniendo en cuenta que la desigualdad (4.7) es equivalente a

$$\rho(A^{-1}N_1) \leq \rho(N_2A^{-1}). \tag{4.8}$$

por el apartado (ix) de los teoremas 3.6 y 3.7 tenemos que

$$\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(N_2M_2^{-1})$$

que es equivalente a la desigualdad (4.3).

Supongamos ahora que $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo. Siguiendo un argumento similar al caso en el que dicha partición es del primer tipo, obtenemos ahora, de la desigualdad (4.2) y del apartado (vii) del teorema 3.7, la desigualdad

$$0 \leq N_1A^{-1} \leq N_2A^{-1}$$

en lugar de la desigualdad (4.6), así como la desigualdad

$$\rho(N_1A^{-1}) \leq \rho(N_2A^{-1}) \tag{4.9}$$

en lugar de la desigualdad (4.7). Por lo tanto, si $A = M_2 - N_2$ es también del segundo tipo, por el apartado (ix) del teorema 3.7 se obtiene la desigualdad (4.3). En cambio, si $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo, tenemos que la desigualdad (4.9) es equivalente a la desigualdad

$$\rho(N_1A^{-1}) \leq \rho(A^{-1}N_2) \tag{4.10}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

y por el apartado (ix) de los teoremas 3.6 y 3.7 tenemos que

$$\rho(N_1 M_1^{-1}) \leq \rho(M_2^{-1} N_2)$$

que es equivalente a la desigualdad (4.3).

Supongamos ahora que $A^{-1} > 0$. Si $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo, de la desigualdad (4.4) y del apartado (vii) del teorema 3.6 tenemos que

$$0 \leq A^{-1} N_1 < A^{-1} N_2, \tag{4.11}$$

con lo que $A^{-1}N_2$ es K-irreducible, por el teorema 1.11 existe un vector propio $\boldsymbol{y} > 0$ tal que

$$A^{-1} N_2 \boldsymbol{y} = \rho(A^{-1} N_2) \boldsymbol{y}$$

y de la desigualdad (4.11) tenemos que

$$\rho(A^{-1} N_2)\boldsymbol{y} - A^{-1} N_1 \boldsymbol{y} > 0,$$

de donde se sigue por el apartado (ii) del lema 1.8 que

$$\rho(A^{-1} N_1) < \rho(A^{-1} N_2). \tag{4.12}$$

Ahora, utilizando la desigualdad (4.12) en lugar de la desigualdad (4.7), mediante un razonamiento análogo obtenemos la desigualdad (4.5).

Finalmente, si $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo, a partir de la desigualdad (4.4) obtenemos que

$$0 \leq N_1 A^{-1} < N_2 A^{-1}$$

y siguiendo un razonamiento análogo al anterior, pero utilizando esta desigualdad en lugar de la desigualdad (4.11), obtenemos

$$\rho(N_1 A^{-1}) < \rho(N_2 A^{-1}), \tag{4.13}$$

que es la desigualdad (4.9) con desigualdad estricta, por lo tanto, siguiendo el mismo razonamiento seguido a partir de dicha desigualdad obtenemos la desigualdad (4.5). ■

Como consecuencia directa del apartado (i) del lema 4.1 y la observación 4.1 obtenemos el siguiente resultado.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Corolario 4.1. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas del mismo o diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_kM_k^{-1}$ y N_kA^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo.*

Si $M_1 \leq M_2$, entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Además, si $A^{-1} > 0$ y $M_1 < M_2$, entonces se satisface la desigualdad (4.5).

El siguiente resultado es una generalización, para particiones débiles no negativas de operadores acotados, del resultado introducido por Csordas y Varga [22, Teorema 2] para particiones regulares de matrices y extendido por Woźnicki [61, página 330] para particiones débiles no negativas de distinto tipo.

Teorema 4.4. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas de diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_kM_k^{-1}$ y N_kA^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo. Si*

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1}, \tag{4.14}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Además, si $A^{-1} > 0$ y

$$A^{-1}N_1A^{-1} < A^{-1}N_2A^{-1}, \tag{4.15}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.5).

Demostración. Supongamos que $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo, entonces por los teoremas 3.6 y 3.7 tenemos que $A^{-1}N_1 \geq 0$ y $N_2A^{-1} \geq 0$. Por lo tanto, por la propiedad "d" existe un vector propio $x_1' \geq 0$ tal que

$$x_1'A^{-1}N_1 = (A^{-1}N_1)'x_1' = \rho(A^{-1}N_1)x_1' \tag{4.16}$$

y de la desigualdad (4.14) tenemos que

$$\rho(A^{-1}N_1)x_1'A^{-1} \leq x_1'A^{-1}N_2A^{-1}.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Considerando $y_1' = x_1' A^{-1} \geq 0$ podemos escribir la desigualdad anterior como

$$\rho(A^{-1}N_1)y_1' \leq y_1' N_2 A^{-1},$$

y por el apartado (i) del lema 1.8 tenemos la desigualdad (4.8). Ahora mediante el mismo razonamiento seguido en la demostración del teorema 4.3 a partir de dicha desigualdad, obtenemos la desigualdad (4.3).

Si $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo, entonces $N_1 A^{-1} \geq 0$ y $A^{-1}N_2 \geq 0$. De nuevo por la propiedad "d" existe un vector propio $x_1 \geq 0$ tal que

$$N_1 A^{-1} x_1 = \rho(N_1 A^{-1}) x_1 \tag{4.17}$$

y de la desigualdad (4.14) tenemos que

$$\rho(N_1 A^{-1}) A^{-1} x_1 \leq A^{-1} N_2 A^{-1} x_1.$$

Para $y_1 = A^{-1} x_1 \geq 0$ podemos escribir la desigualdad anterior como

$$\rho(N_1 A^{-1}) y_1 \leq A^{-1} N_2 y_1$$

y por el apartado (i) del lema 1.8 tenemos la desigualdad (4.10). Ahora mediante el mismo razonamiento seguido en la demostración del teorema 4.3 a partir de dicha desigualdad, obtenemos la desigualdad (4.3).

Supongamos ahora que $A^{-1} > 0$. Si $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo, entonces $A^{-1}N_1 \geq 0$ y $N_2 A^{-1} \geq 0$. Por lo tanto, por la propiedad "d" existe un vector $x_2 \geq 0$ tal que

$$N_2 A^{-1} x_2 = \rho(N_2 A^{-1}) x_2$$

y de la desigualdad (4.15) tenemos que

$$A^{-1} N_1 A^{-1} x_2 < \rho(N_2 A^{-1}) A^{-1} x_2.$$

Considerando ahora $y_2 = A^{-1} x_2 > 0$ tenemos que

$$\rho(N_2 A^{-1}) y_2 - A^{-1} N_1 y_2 > 0$$

y por el apartado (ii) del lema 1.8 tenemos que

$$\rho(A^{-1}N_1) < \rho(N_2 A^{-1})$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

que es la desigualdad (4.8) con desigualdad estricta, por tanto, siguiendo el mismo razonamiento seguido a partir de dicha desigualdad obtenemos la desigualdad (4.5).

Si $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo, entonces mediante un razonamiento análogo al anterior, teniendo en cuenta que ahora $N_1 A^{-1} \geq 0$ y $A^{-1} N_2 \geq 0$ y considerando en este caso un vector $\boldsymbol{x}_1 \geq 0$ tal que se satisfaga la igualdad (4.17), de la desigualdad (4.15)

$$\rho(N_1 A^{-1}) A^{-1} \boldsymbol{x}_1 < A^{-1} N_2 A^{-1} \boldsymbol{x}_1.$$

Considerando $\boldsymbol{y}_1 = A^{-1} \boldsymbol{x}_1 > 0$ tenemos que

$$A^{-1} N_2 \boldsymbol{y}_1 - \rho(N_1 A^{-1}) \boldsymbol{y}_1 > 0$$

y por el apartado (i) del lema 1.8 obtenemos que

$$\rho(N_1 A^{-1}) < \rho(A^{-1} N_2)$$

que es la desigualdad (4.10) con desigualdad estricta, por tanto, siguiendo el mismo razonamiento seguido a partir de dicha desigualdad obtenemos la desigualdad (4.5). ∎

El teorema anterior no es cierto para particiones débiles no negativas del mismo tipo como pondremos de manifiesto en el ejemplo 5.1. Por otra parte, como consecuencia directa del apartado (ii) del lema 4.1 y la observación 4.1 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.2. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas de diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1} N_k$ y $A^{-1} N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_k M_k^{-1}$ y $N_k A^{-1}$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo. Si*

$$A^{-1} M_1 A^{-1} \leq A^{-1} M_2 A^{-1}, \tag{4.18}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Además, si $A^{-1} > 0$ y

$$A^{-1} M_1 A^{-1} < A^{-1} M_2 A^{-1}, \tag{4.19}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.5).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Otro de los resultados básicos de comparación para particiones regulares de matrices, junto con el teorema 4.1, es el siguiente, introducido por Woźnicki en 1973 en su tesis doctoral (ver por ejemplo Csordas y Varga [22] y Woźnicki [61]).

Teorema 4.5 (Teoremas 5.1 y 5.2 de [61]). *Sea A una matriz no singular con $A^{-1} \geq 0$ y $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones regulares.*

Si $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$, entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Si además $A^{-1} > 0$ y $M_1^{-1} > M_2^{-1}$, entonces se satisface la desigualdad (4.5).

En 1989, Elsner [26] demuestra que el teorema anterior sigue siendo válido en el caso en el que una de las particiones sea regular y la otra débil no negativa del primer tipo. Recientemente, Woźnicki [61] lo extiende para particiones débiles no negativas de distinto tipo. Finalmente, Marek y Szyld [38] introducen el siguiente resultado para operadores acotados y conos normales.

Teorema 4.6 (Teorema 3.11 de [38]). *Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles del primer tipo. Supongamos que $M_1^{-1}N_1$ y $M_2^{-1}N_2$ tienen la propiedad "d". Sean $\boldsymbol{x} \geq 0$ y $\boldsymbol{z} > 00$ dos vectores tales que*

$$M_1^{-1}N_1\boldsymbol{x} = \rho(M_1^{-1}N_1)\boldsymbol{x} \quad y \quad M_2^{-1}N_2\boldsymbol{z} = \rho(M_2^{-1}N_2)\boldsymbol{z}.$$

Si se satisface $N_1\boldsymbol{x} \geq 0$ o $N_2\boldsymbol{z} \geq 0$ y $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$, entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Si además, $M_1^{-1} > M_2^{-1}$, entonces se satisface la desigualdad (4.5).

El teorema anterior, además de ser una generalización a operadores del resultado de Elsner [26], debilita las hipótesis de dicho resultado puesto que considera particiones débiles del primer tipo y convergentes en lugar de $A^{-1} \geq 0$ y particiones débiles no negativas del primer tipo y sólo exige que un cierto vector de K tenga su imagen en K a través del operador N_1 o N_2. Sin embargo, al utilizar sólo particiones del primer tipo hay casos que refleja el resultado de Woźnicki [61] para matrices y particiones débiles no negativas de distinto tipo que no se abordan en el teorema anterior. Con el objetivo de reflejar dichos casos, también para operadores, introducimos el siguiente resultado.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Teorema 4.7. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas de diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1} N_k$ y $A^{-1} N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_k M_k^{-1}$ y $N_k A^{-1}$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo. Si*

$$M_1^{-1} \geq M_2^{-1}, \tag{4.20}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Además, si $A^{-1} > 0$ y

$$M_1^{-1} > M_2^{-1} \tag{4.21}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.5).

Demostración. Supongamos que $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo. Escribamos la desigualdad (4.20) como

$$M_1^{-1} A A^{-1} \geq A^{-1} A M_2^{-1}. \tag{4.22}$$

Ahora por el apartado (iii) de los teoremas 3.6 y 3.7 tenemos que

$$0 \leq A^{-1} M_1 \quad \text{y} \quad 0 \leq M_2 A^{-1};$$

multiplicando en ambos miembros de la desigualdad (4.22) por la izquierda por $A^{-1} M_1$ y por la derecha por $M_2 A^{-1}$, obtenemos la desigualdad (4.18) y, por el corolario 4.2, se satisface la desigualdad (4.3).

Si $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo, escribiendo en este caso la desigualdad (4.20) como

$$A^{-1} A M_1^{-1} \geq M_2^{-1} A A^{-1}, \tag{4.23}$$

utilizando de nuevo el apartado (iii) de los teoremas 3.6 y 3.7 tenemos que

$$0 \leq M_1 A^{-1} \quad \text{y} \quad 0 \leq A^{-1} M_2,$$

y multiplicando ahora en ambos miembros de la desigualdad (4.23) por la izquierda por $A^{-1} M_2$ y por la derecha por $M_1 A^{-1}$ obtenemos otra vez la desigualdad (4.18). De nuevo por el corolario 4.2 se satisface la desigualdad (4.3).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Si $A^{-1} > 0$, mediante un razonamiento análogo obtenemos la desigualdad (4.19) y de nuevo por el corolario 4.2 se satisface la desigualdad (4.5). ■

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

En el caso en el que ambas particiones sean débiles no negativas del mismo tipo Woźnicki [61] muestra que el resultado anterior deja de ser cierto.

Para el caso de matrices, las condiciones de comparación introducidas hasta ahora, además de formar parte de las llamadas condiciones naturales, son las condiciones de comparación básicas a partir de las cuales diversos autores han introducido condiciones más generales que estudiaremos más adelante en esta sección y que, como veremos en la sección 4.4, son más débiles, aunque también menos útiles desde el punto de vista práctico puesto que son muy difíciles de comprobar. Sin embargo, recientemente Woźnicki [61] con el objetivo de introducir nuevas condiciones de comparación que nos permitan abarcar un mayor número de particiones y que además sigan siendo útiles desde el punto de vista práctico, considera la idea de utilizar la matriz traspuesta en una de las matrices de una de las particiones introduciendo los resultados siguientes.

Teorema 4.8 (Teorema 3.13 de [61]). *Sea A una matriz no singular con $A^{-1} \geq 0$ y $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas del mismo tipo. Si*

$$N_1 \leq N_2^T$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Teorema 4.9 (Teorema 3.14 de [61]). *Sea A una matriz no singular con $A^{-1} \geq 0$ y $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas del mismo tipo . Si*

$$M_1^{-1} \geq (M_2^{-1})^T$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Ahora bien, estos teoremas sin la hipótesis adicional de "A simétrica" no son ciertos en general como ponemos de manifiesto en los ejemplos siguientes.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Ejemplo 4.2. *Consideremos la matriz no simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Es fácil comprobar que $A^{-1} > 0$. *Consideremos las particiones* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$, *donde*

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

y

$$M_2 = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Puesto que

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{9}{32} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \geq 0 \quad y \quad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{8}{49} & \frac{2}{49} \\ \frac{2}{7} & \frac{32}{49} & \frac{8}{49} \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \geq 0$$

tenemos que las dos particiones son regulares y, en particular, débiles no negativas del mismo tipo. Además,

$$N_1 \leq N_2^T$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

con lo que se cumplen todas las hipótesis del teorema 4.8, no obstante

$$\rho(M_1^{-1}N_1) = \frac{3}{8} > \frac{4}{49} = \rho(M_2^{-1}N_2)$$

con lo que dicho teorema no es cierto en general.

Ejemplo 4.3. *Consideremos la matriz no simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Es fácil comprobar que $A^{-1} > 0$. *Consideremos las particiones* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *donde*

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

y

$$M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Puesto que

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \geq 0 \;\; y \;\; M_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \geq 0$$

tenemos que las dos particiones son regulares, y por tanto, son débiles no negativas del mismo tipo. Además

$$M_1^{-1} \geq (M_2^{-1})^T \geq 0,$$

con lo que se cumplen todas las hipótesis del teorema 4.9, no obstante

$$\rho(M_1^{-1}N_1) = \frac{298}{1297} > \frac{1}{8} = \rho(M_2^{-1}N_2)$$

poniendo de manifiesto que dicho teorema no es cierto en general.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Los ejemplos 4.2 y 4.3 no sólo ponen de manifiesto que los teoremas 4.8 y 4.9 son falsos para particiones débiles no negativas del mismo tipo, sino también para particiones regulares. Además, como consecuencia de dichos ejemplos los corolarios 3.3 y 3.4 y el teorema 3.15. de Woźnicki [61] tampoco son ciertos en general.

Como ya hemos mencionado antes, es suficiente añadir la hipótesis adicional de "A simétrica" para que los dos resultados anteriores sean ciertos. A continuación, presentamos la generalización de dichos resultados a operadores acotados en espacios de Hilbert, extendiendo además el teorema 4.8 para particiones débiles no negativas de distinto tipo.

Teorema 4.10. *Sea A un operador no singular y hermítico en un espacio de Hilbert con $A^{-1} \geq 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas del mismo o diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1} N_k$ y $A^{-1} N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_k M_k^{-1}$ y $N_k A^{-1}$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo. Si*

$$N_1 \leq N_2' \tag{4.24}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Además, si $A^{-1} > 0$ y

$$N_1 < N_2', \tag{4.25}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.5).

Demostración. Supongamos que $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo. Por ser $A^{-1} \geq 0$, de la desigualdad (4.24) y del apartado (vii) del teorema 3.6, tenemos que

$$0 \leq A^{-1} N_1 \leq A^{-1} N_2' = (N_2 A^{-1})' \tag{4.26}$$

ya que A es hermítico. Además, por la propiedad "d" del operador $A^{-1} N_1$ existe un vector propio $\boldsymbol{x}_1' \geq 0$ tal que

$$\boldsymbol{x}' A^{-1} N_1 = (A^{-1} N_1)' \boldsymbol{x}_1' = \rho(A^{-1} N_1) \boldsymbol{x}_1'$$

y de la desigualdad (4.26) tenemos que

$$(N_2 A^{-1})' \boldsymbol{x}_1' - \rho(A^{-1} N_1) \boldsymbol{x}_1' \geq 0$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

de donde se sigue por el apartado (i) del lema 1.8 que

$$\rho(A^{-1}N_1) \leq \rho(N_2A^{-1}),$$

que es equivalente a la desigualdad (4.7). Ahora, mediante el mismo razonamiento seguido en el teorema 4.3 a partir de dicha desigualdad, obtenemos la desigualdad (4.3).

Si $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo, de la desigualdad (4.24) y del teorema 3.7 obtenemos que

$$0 \leq N_1A^{-1} \leq N_2'A^{-1} = (A^{-1}N_2)'$$

y mediante un razonaiento análogo al caso anterior sabemos que existe un vector propio $\boldsymbol{x}_1' \geq 0$ tal que

$$\boldsymbol{x}'N_1A^{-1} = (N_1A^{-1})'\boldsymbol{x}_1' = \rho(N_1A^{-1})\boldsymbol{x}_1'.$$

Por tanto, de la desigualdad (4.26) tenemos que

$$(A^{-1}N_2)'\boldsymbol{x}_1' - \rho(N_1A^{-1})\boldsymbol{x}_1' \geq 0$$

y por el apartado (i) del lema 1.8 tenemos que

$$\rho(N_1A^{-1}) \leq \rho(A^{-1}N_2),$$

que es equivalente a la desigualdad (4.9), por tanto siguiendo el mismo razonamiento que en el teorema 4.3 a partir de dicha desigualdad obtenemos la desigualdad (4.3).

Por otra parte si $A^{-1} > 0$ y $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo, de la desigualdad (4.25) y el apartado (vii) del teorema 3.6 tenemos que

$$0 \leq A^{-1}N_1 < A^{-1}N_2' = (N_2A^{-1})' \tag{4.27}$$

por ser A hermítico. Como $(N_2A^{-1})'$ es K-irreducible, por el teorema 1.11, existe un vector propio $\boldsymbol{y}' > 0$ tal que

$$(N_2A^{-1})'\boldsymbol{y}' = \rho(N_2A^{-1})\boldsymbol{y}'$$

y como $\boldsymbol{y}'A^{-1}N_1 = (A^{-1}N_1)'\boldsymbol{y}'$, de la desigualdad (4.27) tenemos que

$$\rho(N_2A^{-1})\boldsymbol{y}' - (A^{-1}N_1)'\boldsymbol{y}' > 0,$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

de donde se sigue, por el apartado (ii) del lema 1.8 que

$$\rho(A^{-1}N_1) < \rho(N_2A^{-1})$$

que es equivalente a la desigualdad (4.12). Ahora mediante el mismo razonamiento llevado a cabo en el teorema 4.3 a partir de dicha desigualdad obtenemos la desigualdad (4.5).

Si $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo, a partir de la desigualdad (4.25) obtenemos que

$$0 \leq N_1A^{-1} < N_2'A^{-1} = (A^{-1}N_2)'$$

y mediante un razonamiento análogo al seguido a partir de la desigualdad (4.27) obtenemos

$$\rho(N_1A^{-1}) < \rho(A^{-1}N_2),$$

que es equivalente a la desigualdad (4.13). Por lo tanto, mediante el mismo razonaminto seguido en el teorema 4.3 a partir de dicha desigualdad obtenemos la desigualdad (4.5). ∎

Como consecuencia directa del apartado (i) del lema 4.2 y la observación 4.1 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.3. *Sea A un operador no singular y hermítico en un espacio de Hilbert con $A^{-1} \geq 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas del mismo o diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_kM_k^{-1}$ y N_kA^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo. Si*

$$M_1 \leq M_2', \tag{4.28}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Además, si $A^{-1} > 0$ y $M_1 < M_2'$, entonces se satisface la desigualdad (4.5).

Si en la desigualdad (4.14) consideramos N_2' en lugar de N_2 y la condición adicional de A hermítico, mediante un argumento similar al del teorema 4.4, teniendo en cuenta que $N_2'A^{-1} = (A^{-1}N_2)'$, obtenemos una nueva condición de comparación que presentamos en

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

el siguiente resultado para particiones débiles no negativas del mismo tipo y que introdujo por primera vez Woźnicki [61, Corolario 3.3] para matrices, pero sin la hipótesis adicional de A simétrica, sin embargo, los ejemplos 4.2 y 4.3, ponen de manifiesto que dicha hipótesis es necesaria.

Teorema 4.11. *Sea A un operador no singular y hermítico en un espacio de Hilbert con $A^{-1} \geq 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas de diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_kM_k^{-1}$ y N_kA^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo. Si*

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2'A^{-1}, \tag{4.29}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Además, si $A^{-1} > 0$ y

$$A^{-1}N_1A^{-1} < A^{-1}N_2'A^{-1}, \tag{4.30}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.5).

Como consecuencia inmediata del apartado (ii) del lema 4.2, de la observación 4.1 y del teorema anterior, obtenemos el resultado siguiente.

Corolario 4.4. *Sea A un operador no singular y hermítico en un espacio de Hilbert con $A^{-1} \geq 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas de diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_kM_k^{-1}$ y N_kA^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo. Si*

$$A^{-1}M_1A^{-1} \leq A^{-1}M_2'A^{-1}, \tag{4.31}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Además, si $A^{-1} > 0$ y

$$A^{-1}M_1A^{-1} < A^{-1}M_2'A^{-1}, \tag{4.32}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.5).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Para finalizar con las condiciones naturales para particiones débiles no negativas introducimos el siguiente resultado, en el que extendemos a operadores el teorema 4.9 con la condición adicional de A hermítico.

Teorema 4.12. *Sea A un operador no singular y hermítico en un espacio de Hilbert con $A^{-1} \geq 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas de diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_k M_k^{-1}$ y $N_k A^{-1}$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo. Si*

$$M_1^{-1} \geq (M_2^{-1})', \tag{4.33}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Además, si $A^{-1} > 0$ y

$$M_1^{-1} > (M_2^{-1})' \tag{4.34}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.5).

Demostración. Supongamos que ambas particiones son del primer tipo. Del apartado (iii) del teorema 3.6, tenemos que

$$0 \leq A^{-1}M_1 \quad \text{y} \quad 0 \leq (A^{-1}M_2)' = M_2' A^{-1}$$

por ser A es hermítico. Escribiendo la desigualdad (4.33) como

$$M_1^{-1}AA^{-1} \geq A^{-1}A(M_2^{-1})',$$

y multiplicando ambos miembros de la desigualdad anterior por la izquierda por $A^{-1}M_1$ y por la derecha por $M_2'A^{-1}$, obtenemos la desigualdad (4.31). Ahora, por el corolario 4.4 obtenemos la desigualdad (4.3).

Si ambas particiones son del segundo tipo escribiendo la adesigualdad (4.33) como

$$A^{-1}AM_1^{-1} \geq (M_2^{-1})'AA^{-1}, \tag{4.35}$$

utilizando en este caso el apartado (iii) del teorema 3.7 tenemos que

$$0 \leq M_1 A^{-1} \quad \text{y} \quad 0 \leq (M_2 A^{-1})' = A^{-1}M_2',$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

y multiplicando en ambos miembros de la desigualdad (4.35) por la izquierda por $A^{-1}M_2'$ y por la derecha por M_1A^{-1}, obtenemos la desigualdad (4.31), y, de nuevo por el corolario 4.4 se satisface la desigualdad (4.3).

Si $A^{-1} > 0$, siguiendo el argumento anterior tanto si son del primer como del segundo tipo, obtenemos la desigualdad (4.32) entonces por el corolario 4.4 obtenemos la desigualdad (4.5). ∎

Los teoremas 4.11 y 4.12, así como el corolario 4.4 , no son ciertos para particiones débiles no negativas de distinto tipo, como muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.4. *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Es fácil comprobar que $A^{-1} > 0$. Consideremos las particiones $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$, donde

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{5}{4} & \frac{18}{5} \end{bmatrix} \quad y \quad M_2 = \begin{bmatrix} \frac{173}{150} & -\frac{73}{75} \\ -\frac{41}{25} & \frac{148}{45} \end{bmatrix}.$$

Es fácil comprobar que la partición $A = M_1 - N_1$ es débil no negativa del primer (pero no del segundo) tipo, mientras que la partición $A = M_2 - N_2$ es débil no negativa del segundo (pero no del primer) tipo.

Además, se satisfacen las desigualdades (4.29), (4.30), (4.31),(4.32), (4.33) y (4.34) y sin embargo, no se satisfacen las desigualdades (4.3) y (4.5) .

Hasta ahora, hemos generalizado e introducido nuevas condiciones de comparación naturales utilizando como herramientas fundamentales las particiones débiles no negativas del segundo tipo junto con la utilización del operador adjunto en uno de los operadores de una de las particiones, siguiendo una línea similar a la de los resultados introducidos por Marek y Szyld [38] para operadores.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

A continuación, utilizando las mismas herramientas vamos a generalizar e introducir nuevas condiciones de comparación que, aunque en un principio tengan un interés más teórico, puesto que desde el punto de vista práctico resultan muy complicadas de comprobar, veremos como algunas de ellas contienen nuevas condiciones de comparación naturales, además de resultar útiles para probar la convergencia de otros métodos como ya mencionamos en la introducción de este capítulo.

Teorema 4.13. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas de diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_k M_k^{-1}$ y $N_k A^{-1}$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo.*

(i) *Si $A^{-1} \geq 0$ y*

$$(A^{-1}N_1)^j A^{-1} \leq (A^{-1}N_2)^j A^{-1} \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.36}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

(ii) *Si $A^{-1} > 0$ y*

$$(A^{-1}N_1)^j A^{-1} < (A^{-1}N_2)^j A^{-1} \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.37}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.5).

Demostración. (i) Supongamos que $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo, por lo tanto, $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo, entonces por los teoremas 3.6 y 3.7 tenemos que $A^{-1}N_1 \geq 0$ y $N_2 A^{-1} \geq 0$. Ahora por la propiedad "d" existe un vector propio $x_1' \geq 0$ tal que

$$x_1' A^{-1} N_1 = (A^{-1}N_1)' x_1' = \rho(A^{-1}N_1) x_1'$$

y de la desigualdad (4.36) tenemos que

$$\begin{aligned} x_1'(A^{-1}N_1)^j A^{-1} &= \rho(A^{-1}N_1)^j x_1' A^{-1} \\ &\leq x_1'(A^{-1}N_2)^j A^{-1} \\ &= x_1' A^{-1}(N_2 A^{-1})^j. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Si $y_1' = x_1' A^{-1} \geq 0$, podemos escribir la desigualdad anterior como

$$\rho(A^{-1}N_1)^j y_1' \leq y_1'(N_2A^{-1})^j$$

y por el apartado (i) del lema 1.8 tenemos que

$$\rho(A^{-1}N_1)^j \leq \rho(N_2A^{-1})^j,$$

de donde se obtiene la desigualdad (4.8), por tanto, siguiendo el mismo razonamiento que en el teorema 4.3 a partir de dicha desigualdad obtenemos la desigualdad (4.3).

Si $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo, siguiendo un razonamiento análogo al anterior sabemos por los teoremas 3.6 y 3.7 que $N_1A^{-1} \geq 0$ y $A^{-1}N_2 \geq 0$. Ahora por la propiedad "d" existe un vector propio $x_1 \geq 0$ tal que

$$(N_1A^{-1})x_1 = \rho(N_1A^{-1})x_1$$

y como $(A^{-1}N_1)^j A^{-1} = A^{-1}(N_1A^{-1})^j$, de la desigualdad (4.36) tenemos que

$$A^{-1}(N_1A^{-1})^j x_1 = \rho(A^{-1}N_1)^j A^{-1}x_1 \leq (A^{-1}N_2)^j A^{-1}x_1.$$

Si $y_1 = A^{-1}x_1 \geq 0$, podemos escribir la desigualdad anterior como

$$\rho(N_1A^{-1})^j y_1 \leq (A^{-1}N_2)^j y_1$$

y por el apartado (i) del lema 1.8 tenemos que

$$\rho(N_1A^{-1})^j \leq \rho(A^{-1}N_2)^j,$$

de donde se obtiene la desigualdad (4.10), por lo tanto, siguiendo el mismo razonamiento que en el teorema 4.3 a partir de dicha desigualdad, obtenemos la desigualdad (4.3).

(ii) Si $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo, siguiendo un razonamiento análogo al apartado (i) tenemos que $A^{-1}N_1 \geq 0$ y $N_2A^{-1} \geq 0$. Ahora para $\rho(N_2A^{-1})$ existe un vector propio $x_2 \geq 0$ tal que

$$(N_2A^{-1})x_2 = \rho(N_2A^{-1})x_2. \tag{4.39}$$

Entonces de la desigualdad (4.36) tenemos que

$$(A^{-1}N_1)^j A^{-1}x_2 < (A^{-1}N_2)^j A^{-1}x_2 = A^{-1}(N_2A^{-1})^j x_2 = \rho(N_2A^{-1})^j A^{-1}x_2.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Considerando $\boldsymbol{y}_2 = A^{-1}\boldsymbol{x}_2 > 0$ la desigualdad anterior se convierte en

$$(A^{-1}N_1)^j \boldsymbol{y}_2 < \rho(N_2A^{-1})^j \boldsymbol{y}_2$$

y por el apartado (ii) del lema 1.8 tenemos que

$$\rho(A^{-1}N_1)^j < \rho(N_2A^{-1})^j.$$

Como consecuencia de la desigualdad anterior tenemos de nuevo que se satisface la desigualdad (4.10) con desigualdad estricta y por tanto, se satisface la desigualdad (4.5) por el apartado (ix) de los teoremas 3.6 y 3.7.

Si $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo, la demostración es análoga teniendo en cuenta ahora que $N_1A^{-1} \geq 0$ y $A^{-1}N_2 \geq 0$. En este caso consideramos $\boldsymbol{x}_1 \geq 0$ asociado a $\rho(N_1A^{-1})$ tal que

$$(N_1A^{-1})\boldsymbol{x}_1 = \rho(N_1A^{-1})\boldsymbol{x}_1$$

y la desigualdad (4.37) tenemos que

$$A^{-1}(N_1A^{-1})^j\boldsymbol{x}_1 = \rho(N_1A^{-1})^j A^{-1}\boldsymbol{x}_1 < (A^{-1}N_2)^j A^{-1}\boldsymbol{x}_1.$$

Considerando $\boldsymbol{y}_1 = A^{-1}\boldsymbol{x}_1 > 0$ la desigualdad anterior se transforma en

$$\rho(N_1A^{-1})^j \boldsymbol{y}_1 < (A^{-1}N_2)^j \boldsymbol{y}_1$$

y por el apartado (i) del lema 1.8 tenemos que

$$\rho(N_1A^{-1})^j < \rho(A^{-1}N_2)^j,$$

de donde se sigue la desigualdad (4.10) con desigualdad estricta, y por tanto, tenemos que se satisface la desigualdad (4.5) por el apartado (ix) de los teoremas 3.6 y 3.7. ■

El teorema anterior, fue introducido para matrices y para particiones regulares por Csordas y Varga [22] y extendido posteriormente para particiones débiles no negativas de distinto tipo por Woźnicki [61].

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Observación 4.2. *El teorema 4.13 sigue siendo cierto si cambiamos N_k por M_k para $k = 1, 2$, es decir, si remplazamos las desigualdades (4.36) y (4.37) por*

$$(A^{-1}M_1)^j A^{-1} \leq (A^{-1}M_2)^j A^{-1} \quad y \quad (A^{-1}M_1)^j A^{-1} < (A^{-1}M_2)^j A^{-1},$$

respectivamente. En tal caso, sigue siendo válida la misma demostración cambiando en cada uno de los pasos de la demostración N_k por M_k para $k = 1, 2$, teniendo en cuenta el apartado (iv) *de los teoremas 3.6 y 3.7 y que la función $g(\alpha) = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$ es creciente para valores de $\alpha > 0$.*

El teorema anterior deja de ser cierto aún considerando los cambios propuestos en la observación 4.2 si cambiamos particiones débiles no negativas de distinto por particiones débiles no negativas del mismo tipo (véase el ejemplo 5.1).

Por otra parte, para matrices y particiones regulares, Csordas y Varga [22] introducen el siguiente resultado que es un recíproco parcial al apartado (ii) del teorema 4.13.

Teorema 4.14 (Teorema 4 de [22]). *Sea A una matriz no singular y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones regulares. Si $A^{-1} > 0$ y se satisface la desigualdad (4.5), entonces existe un j_0 tal que*

$$(A^{-1}N_1)^j A^{-1} < (A^{-1}N_2)^j A^{-1}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.40}$$

Sin embargo, el teorema anterior deja de ser cierto para particiones débiles no negativas ya sean del mismo o de distinto tipo incluso realizando el cambio propuesto en la observación 4.2, como pone de manifiesto el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.5. *Consideremos la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Es fácil comprobar que $A^{-1} > 0$. Consideremos las particiones $A = P_k - Q_k$, con $k = 1, 2, 3$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

donde

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para $k = 1, 3$ las particiones son débiles no negativas del primer tipo y para $k = 2$ la partición es débil no negativa del segundo tipo.

Sea $M_1 = P_1$ y $M_2 = P_2$ se tiene que $\rho(M_1^{-1}N_1) = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \rho(M_2^{-1}N_2)$ y no se satisface la desigualdad (4.40) ya que para todo $j \geq 1$ las matrices $(A^{-1}N_1)^j A^{-1}$ y $(A^{-1}N_2)^j A^{-1}$ tienen iguales los elementos de la posición $(3,3)$. Lo mismo ocurre con las matrices $(A^{-1}M_1)^j A^{-1}$ y $(A^{-1}M_2)^j A^{-1}$. Si consideramos ahora $M_1 = P_1$ y $M_2 = P_3$ de nuevo tenemos que $\rho(M_1^{-1}N_1) = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \rho(M_2^{-1}N_2)$ y tampoco se satisface la desigualdad (4.40) ya que para todo $j \geq 1$ las matrices $(A^{-1}N_1)^j A^{-1}$ y $(A^{-1}N_2)^j A^{-1}$ tienen iguales los elementos de la tercera fila. Lo mismo ocurre con las matrices $(A^{-1}M_1)^j A^{-1}$ y $(A^{-1}M_2)^j A^{-1}$. Obsérvese que en el primer caso, las matrices $N_2 A^{-1}$ y $M_2 A^{-1}$ no son irreducibles y que en el segundo caso ocurre lo mismo con las matrices $A^{-1}N_2$ y $A^{-1}M_2$.

Sin embargo, en el teorema siguiente establecemos la generalización del teorema 4.14 a operadores y particiones débiles no negativas del mismo o distinto tipo con la condición adicional de que el operador $A^{-1}N_2$ (respectivamente, N_2A^{-1}) sea K-irreducible si $A = M_2 - N_2$ es una partición débil no negativa del primer (respectivamente, segundo) tipo.

Teorema 4.15. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} > 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas del mismo o diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_k M_k^{-1}$ y $N_k A^{-1}$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo. Supongamos que el operador $A^{-1}N_2$ (respectivamente, N_2A^{-1}) es K-irreducible cuando $A = M_2 - N_2$ es del primer (respectivamente, segundo) tipo. Si se satisface la desigualdad (4.5), entonces existe un entero $j_0 \geq 1$ tal que se satisface la desigualdad (4.40).*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Demostración. Sea $\lambda_2 = \rho(A^{-1}N_2) = \rho(N_2A^{-1})$. Supongamos que ambas particiones son débiles no negativas del primer tipo. Por el apartado (ix) del teorema 3.6 tenemos que la desigualdad (4.5) implica

$$\rho(A^{-1}N_1) < \rho(A^{-1}N_2) = \lambda_2. \tag{4.41}$$

Por ser $A^{-1}N_2$ K-irreducible, para λ_2 existe un vector propio $\boldsymbol{x}_2 > 0$ tal que

$$A^{-1}N_2\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2,$$

y como $A^{-1} > 0$, para $\boldsymbol{x} \geq 0$ tenemos que $\boldsymbol{y} = A^{-1}\boldsymbol{x} > 0$. Entonces por el teorema 1.12 tenemos que la sucesión de vectores $\left\{\left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2}\right)^j \boldsymbol{y}\right\}_{j=1}^{\infty}$, está a una distancia positiva de la frontera de K, es decir

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2}\right)^j A^{-1} > 0. \tag{4.42}$$

Por otra parte, de la desigualdad (4.41) se sigue que $\lim_{j\to\infty}\left(\frac{A^{-1}N_1}{\lambda_2}\right)^j = 0$ y por tanto,

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{A^{-1}N_1}{\lambda_2}\right)^j A^{-1} = 0. \tag{4.43}$$

Ahora como consecuencia de las desigualdades (4.42) y (4.43) tenemos que existe un entero positivo j_0 tal que

$$\left(\frac{A^{-1}N_1}{\lambda_2}\right)^j A^{-1} < \left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2}\right)^j A^{-1}, \quad \text{para todo} \quad j \geq j_0,$$

de donde se sigue la desigualdad (4.40).

Si $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo y $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo, teniendo en cuenta que $\lambda_2 = \rho(A^{-1}N_2) = \rho(N_2A^{-1})$, que $\rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(N_2M_2^{-1})$ y utilizando N_2A^{-1} en lugar de $A^{-1}N_2$, siguiendo un argumento análogo al caso anterior, obtenemos que

$$\lim_{j\to\infty} A^{-1}\left(\frac{N_2A^{-1}}{\lambda_2}\right)^j > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{j\to\infty}\left(\frac{A^{-1}N_1}{\lambda_2}\right)^j A^{-1} = 0.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Por tanto, existe un entero positivo j_0 tal que

$$\left(\frac{A^{-1}N_1}{\lambda_2}\right)^j A^{-1} < A^{-1}\left(\frac{N_2A^{-1}}{\lambda_2}\right)^j = \left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2}\right)^j A^{-1}$$

para todo $j \geq j_0$ de donde se sigue la desigualdad (4.40).

Si $A = M_1 - N_1$ es débil no negativa del segundo tipo y $A = M_2 - N_2$ es débil no negativa del primer o del segundo tipo, por un argumento análogo, a los dos casos anteriores, pero utilizando ahora N_1A^{-1} en lugar de $A^{-1}N_1$ se obtiene la desigualdad (4.40). ■

Observación 4.3. *El teorema 4.15 también es válido si cambiamos N_k por M_k para $k = 1, 2$, en la desigualdad (4.40).*

Obsérvese también que en el teorema 4.15 la condición "$A^{-1}N_2$ (respectivamente, N_2A^{-1}) K-irreducible" en el caso de dimensión finita es equivalente a que "$M_2^{-1}N_2$ (respectivamente, $N_2M_2^{-1}$) K-irreducible" como consecuencia del teorema 1 de Szyld [54].

Por otra parte, como hemos mencionado antes, el teorema 4.13 no es cierto para particiones débiles no negativas del mismo tipo. Con el objetivo de introducir condiciones de comparación análogas a las de dicho teorema para particiones débiles no negativas del mismo tipo presentamos el siguiente resultado cuya demostración es análoga a la del apartado (i) del teorema 4.13.

Teorema 4.16. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas del mismo tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_kM_k^{-1}$ y N_kA^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo.*

(i) *Si ambas particiones son del primer tipo y*

$$A^{-1}(N_1A^{-1})^j \leq A^{-1}(A^{-1}N_2)^j, \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.44}$$

o

$$A^{-1}(A^{-1}N_1)^j \leq A^{-1}(N_2A^{-1})^j, \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.45}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(ii) *Si ambas particiones son del segundo tipo y*

$$(N_1A^{-1})^jA^{-1} \leq (A^{-1}N_2)^jA^{-1}, \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.46}$$

o

$$(A^{-1}N_1)^jA^{-1} \leq (N_2A^{-1})^jA^{-1} \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.47}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Observación 4.4. *El teorema 4.16 también es válido si cambiamos N_k por M_k para $k = 1, 2$ en las desigualdades (4.44)-(4.47).*

Obsérvese que si en el teorema 4.16 y en la observación 4.4, cambiamos $\leq$ por $<$, obtenemos condiciones de comparación similares a las del apartado (ii) del teorema 4.13 para particiones débiles no negativas del mismo tipo y por consiguiente, la demostración es análoga a la de dicho resultado.

Además, el teorema 4.15 también es válido si reemplazamos la desigualdad (4.40) por alguna de las desigualdades (4.44)-(4.47) del teorema 4.16 o de la observación 4.4, pero con desigualdad estricta.

Notemos también, que si en el teorema 4.16 y en la observación 4.4 consideramos el caso particular $j = 1$ obtenemos condiciones de comparación similares a las del teorema 4.4 para particiones débiles no negativas del mismo tipo. Por consiguiente, en dichos resultados no sólo hemos introducido nuevas condiciones generales de comparación, sino que también hemos aumentado el conjunto de condiciones naturales de comparación para particiones débiles no negativas del mismo tipo. Por ejemplo, si consideramos las particiones $M_1 = P_3$ y $M_2 = P_1$ del ejemplo 5.1 las condiciones de comparación del teorema 4.3 no se satisfacen, y sin embargo, tenemos que

$$A^{-1}A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2A^{-1}.$$

Además, para las particiones $M_1 = P_{10}$ y $M_2 = P_9$ también del ejemplo 5.1 tampoco se satisfacen las condiciones de comparación del teorema 4.3, pero en cambio tenemos que

$$N_1A^{-1}A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1}.$$

Por tanto, en ambos casos, con las nuevas condiciones podemos afirmar que

$$\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2).$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Para finalizar, siguiendo la misma línea que en los teoremas 4.10, 4.11 y 4.12 de utilizar el operador adjunto en uno de los operadores de una de las particiones introducimos el siguiente resultado para particiones débiles no negativas, pero en este caso sin la hipótesis adicional de que el operador A sea hermítico.

Teorema 4.17. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_kM_k^{-1}$ y N_kA^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo.*

(i) *Si ambas particiones son del primer tipo y*

$$A^{-1}(N_1A^{-1})^j \leq A^{-1}\left((A^{-1}N_2)'\right)^j, \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.48}$$

o

$$(A^{-1}N_1)^j(A^{-1})' \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^j(A^{-1})', \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.49}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

(ii) *Si ambas particiones son del segundo tipo y*

$$(A^{-1})'(N_1A^{-1})^j \leq (A^{-1})'\left((A^{-1}N_2)'\right)^j, \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.50}$$

o

$$(A^{-1}N_1)^jA^{-1} \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^jA^{-1}, \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.51}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

(iii) *Si $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo, $A = M_2 - N_2$ del segundo tipo y*

$$A^{-1}(N_1A^{-1})^j \leq A^{-1}\left((N_2A^{-1})'\right)^j, \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.52}$$

o

$$(A^{-1})'(A^{-1}N_1)^j \leq (A^{-1})'\left((A^{-1}N_2)'\right)^j, \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.53}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(iv) *Si* $A = M_1 - N_1$ *es del segundo tipo,* $A = M_2 - N_2$ *es del primer tipo y*

$$(A^{-1}N_1)^j A^{-1} \leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^j A^{-1}, \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.54}$$

o

$$(N_1A^{-1})^j (A^{-1})' \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^j (A^{-1})', \quad \textit{para algún} \quad j \geq 1, \tag{4.55}$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Demostración. Demostraremos el apartado (i), los otros apartados se demuestran de forma análoga.

(i) Como ambas particiones son débiles no negativas del primer tipo por el teorema 3.6 tenemos que $A^{-1}N_1 \geq 0$ y $A^{-1}N_2 \geq 0$. Ahora por la propiedad "d" existe un vector propio $x_1' \geq 0$ tal que

$$x_1'A^{-1}N_1 = (A^{-1}N_1)'x_1' = \rho(A^{-1}N_1)x_1'. \tag{4.56}$$

Entonces de la desigualdad (4.48) y teniendo en cuenta que $A^{-1}(N_1A^{-1})^j = (A^{-1}N_1)^j A^{-1}$ tenemos que

$$x_1'(A^{-1}N_1)^j A^{-1} = \rho(A^{-1}N_1)^j x_1'A^{-1} \leq x_1'A^{-1}\left((A^{-1}N_2)'\right)^j. \tag{4.57}$$

Ahora considerando $y_1' = x_1'A^{-1} \geq 0$, podemos escribir la desigualdad anterior como

$$\rho(A^{-1}N_1)^j y_1' \leq y_1'\left((A^{-1}N_2)'\right)^j$$

y por el apartado (i) del lema 1.8 tenemos que

$$\rho(A^{-1}N_1)^j \leq \rho\left((A^{-1}N_2)'\right)^j, \tag{4.58}$$

de donde se obtiene la desigualdad (4.8), por tanto, mediante el mismo razonamiento seguido en el teorema 4.3 a partir de dicha desigualdad obtenemos la desigualdad (4.3).

Por otra parte, de la igualdad (4.56), si se satisface la desigualdad (4.49) y teniendo en cuenta que $\left((N_2A^{-1})\right)^j (A^{-1})' = (A^{-1})'\left((A^{-1}N_2)'\right)^j$ tenemos que

$$x_1'(A^{-1}N_1)^j (A^{-1})' = \rho(A^{-1}N_1)^j x_1'(A^{-1})' \leq x_1'(A^{-1})'\left((A^{-1}N_2)'\right)^j.$$

Considerando ahora $y_1' = x_1'(A^{-1})' = (A^{-1})'x_1'$ obtenemos de nuevo la desigualdad (4.58) y por tanto, mediante el mismo razonamiento se sigue la desigualdad (4.3). ∎

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Observación 4.5. *El teorema 4.17 sigue siendo válido si reemplazamos N_k por M_k para $k = 1, 2$, en las desigualdades (4.48)-(4.55)*

Notemos también que el teorema 4.17 sigue siendo válido si reemplazamos $\leq$ por $<$. Además, el teorema 4.15 también sigue siendo válido si reemplazamos la desigualdad (4.40) por alguna de las desigualdades (4.48)–(4.55) del teorema 4.17 o de la observación 4.5, pero con desigualdad estricta.

Por otra parte, cuando ambas particiones son del primer tipo, podemos escribir las desigualdades (4.48)–(4.49) del teorema 4.17, para $j = 1$, como

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}(A^{-1}N_2)' \qquad \text{y} \qquad A^{-1}N_1(A^{-1})' \leq (N_2A^{-1})'(A^{-1})'$$

respectivamente. Por tanto, obtenemos también nuevas condiciones naturales para particiones débiles no negativas del primer tipo. Si consideramos $M_1 = P_8$ y $M_2 = P_1$ del ejemplo 5.1, tenemos que se satisface la desigualdad (4.49) y sin embargo no se satisface el teorema 4.3, lo cual pone de manifiesto que no son condiciones de comparación redundantes.

Análogamente, si consideramos $j = 1$ en las desigualdades (4.50)–(4.55) del teorema 4.17 obtenemos nuevas condiciones naturales de comparación para particiones débiles no negativas del segundo tipo y para particiones débiles no negativas de distinto tipo. Por ejemplo, si consideramos las particiones $M_1 = P_1$ y $M_2 = P_{21}$ del ejemplo 5.1 se satisface la desigualdad (4.52) y sin embargo, no se satisface ninguna de las condiciones naturales de comparación introducidas en esta sección para particiones débiles no negativas de distinto tipo.

En el caso particular en el que A sea un operador hermítico, las desigualdades (4.48)–(4.51) del teorema 4.17, para $j = 1$ se reducen a la desigualdad

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2'A^{-1}$$

es decir, obtenemos como caso particular el teorema 4.11. Si consideramos las desigualdades (4.52)–(4.55) obtenemos el siguente corolario.

Corolario 4.5. *Sea A un operador no singular y hermítico en un espacio de hilbert con $A^{-1} > 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas de distinto tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

$A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_k M_k^{-1}$ y $N_k A^{-1}$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo.

(i) *Si $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo y*

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}A^{-1}N_2' \quad o \quad A^{-1}A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2'A^{-1},$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

(ii) *Si $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo y*

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq N_2'A^{-1}A^{-1} \quad o \quad N_1A^{-1}A^{-1} \leq A^{-1}N_2'A^{-1},$$

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

4.3 Particiones débiles

Si en los resultados de la sección 4.2 sustituimos "partición débil no negativa" por "partición débil" entonces podemos asegurar que $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$, pero no que dichas particiones sean convergentes, puesto que en el caso de que las particiones sean débiles no negativas la condición $A^{-1} \geq 0$ nos aseguraba la convergencia, pero en el caso de que sean débiles no podemos garantizar la convergencia (véase el teorema 3.3), como ponemos de manifiesto en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.6. *Consideramos la matriz A del ejemplo 4.2 y la partición $A = M - N$ con*

$$M = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix} \quad y \quad N = \begin{bmatrix} -3 & \frac{3}{4} & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Entonces $NM^{-1} = diag(3,2,3) \geq 0$, por tanto, la partición es débil del segundo tipo y evidentemente no es convergente.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Si consideramos las particiones débiles sustituyendo "$A^{-1} \geq 0$" por "partición convergente", entonces no podemos establecer ninguna relación entre los radios espectrales de los operadores de iteración, como ponemos de manifiesto en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.7. *Consideremos la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. *Sean* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2 = M_3 - N_3$ *tres particiones, donde*

$$N_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad N_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las tres particiones son débiles del primer tipo, $N_1 \leq N_2$, $N_1 \leq N_3$ *y sin embargo*

$$\rho(M_1^{-1}N_1) \approx \frac{829}{938} > \frac{2}{3} = \rho(M_2^{-1}N_2),$$
$$\rho(M_1^{-1}N_1) \approx \frac{829}{938} < \frac{1220}{1353} \approx \rho(M_3^{-1}N_3).$$

Notemos que las tres particiones son convergentes.

Por tanto, para que los resultados de la sección anterior sigan siendo ciertos para particiones débiles hay que añadir que las particiones sean convergentes, además de las hipótesis de cada uno de los resultados, tal como aparecen en los teoremas 4.2 y 4.6. En cambio, si en cada uno de los resultados que introduzcamos en el transcurso de esta sección, cambiamos "partición débil" por "partición débil no negativa" las hipótesis necesarias siguen siendo las mismas.

El desarrollo de esta sección sigue la misma estructura que la sección 4.2, es decir, primero introduciremos las condiciones de comparación naturales para particiones débiles y después las condiciones de comparación generales también para particiones débiles.

En primer lugar, introducimos los dos resultados siguientes en los que recogemos las condiciones de comparación naturales para particiones débiles.

Teorema 4.18. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles del mismo o de distinto tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ tiene la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

primer tipo; no obstante, supondremos que $N_k M_k^{-1}$ tiene la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo. Si además se satisface alguna de las condiciones siguientes:

(i) $A^{-1}N_1$ *y* $A^{-1}N_2$ *tienen la propiedad "d" y* $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$,

(ii) N_1A^{-1} *y* $A^{-1}N_2$ *tienen la propiedad "d" y* $0 \leq N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2$,

(iii) N_1A^{-1} *y* N_2A^{-1} *tienen la propiedad "d" y* $0 \leq N_1A^{-1} \leq N_2A^{-1}$,

(iv) $A^{-1}N_1$ *y* N_2A^{-1} *tienen la propiedad "d" y* $0 \leq A^{-1}N_1 \leq N_2A^{-1}$,

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Demostración. Haremos la demostración suponiendo que se satisface la condición (i), si se satisface alguna de las otras condiciones se sigue un razonamiento análogo.

Por la propiedad "d" del operador $A^{-1}N_1$ existe un vector propio $\boldsymbol{x} \geq 0$ tal que

$$A^{-1}N_1\boldsymbol{x} = \rho(A^{-1}N_1)\boldsymbol{x},$$

por tanto,

$$A^{-1}N_2\boldsymbol{x} - \rho(A^{-1}N_1)\boldsymbol{x} \geq 0$$

y del apartado (i) del lema 1.8 obtenemos que

$$\rho(A^{-1}N_1) \leq \rho(A^{-1}N_2). \tag{4.59}$$

Ahora si ambas particiones son del primer tipo, entonces del apartado (vii) del teorema 3.3 se satisface la desigualdad (4.3).

Si ambas particiones son del segundo tipo teniendo en cuenta que la desigualdad (4.59) es equivalente a

$$\rho(N_1A^{-1}) \leq \rho(N_2A^{-1}),$$

por el apartado (vii) del teorema 3.4 tenemos que $\rho(N_1M_1^{-1}) \leq \rho(N_2M_2^{-1})$ que es equivalente a la desigualdad (4.3).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Si $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo y $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo la desigualdad (4.59) es equivalente a

$$\rho(A^{-1}N_1) \leq \rho(N_2A^{-1}),$$

y utilizando en este caso el apartado (vii) de los teoremas 3.3 y 3.4 tenemos que

$$\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(N_2M_2^{-1})$$

que también es equivalente a la desigualdad (4.3).

Por último, si $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo y $A = M_2 - N_2$ es del primero, siguiendo un razonamiento similar al anterior sobre la desigualdad

$$\rho(N_1A^{-1}) \leq \rho(A^{-1}N_2),$$

obtenemos la desigualdad (4.3). ∎

Si en el teorema anterior reemplazamos "espacio de Banach" por "espacio de Hilbert", $A^{-1}N_2$ por $(A^{-1}N_2)'$ y N_2A^{-1} por $(N_2A^{-1})'$ sin ninguna condición adicional, entonces obtenemos de forma similar el resultado siguiente.

Teorema 4.19. *Sea A un operador no singular en un espacio de Hilbert y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles del mismo o de distinto tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ tiene la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_kM_k^{-1}$ tiene la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo. Si además se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(i) *$A^{-1}N_1$ y $A^{-1}N_2$ tienen la propiedad "d" y $0 \leq A^{-1}N_1 \leq (A^{-1}N_2)'$,*

(ii) *N_1A^{-1} y $A^{-1}N_2$ tienen la propiedad "d" y $0 \leq N_1A^{-1} \leq (A^{-1}N_2)'$,*

(iii) *N_1A^{-1} y N_2A^{-1} tienen la propiedad "d" y $0 \leq N_1A^{-1} \leq (N_2A^{-1})'$,*

(iv) *$A^{-1}N_1$ y N_2A^{-1} tienen la propiedad "d" y $0 \leq A^{-1}N_1 \leq (N_2A^{-1})'$,*

entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Los dos teoremas anteriores fueron introducidos por Woźnicki [61, Teoremas 6.2 y 6.11] para matrices con la hipótesis adicional $A^{-1} \geq 0$, pero dicha hipótesis no es necesaria como hemos podido observar.

Es fácil probar, que los apartados (i)–(iv) de los teoremas 4.18 y 4.19 son equivalentes a los que obtenemos al reemplazar N_k por M_k, para $k = 1, 2$.

Observación 4.6. *Si en la segunda desigualdad de los apartados* (i)–(iv) *de los teoremas 4.18 y 4.19 reemplazamos "$\leq$" por "$<$" entonces se satisface la desigualdad (4.5). Notemos que la demostración en este caso se realiza siguiendo un razonamiento análogo al llevado a cabo en dichos teoremas sobre $A^{-1}N_1$ y $(A^{-1}N_1)'$ respectivamente, pero sobre los operadores $A^{-1}N_2$ y $(A^{-1}N_2)'$, teniendo en cuenta que son K-irreducibles, y por tanto, por el teorema 1.11 los vectores propios asociados a dichos operadores son positivos, y utilizando ahora el apartado* (ii) *en lugar del apartado* (i) *del lema 1.8.*

Por otra parte, autores como Beauwens [4], Miller y Neumann [40] y Song [52, 53] han introducido para matrices, diversas condiciones de comparación generales para particiones débiles del primer tipo que se encuentran recogidas en el siguiente resultado.

Teorema 4.20 (Teorema 4 de [53]). *Sea A una matriz no singular y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles del primer tipo. Si se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(i) $H_1 \geq 0$, *existen enteros $i \geq 0$ y $j \geq 1$ tales que se satisfacen alguna de las desigualdades siguientes:*

$$H_1^{i+j} \leq H_1^i H_2^j \quad o \quad H_1^{i+j} \leq H_2^j H_1^i$$

donde $H_k \in \{A^{-1}N_k, N_kA^{-1}, A^{-1}M_k, M_kA^{-1}\}$ para $k = 1, 2$.

(ii) $M_1A^{-1} \geq 0$, $M_2A^{-1} \geq 0$, *existen enteros $i \geq 0$ y $j \geq 1$ tales que se satisfacen alguna de las desigualdades siguientes:*

$$G_1^j G_2^i \leq G_2^{i+j} \quad o \quad G_2^i G_1^j \leq G_2^{i+j}$$

donde $G_k \in \{A^{-1}M_k, M_kA^{-1}\}$ para $k = 1, 2$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(iii) $N_1A^{-1} \geq 0$, $N_2A^{-1} \geq 0$, *existen enteros* $i \geq 0$ *y* $j \geq 1$ *tales que se satisfacen alguna de las desigualdades siguientes:*

$$F_1^j F_2^i \leq F_2^{i+j} \quad o \quad F_2^i F_1^j \leq F_2^{i+j}$$

donde $F_k \in \{A^{-1}N_k, N_kA^{-1}\}$ *para* $k = 1, 2$ *y* F_2 K*-irreducible.*

Entonces se satisface la desigualdad (4.3).

El ejemplo siguiente pone de manifiesto que podemos obtener la desigualdad (4.3) bajo algunas hipótesis no contempladas en el teorema anterior.

Ejemplo 4.8. *Consideremos la matriz no singular*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

y las particiones $A = P_k - Q_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, *con*

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-4}{3} \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} \frac{25}{7} & \frac{12}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{30}{7} & \frac{27}{7} & \frac{13}{7} \\ \frac{30}{7} & \frac{34}{7} & \frac{41}{7} \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} \frac{50}{7} & \frac{20}{7} & 0 \\ \frac{459}{49} & \frac{320}{49} & \frac{30}{7} \\ \frac{500}{49} & \frac{410}{49} & \frac{80}{7} \end{bmatrix}.$$

Para $k = 1$ *la partición es débil del segundo tipo mientras que para* $k = 2, 3, 4$ *las particiones son débiles del primer tipo.*

En primer lugar, si consideramos $M_1 = P_1$ *y* $M_2 = P_2$ *realizando los cálculos oportunos obtenemos que ambas particiones son convergentes,* $N_1A^{-1} \geq 0$, *y*

$$(N_1A^{-1})^3 \leq (N_2A^{-1})(N_1A^{-1})^2,$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

es decir, se satisfacen las condiciones del apartado (i) *del teorema 4.20 para* $i = 2$ *y* $j = 1$. *Además,* $\rho(M_1^{-1}N_1) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = \rho(M_2^{-1}N_2)$.

Por otra parte, si consideramos $M_1 = P_3$ *y* $M_2 = P_4$ *para* $i = 0$, $j = 2$ *tenemos que*

$$(N_1A^{-1})^2 \leq (A^{-1}N_2)^2,$$

pero $N_1A^{-1} \ngeq 0$ *por lo tanto, no se satisfacen todas las hipótesis del apartado* (i) *del teorema 4.20, sin embargo* $(N_1A^{-1})^2 \geq 0$ *y además*

$$\rho(M_1^{-1}N_1) = \frac{4}{5} < \frac{9}{10} = \rho(M_2^{-1}N_2).$$

Por consiguiente, en el ejemplo anterior hemos puesto de manifiesto que el apartado (i) del teorema 4.20 no recoge los siguientes casos:

- Alguna o ambas particiones sean débiles del segundo tipo.
- Aún siendo ambas particiones del primer tipo en el caso de considerar

  $$H_1 \in \{N_1A^{-1}, M_1A^{-1}\}$$

  aunque $H_1 \ngeq 0$, $H_1^j \geq 0$ y $H_1^i \geq 0$.

Notemos que una partición convergente y débil del primer tipo satisface, por el teorema 3.3 que $A^{-1}N_1 \geq 0$ y $A^{-1}M_1 \geq 0$, por tanto, en el caso en el que consideremos $H_1 \in \{A^{-1}N_1, A^{-1}M_1\}$ la condición de no negatividad exigida es redundante.

En los dos resultados siguientes generalizamos a operadores el apartado (i), utilizando las particiones débiles del segundo tipo y recogiendo también las observaciones que acabamos de mencionar.

Teorema 4.21. *Sea* A *un operador no singular en un espacio de Banach y sean* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *dos particiones convergentes, con* $A = M_2 - N_2$ *débil. Supongamos que para algunos enteros* $i \geq 0$ *y* $j \geq 1$ *se satisface alguna de las desigualdades siguientes:*

(a) $(A^{-1}N_1)^{i+j} \leq (A^{-1}N_1)^i(A^{-1}N_2)^j$,

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

(b) $(A^{-1}N_1)^{i+j} \leq (A^{-1}N_1)^i(N_2A^{-1})^j$,

(c) $(A^{-1}N_1)^{i+j} \leq (A^{-1}N_2)^j(A^{-1}N_1)^i$,

(d) $(A^{-1}N_1)^{i+j} \leq (N_2A^{-1})^j(A^{-1}N_1)^i$.

Si además se satisface alguna de las condiciones siguientes:

(i) $A = M_1 - N_1$ *es débil del primer tipo.*

(ii) $A = M_1 - N_1$ *es débil del segundo tipo,* $(A^{-1}N_1)^i \geq 0$ *y* $(A^{-1}N_1)^j \geq 0$.

Entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Demostración. Realizaremos la demostración sólo suponiendo que se satisfacen las desigualdades de los apartados (a) y (c) para cada uno de las condiciones (i) y (ii). Para el resto de las posibles combinaciones se procede de forma análoga.

Supongamos que se satisface la desigualdad (a) y la condición (ii). Entonces para cada entero positivo p, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (A^{-1}N_1)^{pj+i} \\ &= (A^{-1}N_1)^{(p-1)j}(A^{-1}N_1)^{i+j} \\ &\leq (A^{-1}N_1)^{(p-1)j}(A^{-1}N_1)^i(A^{-1}N_2)^j. \end{aligned}$$

Aplicando el proceso anterior $p-1$ veces obtenemos que

$$(A^{-1}N_1)^{pj+i} \leq (A^{-1}N_1)^i(A^{-1}N_2)^{pj},$$

y por tanto,

$$\|(A^{-1}N_1)^{pj+i}\| \leq \|(A^{-1}N_1)^i\|\|(A^{-1}N_2)^{pj}\|,$$

de donde

$$\|(A^{-1}N_1)^{pj+i}\|^{1/p} \leq \|(A^{-1}N_1)^i\|^{1/p}\|(A^{-1}N_2)^{pj}\|^{1/p}.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Ahora tomando límites en la desigualdad anterior tenemos que

$$\rho((A^{-1}N_1)^j) \leq \rho((A^{-1}N_2)^j),$$

con lo que

$$\rho(A^{-1}N_1) \leq \rho(A^{-1}N_2), \tag{4.60}$$

que es equivalente a la desigualdad

$$\rho(N_1A^{-1}) \leq \rho(A^{-1}N_2).$$

Si $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo, por los teoremas 3.3 y 3.4 obtenemos la desigualdad (4.3).

Si $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo, teniendo en cuenta ahora que la desigualdad (4.60) también es equivalente a la desigualdad

$$\rho(N_1A^{-1}) \leq \rho(N_2A^{-1}),$$

obtenemos la desigualdad (4.3) por el teorema 3.4.

Por otra parte, si suponemos que se satisface la condición (i) entonces por el teorema 3.3 $A^{-1}N_1 \geq 0$ y por lo tanto, $(A^{-1}N_1)^i \geq 0$ y $(A^{-1}N_1)^j \geq 0$ con lo que se satisface la condición (ii).

Supongamos ahora que se satisface la desigualdad del apartado (c) mediante un razonamiento análogo al anterior pero utilizando la desigualdad

$$(A^{-1}N_1)^{pj+i} = (A^{-1}N_1)^{i+j}(A^{-1}N_1)^{(p-1)j}.$$

se obtiene la desigualdad (4.3). ■

Si en los apartados (a)–(d) del teorema anterior reemplazamos $A^{-1}N_1$ por N_1A^{-1} obtenemos, mediante un razonamiento análogo, el siguiente resultado.

Teorema 4.22. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes, con $A = M_2 - N_2$ débil. Supongamos que para algunos enteros $i \geq 0$ y $j \geq 1$ se satisface alguna de las desigualdades siguientes:*

Universitat d'Alacant Universidad de Alicante

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

(a) $(N_1A^{-1})^{i+j} \leq (N_1A^{-1})^i(A^{-1}N_2)^j$,

(b) $(N_1A^{-1})^{i+j} \leq (N_1A^{-1})^i(N_2A^{-1})^j$,

(c) $(N_1A^{-1})^{i+j} \leq (A^{-1}N_2)^j(N_1A^{-1})^i$,

(d) $(N_1A^{-1})^{i+j} \leq (N_2A^{-1})^j(N_1A^{-1})^i$.

Si además se satisface alguna de las condiciones siguientes:

(i) $A = M_1 - N_1$ *es débil del segundo tipo.*

(ii) $A = M_1 - N_1$ *es débil del primer tipo,* $(N_1A^{-1})^i \geq 0$ *y* $(N_1A^{-1})^j \geq 0$.

Entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Observación 4.7. *Los teoremas 4.21 y 4.22 siguen siendo válidos si en los apartados* (a)-(d) *y* (ii) *reemplazamos* N_k *por* M_k *para* $k = 1, 2$.

La técnica utilizada en la demostración de los teoremas 4.21 y 4.22 es similar a la que utilizan Beauwens [4] y Miller y Neumann [40] para demostrar resultados en los que introducen condiciones de comparación similares para matrices. Además, son los únicos resultados de los introducidos para operadores en este capítulo, en los cuales no aparece la hipótesis de que ciertos operadores tengan la propieded "d".

Song [53, Teorema 5] establece también condiciones análogas a las del apartado (i) del teorema 4.20 cambiando $\leq$ por $<$ y añadiendo las condiciones de $H_2 \geq 0$ y H_1 o H_2 irreducibles. Nosotros siguiendo la misma línea de los teoremas 4.21 y 4.22 y considerando hipótesis adicionales análogas a las consideradas por Song [53] introducimos los siguientes resultados.

Teorema 4.23. *Sea* A *un operador no singular en un espacio de Banach y sean* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *dos particiones convergentes y débiles del primer tipo. Para* $k = 1, 2$, *supondremos que* $M_k^{-1}N_k$ *y* $A^{-1}N_k$ *tienen la propiedad "d". Si además* $A^{-1}N_1$ *es* K*-irreducible y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(i) $(A^{-1}N_1)^{i+j} < (A^{-1}N_1)^i(A^{-1}N_2)^j$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(ii) $(A^{-1}N_1)^{i+j} < (A^{-1}N_2)^j(A^{-1}N_1)^i$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

entonces se satisface la desigualdad (4.5).

Demostración. (i) De la K-irreducibilidad de $A^{-1}N_1 \geq 0$, por el teorema 1.11 existe un vector propio $x' > 0$ tal que

$$x'A^{-1}N_1 = (A^{-1}N_1)'x' = \rho(A^{-1}N_1)x',$$

por tanto, tenemos que

$$\rho(A^{-1}N_1)^j x' < x'(A^{-1}N_2)^j = \left((A^{-1}N_2)^j\right)' x' \tag{4.61}$$

y por el apartado (ii) del lema 1.8 tenemos que

$$\left[\rho(A^{-1}N_1)\right]^j < \rho\left((A^{-1}N_2)^j\right) = \left[\rho(A^{-1}N_2)\right]^j$$

de donde

$$\rho(A^{-1}N_1) < \rho(A^{-1}N_2)$$

y por el apartado (vii) del teorema 3.3 se satisface la desigualdad (4.5).

(ii) Mediante un razonamiento análogo al apartado anterior, considerando en este caso el vector propio $x > 0$ tal que $A^{-1}N_1x = \rho(A^{-1}N_1)x$, obtenemos que

$$\rho(A^{-1}N_1)^j x < (A^{-1}N_2)^j x$$

y considerando la desigualdad anterior en lugar de la desigualdad (4.61) se satisface la desigualdad (4.5). ∎

Si en el teorema anterior consideramos el caso en el que $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ son débiles del segundo tipo obtenemos mediante un razonamiento análogo, el siguiente resultado.

Teorema 4.24. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles del segundo tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $N_kM_k^{-1}$ y N_kA^{-1} tienen la propiedad "d". Si además, N_1A^{-1} es K-irreducible y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

(i) $(N_1A^{-1})^{i+j} < (N_1A^{-1})^i(N_2A^{-1})^j$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

(ii) $(N_1A^{-1})^{i+j} < (N_2A^{-1})^j(N_1A^{-1})^i$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

entonces se satisface la desigualdad (4.5).

Finalmente, si consideramos los casos en los que las particioenes sean débiles de diferente tipo, obtenemos los dos resultados siguientes, cuyas demostraciones también son similares a la del teorema 4.23.

Teorema 4.25. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes con $A = M_1 - N_1$ débil del primer tipo y $A = M_2 - N_2$ débil del segundo tipo. Supondremos que $M_1^{-1}N_1$, $A^{-1}N_1$, $N_2M_2^{-1}$ y N_2A^{-1} tienen la propiedad "d". Si además $A^{-1}N_1$ es K-irreducible y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(i) $(A^{-1}N_1)^{i+j} < (A^{-1}N_1)^i(N_2A^{-1})^j$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$.

(ii) $(A^{-1}N_1)^{i+j} < (N_2A^{-1})^j(A^{-1}N_1)^i$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

entonces se satisface la desigualdad (4.5).

Teorema 4.26. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes con $A = M_1 - N_1$ débil del segundo tipo y $A = M_2 - N_2$ débil del primer tipo. Supondremos que $N_1M_1^{-1}$, N_1A^{-1}, $M_2^{-1}N_2$ y $A^{-1}N_2$ tienen la propiedad "d". Si además N_1A^{-1} es K-irreducible y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(i) $(N_1A^{-1})^{i+j} < (N_1A^{-1})^i(A^{-1}N_2)^j$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

(ii) $(N_1A^{-1})^{i+j} < (A^{-1}N_2)^j(N_1A^{-1})^i$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

entonces se satisface la desigualdad (4.5).

En el ejemplo siguiente, continuando con los comentarios al teorema 4.20, ponemos de manifiesto distintos casos en los que obtenemos la desigualdad (4.3) a partir de las desigualdades de los apartados (ii) y (iii), bajo hipóteis no contempladas en dicho teorema.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Ejemplo 4.9. *Consideremos la matriz A del ejemplo 4.8. Sea $M_1 = P_1$ con P_1 definida en el ejemplo 4.8 y* $M_2 = \begin{bmatrix} \frac{190}{23} & \frac{45}{23} & -\frac{95}{23} \\ \frac{830}{69} & \frac{120}{23} & -\frac{100}{23} \\ \frac{400}{69} & \frac{80}{23} & \frac{10}{23} \end{bmatrix}$.

Realizando los cálculos oportunos tenemos que:

- *ambas particiones son convergentes débiles del segundo tipo,*
- $M_1A^{-1} \geq 0$ *y* $(M_1A^{-1})(M_2A^{-1}) \leq (M_2A^{-1})^2$, *es decir, tenemos* $j = 1$ *e* $i = 1$,
- N_2A^{-1} *es irreducible y* $(N_1A^{-1})(N_2A^{-1}) \leq (N_2A^{-1})^2$, *es decir tenemos* $j = 1$ *e* $i = 1$.

Por lo tanto, se satisfacen las condiciones de los apartados (ii) *y* (iii) *del teorema 4.20, pero las particiones son débiles del segundo tipo, y sin embargo, tenemos que*

$$\rho(M_1^{-1}N_1) = \frac{1}{4} < \frac{297}{365} = \rho(M_2^{-1}N_2).$$

En los resultados siguientes generalizamos a operadores los apartados (ii) y (iii) del teorema 4.20 distinguiendo los distintos casos que se pueden dar utilizando las particiones débiles del segundo tipo, de forma que también abarque los casos que en el ejemplo anterior hemos puesto de manifiesto que el teorema 4.20 no abordaba.

Teorema 4.27. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles del primer tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d". Si además se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(i) $(A^{-1}M_1)^j(A^{-1}M_2)^i \leq (A^{-1}M_2)^{i+j}$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

(ii) $(A^{-1}M_2)^i(A^{-1}M_1)^j \leq (A^{-1}M_2)^{i+j}$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

(iii) $A^{-1}N_2$ *es K-irreducible y* $(A^{-1}N_1)^j(A^{-1}N_2)^i \leq (A^{-1}N_2)^{i+j}$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(iv) $A^{-1}N_2$ *es* K*-irreducible y* $(A^{-1}N_2)^i(A^{-1}N_1)^j \leq (A^{-1}N_2)^{i+j}$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$.

Entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Demostración. De $A^{-1}M_k = A^{-1}N_k + I$ y tener $A^{-1}N_k$ la propiedad "d", se sigue que $A^{-1}M_k$ tiene la propiedad "d", para $k = 1, 2$.

(i) Por ser ambas particiones débiles del primer tipo y convergentes, por el teorema 3.3, $A^{-1}M_1 \geq 0$ y $A^{-1}M_2 \geq 0$. Ahora por la propiedad "d" para $(A^{-1}M_1)'$ existe un vector propio $\boldsymbol{x}' \geq 0$ tal que

$$(A^{-1}M_1)'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'(A^{-1}M_1) = \rho(A^{-1}M_1)\boldsymbol{x}',$$

entonces de la desigualdad del apartado (i) tenemos que

$$(\rho(A^{-1}M_1))^j\boldsymbol{x}'(A^{-1}M_2)^i \leq \boldsymbol{x}'(A^{-1}M_2)^{i+j},$$

ahora si llamamos $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}'(A^{-1}M_2)^i \geq 0$ podemos escribir la desigualdad anterior como

$$(\rho(A^{-1}M_1))^j\boldsymbol{y}' \leq \boldsymbol{y}'(A^{-1}M_2)^j = \left((A^{-1}M_2)^j\right)'\boldsymbol{y}',$$

y por el apartado (i) del lema 1.8

$$(\rho(A^{-1}M_1))^j \leq \rho\left((A^{-1}M_2)^j\right), \tag{4.62}$$

de donde

$$\rho(A^{-1}M_1) \leq \rho(A^{-1}M_2);$$

finalmente, por el teorema 3.3, se satisface la desigualdad (4.3).

(ii) Siguiendo un razonamiento similar al caso anterior, considerando el vector propio $\boldsymbol{x} \geq 0$ tal que $A^{-1}M_1\boldsymbol{x} = \rho(A^{-1}M_1)\boldsymbol{x}$, entonces de la desigualdad del apartado (ii) tenemos que

$$\left(\rho(A^{-1}M_1)\right)^j(A^{-1}M_2)^i\boldsymbol{x} \leq (A^{-1}M_2)^{i+j}\boldsymbol{x}$$

y considerando $\boldsymbol{y} = (A^{-1}M_2)^i\boldsymbol{x} \geq 0$ podemos escribir la desigualdad anterior como

$$\left(\rho(A^{-1}M_1)\right)^j\boldsymbol{y} \leq (A^{-1}M_2)^j\boldsymbol{y};$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

de nuevo por el apartado (i) del lema 1.8 obtenemos la desigualdad (4.62) y en consecuencia la desigualdad (4.3).

(iii) En este caso, por ser ambas particiones convergentes débiles del primer tipo, por el teorema 3.3, $A^{-1}N_1 \geq 0$ y $A^{-1}N_2 \geq 0$. Además, por ser $A^{-1}N_2$ K-irreducible, por el teorema 1.11 existe un vector propio $\boldsymbol{x} > 0$ tal que $A^{-1}N_2\boldsymbol{x} = \rho(A^{-1}N_2)\boldsymbol{x}$, entonces de la desigualdad del apartado (iii) tenemos que

$$(A^{-1}N_1)^j \left(\rho(A^{-1}N_2)\right)^i \boldsymbol{x} \leq \left(\rho(A^{-1}N_2)\right)^{i+j} \boldsymbol{x},$$

por tanto,

$$(A^{-1}N_1)^j\boldsymbol{x} \leq \left(\rho(A^{-1}N_2)\right)^j \boldsymbol{x}$$

y por el apartado (ii) del lema 1.8 tenemos que

$$\rho(A^{-1}N_1)^j \leq \rho(A^{-1}N_2)^j, \tag{4.63}$$

de donde

$$\rho(A^{-1}N_1) \leq \rho(A^{-1}N_2);$$

de nuevo por el teorema 3.3 se satisface la desigualdad (4.3).

(iv) De forma análoga al caso anterior, pero considerando en este caso el vector propio $\boldsymbol{x}' > 0$ tal que $\boldsymbol{x}'A^{-1}N_2 = \rho(A^{-1}N_2)\boldsymbol{x}'$, entonces de la desigualdad del apartado (iv) tenemos que

$$\boldsymbol{x}'(A^{-1}N_1)^j \leq \left(\rho(A^{-1}N_2)\right)^j \boldsymbol{x}'$$

y por el apartado (ii) del lema 1.8 obtenemos de nuevo la desigualdad (4.63) a partir de la cual en el apartado anterior hemos deducido que se satisface la desigualdad (4.3). ■

Si consideramos en el teorema anterior el caso en el que $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ sean débiles del segundo tipo obtenemos el siguiente resultado, cuya demostración se realiza mediante razonamientos similares, teniendo en cuenta ahora que por el teorema 3.4, $N_kA^{-1} \geq 0$ y $M_kA^{-1} \geq 0$ para $k = 1, 2$.

Teorema 4.28. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles del segundo tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $N_kM_k^{-1}$ y N_kA^{-1} tienen la propiedad "d". Si además se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(i) $(M_1A^{-1})^j(M_2A^{-1})^i \le (M_2A^{-1})^{i+j}$ *para algún* $i \ge 0$ *y algún* $j \ge 1$,

(ii) $(M_2A^{-1})^i(M_1A^{-1})^j \le (M_2A^{-1})^{i+j}$ *para algún* $i \ge 0$ *y algún* $j \ge 1$,

(iii) N_2A^{-1} *es* K*-irreducible y* $(N_1A^{-1})^j(N_2A^{-1})^i \le (N_2A^{-1})^{i+j}$ *para algún* $i \ge 0$ *y algún* $j \ge 1$,

(iv) N_2A^{-1} *es* K*-irreducible y* $(N_2A^{-1})^i(N_1A^{-1})^j \le (N_2A^{-1})^{i+j}$ *para algún* $i \ge 0$ *y algún* $j \ge 1$.

Entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Si en el teorema 4.27 consideramos el caso en el que $A = M_2 - N_2$ sea débil del segundo tipo, mediante razonamientos análogos, teniendo en cuenta que por el teorema 3.3, $A^{-1}N_1 \ge 0$ y $A^{-1}M_1 \ge 0$ y que por el teorema 3.4, $N_2A^{-1} \ge 0$ y $M_2A^{-1} \ge 0$ obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.29. *Sea* A *un operador no singular en un espacio de Banach y sean* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *dos particiones convergentes y débiles del primer y segundo tipo respectivamente. Supondremos que* $M_1^{-1}N_1$, $A^{-1}N_1$, $N_2M_2^{-1}$ *y* N_2A^{-1} *tienen la propiedad "d". Si además se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(i) $(A^{-1}M_1)^j(M_2A^{-1})^i \le (M_2A^{-1})^{i+j}$ *para algún* $i \ge 0$ *y algún* $j \ge 1$,

(ii) $(M_2A^{-1})^i(A^{-1}M_1)^j \le (M_2A^{-1})^{i+j}$ *para algún* $i \ge 0$ *y algún* $j \ge 1$,

(iii) N_2A^{-1} *es* K*-irreducible y* $(A^{-1}N_1)^j(N_2A^{-1})^i \le (N_2A^{-1})^{i+j}$ *para algún* $i \ge 0$ *y algún* $j \ge 1$,

(iv) N_2A^{-1} *es* K*-irreducible y* $(N_2A^{-1})^i(A^{-1}N_1)^j \le (N_2A^{-1})^{i+j}$ *para algún* $i \ge 0$ *y algún* $j \ge 1$.

Entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Finalmente, considerando en el teorema 4.27 el caso en el que $A = M_1 - N_1$ sea débil del segundo tipo y teniendo en cuenta consideraciones análogas a las realizadas para el teorema anterior obtenemos el siguiente resultado.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Teorema 4.30. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles del segundo y del primer tipo respectivamente. Supondremos que $N_1 M_1^{-1}$, $N_1 A^{-1}$, $M_2^{-1} N_2$ y $A^{-1} N_2$ tienen la propiedad "d". Si además se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(i) $(M_1 A^{-1})^j (A^{-1} M_2)^i \leq (A^{-1} M_2)^{i+j}$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

(ii) $(A^{-1} M_2)^i (M_1 A^{-1})^j \leq (A^{-1} M_2)^{i+j}$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

(iii) $A^{-1} N_2$ *es K-irreducible y* $(N_1 A^{-1})^j (A^{-1} N_2)^i \leq (A^{-1} N_2)^{i+j}$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$,

(iv) $A^{-1} N_2$ *es K-irreducible y* $(A^{-1} N_2)^i (N_1 A^{-1})^j \leq (A^{-1} N_2)^{i+j}$ *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$.

Entonces se satisface la desigualdad (4.3).

Observación 4.8. *Los teoremas 4.27-4.30 siguen siendo ciertos si en las condiciones* (i)-(iv) *de dichos teorema cambiamos "$\leq$" por "$<$".*

Observación 4.9. *Notemos también que al igual que en el teorema 4.19 hemos introducido el resultado análogo al teorema 4.18, pero considerando un espacio de Hilbert y utilizando el operador adjunto en uno de los operadores de una de las particiones, sin ninguna condición adicional, los teoremas 4.21-4.30 y las observaciones 4.7 y 4.8 siguen siendo ciertos si cambiamos "espacio de Banach" por "espacio de Hilbert " y $A^{-1}N_2$, $N_2 A^{-1}$, $A^{-1} M_2$ y $M_2 A^{-1}$ por sus respectivos operadores adjuntos.*

Por otra parte, de forma similar al teorema 4.14, Miller y Neumann [40, Teorema 2] introducen un recíproco parcial al apartado (ii) del teorema 4.23 para matrices y particiones débiles del primer tipo utilizando teoría de grafos bajo hipótesis muy restrictivas. En el siguiente resultado introducimos una generalización del teorema 2 de Miller y Neumann [40] a operadores, pero evidentemente sin hacer uso de la teoría de grafos.

Teorema 4.31. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles del primer tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1} N_k$ y $A^{-1} N_k$ tienen la propiedad "d". Además, supondremos que se satisface la desigualdad (4.5).*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(i) *Si $A^{-1}N_2$ es K-primitivo y existen un $i \geq 0$ y algún $\boldsymbol{x}$ tal que $(A^{-1}N_1)^i\boldsymbol{x} > 0$, entonces existe un entero positivo j_0 tal que*

$$(A^{-1}N_1)^{i+j} < (A^{-1}N_1)^i(A^{-1}N_2)^j, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.64}$$

(ii) *Si $A^{-1}N_2$ es K-primitivo y existe un $i \geq 0$ tal que $(A^{-1}N_1)^i\boldsymbol{x} \geq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \geq 0$, entonces existe un entero positivo j_0 tal que*

$$(A^{-1}N_1)^{i+j} < (A^{-1}N_2)^j(A^{-1}N_1)^i, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.65}$$

(iii) *Si $A^{-1}N_2$ es K-primitivo, entonces para todo entero $i \geq 0$ existe un entero positivo j_0 tal que se satisfacen las desigualdades siguientes:*

$$(A^{-1}N_1)^j(A^{-1}N_2)^i < (A^{-1}N_2)^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.66}$$

$$(A^{-1}N_2)^i(A^{-1}N_1)^j < (A^{-1}N_2)^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.67}$$

(iv) *Si $A^{-1}M_2$ es K-primitivo, entonces para todo entero $i \geq 0$ existe un entero positivo j_0 tal que se satisfacen las desigualdades siguientes:*

$$(A^{-1}M_1)^{i+j} < (A^{-1}M_1)^i(A^{-1}M_2)^j, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.68}$$

$$(A^{-1}M_1)^{i+j} < (A^{-1}M_2)^j(A^{-1}M_1)^i, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.69}$$

$$(A^{-1}M_1)^j(A^{-1}M_2)^i < (A^{-1}M_2)^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.70}$$

$$(A^{-1}M_2)^i(A^{-1}M_1)^j < (A^{-1}M_2)^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.71}$$

Demostración. Por el apartado (vii) del teorema 3.3 tenemos que la desigualdad (4.5) implica la desigualdad (4.41) y por tanto,

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{A^{-1}N_1}{\lambda_2}\right)^j = 0 \tag{4.72}$$

donde $\lambda_2 = \rho(A^{-1}N_2)$. Ahora, como $A^{-1}N_2$ es K-primitivo por el teorema 1.11 existe un vector propio $\boldsymbol{x}_2 > 0$ tal que $A^{-1}N_2\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ y por el teorema 1.13 tenemos que para

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

cada $\boldsymbol{x} \geq 0$ la sucesión de vectores $\left\{ \left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2} \right)^j \boldsymbol{x} \right\}_{j=n}^{\infty}$ está a una distancia positiva de la frontera de K, es decir

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2} \right)^j > 0 \tag{4.73}$$

(i) Como del apartado (iii) del lema 1.4 tenemos que $(A^{-1}N_1)^i \boldsymbol{y} > 0$ para todo $\boldsymbol{y} > 0$, necesariamente

$$\lim_{j\to\infty} (A^{-1}N_1)^i \left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2} \right)^j > 0$$

y de la desigualdad (4.72) tenemos que existe un entero positivo j_0 tal que

$$(A^{-1}N_1)^i \left(\frac{A^{-1}N_1}{\lambda_2} \right)^j < (A^{-1}N_1)^i \left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2} \right)^j \quad \text{para todo} \quad j \geq j_0,$$

de donde se sigue la desigualdad (4.64).

(ii) De la desigualdad (4.73) tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2} \right)^j (A^{-1}N_1)^i > 0$$

y de nuevo, de la desigualdad (4.72) existe un entero positivo j_0 tal que

$$\left(\frac{A^{-1}N_1}{\lambda_2} \right)^j (A^{-1}N_1)^i < \left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2} \right)^j (A^{-1}N_1)^i \quad \text{para todo} \quad j \geq j_0,$$

de donde se sigue la desigualdad (4.65).

(iii) De la K-primitividad de $A^{-1}N_2$ tenemos que $(A^{-1}N_2)^i \boldsymbol{x} \geq 0$ para todo entero $i \geq 0$ y para todo $\boldsymbol{x} \geq 0$, por lo tanto, de la desigualdad (4.73) obtenemos que

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2} \right)^j (A^{-1}N_2)^i > 0$$

y

$$\lim_{j\to\infty} (A^{-1}N_2)^i \left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2} \right)^j > 0.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Ahora, de la desigualdad (4.72) existe un entero positivo j_0 tal que

$$\left(\frac{A^{-1}N_1}{\lambda_2}\right)^j (A^{-1}N_2)^i < \left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2}\right)^j (A^{-1}N_2)^i \quad \text{para todo} \quad j \geq j_0,$$

y

$$(A^{-1}N_2)^i \left(\frac{A^{-1}N_1}{\lambda_2}\right)^j < (A^{-1}N_2)^i \left(\frac{A^{-1}N_2}{\lambda_2}\right)^j \quad \text{para todo} \quad j \geq j_0,$$

de donde se siguen las desigualdades (4.66) y (4.67), respectivamente.

(iv) Las desigualdades (4.68) y (4.69) se obtienen mediante un razonamiento análogo al de los apartados (i) y (ii) respectivamente, teniendo en cuenta que por ser $A^{-1}M_1$ no singular, para todo entero $i \geq 0$ se satisface que $(A^{-1}M_1)^i\boldsymbol{x} > 0$ para algún $\boldsymbol{x}$, y $(A^{-1}M_1)^i\boldsymbol{x} \geq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \geq 0$, respectivamente. Las desigualdades (4.70) y (4.71) se obtienen mediante un razonamiento análogo al del apartado (iii). ■

En el caso particular en el que $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ y $K = \mathbb{R}^n_+$, la condición de que exista un $i \geq 0$ y un $\boldsymbol{x}$ tal que $(A^{-1}N_1)^i\boldsymbol{x} > 0$ del apartado (i) del teorema anterior se traduce a que exista un $i \geq 0$ tal que la matriz $(A^{-1}N_1)^i$ no tenga ninguna fila idénticamente nula; mientras que, la condición de que exista un $i \geq 0$ tal que $(A^{-1}N_1)^i\boldsymbol{x} \geq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \geq 0$ del apartado (ii) del teorema 4.31 se traduce en que exista un $i \geq 0$ tal que la matriz $(A^{-1}N_1)^i$ no tenga ninguna fila idénticamente nula.

Si en el teorema 4.31 consideramos todas las combinaciones posibles que obtenemos al variar el tipo de alguna o de ambas particiones, obtenemos mediante el mismo razonamiento los resultados siguientes.

Teorema 4.32. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles del segundo tipo. Para $k = 1, 2$ supondremos que $N_kM_k^{-1}$ y N_kA^{-1} tienen la propiedad "d". Además, supondremos que se satisface la desigualdad (4.5).*

(i) *Si N_2A^{-1} es K-primitivo y existen un $i \geq 0$ y algún $\boldsymbol{x}$ tal que $(N_1A^{-1})^i\boldsymbol{x} > 0$, entonces existe un entero positivo j_0 tal que*

$$(N_1A^{-1})^{i+j} < (N_1A^{-1})^i(N_2A^{-1})^j, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.74}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(ii) *Si* N_2A^{-1} *es* K*-primitivo y existe un* $i \geq 0$ *tal que* $(N_1A^{-1})^i\boldsymbol{x} \geq 0$ *para todo* $\boldsymbol{x} \geq 0$, *entonces existe un entero positivo* j_0 *tal que*

$$(N_1A^{-1})^{i+j} < (N_2A^{-1})^j(N_1A^{-1})^i, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.75}$$

(iii) *Si* N_2A^{-1} *es* K*-primitivo, entonces para todo entero* $i \geq 0$ *existe un entero positivo* j_0 *tal que se satisfacen las siguientes desigualdades*

$$(N_1A^{-1})^j(N_2A^{-1})^i < (N_2A^{-1})^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.76}$$

$$(N_1A^{-1})^i(N_2A^{-1})^j < (N_2A^{-1})^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.77}$$

(iv) *Si* M_2A^{-1} *es* K*-primitivo, entonces para todo entero* $i \geq 0$ *existe un entero positivo* j_0 *tal que se satisfacen las siguientes desigualdades*

$$(M_1A^{-1})^{i+j} < (M_1A^{-1})^i(M_2A^{-1})^j, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.78}$$

$$(M_1A^{-1})^{i+j} < (M_2A^{-1})^j(M_1A^{-1})^i, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.79}$$

$$(M_1A^{-1})^j(M_2A^{-1})^i < (M_2A^{-1})^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.80}$$

$$(M_1A^{-1})^i(M_2A^{-1})^j < (M_2A^{-1})^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.81}$$

Teorema 4.33. *Sea* A *un operador no singular y sean* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *dos particiones convergentes y débiles del primer y del segundo tipo respectivamente. Supondremos que* $M_1^{-1}N_1$, $A^{-1}N_1$, $N_2M_2^{-1}$ *y* N_2A^{-1} *tienen la propiedad "d". Además, supondremos que se satisface la desigualdad (4.5).*

(i) *Si* N_2A^{-1} *es* K*-primitivo y existen un* $i \geq 0$ *y algún* $\boldsymbol{x}$ *tal que* $(A^{-1}N_1)^i\boldsymbol{x} > 0$, *entonces existe un entero positivo* j_0 *tal que*

$$(A^{-1}N_1)^{i+j} < (A^{-1}N_1)^i(N_2A^{-1})^j, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.82}$$

(ii) *Si* N_2A^{-1} *es* K*-primitivo y existe un* $i \geq 0$ *tal que* $(A^{-1}N_1)^i\boldsymbol{x} \geq 0$ *para todo* $\boldsymbol{x} \geq 0$, *entonces existe un entero positivo* j_0 *tal que*

$$(A^{-1}N_1)^{i+j} < (N_2A^{-1})^j(A^{-1}N_1)^i, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.83}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

(iii) *Si N_2A^{-1} es K-primitivo, entonces para todo entero $i \geq 0$ existe un entero positivo j_0 tal que se satisfacen la siguientes desigualdades*

$$(A^{-1}N_1)^j(N_2A^{-1})^i < (N_2A^{-1})^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.84}$$

$$(N_2A^{-1})^i(A^{-1}N_1)^j < (N_2A^{-1})^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.85}$$

(iv) *Si M_2A^{-1} es K-primitivo, entonces para todo entero $i \geq 0$ existe un entero positivo j_0 tal que se satisfacen la siguientes desigualdades*

$$(A^{-1}M_1)^{i+j} < (A^{-1}M_1)^i(M_2A^{-1})^j, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.86}$$

$$(A^{-1}M_1)^{i+j} < (M_2A^{-1})^j(A^{-1}M_1)^i, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.87}$$

$$(A^{-1}M_1)^j(M_2A^{-1})^i < (M_2A^{-1})^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.88}$$

$$(M_2A^{-1})^i(A^{-1}M_1)^j < (M_2A^{-1})^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.89}$$

Teorema 4.34. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles del segundo y del primer tipo respectivamente. Supondremos que $N_1M_1^{-1}$, N_1A^{-1}, $A^{-1}N_2$ y $M_2^{-1}N_2$ tienen la propiedad "d". Además, supondremos que se satisface la desigualdad (4.5).*

(i) *Si $A^{-1}N_2$ es K-primitivo y existen un $i \geq 0$ y algún x tal que $(N_1A^{-1})^i x > 0$, entonces existe un entero positivo j_0 tal que*

$$(N_1A^{-1})^{i+j} < (N_1A^{-1})^i(A^{-1}N_2)^j, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.90}$$

(ii) *Si $A^{-1}N_2$ es K-primitivo y existe un $i \geq 0$ tal que $(N_1A^{-1})^i x \geq 0$ para todo $x \geq 0$, entonces existe un entero positivo j_0 tal que*

$$(N_1A^{-1})^{i+j} < (A^{-1}N_2)^j(N_1A^{-1})^i, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.91}$$

(iii) *Entonces para todo entero $i \geq 0$ existe un entero positivo j_0 tal que se satisfacen las siguientes desigualdades*

$$(N_1A^{-1})^j(A^{-1}N_2)^i < (A^{-1}N_2)^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.92}$$

$$(N_1A^{-1})^i(A^{-1}N_2)^j < (A^{-1}N_2)^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.93}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(iv) *Si* $A^{-1}M_2$ *es* K*-primitivo, entonces para todo entero* $i \geq 0$ *existe un entero positivo* j_0 *tal que se satisfacen las siguientes desigualdades*

$$(M_1A^{-1})^{i+j} < (M_1A^{-1})^i(A^{-1}M_2)^j, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.94}$$

$$(M_1A^{-1})^{i+j} < (A^{-1}M_2)^j(M_1A^{-1})^i, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.95}$$

$$(M_1A^{-1})^j(A^{-1}M_2)^i < (A^{-1}M_2)^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.96}$$

$$(M_1A^{-1})^i(A^{-1}M_2)^j < (A^{-1}M_2)^{i+j}, \quad \textit{para todo} \quad j \geq j_0. \tag{4.97}$$

Observación 4.10. *Los teoremas 4.31–4.34 siguen siendo ciertos si cambiamos "espacio de Banach" por "espacio de Hilbert" y* $A^{-1}N_2$, $A^{-1}M_2$, N_2A^{-1} *y* M_2A^{-1} *por sus respectivos operadores adjuntos.*

Por otra parte, si en los teoremas 4.31–4.34 consideramos el espacio de Banach $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ y el cono $K = \mathbb{R}^n_+$ las desigualdades del apartado (iv) de dichos teoremas pueden obtenerse bajo hipótesis más débiles, como ponemos de manifiesto en el siguiente resultado.

Corolario 4.6. *Sea* A *una matriz no singular y sean* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *dos particiones convergentes y débiles. Supondremos que se satisface la desigualdad (4.5).*

(i) *Si* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *son del primer tipo con* $A^{-1}M_2$ K*-irreducible, entonces existe un entero positivo* j_0 *tal que se satisfacen las desigualdades (4.68)–(4.71) para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq j_0$.

(ii) *Si* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *son del segundo tipo con* M_2A^{-1} K*-irreducible, entonces existe un entero positivo* j_0 *tal que se satisfacen las desigualdades (4.78)–(4.81) para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq j_0$.

(iii) *Si* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *son del primer y del segundo tipo respectivamente, con* M_2A^{-1} K*-irreducible, entonces existe un entero positivo* j_0 *tal que se satisfacen las desigualdades (4.86)–(4.89) para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq j_0$.

(iv) *Si* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *son del segundo y del primer tipo respectivamente, con* M_2A^{-1} K*-irreducible, entonces existe un entero positivo* j_0 *tal que se satisfacen las desigualdades (4.94)–(4.97) para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq j_0$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Demostración. Si $A = M_2 - N_2$ es convergente y débil del primer tipo, por el teorema 3.3 sabemos que $A^{-1}N_2 \geq 0$ y de $M_2 = N_2 + A$ tenemos que $A^{-1}M_2 = A^{-1}N_2 + I$, por tanto, la traza de $A^{-1}M_2$ es positiva y por el teorema 1.6 tenemos que $A^{-1}M_2$ es K-primitiva.

Si $A = M_2 - N_2$ es convergente y débil del segundo tipo, por el teorema 3.4 sabemos que $N_2A^{-1} \geq 0$ y mediante un razonamiento análogo al anterior obtenemos que M_2A^{-1} es K-primitiva.

En cualquier caso, se satisfacen las hipótesis del apartado (iv) de los teoremas 4.31–4.34. ∎

4.4 Particiones definidas positivas

El objetivo de esta sección es introducir condiciones de comparación análogas a las presentadas en las secciones 4.2 y 4.3 para particiones débiles no negativas y débiles, respectivamente, para particiones P-regulares y para particiones débiles definidas no negativas del primer y del segundo tipo, utilizando ahora, el orden parcial introducido a partir del concepto de operador definido no negativo. En la mayoría de resultados que en esta sección introduzcamos, se observará fácilmente la similitud con los resultados presentados en las secciones mencionadas, de todos modos analizaremos, tanto las analogías, como las diferencias.

Por otra parte, en los resultados que introduzcamos a lo largo de esta sección, daremos por supuesto, sin mencionarlo de forma explícita, que estamos trabajando en un espacio de Hilbert complejo.

Empezamos con el siguiente lema técnico.

Lema 4.3. *Sea $A \succ 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones cualesquiera. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) $0 \preceq N_1 \preceq N_2$,

(ii) $0 \preceq A^{-1}N_1A^{-1} \preceq A^{-1}N_2A^{-1}$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Demostración. (i) $\to$ (ii) Sea $\boldsymbol{y} \in \mathbb{E}$, como A es hermítico y no singular, A^{-1} también es hermítico, por tanto

$$(A^{-1}\boldsymbol{y})' = \boldsymbol{y}'(A^{-1})' = \boldsymbol{y}'A^{-1}.$$

Para $k = 1, 2$ tenemos que

$$\boldsymbol{y}'(A^{-1}N_kA^{-1})\boldsymbol{y} = (A^{-1}\boldsymbol{y})'N_k(A^{-1}\boldsymbol{y}) \geq 0$$

por (i), por tanto, $A^{-1}N_kA^{-1} \succeq 0$. Además

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'(A^{-1}N_2A^{-1} - A^{-1}N_1A^{-1})\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y}'A^{-1}(N_2 - N_1)A^{-1}\boldsymbol{y} \\ &= (A^{-1}\boldsymbol{y})'(N_2 - N_1)(A^{-1}\boldsymbol{y}) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de (i), luego $A^{-1}N_1A^{-1} \preceq A^{-1}N_2A^{-1}$.

(ii) $\to$ (i) Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}$, claramente $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}$ para algún $\boldsymbol{y}$, por tanto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'(N_2 - N_1)\boldsymbol{x} &= (A^{-1}\boldsymbol{y})'(N_2 - N_1)(A^{-1}\boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{y}'A^{-1}(N_2 - N_1)A^{-1}\boldsymbol{y} \\ &= \boldsymbol{y}'(A^{-1}N_2A^{-1} - A^{-1}N_1A^{-1})\boldsymbol{y} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de (ii), por tanto, $N_1 \preceq N_2$. Además, para $k = 1, 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'N_k\boldsymbol{x} &= (A^{-1}\boldsymbol{y})'N_k(A^{-1}\boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{y}'A^{-1}N_kA^{-1}\boldsymbol{y} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

por (ii), por tanto, $N_k \succeq 0$. ■

Como ya hemos mencionado en la sección 4.1, el último resultado de comparación para particiones definidas positivas es el introducido recientemente por Nabben [41, Teorema 2.3] y que generalizamos a continuación para operadores.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Teorema 4.35. *Sea $A \succ 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones tales que N_1 y N_2 son operadores compactos. Si*

$$0 \preceq N_1 \preceq N_2, \tag{4.98}$$

entonces se satisface la disigualdad (4.3).

Demostración. De $N_k = M_k + A$ para $k = 1, 2$, tenemos que $0 \preceq M_1 \preceq M_2$, por tanto, ambas particiones son P-regulares. Además, por el teorema 1.5 $M_k^{-1}N_k$ es un operador compacto para $k = 1, 2$, con lo que ambas particiones son convergentes por el teorema 3.8. Además por ser $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ semejantes a $M_k^{-1/2}N_kM_k^{-1/2}$ y $A^{-1/2}N_kA^{-1/2}$ respectivamente, sabemos que sus respectivos valores propios son no negativos.

Por otra parte, como $A^{-1/2} \succ 0$, de la desigualdad (4.98) tenemos que

$$0 \preceq A^{-1/2}N_1A^{-1/2} \preceq A^{-1/2}N_2A^{-1/2}. \tag{4.99}$$

Ahora bien, si λ_n y μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, denotan los valores propios de los operadores compactos $A^{-1/2}N_1A^{-1/2}$ y $A^{-1/2}N_2A^{-1/2}$ respectivamente, de (4.99) tenemos que $\lambda_n \leq \mu_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Finalmente, de los lemas 2.2 y 2.3 y por ser la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ creciente para valores de $x \geq 0$ obtenemos la desigualdad (4.3). ∎

Es fácil observar que el teorema anterior tiene la misma estructura que el teorema 4.3 para particiones débiles no negativas, a diferencia del orden parcial utilizado en cada caso. Sin embargo, bajo las hipótesis del teorema 4.3 las desigualdades $N_1 \leq N_2$ y $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1}$ no son equivalentes como pondremos de manifiesto en el ejemplo 5.1, mientras que del lema 4.3 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.7. *Sea $A \succ 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones tales que N_1 y N_2 son operadores compactos. Si*

$$0 \preceq A^{-1}N_1A^{-1} \preceq A^{-1}N_2A^{-1}, \tag{4.100}$$

entonces se satisface la disigualdad (4.3).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Notemos también que a partir de la equivalencia entre las desigualdades $N_1 \leq N_2$ y $M_1 \leq M_2$ introducida en el lema 4.1 hemos introducido el corolario 4.1. Sin embargo, como pondremos de manifiesto en el ejemplo siguiente, bajo las hipétesis del teorema 4.35 las desigualdades $N_1 \preceq N_2$ y $M_1 \preceq M_2$ no son equivalentes.

Ejemplo 4.10. *Consideremos la matriz $A \succ 0$ del ejemplo 3.2 y las particiones $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ donde*

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Es fácil comprobar que $0 \preceq M_1 \preceq M_2$ y sin embargo, $0 \not\preceq N_1 \not\preceq N_2$. Además, $A = M_1 - N_1$ no es P-regular ni convergente. Finalmente,

$$\rho(M_1^{-1}N_1) = \frac{5}{2} > \frac{1204}{2739} = \rho(M_2^{-1}N_2),$$

con lo que no se satisface la desigualdad (4.3).

Por otra parte, si consideramos particiones débiles definidas no negativas podemos introducir los siguientes resultados de comparación.

Teorema 4.36. *Sea A un operador no singular. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles definidas no negativas del primer o del segundo tipo con N_1 y N_2 operadores compactos. Si se satisface alguna de las condiciones siguientes*

(i) $0 \preceq A^{-1}N_1 \preceq A^{-1}N_2$,

(ii) $0 \preceq A^{-1}N_1 \preceq N_2A^{-1}$,

(iii) $0 \preceq N_1A^{-1} \preceq A^{-1}N_2$,

(iv) $0 \preceq N_1A^{-1} \preceq N_2A^{-1}$,

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Volver al índice/Tornar a l'index

entonces se satisface la disigualdad (4.3).

Demostración. Haremos la demostración suponiendo que se satisface la condición (i). Si se satisface alguna de las otras condiciones se sigue un razonamiento análogo.

Por ser A^{-1} un operador acotado y N_k un operador compacto por el teorema 2.3 se sigue que los operadores $A^{-1}N_k$ son compactos para $k = 1, 2$. Por tanto, por el teorema 1.15 tenemos que

$$\rho(A^{-1}N_1) \leq \rho(A^{-1}N_2). \tag{4.101}$$

Ahora, si ambas particiones son del primer tipo, por el teorema 3.10 y la monotonía de la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ para $x \geq 0$ obtenemos la desigualdad (4.3). Si ambas particiones son del segundo tipo, teniendo en cuenta que la desigualdad (4.101) es equivalente a

$$\rho(N_1A^{-1}) \leq \rho(N_2A^{-1}),$$

por el teorema 3.11 se sigue la desigualdad (4.3). Si las particiones son de diferente tipo, teniendo en cuenta que la desigualdad (4.101) también es equivalente a las desigualdades

$$\rho(A^{-1}N_1) \leq \rho(N_2A^{-1}) \quad \text{y} \quad \rho(N_1A^{-1}) \leq \rho(A^{-1}N_2)$$

obtenemos las desigualdad (4.3) a partir de los teoremas 3.10 y 3.11. ∎

Es fácil observar, que el teorema 4.36 tiene la misma estructura que el teorema 4.18 para particiones débiles, a diferencia del orden parcial utilizado.

Observación 4.11. *El teorema anterior sigue siendo cierto si cambiamos N_k por M_k, para $k = 1, 2$.*

Finalmente, notemos que en esta sección no hemos introducido condiciones de comparación utilizando el operador adjunto en uno de los operadores de una de las particiones, puesto que al trabajar con operadores definidos no negativos y definidos positivos no tiene sentido, puesto que, por definición estos son autoadjuntos. Tampoco hemos introducido condiciones de comparación generales para partiones P-regulares y débiles definidas no negativas, pero el motivo de ello será analizado en la sección 5.3.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Capítulo 5

Relaciones entre condiciones de comparación

5.1 Introducción

En el capítulo anterior, hemos introducido una serie de condiciones de comparación para los diferentes tipos de particiones englobados con el nombre de particiones no negativas y particiones definidas positivas. Podemos clasificar dichas condiciones de comparación en condiciones "naturales" y condiciones "generales". Como ya comentamos en el capítulo 4 las condiciones naturales son más útiles desde el punto de vista práctico, puesto que están en función de operadores que conocemos o que son fáciles de calcular. Sin embargo, normalmente también suelen precisar de hipótesis más restrictivas. El objetivo de este capítulo es introducir resultados en los que aparezcan una cadena de implicaciones comenzada por una condición de comparación natural para particiones débiles no negativas o débiles y que finalice en las condiciones generales que a partir de ella se puedan obtener. Siempre bajo las hipótesis necesarias que nos aseguren la convergencia y la desigualdad entre los radios espectrales de cada una de las condiciones de comparación que aparezca en dicha cadena de implicaciones. La utilidad de los resultados que vamos a introducir en este capítulo reside en lo siguiente: si tenemos dos métodos iterativos de un mismo operador y sabemos que alguna condición no se stisface, las implicaciones introducidas entre las distintas condiciones de comparación nos permiten saber qué condiciones no se

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

van a satisfacer y cuales podrían satisfacerse. Por otra parte, estos resultados también se pueden utilizar como herramienta para introducir otros resultados teóricos, puesto que, si sabemos que una condición se satisface, entonces también conocemos todas las diferentes condiciones que a partir de ésta se pueden deducir.

En la sección 5.2 introduciremos los resultados de este capítulo para particiones débiles no negativas y particiones débiles. En la sección 5.3 pondremos de manifiesto que para las particiones definidas positivas no es posible establecer ninguna relación entre las condiciones naturales de comparación introducidas en la sección 4.4 y otras más generales.

5.2 Particiones débiles no negativas y particiones débiles

En primer lugar, recordamos el siguiente resultado, que Csordas y Varga [22] introdujeron para matrices, en el que se relacionan las condiciones de comparación más conocidas para particiones regulares con una condición de comparación general introducida por ellos mismos.

Teorema 5.1 (Proposición 1 de [22]). *Sea A una matriz con $A^{-1} \geq 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones regulares.*

(i) *Si $N_2 \geq N_1$ entonces $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$.*

(ii) *Si $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$ entonces $A^{-1}N_2A^{-1} \geq A^{-1}N_1A^{-1}$.*

(iii) *Si $A^{-1}N_2A^{-1} \geq A^{-1}N_1A^{-1}$ entonces $(A^{-1}N_2)^jA^{-1} \geq (A^{-1}N_1)^jA^{-1}$ para todo entero $j > 1$.*

Posteriormente, Miller y Neumann [40] también relacionan las condiciones de comparación para particiones débiles introducidas por ellos en dicho artículo con algunas condiciones naturales. Más recientemente, Woźnicki [61] también introduce algunas relaciones entre distintas condiciones de comparación, pero sin tener en cuenta si bajo las hipótesis impuestas se da la convergencia de la partición

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

En primer lugar, presentamos el siguiente resultado, que es una generalización del teorema 5.1 a operadores y particiones débiles no negativas de diferente tipo.

Teorema 5.2. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas de diferente tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_kM_k^{-1}$ y N_kA^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo.*

(i) *Si $N_1 \leq N_2$, entonces $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$.*

(ii) *Si $N_1 \leq N_2$ y $A = M_1 - N_1$ es del primer (respectivamente, del segundo) tipo, entonces $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$ (respectivamente, $0 \leq N_1A^{-1} \leq N_2A^{-1}$).*

(iii) *Si se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(a) $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$,

(b) $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$,

(c) $0 \leq N_1A^{-1} \leq N_2A^{-1}$,

entonces $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1}$.

(iv) *Si $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1}$, entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $j \geq 1$.*

(a) $(A^{-1}N_1)^jA^{-1} \leq (A^{-1}N_2)^jA^{-1}$,

(b) $(A^{-1}M_1)^jA^{-1} \leq (A^{-1}M_2)^jA^{-1}$,

(v) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (iv)(a) *o* (iv)(b) *para algún $j \geq 1$, entonces*

$$\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2) < 1. \tag{5.1}$$

Demostración. (i) Por el apartado (i) del lema 4.1 $M_1 \leq M_2$. Ahora, multiplicando en ambos miembros por la izquierda por $M_1^{-1} \geq 0$ y por la derecha por $M_2^{-1} \geq 0$, se sigue que $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

(ii) Inmediato, multiplicando por $A^{-1} \geq 0$ en ambos miembros de la desigualdad $N_1 \leq N_2$ por la izquierda, (respectivamente, por la derecha).

(iii) En primer lugar, supongamos que se satisface la desigualdad del apartado (a). Si $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo, entonces por los teoremas 3.3 y 3.4 sabemos que $A^{-1}N_1 \geq 0$ y $N_2A^{-1} \geq 0$ respectivamente. Ahora, de $M_k = A + N_k$, $k = 1, 2$, tenemos que

$$\begin{aligned}(I + A^{-1}N_1)^{-1}A^{-1} &= (A + N_1)^{-1}AA^{-1} \\ &\geq A^{-1}A(A + N_2)^{-1} \\ &= A^{-1}(I + N_2A^{-1})^{-1},\end{aligned}$$

y multiplicando en ambos miembros de la desigualdad por la izquierda por $I + A^{-1}N_1 \geq 0$, y por la derecha por $I + N_2A^{-1} \geq 0$, se sigue que $A^{-1}N_2A^{-1} \geq A^{-1}N_1A^{-1}$. Si $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo, mediante un razonamiento análogo al anterior, teniendo en cuenta ahora que $N_1A^{-1} \geq 0$ y $A^{-1}N_2 \geq 0$ obtenemos que $A^{-1}N_2A^{-1} \geq A^{-1}N_1A^{-1}$.

Si se satisface el apartado (b) entonces multiplicando por $A^{-1} \geq 0$ en ambos miembros de la desigualdad $A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$ por la derecha obtenemos que $A^{-1}N_2A^{-1} \geq A^{-1}N_1A^{-1}$. Si se satisface el apartado (c), multiplicando por A^{-1} en ambos miembros de la desigualdad $N_1A^{-1} \leq N_2A^{-1}$ por la izqierda obtenemos que $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1}$.

(iv) Obtendremos primero la desigualdad del apartado (a). Procederemos por inducción sobre j. Para $j = 1$ se satisface la desiggualdad por hipótesis. Supongamos ahora que se satisface la desigualdad para $j - 1$, es decir

$$(A^{-1}N_1)^{j-1}A^{-1} \leq (A^{-1}N_2)^{j-1}A^{-1}. \tag{5.2}$$

Ahora, si $A = M_1 - N_1$ es del primer tipo, entonces por el teorema 3.3 tenemos que $A^{-1}N_1 \geq 0$ y multiplicando por la izquierda en ambos miembros de la desigualdad (5.2) por $A^{-1}N_1$ tenemos que

$$\begin{aligned}(A^{-1}N_1)^jA^{-1} &\leq (A^{-1}N_1)(A^{-1}N_2)^{j-1}A^{-1} \\ &= A^{-1}N_1A^{-1}N_2(A^{-1}N_2)^{j-2}A^{-1} \\ &\leq (A^{-1}N_2A^{-1}N_2(A^{-1}N_2)^{j-2}A^{-1} \\ &= (A^{-1}N_2)^jA^{-1}.\end{aligned}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Si $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo, entonces por el teorema 3.4 tenemos que $N_1 A^{-1} \geq 0$ y multiplicando por la derecha en ambos miembros de la desigualdad (5.2) por $N_1 A^{-1}$ mediante un razonamiento análogo al anterior, obtenemos también,

$$(A^{-1}N_1)^j A^{-1} \leq (A^{-1}N_2)^j A^{-1}.$$

Por otra parte, por el apartado (ii) del lema 4.1 tenemos que

$$A^{-1}M_1A^{-1} \leq A^{-1}M_2A^{-1}$$

y mediante un razonamiento análogo al anterior, tenemos que se satisface la desigualdad (iv)(b).

(v) Por el teorema 4.13 y la observación 4.2. ∎

Notemos que los apartados (i) y (iv) del teorema anterior son válidos para particiones débiles no negativas del mismo tipo. El apartado (ii) es válido independientemente del tipo de la partición $A = M_2 - N_2$. El apartado (iii), bajo las condiciones (b) y (c) también es válido independientemente del tipo de las particiones. Sin embargo, el apartado (iii) bajo la condición (a) y el apartado (v) no son en general ciertas para particiones débiles no negativas del mismo tipo, como veremos en el ejemplo 5.1. En los ejemplos 5.1 y 5.2 también pondremos de manifiesto que los recíprocos del teorema 5.2 no son ciertos.

Teorema 5.3. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas con $A = M_1 - N_1$ del primer tipo. Supondremos que $M_1^{-1}N_1$ y $A^{-1}N_1$ tienen la propiedad "d". También supondremos que $M_2^{-1}N_2$ y $A^{-1}N_2$ tienen la propiedad "d" si $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_2M_2^{-1}$ y N_2A^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo.*

(1) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del primer o del segundo tipo.*

(i) *Si $N_1 \leq N_2$ entonces $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$.*

(ii) *Si $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$ entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$.*

(a) $(A^{-1}N_1)^{i+j} \leq (A^{-1}N_1)^i(A^{-1}N_2)^j$,

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(b) $(A^{-1}M_1)^{i+j} \leq (A^{-1}M_1)^i(A^{-1}M_2)^j$,

(c) $(A^{-1}N_1)^{i+j} \leq (A^{-1}N_2)^j(A^{-1}N_1)^i$,

(d) $(A^{-1}M_1)^{i+j} \leq (A^{-1}M_2)^j(A^{-1}M_1)^i$.

(iii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (ii)(a), (ii)(b), (ii)(c) *o* (ii)(d) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(2) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo y que $A^{-1}N_2$ es K-irreducible.*

(i) *Si $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$, entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$.*

(a) $(A^{-1}N_1)^j(A^{-1}N_2)^i \leq (A^{-1}N_2)^{i+j}$,

(b) $(A^{-1}N_2)^i(A^{-1}N_1)^j \leq (A^{-1}N_2)^{i+j}$.

(ii) *Si se satisfacen alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(3) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo.*

(i) *Si $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$ entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$,*

(a) $(A^{-1}M_1)^j(A^{-1}M_2)^i \leq (A^{-1}M_2)^{i+j}$,

(b) $(A^{-1}M_2)^i(A^{-1}M_1)^j \leq (A^{-1}M_2)^{i+j}$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b), *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Demostración. (1) (i) Por el apartado (ii) del teorema 5.2.

(ii) Multiplicando por la izquierda en ambos miembros de la desigualdad

$$A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2 \tag{5.3}$$

por $(A^{-1}N_1)^{i+j-1}$ tenemos que

$$\begin{aligned}(A^{-1}N_1)^{i+j} &\leq (A^{-1}N_1)^{i+j-1}A^{-1}N_2\\ &= (A^{-1}N_1)^{i+j-2}(A^{-1}N_1)(A^{-1}N_2)\\ &\leq (A^{-1}N_1)^{i+j-2}(A^{-1}N_2),\end{aligned}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

y repitiendo el proceso anterior $j-1$ veces obtenemos la desigualdad del apartado (a). Multiplicando ahora por la derecha en ambos miembros de la desigualdad (5.3) por $(A^{-1}N_1)^{i+j-1}$ y mediante el razonamiento anterior, obtenemos la desigualdad del apartado (c).

Ahora, teniendo en cuenta que $N_k = M_k - A$, de tenemos que (5.3)

$$0 \leq A^{-1}M_1 \leq A^{-1}M_2, \tag{5.4}$$

por tanto, mediante un razonamiento análogo al anterior, multiplicando en este caso por la izquierda (respectivamente, por la derecha) en ambos miembros de la desigualdad (5.4) por $(A^{-1}M_1)^{i+j-1}$ obtenemos la desigualdad del apartado (b) (respectivamente, (d)).

(iii) Por el teorema 4.21 y la observación 4.7.

(2) (i) Multiplicando por la derecha (respectivamente, por la izquierda) en ambos miembros de la desigualdad $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$ obtenemos las desigualdades de los apartados (a) y (b).

(ii) Por el teorema 4.27.

(3) Análogo al apartado (2) teniendo en cuenta que $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$ es equivalente a $0 \leq A^{-1}M_1 \leq A^{-1}M_2$. ∎

Notemos que la parte (i) de los apartados (2) y (3) se satisface independientemente del tipo de la partición $A = M_2 - N_2$ y de la K-irreducibilidad de $A^{-1}N_2$, sin embargo, la parte (ii) de dichos apartados sólo se satisface cuando ambas particiones son del primer tipo, como pondremos de manifiesto en el ejemplo 5.1. En el ejemplo 5.1 también pondremos de manifiesto que los recíprocos del teorema anterior no son ciertos en general.

Si en el teorema 5.3 consideramos dos "particiones convergentes" y "débiles" de un operador no singular en lugar de considerar "$A^{-1} \geq 0$" y "particiones débiles no negativas", todos los apartados del teorema 5.3 siguen siendo válidos, excepto la parte (i) del apartado (1), como pusimos de manifiesto en el ejemplo 4.6.

Por otra parte, si en el teorema 5.3 consideramos $A = M_1 - N_1$ del segundo tipo obtenemos, mediante un razonamiento análogo, el siguiente resultado, siendo también válidos todos los comentarios anteriores.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Teorema 5.4. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas con $A = M_1 - N_1$ del segundo tipo. Supondremos que $N_1 M_1^{-1}$ y $N_1 A^{-1}$ tienen la propiedad "d". También supondremos que $M_2^{-1} N_2$ y $A^{-1} N_2$ tienen la propiedad "d" si $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_2 M_2^{-1}$ y $N_2 A^{-1}$ tienen la propiedad "d" si $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo.*

(1) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del primer o del segundo tipo.*

   (i) *Si $N_1 \leq N_2$ entonces $0 \leq N_1 A^{-1} \leq N_2 A^{-1}$.*

   (ii) *Si $0 \leq N_1 A^{-1} \leq N_2 A^{-1}$, entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$*

      (a) $(N_1 A^{-1})^{i+j} \leq (N_1 A^{-1})^i (N_2 A^{-1})^j$,

      (b) $(M_1 A^{-1})^{i+j} \leq (M_1 A^{-1})^i (M_2 A^{-1})^j$,

      (c) $(N_1 A^{-1})^{i+j} \leq (N_2 A^{-1})^j (N_1 A^{-1})^i$,

      (d) $(M_1 A^{-1})^{i+j} \leq (M_2 A^{-1})^j (M_1 A^{-1})^i$.

   (iii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (ii)(a), (ii)(b), (ii)(c) *o* (ii)(d), *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(2) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo y que $N_2 A^{-1}$ es K-irreducible.*

   (i) *Si $0 \leq N_1 A^{-1} \leq N_2 A^{-1}$, entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$*

      (a) $(N_1 A^{-1})^j (N_2 A^{-1})^i \leq (N_2 A^{-1})^{i+j}$,

      (b) $(N_2 A^{-1})^i (N_1 A^{-1})^j \leq (N_2 A^{-1})^{i+j}$.

   (ii) *Si se satisfacen alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(3) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo.*

   (i) *Si $0 \leq N_1 A^{-1} \leq N_2 A^{-1}$, entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$,*

      (a) $(M_1 A^{-1})^j (M_2 A^{-1})^i \leq (M_2 A^{-1})^{i+j}$,

      (b) $(M_2 A^{-1})^i (M_1 A^{-1})^j \leq (M_2 A^{-1})^{i+j}$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

A continuación, introducimos resultados análogos al teorema 5.2 para particiones débiles no negativas del mismo tipo.

Teorema 5.5. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas del primer tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1}N_k$ y $A^{-1}N_k$ tienen la propiedad "d".*

(i) *Si $0 \leq A^{-1}N_1 \leq N_2A^{-1}$ entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $j \geq 1$,*

(a) $A^{-1}(A^{-1}N_1)^j \leq A^{-1}(N_2A^{-1})^j$,

(b) $A^{-1}(A^{-1}M_1)^j \leq A^{-1}(M_2A^{-1})^j$.

(ii) *Si $0 \leq N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2$ entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $j \geq 1$,*

(a) $A^{-1}(N_1A^{-1})^j \leq A^{-1}(A^{-1}N_2)^j$,

(b) $A^{-1}(M_1A^{-1})^j \leq A^{-1}(A^{-1}M_2)^j$.

(iii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a), (i)(b), (ii)(a) *o* (ii)(b) *para algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Demostración. (i) Procederemos por inducción sobre j. Como $A^{-1} \geq 0$ y $0 \leq A^{-1}N_1 \leq N_2A^{-1}$ tenemos que $A^{-1}A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2A^{-1}$ con lo que la desigualdad del apartado (a) es cierta para $j = 1$. Supongamos que se satisface la desigualdad del apartado (a) para $j - 1$, es decir

$$0 \leq A^{-1}(A^{-1}N_1)^{j-1} \leq A^{-1}(N_2A^{-1})^{j-1}.$$

Multiplicando los dos miembros de la desigualdad anterior por $A^{-1}N_1 \geq 0$ y utilizando que tenemos que $0 \leq A^{-1}N_1 \leq N_2A^{-1}$ tenemos que

$$A^{-1}(A^{-1}N_1)^j \leq A^{-1}(N_2A^{-1})^{j-1}A^{-1}N_1 \leq A^{-1}(N_2A^{-1})^j$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

con lo que se satisface la desigualdad del apartado (a).

Ahora, teniendo en cuenta que

$$N_k = M_k - A \quad \text{para } k = 1, 2,$$

de $A^{-1}N_1 \leq N_2A^{-1}$ tenemos que $A^{-1}M_1 \leq M_2A^{-1}$ y mediante un razonamiento análogo al anterior se satisface la desigualdad (b).

(ii) Análogo al del apartado anterior.

(iii) Por el teorema 4.16 y la observación 4.4. ■

Notemos que los apartados (i) y (ii) del teorema anterior son válidos independientementes del tipo del las particiones, sin embargo el apartado (iii) sólo es válido para particiones débiles no negativas del primer tipo como pondremos de manifiesto en el ejemplo 5.1. En los ejemplos 5.1 y 5.2 también pondremos de manifiesto que los recíprocos del teorema 5.5 no son ciertos en general.

Si en el teorema 5.5 consideramos $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ débiles no negativas del segundo tipo obtenemos mediante un razonamiento análogo el siguiente resultado, siendo también válidos todos los comentarios anteriores.

Teorema 5.6. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach con $A^{-1} \geq 0$ y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas del segundo tipo. Para $k = 1, 2$, supondremos que $N_kM_k^{-1}$ y N_kA^{-1} tienen la propiedad "d".*

(i) *Si $0 \leq A^{-1}N_1 \leq N_2A^{-1}$ entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $j \geq 1$,*

(a) $(A^{-1}N_1)^jA^{-1} \leq (N_2A^{-1})^jA^{-1}$,

(b) $(A^{-1}M_1)^jA^{-1} \leq (M_2A^{-1})^jA^{-1}$.

(ii) *Si $0 \leq N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2$ entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $j \geq 1$,*

(a) $(N_1A^{-1})^jA^{-1} \leq (A^{-1}N_2)^jA^{-1}$,

(b) $(M_1A^{-1})^jA^{-1} \leq (A^{-1}M_2)^jA^{-1}$,

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(iii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a), (i)(b), (ii)(a) *o* (ii)(b) *para algún* $j \geq 1$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

A continuación, para terminar con los resultados de relación entre las condiciones de comparación para particiones no negativas de operadores acotados en un espacio de Banach, introducimos los dos resultados siguientes para particiones débiles y convergentes, cuya la demostración es análoga a la de los teoremas 5.3 y 5.4, respectivamente.

Teorema 5.7. *Sea A un operador no singular en un espacio de Banach y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles con $A = M_1 - N_1$ del primer tipo. Supondremos que $M_1^{-1}N_1$ y $A^{-1}N_1$ tienen la propiedad "d". También supondremos que $M_2^{-1}N_2$ y $A^{-1}N_2$ tienen la propiedad "d" si $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_2M_2^{-1}$ y N_2A^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo.*

(1) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del primer o del segundo tipo.*

(i) *Si $0 \leq A^{-1}N_1 \leq N_2A^{-1}$, entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$*

(a) $(A^{-1}N_1)^{i+j} \leq (A^{-1}N_1)^i(N_2A^{-1})^j$,

(b) $(A^{-1}N_1)^{i+j} \leq (N_2A^{-1})^j(A^{-1}N_1)^i$,

(c) $(A^{-1}M_1)^{i+j} \leq (A^{-1}M_1)^i(M_2A^{-1})^j$,

(d) $(A^{-1}M_1)^{i+j} \leq (M_2A^{-1})^j(A^{-1}M_1)^i$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a)–(i)(d) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$ entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(2) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo y (N_2A^{-1}) es K-irreducible.*

(i) *Si $0 \leq A^{-1}N_1 \leq N_2A^{-1}$, entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$,*

(a) $(A^{-1}N_1)^j(N_2A^{-1})^i \leq (N_2A^{-1})^{i+j}$,

(b) $(N_2A^{-1})^i(A^{-1}N_1)^j \leq (N_2A^{-1})^{i+j}$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(3) *Supongamos que* $A = M_2 - N_2$ *es del segundo tipo.*

(i) *Si* $0 \leq A^{-1}N_1 \leq N_2A^{-1}$, *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$,

(a) $(A^{-1}M_1)^j(M_2A^{-1})^i \leq (M_2A^{-1})^{i+j}$,

(b) $(M_2A^{-1})^i(A^{-1}M_1)^j \leq (M_2A^{-1})^{i+j}$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Notemos que la parte (i) de los apartados (2) y (3) del teorema anterior, sigue siendo válida independientemente del tipo de $A = M_2 - N_2$ y de la K-irreducibilidad de $A^{-1}N_2$. Sin embargo, en la parte (ii) del apartado (1) las hipótesis de $A = M_2 - N_2$ del primer tipo y $A^{-1}N_2$ K-irreducible son necesarias, como pondremos de manifiesto en el ejemplo 5.1. También pondremos de manifiesto que la parte (ii) del apartado (3) tampoco es en general cierta si $A = M_2 - N_2$ es débil del segundo tipo. Además, en el ejemplo 5.1 pondremos de manifiesto que los recíprocos del teorema 5.7 no son ciertos en general.

Si en el teorema 5.7 consideramos el caso en el que $A = M_1 - N_1$ sea débil del segundo tipo obtenemos, mediante un razonamiento análogo, el siguiente resultado, siendo también válidos todos los comentarios anteriores.

Teorema 5.8. *Sea* A *un operador no singular en un espacio de Banach y sean* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *dos particiones convergentes y débiles con* $A = M_1 - N_1$ *del segundo tipo. Supondremos que* $N_1M_1^{-1}$ *y* N_1A^{-1} *tienen la propiedad "d". También supondremos que* $M_2^{-1}N_2$ *y* $A^{-1}N_2$ *tienen la propiedad "d" si* $A = M_2 - N_2$ *es del primer tipo; no obstante, supondremos que* $N_2M_2^{-1}$ *y* N_2A^{-1} *tienen la propiedad "d" si* $A = M_2 - N_2$ *es del segundo tipo.*

(1) *Supongamos que* $A = M_2 - N_2$ *es del primer o del segundo tipo.*

(i) *Si* $0 \leq N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2$, *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$,

(a) $(N_1A^{-1})^{i+j} \leq (N_1A^{-1})^i(A^{-1}N_2)^j$,

(b) $(N_1A^{-1})^{i+j} \leq (A^{-1}N_2)^j(N_1A^{-1})^i$,

(c) $(M_1A^{-1})^{i+j} \leq (M_1A^{-1})^i(A^{-1}M_2)^j$,

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(d) $(M_1A^{-1})^{i+j} \leq (A^{-1}M_2)^j(M_1A^{-1})^i$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a)–(i)(d) *para algú $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(2) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo y $(A^{-1}N_2)$ es K-irreducible.*

(i) *Si $0 \leq N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2$, entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$,*

(a) $(N_1A^{-1})^j(A^{-1}N_2)^i \leq (A^{-1}N_2)^{i+j}$,

(b) $(A^{-1}N_2)^i(N_1A^{-1})^j \leq (A^{-1}N_2)^{i+j}$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(3) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo.*

(i) *Si $0 \leq N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2$, entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$,*

(a) $(M_1A^{-1})^j(A^{-1}M_2)^i \leq (A^{-1}M_2)^{i+j}$,

(b) $(A^{-1}M_2)^i(M_1A^{-1})^j \leq (A^{-1}M_2)^{i+j}$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Ejemplo 5.1. *Consideremos la matriz del ejemplo 4.5 y las particiones $A = P_k - Q_k$, con $k = 1, 2, \ldots, 34$, donde*

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{9}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{18}{5} \\ -1 & \frac{2}{5} & \frac{18}{5} \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 4 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}, \quad P_6 = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{20}{9} & \frac{10}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{40}{9} & -\frac{20}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{10}{9} & \frac{40}{9} \end{bmatrix},$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

$$P_7 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad P_8 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_9 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{20}{9} & \frac{10}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{40}{9} & -\frac{20}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{10}{9} & \frac{40}{9} \end{bmatrix},$$

$$P_{10} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{4} \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix},$$

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{14} = \begin{bmatrix} \frac{119}{100} & -2 & \frac{11}{10} \\ -\frac{9}{50} & 4 & -3 \\ -\frac{21}{50} & 0 & \frac{19}{10} \end{bmatrix}, \quad P_{15} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_{16} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{17} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad P_{18} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 6 & -4 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix},$$

$$P_{19} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad P_{20} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad P_{21} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 0 & 8 & -8 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P_{24} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -2 & 8 & -6 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

$$P_{25} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{26} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad P_{27} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -5 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$P_{28} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P_{29} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{30} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -4 & 3 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$P_{31} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{32} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad P_{33} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_{34} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para $k = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 11, 13, 16, 18, 22, 24, 25, 28, 29, 30, 31$, *las particiones son débiles no negativas del primer tipo. Para* $k = 5, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 23, 26, 27, 32, 34$ *las particiones son débiles no negativas del segundo tipo. Para* $k = 7$, *la partición es no negativa y para* $k = 8, 33$ *las particiones son regulares.*

Sea $M_1 = P_1$ *y* $M_2 = P_2$, *entonces* $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$, *pero* $A^{-1}N_1A^{-1} \not\leq A^{-1}N_2A^{-1}$, *por tanto, la parte* (a) *del apartado* (iii) *del teorema 5.2 no es válida para partciones débiles no negativas del mismo tipo.*

Sea $M_1 = P_3$ *y* $M_2 = P_4$, *entonces* $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1}$ *y* $A^{-1}M_1A^{-1} \leq A^{-1}M_2A^{-1}$ *pero* $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$, *por tanto, el apartado* (v) *del teorema 5.2 no es cierto para particiones débiles no negativas del mismo tipo.*

Sea $M_1 = P_5$ *y* $M_2 = P_6$, *se sigue que* $M_1^{-1} ge M_2^{-1}$, *pero* $N_1 \not\leq N_2$. *Si consideramos* $M_1 = P_{11}$ *y* $M_2 = P_{12}$ *entonces* $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$ *pero* $N_1 \not\leq N_2$. *Ahora, para* $M_1 = P_5$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

y $M_2 = P_7$, *tenemos que* $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1}$, *pero* $M_1^{-1} \not\geq M_2^{-1}$ *y si consideramos* $M_1 = P_7$ *y* $M_2 = P_6$, *entonces* $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1}$, *pero*

$$A^{-1}N_1 \not\leq A^{-1}N_2 \quad y \quad N_1A^{-1} \not\leq N_2A^{-1}.$$

Por lo tanto, hemos puesto de manifiesto que los recíprocos de los apartados (i)–(iv) *del teorema 5.2 no son ciertos.*

Por otra parte, notemos que para $M_1 = P_3$ *y* $M_2 = P_5$, *se sigue que* $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$ *pero*

$$A^{-1}N_1 \not\leq A^{-1}N_2.$$

Para $M_1 = P_5$ *y* $M_2 = P_6$, *tenemos que* $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$ *pero* $N_1A^{-1} \not\leq N_2A^{-1}$. *Ahora, para* $M_1 = P_{11}$ *y* $M_2 = P_{12}$, *se sigue que* $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$, *pero* $M_1^{-1} \not\geq M_2^{-1}$. *Finalmente, para* $M_1 = P_{15}$ *y* $M_2 = P_8$, *tenemos que* $0 \leq N_1A^{-1} \leq N_2A^{-1}$, *pero* $M_1^{-1} \not\geq M_2^{-1}$. *Es decir, no existe ninguna relación entre las desigualdades de las partes* (a), (b) *y*(c) *del apartado* (iii) *del teorema 5.2. cuando* $A = M_1 - N_1$ *es débil no negativa del primer o del segundo tipo.*

Si consideramos $M_1 = P_{31}$ *y* $M_2 = P_3$ *tenemos que* $A^{-1}N_2$ *no es* K*-irreducible,*

$$(A^{-1}N_1)(A^{-1}N_2) \leq (A^{-1}N_2)^2 \quad y \quad (A^{-1}N_2)(A^{-1}N_1) \leq (A^{-1}N_2)^2$$

y sim embargo, $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$, *por lo tanto, la* K*-irreducibilidad de* $A^{-1}N_2$ *en la parte* (ii) *del apartado* (2) *del teorema 5.3 es una condición necesaria.*

Para $M_1 = P_{31}$ *y* $M_2 = P_{32}$ *tenemos que*

$$A^{-1}N_2A^{-1}N_1 \leq (A^{-1}N_2)^2 \quad y \quad A^{-1}M_2A^{-1}M_1 \leq (A^{-1}M_2)^2$$

y sin embargo, $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$, *es decir, la parte* (ii) *de los apartados* (2) *y* (3) *del teorema 5.3 no es cierta si la partición* $A = M_2 - N_2$ *es débil no negativa del segundo tipo.*

Por otra parte, para $M_1 = P_6$ *y* $M_2 = P_9$ *tenemos que* $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$ *pero* $N_1 \not\leq N_2$. *Sea* $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_9$ *tenemos que*

$$(A^{-1}N_1)^3 \leq (A^{-1}N_1)(A^{-1}N_2)^2 \quad y \quad (A^{-1}M_1)^3 \leq (A^{-1}M_1)(A^{-1}M_2)^2,$$

sin embargo $A^{-1}N_1 \not\leq A^{-1}N_2$. *Además, si consideramos* $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_1$ *tenemos que*

$$(A^{-1}N_1)^2 \leq (A^{-1}N_2)(A^{-1}N_1) \quad y \quad (A^{-1}M_1)^2 \leq (A^{-1}M_2)(A^{-1}M_1),$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

pero $A^{-1}N_1 \not\leq A^{-1}N_2$. *Finalmente, para* $M_1 = P_3$ *y* $M_2 = P_1$ *tenemos que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *pero para todo* $j \geq 1$ *y para todo* $i \geq 0$ $(A^{-1}N_1)^{i+j} \not\leq (A^{-1}N_1)^i(A^{-1}N_2)^j$ *y* $(A^{-1}N_1)^{i+j} \not\leq (A^{-1}N_2)^j(A^{-1}N_1)^i$. *Por lo tanto, los recíprocos del apartado* (1) *del teorema 5.3 no son ciertos.*

Si consideramos $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_9$, *tenemos que*

$$(A^{-1}N_1)(A^{-1}N_2) \leq (A^{-1}N_2)^2, \quad (A^{-1}N_2)(A^{-1}N_1) \leq (A^{-1}N_2)^2,$$

$$(A^{-1}M_1)(A^{-1}M_2) \leq (A^{-1}M_2)^2 \quad y \quad (A^{-1}M_2)(A^{-1}M_1) \leq (A^{-1}M_2)^2,$$

pero $A^{-1}N_1 \not\leq A^{-1}N_2$, *por lo tanto, queda de manifiesto que el recíproco de la parte* (i) *de los apartados* (2) *y* (3) *del teorema 5.3 no son ciertos.*

Para $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_{13}$ *tenemos que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *pero*

$$(A^{-1}N_1)^j(A^{-1}N_2)^i \not\leq (A^{-1}N_2)^{i+j} \quad y \quad (A^{-1}N_2)^i(A^{-1}N_1)^j \not\leq (A^{-1}N_2)^{i+j}$$

para todo $j \geq 1$ *e* $i \geq 0$, *por tanto el recíproco de la parte* (ii) *del aparatado* (2) *del teorema 5.3 no es cierto. Para* $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_{13}$ *tenemos que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *y sin embargo,*

$$(A^{-1}M_1)^j(A^{-1}M_2)^i \not\leq (A^{-1}M_2)^{i+j} \quad y \quad (A^{-1}M_2)^i(A^{-1}M_1)^j \not\leq (A^{-1}M_2)^{i+j}$$

para todo $j \geq 1$ *y para todo* $i \geq 0$ *por tanto, el recíproco de la parte* (ii) *del apartado* (3) *del teorema 5.3 tampoco es cierto.*

Sea $M_1 = P_{34}$ *y* $M_2 = P_{12}$ *entonces* $(N_1A^{-1})(N_2A^{-1}) \leq (N_2A^{-1})^2$ *sin embargo,* $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$, *es decir, la* K*-irreducibilidad de* N_2A^{-1} *en la parte* (ii) *del apartado* (2) *teorema 5.4 es una hipótesis necesaria.*

Si consideramos $M_1 = P_{34}$ *y* $M_2 = P_{16}$ *tenemos que*

$$(N_1A^{-1})(N_2A^{-1}) \leq (N_2A^{-1})^2 \quad y \quad (M_1A^{-1})(M_2A^{-1}) \leq (M_2A^{-1})^2$$

sin embargo, $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. *Por consiguiente la parte* (ii) *de los apartados* (2) *y* (3) *del teorema 5.4 no es cierta si la partición* $A = M_2 - N_2$ *es débil no negativa del primer tipo.*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Por otra parte, si consideramos $M_1 = P_{12}$ y $M_2 = P_5$ tenemos que

$$(N_1A^{-1})^2 \leq (N_1A^{-1})(N_2A^{-1}) \quad y \quad (M_1A^{-1})^2 \leq (M_1A^{-1})(M_2A^{-1});$$

para $M_1 = P_{32}$ y $M_2 = P_{26}$ tenemos que

$$(N_1A^{-1})^2 \leq (N_2A^{-1})(N_1A^{-1}) \quad y \quad (M_1A^{-1})^2 \leq (M_2A^{-1})(M_1A^{-1});$$

finalmente, para $M_1 = P_{33}$ y $M_2 = P_7$ tenemos que

$$(N_1A^{-1})^2(N_2A^{-1}) \leq (N_2A^{-1})^3, \quad (N_2A^{-1})(N_1A^{-1})^2 \leq (N_2A^{-1})^3,$$

$$(M_1A^{-1})^2(M_2A^{-1}) \leq (M_2A^{-1})^3 \quad y \quad (M_2A^{-1})(M_1A^{-1})^2 \leq (M_2A^{-1})^3;$$

sin embargo, en todos estos casos tenemos que $N_1A^{-1} \not\leq N_2A^{-1}$. Por lo tanto, los recíprocos de la parte (ii) del apartado (1) y los recíprocos de la parte (i) de los apartados (2) y (3) del teorema 5.4 no son ciertos en general.

Por otra parte, para $M_1 = P_{17}$ y $M_2 = P_{34}$ se satisface $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ pero

$$(N_1A^{-1})^{i+j} \not\leq (N_1A^{-1})^i(N_2A^{-1})^j \quad y \quad (N_1A^{-1})^{i+j} \not\leq (N_2A^{-1})^j(N_1A^{-1})^i$$

para todo $j \geq 1$ y para todo $i \geq 0$ por lo tanto, el recíproco de la parte (iii) del apartado (1) del teorema 5.4 no es cierto. Además, para $M_1 = P_{15}$ y $M_2 = P_{23}$ se satisface que $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ pero

$$(N_1A^{-1})^i(N_2A^{-1})^j \not\leq (N_2A^{-1})^{i+j}, \quad (N_2A^{-1})^j(N_1A^{-1})^i \not\leq (N_2A^{-1})^{i+j},$$

$$(M_1A^{-1})^i(M_2A^{-1})^j \not\leq (M_2A^{-1})^{i+j}, \quad (M_2A^{-1})^j(M_1A^{-1})^i \not\leq (M_2A^{-1})^{i+j}$$

para todo $j \geq 1$ y para todo $i \geq 0$, por tanto los recíprocos de las partes (i)(a) y (i)(b) del apartado (2) del teorema 5.4 no son ciertas.

Sea $M_1 = P_{30}$ y $M_2 = P_{27}$ tenemos que

$$A^{-1}A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2A^{-1} \quad y \quad A^{-1}A^{-1}M_1 \leq A^{-1}M_2A^{-1}$$

pero $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. Para $M_1 = P_{26}$ y $M_2 = P_{30}$ tenemos que

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}A^{-1}N_2 \quad y \quad A^{-1}M_1A^{-1} \leq A^{-1}A^{-1}M_2$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

pero $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. *Por tanto, la parte* (iii) *del teorema 5.5 no se satisface si ambas particiones no son débiles no negativas del primer tipo.*

Por otra parte, si $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_1$ *tenemos que* $A^{-1}(A^{-1}N_1)^4 \leq A^{-1}(N_2A^{-1})^4$ *y* $A^{-1}(A^{-1}M_1)^5 \leq A^{-1}(M_2A^{-1})^5$, *sin embargo,* $A^{-1}N_1 \not\leq N_2A^{-1}$. *Además, para* $M_1 = P_7$ *y* $M_2 = P_6$ *se sigue que* $A^{-1}(N_1A^{-1})^6 \leq A^{-1}(A^{-1}N_2)^6$ *y* $A^{-1}(M_1A^{-1})^7 \leq A^{-1}(A^{-1}M_2)^7$ *pero* $N_1A^{-1} \not\leq A^{-1}N_2$. *Por consiguiente, los recíprocos de los apartados* (i) *y* (ii) *del teorema 5.5 no son ciertos en general.*

Sea $M_1 = P_{29}$ *y* $M_2 = P_{33}$ *entonces*

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq N_2A^{-1}A^{-1} \quad y \quad A^{-1}M_1A^{-1} \leq M_2A^{-1}A^{-1}$$

pero $\rho(M_1^{-1}N_1 \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. *Ahora, para* $M_1 = P_{27}$ *and* $M_2 = P_{28}$ *tenemos que*

$$N_1A^{-1}A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1} \quad yM_1A^{-1}A^{-1} \leq A^{-1}M_2A^{-1}$$

pero $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. *Por tanto, el apartado* (iii) *del teorema 5.6 no se satisface si ambas particiones no son débiles no negativas del segundo tipo.*

Por otra parte, si $M_1 = P_5$ *y* $M_2 = P_7$ *entonces* $(A^{-1}N_1)^3A^{-1} \leq (N_2A^{-1})^3A^{-1}$ *y* $(A^{-1}M_1)^4A^{-1} \leq (M_2A^{-1})^4A^{-1}$ *pero* $A^{-1}N_1 \not\leq N_2A^{-1}$. *Para* $M_1 = P_{12}$ *y* $M_2 = P_5$ *tenemos que* $(N_1A^{-1})^3A^{-1} \leq (A^{-1}N_2)^3A^{-1}$ *y* $(M_1A^{-1})^4A^{-1} \leq (A^{-1}M_2)^4A^{-1}$ *pero* $N_1A^{-1} \not\leq A^{-1}N_2$. *Por tanto, los recíprocos de los apartados* (i) *y* (ii) *del teorema 5.6 no son ciertos en general.*

Si consideramos $M_1 = P_{31}$ *y* $M_2 = P_{32}$ *tenemos que* $(A^{-1}N_1)(N_2A^{-1}) \leq (N_2A^{-1})^2$ *y* $(N_2A^{-1})(A^{-1}N_1) \leq (N_2A^{-1})^2$, *sin embargo,* $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$; *es decir, en la parte* (ii) *del apartado* (2) *del teorema 5.7 la* K*-irreducibilidad de* N_2A^{-1} *es necesaria. Además, para* $M_1 = P_{31}$ *y* $M_2 = P_3$ *tenemos que* $(A^{-1}N_1)(N_2A^{-1}) \leq (N_2A^{-1})^2$, *para* $M_1 = P_3$ *y* $M_2 = P_{25}$ *se satisface que* $(A^{-1}M_1)^2(M_2A^{-1})^2 \leq (M_2A^{-1})^4$ *y para* $M_1 = P_3$ *y* $M_2 = P_{16}$ *tenemos que* $(N_2A^{-1})^3(A^{-1}N_1)^3 \leq (N_2A^{-1})^6$, *sin embargo en todos estos casos* $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$; *por lo tanto, la parte* (ii) *de los apartados* (2) *y* (3) *del teorema 5.7 no es cierta para* $A = M_2 - N_2$ *débil no negativa del primer tipo.*

Ahora, si consideramos $M_1 = P_3$ *y* $M_2 = P_{10}$ *tenemos que se satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$(A^{-1}N_1)^3 \leq (A^{-1}N_1)(N_2A^{-1})^2, \quad (A^{-1}N_1)^3 \leq (N_2A^{-1})^2(A^{-1}N_1),$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

$$(A^{-1}M_1)^4 \leq (A^{-1}M_1)(M_2A^{-1})^3, \quad (A^{-1}M_1)^5 \leq (M_2A^{-1})^3(A^{-1}M_1)^2,$$

$$(A^{-1}N_1)(N_2A^{-1}) \leq (N_2A^{-1})^2, \quad (N_2A^{-1})(A^{-1}N_1) \leq (N_2A^{-1})^2,$$

$$(A^{-1}M_1)(M_2A^{-1}) \leq (M_2A^{-1})^2 \quad y \quad (M_2A^{-1})(A^{-1}M_1) \leq (M_2A^{-1})^2;$$

sin embargo, $A^{-1}N_1 \not\leq N_2A^{-1}$. *Por lo tanto, los recíprocos de la parte* (i) *de los apartados* (1), (2) *y* (3) *del teorema 5.7 no son ciertos.*

Por otra parte, si consideramos $M_1 = P_8$ *y* $M_2 = P_{17}$ *tenemos que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *y sin embargo*

$$(A^{-1}N_1)^j(N_2A^{-1})^i \not\leq (N_2A^{-1})^{i+j} \quad y \quad (A^{-1}M_1)^j(M_2A^{-1})^i \not\leq (M_2A^{-1})^{i+j}$$

para todo $j \geq 1$ *e* $i \geq 0$. *Para* $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_{34}$ *también tenemos que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *y sin embargo,*

$$(N_2A^{-1})^i(A^{-1}N_1)^j \not\leq (N_2A^{-1})^{i+j} \quad y \quad (M_2A^{-1})^i(A^{-1}M_1)^j \not\leq (M_2A^{-1})^{i+j}.$$

Por lo tanto, el recíproco de la parte (ii) *del apartado* (3) *y el recíproco de la parte* (ii) *del apartado* (2) *del teorema 5.7, no son ciertos en general.*

Sea $M_1 = P_{21}$ *y* $M_2 = P_3$ *tenemos que* $(N_1A^{-1})(A^{-1}N_2) \leq (A^{-1}N_2)^2$ *y para* $M_1 = P_{27}$ *y* $M_2 = P_3$ *se satisface* $(A^{-1}N_2)(N_1A^{-1}) \leq (A^{-1}N_2)^2$, *sin embargo en ambos casos* $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$; *es decir, la condición de* K*-irreducibilidad de* $A^{-1}N_2$ *en la parte* (ii) *del apartado* (2) *del teorema 5.8 es necesaria.*

Además, para $M_1 = P_5$ *y* $M_2 = P_{32}$ *se satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$(N_1A^{-1})^2(A^{-1}N_2)^2 \leq (A^{-1}N_2)^4, \quad (A^{-1}N_2)^2(N_1A^{-1})^2 \leq (A^{-1}N_2)^4,$$

$$(M_1A^{-1})^2(A^{-1}M_2)^2 \leq (A^{-1}M_2)^4 \quad y \quad (A^{-1}M_2)^2(M_1A^{-1})^2 \leq (A^{-1}M_2)^4;$$

sin embargo, $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$, *por tanto, la parte* (ii) *de los apartados* (2) *y* (3) *del teorema 5.8 no es cierta para* $A = M_2 - N_2$ *débil del segundo tipo.*

Por otra parte, si consideramos $M_1 = P_{20}$ *y* $M_2 = P_{30}$ *tenemos que*

$$(N_1A^{-1})^2 \leq (N_1A^{-1})(A^{-1}N_2) \quad y \quad (M_1A^{-1})^4 \leq (M_1A^{-1})^2(A^{-1}M_2)^2;$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

para $M_1 = P_{20}$ y $M_2 = P_2$ se satisface que

$$(N_1A^{-1})^2 \leq (A^{-1}N_2)(N_1A^{-1}) \quad y \quad (M_1A^{-1})^3 \leq (A^{-1}M_2)(M_1A^{-1})^2;$$

sin embargo, para estos casos $N_1A^{-1} \not\leq A^{-1}N_2$.

Para $M_1 = P_{20}$ y $M_2 = P_{22}$ se sigue que $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$, y sin embargo,

$$(N_1A^{-1})^{i+j} \not\leq (N_1A^{-1})^i(A^{-1}N_2)^j \quad y \quad (N_1A^{-1})^{i+j} \not\leq (A^{-1}N_2)^j(N_1A^{-1})^i.$$

Por lo tanto, los recíprocos del apartado (1) del teorema 5.8 no son ciertos.

Si consideramos $M_1 = P_{20}$ y $M_2 = P_1$ tenemos que $(N_1A^{-1})(A^{-1}N_2) \leq (A^{-1}N_2)^2$ y para $M_1 = P_{32}$ y $M_2 = P_{13}$ se sigue que $(A^{-1}N_2)(N_1A^{-1}) \leq (A^{-1}N_2)^2$; sin embargo, en ambos casos tenemos que $N_1A^{-1} \not\leq A^{-1}N_2$, por tanto, el recíproco de la parte (i) *del apartado* (2) *del teorema 5.8 no es cierto.*

Para $M_1 = P_{33}$ y $M_2 = P_3$ se sigue que $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ y sin embargo, para todo $j \geq 1$ y para todo $i \geq 0$ tenemos que $(N_1A^{-1})^j(A^{-1}N_2)^i \not\leq (A^{-1}N_2)^{i+j}$, así como, para $M_1 = P_8$ y $M_2 = P_{29}$ también se satisface la desigualdad entre los radios espectrales y también para todo $j \geq 1$ y para todo $i \geq 0$ tenemos que $(A^{-1}N_2)^i(N_1A^{-1})^j \not\leq (A^{-1}N_2)^{i+j}$, por tanto, el recíproco de la parte (ii) *del apartado* (2) *no es cierto en general.*

Además, para $M_1 = P_{32}$ y $M_2 = P_2$ tenemos que $(M_1A^{-1})^2(A^{-1}M_2) \leq (A^{-1}M_2)^3$ y $(A^{-1}M_2)(M_1A^{-1})^2 \leq (A^{-1}M_2)^3$; sin embargo, $N_1A^{-1} \not\leq A^{-1}N_2$, es decir, el recíproco de la parte (i) *del apartado* (3) *del teorema 5.8 tampoco es cierto.*

Finalmente, de $M_1 = P_{33}$ y $M_2 = P_3$ se sigue que $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ y sin embargo, para todo $j \geq 1$ y para todo $i \geq 0$ tenemos que $(M_1A^{-1})^j(A^{-1}M_2)^i \not\leq (A^{-1}M_2)^{i+j}$, $(A^{-1}M_2)^i(M_1A^{-1})^j \not\leq (A^{-1}M_2)^{i+j}$, es decir, el recíproco de la parte (ii) *del apartado* (3) *del teorema 5.8 no es cierto.*

Ejemplo 5.2. *Consideremos la matriz no singular*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

con $A^{-1} \geq 0$. *Las particiones* $A = P_k - Q_k$, $k = 1, 2, 3$, *donde*

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para $k = 1, 3$ *las particiones son regulares y para* $k = 2$ *la partición es débil no negativa del segundo tipo.*

Para $M_1 = P_1$ *y* $M_2 = P_2$ *tenemos que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *pero para todo* $j \geq 1$, $(A^{-1}N_1)^j A^{-1} \not\leq (A^{-1}N_2)^j A^{-1}$ *y* $(A^{-1}M_1)^j A^{-1} \not\leq (A^{-1}M_2)^j A^{-1}$. *Por tanto, el recíproco del apartado* (v) *del teorema 5.2 no es cierto.*

Ahora, para $M_1 = P_1$ *y* $M_2 = P_3$ *también tenemos que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *pero para todo* $j \geq 1$,

$$A^{-1}(A^{-1}N_1)^j \not\leq A^{-1}(N_2A^{-1})^j, \quad A^{-1}(A^{-1}M_1)^j \not\leq A^{-1}(M_2A^{-1})^j,$$

$$A^{-1}(N_1A^{-1})^j \not\leq A^{-1}(A^{-1}N_2)^j, \quad A^{-1}(M_1A^{-1})^j \not\leq A^{-1}(A^{-1}M_2)^j,$$

$$(A^{-1}N_1)^j A^{-1} \not\leq (N_2A^{-1})^j A^{-1}, \quad (A^{-1}M_1)^j A^{-1} \not\leq (M_2A^{-1})^j A^{-1},$$

$$(N_1A^{-1})^j A^{-1} \not\leq (A^{-1}N_2)^j A^{-1} \quad y \quad (M_1A^{-1})^j A^{-1} \not\leq (A^{-1}M_2)^j A^{-1}.$$

Es decir, el recíproco del apartado (iii) *de los teoremas 5.5 y 5.6 no son ciertos.*

Notar que en el lema 4.1 hemos probado la equivalencia entre las desigualdades

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2A^{-1} \quad \text{y} \quad A^{-1}M_1A^{-1} \leq A^{-1}M_2A^{-1}.$$

Es fácil comprobar, mediante el mismo razonamiento, que las condiciones de comparación generales de los teoremas 5.5 y 5.6 en las que aparece N_k y las correspondientes con M_k para $k = 1, 2$, en el caso particular $j = 1$ son equivalentes. Por otra parte, del ejemplo 5.1 se deduce que para $j > 1$ esto no es cierto. Los ejemplos obtenidos sugieren que si una de las desigualdades generales de los apartados (ii) o (iii) de los teoremas 5.5 y

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

5.6 con M_k para $k = 1, 2$ se satisface para un cierto $j > 1$, entonces la condición análoga con N_k para $k = 1, 2$ también se satisface para el mismo j. Sin embargo, no hemos sido capaces de probar dicha conjetura o encontrar un contraejemplo que ponga de manifiesto lo contrario.

A continuación, trabajando con operadores acotados en espacios de Hilbert, vamos a presentar resultados análogos a los vistos hasta ahora en este capítulo, pero estableciendo relaciones entre las condiciones de comparación, introducidas también en las secciones 4.2 y 4.3, en las que aparece el operador adjunto en uno de los operadores de una de las particiones.

Teorema 5.9. *Sea A un operador no singular y hermítico en un espacio de Hilbert con $A^{-1} \geq 0$. Sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles no negativas. Para $k = 1, 2$, supondremos que $M_k^{-1} N_k$ y $A^{-1} N_k$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_k M_k^{-1}$ y $N_k A^{-1}$ tienen la propiedad "d" si $A = M_k - N_k$ es del segundo tipo.*

(1) *Supongamos que ambas particiones son del mismo tipo.*

(i) *Si $N_1 \leq N_2'$ entonces $M_1^{-1} \geq (M_2^{-1})'$.*

(ii) *Si $N_1 \leq N_2'$ y $A = M_1 - N_1$ es del primer (respectivamente, del segundo) tipo, entonces $0 \leq A^{-1} N_1 \leq (N_2 A^{-1})'$ (respectivamente, $0 \leq N_1 A^{-1} \leq (A^{-1} N_2)'$).*

(iii) *Si se satisface alguna de las condiciones siguientes*

(a) $M_1^{-1} \geq (M_2^{-1})'$,

(b) $0 \leq A^{-1} N_1 \leq A^{-1} N_2'$,

(c) $0 \leq N_1 A^{-1} \leq N_2' A^{-1}$,

entonces $A^{-1} N_1 A^{-1} \leq A^{-1} N_2' A^{-1}$.

(iv) *Si $A^{-1} N_1 A^{-1} \leq A^{-1} N_2' A^{-1}$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(2) *Supongamos que $A = M_1 - N_1$ del primer tipo y $A = M_2 - N_2$ del primer o del segundo tipo.*

(i) *Si $N_1 \leq N_2'$ entonces $A^{-1} N_1 \leq A^{-1} N_2'$.*

(ii) *Si $A^{-1} N_1 \leq A^{-1} N_2'$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones,y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(3) *Supongamos que $A = M_1 - N_1$ es del segundo tipo y $A = M_2 - N_2$ del primer o del segundo tipo.*

(i) *Si $N_1 \leq N_2'$ entonces $N_1 A^{-1} \leq N_2' A^{-1}$.*

(ii) *Si $N_1 A^{-1} \leq N_2' A^{-1}$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Demostración. (1) Las partes (i), (ii) y (iii) se siguen mediante un razonamiento análogo al llevado a cabo en el teorema 5.2. La parte (iv) se sigue por el teorema 4.17.

La parte (i) de los apartados (2) y (3) es análoga a la parte (i) del apartado (1) de los teoremas 5.3 y 5.4, respectivamente. La parte (ii) de los apartados (2) y (3) se sigue por el teorema 4.19. ∎

A diferencia del teorema 5.2, en el teorema anterior solo hemos establecido relaciones entre condiciones de comparación naturales. Las relaciones existentes con las condiciones de comparación generales en las que aparece el operador adjunto análogas a las del apartado (iv) del teorema 5.2 serán consideradas en los teoremas 5.12 y 5.13, sin la condición adicional de A hermítico.

Notemos que la partes (i), (ii), (iii)(b) y (iii)(c) del apartado (1) son válidas para particiones débiles no negativas de diferente tipo. Eso no es cierto para las partes (iii)(a) y (iv) del apartado (1), como veremos en el ejemplo 5.3. La parte (i) de los apartados (2) y (3) son válidas independientemente del tipo de las particiones. Sin embargo, eso no es cierto para la parte (ii) de dichos apartados, como también veremos en el ejemplo 5.3. En el ejemplo 5.4 pondremos de manifiesto que los recíprocos del teorema 5.9 no son ciertos. También veremos que bajo las hipótesis del teorema 5.9 no existe ninguna relación entre las condiciones $M_1^{-1} \geq (M_2^{-1})'$ y $A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2$ (respectivamente, $N_1 A^{-1} \leq N_2 A^{-1}$) si $A = M_1 - N_1$ es débil no negativa del primer (respectivamente, segundo) tipo.

Ahora, ya sin la condición adicional de A hermítico, introducimos los siguientes resultados análogos a los teoremas 5.3–5.8. Para cada uno de los resultados que a continuación presentamos es válida la demostración realizada en dichos resultados, cambiando los operadores $A^{-1}N_2$, $A^{-1}M_2$, $N_2 A^{-1}$ y $M_2 A^{-1}$ por sus respectivos operadores adjuntos.

Teorema 5.10. *Sea A un operador no singular en un espacio de Hilbert y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles y convergentes con $A = M_1 - N_1$ del primer*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

tipo. Supondremos que $M_1^{-1}N_1$ y $A^{-1}N_1$ tienen la propiedad "d". También supondremos que $M_2^{-1}N_2$ y $A^{-1}N_2$ tienen la propiedad "d" si $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_2M_2^{-1}$ y N_2A^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo.

(1) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del primer o del segundo tipo.*

(i) *Si $0 \leq A^{-1}N_1 \leq (A^{-1}N_2)'$ entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$,*

(a) $(A^{-1}N_1)^{i+j} \leq (A^{-1}N_1)^i\,((A^{-1}N_2)')^j$,

(b) $(A^{-1}M_1)^{i+j} \leq (A^{-1}M_1)^i\,((A^{-1}M_2)')^j$,

(c) $(A^{-1}N_1)^{i+j} \leq ((A^{-1}N_2)')^j\,(A^{-1}N_1)^i$,

(d) $(A^{-1}M_1)^{i+j} \leq ((A^{-1}M_2)')^j\,(A^{-1}M_1)^i$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a), (i)(b), (i)(c) *o* (i)(d) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(2) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo y que $A^{-1}N_2$ es K-irreducible.*

(i) *Si $0 \leq A^{-1}N_1 \leq (A^{-1}N_2)'$, entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y $j \geq 1$,*

(a) $(A^{-1}N_1)^j\,((A^{-1}N_2)')^i \leq ((A^{-1}N_2)')^{i+j}$,

(b) $((A^{-1}N_2)')^i\,(A^{-1}N_1)^j \leq ((A^{-1}N_2)')^{i+j}$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(3) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo.*

(i) *Si $0 \leq A^{-1}N_1 \leq (A^{-1}N_2)'$, entonces entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y $j \geq 1$,*

(a) $(A^{-1}M_1)^j\,((A^{-1}M_2)')^i \leq ((A^{-1}M_2)')^{i+j}$,

(b) $((A^{-1}M_2)')^i\,(A^{-1}M_1)^j \leq ((A^{-1}M_2)')^{i+j}$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Notemos que la parte (i) de los apartados (2) y (3) se satisface independientemente del tipo de $A = M_2 - N_2$ y de la K-irreducibilidad de $A^{-1}N_2$, sin embargo, la parte (ii) de dichos apartados sólo se satisface cuando ambas particiones son del primer tipo, como pondremos de manifiesto en el ejemplo 5.5. En el ejemplo 5.5 también pondremos de manifiesto que los recíprocos del teorema anterior no son ciertos en general.

Es fácil observar, que el teorema anterior es el análogo al teorema 5.3 al considerar el operador adjunto en uno de los operadores de una de las particiones. Sin embargo, al omitir en este caso la condición $N_1 \leq N_2'$, podemos prescindir de la condición adicional de A hermítico, lo cual nos ha permitido cambiar las hipótesis "$A^{-1} \geq 0$" y "débiles no negativas" por "particiones convergentes" y "débiles".

Por otra parte, si en el teorema 5.10 consideramos $A = M_1 - N_1$ del segundo tipo obtenemos, mediante un razonamiento análogo, el siguiente resultado, siendo válidos los comentarios anteriores.

Teorema 5.11. *Sea A un operador no singular en un espacio de Hilbert y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones débiles y convergentes con $A = M_1 - N_1$ del segundo tipo. Supondremos que $N_1M_1^{-1}$ y N_1A^{-1} tienen la propiedad "d". También supondremos que $M_2^{-1}N_2$ y $A^{-1}N_2$ tienen la propiedad "d" si $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_2M_2^{-1}$ y N_2A^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo.*

(1) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del primer o del segundo tipo.*

  (i) *Si $0 \leq N_1A^{-1} \leq (N_2A^{-1})'$ entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$,*

  (a) $(N_1A^{-1})^{i+j} \leq (N_1A^{-1})^i\,((N_2A^{-1})')^j$,

  (b) $(M_1A^{-1})^{i+j} \leq (M_1A^{-1})^i\,((M_2A^{-1})')^j$,

  (c) $(N_1A^{-1})^{i+j} \leq ((N_2A^{-1})')^j\,(N_1A^{-1})^i$,

  (d) $(M_1A^{-1})^{i+j} \leq ((M_2A^{-1})')^j\,(M_1A^{-1})^i$.

  (ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a), (i)(b), (i)(c) *o* (i)(d) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(2) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo y N_2A^{-1} es K-irreducible.*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(i) *Si* $0 \leq N_1 A^{-1} \leq (N_2 A^{-1})'$, *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$.

(a) $(N_1 A^{-1})^j ((N_2 A^{-1})')^i \leq ((N_2 A^{-1})')^{i+j}$,

(b) $((N_2 A^{-1})')^i (N_1 A^{-1})^j \leq ((N_2 A^{-1})')^{i+j}$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún* $i \geq 0$ *y* $j \geq 1$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(3) *Supongamos que* $A = M_2 - N_2$ *es del segundo tipo.*

(i) *Si* $0 \leq N_1 A^{-1} \leq (N_2 A^{-1})'$, *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$,

(a) $(M_1 A^{-1})^j ((M_2 A^{-1})')^i \leq ((M_2 A^{-1})')^{i+j}$,

(b) $((M_2 A^{-1})')^i (M_1 A^{-1})^j \leq ((M_2 A^{-1})')^{i+j}$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Teorema 5.12. *Sea* A *un operador no singular en un espacio de Hilbert con* $A^{-1} \geq 0$. *Sean* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *dos particiones débiles no negativas con* $A = M_1 - N_1$ *del primer tipo. Supondremos que* $M_1^{-1} N_1$ *y* $A^{-1} N_1$ *tienen la propiedad "d". También supondremos que* $M_2^{-1} N_2$ *y* $A^{-1} N_2$ *tienen la propiedad "d" si* $A = M_2 - N_2$ *es del primer tipo; no obstante, supondremos que* $N_2 M_2^{-1}$ *y* $N_2 A^{-1}$ *tienen la propiedad "d" si* $A = M_2 - N_2$ *es del segundo tipo.*

(1) *Supongamos que* $A = M_2 - N_2$ *es del primer tipo.*

(i) *Si* $0 \leq A^{-1} N_1 \leq (N_2 A^{-1})'$ *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$.

(a) $(A^{-1} N_1)^j (A^{-1})' \leq ((N_2 A^{-1})')^j (A^{-1})'$,

(b) $(A^{-1} M_1)^j (A^{-1})' \leq ((M_2 A^{-1})')^j (A^{-1})'$.

(ii) *Si* $0 \leq N_1 A^{-1} \leq (A^{-1} N_2)'$ *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$,

(a) $A^{-1} (N_1 A^{-1})^j \leq A^{-1} ((A^{-1} N_2)')^j$,

(b) $A^{-1} (M_1 A^{-1})^j \leq A^{-1} ((A^{-1} M_2)')^j$,

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

(iii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a), (i)(b), (ii)(a) *o* (ii)(b) *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(2) *Supongamos que* $A = M_2 - N_2$ *es del segundo tipo.*

(i) *Si* $0 \leq A^{-1}N_1 \leq (A^{-1}N_2)'$ *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$,

(a) $(A^{-1})'(A^{-1}N_1)^j \leq (A^{-1})'\left((A^{-1}N_2)'\right)^j$,

(b) $(A^{-1})'(A^{-1}M_1)^j \leq (A^{-1})'\left((A^{-1}M_2)'\right)^j$.

(ii) *Si* $0 \leq N_1A^{-1} \leq (N_2A^{-1})'$ *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$,

(a) $A^{-1}(N_1A^{-1})^j \leq A^{-1}\left((N_2A^{-1})'\right)^j$,

(b) $A^{-1}(N_1A^{-1})^j \leq A^{-1}\left((N_2A^{-1})'\right)^j$.

(iii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a), (i)(b), (ii)(a) *o* (ii)(b) *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Notemos que las partes (i) y (ii) de los apartados (1) y (2) del teorema (i) son ciertos independientemente del tipo de las particiones. Sin embargo, eso no es cierto para la parte (iii) de los apartados (1) y (2) de dicho teorema, como pondremos de manifiesto en el ejemplo 5.5. En los ejemplos 5.5 y 5.6 también veremos que los recíprocos del teorema 5.12 no son ciertos en general.

Si en el teorema 5.12 consideramos $A = M_1 - N_1$ una partición débil no negativa del segundo tipo, obtenemos mediante un razonamiento análogo, el siguiente resultado, siendo válidos todos los comentarios anteriores.

Teorema 5.13. *Sea* A *un operador no singular en un espacio de Hilbert con* $A^{-1} \geq 0$. *Sean* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *dos particiones débiles no negativas con* $A = M_1 - N_1$ *del segundo tipo. Supondremos que* $N_1M_1^{-1}$ *y* N_1A^{-1} *tienen la propiedad "d". También supondremos que* $M_2^{-1}N_2$ *y* $A^{-1}N_2$ *tienen la propiedad "d" si* $A = M_2 - N_2$ *es del primer tipo; no obstante, supondremos que* $N_2M_2^{-1}$ *y* N_2A^{-1} *tienen la propiedad "d" si* $A = M_2 - N_2$ *es del segundo tipo.*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(1) *Supongamos que* $A = M_2 - N_2$ *es del primer tipo.*

(i) *Si* $0 \leq A^{-1}N_1 \leq (A^{-1}N_2)'$ *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$,

(a) $(A^{-1})(A^{-1}N_1)^j \leq (A^{-1})\left((A^{-1}N_2)'\right)^j$,

(b) $(A^{-1})(A^{-1}M_1)^j \leq (A^{-1})\left((A^{-1}M_2)'\right)^j$.

(ii) *Si* $0 \leq N_1A^{-1} \leq (N_2A^{-1})'$ *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y* $j \geq 1$,

(a) $(N_1A^{-1})^j(A^{-1})' \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^j(A^{-1})'$,

(b) $(M_1A^{-1})^j(A^{-1})' \leq \left((M_2A^{-1})'\right)^j$.

(iii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a), (i)(b), (ii)(a) *o* (ii)(b) *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(2) *Supongamos que* $A = M_2 - N_2$ *es del segundo tipo.*

(i) *Si* $0 \leq A^{-1}N_1 \leq (N_2A^{-1})'$ *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$,

(a) $(A^{-1}N_1)^j(A^{-1}) \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^j(A^{-1})$,

(b) $(A^{-1}M_1)^j(A^{-1}) \leq \left((M_2A^{-1})'\right)^j(A^{-1})'$.

(ii) *Si* $0 \leq N_1A^{-1} \leq (A^{-1}N_2)'$ *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y* $j \geq 1$,

(a) $(A^{-1})'(N_1A^{-1})^j \leq (A^{-1})'\left((A^{-1}N_2)'\right)^j$,

(b) $(A^{-1})'(M_1A^{-1})^j \leq (A^{-1})'\left((A^{-1}M_2)'\right)^j$.

(iii) *Si se satisface* (i)(a), (i)(b), (ii)(a) *o* (ii)(b) *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

En los siguientes resultados, partiendo de las condiciones naturales de comparación que aparecen en los teoremas 5.12 y 5.13 establecemos otras cadenas de implicaciones.

Teorema 5.14. *Sea* A *un operador no singular en un espacio de Hilbert y sean* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *dos particiones convergentes y débiles con* $A = M_1 - N_1$ *del primer tipo. Supondremos que* $M_1^{-1}N_1$ *y* $A^{-1}N_1$ *tienen la propiedad "d". También supondremos que* $M_2^{-1}N_2$ *y* $A^{-1}N_2$ *tienen la propiedad "d" si* $A = M_2 - N_2$ *es del primer tipo; no*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

obstante, supondremos que $N_2M_2^{-1}$ *y* N_2A^{-1} *tienen la propiedad "d" si* $A = M_2 - N_2$ *es del segundo tipo.*

(1) *Supongamos que* $A = M_2 - N_2$ *es del primer o del segundo tipo.*

(i) *Si* $0 \leq A^{-1}N_1 \leq (N_2A^{-1})'$, *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$,

(a) $(A^{-1}N_1)^{i+j} \leq (A^{-1}N_1)^i\,((N_2A^{-1})')^j$,

(b) $(A^{-1}N_1)^{i+j} \leq ((N_2A^{-1})')^j\,(A^{-1}N_1)^i$,

(c) $(A^{-1}M_1)^{i+j} \leq (A^{-1}M_1)^i\,((M_2A^{-1})')^j$,

(d) $(A^{-1}M_1)^{i+j} \leq ((M_2A^{-1})')^j\,(A^{-1}M_1)^i$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a)–(i)(d) *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(2) *Supongamos que* $A = M_2 - N_2$ *es del segundo tipo y que* N_2A^{-1} *es* K*-irreducible.*

(i) *Si* $0 \leq A^{-1}N_1 \leq (N_2A^{-1})'$, *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$,

(a) $(A^{-1}N_1)^j\,((N_2A^{-1})')^i \leq ((N_2A^{-1})')^{i+j}$,

(b) $((N_2A^{-1})')^i\,(A^{-1}N_1)^j \leq ((N_2A^{-1})')^{i+j}$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(3) *Supongamos que* $A = M_2 - N_2$ *es del segundo tipo.*

(a) *Si* $0 \leq A^{-1}N_1 \leq (N_2A^{-1})'$, *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$,

(i) $(A^{-1}M_1)^j\,((M_2A^{-1})')^i \leq ((M_2A^{-1})')^{i+j}$,

(ii) $((M_2A^{-1})')^i\,(A^{-1}M_1)^j \leq ((M_2A^{-1})')^{i+j}$.

(b) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (a)(i) *o* (a)(ii) *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Notemos que la parte (i) de los apartados (2) y (3) del teorema anterior, sigue siendo válida independientemente del tipo de $A = M_2 - N_2$ y de la K-irreducibilidad de $A^{-1}N_2$. Sin embargo, en la parte (ii) del apartado (1) las hipótesis de $A = M_2 - N_2$ del primer tipo

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

y $A^{-1}N_2$ K-irreducible son necesarias, como pondremos de manifiesto en el ejemplo 5.5, además, también pondremos de manifiesto que la parte (b) del apartado (3) tampoco es en general cierta si $A = M_2 - N_2$ es débil del segundo tipo. En el ejemplo 5.5 pondremos de manifiesto que los recíprocos del teorema 5.14 no son ciertos en general.

Si en el teorema 5.14 consideramos $A = M_1 - N_1$ sea débil del segundo tipo, mediante un razonamiento análogo, obtenemos el siguiente resultado, siendo válidos los comentarios anteriores.

Teorema 5.15. *Sea A un operador no singular en un espacio de Hilbert y sean $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ dos particiones convergentes y débiles con $A = M_1 - N_1$ del segundo tipo. Supondremos que $N_1M_1^{-1}$ y N_1A^{-1} tienen la propiedad "d". También supondremos que $M_2^{-1}N_2$ y $A^{-1}N_2$ tienen la propiedad "d" si $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo; no obstante, supondremos que $N_2M_2^{-1}$ y N_2A^{-1} tienen la propiedad "d" si $A = M_2 - N_2$ es del segundo tipo.*

(1) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del primer o del segundo tipo.*

(i) *Si $0 \leq N_1A^{-1} \leq (A^{-1}N_2)'$, entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$,*

(a) $(N_1A^{-1})^{i+j} \leq (N_1A^{-1})^i\,((A^{-1}N_2)')^j$,

(b) $(N_1A^{-1})^{i+j} \leq ((A^{-1}N_2)')^j\,(N_1A^{-1})^i$,

(c) $(M_1A^{-1})^{i+j} \leq (M_1A^{-1})^i\,((A^{-1}M_2)')^j$,

(d) $(M_1A^{-1})^{i+j} \leq ((A^{-1}M_2)')^j\,(M_1A^{-1})^i$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a)-(i)(d) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

(2) *Supongamos que $A = M_2 - N_2$ es del primer tipo y $(A^{-1}N_2)$ es K-irreducible.*

(i) *Si $0 \leq N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2$, entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo $i \geq 0$ y para todo $j \geq 1$,*

(a) $(N_1A^{-1})^j\,((A^{-1}N_2)')^i \leq ((A^{-1}N_2)')^{i+j}$,

(b) $((A^{-1}N_2)')^i\,(N_1A^{-1})^j \leq ((A^{-1}N_2)')^{i+j}$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún $i \geq 0$ y algún $j \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(3) *Supongamos que* $A = M_2 - N_2$ *es del segundo tipo.*

(i) *Si* $0 \leq N_1 A^{-1} \leq A^{-1} N_2$, *entonces se satisfacen las desigualdades siguientes para todo* $i \geq 0$ *y para todo* $j \geq 1$,

(a) $(M_1 A^{-1})^j ((A^{-1} M_2)')^i \leq ((A^{-1} M_2)')^{i+j}$,

(b) $((A^{-1} M_2)')^i (M_1 A^{-1})^j \leq ((A^{-1} M_2)')^{i+j}$.

(ii) *Si se satisface alguna de las desigualdades de los apartados* (i)(a) *o* (i)(b) *para algún* $i \geq 0$ *y algún* $j \geq 1$, *entonces se satisface la desigualdad (5.1).*

Ejemplo 5.3. *Consideremos la matriz simétrica* A *con* $A^{-1} \geq 0$ *del ejemplo 4.4 y las particiones* $A = P_k - Q_k$, $k = 1, 2, \ldots, 7$, *donde*

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{5}{4} & \frac{18}{5} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} \frac{173}{150} & -\frac{73}{75} \\ -\frac{41}{25} & \frac{148}{45} \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_5 = \begin{bmatrix} \frac{17}{10} & -\frac{9}{10} \\ -\frac{17}{10} & 2 \end{bmatrix}, \quad P_6 = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & -1 \\ -\frac{7}{4} & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_7 = \begin{bmatrix} \frac{17}{10} & -\frac{17}{10} \\ -\frac{9}{10} & 2 \end{bmatrix},$$

Para $k = 1, 4, 5, 6$ *las particiones son débiles no negativas del primer tipo. Para* $k = 2, 3, 7$ *las particiones son débiles no negativas del segundo tipo.*

Sea $M_1 = P_3$ *y* $M_2 = P_4$, *entonces* $M_1^{-1} \geq (M_2^{-1})'$, *pero* $A^{-1} N_1 A^{-1} \not\leq A^{-1} N_2' A^{-1}$. *Ahora, para* $M_1 = P_1$ *y* $M_2 = P_2$, *tenemos que* $A^{-1} N_1 A^{-1} \leq A^{-1} N_2' A^{-1}$, *pero* $\rho(M_1^{-1} N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1} N_2)$. *Por tanto las partes* (iii)(a) *y* (iv) *del teorema 5.9 no son ciertas para particiones débiles no negativas de diferente tipo.*

Sea $M_1 = P_3$ *y* $M_2 = P_5$, *entonces* $A^{-1} N_1 \leq A^{-1} N_2'$, *pero* $\rho(M_1^{-1} N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1} N_2)$. *Para* $M_1 = P_6$ *y* $M_2 = P_7$ *tenemos que* $N_1 A^{-1} \leq N_2' A^{-1}$, *pero* $\rho(M_1^{-1} N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1} N_2)$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Por tanto, la parte (ii) de los apartados (2) y (3) del teorema 5.9 no es cierta si $A = M_1 - N_1$ es débil no negativa del segundo (respectivamente, del primer) tipo.

Ejemplo 5.4. *Consideremos la matriz simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Es fácil comprobar que $A^{-1} \geq 0$. Consideremos las particiones $A = P_k - Q_k$, $k = 1, 2, \ldots, 12$, donde

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{200}{31} & -\frac{100}{31} & 0 \\ -\frac{90}{31} & \frac{200}{31} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P_6 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$P_7 = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_8 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_9 = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_{10} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P_{11} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{17}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para $k = 1, 7, 9, 11$ las particiones son no negativas. Para $k = 2, 8, 10$ las particiones son débiles no negativas del primer tipo. Para $k = 3, 5, 6, 12$ las particiones son regulares. Para $k = 4$ la partición es débil no negativa del segundo tipo.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Sea $M_1 = P_2$ y $M_2 = P_1$ tenemos que $M_1^{-1} \geq (M_2^{-1})'$ pero $N_1 \not\leq N_2'$. Para $M_1 = P_8$ y $M_2 = P_9$, tenemos que $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2'$, pero $N_1 \not\leq N_2'$. Ahora, para $M_1 = P_3$ y $M_2 = P_1$ tenemos que $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2'A^{-1}$ pero $M_1^{-1} \not\geq (M_2^{-1})'$ y para $M_1 = P_7$ y $M_2 = P_1$, entonces $A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}N_2'A^{-1}$, pero $A^{-1}N_1 \not\leq A^{-1}N_2'$ y $N_1A^{-1} \not\leq N_2'A^{-1}$. Para $M_1 = P_3$ y $M_2 = P_4$ se sigue que $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ pero $A^{-1}N_1A^{-1} \not\leq A^{-1}N_2'A^{-1}$. Por tanto, los recíprocos del apartado (1) del teorema 5.9 no son ciertos.

Sea $M_1 = P_3$ y $M_2 = P_5$ tenemos que $A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2'$ pero $N_1 \not\leq N_2'$. Ahora, para $M_1 = P_6$ y $M_2 = P_2$ tenemos que $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ pero $A^{-1}N_1 \not\leq A^{-1}N_2'$. Por tanto, los recíprocos del apartado (2) del teorema 5.9 no son ciertos.

Sea $M_1 = P_4$ y $M_2 = P_1$ tenemos que $N_1A^{-1} \leq N_2'A^{-1}$ pero $N_1 \not\leq N_2'$. Finalmente, para $M_1 = P_6$ y $M_2 = P_5$ tenemos que $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ pero $N_1A^{-1} \not\leq N_2'A^{-1}$. Luego los recíprocos del apartado (3) del teorema 5.9 tampoco son ciertos.

Sea $M_1 = P_6$ y $M_2 = P_{10}$, se sigue que $M_1^{-1} \geq (M_2^{-1})'$ pero $A^{-1}N_1 \not\leq A^{-1}N_2'$. Para $M_1 = P_4$ y $M_2 = P_{12}$, tenemos que $M_1^{-1} \geq (M_2^{-1})'$ pero $N_1A^{-1} \not\leq N_2'A^{-1}$. Ahora, para $M_1 = P_3$ y $M_2 = P_5$, se sigue que $0 \leq A^{-1}N_1 \leq A^{-1}N_2'$, pero $M_1^{-1} \not\geq (M_2^{-1})'$. Finalmente, para $M_1 = P_3$ y $M_2 = P_{11}$, tenemos que $0 \leq N_1A^{-1} \leq N_2'A^{-1}$, pero $M_1^{-1} \not\geq (M_2^{-1})'$. Por consiguiente, no existe ninguna relación entre las condiciones de comparación de las partes (a), (b) y (c) del apartado (iii) del teorema 5.9 cuando $A = M_1 - N_1$ es débil no negativa del primer o del segundo tipo.

Ejemplo 5.5. *Consideremos la matriz A y las particiones del ejemplo 5.1.*

Si consideramos $M_1 = P_{31}$ y $M_2 = P_3$ tenemos que $A^{-1}N_2$ no es K-irreducible,

$$(A^{-1}N_1)(A^{-1}N_2)' \leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^2 \quad y \quad (A^{-1}N_2)'(A^{-1}N_1) \leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^2$$

y sim embargo, $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$, por lo tanto, la K-irreducibilidad de $A^{-1}N_2$ en la parte (ii) del apartado (2) del teorema 5.10 es una condición necesaria.

Para $M_1 = P_{31}$ y $M_2 = P_{32}$ tenemos que

$$(A^{-1}N_2)'A^{-1}N_1 \leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^2 \quad y \quad (A^{-1}M_2)'A^{-1}M_1 \leq \left((A^{-1}M_2)'\right)^2$$

y sin embargo, $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$, es decir, la parte (ii) de los apartados (2) y (3) del teorema 5.10 no es cierta si la partición $A = M_2 - N_2$ es débil no negativa del segundo tipo.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Sea $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_9$ *tenemos que*

$$(A^{-1}N_1)^2 \leq (A^{-1}N_1)(A^{-1}N_2)' \quad y \quad (A^{-1}M_1)^2 \leq (A^{-1}M_1)(A^{-1}M_2)',$$

sin embargo $A^{-1}N_1 \not\leq (A^{-1}N_2)'$. *Además, si consideramos* $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_9$ *tenemos que*

$$(A^{-1}N_1)^3 \leq \left((A^{-1}N_2)'\right)(A^{-1}N_1) \quad y \quad (A^{-1}M_1)^3 \leq \left((A^{-1}M_2)'\right)(A^{-1}M_1),$$

pero $A^{-1}N_1 \not\leq (A^{-1}N_2)'$. *Finalmente, para* $M_1 = P_31$ *y* $M_2 = P_1$ *tenemos que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *pero para todo* $j \geq 1$ *y para todo* $i \geq 0$ $(A^{-1}N_1)^{i+j} \not\leq (A^{-1}N_1)^i\left((A^{-1}N_2)'\right)^j$ *y* $(A^{-1}N_1)^{i+j} \not\leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^j(A^{-1}N_1)^i$. *Por lo tanto, los recíprocos del apartado* (1) *del teorema 5.10 no son ciertos.*

Si consideramos $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_9$, *tenemos que*

$$(A^{-1}N_1)(A^{-1}N_2)' \leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^2, \quad (A^{-1}N_2)'(A^{-1}N_1) \leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^2,$$

$$(A^{-1}M_1)^2(A^{-1}M_2) \leq \left((A^{-1}M_2)'\right)^3 \quad y \quad (A^{-1}M_2)'(A^{-1}M_1) \leq \left((A^{-1}M_2)'\right)^2,$$

pero $A^{-1}N_1 \not\leq A^{-1}N_2$, *por lo tanto, queda de manifiesto que el recíproco de la parte* (i) *de los apartados* (2) *y* (3) *del teorema 5.10 no son ciertos.*

Para $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_{13}$ *tenemos que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *pero*

$$(A^{-1}N_1)^j\left((A^{-1}N_2)'\right)^i \not\leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^{i+j} \quad y \quad \left((A^{-1}N_2)'\right)^i(A^{-1}N_1)^j \not\leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^{i+j}$$

para todo $j \geq 1$ *e* $i \geq 0$, *por tanto el recíproco de la parte* (ii) *del aparatado* (2) *del teorema 5.10 no es cierto.*

Para $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_{13}$ *tenemos que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *y sin embargo,*

$$(A^{-1}M_1)^j\left((A^{-1}M_2)'\right)^i \not\leq \left((A^{-1}M_2)'\right)^{i+j} \quad y \quad \left((A^{-1}M_2)'\right)^i(A^{-1}M_1)^j \not\leq \left((A^{-1}M_2)'\right)^{i+j}$$

para todo $j \geq 1$ *y para todo* $i \geq 0$ *por tanto, el recíproco de la parte* (ii) *del apartado* (3) *del teorema 5.10 tampoco es cierto.*

Sea $M_1 = P_{34}$ *y* $M_2 = P_{15}$ *entonces* $(N_1A^{-1})(N_2A^{-1})' \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^2$ *sin embargo,* $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$, *es decir, la* K*-irreducibilidad de* N_2A^{-1} *en la parte* (ii) *del apartado* (2) *teorema 5.11 es una hipótesis necesaria.*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Si consideramos $M_1 = P_{34}$ y $M_2 = P_3$ tenemos que

$$(N_2A^{-1})'(N_1A^{-1}) \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^2 \quad \text{y} \quad (M_2A^{-1})'(M_1A^{-1}) \leq \left((M_2A^{-1})'\right)^2$$

sin embargo, $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. Por consiguiente la parte (ii) de los apartados (2) y (3) del teorema 5.4 no es cierta si la partición $A = M_2 - N_2$ es débil no negativa del primer tipo.

Por otra parte, si consideramos $M_1 = P_{32}$ y $M_2 = P_{12}$ tenemos que

$$(N_1A^{-1})^3 \leq (N_1A^{-1})\left((N_2A^{-1})'\right)^2 \quad \text{y} \quad (M_1A^{-1})^4 \leq (M_1A^{-1})\left((M_2A^{-1})'\right)^3;$$

para $M_1 = P_{32}$ y $M_2 = P_{26}$ tenemos que

$$(N_1A^{-1})^2 \leq (N_2A^{-1})'(N_1A^{-1}) \quad \text{y} \quad (M_1A^{-1})^2 \leq (M_2A^{-1})'(M_1A^{-1});$$

finalmente, para $M_1 = P_{33}$ y $M_2 = P_7$ tenemos que

$$(N_1A^{-1})^2(N_2A^{-1})' \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^3, \quad (N_2A^{-1})'(N_1A^{-1})^2 \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^3,$$

$$(M_1A^{-1})^2(M_2A^{-1})' \leq \left((M_2A^{-1})'\right)^3 \quad \text{y} \quad (M_2A^{-1})'(M_1A^{-1})^2 \leq \left((M_2A^{-1})'\right)^3;$$

sin embargo, en todos estos casos tenemos que $N_1A^{-1} \not\leq (N_2A^{-1})'$. Por lo tanto, los recíprocos de la parte (ii) del apartado (1) y los recíprocos de la parte (i) de los apartados (2) y (3) del teorema 5.11 no son ciertos en general.

Por otra parte, para $M_1 = P_{17}$ y $M_2 = P_{34}$ se satisface $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ pero

$$(N_1A^{-1})^{i+j} \not\leq (N_1A^{-1})^i\left((N_2A^{-1})'\right)^j \quad \text{y} \quad (N_1A^{-1})^{i+j} \not\leq \left((N_2A^{-1})'\right)^j(N_1A^{-1})^i$$

para todo $j \geq 1$ y para todo $i \geq 0$ por lo tanto, el recíproco de la parte ?? del apartado (1) del teorema 5.11 no es cierto. Además, para $M_1 = P_{15}$ y $M_2 = P_{34}$ se satisface que $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ pero

$$(N_1A^{-1})^i\left((N_2A^{-1})'\right)^j \not\leq \left((N_2A^{-1})'\right)^{i+j}, \quad \left((N_2A^{-1})'\right)^j(N_1A^{-1})^i \not\leq \left((N_2A^{-1})'\right)^{i+j},$$

$$(M_1A^{-1})^i\left((M_2A^{-1})'\right)^j \not\leq \left((M_2A^{-1})'\right)^{i+j}, \quad \left((M_2A^{-1})'\right)^j(M_1A^{-1})^i \not\leq \left((M_2A^{-1})'\right)^{i+j}$$

para todo $j \geq 1$ y para todo $i \geq 0$, por tanto los recíprocos de las partes (i)(a) y (i)(b) del apartado (2) del teorema 5.11 no son ciertas.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Sea $M_1 = P_1$ y $M_2 = P_{17}$ se sigue que

$$A^{-1}N_1(A^{-1})' \leq (N_2A^{-1})'(A^{-1})' \quad y \quad A^{-1}M_1(A^{-1})' \leq (M_2A^{-1})'(A^{-1})'$$

pero $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. Para $M_1 = P_{10}$ y $M_2 = P_{16}$ tenemos que

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}(A^{-1}N_2)' \quad y \quad A^{-1}M_1A^{-1} \leq A^{-1}(A^{-1}M_2)'$$

pero $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. Por tanto, la parte (iii) del apartado (1) del teorema 5.12 no se satisface si ambas particiones no son débiles no negativas del primer tipo.

Sea $M_1 = P_2$ y $M_2 = P_1$ entonces se sigue que

$$(A^{-1}N_1)^2(A^{-1})' \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^2(A^{-1})' \quad y \quad (A^{-1}M_1)^3(A^{-1})' \leq \left((M_2A^{-1})'\right)^3(A^{-1})'$$

pero $A^{-1}N_1 \not\leq (N_2A^{-1})'$. Para las mismas particiones también tenemos que

$$A^{-1}(N_1A^{-1})^3 \leq A^{-1}\left((A^{-1}N_2)'\right)^3 \quad y \quad A^{-1}(M_1A^{-1})^5 \leq A^{-1}\left((A^{-1}M_2)'\right)^5$$

pero $N_1A^{-1} \not\leq (A^{-1}N_2)'$. Por tanto, los recíprocos de las partes (i) y (ii) del apartado (1) del teorema 5.12 no son ciertos.

Sea $M_1 = P_3$ y $M_2 = P_{22}$ se sigue que

$$(A^{-1})'A^{-1}N_1 \leq (A^{-1})'(A^{-1}N_2)' \quad y \quad (A^{-1})'A^{-1}M_1 \leq (A^{-1})'(A^{-1}M_2)'$$

pero $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. Ahora, para $M_1 = P_{10}$ y $M_2 = P_{20}$ tenemos que

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq A^{-1}(N_2A^{-1})' \quad y \quad A^{-1}M_1A^{-1} \leq A^{-1}(M_2A^{-1})'$$

pero $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. Por tanto, la parte (iii) del apartado (2) del teorema 5.12 no se satisface cuando $A = M_1 - N_1$ no es débil no negativa del primer tipo y $A = M_2 - N_2$ no es débil no negativa del segundo tipo.

Sea $M_1 = P_3$ y $M_2 = P_8$ se sigue que

$$(A^{-1})'A^{-1}N_1 \leq (A^{-1})'(A^{-1}N_2)' \quad y \quad (A^{-1})'A^{-1}N_1 \leq (A^{-1})'(A^{-1}N_2)'$$

pero $A^{-1}N_1 \not\leq (A^{-1}N_2)'$. Ahora, para $M_1 = P_1$ y $M_2 = P_7$ se sigue que

$$A^{-1}(N_1A^{-1})^2 \leq A^{-1}\left((A^{-1}N_2)'\right)^2 \quad y \quad A^{-1}(M_1A^{-1})^3 \leq A^{-1}\left((A^{-1}M_2)'\right)^3$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

pero $N_1A^{-1} \not\leq (N_2A^{-1})'$. *Por tanto, los recíprocos de las partes* (i) *y* (ii) *del apartado* (2) *del teorema 5.12 no son ciertos.*

Sea $M_1 = P_3$ *y* $M_2 = P_{25}$ *se sigue que*

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq (A^{-1}N_2)'A^{-1} \quad y \quad A^{-1}M_1A^{-1} \leq (A^{-1}M_2)'A^{-1}$$

pero $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. *Ahora, para* $M_1 = P_{12}$ *y* $M_2 = P_{23}$ *tenemos que*

$$N_1A^{-1}(A^{-1})' \leq (N_2A^{-1})'(A^{-1})' \quad y M_1A^{-1}(A^{-1})' \leq (M_2A^{-1})'(A^{-1})'$$

pero $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. *Por tanto, la parte* (iii) *del apartado* (1) *del teorema 5.13 no es cierto cuando* $A = M_1 - N_1$ *no es débil no negativa del segundo tipo y* $A = M_2 - N_2$ *no es débil no negativa del primer tipo.*

Sea $M_1 = P_8$ *y* $M_2 = P_7$ *se sigue que*

$$(A^{-1}N_1)^2A^{-1} \leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^2 A^{-1} \quad y (A^{-1}M_1)^2A^{-1} \leq \left((A^{-1}M_2)'\right)^2 A^{-1}$$

pero $A^{-1}N_1 \not\leq (A^{-1}N_2)'$. *Considerando las mismas particiones tenemos que*

$$N_1A^{-1}(A^{-1})' \leq (N_2A^{-1})'(A^{-1})' \quad y \quad M_1A^{-1}(A^{-1})' \leq (M_2A^{-1})'(A^{-1})'$$

pero $N_1A^{-1} \not\leq (N_2A^{-1})'$. *Por tanto, tenemos que los recíprocos de las partes* (i) *y* (ii) *del apartado* (1) *del teorema 5.13 no son ciertos.*

Sea $M_1 = P_1$ *y* $M_2 = P_{19}$ *se sigue que*

$$A^{-1}N_1A^{-1} \leq (N_2A^{-1})'A^{-1} \quad y \quad A^{-1}M_1A^{-1} \leq (M_2A^{-1})'A^{-1}$$

pero $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. *Ahora, para* $M_1 = P_8$ *y* $M_2 = P_{18}$ *tenemos que*

$$(A^{-1})'N_1A^{-1} \leq (A^{-1})'(A^{-1}N_2)' \quad y \quad (A^{-1})'M_1A^{-1} \leq (A^{-1})'(A^{-1}M_2)'$$

pero $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$. *Por tanto, la parte* (iii) *del apartado* (2) *del teorema 5.13 no se satisface a menos que ambas particiones sean débiles no negativas del segundo tipo.*

Sea $M_1 = P_9$ *y* $M_2 = P_8$ *se sigue que*

$$A^{-1}N_1)^4A^{-1} \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^4 A^{-1} \quad y \quad A^{-1}M_1)^6A^{-1} \leq \left((M_2A^{-1})'\right)^6 A^{-1}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

pero $A^{-1}N_1 \not\leq (N_2A^{-1})'$*. Para las mismas particiones también tenemos que*

$$(A^{-1})'(N_1A^{-1})^3 \leq (A^{-1})'\left((A^{-1}N_2)'\right)^3 \quad y \quad (A^{-1})'(M_1A^{-1})^4 \leq (A^{-1})'\left((A^{-1}M_2)'\right)^4$$

pero $N_1A^{-1} \not\leq (A^{-1}N_2)'$*. Por tanto, los recíprocos de las partes* (i) *y* (ii) *del apartado* (2) *del teorema 5.13 no son ciertos.*

Si consideramos $M_1 = P_{31}$ *y* $M_2 = P_{32}$ *tenemos que* $(A^{-1}N_1)(N_2A^{-1})' \leq ((N_2A^{-1})')^2$ *y* $(N_2A^{-1})'(A^{-1}N_1) \leq ((N_2A^{-1})')^2$*, sin embargo,* $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$*; es decir, en la parte* (ii) *del apartado* (2) *del teorema 5.14 la* K*-irreducibilidad de* N_2A^{-1} *es necesaria.*

Ahora, si consideramos $M_1 = P_3$ *y* $M_2 = P_{10}$ *tenemos que se satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$(A^{-1}N_1)^3 \leq (A^{-1}N_1)\left((N_2A^{-1})'\right)^2, \quad (A^{-1}N_1)^3 \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^2(A^{-1}N_1),$$

$$(A^{-1}M_1)^4 \leq (A^{-1}M_1)\left((M_2A^{-1})'\right)^3, \quad (A^{-1}M_1)^5 \leq \left((M_2A^{-1})'\right)^3(A^{-1}M_1)^2,$$

$$(A^{-1}N_1)(N_2A^{-1})' \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^2, \quad (N_2A^{-1})'(A^{-1}N_1) \leq \left((N_2A^{-1})'\right)^2,$$

$$(A^{-1}M_1)(M_2A^{-1})' \leq \left((M_2A^{-1})'\right)^2 \quad y \quad (M_2A^{-1})'(A^{-1}M_1) \leq \left((M_2A^{-1})'\right)^2;$$

sin embargo, $A^{-1}N_1 \not\leq (N_2A^{-1})'$*. Por lo tanto, los recíprocos de la parte* (i) *de los apartados* (1), (2) *y* (3) *del teorema 5.14 no son ciertos.*

Por otra parte, si consideramos $M_1 = P_8$ *y* $M_2 = P_{17}$ *tenemos que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *y sin embargo*

$$(A^{-1}N_1)^j\left((N_2A^{-1})'\right)^i \not\leq \left((N_2A^{-1})'\right)^{i+j} \quad y \quad (A^{-1}M_1)^j\left((M_2A^{-1})'\right)^i \not\leq \left((M_2A^{-1})'\right)^{i+j}$$

para todo $j \geq 1$ *e* $i \geq 0$*. Para* $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_{34}$ *también tenemos que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *y sin embargo,*

$$\left((N_2A^{-1})'\right)^i(A^{-1}N_1)^j \not\leq \left((N_2A^{-1})'\right)^{i+j} \quad y \quad \left((M_2A^{-1})'\right)^i(A^{-1}M_1)^j \not\leq \left((M_2A^{-1})'\right)^{i+j}.$$

Por lo tanto, el recíproco de la parte (b) *del apartado* (3) *y el recíproco de la parte* (ii) *del apartado* (2) *del teorema 5.14, no son ciertos en general.*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Sea $M_1 = P_{21}$ y $M_2 = P_3$ tenemos que $(N_1A^{-1})(A^{-1}N_2)' \leq ((A^{-1}N_2)')^2$ y para $M_1 = P_{15}$ y $M_2 = P_3$ se satisface $(A^{-1}N_2)'(N_1A^{-1}) \leq ((A^{-1}N_2)')^2$, sin embargo en ambos casos $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$; es decir, la condición de K-irreducibilidad de $A^{-1}N_2$ en la parte (ii) del apartado (2) del teorema 5.15 es necesaria.

Además, para $M_1 = P_5$ y $M_2 = P_{32}$ se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$(N_1A^{-1})^2\left((A^{-1}N_2)'\right)^2 \leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^4, \quad \left((A^{-1}N_2)'\right)^2(N_1A^{-1})^2 \leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^4,$$

sin embargo, $\rho(M_1^{-1}N_1) \not\leq \rho(M_2^{-1}N_2)$, por tanto, la parte (ii) de los apartados (2) y (3) del teorema 5.15 no es cierta para $A = M_2 - N_2$ débil del segundo tipo.

Por otra parte, si consideramos $M_1 = P_{20}$ y $M_2 = P_{30}$ tenemos que

$$(N_1A^{-1})^2 \leq (N_1A^{-1})(A^{-1}N_2)' \quad y \quad (M_1A^{-1})^4 \leq (M_1A^{-1})^2\left((A^{-1}M_2)'\right)^2;$$

para $M_1 = P_{20}$ y $M_2 = P_{24}$ se satisface que

$$(N_1A^{-1})^2 \leq (A^{-1}N_2)'(N_1A^{-1}) \quad y \quad (M_1A^{-1})^2 \leq (A^{-1}M_2)'(M_1A^{-1})^2;$$

sin embargo, para estos casos $N_1A^{-1} \not\leq (A^{-1}N_2)'$.

Para $M_1 = P_{20}$ y $M_2 = P_{22}$ se sigue que $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$, y sin embargo,

$$(N_1A^{-1})^{i+j} \not\leq (N_1A^{-1})^i\left((A^{-1}N_2)'\right)^j \quad y \quad (N_1A^{-1})^{i+j} \not\leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^j(N_1A^{-1})^i.$$

Por lo tanto, los recíprocos del apartado (1) del teorema 5.15 no son ciertos.

Si consideramos $M_1 = P_{20}$ y $M_2 = P_3$ tenemos que $(N_1A^{-1})(A^{-1}N_2)' \leq ((A^{-1}N_2)')^2$ y para $M_1 = P_{32}$ y $M_2 = P_{13}$ se sigue que $(A^{-1}N_2)'(N_1A^{-1}) \leq ((A^{-1}N_2)')^2$; sin embargo, en ambos casos tenemos que $N_1A^{-1} \not\leq (A^{-1}N_2)'$, por tanto, el recíproco de la parte (i) del apartado (2) del teorema 5.15 no es cierto.

Para $M_1 = P_{33}$ y $M_2 = P_3$ se sigue que $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ y sin embargo, para todo $j \geq 1$ y para todo $i \geq 0$ tenemos que $(N_1A^{-1})^j\left((A^{-1}N_2)'\right)^i \not\leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^{i+j}$, así como, para $M_1 = P_8$ y $M_2 = P_{29}$ también se satisface la desigualdad entre los radios espectrales y también para todo $j \geq 1$ y para todo $i \geq 0$ tenemos que $\left((A^{-1}N_2)'\right)^i(N_1A^{-1})^j \not\leq \left((A^{-1}N_2)'\right)^{i+j}$, por tanto, el recíproco de la parte (ii) del apartado (2) no es cierto en general.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Además, para $M_1 = P_{32}$ *y* $M_2 = P_{11}$ *tenemos que* $(M_1A^{-1})^2(A^{-1}M_2)' \leq ((A^{-1}M_2)')^3$ *y* $(A^{-1}M_2)'(M_1A^{-1})^2 \leq ((A^{-1}M_2)')^3$*; sin embargo,* $N_1A^{-1} \not\leq (A^{-1}N_2)'$*, es decir, el recíproco de la parte* (i) *del apartado* (3) *del teorema 5.15 tampoco es cierto.*

Finalmente, de $M_1 = P_{33}$ *y* $M_2 = P_3$ *se sigue que* $\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2)$ *y sin embargo, para todo* $j \geq 1$ *y para todo* $i \geq 0$ *tenemos que* $(M_1A^{-1})^j((A^{-1}M_2)')^i \not\leq ((A^{-1}M_2)')^{i+j}$, $((A^{-1}M_2)')^i(M_1A^{-1})^j \not\leq ((A^{-1}M_2)')^{i+j}$*, es decir, el recíproco de la parte* (ii) *del apartado* (3) *del teorema 5.15 no es cierto.*

Ejemplo 5.6. *Si consideramos la matriz* A *y las particiones* $M_1 = P_1$ *y* $M_2 = P_3$ *del ejemplo 5.2 es fácil comprobar que no se satisfacen los recíprocos de las partes* (iii) *de cada uno de los apartados* (1) *y* (2) *de los teoremas 5.12 y 5.13.*

5.3 Particiones definidas positivas

En las secciones 4.2 y 4.3 hemos establecido condiciones naturales y generales de comparación para particiones débiles no negativas y débiles. Puede observarse que, por regla general, las hipótesis impuestas en los resultados de comparación en los que aparecen condiciones generales suelen ser las mismas que las impuestas en los resultados de comparación en los que aparecen condiciones naturales, o incluso algunas veces hipótesis menos restrictivas. Por otra parte, en la sección anterior, hemos establecido bajo ciertas hipótesis, relaciones entre las condiciones de comparación para particiones no negativas. En dichos resultados, queda de manifiesto la utilidad de las condiciones generales de comparación que, aunque desde el punto de vista práctico sean menos útiles, nos permiten amplian el conjunto de métodos iterativos obtenidos a partir del esquema iterativo secuencial de los cuales podamos comparar sus velocidades de convergencia. Sin embargo, si las hipóteis necesarias para las condiciones de comparación generales son mucho más restrictivas que para las condiciones naturales, y además no existe relación entre las condiciones de comparación naturales y las generales, la utilidad de estas últimas es muy dudosa. A continuación, pondremos de manifiesto que esto es precisamente lo que ocurre con las particiones P-regulares y las débiles definidas no negativas y motivo por el cual no hemos introducido condiciones de comparación generales para dichos tipos de particiones.

Ejemplo 5.7. *Consideremos la matriz y las particiones del ejemplo 4.10. Ahora, si para las mismas particiones bajo las hipótesis del teorema 4.35 consideramos condicio-*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

nes generales análogas a la condición de comparación (4.36) para particiones débiles no negativas, pero con el orden parcial considerado para particiones definidas no negativas, tenemos que

$$0 \preceq (A^{-1}N_2)^2A^{-1} \preceq (A^{-1}N_1)^2A^{-1}$$

y

$$\rho(M_2^{-1}N_2) \leq \rho(M_1^{-1}N_1).$$

Sin embargo, si consideramos la misma matriz A y las particiones $A = M_3 - N_3 = M_4 - N_4$ donde

$$M_3 = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix},$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}, \quad N_4 = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -3 & -15 \end{bmatrix}.$$

Tenemos que también se satisfacen las hipótesis del teorema 4.35 y se satisface la condición

$$0 \preceq (A^{-1}N_3)^2A^{-1} \preceq (A^{-1}N_4)^2A^{-1}$$

sin embargo, las particiones no son P-regulares ni convergentes y además

$$\rho(M_3^{-1}N_3) = 2 > \frac{3}{2} = \rho(M_4^{-1}N_4).$$

Por lo tanto, también hemos puesto de manifiesto en este ejemplo que bajo las hipóteis del teorema 4.35 a parte de la condición de comparación (4.98) y (4.100) no nos son útiles otro tipo de condiciones más generales análogas a las introducidas en las sección 4.2 para particiones débile no negativas.

Ejemplo 5.8. *Consideremos la matriz del ejemplo 3.1 y las particiones débiles defi-*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Volver al índice/Tornar a l'index

nidas no negativas del primer tipo $A = P_k - Q_k$ *para* $k = 1, 2, 3, 4, 5$, *donde*

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{13}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{13}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix} \qquad P_5 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Para $M_1 = P_2$ *y* $M_2 = P_1$ *tenemos que se satisface el apartado* (i) *del teorema 4.36 y sin embargo,*

$$(A^{-1}N_1)^2 \not\preceq (A^{-1}N_2)^2, \quad (A^{-1}N_1)^2 \not\preceq (A^{-1}N_2)(A^{-1}N_1),$$

y $(A^{-1}N_1)(A^{-1}N_2) \not\preceq (A^{-1}N_2)(A^{-1}N_1)$, *que son algunas de las relaciones que en el capítulo siguiente veremos que si se satisfacen para particiones débiles. Por otra parte, si consideramos* $M_1 = P_4$ *y* $M_2 = P_3$ *tenemos que* $(A^{-1}N_1)(A^{-1}N_2) \preceq (A^{-1}N_2)^2$ *y realizando los cáculos oportunos obtenemos que*

$$\rho(M_1^{-1}N_1) = \frac{4}{5} > \frac{3}{4} = \rho(M_2^{-1}N_2),$$

sin embargo, si consideramos $M_1 = P_5$ *y* $M_2 = P_3$ *tenemos que*

$$(A^{-1}N_2)(A^{-1}N_1) \preceq (A^{-1}N_2)^2$$

y en este caso obtenemos que

$$\rho(M_1^{-1}N_1) = \frac{1}{2} < \frac{3}{4} = \rho(M_2^{-1}N_2).$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Capítulo 6

Multiparticiones de matrices

6.1 Introducción

En el desarrollo de este capítulo vamos a considerar el caso particular en el que el espacio vectorial normado es de dimensión finita, concretamente $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{E} = \mathbb{C}^n$ y el cono $K = \mathbb{R}^n_+$.

En los últimos años, el desarrollo de la computación paralela, ha hecho bastante habitual la utilización de algoritmos paralelos para la resolución del sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = \boldsymbol{b}, \tag{6.1}$$

donde A es ahora una matriz no singular, $\boldsymbol{x}$ es el vector de incógnitas y $\boldsymbol{b}$ es un vector dado.

Muchos de los algoritmos paralelos desarrollados y estudiados por autores como Bru, Elsner y Neumann [10], Frommer y Mayer [30], Deren [23], Bru, Migallón y Penadés [13] son casos particulares del esquema iterativo paralelo

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{p} E_l M_l^{-1} N_l \boldsymbol{x}^{(k)} + \sum_{l=1}^{p} E_l M_l^{-1} \boldsymbol{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{6.2}$$

introducido por O'Leary y White [45] a partir del concepto de multipartición (ver defini-

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

ción 2.2). Como hemos visto en la sección 2.3, utilizando la siguiente notación

$$H = \sum_{l=1}^{p} E_l M_l^{-1} N_l \quad \text{y} \quad G = \sum_{l=1}^{p} E_l M_l^{-1} \tag{6.3}$$

el esquema iterativo paralelo (6.2) converge a la única solución $x = A^{-1}b$ del sistema (6.1) para cualquier vector inicial x_0, sí y solo sí, $\rho(H) < 1$. Además, si G es una matriz no singular, la multipartición puede ser expresada como una partición $A = M - N$ con

$$M = G^{-1} \quad \text{y} \quad N = G^{-1} - A = G^{-1}H. \tag{6.4}$$

Notemos, que el estudio de la convergencia del esquema iterativo paralelo (6.2) es más complicado que el estudio de la convergencia del esquema iterativo secuencial (3.2), puesto que, como O'Leary y White [45] ponen de manifiesto, de la convergencia de cada una de las particiones que forman la multipartición no se deduce la convergencia de ésta.

Puesto que, para multiparticiones no se ha desarrollado una teoría general de convergencia y comparación al igual que la desarrollada para particiones, el objeto de este capítulo es introducir nuevos resultados generales de convergencia y de comparación para multiparticiones, que puedan ser utilizados como herramienta para determinar la convergencia de algoritmos concretos, así como para comparar la velocidad entre dos multiparticiones distintas de una misma matriz. En la sección 6.2 utilizando los resultados de convergencia y comparación para particiones no negativas presentados en las secciones 3.2 y 4.2, introduciremos, para matrices no singulares con $A^{-1} \geq 0$, resultados de convergencia y comparación para multiparticiones débiles no negativas del segundo tipo, análogos a los de O'Leary y White [45] y Neumann y Plemmons [44] para multiparticiones débiles no negativas del primer tipo. Además, en la misma sección, utilizando las particiones débiles no negativas del segundo tipo, generalizaremos el resultado de comparación de Elsner [26] e introduciremos nuevas condiciones de comparación para multiparticiones débiles no negativas. Por otra parte, en la sección 6.3 utilizando los resultados de convergencia y comparación para particiones definidas positivas introducidos en las secciones 3.3 y 4.4 introduciremos, para matrices no singulares en general, nuevos resultados de convergencia y comparación para multiparticiones débiles definidas no negativas y para multiparticiones débiles.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

6.2 Multiparticiones débiles no negativas

En primer lugar, recordamos uno de los primeros y pocos resultados generales de convergencia introducido por O'Leary y White [45] para multiparticiones débiles no negativas del primer tipo.

Teorema 6.1 (Teorema 1.a de [45]). *Sea A una matriz no singular con $A^{-1} \geq 0$. Sea $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ una multipartición débil no negativa del primer tipo, entonces*

$$\rho(H) < 1, \tag{6.5}$$

donde H es la matriz definida en (6.3)

Posteriormente, Elsner [26] probó que bajo las hipótesis del teorema anterior, la partición asociada a la multipartición definida en (6.4) también es débil no negativa del primer tipo.

Si en el teorema anterior sustituimos "multipartición débil no negativa del primer tipo" por "multipartición débil no negativa del segundo tipo" el esquema iterativo (6.2) no es convergente, como ponemos de manifiesto en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 6.1. *Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ con $A^{-1} \geq 0$ y las particiones $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ donde*

$$M_1 = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -10 & 15 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} \frac{21}{2} & -7 \\ -9 & \frac{27}{2} \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -40 & 60 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -39 & \frac{117}{2} \end{bmatrix}.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Entonces

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{20} & \frac{2}{25} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{25} \end{bmatrix} > 0 \quad y \quad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{50} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{100} \end{bmatrix} > 0.$$

Además

$$M_1^{-1}N_1 = \begin{bmatrix} \frac{171}{200} & \frac{3}{100} \\ -\frac{3}{100} & \frac{23}{25} \end{bmatrix} \quad y \quad M_2^{-1}N_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{25} & \frac{57}{100} \\ -\frac{57}{100} & \frac{271}{200} \end{bmatrix}.$$

Por tanto, no se trata de particiones débiles no negativas del primer tipo, en cambio, como

$$N_1M_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} \end{bmatrix} \geq 0 \quad y \quad N_2M_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{39}{40} \end{bmatrix} \geq 0$$

tenemos particiones débiles no negativas del segundo tipo. Además, por el teorema 3.6 cada una de las particiones es convergente. Concretamente,

$$\rho(M_1^{-1}N_1) = \frac{9}{10} < 1, \qquad \rho(M_2^{-1}N_2) = \frac{39}{40} < 1$$

Si consideramos

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$H = E_1M_1^{-1}N_1 + E_2M_2^{-1}N_2 = \begin{bmatrix} \frac{171}{200} & \frac{3}{100} \\ -\frac{57}{100} & \frac{271}{200} \end{bmatrix}$$

que no es convergente, puesto que

$$\rho(H) = \frac{547}{415} > 1.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

No obstante, con la condición adicional de que las matrices diagonales E_l, $l = 1, 2, \ldots, p$, sean escalares podemos introducir el siguiente resultado para una multipartición débil no negativa del segundo tipo.

Teorema 6.2. *Sea A una matriz no singular con $A^{-1} \geq 0$. Sea $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ una multipartición débil no negativa del segundo tipo con $E_l = \alpha_l I$, $l = 1, 2, \ldots, p$. Sean H y G las matrices definidas en (6.3). Entonces se satisface la desigualdad (6.5).*

Además, G es no singular y la partición (6.4) es también débil no negativa del segundo tipo.

Demostración. Por el lema 2.1 tenemos que

$$M_l^{-1} N_l A^{-1} = A^{-1} N_l M_l^{-1}, \quad l = 1 \ldots p,$$

por tanto,

$$\sum_{l=1}^{p} E_l M_l^{-1} N_l A^{-1} = \sum_{l=1}^{p} E_l A^{-1} N_l M_l^{-1}.$$

Multiplicando por la izquierda en ambos miembros de la igualdad anterior por A, y teniendo en cuenta que $AE_l = E_l A$, $l = 1, 2, \ldots, p$, tenemos que

$$AHA^{-1} = J \tag{6.6}$$

donde

$$J = \sum_{l=1}^{p} E_l N_l M_l^{-1}. \tag{6.7}$$

Ahora, utilizando que $AM_l^{-1} = I - N_l M_l^{-1}$ y que $E_l A = AE_l$, tenemos que

$$AG = I - J. \tag{6.8}$$

Por otra parte, por ser $G \geq 0$ y $J \geq 0$ de (6.7) tenemos que, para todo entero positivo m

$$0 \leq G(I + J + \cdots + J^m) = A^{-1}(I - J^{m+1}) \leq A^{-1},$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

y por la forma en que se ha definido G (no negativa y ninguna de sus filas es identicamente nula), entonces los elementos de $I + J + \cdots + J^m$ están acotados cuando $m \to \infty$. Por tanto, como $J \geq 0$, la suma anterior converge, es decir, $\lim_{k\to\infty} J^k = 0$, o lo que es equivalente por el teorema 1.8, $\rho(J) < 1$ y por (6.6), $\rho(H) < 1$.

Finalmente, por ser $J \geq 0$ y $\rho(J) < 1$ del teorema 1.9 tenemos que $I - J$ es no singular, y de (6.7) también G es no singular. Por tanto, para la partición (6.4) tenemos que

$$(G^{-1})^{-1} = G \geq 0$$

y

$$(G^{-1} - A)(G^{-1})^{-1} = I - AG = J \geq 0,$$

es decir, es débil no negativa del segundo tipo. ■

Posteriormente, Neumann y Plemmons [44] introducen una nueva forma de abordar el problema de determinar la convergencia del esquema iterativo paralelo (6.2) en $\mathbb{R}^n$, tansformándolo en el siguiente esquema iterativo secuencial en $\mathbb{R}^{pn}$,

$$z^{(k+1)} = \begin{bmatrix} E_1M_1^{-1}N_1 & \cdots & E_pM_p^{-1}N_p \\ E_1M_1^{-1}N_1 & \cdots & E_pM_p^{-1}N_p \\ \vdots & & \vdots \\ E_1M_1^{-1}N_1 & \cdots & E_pM_p^{-1}N_p \end{bmatrix} z^{(k)} + \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{p} E_lM_l^{-1}b \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{p} E_lM_l^{-1}b \end{bmatrix}.$$

Podemos afirmar que los valores propios, sin tener en cuenta las multiplicidades, de la matriz

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} E_1M_1^{-1}N_1 & \cdots & E_pM_p^{-1}N_p \\ E_1M_1^{-1}N_1 & \cdots & E_pM_p^{-1}N_p \\ \vdots & & \vdots \\ E_1M_1^{-1}N_1 & \cdots & E_pM_p^{-1}N_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_1 & \cdots & E_p \\ E_1 & \cdots & E_p \\ \vdots & & \vdots \\ E_1 & \cdots & E_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^{-1}N_1 & & & \\ & M_2^{-1}N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_p^{-1}N_p \end{bmatrix} \qquad (6.9) \end{aligned}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

coinciden con los de la matriz

$$\begin{aligned}
\overline{B} &= \begin{bmatrix} M_1^{-1}N_1 & & & \\ & M_2^{-1}N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_p^{-1}N_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_p \\ E_1 & E_2 & \cdots & E_p \\ \vdots & & & \vdots \\ E_1 & E_2 & \cdots & E_p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M_1^{-1}N_1E_1 & M_1^{-1}N_1E_2 & \cdots & M_1^{-1}N_1E_p \\ M_2^{-1}N_2E_1 & M_2^{-1}N_2E_2 & \cdots & M_2^{-1}N_2E_p \\ \vdots & & & \vdots \\ M_p^{-1}N_pE_1 & M_p^{-1}N_pE_2 & \cdots & M_p^{-1}N_pE_p \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Además, la matriz $\overline{B}$ puede ser considerada como la matriz de iteración $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}$ de la partición

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathcal{M} - \mathcal{N} \\
&= \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_p \\ E_1 & E_2 & \cdots & E_p \\ \vdots & & & \vdots \\ E_1 & E_2 & \cdots & E_p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M_1 - N_1E_1 & -N_1E_2 & \cdots & -N_1E_p \\ -N_2E_1 & M_2 - N_2E_2 & \cdots & -N_2E_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -N_pE_1 & -N_pE_2 & \cdots & M_p - N_pE_p \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

y como ponemos de manifiesto a continuación, su convergencia es necesaria y suficiente para obtener la convergencia del esquema iterativo paralelo (6.2) ya que

$$\begin{aligned}
\rho(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}) &= \rho\left(\begin{bmatrix} M_1^{-1}N_1E_1 & \cdots & M_1^{-1}N_1E_p \\ \vdots & & \vdots \\ M_p^{-1}N_pE_1 & \cdots & M_p^{-1}N_pE_p \end{bmatrix}\right) \\
&= \rho\left(\begin{bmatrix} M_1^{-1}N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_p^{-1}N_p & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & \cdots & E_p \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \rho\left(\begin{bmatrix} E_1 & \cdots & E_p \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^{-1}N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_p^{-1}N_p & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \rho(H).
\end{aligned}$$

Por tanto, para poder establecer la convergencia del esquema iterativo (6.2) Neumann y Plemmons [44] presentan el siguiente resultado.

Teorema 6.3 (Lema 2.1 de [44]). *Para la matriz por bloques $\mathcal{A}$ y la partición (6.11) tenemos que:*

(i) *Si la multipartición $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ es débil no negativa del primer tipo, entonces la partición (6.11) también es débil no negativa del primer tipo,*

(ii) *Si $A^{-1} \geq 0$ y la multipartición $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ es débil no negativa del primer tipo, entonces $\mathcal{A}^{-1} \geq 0$.*

Finalmente, como consecuencia directa del lema anterior y del teorema 3.6 obtenemos de nuevo el teorema 6.1, pero ahora mediante una técnica distinta.

A continuación, vamos a ver que también podemos demostrar el teorema 6.2 utilizando la técnica de Neumann y Plemmons [44]. Para ello, a partir de la multipartición débil

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

no negativa del segundo tipo $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$, planteamos el siguiente esquema iterativo secuencial en $\mathbb{R}^{pn}$

$$z^{(k+1)} = \begin{bmatrix} E_1(M_1^{-1})^T N_1^T & \cdots & E_p(M_p^{-1})^T N_p^T \\ E_1(M_1^{-1})^T N_1^T & \cdots & E_p(M_p^{-1})^T N_p^T \\ \vdots & & \vdots \\ E_1(M_1^{-1})^T N_1^T & \cdots & E_p(M_p^{-1})^T N_p^T \end{bmatrix} z^k + \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{p} E_l(M_l^{-1})^T b \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{p} E_l(M_l^{-1})^T b \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

Podemos afirmar, como en el caso anterior, que los valores propios, sin tener en cuenta las multiplicidades, de la matriz

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} E_1(M_1^{-1})^T N_1^T & \cdots & E_p(M_p^{-1})^T N_p^T \\ E_1(M_1^{-1})^T N_1^T & \cdots & E_p(M_p^{-1})^T N_p^T \\ \vdots & & \vdots \\ E_1(M_1^{-1})^T N_1^T & \cdots & E_p(M_p^{-1})^T N_p^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_1 & \cdots & E_p \\ E_1 & \cdots & E_p \\ \vdots & \cdots & E_p \\ E_1 & \cdots & E_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M_1^{-1})^T N_1^T & & & \\ & (M_2^{-1})^T N_2^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & (M_p^{-1})^T N_p^T \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

coinciden con los de la matriz

$$\begin{aligned} \overline{C} &= \begin{bmatrix} (M_1^{-1})^T N_1^T & & & \\ & (M_2^{-1})^T N_2^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & (M_p^{-1})^T N_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_p \\ E_1 & E_2 & \cdots & E_p \\ \vdots & & & \vdots \\ E_1 & E_2 & \cdots & E_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (M_1^{-1})^T N_1^T E_1 & \cdots & (M_1^{-1})^T N_1^T E_p \\ \vdots & & \vdots \\ (M_p^{-1})^T N_p^T E_1 & \cdots & (M_p^{-1})^T N_p^T E_p \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Es fácil ver ahora que la matriz $\overline{C}$ puede considerarse como la matriz de iteración $\overline{\mathcal{M}}^{-1}\,\overline{\mathcal{N}}$ de la partición

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \hat{\mathcal{M}} - \hat{\mathcal{N}} \\
&= \begin{bmatrix} M_1^T & & & \\ & M_2^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_p^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_1^T & & & \\ & N_2^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_p \\ E_1 & E_2 & \cdots & E_p \\ \vdots & & & \vdots \\ E_1 & E_2 & \cdots & E_p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M_1^T - N_1^T E_1 & -N_1^T E_2 & \cdots & -N_1^T E_p \\ -N_2^T E_1 & M_2^T - N_2^T E_2 & \cdots & -N_2^T E_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -N_p^T E_1 & -N_p^T E_2 & \cdots & M_p^T - N_p^T E_p \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

y como ponemos de manifiesto seguidamente, su convergencia es necesaria y suficiente para obtener la convergencia del esquema iterativo paralelo (6.2) ya que

$$\begin{aligned}
\rho(\hat{\mathcal{M}}^{-1}\hat{\mathcal{N}}) &= \rho\left(\begin{bmatrix} (M_1^{-1})^T N_1^T E_1 & \cdots & (M_1^{-1})^T N_1^T E_p \\ \vdots & & \vdots \\ (M_p^{-1})^T N_p^T E_1 & \cdots & (M_p^{-1})^T N_p^T E_p \end{bmatrix}\right) \\
&= \rho\left(\begin{bmatrix} (M_1^{-1})^T N_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (M_p^{-1})^T N_p^T & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & \cdots & E_p \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \rho\left(\begin{bmatrix} E_1 & \cdots & E_p \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M_1^{-1})^T N_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (M_p^{-1})^T N_p^T & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \rho(J^T) \\
&= \rho(J) \\
&= \rho(H)
\end{aligned}$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

puesto que $N_l M_l^{-1} E_l = E_l N_l M_l^{-1}$ para $l = 1, 2 \ldots, p$ y J es la matriz definida en (6.6).

Por otra parte, si tenemos la multipartición $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ débil no negativa del segundo tipo con $E_l = \alpha_l I$ para $l = 1, 2, \ldots, p$, entonces

$$\{M_l^T, N_l^T, E_l\}_{l=1}^{p}, \tag{6.15}$$

es una multipartición de A^T, donde cada una de la particiones satisface las condiciones:

$$(M_l^T)^{-1} = (M_l^{-1})^T \geq 0 \quad \text{y} \quad (M_l^T)^{-1} N_l^T = (N_l M_l^{-1})^T \geq 0,$$

es decir, la multipartición (6.15) es débil no negativa del primer tipo. Por tanto, por el teorema 6.3 la partición (6.14) es débil del primer tipo y como $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \geq 0$, en este caso $\hat{A}$ también es monótona. Entonces por el teorema 3.6, $\rho(J) < 1$.

Notemos, que utilizando dos técnicas distintas hemos llegado al mismo resultado, a diferencia que utilizando la primera técnica, en ambos casos la partición asociada a la multipartición era del mismo tipo, sin embargo, al utililizar la segunda técnica, en el caso en el que la multipartición es débil no negativa del segundo tipo, la partición construida es débil no negativa del primer tipo.

Establecer resultados de comparación para multiparticiones también es más complicado que establecerlos para particiones. Neumann y Plemmons [44] introducen un resultado de comparación para multiparticiones débiles no negativas del primer tipo, pero bajo condiciones muy restrictivas y haciendo uso de una norma determinada. Sin embargo, Elsner [26] sin necesidad de condiciones excepcionales, establece cotas superiores e inferiores del radio espectral de la matriz de iteración de la multipartición. Presentamos a continuación la siguiente extensión de dicho resultado, utilizando el teorema 4.7 en lugar del Lema de Elsner [26].

Teorema 6.4. *Sea A una matriz no singular con $A^{-1} \geq 0$. Sea $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ una multipartición débil no negativa del primer tipo y $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ dos particiones débiles no negativas del segundo tipo. Si*

$$\underline{M} \leq M_l \leq \overline{M} \quad \textit{para } l = 1, 2, \ldots, p, \tag{6.16}$$

entonces

$$\rho(\underline{M}^{-1}\underline{N}) \leq \rho(H) \leq \rho(\overline{M}^{-1}\overline{N}) < 1, \tag{6.17}$$

donde H es la matriz definida en (6.3).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Demostración. Por el teorema 6.1 la multipartición es convergente y también sabemos que la partición (6.4) es débil no negativa del primer tipo. Por otra parte, de (6.16) tenemos que

$$\underline{M}^{-1} \geq \sum_{l=1}^{p} E_l M_l^{-1} \geq \overline{M}^{-1},$$

o lo que es equivalente,

$$\underline{M}^{-1} \geq G \geq \overline{M}^{-1},$$

y por el teorema 4.7 se satisface la desigualdad (6.17). ■

Observación 6.1. *El teorema 6.4 también se satisface si reemplazamos "primer tipo" por "segundo tipo" para la multipartición y "segundo tipo" por "primer tipo" para las particiones, con la hipótesis adicional de $E_l = \alpha_l I$ para $l = 1, 2, \ldots, p$.*

Siguiendo la misma línea, presentamos el siguiente resultado en el que también establecemos cotas superiores e inferiores para el caso en el que la multipartición y las particiones son del mismo tipo.

Teorema 6.5. *Sea A una matriz no singular con $A^{-1} \geq 0$. Sea $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ una multipartición débil no negativa del primer tipo y $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ dos particiones débiles no negativas.*

(i) *Si $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ son del primer tipo y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(a) $\overline{M}^{-1}A \leq M_l^{-1}A \leq \underline{M}^{-1}A$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$,

(b) $(\overline{M}^{-1}A)^T \leq M_l^{-1}A \leq (\underline{M}^{-1}A)^T$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

Entonces, se satisface la desigualdad (6.17) donde H es la matriz definida en (6.3).

(ii) *Si $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ son del segundo tipo y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(a) $A\overline{M}^{-1} \leq M_l^{-1}A \leq A\underline{M}^{-1}$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

(b) $(\overline{M}^{-1}A)^T \leq M_l^{-1}A \leq (\underline{M}^{-1}A)^T$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Entonces, se satisface la desigualdad (6.17) donde H es la matriz definida en (6.3).

Demostración. Por el teorema 6.1 la multipartición es convergente.

(i) Por el teorema 3.6 las particiones $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ son convergentes. Supongamos que se satisface la condición (a) entonces

$$\overline{M}^{-1} A \leq \sum_{l=1}^{p} E_l M_l^{-1} A \leq \underline{M}^{-1} A.$$

Ahora, utilizando que $M^{-1}N = I - M^{-1}A$ y que igualdades análogas se satisfacen para todas las particiones, tenemos que

$$\overline{M}^{-1}\overline{N} \geq H \geq \underline{M}^{-1}\underline{N},$$

de donde se sigue la desigualdad (6.17).

Si se satisface la condición (b), entonces mediante un razonamiento análogo y teniendo en cuenta que $\rho(B) = \rho(B^T)$ también obtenemos que se satisface la desigualdad (6.17).

(ii) Por el teorema 3.7 las particiones $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ son convergentes. Ahora, mediante un razonamiento análogo al anterior llegamos a que

$$\rho(\overline{N}\,\overline{M}^{-1}) \geq \rho(H) \geq \rho(\underline{N}\,\underline{M}^{-1})$$

que es equivalente a la desigualdad (6.17). ■

Si en el teorema anterior consideramos la multipartición $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ débil no negativa del segundo tipo con la condición adicional $E_l = \alpha_l I$ para $l = 1, 2, \ldots, p$, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.6. *Sea A una matriz no singular con $A^{-1} \geq 0$. Sea $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ una multipartición débil no negativa del segundo tipo con $E_l = \alpha_l I$ para $l = 1, 2, \ldots, p$ y sean $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ dos particiones débiles no negativas.*

(i) *Si $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ son del primer tipo y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

(a) $\overline{M}^{-1}A \leq AM_l^{-1} \leq \underline{M}^{-1}A$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

(b) $(\overline{M}^{-1}A)^T \leq AM_l^{-1} \leq (\underline{M}^{-1}A)^T$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

Entonces, se satisface la desigualdad (6.17) donde H *es la matriz definida en (6.3).*

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

(ii) *Si* $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ *son del segundo tipo y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(a) $A\overline{M}^{-1} \leq AM_l^{-1} \leq A\underline{M}^{-1}$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

(b) $(\overline{M}^{-1}A)^T \leq AM_l^{-1} \leq (\underline{M}^{-1}A)^T$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

Entonces, se satisface la desigualdad (6.17) donde H *es la matriz definida en (6.3).*

Demostración. Por el teorema 6.2 la multipartición es convergente.

(i) Mediante un razonamiento análogo al del apartado (i) del teorema 6.5 llegamos a que

$$\rho(\overline{M}^{-1}\overline{N}) \geq \rho(J) \geq \rho(\underline{M}^{-1}\underline{N})$$

que es equivalente a la desigualdad (6.17), donde J es la matriz definida en (6.6).

(ii) Mediante un razonamiento análogo al del apartado (ii) obtenemos que

$$\rho(\overline{N}\,\overline{M}^{-1}) \geq \rho(J) \geq \rho(\underline{N}\,\underline{M}^{-1})$$

que también es equivalente a la desigualdad (6.17). ∎

En el apartado (i) del teorema 6.5 y el apartado (ii) del teorema 6.6, al ser la multipartición y las particiones del mismo tipo, nos permiten acotar superiormente (respectivamente, inferiormente) el radio espectral de la multipartición por el mayor (respectivamente, menor) de los radios espectrales de entre las particiones que forman la multipartición, es decir, podemos considerar $A = \underline{M} - \underline{M} = M_m - N_m$ donde

$$\rho(M_m^{-1}N_m) = \min\{\rho(M_l^{-1}N_l)\}_{l=1}^{p}$$

y $A = \overline{M} - \overline{M} = M_n - N_n$ donde

$$\rho(M_n^{-1}N_n) = \max\{\rho(M_l^{-1}N_l)\}_{l=1}^{p}.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

6.3 Multiparticiones definidas positivas

En primer lugar, al igual que en la sección anterior, empezamos recordando el siguiente resultado de O'Leary y White [45] para multiparticiones P-regulares de una matriz definida positiva.

Teorema 6.7 (Teorema 1.b de [45]). *Sea A una matriz definida positiva y consideremos $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ una multipartición P-regular con $E_l = \alpha_l I$ para $l = 1, 2, \dots, p$, entonces se satisface la desigualdad (6.5) donde H es la matriz definida en (6.3).*

Posteriormente Nabben [41, Teorema 3.2] probó que la partición (6.4) asociada a la multipartición es también P–regular.

Notemos, que en el teorema anterior, a diferencia del teorema 6.1 para multiparticiones débiles no negativas del primer tipo, y al igual que en el teorema 6.2 para particiones débiles no negativas del segundo tipo, aparece la condición adicional de $E_l = \alpha_l I$ para $l = 1, 2, \dots, p$. Desafortunadamente, en todos los resultados que introduzcamos en esta sección aparecerá dicha hipótesis.

A continuación, introducimos el siguiente resultado de convergencia para multiparticiones débiles definidas no negativas.

Teorema 6.8. *Sean A una matriz no singular y $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ una multipartición débil definida no negativa del primer tipo con $E_l = \alpha_l I$ para $l = 1, 2, \dots, p$. Consideremos las matrices H y G definidas en (6.3). Si cada una de las particiones $A = M_l - N_l$ es convergente para $l = 1, 2, \dots, p$. Entonces se satisface la desigualdad (6.5).*

Además, la partición (6.4) es también débil definida no negativa del primer tipo.

Demostración. Por el teorema 3.10, $A^{-1}M_l \succ 0$ para $l = 1, 2, \dots, p$ con lo que

$$\sum_{l=1}^{p} E_l A^{-1} M_l \succ 0$$

y por tanto, $\sum_{l=1}^{p} E_l A^{-1} M_l$ es una matriz no singular.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Utilizando que $E_lA^{-1} = A^{-1}E_l$, podemos escribir la matriz G como

$$G = A\sum_{l=1}^{p} E_lA^{-1}M_l$$

de donde G es no singular.

Por otra parte,

$$(G^{-1})^{-1}(G^{-1} - A) = H \succeq 0$$

por que la multipartición es débil definida no negativa del primer tipo y $E_l = \alpha_l I$, para $l = 1, 2, \ldots, p$. Por tanto, la partición (6.4) es también débil definida no negativa del primer tipo. Finalmente,

$$GA = \sum_{l=1}^{p} E_lM_l^{-1}A \succ 0$$

porque $M_l^{-1}A \succ 0$ para $l = 1, 2, \ldots, p$. Entonces $A^{-1}G^{-1} = (GA)^{-1} \succ 0$ y por el teorema 3.10, se satisface la desigualdad (6.5). ∎

Observación 6.2. *El teorema 6.8 también es cierto si cambiamos "primer tipo" por "segundo tipo". La demostración es análoga a la de dicho teorema, teniendo en cuenta que, por el teorema 3.11, $M_lA^{-1} \succ 0$ para $l = 1, 2, \ldots, p$.*

Notemos que el teorema 6.8 y la observación 6.2 son los primeros resultados de convergencia para multiparticiones en los que no se exige ninguna condición adicional a la matriz A, excepto la de ser no singular.

Recientemente, Nabben [41] establece el siguiente resultado de comparación para multiparticiones P–regulares con la misma estructura que el teoema 6.4 para multiparticiones débiles no negativas, a diferencia del orden parcial utilizado.

Teorema 6.9 (Teorema 3.3 de [41]). *Sean $A \succ 0$ y $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^{p}$ una multipartición donde cada $N_l \succ 0$ y $E_l = \alpha_l I$, para $l = 1, 2, \ldots, p$. Consideremos la matriz H definida en (6.3). Además, sean $A = \underline{M} - \underline{N} = \overline{M} - \overline{N}$ dos particiones tales que $\underline{M} \succ 0$ y $\overline{M} \succ 0$ y*

$$\underline{M} \preceq M_l \preceq \overline{M}, \quad para\ l = 1, 2, \ldots, p.$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Si $\underline{N} \succ 0$, *entonces*

$$\rho(\underline{M}^{-1}\underline{N}) \leq \rho(H).$$

Si $\overline{N} \succ 0$, *entonces*

$$\rho(H) \leq \rho(\overline{M}^{-1}\overline{N}).$$

Siguiendo la misma línea, nosotros introducimos los siguientes resultados de comparación para multiparticiones débiles definidas no negativas con la misma estructura que los teoremas 6.5 y 6.6 para multiparticiones débiles no negativas.

Teorema 6.10. *Sean* A *una matriz no singular y* $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^p$ *una multipartición débil no negativa del primer tipo con* $E_l = \alpha_l I$, *para* $l = 1, 2, \ldots, p$. *Sean* $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ *dos particiones débiles definidas no negativas.*

(i) *Si* $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ *son del primer tipo y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(a) $0 \prec \overline{M}^{-1}A \preceq M_l^{-1}A \preceq \underline{M}^{-1}A$, *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

(b) $0 \prec (\overline{M}^{-1}A)^T \prec M_l^{-1}A \prec (\underline{M}^{-1}A)^T$, *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

Entonces se satisface la desigualdad (6.17) donde H *es la matriz definida en (6.3).*

(ii) *Si* $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ *son del segundo tipo y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(a) $0 \prec A\overline{M}^{-1} \preceq M_l^{-1}A \preceq A\underline{M}^{-1}$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

(b) $0 \prec (A\overline{M}^{-1})^T \preceq M_l^{-1}A \preceq (A\underline{M}^{-1})^T$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

Entonces se satisface la desigualdad (6.17) donde H *es la matriz definida en (6.3).*

Demostración. Por el teorema 6.8 la multipartición es convergente.

(i) Por el teorema 3.10 las particiones también son convergentes. Supongamos que se satisface la condición (a) entonces tenemos que

$$\overline{M}^{-1}A \preceq \sum_{l=1}^{p} E_l M_l^{-1}A \preceq \underline{M}^{-1}A,$$

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

utilizando que $\overline{M}^{-1}A = I - \overline{M}^{-1}\overline{N}$ y que igualdades análogas se satisfacen para cada una de las particiones tenemos que

$$I - \overline{M}^{-1}\overline{N} \preceq I - H \preceq I - \underline{M}^{-1}\underline{N}.$$

Ahora por el teorema 1.15 obtenemos la desigualdad (6.17). Si suponemos que se satisface la condición (b), entonces mediante un razonamiento análogo al anterior, se obtiene la desigualdad (6.17) teniendo en cuenta ahora que $\rho(B) = \rho(B^T)$.

(ii) Por el teorema 3.11 las particiones son convergentes. Mediante un razonamiento análogo al del apartado anterior obtenemos que

$$\rho(\underline{N}\,\underline{M}^{-1}) \leq \rho(H) \leq \rho(\overline{N}\,\overline{M}^{-1}),$$

que es equivalente a la desigualdad (6.17). ■

Si en el teorema anterior consideramos la multipartición débil definida no negativa del segundo tipo, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.11. *Sean A una matriz no singular y $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^p$ una multipartición débil no negativa del segundo tipo con $E_l = \alpha_l I$, para $l = 1, 2, \ldots, p$. Sea $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ dos particiones débiles definidas no negativas.*

(i) *Si $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ son del primer tipo y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

  (a) $0 \prec \overline{M}^{-1}A \preceq AM_l^{-1} \preceq \underline{M}^{-1}A$, *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

  (b) $0 \prec (\overline{M}^{-1}A)^T \prec AM_l^{-1} \prec (\underline{M}^{-1}A)^T$, *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

  Entonces se satisface la desigualdad (6.17) donde H es la matriz definida en (6.3).

(ii) *Si $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ son del segundo tipo y se satisface alguna de las condiciones siguientes*

  (a) $0 \prec A\overline{M}^{-1} \preceq AM_l^{-1} \preceq A\underline{M}^{-1}$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

  (b) $0 \prec (A\overline{M}^{-1})^T \preceq AM_l^{-1} \preceq (A\underline{M}^{-1})^T$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

  Entonces se satisface la desigualdad (6.17) donde H es la matriz definida en (6.3).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Demostración. Por la observación 6.2 la multipartición es convergente. Ahora mediante un razonamiento análogo al seguido en el teorema 6.10 obtenemos en el apartado (i) la desigualdad

$$\rho(\underline{M}^{-1}\underline{N}) \leq \rho(J) \leq \rho(\overline{M}^{-1}\overline{N})$$

donde J es la matriz definida en (6.6), y como $\rho(J) = \rho(H)$ tenemos la desigualdad (6.17). En el apartado (ii) llegamos a la desigualdad

$$\rho(\underline{N}\underline{M}^{-1}) \leq \rho(J) \leq \rho(\underline{N}\overline{M}^{-1}),$$

de donde también se obtiene la desigualdad (6.17). ■

Para terminar, utilizando el teorema 3.12 introducimos resultados de convergencia para multiparticiones débiles de una matriz no singular y real positiva.

Teorema 6.12. *Sean A una matriz no singular real positiva y $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^p$ una multipartición débil con $E_l = \alpha_l I$ para $l = 1, 2, \ldots, p$. Consideremos las matrices H y G definidas en (6.3). Si M_l para $l = 1, 2, \ldots, p$ son matrices reales y reales positivas, entonces se satisface la desigualdad (6.5). Además, la partición (6.4) es del mismo tipo que la multipartición y G^{-1} es real positiva.*

Demostración. Por ser M_l reales y reales positivas y $E_l = \alpha_l I$ tenemos que G es una matriz no singular, por tanto, podemos considerar la partición (6.4) asociada a la multipartición, donde si la multipartición es débil del primer tipo H es una matriz no negativa y si la multipartición es del segundo tipo J, definida en (6.6), es una matriz no negativa. Entonces, en ambos caso por el teorema 3.12 tenemos que la partición asociada a la multipartición es convergente, es decir, se satisface la desigualdad (6.5). ■

El teorema anterior nos permite establecer los resultados siguientes de comparación para multiparticiones débiles, análogos a los teorema 6.5 y 6.6. Las demostraciones también se realizan mediante razonamientos análogos a los llevados a cabo en dichos teoremas, teniendo en cuenta que por el teorema 6.12 la multipartición es convergente.

Teorema 6.13. *Sea A una matriz no singular real positiva. Sea $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^p$ una multipartición débil del primer tipo con M_l reales y reales positivas y $E_l = \alpha_l I$ para $l = 1, 2, \ldots, p$. Sean $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ dos particiones débiles convergentes.*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Volver al índice/Tornar a l'index

(i) *Si* $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ *son del primer tipo y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(a) $\overline{M}^{-1}A \leq M_l^{-1}A \leq \underline{M}^{-1}A$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

(b) $(\overline{M}^{-1}A)^T \leq M_l^{-1}A \leq (\underline{M}^{-1}A)^T$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

Entonces, se satisface la desigualdad (6.17) donde H *es la matriz definida en (6.3).*

(ii) *Si* $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ *son del segundo tipo y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(a) $A\overline{M}^{-1} \leq M_l^{-1}A \leq A\underline{M}^{-1}$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

(b) $(\overline{M}^{-1}A)^T \leq M_l^{-1}A \leq (\underline{M}^{-1}A)^T$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

Entonces, se satisface la desigualdad (6.17) donde H *es la matriz definida en (6.3).*

Teorema 6.14. *Sean* A *una matriz no singular real positiva. Sea* $\{M_l, N_l, E_l\}_{l=1}^p$ *una multipartición débil del segundo tipo con* M_l *reales y reales positivas y* $E_l = \alpha_l I$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$. *Sean* $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ *dos particiones débiles convergentes.*

(i) *Si* $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ *son del primer tipo y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(a) $\overline{M}^{-1}A \leq AM_l^{-1} \leq \underline{M}^{-1}A$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

(b) $(\overline{M}^{-1}A)^T \leq AM_l^{-1} \leq (\underline{M}^{-1}A)^T$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

Entonces, se satisface la desigualdad (6.17) donde H *es la matriz definida en (6.4).*

(ii) *Si* $A = \overline{M} - \overline{N} = \underline{M} - \underline{N}$ *son del segundo tipo y se satisface alguna de las condiciones siguientes:*

(a) $A\overline{M}^{-1} \leq AM_l^{-1} \leq A\underline{M}^{-1}$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

(b) $(\overline{M}^{-1}A)^T \leq AM_l^{-1} \leq (\underline{M}^{-1}A)^T$ *para* $l = 1, 2, \ldots, p$.

Entonces, se satisface la desigualdad (6.17) donde H *es la matriz definida en (6.3).*

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Apéndice A

Líneas futuras

Los resultados de convergencia y comparación introducidos en esta memoria para el esquema iterativo secuencial (3.2) y para el esquema iterativo paralelo (6.2), al igual que los resultados de convergencia y comparación hasta ahora conocidos, constituyen una herramienta considerable en el estudio de la convergencia y comparación de los diversos métodos iterativos obtenidos a partir de dichos esquemas iterativos. En particular, Lanzkron, Rose y Szyld [36] y Benzi y Szyld [5] utilizan como herramienta fundamental los resultados de convergencia y comparación para particiones débiles no negativas del primer tipo de matrices monótonas y los resultados para particiones particiones P-regulares de matrices definidas positivas, para establecer condiciones de convergencia y comparación para los métodos iterativos en dos etapas y anidados y para el método iterativo (2.6), respectivamente. Esto nos sugiere abordar el problema de determinar nuevas condiciones de convergencia y comparación para dichos métodos iterativos utilizando los resultados introducidos en esta memoria para particiones débiles no negativas del segundo tipo y los resultados obtenidos para las particiones débiles definidas no negativas.

Por otra parte, desde una perspectiva más teórica, en el desarrollo de esta memoria hemos podido observar y además hemos realizado algunos comentarios al respecto, que algunos de los resultados presentados para particiones no negativas y los introducidos para particiones definidas positivas tienen la misma estructura, diferenciándose únicamente en el orden parcial utilizado en cada caso, es decir, "$\leq$" y "$\preceq$", respectivamente. Por lo tanto, esto motiva la realización de un estudio en el que se determine qué condiciones son intrínsecas del orden parcial, independientemente de las características de los operadores

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Volver al índice/Tornar a l'index

con los que estemos trabajando.

Finalmente, otro problema pendiente de abordar sería la generalización de los resultados introducidos para multiparticiones no negativas, en primer lugar utilizando el orden parcial inducido por un cono normal cualquiera K y posteriormente, generalizar dichos resultados junto con los introducidos para multiparticiones definidas positivas a espacios de dimensión infinita, siguiendo una línea similar a la de Frommer [29].

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Bibliografía

[1] G. ALEFELD Y P. VOLKMANN. Regular splittings and monotone iteration functions. *Numerische Mathematik*, **46**: 213–228 (1985).

[2] E.O. AMEDJOE. Splitting and multisplitting of matrices. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestensis, Sectio Computatorica*, **13**: 195–224 (1992).

[3] Z.-Z. BAI. Parallel multisplitting two-stage iterative methods for large sparse systems of weakl nonlinear equations. Preprint, August 1997.

[4] R. BEAUWENS. Factorization iterative methods, M–operators and H–operators. *Numerische Mathematik*, **31**: 335–357 (1979).

[5] M. BENZI Y D.B. SZYLD. Existence and uniqueness of splitting for stationary iterative methods with applications to alternating methods. *Numerische Mathematik*, **76**: 309–321 (1997).

[6] A. BERMAN Y M. NEUMANN. Consistency and splittings. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **13**: 877–888 (1976).

[7] A. BERMAN Y R.J. PLEMMONS. Cones and iterative methods for best least squares solutions of linear systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **11**: 145–154 (1974).

[8] A. BERMAN Y R.J. PLEMMONS. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, New York, 1979. Reprinted by SIAM. Philadelphia, PA, 1994.

[9] A. BROWN Y C. PEARCY. *Introduction to Operator Theory I.* Springer–Verlag, New York, NY, 1977.

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

[10] R. Bru, L. Elsner y M. Neumann. Models of parallel chaotic iteration methods. *Linear Algebra and its Applications*, **103**: 175–192 (1988).

[11] R. Bru, L. Elsner y M. Neumann. Convergence of infinite products of matrices and inner–outer iteration schemes. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **2**: 183–193 (1994).

[12] R. Bru, V. Migallón y J. Penadés. Chaotic inner–outer iterative schemes. En J.G. Lewis, (editor), *Proceedings of the Fifth SIAM Conference on Applied Linear Algebra*, pp. 434–438. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[13] R. Bru, V. Migallón y J. Penadés. Chaotic methods for the parallel solution of linear systems. *Computing Systems in Engineering*, **6**: 385–390 (1995).

[14] S.L. Campbell y G.D. Poole. Convergent regular splittings for nonnegative matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **10**: 63–73 (1981).

[15] J.-J. Climent y C. Perea. Some comparison theorems for weak nonnegative splittings of matrices. Reserarch Report DTIC–96–06. Departamento de Tecnología Informática y Computación, Universidad de Alicante. Julio de 1996.

[16] J.-J. Climent y C. Perea. General comparison theorems for splittings of nonsingular matrices. En F.J. Cobos, J.R. Gómez y F. Mateos (editores), *Actas del 3er Encuentro de Análisis Matricial y Aplicaciones EAMA'97*, pp. 164–168. Sevilla, 1997.

[17] J.-J. Climent y C. Perea. On weak nonnegative splittings of monotone matrices. En F.J. Cobos, J.R. Gómez y F. Mateos (editores), *Actas del 3er Encuentro de Análisis Matricial y Aplicaciones EAMA'97*, pp. 169–175. Sevilla, 1997.

[18] J.-J. Climent y C. Perea. Some comparison theorems for weak nonnegative splittings of bounded operators. Aceptado para su publicación en *Linear Algebra and its Applications*.

[19] J.-J. Climent y C. Perea. Comparison theorems for weak nonnegative splittings of bounded operators with nonnegative inverse. Sometido para su publicación.

[20] J.-J. Climent y C. Perea. Convergence and comparison theorems for multisplittings. Reserarch Report DTIC–97–08. Departamento de Tecnología Informática

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

y Computación, Universidad de Alicante. Septiembre de 1997. Sometido para su publicación.

[21] J.-J. CLIMENT Y C. PEREA. General comparison theorems for splittings of nonsingular bounded operators. Sometido para su publicación.

[22] G. CSORDAS Y R. VARGA. Comparisons of regular splittings of matrices. *Numerische Mathematik*, **44**: 23–35 (1984).

[23] W. DEREN. On the convergence of the parallel multisplitting AOR algorithm. *Linear Algebra and its Applications*, **154/156**: 473–486 (1991).

[24] N. DUNFORD Y J.T. SCHWARTZ. *Linear Operators. Part I: General Theory.* John Wiley & Sons, New York, NY, 1988.

[25] N. DUNFORD Y J.T. SCHWARTZ. *Linear Operators. Part II: Spectral Theory.* John Wiley & Sons, New York, NY, 1988.

[26] L. ELSNER. Comparisons of weak regular splittings and multisplitting methods. *Numerische Mathematik*, **56**: 283–289 (1989).

[27] L. ELSNER, I. KOLTRACHT Y M. NEUMANN. On the convergence of asynchronous paracontractions with application to tomographic reconstruction from incomplete data. *Linear Algebra and its Applications*, **130**: 65–82 (1990).

[28] L. ELSNER Y M. NEUMANN. Monotonic sequences and rates of convergence of asynchronized iterative methods. *Linear Algebra and its Applications*, **180**: 17–33 (1993).

[29] A. FROMMER. Convergence of relaxed parallel multisplitting methods. *Linear Algebra and its Applications*, **119**: 141–152 (1989).

[30] A. FROMMER Y G. MAYER. On asynchronous iterations in partially ordered spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **12**: 315–325 (1991).

[31] A. FROMMER Y G. MAYER. On the theory and practice of multisplitting methods in parallel computation. *Computing*, **49**: 63–74 (1992).

[32] A. FROMMER Y D.B. SZYLD. Asynchronous two-stage iterative methods. *Numerische Mathematik*, **69**: 141–153 (1994).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

[33] F. John. *Advanced Numerical Analysis.* Lecture notes, New York University, 1956.

[34] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators (Second Edition).* Springer Verlag, Berlin, 1984.

[35] M.G. Kreĭn y M.A. Rutman. *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space.* Translation Number 26. American Mathematical Society, New York, NY, 1950.

[36] P.J. Lanzkron, D.J. Rose y D.B. Szyld. Convergence of nested classical iterative methods for linear systems. *Numerische Mathematik*, **58**: 685–702 (1991).

[37] O.L. Mangasarian. A convergent splitting of matrices. *Numerische Mathematik*, **15**: 351–353 (1970).

[38] I. Marek y D.B. Szyld. Comparison theorems for weak splittings of bounded operators. *Numerische Mathematik*, **58**: 389–397 (1990).

[39] I. Marek y R.S. Varga. Nested bounds for the spectral radius. *Numerische Mathematik*, **14**: 49–70 (1969).

[40] V.A. Miller y M. Neumann. A note on comparison theorems for nonnegative matrices. *Numerische Mathematik*, **47**: 427–434 (1985).

[41] R. Nabben. A note on comparison theorems for splittings and multisplittings of Hermitian positive definite matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **233**: 67–80 (1996).

[42] M. Neumann y R.J. Plemmons. Convergent nonnegative matrices and iterative methods for consistent linear systems. *Numerische Mathematik*, **31**: 265–279 (1978).

[43] M. Neumann y R.J. Plemmons. Generalized inverse–positivity and splittings of M–matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **23**: 21–35 (1979).

[44] M. Neumann y R.J. Plemmons. Convergence of parallel multisplitting iterative methods for M–matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **88/89**: 559–573 (1987).

[45] D.P. O'Leary y R.E. White. Multi–splittings of matrices and parallel solution of linear systems. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, **6**: 630–640 (1985).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

[46] J.M. ORTEGA. *Numerical Analysis, A Second Course.* Classics in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, PA, 1990.

[47] J.M. ORTEGA Y W. RHEINBOLD. Monotone iterations for nonlinear equations with applications to Gauss–Seidel methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **4**: 171–190 (1967).

[48] R.J. PLEMMONS. Regular splittings and the discrete Neumann problem. *Numerische Mathematik*, **25**: 153–161 (1976).

[49] Y.S. RODITIS Y P.D. KIOUSIS. Parallel multisplitting, block Jacobi type solutions of linear systems of equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29**: 619–632 (1990).

[50] D.J. ROSE. Convergent regular splittings for singular M–matrices. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, **5**: 133–144 (1984).

[51] Y. SONG. The monotone convergence of splitting of matrices. *Mathematical Applications*, **2**: 31–36 (1989).

[52] Y. SONG. Comparisons of nonnegative splittings of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **154/156**: 433–455 (1991).

[53] Y. SONG. Some comparison theorems for nonnegative splittings of matrices. *Numerische Mathematik*, **65**: 245–252 (1993).

[54] D. SZYLD Conditions for the existence of a balanced growth solution for the Leontief dynamic input-output model. *Econometrica*, **53**:, 1411–1419 (1985).

[55] D.B. SZYLD Y M.T. JONES. Two–stage and multisplitting methods for the parallel solution of linear systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **13**: 671–679 (1992).

[56] R.S. VARGA. *Matrix Iterative Analysis.* Prentice–Hall International, Englewood Cliffs, New Jersey, NJ, 1962.

[57] J.S. VANDERGRAFT. Applications of partial ordering to the study of positive definiteness, monotonicity, and convergence of iterative methods for linear systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **9**: 97–104 (1972).

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.

Teoremas de convergencia y de comparacion para particiones y multiparticiones.Mari Carmen Perea Marco.

Volver al índice/Tornar a l'index

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

[58] R.E. WHITE. Multisplitting with diferent weighting schemes. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **10**: 481–493 (1989).

[59] R.E. WHITE. Multisplitting of a symmetric positive definite matrix. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **11**: 69–82 (1990).

[60] Z.I. WOŹNICKI. The AGA two-sweep iterative methods for the solution of linear equation systems. *Linear Algebra and its Applications*, **121**: 702–710 (1989).

[61] Z.I. WOŹNICKI. Nonnegative splitting theory. *Japan Journal on Industrial and Applied Mathematics*, **11**: 289–342 (1994).

[62] Z.I. WOŹNICKI. Comparison theorems for regular splittings on block partitions. *Linear Algebra and its Applications*, **253**: 199–207 (1995).

[63] D.M. YOUNG. *Iterative Solution of Large Linear Systems.* Academic Press, New York, NY, 1971.

UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Comisión de Doctorado

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha
acordó otorgar, por Unanimidad a la Tesis Doctoral de Don/Dña.
Mari Carmen Perea Marco la calificación de
Apto Cum Laude.
Alicante 6 de Febrero de 1998

El Secretario,

El Presidente,

Fdo. Jose Penadés

Tesis doctoral de la Universidad de Alicante. Tesi doctoral de la Universitat d'Alacant. 1997.