



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

**Esta tesis doctoral contiene un índice que enlaza a cada uno de los capítulos de la misma.**

**Existen asimismo botones de retorno al índice al principio y final de cada uno de los capítulos.**

**[Ir directamente al índice](#)**

**Para una correcta visualización del texto es necesaria la versión de [Adobe Acrobat Reader 7.0](#) o posteriores**

**Aquesta tesi doctoral conté un índex que enllaça a cadascun dels capítols. Existeixen així mateix botons de retorn a l'índex al principi i final de cadascun dels capítols .**

**[Anar directament a l'índex](#)**

**Per a una correcta visualització del text és necessària la versió d' [Adobe Acrobat Reader 7.0](#) o posteriors.**

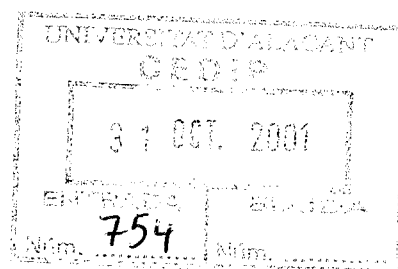
1  
754  
2001



# TESIS DOCTORAL

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## TEORIA ANALITICA DE LA ROTACION DE LA TIERRA RIGIDA MEDIANTE MANIPULACION SIMBOLICA ESPECIFICA



Juan Francisco Navarro Llinares

Depto. de Análisis Matemático y Matemática Aplicada  
Universidad de Alicante





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Agradecimientos

Quisiera dar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que me han apoyado durante los años en que he realizado este trabajo.

Mis primeros agradecimientos van dedicados a mi director de tesis, José Manuel Ferrándiz Leal, por haber confiado en mí brindándome la oportunidad de desarrollar este trabajo, y dirigirme y apoyarme en todo momento. También quiero agradecer la colaboración de Juan Getino, codirector de esta tesis, por sus consejos y ayuda prestada.

Asimismo, merece una mención especial Jacques Henrard, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Namur, por sus consejos y ayuda, y por haberme acogido en varias ocasiones en su departamento.

También me gustaría manifestar mi agradecimiento a todos mis compañeros de departamento, a mi familia, y de manera muy especial a Begoña, que es quien me ha aguantado estos últimos años.

Esta tesis ha sido realizada gracias al soporte económico de una beca predoctoral de Formación de Personal Investigador del Ministerio de Educación y Cultura.



---

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción al problema de la rotación de la Tierra</b>	<b>17</b>
1.1	La precesión y la nutación de la Tierra . . . . .	17
1.2	Repaso al formalismo hamiltoniano . . . . .	18
1.2.1	Fundamentos básicos del formalismo . . . . .	19
1.3	Energía cinética del sólido . . . . .	20
1.3.1	El tensor de inercia . . . . .	20
1.3.2	Formulación canónica en las variables de Euler . . . . .	22
1.3.3	Formulación canónica en las variables de Andoyer . . . . .	25
1.4	Energía potencial gravitatoria . . . . .	32
1.4.1	Expresión armónica del potencial . . . . .	32
1.5	Expresión del potencial perturbador en variables de Andoyer . . . . .	37
1.6	Expresión final del potencial . . . . .	40
1.7	Forma final del hamiltoniano . . . . .	44
1.8	El método de Hori . . . . .	45
1.9	Integración del problema (primer orden) . . . . .	47
1.9.1	Movimiento del plano de Andoyer . . . . .	51
1.10	Movimiento del plano ecuatorial . . . . .	53
1.11	Movimiento del plano perpendicular al eje de rotación . . . . .	55
<b>2</b>	<b>Polinomios de Legendre y de Jacobi</b>	<b>57</b>



2.1	Armónicos zonales y polinomios de Legendre . . . . .	57
2.1.1	Algunas propiedades de los polinomios de Legendre . . . . .	60
2.2	Armónicos tesseractales y polinomios asociados de Legendre . . . . .	60
2.2.1	Propiedades de los polinomios asociados de Legendre . . . . .	61
2.3	Derivación de polinomios de Legendre . . . . .	62
2.3.1	Polinomios $P_n^m(\cos \beta)/(\sin \beta)^j$ y $P_n^m(\sin \beta)/(\cos \beta)^j$ . . . . .	63
2.4	Polinomios modificados de Jacobi . . . . .	66
2.4.1	Fórmulas fundamentales . . . . .	66
2.4.2	Polinomios modificados de Jacobi de orden dos . . . . .	69
2.4.3	Polinomios de Jacobi de orden tres y cuatro . . . . .	70
2.4.4	Derivación de un polinomio de Jacobi respecto de una variable de inclinación . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Manipulación algebraica en Mecánica Celeste</b>	<b>75</b>
3.1	Los primeros manipuladores algebraicos . . . . .	75
3.1.1	Procesadores de series de Poisson clásicos . . . . .	77
3.1.2	Procesadores escalonados . . . . .	78
3.2	Aplicaciones de los manipuladores algebraicos . . . . .	79
3.2.1	El problema del satélite: función de perturbación . . . . .	79
3.2.2	El problema de la Luna . . . . .	82
3.2.3	Teoría planetaria . . . . .	88
3.2.4	El problema de la rotación de la Tierra . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Manipulador algebraico de series de Poisson</b>	<b>93</b>
4.1	Definiciones y conceptos previos . . . . .	93
4.2	Variabes de una serie de Poisson . . . . .	94
4.2.1	Sobre el nombre de las variables . . . . .	95




---

4.3	Entrada y salida de series de Poisson . . . . .	95
4.3.1	Entrada de series . . . . .	95
4.3.2	Salida de series . . . . .	96
4.4	Estructura de la serie de Poisson . . . . .	97
4.5	Ordenación de una serie de Poisson . . . . .	99
4.6	Operaciones elementales con series de Poisson . . . . .	100
4.6.1	Eliminación de términos de una serie de Poisson . . . . .	100
4.6.2	Selección de términos . . . . .	101
4.6.3	Suma y diferencia de series de Poisson . . . . .	101
4.6.4	Producto de series de Poisson . . . . .	102
4.6.5	Producto rápido de series de Poisson . . . . .	102
4.6.6	Potencia de series de Poisson . . . . .	103
4.6.7	Producto de un escalar por una serie de Poisson . . . . .	103
4.6.8	Cociente de una serie de Poisson por un escalar . . . . .	104
4.6.9	Seno, coseno y exponencial de una serie de Poisson . . . . .	104
4.6.10	Inversa de una serie . . . . .	104
4.6.11	Desarrollo de $1/(1 + \mathcal{P})^k$ . . . . .	105
4.7	Sustituciones en series de Poisson . . . . .	105
4.7.1	Sustitución de una variable polinómica por una serie de Poisson . . .	105
4.7.2	Sustitución de una variable por un valor real . . . . .	106
4.7.3	Sustitución de una variable por una combinación lineal de variables	107
4.8	Eliminación de variables trigonométricas . . . . .	108
4.9	Cálculo de polinomios de Legendre . . . . .	110
4.9.1	Cálculo de los polinomios asociados de Legendre . . . . .	111
4.9.2	Cálculo de los polinomios $P_n^{m \setminus k}$ . . . . .	114
4.10	Cálculo de polinomios modificados de Jacobi . . . . .	114

---






---

4.10.1	Algoritmo de cálculo de los polinomios de Jacobi . . . . .	114
4.11	Derivación de series de Poisson . . . . .	115
<b>5</b>	<b>Manipulador algebraico de series de Kinoshita</b>	<b>119</b>
5.1	Un manipulador especial para la teoría de la Tierra . . . . .	119
5.2	Series de Kinoshita . . . . .	122
5.3	Estructura de la serie de Kinoshita . . . . .	122
5.3.1	Elementos comunes a la serie de Poisson . . . . .	123
5.3.2	Denominadores . . . . .	123
5.3.3	Polinomios asociados de Legendre . . . . .	124
5.3.4	Polinomios modificados de Jacobi . . . . .	125
5.3.5	Exponenciales complejas . . . . .	126
5.4	Variables de una serie de Kinoshita . . . . .	126
5.4.1	Sobre el nombre de las variables . . . . .	128
5.4.2	Tablas de frecuencias . . . . .	128
5.5	Entrada y salida de series de Kinoshita . . . . .	130
5.5.1	Entrada de series . . . . .	130
5.5.2	Salida de ecuaciones para L <sup>A</sup> T <sub>E</sub> X . . . . .	131
5.6	Ordenación de una serie de Kinoshita . . . . .	132
5.6.1	Ordenación según coeficientes o periodos . . . . .	134
5.7	Operaciones elementales con series de Kinoshita . . . . .	134
5.7.1	Eliminación de términos de una serie de Kinoshita . . . . .	134
5.7.2	Selección de términos . . . . .	134
5.7.3	Suma y diferencia de series de Kinoshita . . . . .	134
5.7.4	Producto de series de Kinoshita . . . . .	135
5.7.5	Producto rápido de series de Kinoshita . . . . .	137

---




---

5.7.6	Potencia de una serie de Kinoshita . . . . .	138
5.7.7	Producto de un escalar por una serie de Kinoshita . . . . .	138
5.7.8	Cociente de una serie de Kinoshita por un escalar . . . . .	139
5.7.9	Seno, coseno y exponencial de una serie de Kinoshita . . . . .	139
5.7.10	Desarrollo de $1/(1 + \mathcal{K})^k$ . . . . .	139
5.8	Sustituciones en series de Kinoshita . . . . .	140
5.8.1	Sustitución de una variable polinómica por una serie de Kinoshita . . . . .	140
5.8.2	Sustitución de una variable por un valor real . . . . .	141
5.8.3	Sustitución de una variable por una combinación lineal de variables . . . . .	143
5.9	Eliminación de variables trigonométricas . . . . .	145
5.10	Cálculo de polinomios de Legendre y de Jacobi . . . . .	145
5.11	Derivación de series de Kinoshita . . . . .	145
5.11.1	Notación . . . . .	146
5.11.2	Derivación del factor común . . . . .	146
5.11.3	Derivación de un término . . . . .	146
5.11.4	Derivación de la parte polinómica de un término . . . . .	147
5.11.5	Derivación de la parte trigonométrica de un término . . . . .	147
5.11.6	Derivación de los denominadores . . . . .	147
5.11.7	Derivación de los polinomios de Legendre . . . . .	147
5.11.8	Derivación de los polinomios modificados de Jacobi . . . . .	148
5.11.9	Derivación de la exponencial compleja . . . . .	150
5.11.10	Una función para la derivación . . . . .	150
5.12	Derivación de una serie de Kinoshita respecto de un ángulo de inclinación . . . . .	151
5.13	Operadores de derivación . . . . .	152
5.14	Cálculo de Paréntesis de Poisson . . . . .	153
5.14.1	Paréntesis de Poisson de dos series de Kinoshita . . . . .	154

---




---

5.15	Factor común a una serie de Kinoshita . . . . .	154
5.15.1	Algoritmo para sacar factor común . . . . .	157
5.15.2	La función que saca factor común . . . . .	158
5.15.3	Producto por el factor común . . . . .	162
5.15.4	Eliminación del factor común . . . . .	162
5.16	Transformación de una serie de Kinoshita en serie de Poisson . . . . .	163
5.16.1	Desarrollo de los polinomios de Legendre de una serie . . . . .	164
5.16.2	Desarrollo de los polinomios modificados de Jacobi de una serie . . . . .	164
5.16.3	Eliminación de los denominadores . . . . .	164
5.16.4	Parte real de la exponencial compleja . . . . .	165
5.16.5	Eliminación del factor común . . . . .	165
5.17	Función simplificadora . . . . .	165
5.18	Aplicación del teorema de Wigner . . . . .	166
5.18.1	Aplicabilidad del teorema de Wigner a una serie de Kinoshita . . . . .	168
5.19	Sustitución de armónicos esféricos por series de Kinoshita . . . . .	169
5.20	Integral de la parte periódica de una serie de Kinoshita . . . . .	170
<b>6</b>	<b>Cálculo de los armónicos esféricos para Luna, Sol y planetas</b>	<b>173</b>
6.1	Teorías lunar y planetaria . . . . .	173
6.2	Cálculo de los armónicos esféricos lunares . . . . .	174
6.2.1	Armónicos esféricos lunares . . . . .	176
6.2.2	Cálculo de las frecuencias . . . . .	186
6.3	Cálculo de los armónicos esféricos del Sol . . . . .	187
6.3.1	Nota sobre las variables utilizadas . . . . .	190
6.4	Efecto planetario en los armónicos de la Luna . . . . .	191
6.5	Efecto planetario en los armónicos del Sol . . . . .	196

---



6.6	Cálculo de los armónicos esféricos planetarios . . . . .	201
6.6.1	Cálculo de las funciones de Laplace . . . . .	202
6.6.2	Cálculo de los armónicos esféricos mediante las funciones de Laplace . . . . .	205
6.6.3	Armónicos esféricos de Venus . . . . .	208
6.6.4	Armónicos esféricos de Júpiter . . . . .	215
6.6.5	Armónicos esféricos de Saturno . . . . .	219
<b>7</b>	<b>Efecto lunisolar de primer orden en la nutación</b>	<b>227</b>
7.1	Efecto de primer orden de la Luna en las series de nutación . . . . .	227
7.1.1	Cálculo de las nutaciones del eje del momento angular . . . . .	229
7.2	Efecto de primer orden del Sol en las series de nutación . . . . .	248
7.3	Términos de Oppolzer debidos a la Luna . . . . .	250
7.4	Términos de Oppolzer del Sol . . . . .	257
7.5	Términos relacionados con la precesión . . . . .	258
7.5.1	Determinación de $\dot{h}$ . . . . .	260
<b>8</b>	<b>Efecto de los armónicos zonales de orden mayor que dos</b>	<b>261</b>
8.1	Cálculo de la contribución a la nutación en longitud . . . . .	263
8.2	Resultados obtenidos . . . . .	265
8.3	Términos de Oppolzer . . . . .	267
<b>9</b>	<b>Efecto de los armónicos no zonales de tercer orden</b>	<b>271</b>
9.1	Efecto de los coeficientes $C_3^1$ y $S_3^1$ . . . . .	273
9.2	Efecto de los coeficientes $C_3^2, S_3^2, C_3^3$ y $S_3^3$ . . . . .	284
9.3	Términos de Oppolzer . . . . .	288
<b>10</b>	<b>Teoría de segundo orden para Tierra rígida</b>	<b>293</b>
10.1	Mejora de la aproximación de la solución asintótica . . . . .	295



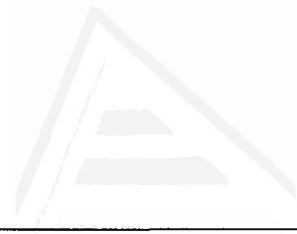
10.2	Cálculo de las series de nutación en primera aproximación . . . . .	298
10.3	Cálculo de las series de nutación en mejor aproximación . . . . .	310
10.4	Comparación de ambas aproximaciones . . . . .	324
<b>11</b>	<b>Efecto de la perturbación de los planetas</b>	<b>329</b>
11.1	Efecto planetario directo . . . . .	329
11.2	Efecto planetario indirecto . . . . .	332
11.3	Influencia directa de Venus . . . . .	336
11.4	Influencia directa de Júpiter . . . . .	340
11.5	Influencia directa de Saturno . . . . .	342
11.6	Efecto planetario indirecto debido a la Luna . . . . .	343
11.7	Efecto planetario indirecto debido al Sol . . . . .	354
<b>12</b>	<b>Comparación con otras teorías</b>	<b>365</b>
12.1	Términos principales de Kinoshita, 1990 . . . . .	365
12.2	Comparación de términos diurnos, semidiurnos y terdiurnos con resultados de Folgueira, Souchay y Kinoshita . . . . .	368
12.3	Comparación con REN2000 . . . . .	377
12.3.1	Efecto lunisolar de primer y segundo orden y del $J_3$ . . . . .	377
12.3.2	Efecto de segundo orden . . . . .	381
12.3.3	Perturbaciones planetarias directas . . . . .	388
12.3.4	Perturbaciones planetarias indirectas . . . . .	394
<b>13</b>	<b>Efecto no rígido</b>	<b>407</b>
13.1	Descripción de la solución . . . . .	407
<b>A</b>	<b>Modelo de Tierra no rígida de dos capas</b>	<b>413</b>
A.1	Modelo de Tierra de dos capas: energía cinética . . . . .	414



---

A.1.1	Deformación de marea y tensores de inercia . . . . .	415
A.1.2	Energía cinética . . . . .	416
A.2	Energía potencial y funciones esféricas . . . . .	417
A.2.1	Desarrollo de las funciones armónicas . . . . .	417
A.3	Disipación en la frontera Núcleo-Manto (CMB) . . . . .	418
A.4	Hamiltoniano e integración de primer orden . . . . .	419
A.4.1	Solución no perturbada . . . . .	420
A.5	Expresión de la función generatriz . . . . .	421
A.5.1	Integrales auxiliares . . . . .	422
A.5.2	Función generatriz . . . . .	424
A.6	Nutaciones forzadas . . . . .	426
A.6.1	Nutaciones del plano de Andoyer . . . . .	426
A.6.2	Nutación del plano de figura . . . . .	427
A.6.3	Expresiones finales . . . . .	429

---



---

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



## Introducción

Durante muchos años, el astrónomo griego Hiparco (180-120 a.C.) observó el cielo en la isla de Rodas. A partir de sus observaciones, construyó un catálogo de más de 1000 estrellas. Comparando sus coordenadas con las de las mismas estrellas 150 años antes, encontró una disminución sistemática de las longitudes eclípticas de las estrellas. Hiparco interpretó correctamente este fenómeno como un movimiento continuo del equinoccio a lo largo de la eclíptica. Así descubrió el movimiento de *precesión*, determinando la amplitud de dicho fenómeno.

El trabajo de Hiparco fue citado por el matemático y astrónomo griego Ptolomeo (100-175) en su obra *Almagest*. Confirmó la existencia de la precesión, pero negó el punto de vista de Hiparco. Esto fue debido probablemente a que Ptolomeo suponía a la Tierra fija en el espacio. Atribuyó el movimiento de precesión a un movimiento de la esfera celeste sobre la que descansaban las estrellas fijas. *Almagest* fue tomada durante 1400 años como una obra referencia, lo que supuso que se tomara también durante ese tiempo como modelo de precesión el de Ptolomeo, provocando la confusión de los científicos.

El año 1543 marcó el fin del sistema geocéntrico y el descubrimiento del sistema heliocéntrico y de los movimientos de rotación y traslación de la Tierra. Fue Copérnico (1473 – 1543) quien sugirió que la precesión estaba asociada al eje de rotación de la Tierra. Según su teoría, la Tierra se desplaza de tal manera que su eje de rotación describe un movimiento cónico alrededor de la normal a la eclíptica con un periodo de 25800 años. La causa de dicho movimiento no estaba del todo clara en la época.

En 1687, Isaac Newton (1642 – 1727) publicó *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Newton descubrió el origen del movimiento de precesión: la precesión estaba producida por las fuerzas gravitacionales ejercidas por la Luna y el Sol. Newton dedujo a su vez que la Tierra debía ser achatada por los polos como consecuencia de su forma de rotación. Newton llevó a cabo un cálculo teórico para fijar el valor de la precesión lunisolar. Obtuvo un valor de  $50''$ /año. Este excelente valor fue casual: sus cálculos daban para la Luna una precesión de  $41''$ /año y de  $9''$ /año para la contribución del Sol, mientras que los valores reales son respectivamente del orden de  $34''$  y  $16''$  por año.

Si bien Newton previó la existencia de la nutación lunisolar, función de la longitud celeste de la Luna y el Sol, fue el astrónomo inglés James Bradley (1692 – 1762) quien





---

descubrió y explicó en 1748 el primer fenómeno de nutación de la Tierra. John Machin (1680 – 1751), matemático inglés, sugirió a Bradley un método geométrico para describir las nutaciones: el eje de rotación de la Tierra describe pequeños círculos de radio  $9''$  y del periodo correspondiente al nodo de la órbita lunar, 18.6 años, alrededor de un eje medio. Este eje medio describe un círculo de apertura angular  $23.5^\circ$  y tiene un periodo de 25800 años. Bradley sospechó que los círculos de las nutaciones podían ser elipses.

Un año después del descubrimiento de Bradley, el matemático francés Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) construyó las bases de una teoría casi completa de la precesión y las nutaciones en su obra *Recherches sur la Précession des Equinoxes et sur la Nutation de l'Axe de la Terre*. En particular mostró que los círculos debían ser sustituidos por elipses. El mismo año, el matemático suizo Leonhard Euler (1707 – 1783) llegó a resultados equivalentes a los de d'Alembert y, años después, desarrolló la teoría general para un sólido en rotación (derivó las ecuaciones que llevan su nombre). Las precesiones y nutaciones son fenómenos que aparecen en la solución de las ecuaciones de Euler. Gracias a estas ecuaciones se descubrió también la nutación libre de la Tierra (o Chandleriana).

En 1839, William Hopkins (1793 – 1866) incluyó en el estudio los efectos de la constitución interna de la Tierra. Henri Poincaré, matemático y físico francés, resolvió el problema de la rotación de una Tierra elipsoidal conteniendo una parte líquida. Modificó las ecuaciones de Lagrange para poder ser usadas por líquidos, y descubrió que en un núcleo líquido con el mismo achatamiento que la Tierra, puede producirse una resonancia perturbando así las nutaciones. Cabe destacar igualmente las contribuciones del astrónomo y geofísico inglés Harold Jeffreys en la investigación de los efectos del núcleo líquido en la nutación y precesión. Jeffreys consideró igualmente un modelo con núcleo líquido y manto elástico. Podemos también señalar el cálculo de la precesión llevado a cabo en 1897 por Simon Newcomb.

En 1953 Woolard publicó una teoría lagrangiana para el movimiento de rotación de la Tierra alrededor de su centro de masas, adoptando para ello variables de Euler. Más tarde, en el año 1977, Hiroshi Kinoshita construyó la primera teoría hamiltoniana de la rotación terrestre para una Tierra rígida, introduciendo el uso de variables de Andoyer y dando en ellas una expresión muy precisa del potencial lunisolar. Para la integración del hamiltoniano, Kinoshita aplicó el método de perturbaciones de Hori (1960) y obtuvo soluciones para la precesión y nutación. Esta teoría ha sido recientemente extendida por Kinoshita y Souchay (1990) incluyendo efectos planetarios y una extensión a segundo orden. En este capítulo se presentan las bases de la teoría original de Kinoshita, que ha permitido posteriormente a muchos autores completar el problema añadiendo múltiples efectos.

A partir del modelo de Jeffreys, Wahr construyó en 1980 una teoría muy exacta de las nutaciones incluyendo un núcleo líquido y manto elástico, pero que tiene el inconveniente de que no está autocontenida, dado que toma los efectos de la no rigidez de la teoría de Kinoshita (1977). Posteriormente algunos autores han incluido los efectos del núcleo interno.

---



---

En los últimos años, Getino y Ferrándiz (1990, 1991a, 1991b, 1994, 1995a, 1995b, 1997a, 1998) han abordado el problema de la constitución interna de la Tierra desde un punto de vista hamiltoniano, siguiendo básicamente el mismo procedimiento que Kinoshita utilizó para el caso de la Tierra rígida. De esta forma han tenido en cuenta el efecto de la elasticidad del manto y de su elipticidad. El método empleado usa también variables de Andoyer, y es válido para diferentes modelos de Tierra.

En la actualidad no hay ninguna solución numérica que ajuste las observaciones de los ángulos de nutación (por ejemplo la posición del plano ecuatorial en el espacio) con la exactitud que ciertas aplicaciones requieren. Las soluciones para los dos ángulos que definen la nutación toman la forma de series de Fourier múltiples en las frecuencias planetarias y de la Luna. Las soluciones analíticas requieren la aplicación de métodos de perturbaciones al potencial perturbador, que contiene miles de términos, de modo que la manipulación simbólica es necesaria para evitar, entre otras cosas, errores de cálculo. No obstante, las soluciones más precisas disponibles en la actualidad únicamente utilizan procesadores simbólicos en los últimos estados de desarrollo, una vez han sido obtenidas las series de perturbación. El motivo es que los manipuladores de propósito general no permiten el trabajo con estructuras complejas. Por otro lado, los procesadores algebraicos especiales para Mecánica Celeste no se adecúan al problema de la rotación de la Tierra. Estos procesadores manejan series de Fourier múltiples cuyos coeficientes son monomios (series de Poisson), y han resultado de mucha utilidad en problemas tales como el problema de la Luna o en las teorías planetarias.

El objeto de esta tesis es desarrollar un nuevo tipo de manipulador algebraico para trabajar con el tipo de expresión más general que aparece en la teoría de la rotación de la Tierra, y aplicarlo para recalcular las principales contribuciones en las series de nutación de la Tierra.

En el primer capítulo damos una descripción detallada de la teoría hamiltoniana de Kinoshita para la Tierra rígida. Este enfoque resulta idóneo para tratar los diferentes efectos en las series de nutación. En el segundo capítulo introducimos algunos conceptos básicos relativos a polinomios asociados de Legendre y modificados de Jacobi, que resultan de mucha utilidad en el diseño de un nuevo manipulador simbólico especial para la teoría de la rotación terrestre.

El tercer capítulo está dedicado a revisar el uso de manipuladores simbólicos en Mecánica Celeste. Damos un repaso a la breve historia de los procesadores simbólicos y estudiamos algunos de los problemas clásicos en los que han sido aplicados. En el siguiente capítulo desarrollamos un procesador simbólico de series de Poisson en C++, para introducir con él algunos de los aspectos fundamentales del diseño práctico de procesadores algebraicos de propósito particular. Asimismo ilustramos con él la forma en que se calculan los polinomios asociados de Legendre y los modificados de Jacobi.

Un nuevo procesador simbólico, al que nos referiremos como procesador de series de Kinoshita, se presenta en el capítulo 5. Este nuevo procesador maneja el tipo de expresión

---



---

analítica más general que aparece en la teoría de la rotación de la Tierra rígida.

El resto de capítulos se dedican a la aplicación del nuevo procesador a recalcular las series de nutación de la Tierra a partir del enfoque hamiltoniano de Kinoshita.

En el capítulo 6 recalculamos los armónicos esféricos de la Luna, el Sol, Venus, Júpiter y Saturno, usando las teorías lunar y planetaria ELP2000 y VSOP87 respectivamente. Estos nuevos desarrollos son usados en los capítulos siguientes para el cálculo de las distintas contribuciones a las series de nutación.

En el capítulo 7 recalculamos el efecto lunisolar de primer orden en las series de nutación, usando las expresiones analíticas obtenidas en el capítulo anterior para los armónicos esféricos de la Luna y el Sol. Asimismo, en este capítulo se desarrolla el estudio de la precesión.

Los efectos del  $J_3$  se investigan en el capítulo 8, usando los armónicos de tercer orden de la Luna. La influencia de los armónicos no zonales, tenidos en cuenta por Folgueira *et al.* (1998) se calculan en el capítulo 9.

En el capítulo 10 integramos las ecuaciones canónicas mediante el método de Hori hasta orden dos. Este cálculo se realiza en primer lugar aproximando  $J \approx 0$  (Souchay, 2000), despreciando de este modo la dependencia del potencial de los términos en la variable canónica  $g$ . Las series de nutación calculadas de esta forma se comparan con las que se obtienen sin llevar a cabo la aproximación anterior, y teniendo entonces en cuenta la dependencia de  $g$ .

La perturbación planetaria en la rotación de la Tierra se divide en dos partes: el efecto directo, debido al momento creado por los planetas sobre la Tierra, y el indirecto, debido a las perturbaciones planetarias en las órbitas de la Luna y la Tierra. En el capítulo 11 se recalculan ambos efectos planetarios.

El capítulo 12 se dedica a comparar los resultados obtenidos con los de la teoría hamiltoniana de Souchay y Kinoshita, REN2000.

El propósito del capítulo 13 es presentar la disponibilidad de las primeras series de nutación planetarias para un modelo de Tierra no rígida. El trabajo se completa con un apéndice en el que describimos el modelo de Tierra no rígida de Getino y Ferrándiz empleado en el cálculo del capítulo 13.



## Capítulo 1

# Introducción al problema de la rotación de la Tierra

### 1.1 La precesión y la nutación de la Tierra

El fenómeno de la precesión y la nutación consiste en el movimiento periódico que poseen los ejes ligados a la Tierra alrededor del eje perpendicular al plano de la eclíptica. Su causa principal es la atracción gravitatoria ejercida sobre la Tierra por los diferentes cuerpos celestes: Luna, Sol y planetas. Este movimiento puede explicarse intuitivamente en buena medida.

Consideremos a la Tierra como un elipsoide de revolución achatado por los polos. La atracción que ejercen los diferentes cuerpos celestes sobre el plano ecuatorial origina un par de fuerzas que tienden a hacer bascular el plano ecuatorial terrestre sobre el plano de la eclíptica. La atracción de los cuerpos celestes sobre la masa continua de la esfera de centro  $O$ , y tangente interiormente al elipsoide en sus dos polos, se reduce a una fuerza con un momento nulo respecto al centro de la Tierra. La figura 1.1 representa la sección de corte de la esfera por un plano que contiene al cuerpo perturbador. Considerando un elemento de masa  $A$ , la fuerza de atracción  $\mathbf{F}$  ejercida por el cuerpo perturbador puede descomponerse en la dirección paralela a la recta  $OP$  y en la perpendicular a esta (componentes  $\mathbf{F}_r$  y  $\mathbf{F}_n$  respectivamente). La primera componente tiende a desplazar el centro de masa, y la segunda a hacer girar el sistema en torno a  $O$ . Existe un segundo elemento de masa  $A'$  simétrico al primero respecto de la recta  $OP$ , de modo que si descomponemos la fuerza que ejerce  $P$  sobre  $A'$  en dos componentes  $\mathbf{F}'_r$  y  $\mathbf{F}'_n$  siguiendo el criterio anterior, se tiene que la componente  $\mathbf{F}'_n$  tiende a hacer girar al sistema en sentido contrario al producido por  $\mathbf{F}_n$ , de manera que estas contribuciones se anulan, y por consiguiente, no hay movimiento de rotación, ya que es posible descomponer la Tierra en elementos simétricos del tipo descrito.

Sin embargo, la simetría de compensación de momentos no existe en la elipse exterior

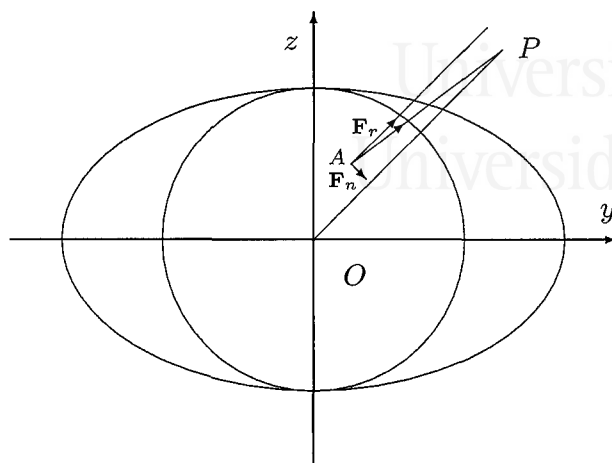


Figura 1.1: Par que ejerce un cuerpo perturbador sobre una Tierra esférica.

a la esfera, salvo que el cuerpo perturbador se encuentre en el semieje menor de la esfera o sobre el plano del ecuador. El análisis de dicha área de elipse conduce a la existencia de un momento perpendicular al plano de la figura, que implica una tendencia del plano ecuatorial a bascular sobre el plano de la eclíptica.

Por el efecto giroscópico, la rotación de la Tierra mantiene una inclinación fija (aproximadamente) del ecuador sobre la eclíptica y existe un desplazamiento del eje de la Tierra alrededor de la normal al plano de la eclíptica. Este desplazamiento es muy lento (tiene un periodo de alrededor de 26000 años), tiene una amplitud del orden de  $23^{\circ}26'$ , y produce un movimiento retrógrado del punto  $\gamma$  (nodo ascendente de la eclíptica sobre el ecuador, véase figura 1.2). Este movimiento se llama *precesión*.

Debido a que los momentos originados por los diferentes cuerpos celestes sobre la Tierra tienen diferentes direcciones y varían conforme los cuerpos se mueven los unos con respecto a los otros, el momento total no es constante en el tiempo. Es decir, hay *irregularidades* en el movimiento de precesión, a las que se llama *nutaciones*.

## 1.2 Repaso al formalismo hamiltoniano

Como se ha indicado más arriba, en el año 1977 Kinoshita construyó la primera teoría hamiltoniana de la rotación de la Tierra, de modo que daremos un breve repaso de algunos conceptos básicos de la formulación hamiltoniana de la Mecánica. Pese a que la introducción de la formulación hamiltoniana de la Mecánica no añade principios físicos sustancialmente diferentes a los que aportan otros enfoques de la misma, como el newtoniano o el lagrangiano, sí da un nuevo marco formal que ha permitido el desarrollo de teorías tales como la de Hamilton-Jacobi, los métodos de perturbaciones, etc. El formalismo

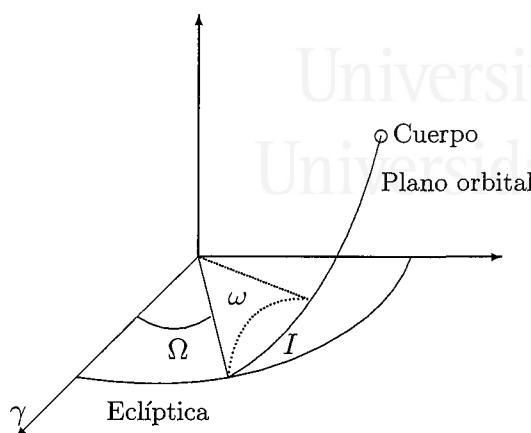


Figura 1.2: El ángulo  $\Omega$  es el ángulo del nodo o *longitud del nodo ascendente*. Se llama nodo ascendente porque por ese lado, el cuerpo pasa de estar por debajo a estar por encima del plano inercial. El ángulo  $I$  es la *inclinación*. Si este ángulo de inclinación es mayor que  $\pi/2$  radianes, la órbita se dice *retrograda*. El ángulo  $\omega$  es el *argumento del perigeo*. Se mide desde el nodo ascendente al perigeo o periastro. No está definido si  $e = 0$ , por no haber semieje mayor.

hamiltoniano se ha incorporado con éxito a la Mecánica Estadística y a la Cuántica.

En el campo de la Mecánica Celeste, el formalismo hamiltoniano es especialmente útil por dos razones: en primer lugar, la forma canónica de las ecuaciones del movimiento permite llevar a cabo cambios de variable de una forma muy sencilla. Por otro lado, este formalismo permite la aplicación de métodos de perturbaciones, fundamentales para resolver problemas en los que las ecuaciones del movimiento son tan complejas que es muy difícil (si no imposible) encontrar una solución analítica.

En el problema de la rotación terrestre abordado por Kinoshita (1977 y 1990), el uso del formalismo hamiltoniano permite la aplicación precisamente de un método de perturbaciones para determinar la solución a las ecuaciones del movimiento. El método empleado en su teoría es el método de Hori.

### 1.2.1 Fundamentos básicos del formalismo

Vamos a tratar con sistemas mecánicos holónomos sometidos a fuerzas que derivan de un potencial que únicamente depende de la posición. Es decir, trataremos tan sólo fuerzas conservativas. En el formalismo hamiltoniano, un sistema físico de  $n$  grados de libertad viene descrito mediante un conjunto de  $2n$  variables independientes,  $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ , llamadas variables canónicas, y una función, que se denota por  $\mathcal{H}$ , que depende de las  $2n$  variables y del tiempo,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ , y que se conoce con el nombre de hamiltoniano. La evolución de estas variables con el tiempo viene determinada por las

ecuaciones de Hamilton, que son las  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden siguientes:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad (1.1)$$

con las condiciones iniciales  $p_i(t_0) = p_{i0}$ ,  $q_i(t_0) = q_{i0}$  con  $i = 1, \dots, n$ .

Las  $n$  variables  $q_i$ , que se conocen como *coordenadas canónicas*, son las coordenadas generalizadas que se emplean en la formulación lagrangiana del problema, mientras que las  $n$  variables  $p_i$ , son los momentos generalizados, que vienen definidos por

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

en donde  $T$  es la energía cinética del sistema. Estas  $n$  relaciones permiten escribir los momentos generalizados en función de las velocidades generalizadas.

En el caso que vamos a estudiar, el hamiltoniano coincide con la energía mecánica del sistema. Lo escribiremos, por consiguiente, como

$$\mathcal{H} = T + U,$$

en donde tanto la energía cinética  $T$  como la potencial  $U$  están expresadas en el mismo conjunto canónico de variables. El problema radica en conseguir un conjunto de variables canónico en el cual la expresión del hamiltoniano permita hacer la integración más cómoda. Dicho de otra forma, conviene encontrar un conjunto de variables canónicas con el máximo número de variables cíclicas.

Así pues, para conocer la forma en que un sistema mecánico evoluciona en el tiempo, es necesario expresar el hamiltoniano en un conjunto de variables canónicas, y después resolver las ecuaciones de Hamilton. A continuación vamos a obtener la expresión para las energías cinética y potencial de un sólido en función de un conjunto de variables apropiado para el problema.

## 1.3 Energía cinética del sólido

Antes de estudiar la expresión de la energía cinética de un sólido, repasaremos algunos conceptos básicos relativos al tensor de inercia.

### 1.3.1 El tensor de inercia

Cuando un cuerpo rígido se mueve con su centro de masas en reposo (o coincidiendo con el origen de una referencia de Köening), el momento angular resultante respecto a éste es

$$\mathbf{L} = \int_M (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dM.$$



Teniendo en cuenta la relación cinemática entre la velocidad de un punto del sólido y su velocidad angular  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  se llega a

$$\mathbf{L} = \int_M [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] dM = \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega},$$

donde  $\boldsymbol{\Pi}$  es la matriz de inercia cuyos elementos vienen dados por

$$\Pi_{ij} = \int_M (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dM,$$

siendo  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker y  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ . Esta matriz es simétrica, dado que

$$\Pi_{ij} = \int_M (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dM = \int_M (r^2 \delta_{ji} - x_j x_i) dM = \Pi_{ji}.$$

Por consiguiente, podemos escribir la matriz de inercia  $\boldsymbol{\Pi}$  como

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}.$$

Los elementos de la diagonal principal ( $A, B, C$ ) se conocen con el nombre de *momentos de inercia*, mientras que a los restantes se los denomina *productos de inercia*. Dado que la matriz  $\boldsymbol{\Pi}$  es simétrica, existe un sistema de ejes (conocidos como *ejes principales*) en donde la matriz es diagonal,

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Como  $\mathbf{L} = \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega}$ , en el sistema de ejes principales, tendremos

$$L_1 = A\omega_1, \quad L_2 = B\omega_2, \quad L_3 = C\omega_3.$$

El tensor de inercia  $\boldsymbol{\Pi}$  caracteriza la simetría del cuerpo. Así, para un cuerpo con simetría esférica, tenemos que

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el caso de un elipsoide simétrico,

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$



y en el caso de un elipsoide no simétrico,

$$\Pi = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Con la ayuda de la expresión de  $\Pi_{ij}$  la energía cinética de rotación del sólido se puede escribir como

$$T = \frac{1}{2} \int_M \mathbf{v}^T \mathbf{v} dM = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \int_M (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dM,$$

o bien

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Pi \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{L}.$$

### 1.3.2 Formulación canónica en las variables de Euler

El teorema de Chasles (1830) afirma que todo desplazamiento genérico de un cuerpo rígido puede representarse a través de una traslación mas una rotación. En cierto sentido esto implica que puede separarse el estudio de la rotación de un cuerpo del estudio del movimiento que describe su centro de masas. El movimiento de un cuerpo se describe mediante seis grados de libertad: tres coordenadas de su centro de masas y tres ángulos que definen la orientación de un sistema de coordenadas ligado al cuerpo respecto a otro fijo. Para definir esta orientación es bastante usual utilizar los ángulos de Euler. Podemos tratar la formulación del problema de la rotación terrestre en estas variables.

En esta situación es posible dividir la energía cinética de la forma

$$T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + T_{\text{rot}},$$

es decir, podemos expresar la energía cinética de un cuerpo como suma de la energía cinética de todo el cuerpo suponiendo que toda la masa del mismo está concentrada en el centro de masas, mas la energía cinética asociada al movimiento de rotación del cuerpo alrededor del centro de masas. Es decir, la energía cinética total consta pues de dos partes: una debida a la traslación como un todo, y otra debida a la rotación. Vamos a atender a esta última contribución, obviando la primera. Centraremos nuestra atención en la rotación en torno al centro de masas que supondremos fijo sin pérdida de generalidad.

Según se ha señalado anteriormente, los parámetros habituales para describir la rotación son los ángulos de Euler  $h_f, I_f, \phi$ . El ángulo  $\phi$  se mide en el plano del ecuador. Puede demostrarse (Goldstein) que las componentes de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , en función de los ángulos de Euler, vienen dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{h}_f \sin I_f \sin \phi + \dot{I}_f \cos \phi, \\ \omega_2 &= \dot{h}_f \sin I_f \cos \phi - \dot{I}_f \sin \phi, \\ \omega_3 &= \dot{h}_f \cos I_f + \dot{\phi}. \end{aligned}$$

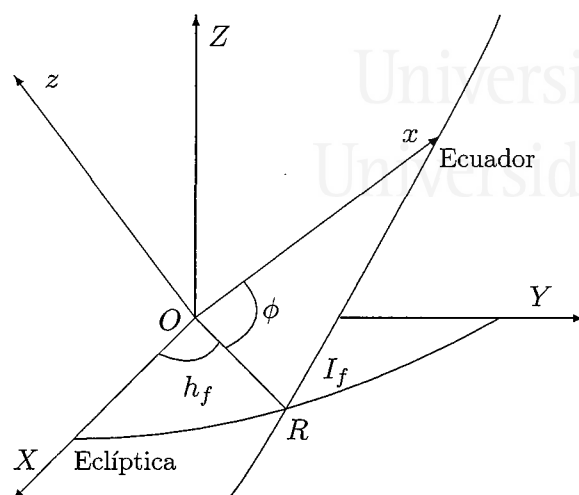


Figura 1.3: Ángulos de Euler.

Por otra parte, es conveniente tomar como sistema ligado al cuerpo el sistema de ejes principales. En él, como se sabe, la energía cinética de rotación del sólido adopta una expresión particularmente sencilla:

$$T = \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2),$$

donde  $A, B$  y  $C$  son los momentos de inercia del sólido. A través de las ecuaciones de  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), podemos escribir la ecuación anterior en función de las coordenadas de Euler y sus velocidades generalizadas,

$$T = T(\dot{h}_f, \dot{I}_f, \dot{\phi}, h_f, I_f, \phi).$$

Podemos formular el problema canónicamente, definiendo

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} I_f \\ h_f \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{I}_f \\ \dot{h}_f \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}.$$

Entonces, la relación entre  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$ , toma la forma

$$\boldsymbol{\omega} = W \dot{\mathbf{q}},$$

sin más que introducir la matriz

$$W = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin I_f \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \sin I_f \cos \phi & 0 \\ 0 & \cos I_f & 1 \end{pmatrix}.$$

La energía cinética, en el sistema de ejes principales, tiene un tensor de inercia

$$\Pi = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

y puede escribirse en la forma

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Pi \boldsymbol{\omega}.$$

Ahora bien, como  $\boldsymbol{\omega} = W \dot{\mathbf{q}}$ , entonces  $\boldsymbol{\omega}^T = \dot{\mathbf{q}}^T W^T$ , y la energía cinética de rotación puede expresarse entonces en función de los ángulos de Euler y de sus derivadas temporales,

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Pi \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^T W^T) \Pi (W \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (W^T \Pi W) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T S \dot{\mathbf{q}},$$

en donde se define la matriz  $S = W^T \Pi W$ . Esta expresión da la energía cinética de rotación en función de los ángulos de Euler y de sus derivadas temporales. Con el objetivo de escribir la energía cinética en un formalismo canónico y dado que vamos a tratar con fuerzas exteriores que derivan de un potencial que no depende de  $\dot{h}_f, \dot{I}_f, \dot{\phi}$ , los momentos canónicos conjugados quedan definidos por

$$p_{h_f} = \frac{\partial(\mathcal{H} - U)}{\partial \dot{h}_f} = \frac{\partial T}{\partial \dot{h}_f},$$

$$p_{I_f} = \frac{\partial(\mathcal{H} - U)}{\partial \dot{I}_f} = \frac{\partial T}{\partial \dot{I}_f},$$

$$p_{\phi} = \frac{\partial(\mathcal{H} - U)}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}.$$

Podemos definir el vector

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_{h_f} \\ p_{I_f} \\ p_{\phi} \end{pmatrix},$$

de modo que se define el vector de momentos conjugados (usando el hecho de que  $T = \dot{\mathbf{q}}^T S \dot{\mathbf{q}}/2$ ), como

$$\mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T S \dot{\mathbf{q}} \right) = S \dot{\mathbf{q}}.$$

Por consiguiente,

$$\dot{\mathbf{q}} = S^{-1} \mathbf{p},$$

y podemos expresar la energía cinética de rotación en función de los momentos conjugados, tal y como requiere el formalismo hamiltoniano:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T S \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} (S^{-1} \mathbf{p})^T S (S^{-1} \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T S^{-1} (S S^{-1}) \mathbf{p} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T S^{-1} \mathbf{p},$$

en donde hemos usado el hecho de que la matriz  $S$  es simétrica, y por lo tanto verifica que  $(S^{-1})^T = S^{-1}$ . Como  $S = W^T \Pi W$ , entonces  $S^{-1} = W^{-1} \Pi^{-1} W^{-T}$ , siendo  $W^{-T}$  la inversa de la traspuesta de  $W$ . Así pues,

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T W^{-1} \Pi^{-1} W^{-T} \mathbf{p} = T(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Después de operar, obtenemos que para un sólido general, la energía cinética de rotación tiene la forma

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2A} \left[ \frac{\sin \phi}{\sin I_f} (p_{h_f} - p_\phi \cos I_f) + p_{I_f} \cos \phi \right]^2 + \frac{1}{2C} p_\phi^2 + \\ & + \frac{1}{2B} \left[ \frac{\cos \phi}{\sin I_f} (p_{h_f} - p_\phi \cos I_f) - p_{I_f} \sin \phi \right]^2. \end{aligned}$$

Desde el punto de vista de (1.1) es claro que un hamiltoniano que no contenga una determinada coordenada canónica proporciona inmediatamente la expresión para su momento conjugado, que no es otra que  $p_i(t) = p_{i0} = cte$ . A las coordenadas que no aparecen en el hamiltoniano se las denomina *cíclicas* o ignorables. En este sentido, la ecuación anterior para  $T$  es poco recomendable puesto que sólo la coordenada  $\phi$  es cíclica y por tanto la integración de (1.1) no va a ser fácil. Es aconsejable encontrar, mediante una transformación canónica, otro conjunto canónico en el que la expresión de la energía cinética del sólido sea mucho más sencilla, es decir, tenga el mayor número posible de coordenadas ignorables.

Es por ello que se introducen las variables de Andoyer, que son mucho más útiles que las de Euler para abordar el problema de la rotación terrestre.

### 1.3.3 Formulación canónica en las variables de Andoyer

Seguidamente sustituiremos las variables de Euler por las de Andoyer. Tales variables fueron definidas por Andoyer en 1923 y reintroducidas por Deprit en 1967, aunque con anterioridad Tisserand (1899) había empleado unas variables semejantes.

Las variables de Andoyer,  $h, g, l$ , se definen introduciendo un plano auxiliar, llamado plano de Andoyer, que es perpendicular al momento angular del sólido  $\mathbf{L}$ . Así, si consideramos las líneas de los nodos  $\overline{OB}$  y  $\overline{OC}$  formadas por la intersección del plano de Andoyer con el plano  $XY$  del sistema inercial y con el plano  $xy$  del sistema de ejes principales las nuevas variables se definen como

$$h = XOQ, \quad g = BOP, \quad l = POx.$$

Según autores, estas variables se denotan de diferente forma. Así, la notación introducida es la seguida por Kinoshita: en la figura (1.5) se muestra la equivalencia entre esta notación

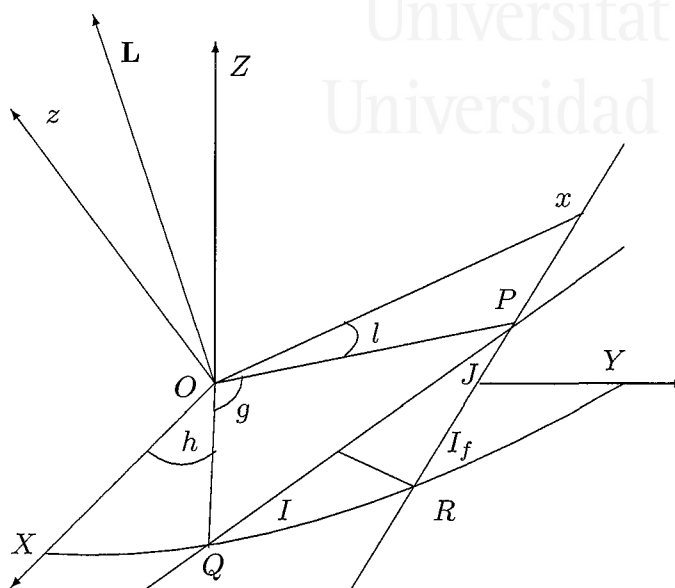


Figura 1.4: Variables de Andoyer:  $h$  es el ángulo en el plano de referencia  $OXY$  entre el eje  $X$  y la línea de nodos  $OQ$  del plano perpendicular al momento cinético  $L$ .  $g$  es el ángulo entre la línea de nodos  $OQ$  y  $OP$ , y descansa en el plano normal al momento cinético.  $l$  descansa en el plano  $Oxy$  del sistema de ejes principales, y es el ángulo entre  $OP$  y el eje  $x$  asociado al momento de inercia  $A$ .

Getino y Ferrándiz	Kinoshita
$L$	$\lambda - h$
$\lambda$	$h$
$\Lambda$	$H$
$\mu$	$g$
$\nu$	$l$
$M$	$G$
$N$	$L$
$\Omega = h - \lambda$	$\Omega = \Omega_0 - h$

Figura 1.5: Equivalencia de notaciones.



y la seguida por Getino y Ferrándiz (1900, 1991a, 1991b, 1994 y demás referencias). Se trata de encontrar la relación que existe entre los ángulos de Euler y las variables de Andoyer. Estudiaremos entonces la transformación canónica

$$(h_f, I_f, \phi; p_{h_f}, p_{I_f}, p_\phi) \rightarrow (h, g, l; p_h, p_g, p_l).$$

A los momentos conjugados de Andoyer, se les suele denotar habitualmente en la forma

$$p_h = H, \quad p_g = G, \quad p_l = L.$$

Las variables de Andoyer no sólo presentan la ventaja de tener mayor número de variables cíclicas. Además, los momentos conjugados tienen una significación física muy directa. El vector  $\omega$  se expresa de la forma

$$\omega = \dot{h} \mathbf{e}_h + \dot{g} \mathbf{e}_g + \dot{l} \mathbf{e}_l,$$

siendo  $\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_g, \mathbf{e}_l$  vectores unitarios perpendiculares respectivamente a los planos en los que giran los ángulos  $h, g$  y  $l$ . Los momentos conjugados canónicos se definen de la forma

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

pues supondremos que  $\partial U / \partial \dot{q}_i = 0$ , es decir, el potencial no dependerá de las velocidades generalizadas. Así pues, dado que

$$T = \frac{1}{2} \omega^T \Pi \omega,$$

tenemos que

$$p_h = H = \frac{\partial T}{\partial \dot{h}} = \frac{\partial}{\partial \dot{h}} \left[ \frac{1}{2} \omega^T \Pi \omega \right] = \left( \frac{\partial \omega}{\partial \dot{h}} \right)^T \Pi \omega = \mathbf{e}_h \Pi \omega = (\Pi \omega) \mathbf{e}_h,$$

en donde se ha hecho uso de que  $\omega = \dot{h} \mathbf{e}_h + \dot{g} \mathbf{e}_g + \dot{l} \mathbf{e}_l$ , y por consiguiente,

$$\frac{\partial \omega}{\partial \dot{h}} = \frac{\partial}{\partial \dot{h}} [\dot{h} \mathbf{e}_h + \dot{g} \mathbf{e}_g + \dot{l} \mathbf{e}_l] = \mathbf{e}_h.$$

De forma análoga,

$$p_g = G = \frac{\partial T}{\partial \dot{g}} = \frac{\partial}{\partial \dot{g}} \left[ \frac{1}{2} \omega^T \Pi \omega \right] = \left( \frac{\partial \omega}{\partial \dot{g}} \right)^T \Pi \omega = \mathbf{e}_g \Pi \omega = (\Pi \omega) \mathbf{e}_g,$$

en donde ahora

$$\frac{\partial \omega}{\partial \dot{g}} = \frac{\partial}{\partial \dot{g}} [\dot{h} \mathbf{e}_h + \dot{g} \mathbf{e}_g + \dot{l} \mathbf{e}_l] = \mathbf{e}_g.$$

Finalmente, para  $p_l$ , tenemos,

$$p_l = L = \frac{\partial T}{\partial \dot{l}} = \frac{\partial}{\partial \dot{l}} \left[ \frac{1}{2} \omega^T \Pi \omega \right] = \left( \frac{\partial \omega}{\partial \dot{l}} \right)^T \Pi \omega = \mathbf{e}_l \Pi \omega = (\Pi \omega) \mathbf{e}_l.$$

Resumiendo,

$$H = (\Pi\omega) \mathbf{e}_h, \quad G = (\Pi\omega) \mathbf{e}_g, \quad L = (\Pi\omega) \mathbf{e}_l.$$

Vamos a estudiar a continuación el significado físico de cada una de estas variables. Dado que  $\mathbf{L} = \Pi\omega$ ,

$$G = (\Pi\omega) \mathbf{e}_g = \mathbf{L} \mathbf{e}_g = |\mathbf{L}|,$$

es decir,  $G$  es el módulo del vector momento angular  $\mathbf{L}$ . Obsérvese que  $\mathbf{L} \mathbf{e}_g = |\mathbf{L}|$  debido a que el vector  $\mathbf{e}_g$  es perpendicular al plano en que gira  $g$ , que es precisamente el plano de Andoyer, perpendicular al momento angular  $\mathbf{L}$ . Así pues,  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{e}_g$  son vectores paralelos. Para el resto de momentos conjugados, tenemos

$$p_h = H = |\mathbf{L}| \cos I = G \cos I,$$

en donde  $I$  es el ángulo de inclinación entre el plano inercial (plano que contiene a  $h$ ) y el plano de Andoyer (plano que contiene a  $g$ , que es el plano invariante o perpendicular al momento angular). Por otro lado,

$$p_l = L = |\mathbf{L}| \cos J = G \cos J,$$

siendo  $J$  la inclinación entre el plano de Andoyer y el del ecuador (plano que contiene a  $l$ ). Resumiendo entonces,

$$G = |\mathbf{L}|, \quad H = G \cos I, \quad L = G \cos J.$$

Los nuevos momentos conjugados tienen un significado físico claro. Hemos visto que por una parte  $G$  coincide con el módulo del momento angular del sólido. Por otro lado,  $H$  y  $L$  son los módulos de las proyecciones del momento angular sobre los ejes  $OZ$  y  $Oz$  respectivamente. Además, según estas consideraciones, los parámetros  $I$  y  $J$  se escriben como

$$\cos I = \frac{H}{G}, \quad \cos J = \frac{L}{G}.$$

El conjunto de variables de Andoyer se suele representar indicando también estos dos ángulos de inclinación, en la forma

$$(h, g, l, H, G, L; I, J).$$

con el significado mostrado en la figura 1.6. Las variables  $I, J$  no son variables canónicas, sino auxiliares.

Para finalizar esta sección, queda expresar la energía cinética del sólido en términos del nuevo conjunto canónico  $h, g, l, H, G, L$ .

En primer lugar, vamos a expresar la energía cinética en función del vector momento angular, en lugar de tenerla expresada con respecto a  $\omega$ . Esto es debido a que las variables

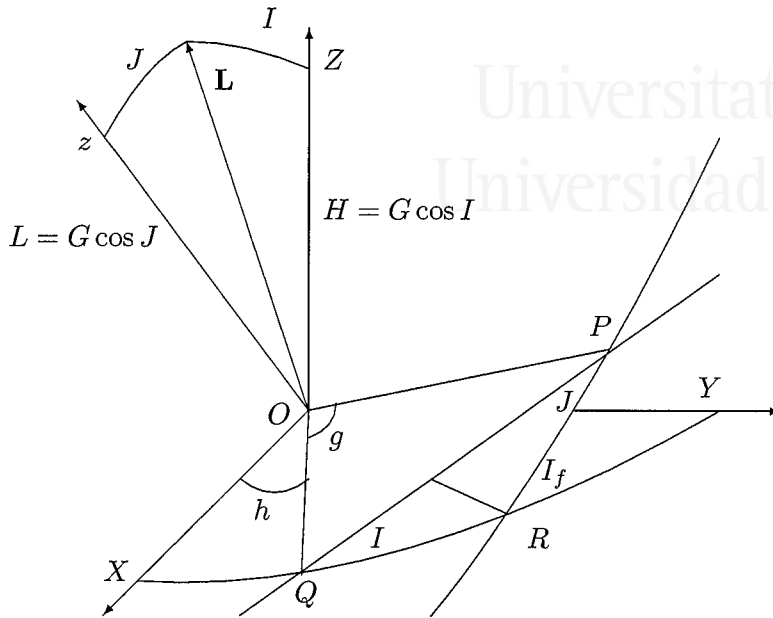


Figura 1.6: Representación del significado de los momentos conjugados de las variables de Andoyer.

de Andoyer tienen una relación directa con  $\mathbf{L}$ . Como  $\mathbf{L} = \Pi \boldsymbol{\omega}$  tendremos que  $\boldsymbol{\omega} = \Pi^{-1} \mathbf{L}$ . Por consiguiente, teniendo en cuenta también que  $\Pi$  es una matriz simétrica, y entonces,  $\Pi = \Pi^T$  y  $\Pi^{-1} = (\Pi^{-1})^T$ , tenemos, para la expresión de la energía cinética,

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Pi \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\Pi^{-1} \mathbf{L})^T \Pi (\Pi^{-1} \mathbf{L}) = \frac{1}{2} \mathbf{L}^T (\Pi^{-1})^T (\Pi \Pi^{-1}) \mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathbf{L}^T \Pi^{-1} \mathbf{L}.$$

Hemos conseguido expresar la energía cinética en función del momento angular,

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{L}^T \Pi^{-1} \mathbf{L}.$$

Ahora obtendremos  $\mathbf{L}$  en el sistema de ejes principales de la Tierra (en donde  $\Pi$  es diagonal), en función de las variables de Andoyer. En el sistema de ejes principales de la Tierra la matriz  $\Pi$  es diagonal,

$$\Pi = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

En el plano de Andoyer, el vector  $\mathbf{L}$  se corresponde precisamente con el vector  $G \mathbf{e}_g$ . Por consiguiente,

$$\mathbf{L}_{\text{Andoyer}} = M \mathbf{e}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^a & \mathbf{e}_2^a & \mathbf{e}_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{pmatrix}_{\text{Andoyer}}.$$



Cuando no aparece explícitamente la base en que es representado el vector, la indicamos como subíndice. La base  $(\mathbf{e}_1^a \ \mathbf{e}_2^a \ \mathbf{e}_g)$  es una base con los dos primeros vectores en el plano de Andoyer. Para obtener la expresión de  $\mathbf{L}$  en el sistema de ejes principales de la Tierra, rotamos primero un ángulo  $J$  alrededor del eje  $x$  del cuerpo, y a continuación, un ángulo  $l$  alrededor del eje  $Z'$  del sistema del cuerpo (véase la figura 1.4 para mejor comprensión). Así,

$$\mathbf{L}_{Oxyz} = \mathbf{R}_3(l) \mathbf{R}_1(J) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \sin J \sin l \\ G \sin J \cos l \\ G \cos J (= L) \end{pmatrix}.$$

Obtenido este resultado, y antes de continuar, cabe hacer la siguiente reflexión: como  $\mathbf{L} = \mathbf{\Pi} \boldsymbol{\omega}$ , entonces debe cumplirse

$$\begin{pmatrix} G \sin J \sin l \\ G \sin J \cos l \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega_1 \\ B\omega_2 \\ C\omega_3 \end{pmatrix}.$$

Así, sustituyendo  $\mathbf{L}$  en la expresión obtenida para  $T$ ,

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{L}^T \mathbf{\Pi}^{-1} \mathbf{L},$$

conseguimos

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} G \sin J \sin l \\ G \sin J \cos l \\ L \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G \sin J \sin l \\ G \sin J \cos l \\ L \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} G \sin J \sin l \\ G \sin J \cos l \\ L \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1/A & 0 & 0 \\ 0 & 1/B & 0 \\ 0 & 0 & 1/C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \sin J \sin l \\ G \sin J \cos l \\ L \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \left( G \sin J \sin l / A \quad G \sin J \cos l / B \quad L / C \right) \begin{pmatrix} G \sin J \sin l \\ G \sin J \cos l \\ L \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{G^2 \sin^2 J \sin^2 l}{A} + \frac{G^2 \sin^2 J \cos^2 l}{B} + \frac{L^2}{C} \right]. \end{aligned}$$

La siguiente relación es *muy utilizada*, pues permite simplificar bastante muchas expresiones:

$$G^2 - L^2 = G^2 - G^2 \cos^2 J = G^2(1 - \cos^2 J) = G^2 \sin^2 J.$$

Usándola en la ecuación de  $T$ , obtenemos

$$T = \frac{1}{2} \left[ \frac{(G^2 - L^2) \sin^2 l}{A} + \frac{(G^2 - L^2) \cos^2 l}{B} + \frac{L^2}{C} \right].$$

Finalmente, escribimos  $T$  como sigue:

$$T = \frac{1}{2} \left[ (G^2 - L^2) \left( \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{C} \right]. \quad (1.2)$$

Como puede observarse, esta expresión no depende ni de las variables  $h$  y  $g$  ni del momento conjugado  $H$ , lo cual facilitará enormemente su ulterior integración. Sólo depende por lo tanto de tres coordenadas canónicas (compárese con las cinco variables canónicas de las que dependía la energía cinética cuando se emplean las variables de Euler). Si particularizamos la expresión de la energía cinética (1.2) para el caso en que el sólido posee simetría cilíndrica en torno al eje  $OZ'$ , y por lo tanto, se verifica que  $A = B$ , la ecuación de  $T$  toma la forma

$$T = \frac{1}{2} \left[ \frac{G^2}{A} + L^2 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \right].$$

Esta expresión es cíclica en todas las coordenadas (sólo aparecen los momentos  $G$  y  $L$ ), con lo que la resolución del problema libre (caso en que la Tierra no está sometida a interacción gravitatoria alguna, y por lo tanto el potencial  $U = 0$ ), en este caso, es trivial.

### Integración del problema libre

Como hemos dicho, la integración del caso de Tierra simétrica y libre ( $U = 0$ ) se realiza fácilmente. La solución del movimiento se reduce a la integración de las ecuaciones de Hamilton, y una vez hecha, sabremos exactamente cómo se mueve el sistema ligado al cuerpo, y por ende, cómo se mueve la Tierra. En este caso de movimiento libre, el hamiltoniano coincide con la energía cinética,  $\mathcal{H} = T$ ,

$$\mathcal{H} = T = \frac{1}{2} \left[ \frac{G^2}{A} + L^2 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \right],$$

y las ecuaciones de Hamilton serán, para los momentos,

$$\dot{H} = -\frac{\partial T}{\partial h}, \quad \dot{G} = -\frac{\partial T}{\partial g}, \quad \dot{L} = -\frac{\partial T}{\partial l}.$$

Como las variables  $h, g$  y  $l$  son variables cíclicas, tenemos entonces que  $\dot{H} = \dot{G} = \dot{L} = 0$ , y por consiguiente,

$$H = \text{constante}, \quad G = \text{constante}, \quad L = \text{constante}.$$

Para la coordenada  $h$ , dado que  $H$  resulta ser también cíclica, tenemos

$$\dot{h} = \frac{\partial T}{\partial H} = 0,$$

de donde resulta que  $h$  es también constante (resulta en este punto interesante echar un vistazo a la figura 1.4, mirar dónde está el ángulo  $h$ , y pensar cómo repercute en

el movimiento de la Tierra el hecho de que permanezca constante). Las ecuaciones de Hamilton que restan son las asociadas a  $g$  y  $l$ . Estas son

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \frac{\partial T}{\partial G} = \frac{\partial}{\partial G} \left[ \frac{G^2}{2A} + \frac{L^2}{2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \right] = \frac{G}{A}, \\ \dot{l} &= \frac{\partial T}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L} \left[ \frac{G^2}{2A} + \frac{L^2}{2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \right] = L \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right). \end{aligned}$$

Como tanto  $G$  como  $L$  son constantes del movimiento, tenemos que el movimiento de  $g$  y  $l$  depende linealmente del tiempo. Como vimos al comparar  $\mathbf{L}$  con  $\Pi\boldsymbol{\omega}$ , llegamos a que  $L = C\omega_3$ . Al ser  $L$  constante, entonces resulta que  $\omega_3$  es también constante,

$$\omega_3 = \text{constante} = \Omega.$$

Por otro lado,  $\dot{l}$  se denota por  $n_l$ , y se conoce con el nombre de *movimiento medio* de  $l$ , o *frecuencia* de  $l$ . Como hemos calculado anteriormente,

$$\dot{l} = n_l = L \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right).$$

Usando el resultado  $L = \Omega C$ , tenemos que el movimiento medio de  $l$  viene dado por

$$n_l = \Omega C \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) = -\Omega \frac{C - A}{A}.$$

Esta cantidad,  $n_l$ , es el *periodo libre de Euler* (unos 305 días), y está relacionado con el movimiento del polo (únicamente en el caso de Tierra simétrica).

Cuando el movimiento no es libre, el problema se complica enormemente, y es aquí en donde se hace manifiesta la importancia del tratamiento hamiltoniano del problema, que queda resuelto de una forma muy elegante. Pasamos a estudiar la forma en que se expresa la energía potencial.

## 1.4 Energía potencial gravitatoria

### 1.4.1 Expresión armónica del potencial

Como se indicó anteriormente, para construir el hamiltoniano hay que tener en cuenta la energía potencial del sólido, en este caso debida a la atracción newtoniana de otros cuerpos. Recordemos brevemente algunos aspectos referentes a este tema. Para ello consideremos un sólido de masa  $M$ , descompuesto en elementos de masa  $dM$  localizados en los puntos  $P'$ . Si un punto  $P$ , de masa  $M_p$ , atrae a este sólido, la energía potencial inducida por esta fuerza viene dada por la conocida expresión

$$U = -\mathcal{G} \int_M \frac{M_p dM}{\Delta}, \quad (1.3)$$

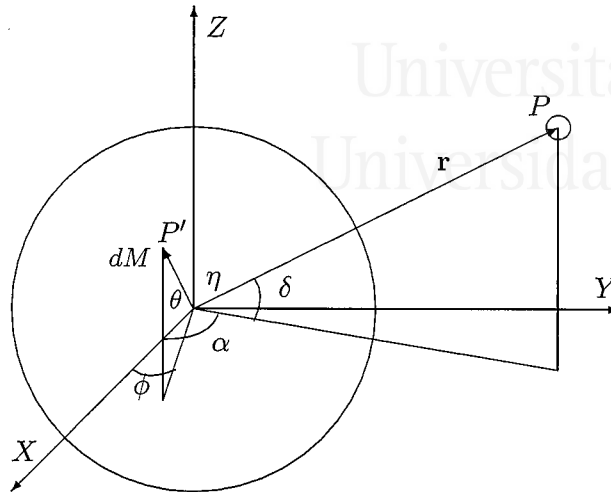


Figura 1.7: Potencial de un cuerpo sólido.

donde  $\mathcal{G}$  es la constante de gravitación universal,  $\Delta = |PP'|$  es la distancia entre el punto  $P$  y un punto genérico  $P'$  del sólido, extendiéndose la integración a toda la masa del cuerpo.

El cálculo de esa integral, cuando  $|\rho| = |\overline{OP'}| < |\mathbf{r}| = |OP|$ , suele hacerse por medio de un desarrollo en serie de polinomios de Legendre. Así, siendo  $\gamma = POP'$ , se tiene que

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{\rho}{r}\right)\cos\gamma}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n, \quad (1.4)$$

siendo  $P_n(\cos\gamma)$  el polinomio de Legendre de orden  $n$ . Algunos polinomios de Legendre, son (véase el capítulo 2)

$$P_0(\cos\gamma) = 1, \quad P_1(\cos\gamma) = \cos\gamma, \quad P_2(\cos\gamma) = \frac{1}{2}(3\cos^2\gamma - 1), \dots$$

De este modo, el potencial  $U$ ,

$$U = -\mathcal{G} \int_M \frac{M_p dM}{\Delta} = -\mathcal{G} M_p \int_M \frac{dM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n,$$

se puede escribir como

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n,$$

con

$$U_n = -\mathcal{G} M_p \int \frac{\rho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma) dM.$$

Nótese que  $r$  es constante respecto a la integral, pero no así  $\rho$  y  $\gamma$ , que dependen del punto del sólido. Asimismo,  $dM$  se expresará cuando convenga en la forma  $dM = \sigma dv$ , con  $\sigma$  la densidad (dependiente del punto) y  $dv$  el elemento de volumen. En este punto es habitual introducir coordenadas esféricas. Designaremos las del sólido como  $\rho, \theta, \phi$ ; y las del cuerpo perturbador (de masa  $M_p$ ) como  $r, \delta, \alpha$ . Como

$$\cos \gamma = \sin \delta \sin \theta + \cos \delta \cos \theta \cos(\alpha - \phi),$$

aplicando el teorema de adición de polinomios de Legendre,

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\sin \delta)P_n(\sin \theta) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin \delta)P_n^m(\sin \theta) \cos m(\alpha - \phi)$$

(en donde  $P_n^m$  son los polinomios asociados de Legendre), se llega a la siguiente expresión para  $U_n$ :

$$U_n = -\frac{\mathcal{G}M_p}{r^{n+1}} \int \rho^n \left[ P_n(\sin \delta)P_n(\sin \theta) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin \delta)P_n^m(\sin \theta) \cos m(\alpha - \phi) \right] \sigma dv.$$

Como  $\delta, \alpha$  son independientes de la variable respecto de la cual se integra, son constantes respecto de la integración. Para normalizar las expresiones, es habitual multiplicar y dividir por  $a^n$ , siendo  $a$  una constante conocida como *radio ecuatorial*, a la que se da un valor convencional. Así, podemos escribir

$$U_n = -\frac{\mathcal{G}M_p M a^n}{r^{n+1}} \left[ C_n^0 P_n(\sin \delta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\sin \delta) (C_n^m \cos m\alpha + S_n^m \sin m\alpha) \right],$$

ecuación que depende de los parámetros

$$\begin{aligned} C_n^0 &= \frac{1}{M} \int_S \left(\frac{\rho}{a}\right)^n P_n(\sin \theta) \sigma dv, \\ C_n^m &= \frac{2}{M a^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_S \rho^n P_{nm}(\sin \theta) \cos(m\phi) \sigma dv, \\ S_n^m &= \frac{2}{M a^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_S \rho^n P_{nm}(\sin \theta) \sin(m\phi) \sigma dv. \end{aligned}$$

Los coeficientes  $C_n^0, C_n^m$  dependen de la distribución de masas del sólido respecto a los ejes empleados. Si el sólido es rígido y los ejes fijos en el cuerpo, estos coeficientes serán constantes. Esa es la elección más frecuente, aunque el uso de ejes móviles obliga a ciertos ajustes de las ecuaciones del movimiento, que en general se han obtenido en sistemas inerciales.

Es habitual definir constantes  $J_n = -C_n^0$ , y  $J_n^m$  y  $\lambda_n^m$  tales que

$$C_n^m = C_{nm} = J_n^m \cos m\lambda_n^m, \quad S_n^m = S_{nm} = J_n^m \sin m\lambda_n^m.$$

Con estas notaciones, el potencial  $U$  se escribe como

$$U = -\frac{\mathcal{G}M_p M}{r} \left[ 1 - \sum_{n \geq 2} J_n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\sin \delta) + \sum_{n \geq 2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n^m(\sin \delta) (C_n^m \cos m\alpha + S_n^m \sin m\alpha) \right].$$

Si, como es habitual, se refiere el movimiento al centro de masas del cuerpo  $M$ , la ecuación anterior puede transformarse en otra equivalente cambiando  $\mathcal{G}M_p M$  por la masa reducida  $\mu = \mathcal{G}(M + M_p)$ . Nótese que se ha escrito  $n \geq 2$  porque el centro de masa se sitúa en el origen, y se anula  $J_1$  y  $C_{11}, S_{11}$ , como se detallará luego.

En el caso en que el sólido  $M$  sea la Tierra,  $M$  y  $a$  se escriben  $M_\oplus$  y  $a_\oplus$  respectivamente. Seguiremos esta notación a partir de ahora. Así, el potencial es:

$$U = -\frac{\mathcal{G}M_p M_\oplus}{r} \left[ 1 - \sum_{n \geq 2} J_n \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^n P_n(\sin \delta) + \sum_{n \geq 2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^n P_n^m(\sin \delta) (C_n^m \cos m\alpha + S_n^m \sin m\alpha) \right]. \quad (1.5)$$

### Caso zonal

Si hay simetría de revolución alrededor del eje  $z$ , puede probarse que  $C_n^m$  y  $S_n^m$  se anulan. Se tiene entonces el potencial zonal

$$U_{\text{zonal}} = -\frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n \geq 2} J_n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\sin \delta) \right].$$

Nótese que esta expresión es válida para cualquier sistema con origen en el centro de masas del sólido y un eje  $z$  de simetría, con independencia de que el sistema gire con el sólido o no. Las  $J_n$  serán constantes, pues su definición no depende de  $\phi$ . El coeficiente  $J_1$  da información sobre la situación del baricentro del cuerpo. Por su parte, el coeficiente  $J_2$  está asociado al achatamiento polar de la distribución de masa. Esto se entiende atendiendo al valor que se da en la tabla 1.1.

Tabla 1.1: Principales coeficientes del geopotencial.

$J_0 = 1$	$J_1 = -\frac{z_{cm}}{a_{\oplus}}$	$J_2 = \frac{2C - (A + B)}{2M_{\oplus}a_{\oplus}^2}$
$C_1^1 = \frac{x_{cm}}{a_{\oplus}}$	$C_2^1 = \frac{E}{M_{\oplus}a_{\oplus}^2}$	$C_2^2 = \frac{B - A}{4M_{\oplus}a_{\oplus}^2}$
$S_1^1 = \frac{y_{cm}}{a_{\oplus}}$	$S_2^1 = \frac{D}{M_{\oplus}a_{\oplus}^2}$	$S_2^2 = \frac{F}{2M_{\oplus}a_{\oplus}^2}$

En la tabla 1.1 se muestran los principales coeficientes del geopotencial.  $x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}$  son las coordenadas del centro de masas del sólido. Como se ve fácilmente, si elegimos como origen del sistema de referencia el centro de masas, entonces  $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$ , y se anulan los coeficientes  $J_1, C_1^1$  y  $S_1^1$ . Por otro lado, si además el sistema de ejes es el de ejes principales, el tensor de inercia es diagonal, es decir,  $E = D = F = 0$ , de modo que se anulan los coeficientes  $S_2^1, S_2^2$  y  $C_2^1$ .

### Terminología: armónicos zonales y tesserales

Como se verá de forma más detallada en el capítulo 2, los términos  $1/r^{n+1}P_n(\sin \delta)$  se llaman *armónicos zonales*. Los términos  $1/r^{n+1}P_n^m(\sin \delta)(C_n^m \cos(m\alpha) + S_n^m \sin(m\alpha))$  se denominan *armónicos tesserales* (o teselares), y si  $m = n$ , se llaman más propiamente *sectoriales*. El problema definido por el potencial

$$U_{\text{main}} = -\frac{\mu}{r} + \frac{\mu a_{\oplus}^2 J_2}{r^3} P_2(\sin \delta)$$

se conoce como *problema principal* o del  $J_2$ . Para la Tierra,  $J_2 \approx 10^{-3}$ , mientras que los de orden superior son del orden de  $10^{-6}$ .

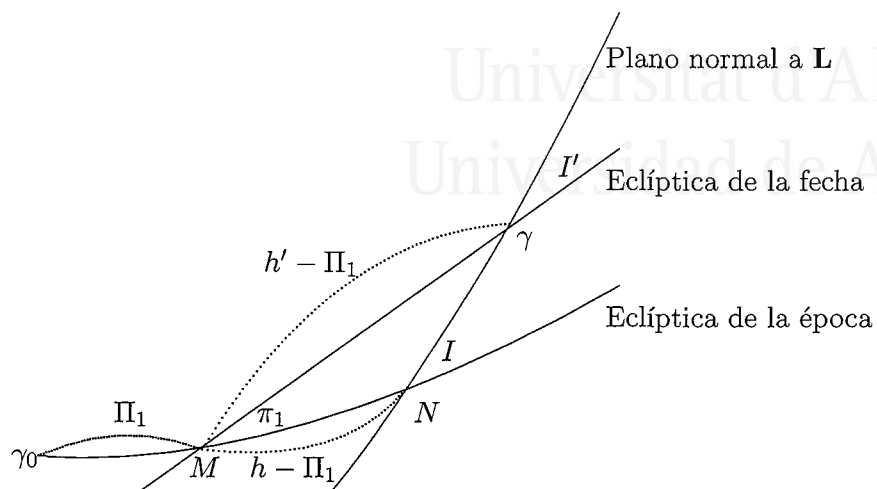


Figura 1.8: Eclíptica de la fecha y de la época.

## 1.5 Expresión del potencial perturbador en variables de Andoyer

Como se ha visto, la forma general del geopotencial viene dada por (1.5),

$$U = -\frac{\mathcal{G}M_p M_\oplus}{r} \left[ 1 - \sum_{n \geq 2} J_n \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^n P_n(\sin \delta) + \sum_{n \geq 2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^n P_n^m(\sin \delta) (C_n^m \cos m\alpha + S_n^m \sin m\alpha) \right].$$

Tomando como sistema de ejes el sistema de ejes principales del sólido, puede demostrarse que la expresión del potencial pasa a ser

$$U = \frac{\mathcal{G}M_p M_\oplus}{r} \left[ -1 + \frac{a_\oplus^2}{r^2} J_2 P_2(\sin \delta) - \frac{a_\oplus^2}{r^2} C_2^2 P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^n J_n P_n(\sin \delta) - \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^n P_n^m(\sin \delta) (C_n^m \cos m\alpha + S_n^m \sin m\alpha) \right].$$

En una aproximación de primer orden (y prescindiendo del término principal o kepleriano que no influye en la rotación), se toma la expresión del potencial hasta orden



dos:

$$U = \frac{GM_p}{r^3} \left[ \frac{2C - A - B}{2} P_2(\sin \delta) + \frac{A - B}{4} P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha \right], \quad (1.6)$$

en donde  $M_p$  es la masa del cuerpo perturbador. Tal y como hemos comentado anteriormente, las variables que aparecen son variables esféricas de los cuerpos perturbadores (Luna, Sol y planetas) referidas al ecuador terrestre, ligado al cuerpo. El movimiento orbital de la Luna y los planetas se suponen conocidos, y éstos vienen expresados respecto de la eclíptica de la fecha o, en ocasiones, respecto de la eclíptica de la época. La *eclíptica de la fecha* es la eclíptica real, es decir, el plano en que residen las órbitas de los planetas en cada instante de tiempo, y varía sustancialmente con el tiempo, luego no resulta adecuada como sistema de referencia; la *eclíptica de la época* es un plano teórico, algo así como un plano medio, que se fija cada 100 años, y que durante dicho intervalo de tiempo permanece fijo.

Por consiguiente, los armónicos esféricos deben darse en el plano de la eclíptica de la fecha, dado que el movimiento que se conoce está referido a dicho plano. Esto se hace pasando primero de las variables esféricas a las de Andoyer, y después, pasando de las variables de Andoyer a las de la eclíptica de la fecha. En el trabajo de Kinoshita (1977), esto se realiza mediante la aplicación sucesiva del teorema de Wigner. Una vez tenemos expresado el potencial en las variables referidas a la eclíptica de la fecha, se emplean las teorías orbitales para expresar las variables orbitales de la Luna y el Sol como funciones conocidas del tiempo. Estudiaremos seguidamente la forma en que se obtienen estas expresiones.

El teorema de Wigner expresa de forma sencilla la transformación de los armónicos esféricos. Sean  $\lambda$  y  $\beta$  la longitud y latitud de un punto en una esfera y  $\lambda', \beta'$  la longitud y latitud del mismo punto respecto al plano que se obtiene al rotar en sentido contrario a las agujas del reloj un ángulo  $J$  en torno al eje  $x$ . Entonces, el armónico esférico de orden  $n$   $P_n^m(\sin \beta') e^{im\lambda'}$  puede expresarse como combinación lineal de los armónicos  $P_n^{m'}(\sin \beta) e^{im'\lambda}$ :

$$P_n^m(\sin \beta') e^{\pm im\lambda'} = \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{m'=0}^n \bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) P_n^{m'}(\sin \beta) \times \exp \left\{ \pm i \left[ m'\epsilon\lambda + \frac{\pi}{2}(m - m') \right] \right\}, \quad (1.7)$$

en donde  $\epsilon = \pm 1$ , salvo para  $m' = 0$ , en cuyo caso  $\epsilon = 1$ .

### Primera rotación: paso del plano del ecuador al plano de Andoyer

En primer lugar se rota un ángulo  $J$  para pasar a expresar las coordenadas esféricas del cuerpo perturbador del plano del ecuador al plano de Andoyer. La figura 1.9 muestra las variables que entran en juego en esta rotación. La longitud del cuerpo perturbador en el

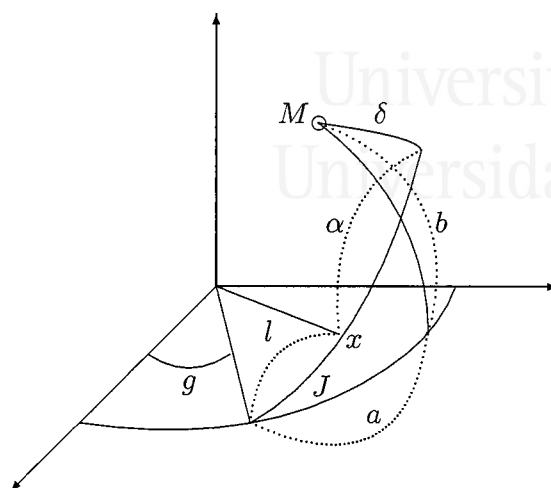


Figura 1.9: Primera rotación.

sistema del ecuador es  $\alpha$ . A dicho ángulo hemos de sumarle  $l$  dado que giramos en torno a la línea de nodos un ángulo  $J$ . Por consiguiente, se pasa de la latitud y longitud  $(\delta, \alpha + l)$ , a  $(a, b)$ . En este caso, la aplicación del teorema de Wigner toma la forma

$$P_n^m(\sin \delta) e^{\pm i m (\alpha + l)} = \sum_{\varrho = \pm 1} \sum_{m' = 0}^n \bar{Q}_n^{(m, m')}(\varrho, \cos J) P_n^{m'}(\sin b) \times \exp \left\{ \pm i \left[ m' \varrho a + \frac{\pi}{2} (m - m') \right] \right\}. \quad (1.8)$$

### Segunda rotación: paso del plano de Andoyer al plano de la eclíptica de la fecha

Seguidamente se rota un ángulo  $I$  para pasar a expresar las coordenadas esféricas del cuerpo perturbador del plano de Andoyer (perpendicular al momento angular) al plano de la eclíptica de la fecha, respecto del cual se conocen las posiciones de los cuerpos perturbadores. La figura 1.10 muestra la rotación que se produce en esta ocasión. La longitud del cuerpo perturbador en el plano de Andoyer es  $a$ . A dicho ángulo hemos de sumarle el ángulo  $g$ , puesto que la rotación se realiza en torno a la nueva línea de nodos un ángulo  $I$ . Por consiguiente, se pasa de la latitud y longitud  $(b, a + g)$ , a  $(\lambda - h, \beta)$ . En este caso, la aplicación del teorema de Wigner toma la forma

$$P_n^{m'}(\sin b) e^{\pm i m' (g + a)} = \sum_{\epsilon = \pm 1} \sum_{m'' = 0}^n \bar{Q}_n^{(m', m'')}(\epsilon, \cos I) P_n^{m''}(\sin \beta) \times \exp \left\{ \pm i \left[ m'' \epsilon (\lambda - h) + \frac{\pi}{2} (m - m') \right] \right\}. \quad (1.9)$$

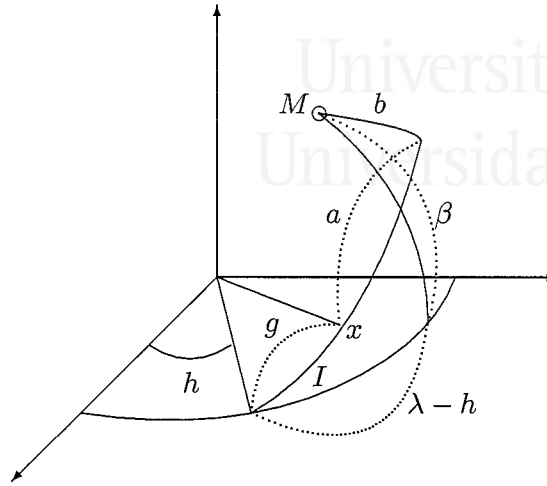


Figura 1.10: Segunda rotación.

Combinando las ecuaciones (1.8) y (1.9), tenemos el armónico esférico  $P_n^m(\sin \delta)e^{\pm im\alpha}$  expresado como combinación de los armónicos esféricos en las coordenadas del cuerpo perturbador, referidos a la eclíptica de la fecha:

$$\begin{aligned}
 P_n^m(\sin \delta)e^{\pm im\alpha} &= \sum_{\varrho, \epsilon = \pm 1} \sum_{m', m''=0}^n \bar{Q}_n^{(m, m')}(\varrho, \cos J) \bar{Q}_n^{(m', m'')}(\epsilon, \cos I) \times \\
 &\times P_n^{m''}(\sin \beta) \times \exp \left\{ \pm i \left[ m'' \varrho \epsilon (\lambda - h) - ml - m' \varrho g + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{\pi}{2}(m - m') + \frac{\pi}{2} \varrho (m' - m'') \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

## 1.6 Expresión final del potencial

Como se ha indicado las coordenadas de los cuerpos perturbadores son funciones conocidas del tiempo. Debemos pues hacer aparecer éstas de forma explícita en el teorema de Wigner. Si el movimiento del cuerpo perturbador se supone kepleriano, podemos referir este movimiento al plano que define la órbita, en éste la latitud del cuerpo será cero y su longitud vendrá dada por la suma del argumento del perigeo ( $g'$ ) con la anomalía verdadera ( $v'$ ), si tomamos como eje la línea de los nodos, como se ve en la figura 1.11. Así, considerando una rotación de eje  $Z$  de ángulo la longitud del nodo ( $h'$ ) y otra de eje

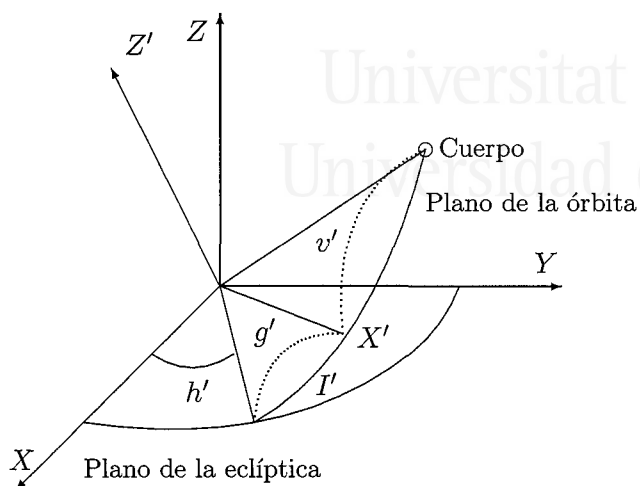


Figura 1.11: Elementos orbitales.

$X$  y ángulo la inclinación de la órbita ( $I'$ ), tendremos que

$$\begin{aligned}
 P_n^m(\sin \delta) e^{\pm i m \alpha} &= \sum_{\varrho, \epsilon, \tau = \pm 1} \sum_{m', m'', m''' = 0}^n \bar{Q}_n^{(m, m')}(\varrho, \cos J) \times \\
 &\times \bar{Q}_n^{(m', m'')}(\epsilon, \cos I) \bar{Q}_n^{(m'', m''')}(\tau, \cos I') P_n^{m'''}(0) \times \\
 &\times \exp \left\{ \pm i \left[ \varrho \epsilon \tau m''' (v' + g') - m l + \frac{\pi}{2} (m - m') - \right. \right. \\
 &\left. \left. - m' \varrho g + \frac{\pi}{2} \varrho (m' - m'') - m'' \varrho \epsilon (h' - h) + \frac{\pi}{2} \varrho \epsilon (m''' - m'') \right] \right\},
 \end{aligned}$$

donde hemos considerado que el equinoccio de la época y de la fecha coinciden. Sin embargo el movimiento de los cuerpos perturbadores no es elíptico debido a distintas perturbaciones, ni se puede considerar como tal pues acarrearía errores apreciables. Por ello esta expresión sólo es utilizada cuando se manejan armónicos de orden mayor o igual que tres en el desarrollo del potencial gravitatorio.

En la situación general las coordenadas de los cuerpos (Luna, Sol y planetas)  $\beta, \lambda_m = \lambda - h, r$  referidas a la eclíptica, se obtienen a partir de las expresiones que proporcionan algunas teorías sobre el movimiento orbital como las de Newcomb (1895), Brown (1896, 1910), Eckert (1966), Henrard (1972, 1978), o las desarrolladas en el Bureau des Longitudes de París más recientemente. Por medio de éstas, los armónicos esféricos  $(a/r) P_n^m(\sin \beta) \cos(m \lambda_m)$  y  $(a/r) P_n^m(\sin \beta) \sin(m \lambda_m)$ , donde  $a$  es la distancia media entre

los dos cuerpos, pueden ser expresados mediante series trigonométricas. Así se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2(\sin \beta) &= -\sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2^1(\sin \beta) \cos \lambda_m &= 3 \sum_i \bar{A}_i^{(1)} \sin \Theta_i, \\ \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2^1(\sin \beta) \sin \lambda_m &= 3 \sum_i A_i^{(1)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2^2(\sin \beta) \cos 2\lambda_m &= 3 \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2^2(\sin \beta) \sin 2\lambda_m &= 3 \sum_i \bar{A}_i^{(2)} \sin \Theta_i, \end{aligned}$$

donde  $i = (i_{l_M}, i_{l_S}, i_F, i_D, i_\Omega)$ ,  $\Theta_i = i_{l_M} l_M + i_{l_S} l_S + i_F F + i_D D + i_\Omega \Omega$ , siendo  $l_M$  la anomalía media de la Luna,  $l_S$  la anomalía media del Sol,  $F = L_M - \Omega$ ,  $D = L_M - L_S$ . Las variables de Delaunay de la Luna y Sol se denotan por  $l_M, g_M, h_M$  y  $l_S, g_S, h_S$ , y se tiene que también se verifica  $F = l_M + g_M$  y  $D = l_M + g_M + h_M - l_S - g_S - h_S$ .  $\Omega$  es la longitud media del nodo de la Luna,  $L_M$  es la longitud media de la Luna,  $L_S$  la longitud media del Sol, y  $\Omega = \Omega_0 - h$  (el potencial dependerá de la variable de Andoyer  $h$  a través de  $\Theta_i$ ).

En virtud de las relaciones trigonométricas de adición de ángulos se verifican las igualdades

$$A_i^{(1)} = -\bar{A}_i^{(1)}, \quad A_i^{(2)} = \bar{A}_i^{(2)}.$$

En sentido estricto, el signo igual en las ecuaciones anteriores no es exacto, ya que los términos de largo periodo y planetarios producen diferencias muy pequeñas, pero estas pueden ser ignoradas. Por otra parte, ya que la excentricidad del Sol cambia regularmente debido a las perturbaciones planetarias, estos coeficientes tienen una dependencia temporal de la forma

$$A_i^{(j)} = A_{i,0}^{(j)} + A_{i,1}^{(j)} t.$$

Los valores numéricos de estos coeficientes y una descripción más detallada acerca de su obtención son dados por Kinoshita (1977).

En las ecuaciones de los armónicos las coordenadas del cuerpo perturbador aparecen en la forma:  $P_2(\sin \beta) \cos u$ ,  $P_2^1(\sin \beta) \cos(\lambda_m - \tau u)$ ,  $P_2^2(\sin \beta) \cos(2\lambda_m - \tau u)$ ,  $P_2(\sin \beta) \sin u$ ,  $P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda_m - \tau u)$  y  $P_2^2(\sin \beta) \sin(2\lambda_m - \tau u)$ , en donde  $u$  es una combinación lineal de la forma  $u = k_1 g + k_2 l$ , siendo  $k_1, k_2$  números enteros. Con la ayuda de las cinco ecuaciones

dadas anteriormente, podemos escribir estas últimas relaciones en la forma

$$\begin{aligned}
 P_2(\sin \beta) \cos u &= -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_{\tau=\pm 1} \sum_i A_i^{(0)} \cos(u - \tau \Theta_i), \\
 P_2(\sin \beta) \sin u &= -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_{\tau=\pm 1} \sum_i A_i^{(0)} \sin(u - \tau \Theta_i), \\
 P_2^1(\sin \beta) \cos(\lambda_m - \tau u) &= 3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_i A_i^{(1)} \tau \sin(u - \tau \Theta_i), \\
 P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda_m - \tau u) &= 3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_i A_i^{(1)} \cos(u - \tau \Theta_i), \\
 P_2^2(\sin \beta) \cos(2\lambda_m - \tau u) &= 3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_i A_i^{(2)} \cos(u - \tau \Theta_i), \\
 P_2^2(\sin \beta) \sin(2\lambda_m - \tau u) &= -3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_i A_i^{(2)} \tau \sin(u - \tau \Theta_i). \tag{1.11}
 \end{aligned}$$

Recordemos que tanto los coeficientes  $A_i^{(j)}$  como el argumento  $\Theta_i$  son funciones conocidas del tiempo. Sustituyendo las ecuaciones (1.11) en la ecuación (1.10), obtenemos las expresiones de transformación del potencial que se emplean para los distintos modelos de Tierra, resultando

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2(\sin \delta) &= \frac{3}{2} (3 \cos^2 J - 1) \sum_i B_i \cos \Theta_i - \\
 &- \frac{3}{2} \sin 2J \sum_{i,\tau} C_i(\tau) \cos(g - \tau \Theta_i) + \\
 &+ \frac{3}{4} \sin^2 J \sum_{i,\tau} D_i(\tau) \cos(2g - \tau \Theta_i), \tag{1.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2^1(\sin \delta) \cos \alpha &= \frac{9}{4} \sin 2J \sum_{i,\tau} B_i \sin(l - \tau \Theta_i) + \frac{3}{2} \sum_{\rho} \rho (1 + \rho \cos J) \times \\
 &\times (-1 + 2\rho \cos J) \sum_{i,\tau} C_i(\tau) \sin(g + \rho l - \tau \Theta_i) - \\
 &- \frac{3}{4} \sum_{\rho} \sin J (1 + \rho \cos J) \sum_{i,\tau} D_i(\tau) \sin(2g + \rho l - \tau \Theta_i),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2^1(\sin \delta) \sin \alpha &= \frac{9}{4} \sin 2J \sum_{i,\tau} B_i \cos(l - \tau \Theta_i) + \frac{3}{2} \sum_{\rho} (1 + \rho \cos l) \times \\
 &\times (-1 + 2\rho \cos J) \sum_{i,\tau} C_i(\tau) \cos(g + \rho l - \tau \Theta_i) - \\
 &- \frac{3}{4} \sum_{\rho} \rho \sin J (1 + \rho \cos J) \sum_{i,\tau} D_i(\tau) \cos(2g + \rho l - \tau \Theta_i),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha &= -\frac{9}{2} \sin^2 J \sum_{i,\tau} B_i \cos(2l - \tau\Theta_i) - \\ &- 3 \sum_{\rho} \rho \sin J(1 + \rho \cos J) \sum_{i,\tau} C_i(\tau) \cos(g + 2\rho l - \tau\Theta_i) - \\ &- \frac{3}{4} \sum_{\rho} (1 + \rho \cos J)^2 \sum_{i,\tau} D_i(\tau) \cos(2g + 2\rho l - \tau\Theta_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2^2(\sin \delta) \sin 2\alpha &= \frac{9}{2} \sin^2 J \sum_{i,\tau} B_i \sin(2l - \tau\Theta_i) + \\ &+ 3 \sum_{\rho} \sin J(1 + \rho \cos J) \sum_{i,\tau} C_i(\tau) \sin(g + 2\rho l - \tau\Theta_i) + \\ &+ \frac{3}{4} \sum_{\rho} \rho(1 + \rho \cos J)^2 \sum_{i,\tau} D_i(\tau) \sin(2g + 2\rho l - \tau\Theta_i). \end{aligned}$$

En todas estas expresiones se supone que los índices de los sumatorios  $\tau$  y  $\rho$  toman los valores  $+1$  y  $-1$ . Los coeficientes  $B_i$ ,  $C_i(\tau)$  y  $D_i(\tau)$  vienen dados por

$$\begin{aligned} B_i &= -\frac{1}{6}(3 \cos^2 I - 1)A_i^{(0)} - \frac{1}{2} \sin 2IA_i^{(1)} - \frac{1}{4} \sin^2 IA_i^{(2)}, \\ C_i(\tau) &= -\frac{1}{4} \sin 2IA_i^{(0)} + \frac{1}{2}(1 + \tau \cos I)(-1 + 2\tau \cos I)A_i^{(1)} + \\ &+ \frac{1}{4} \tau \sin I(1 + \tau \cos I)A_i^{(2)}, \\ D_i(\tau) &= -\frac{1}{2} \sin^2 IA_i^{(0)} + \tau \sin I(1 + \tau \cos I)A_i^{(1)} - \frac{1}{4}(1 + \tau \cos I)^2 A_i^{(2)}. \end{aligned}$$

## 1.7 Forma final del hamiltoniano

Como hemos dicho, en el problema de la rotación terrestre influyen una gran cantidad de fenómenos, por lo que su tratamiento resulta de una enorme complejidad. Tan solo es posible un estudio del mismo someténdolo a restricciones que hagan su formulación y resolución posible. La ventaja que incorpora el formalismo hamiltoniano aplicado a este problema es que precisamente ésta adición de fenómenos resulta relativamente sencilla.

La primera hipótesis restrictiva que vamos a hacer es considerar a la Tierra como un elipsoide rígido con semiejes  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Esto no es cierto estrictamente, dado que la Tierra no es rígida; se presentan fenómenos de elasticidad, más aún de viscoelasticidad. La Tierra se deforma bajo la acción de fuerzas derivadas de su potencial centrífugo y de un potencial de marea inducido por la Luna y el Sol. Sin embargo, en una teoría de primer orden este efecto puede ser ignorado.

En segundo lugar, supondremos resuelta la parte orbital del problema considerando los movimientos de la Luna y el Sol, supuestos puntuales, como funciones conocidas del tiempo. Tomaremos estos movimientos de las teorías planetarias existentes. Al considerar el movimiento orbital conocido, lo desligamos de la rotación, es decir, implícitamente estamos despreciando en parte el efecto que la rotación tiene sobre el movimiento orbital y viceversa.

En lo que respecta a la energía cinética, y según lo señalado, corresponde a la expresión obtenida para un sólido triaxial, y expresada en variables de Andoyer.

$$T = \frac{1}{2} \left[ (G^2 - L^2) \left( \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{C} \right].$$

Al plano  $XY$  del sistema inercial se le denomina eclíptica (que supondremos fija) y al del sistema de ejes principales, ecuador.

Respecto a la energía potencial, ésta es debida al campo gravitatorio de la Luna y el Sol (principalmente). En una teoría de primer orden es suficiente con considerar hasta  $n = 2$  para la expresión del mismo. Tomando la expresión en el sistema de ejes principales (ecuación (1.6))

$$U = \frac{\mathcal{G}M_p}{r^3} \left[ \frac{2C - A - B}{2} P_2(\sin \delta) + \frac{A - B}{4} P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha \right],$$

donde  $M_p$ ,  $\delta$  y  $\alpha$  son la masa, la latitud y la longitud geocéntrica del cuerpo perturbador, la Luna, o el Sol. Recordemos que se ha prescindido del término  $-\mathcal{G}M_p M_\oplus / r$ , puesto que sólo afecta al movimiento orbital.

Como vimos en secciones anteriores, la energía potencial debe ser expresada en el mismo conjunto canónico que la energía cinética, el de Andoyer en nuestro caso. Puesto que las funciones esféricas  $P_2(\sin \delta)$  y  $P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha$  en (1.6) se refieren al sistema de ejes principales de la Tierra, y la posición relativa de Tierra-Luna y Tierra-Sol a la eclíptica, es preciso transformar dichas funciones esféricas en otras referidas a la eclíptica. Esta transformación es la que hará aparecer en la expresión del potencial las variables de Andoyer. Una vez efectuada dicha transformación, tendremos el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = T(l, G, L) + U(h, g, l, H, G, L),$$

que aplicando las ecuaciones de Hamilton puede ser integrado aplicando algún método de perturbaciones. El empleado por Kinoshita es el método de perturbaciones de Hori, que se describe en la siguiente sección.

## 1.8 El método de Hori

Cualquier método de perturbaciones es aplicable cuando el hamiltoniano del problema se puede escribir como suma de una parte no perturbada (de la que se conoce la solución) y



una perturbada que difiere ligeramente del hamiltoniano correspondiente a un problema integrable,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad (1.13)$$

en donde  $|\mathcal{H}_1| \ll |\mathcal{H}_0|$ . En nuestro caso podemos imaginar que el problema resoluble es el del movimiento libre de un sólido simétrico y que tanto la triaxialidad como la atracción lunisolar pueden considerarse como pequeñas perturbaciones a éste. Esta consideración debe ser avalada numéricamente. En estas situaciones cualquier método de perturbaciones proporciona soluciones aproximadas al problema completo.

Si además la perturbación ( $\mathcal{H}_1$ ) viene dada por medio de una serie de Poisson en variables angulares canónicas y en otras que dependen directamente del tiempo (como en nuestro caso), la integración de las ecuaciones correspondientes se ve facilitada en gran medida por la aplicación de alguno de los métodos canónicos de perturbaciones basados en el manejo de series de Lie, como el de Hori (1966). Este método se basa en la determinación recurrente de una función generatriz y la correspondiente transformación canónica de las variables, de modo que el hamiltoniano inicial se transforme en un nuevo hamiltoniano más fácilmente integrable:

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1^* . \quad (1.14)$$

Este método proporciona una solución asintótica, válida en intervalos de tiempo del orden del inverso de la perturbación. Con el fin de obtener con mayor precisión el movimiento secular, suele combinarse con un método de promedios, de modo que se escoge como  $\mathcal{H}_1^*$  la parte no periódica de  $\mathcal{H}_1$  respecto de las variables angulares cuyos momentos conjugados están presentes en  $\mathcal{H}_0$ .

La función generatriz  $\mathcal{W}$  de la transformación correspondiente puede determinarse a partir de las ecuaciones del método, que en primer orden son

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^* &= \mathcal{H}_0, \\ \mathcal{H}_1^* &= \mathcal{H}_{1\text{sec}}, \\ \mathcal{W} &= \int \mathcal{H}_{1\text{per}} dt . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Los subíndices *per* y *sec* denotan la parte periódica y secular, respectivamente, de  $\mathcal{H}_1$ . La integración que determina  $\mathcal{W}$  se realiza sustituyendo las variables canónicas por la solución del problema no perturbado y deshaciendo el cambio una vez efectuada la integración. Debemos señalar que  $\mathcal{H}_0^*$ ,  $\mathcal{H}_1^*$ ,  $\mathcal{W}$  se suponen expresadas en las nuevas variables,  $p^*$  y  $q^*$ , mediante la sustitución literal de las antiguas variables por éstas nuevas. Las ecuaciones de perturbación son

$$\Delta p = p - p^* = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q^*}, \quad \Delta q = q - q^* = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p^*}, \quad (1.16)$$



donde  $p$  y  $q$  representan un momento genérico y su variable conjugada,  $p^*$  y  $q^*$  el par de variables correspondientes al efectuar la transformación canónica de función generatriz  $\mathcal{W}$ . La función  $\mathcal{W}$  se supone expresada en las nuevas variables, mediante la sustitución literal de las antiguas por éstas. A su vez la evolución temporal (secular) de las nuevas variables viene dada por la solución del sistema de hamiltoniano  $\mathcal{H}^*$ , esto es, por

$$\dot{p}^* = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial q^*}, \quad \dot{q}^* = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial p^*}.$$

## 1.9 Integración del problema (primer orden)

Una vez expresado el potencial lunisolar en términos de las variables de Andoyer, la construcción del hamiltoniano es inmediata, siendo éste, según se ha visto,

$$\mathcal{H} = T(G, L, l) + U_L(H, G, L, h, g, l) + U_S(H, G, L, h, g, l). \quad (1.17)$$

Recordemos que las variables de Andoyer están referidas a un plano fijo inercial que hemos denominado eclíptica, y que con más exactitud se denomina eclíptica de la época. Debido a que las posiciones de la Luna y el Sol están ordinariamente expresadas desde la eclíptica de la fecha, es conveniente referir la energía cinética a este plano. Sin embargo la eclíptica de la fecha no es un plano inercial sino que se mueve lentamente debido a las perturbaciones planetarias.

La expresión del hamiltoniano en esta nueva referencia se obtiene mediante una transformación canónica (Kinoshita, 1977), que relaciona ambos planos, interpretándose las variables transformadas como variables de Andoyer, pero referidas a la nueva eclíptica. En lo que respecta a la forma explícita del hamiltoniano, ésta adopta la expresión que tenía en el sistema inercial mas un nuevo término que depende del movimiento (precesión) de la eclíptica de la fecha, cuya dependencia temporal es conocida. Así tenemos que

$$\mathcal{H} = T(G, L, l) + U_L(H, G, L, h, g, l) + U_S(H, G, L, h, g, l) + E(H, G, h), \quad (1.18)$$

donde recordemos que las variables están referidas a la nueva eclíptica. El término complementario  $E(H, G, h)$  viene dado por

$$E(H, G, h) = G \sin I E_1 + H E_2, \quad (1.19)$$

donde

$$\begin{aligned} E_1 &= \sin \pi_1 \cos(h - \Pi_1) \frac{d\Pi_1}{dt} - \sin(h - \pi_1) \frac{d\pi_1}{dt}, \\ E_2 &= (1 - \cos \pi_1) \frac{d\Pi_1}{dt}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

siendo  $\pi_1$  y  $\Pi_1$  los ángulos que definen la referencia móvil, como se muestra en la figura 1.8.

La utilización del sistema de referencia no inercial simplifica enormemente el desarrollo del potencial. Por otra parte el término  $E(H, G, h)$  sólo contribuye al movimiento precesional (movimiento secular) y no afecta a las nutaciones (movimiento periódico), lo que proporciona un desacoplo muy conveniente del problema.

Resulta evidente, considerando las ecuaciones (1.15), que la práctica del método de Hori se ve simplificada cuando el término de orden cero (el hamiltoniano no perturbado) no contiene variables angulares. En nuestro caso, el hamiltoniano no perturbado viene dado por la energía cinética (caso del movimiento libre) (1.2),

$$T = \frac{1}{2} \left[ (G^2 - L^2) \left( \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{C} \right],$$

conteniendo a la vez la variable  $l$  y el momento  $L$ . Sin embargo, podemos expresar  $T$  en términos del ángulo doble  $2l$ , y descomponerla como  $T = T_0 + T_1$ , con:

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} \frac{G^2}{A} + \frac{1}{2} L^2 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right), \\ T_1 &= \frac{1}{4} (G^2 - L^2) \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) (1 + \cos 2l). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Nótese que  $T_0$  no es más que la energía cinética de un sólido simétrico.

Como se conoce, el potencial puede escribirse como  $U = U_1 + U_2 + U_3$ , siendo

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\mathcal{G}M_p}{r^3} \left[ \frac{2C - A - B}{2} P_2(\sin \delta) \right], \\ U_2 &= \frac{\mathcal{G}M_p}{r^3} \left[ \frac{A - B}{4} P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha \right], \\ U_3 &= \sum_{n=3}^{\infty} U_n. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Para elegir el hamiltoniano no perturbado, conviene estudiar el orden de magnitud entre  $T_0$  y el resto de términos que intervienen en el hamiltoniano. Para ello hemos de recordar algunos valores de los parámetros característicos de la Tierra. El ángulo  $J$  es el formado por el eje de figura  $OZ'$  con el momento angular. Su valor es del orden de  $10^{-6}$  rad. En lo que respecta a los momentos de inercia de la Tierra según el modelo de Tierra 1066A de Gilbert y Dziewonski (1975) se estiman en

$$C = 8.0438 \times 10^{37} \text{ kg m}^2, \quad A = 8.0177 \times 10^{37} \text{ kg m}^2, \quad B = 8.0179 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

Por otra parte  $G \approx L \approx C\omega$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular de rotación de la Tierra, que numéricamente vale  $\omega = 7292115 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ .

De este modo tendremos que el orden de las perturbaciones debido a la triaxialidad de la Tierra vendrá dado por

$$\frac{T_1}{T_0} \approx \frac{G^2 \sin^2 J (1/B - 1/A)}{L^2/C} \approx C \sin^2 J \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \approx -2 \times 10^{-5} \sin^2 J.$$

Para los distintos términos del potencial

$$\begin{aligned}\frac{U_1}{T_1} &\approx \frac{M_p}{M_p + M_\oplus} \left(\frac{n'}{\omega}\right)^2 \frac{2C - A - B}{2} \approx \begin{cases} 6 \times 10^{-8} \text{ (Luna),} \\ 3 \times 10^{-8} \text{ (Sol),} \end{cases} \\ \frac{U_2}{U_1} &\approx \frac{A - B}{2C - A - B} \approx -10^{-3}, \\ \frac{U_3}{U_2} &\approx \frac{J_3 a_\oplus}{J_2 a} \approx \begin{cases} 4 \times 10^{-5} \text{ (Luna),} \\ 10^{-7} \text{ (Sol),} \end{cases}\end{aligned}$$

donde  $a_\oplus, a_p$  son los radios medios de la Tierra y el cuerpo perturbador,  $M_\oplus, M_p$  sus masas, y  $J_2, J_3$  los coeficientes zonales de orden dos y tres. También se ha sustituido  $\mathcal{G}/r^3$  por  $n'^2/(M_p + M_\oplus)$ , siendo  $n'$  el movimiento medio del cuerpo perturbador. Dicha sustitución es consecuencia directa de la tercera ley de Kepler.

En lo que se refiere al término que da cuenta del movimiento de la eclíptica tenemos que  $E/T_0 \approx 10^{-7}$ .

De los órdenes de magnitud deducidos anteriormente es obvio que la contribución, al menos en primer orden, de la triaxialidad en la energía potencial y la cinética puede ser ignorada, así supondremos que la Tierra es un sólido de revolución, esto es,  $A = B$ . Por otra parte el único término significativo en primer orden del potencial es  $U_1$ . En esta situación tendremos que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \rightarrow \begin{cases} \mathcal{H}_0 = T_0 \\ \mathcal{H}_1 = E + U_1 \end{cases} .$$

Es decir, el problema no perturbado es el correspondiente al problema libre de un sólido simétrico. Nótese que esta elección es diferente de la original de Kinoshita, que consideró un sólido asimétrico previamente transformado a variables de acción-ángulo, lo que introducía complicaciones adicionales a los cálculos. Para la aplicación del método de Hori se precisa la resolución del problema no perturbado. Las ecuaciones de Hamilton en el caso no perturbado  $\mathcal{H}_0 = T_0$ , tienen por solución

$$\begin{aligned}H &= H_0, & h &= h_0, \\ G &= G_0, & g &= \frac{M_0}{A}t + g_0, \\ L &= L_0, & l &= \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)L_0t + l_0,\end{aligned}$$

con  $H_0, G_0, L_0, h_0, g_0, l_0$  constantes de integración. Con frecuencia se utiliza la notación

$$n_g = \frac{dg}{dt} = \frac{G_0}{A}, \quad n_l = \frac{dl}{dt} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)L_0,$$

llamándose a  $n_g, n_l$  movimientos medios de las variables  $g$  y  $l$ .

Según los órdenes de magnitud evaluados anteriormente tendremos para el hamiltoniano de perturbación

$$\mathcal{H}_1 = \frac{\mathcal{G}M_p}{r^3}[(C - A)P_2(\sin \delta)] + E,$$

donde por comodidad de escritura sólo consideraremos un término del potencial, entendiendo que para calcular las expresiones finales aparecerán dos contribuciones: una debida a la Luna y otra al Sol (esto mismo puede extenderse de modo que se tenga en cuenta el efecto planetario). Por otra parte recordemos que debemos expresar  $P_2(\sin \delta)$  en términos de las variables de Andoyer, y así, empleando la ecuación (1.12),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 = & \frac{\mathcal{G}M_p}{a^3}(C - A) \left[ \frac{3}{2}(3 \cos^2 J - 1) \sum_i B_i \cos \Theta_i - \right. \\ & - \frac{3}{2} \sin 2J \sum_{i,\tau} C_i(\tau) \cos(g - \tau \Theta_i) + \\ & \left. + \frac{3}{4} \sin^2 J \sum_{i,\tau} D_i(\tau) \cos(2g - \tau \Theta_i) \right] + E(H, G, h). \end{aligned}$$

Para aplicar el método de Hori debemos separar esta expresión en una parte secular y en otra periódica. Como parte secular consideraremos aquella en la que no aparezca ninguna variable angular. En nuestro caso esta última situación se traduce en los términos que contengan única y exclusivamente a  $h$ . Así pues, examinando la última expresión es claro que  $E(H, G, h)$  es un término puramente secular. Por otra parte, dentro de los valores que toma el argumento  $\Theta_i$  se encuentra  $\Theta_i = 0$  (Kinoshita, 1977), o lo que es lo mismo  $i = (i_M, i_S, i_F, i_D, i_\Omega) = (0, 0, 0, 0, 0)$ . Este valor dará lugar a una contribución secular sólo cuando sea el único argumento de las funciones trigonométricas. El resto del hamiltoniano de perturbación será periódico puesto que involucra la variable  $g$  cuyo periodo es del orden de un día. Según estas consideraciones tendremos que

$$\mathcal{H}_{1\text{sec}} = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}M_p}{a^3}(C - A)(3 \cos^2 J - 1)B_0 + E(H, G, h),$$

$$\mathcal{H}_{1\text{per}} = \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_{1\text{sec}},$$

con lo que el nuevo hamiltoniano será

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1^* = \mathcal{H}_0(L^*, G^*) + \mathcal{H}_{\text{sec}}(L^*, G^*, H^*, h^*). \quad (1.23)$$

Por otra parte, una vez tenemos la parte periódica es posible calcular la función generatriz,

$$\mathcal{W} = \int \mathcal{H}_{1\text{per}} dt,$$

donde la integración se realiza sobre el problema no perturbado, cuyas soluciones vienen dadas por las ecuaciones ya obtenidas. Puesto que los momentos son constantes, la integración resulta inmediata, obteniéndose

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}(3 \cos^2 J^* - 1)\mathcal{W}_0 - \frac{1}{2} \sin 2J^* \mathcal{W}_1 + \frac{1}{4} \sin^2 J^* \mathcal{W}_2,$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 &= \sum_{i \neq 0} \frac{B_i^*}{n_i^*} \sin \Theta_i^*, \\ \mathcal{W}_1 &= k' \sum_{i, \tau} \frac{C_i^*(\tau)}{n_g^* - \tau n_i^*} \sin(g^* - \tau \Theta_i^*), \\ \mathcal{W}_2 &= k' \sum_{i, \tau} \frac{D_i^*(\tau)}{2n_g^* - \tau n_i^*} \sin(2g^* - \tau \Theta_i^*), \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde

$$k' = \frac{3GM_p}{a^3}(C - A), \quad n_i^* = \left( \frac{d\Theta_i}{dt} \right)^* = \text{cte.}$$

## Nota

En sentido estricto al realizar la integral para la obtención de la función generatriz deberíamos tener en cuenta la parte secular de los coeficientes  $A_i$ , que recordemos dependían del tiempo. Sin embargo, estos cambios no causan efecto apreciable por lo que no serán considerados (Kinoshita, 1977).

### 1.9.1 Movimiento del plano de Andoyer

De esta sección en adelante, los asteriscos usados para diferenciar las variables transformadas se omitirán por simplicidad. Por otra parte, centraremos nuestra atención en el movimiento periódico, esto es, en las nutaciones. La parte secular se obtiene sin más que resolver el sistema diferencial habitual de hamiltoniano  $\mathcal{H}^*$ . Este estudio se realiza con detalle en (Kinoshita, 1977).

Los incrementos sufridos por las variables debidos a las perturbaciones periódicas vienen dados por las ecuaciones

$$\Delta p = p - p^* = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q^*}, \quad \Delta q = q - q^* = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p^*}.$$

Así es necesario efectuar la derivación de la función generatriz con respecto a todas las variables. Por ello conviene realizar un análisis de la dependencia funcional de  $\mathcal{W}$ .

De las ecuaciones para  $\mathcal{W}, \mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$  es claro que se incluye a  $H, G, L$  únicamente en la forma

$$\cos I = \frac{H}{G}, \quad \cos J = \frac{L}{G},$$

que aparecen o bien explícitamente como es el caso de  $J$ , o bien a través de las funciones  $B_i, C_i(\tau), D_i(\tau)$  y de  $n_i$  como es el caso de  $I$ . En lo que respecta a las variables,  $g$  aparece explícitamente como argumento de las funciones trigonométricas en  $\mathcal{W}_1$  y  $\mathcal{W}_2$ ;  $h$  lo hace, como se indicó en el capítulo anterior, a través de  $\Theta_i$  y  $l$  no aparece. Analizadas todas las dependencias, tenemos clara la forma en la que debemos llevar a cabo todas las derivaciones.

Según lo expuesto es más conveniente expresar los operadores de derivación relativos a los momentos en términos de los correspondientes a las variables  $I$  y  $J$ . Así tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial G} = \left( \frac{\partial}{\partial G} \right) + \frac{\cot J}{G} \frac{\partial}{\partial J} + \frac{\cot I}{G} \frac{\partial}{\partial I},$$

$$\frac{\partial}{\partial L} = \left( \frac{\partial}{\partial L} \right) - \frac{1}{G \sin J} \frac{\partial}{\partial J},$$

$$\frac{\partial}{\partial H} = \left( \frac{\partial}{\partial H} \right) - \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial}{\partial I}.$$

Las derivadas que aparecen entre paréntesis hacen referencia a derivadas parciales de aquellos términos que contuvieran de modo explícito las variables  $H, G, L$ . De esta manera, las ecuaciones de perturbación dadas por (1.16), se escriben como

$$\Delta h = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial I},$$

$$\Delta g = \frac{1}{G} \left( \cot J \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J} + \cot I \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial I} \right),$$

$$\Delta l = -\frac{1}{G \sin J} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J},$$

$$\Delta I = \frac{1}{G} \left( -\frac{1}{\sin I} \Delta H + \cot I \Delta G \right) = \frac{1}{G} \left( \frac{1}{\sin I} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial h} - \cot I \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} \right),$$

$$\Delta J = \frac{1}{G} \left( -\frac{1}{\sin J} \Delta L + \cot J \Delta G \right) = \frac{1}{G} \left( \frac{1}{\sin J} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial l} - \cot J \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} \right).$$

Como puede apreciarse, las ecuaciones de perturbación presentan divisores del tipo  $\sin J$ . Ahora bien, como este ángulo es del orden de  $10^{-6}$  radianes, éstos podrían ocasionar problemas. Este hecho obligaría a la transformación a un nuevo conjunto de variables

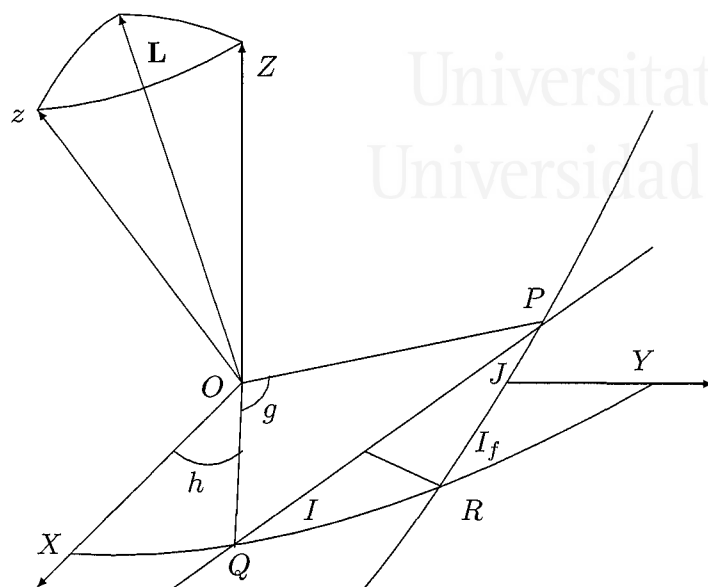


Figura 1.12: Relación entre las variables de Andoyer y las de Euler.

que no presentasen singularidades. Sin embargo, para las nutaciones más importantes,  $\Delta I$  (nutación en oblicuidad) y  $\Delta h$  (nutación en longitud), que son los ángulos que fijan la posición del plano de Andoyer, estos pequeños divisores se simplifican, haciendo innecesaria dicha transformación para nuestros propósitos.

A continuación describiremos las nutaciones del plano de Andoyer. Con vistas a simplificar cálculos haremos uso del hecho de que  $J \approx 10^{-6}$  rad. Esto permitirá despreciar términos que contengan órdenes iguales o superiores a  $J$  en las perturbaciones. De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta h &= -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}_0}{\partial I} + O(J) = \frac{k'}{G} \sum_{i \neq 0} \frac{E_i}{n_i} \sin \Theta_i + O(J), \\ \Delta I &= \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}_0}{\partial h} + O(J) = \frac{k'}{G \sin I} \sum_{i \neq 0} i_{\Omega} \frac{E_i}{n_i} \cos \Theta_i + O(J).\end{aligned}\quad (1.25)$$

Los términos de la derecha de las ecuaciones (1.25) se denominan *términos de Poisson*.

## 1.10 Movimiento del plano ecuatorial

El movimiento del plano ecuatorial viene determinado por los ángulos de Euler  $h_f, I_f$  (véase figura 1.3). De acuerdo con Kinoshita (1977), las relaciones entre las variables de Euler  $h_f, I_f, \phi$  y las variables de Andoyer se derivan del triángulo esférico de la figura 1.12,



y son

$$\begin{aligned}\cos I_f &= \cos I \cos J - \sin I \sin J \cos g, \\ \frac{\sin(h_f - h)}{\sin J} &= \frac{\sin(\phi - l)}{\sin I} = \frac{\sin g}{\sin I_f}.\end{aligned}$$

El orden del ángulo  $J$  entre el vector momento angular  $\mathbf{L}$  y el eje de figura de la Tierra es del orden de  $10^{-6}$  rad, de modo que despreciando los términos de segundo orden en  $J$ , tenemos

$$\begin{aligned}h_f &= h + \frac{J}{\sin I} \sin g + O(J^2), \\ I_f &= I + J \cos g + O(J^2), \\ \phi &= l + g - J \cot I \sin g + O(J^2),\end{aligned}$$

quedando entonces para  $h_f$  e  $I_f$ , las relaciones:

$$\begin{aligned}h_f &= h + \frac{J}{\sin I} \sin g, \\ I_f &= I + J \cos g.\end{aligned}$$

Una vez se calculan las correspondientes derivadas, obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta(\delta h_f) = \Delta(h_f - h) &\approx \frac{k'}{\sin I} \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g} \sin g - \mathcal{W}_1 \cos g \right) = \\ &= \frac{k'}{\sin I} \sum_{\tau} \sum_i \frac{\tau C_i(\tau)}{n_g - \tau n_i} \sin \Theta_i,\end{aligned}\tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\delta I_f) = \Delta(I_f - I) &\approx k' \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g} \cos g + \mathcal{W}_1 \sin g \right) = \\ &= k' \sum_{\tau} \sum_i \frac{\tau C_i(\tau)}{n_g - \tau n_i} \cos \Theta_i.\end{aligned}\tag{1.27}$$

Los segundos miembros de las ecuaciones (1.26) y (1.27) se conocen como *términos de Oppolzer* para el plano de figura.

### 1.11 Movimiento del plano perpendicular al eje de rotación

La longitud del nodo y la inclinación de este plano se designan por  $h_r$  e  $I_r$ . Sus expresiones en funciones de las variables de Andoyer tiene la forma

$$\begin{aligned} h_r &\approx h + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) J \frac{\sin g}{\sin I}, \\ I_r &\approx I + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) J \cos g. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Sus perturbaciones vienen dadas por

$$\Delta(\delta h_r) = \Delta(h_r - h) \approx \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \Delta(\delta h_f), \quad (1.29)$$

$$\Delta(\delta I_r) = \Delta(I_r - I) \approx \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \Delta(\delta I_f). \quad (1.30)$$

Los segundos miembros de las ecuaciones (1.29) y (1.30) se conocen como *términos de Oppolzer* para el plano perpendicular al eje de rotación.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



## Capítulo 2

### Polinomios de Legendre y de Jacobi

En este capítulo introducimos los conceptos básicos relativos a un par de funciones que se van a emplear frecuentemente en los siguientes capítulos, y que forman parte estructural del tipo de series con el que trabajaremos, los polinomios de Legendre y Jacobi.

#### 2.1 Armónicos zonales y polinomios de Legendre

Consideremos la ecuación de Laplace  $\Delta\Phi = 0$  en el caso de que exista simetría axial (por lo tanto la solución es independiente de la longitud  $\lambda$ ),  $\Phi = \Phi(r, \beta)$ . Entonces, la ecuación de Laplace en coordenadas polares esféricas se puede escribir de la forma

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \cos\beta} \frac{\partial}{\partial\beta} \left[ \cos\beta \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} \right] = 0.$$

Aplicamos el método de separación de variables y planteamos una solución de la forma

$$\Phi = \Phi(r, \beta) = R(r)F(\beta),$$

de modo que

$$\Delta\Phi = \frac{RF}{r^2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 R'(r)] + \frac{1}{F \cos\beta} \frac{\partial}{\partial\beta} [\cos\beta F'(\beta)] \right) = 0.$$

El término entre paréntesis es la suma de una función de  $r$  y una de  $\beta$ . Para que la suma de ambas sea nula, debe darse que ambas funciones sean constantes. Si llamamos a esa constante  $n(n+1)$ , entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 R'] &= n(n+1)R, \\ \frac{\partial}{\partial\beta} [\cos\beta F'] &= -n(n+1)F \cos\beta. \end{aligned}$$

La primera ecuación tiene una solución de la forma  $R(r) = r^k$ ,

$$\frac{\partial}{\partial r}[r^2 k r^{k-1}] = n(n+1)r^k,$$

es decir,

$$k(k+1)r^k = n(n+1)r^k,$$

que tiene soluciones para  $k = n$  y  $k = -n - 1$ . Por el teorema de existencia y unicidad, la ecuación ordinaria de segundo orden de  $R(r)$  tiene como solución:

$$R(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}.$$

Para resolver la ecuación en  $F(\beta)$ , conviene hacer el cambio de variable  $\rho = \sin \beta$ , de modo que  $F(\beta) = f(\rho)$ ,

$$\frac{1}{\cos \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} [\cos \beta F'(\beta)] = \frac{\partial}{\partial \rho} [\cos^2 \beta f'(\rho)] = \frac{\partial}{\partial \rho} [(1 - \rho^2) f'(\rho)],$$

con lo cual, la ecuación diferencial ordinaria para la función  $f(\rho)$  es:

$$(1 - \rho^2)[(1 - \rho^2) f'(\rho)] = -f(\rho)n(n+1),$$

es decir, se trata de una ecuación lineal con coeficientes variables, conocida como *ecuación de Legendre*,

$$(1 - \rho^2)[(1 - \rho^2) f'(\rho)] + n(n+1)f(\rho) = 0. \quad (2.1)$$

La solución de la ecuación de Legendre puede obtenerse por el método de los coeficientes indeterminados, es decir, suponiendo que  $f(\rho)$  es un polinomio cuyos coeficientes son incógnitas,

$$f(\rho) = \sum_{k=0} a_k \rho^k.$$

Derivando,

$$f'(\rho) = \sum_{k=1} a_k k \rho^{k-1}, \quad f''(\rho) = \sum_{k=2} a_k k(k-1) \rho^{k-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación de Legendre y reordenando términos,

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - \rho^2) \sum_{k=2} a_k k(k-1) \rho^{k-2} - 2\rho \sum_{k=1} a_k k \rho^{k-1} + n(n+1) \sum_{k=0} a_k \rho^k = \\ &= \sum_{k=0} \rho^k [a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k k(k-1) - 2ka_k + n(n+1)a_k]. \end{aligned}$$

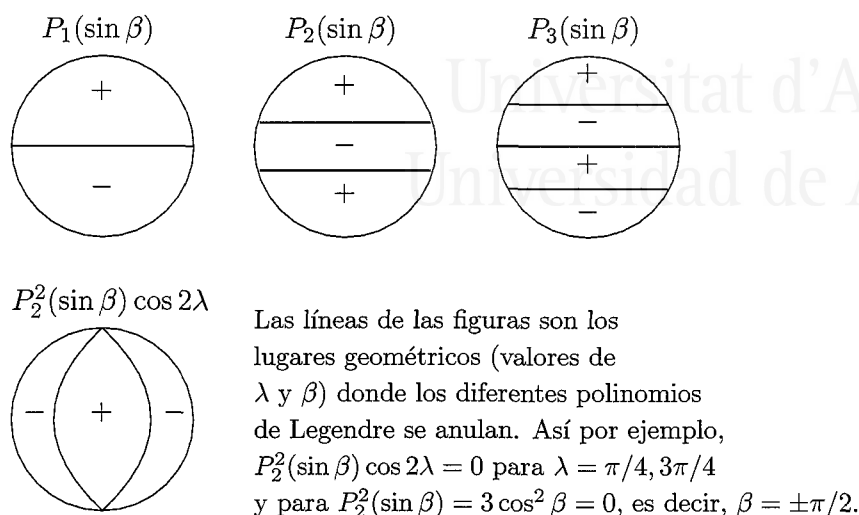


Figura 2.1: Ceros de los polinomios de Legendre.

Entonces, se tiene para todo  $k$ ,

$$a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k[k(k-1) + 2k - n(n+1)] = 0.$$

De esta ecuación se deriva la siguiente fórmula de recurrencia:

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+2)(k+1)} a_k.$$

Para  $k = n$  la recurrencia se anula, de modo que  $n$  debe ser un número entero no negativo para que exista solución. Para  $n = 0$ , tenemos que  $a_2 = 0 a_0$ , y todos los coeficientes pares se anulan. Si suponemos que los coeficientes impares son nulos, entonces existe una solución  $f(\rho) = a_0$ , de modo que  $\Phi = a_0/r$ . Para  $n = 1$ ,  $a_3 = 0 a_1$  y los coeficientes pares son todos nulos. Si suponemos que todos los pares son nulos, entonces la solución será  $\Phi = a_1 \sin \beta / r^2$ . Para  $n = 2$ ,  $a_2 = -3 a_0$  y  $a_4 = 0 a_2$ , de modo que la solución ahora es

$$\Phi = a_0 \frac{1 - 3 \sin^2 \beta}{r^3}.$$

En general, la solución a la ecuación de Laplace es de la forma

$$P_n(\sin \beta) \frac{1}{r^{n+1}}, \quad P_n(\sin \beta) r^n,$$

en donde  $P_n$  es un polinomio de orden  $n$ , que se llama *polinomio de Legendre*. La solución correspondiente a la ecuación de Laplace se llama *armónico esférico zonal* de grado  $n$ .

El polinomio de Legendre queda definido salvo por una constante multiplicativa,  $a_0$  para  $n$  par, y  $a_1$  para  $n$  impar. Suele tomarse  $a_0 = -1/2$ .

### 2.1.1 Algunas propiedades de los polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre pueden obtenerse fácilmente a partir de la siguiente recurrencia:

$$P_{n+1}(\rho) = \frac{2n+1}{n+1}\rho P_n(\rho) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(\rho). \quad (2.2)$$

Mediante simple sustitución en la expresión anterior, podemos calcular los primeros polinomios de Legendre,

$$\begin{aligned} P_0(\rho) &= 1 & P_1(\rho) &= \rho, \\ P_2(\rho) &= (3\rho^2 - 1)/2 & P_3(\rho) &= (5\rho^3 - 3\rho)/2, \\ P_4(\rho) &= (35\rho^4 - 30\rho^2 + 3)/8, & P_5(\rho) &= (63\rho^5 - 70\rho^3 + 15\rho)/8. \end{aligned}$$

En todos los casos,  $P_n(1) = 1$  y  $P_n(-1) = (-1)^n$ .

## 2.2 Armónicos tesserales y polinomios asociados de Legendre

Consideremos ahora la ecuación de Laplace  $\Delta\Phi = 0$  en el caso de que no exista simetría axial (por lo tanto la solución depende de  $(\lambda, \beta, r)$ ). Procediendo nuevamente por el método de separación de variables,

$$\Phi(r, \beta, \lambda) = R(r)F(\beta)G(\lambda).$$

El laplaciano en coordenadas esféricas se escribe ahora:

$$\Delta\Phi = \frac{RFG}{r^2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 R'(r)] + \frac{1}{F \cos \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} [\cos \beta F'(\beta)] + \frac{1}{G \cos^2 \beta} G''(\lambda) \right) = 0,$$

de donde como en el caso anterior, surgen tres ecuaciones diferenciales ordinarias. La ecuación para  $R(r)$  tiene la forma

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} [r^2 R'(r)] = n(n+1),$$

la ecuación para  $G(\lambda)$ ,

$$\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{d\lambda^2} = -m^2,$$

y la ecuación para  $F(\beta)$  resulta

$$\frac{1}{\cos \beta} \frac{d}{d\beta} [\cos \beta F'] - \frac{m^2}{\cos^2 \beta} = -n(n+1).$$



La ecuación para  $R(r)$  tiene por solución  $1/r^{n+1}$ . La ecuación de  $G(\lambda)$  es la de un oscilador armónico, de modo que

$$G = C \cos(m\lambda) + S \sin(m\lambda),$$

en donde  $C$  y  $S$  son constantes arbitrarias. Si  $m = 0$  volvemos al caso zonal. Queda resolver la ecuación para  $F(\beta)$ . Esta ecuación se simplifica mucho haciendo  $\rho = \sin \beta$ , y poniendo

$$F(\beta) = (\cos \beta)^m f(\sin \beta).$$

La ecuación diferencial que se obtiene (siguiendo un procedimiento similar al de la ecuación con simetría axial) es

$$(1 - \rho^2)f''(\rho) - 2(m+1)\rho f'(\rho) + (n+m)(n+m+1)f(\rho) = 0, \quad (2.3)$$

y se llama *ecuación diferencial asociada de Legendre*. Si  $m = 0$  se reduce a la ecuación de Legendre (2.1). La solución a esta ecuación se encuentra por el método de los coeficientes indeterminados, y se da para  $n$  entero, con  $n \geq m \geq 0$ . La solución  $F(\beta)$  se conoce como *polinomio asociado de Legendre* de grado  $n$  y orden  $m$ , y tiene la forma

$$P_{nm}(\sin \beta) = P_n^m(\sin \beta) = (\cos \beta)^m Q_n^m(\sin \beta),$$

en donde  $Q_n^m$  es un polinomio de grado  $n - m$ , cuyos coeficientes pueden obtenerse a partir de una fórmula de recurrencia.

Finalmente, la solución obtenida para la ecuación de Laplace es

$$\Phi_{nm} = \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\sin \beta) (C_n^m \cos(m\lambda) + S_n^m \sin(m\lambda)).$$

Para  $m > 0$  se llaman armónicos tesserales. Para tener una idea de la forma de estos armónicos, conviene tener presente que el número de ceros de  $\Phi_{nm}$  en un meridiano es  $n - m$ , mientras que el número de ceros a lo largo de un paralelo es  $2m$  (véase la figura 2.1).

### 2.2.1 Propiedades de los polinomios asociados de Legendre

$P_n^m(\rho)$  y  $Q_n^m(\rho)$  vienen dados en términos de polinomios ordinarios de Legendre por

$$P_n^m(\rho) = (1 - \rho^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\rho^m} P_n(\rho), \quad (2.4)$$

$$Q_n^m(\rho) = (1 - \rho^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\rho^m} Q_n(\rho). \quad (2.5)$$

Nótese que si  $m > n$ ,  $P_n^m(\rho) = 0$ .



Para  $n \geq m \geq 0$ , se verifica la relación

$$P_n^{-m}(\rho) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\rho).$$

De acuerdo con esto,

$$P_n^{-m}(\cos \beta) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \beta) \quad (2.6)$$

y

$$P_n^{-m}(\sin \beta) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin \beta). \quad (2.7)$$

## 2.3 Derivación de polinomios de Legendre

### Derivación de un polinomio asociado de Legendre $P_n^m(\cos \beta)$

Según la ecuación (2.4), se puede escribir

$$P_n^m(\cos \beta) = (-1)^m \sin^m \beta \frac{d^m P_n(\cos \beta)}{d(\cos \beta)^m}. \quad (2.8)$$

Derivando la expresión anterior respecto del ángulo  $\beta$ , obtenemos finalmente

$$\frac{dP_n^m(\cos \beta)}{d\beta} = m \frac{\cos \beta}{\sin \beta} P_n^m(\cos \beta) + P_n^{m+1}(\cos \beta). \quad (2.9)$$

### Derivación de un polinomio asociado de Legendre $P_n^m(\sin \beta)$

Según la ecuación (2.4),

$$P_n^m(\sin \beta) = (-1)^m \cos^m \beta \frac{d^m P_n(\sin \beta)}{d(\sin \beta)^m}. \quad (2.10)$$

Derivando la expresión anterior respecto de  $\beta$ , obtenemos una expresión similar a la anterior,

$$\frac{dP_n^m(\sin \beta)}{d\beta} = -m \frac{\sin \beta}{\cos \beta} P_n^m(\sin \beta) - P_n^{m+1}(\sin \beta). \quad (2.11)$$

### 2.3.1 Polinomios $P_n^m(\cos \beta)/(\sin \beta)^j$ y $P_n^m(\sin \beta)/(\cos \beta)^j$

Con el fin de que el conjunto de las series de Kinoshita (que definiremos en el capítulo 5) con las operaciones definidas sobre ellas, tenga una estructura cerrada, hemos definido respectivamente los siguientes polinomios (derivados de los polinomios asociados de Legendre):

$$P_n^{m \setminus j}(\cos \beta) = \frac{P_n^m(\cos \beta)}{\sin^j \beta}, \quad P_n^{m \setminus j}(\sin \beta) = \frac{P_n^m(\sin \beta)}{\cos^j \beta}, \quad (2.12)$$

con  $j \leq m$ . Dado que el polinomio asociado de Legendre se calcula según (2.4), tenemos que para el polinomio  $P_n^m(\sin \beta, \cos \beta)$  aparecerá siempre el factor  $\cos^m \beta$  o  $\sin^m \beta$  respectivamente. Hacemos  $j \leq m$  porque en caso contrario los polinomios definidos en (2.12) tienen un seno o coseno en el denominador. Evidentemente,

$$P_n^{m \setminus 0}(\cos \beta) = P_n^m(\cos \beta), \quad P_n^{m \setminus 0}(\sin \beta) = P_n^m(\sin \beta),$$

y en este caso podemos omitir la nueva notación. También resultan evidentes las siguientes igualdades

$$\frac{P_n^{m \setminus j}(\cos \beta)}{\sin^k \beta} = P_n^{m \setminus j+k}(\cos \beta), \quad \frac{P_n^{m \setminus j}(\sin \beta)}{\cos^k \beta} = P_n^{m \setminus j+k}(\sin \beta),$$

e igualmente (para  $k \leq j$  enteros)

$$P_n^{m \setminus j}(\cos \beta) \sin^k \beta = P_n^{m \setminus j-k}(\cos \beta), \quad P_n^{m \setminus j}(\sin \beta) \cos^k \beta = P_n^{m \setminus j-k}(\sin \beta).$$

Usando estas definiciones, las relaciones de derivación (2.9) y (2.11) se escriben en la forma

$$\frac{dP_n^m(\cos \beta)}{d\beta} = m \cos \beta P_n^{m \setminus 1}(\cos \beta) + P_n^{m+1}(\cos \beta), \quad (2.13)$$

$$\frac{dP_n^m(\sin \beta)}{d\beta} = -m \sin \beta P_n^{m \setminus 1}(\sin \beta) - P_n^{m+1}(\sin \beta), \quad (2.14)$$

lo que en un futuro nos será de gran utilidad.

Para  $j = 1$ , se verifica que:

$$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus 1}(\cos \beta) = \frac{d}{d\beta} \left[ \frac{1}{\sin \beta} P_n^m(\cos \beta) \right],$$

de donde

$$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus 1}(\cos \beta) = -\frac{1}{\sin^2 \beta} \cos \beta P_n^m(\cos \beta) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{d}{d\beta} P_n^m(\cos \beta),$$

y operando y reagrupando términos,

$$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus 1}(\cos \beta) = (m - 1) \cos \beta P_n^{m \setminus 2}(\cos \beta) + P_n^{m+1 \setminus 1}(\cos \beta).$$

De la misma forma,

$$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus 1}(\sin \beta) = \frac{d}{d\beta} \left[ \frac{1}{\cos \beta} P_n^m(\sin \beta) \right],$$

de donde

$$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus 1}(\sin \beta) = \frac{1}{\cos^2 \beta} \sin \beta P_n^m(\sin \beta) + \frac{1}{\cos \beta} \frac{d}{d\beta} P_n^m(\sin \beta),$$

y procediendo de forma análoga,

$$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus 1}(\sin \beta) = (1 - m) \sin \beta P_n^{m \setminus 2}(\sin \beta) - P_n^{m+1 \setminus 1}(\sin \beta).$$

### Derivación de $P_n^{m \setminus j}(\cos, \sin \beta)$

En general, para cualquier valor de  $j$  entero, se verifica que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus j}(\cos \beta) &= \frac{d}{d\beta} \left[ \frac{1}{\sin^j \beta} P_n^m(\cos \beta) \right] = \\ &= -j \frac{1}{\sin^{j+1} \beta} \cos \beta P_n^m(\cos \beta) + \frac{1}{\sin^j \beta} \frac{d}{d\beta} P_n^m(\cos \beta) = \\ &= -j \cos \beta \frac{P_n^m(\cos \beta)}{\sin^{j+1} \beta} + \frac{1}{\sin^j \beta} \left[ m \cos \beta P_n^{m \setminus 1}(\cos \beta) + P_n^{m+1 \setminus 0}(\cos \beta) \right] = \\ &= -j \cos \beta P_n^{m \setminus j+1}(\cos \beta) + m \cos \beta P_n^{m \setminus j+1}(\cos \beta) + P_n^{m+1 \setminus j}(\cos \beta) = \\ &= (m - j) \cos \beta P_n^{m \setminus j+1}(\cos \beta) + P_n^{m+1 \setminus j}(\cos \beta). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus j}(\sin \beta) &= \frac{d}{d\beta} \left[ \frac{1}{\cos^j \beta} P_n^m(\sin \beta) \right] = \\
 &= j \frac{1}{\cos^{j+1} \beta} \sin \beta P_n^m(\sin \beta) + \frac{1}{\cos^j \beta} \frac{d}{d\beta} P_n^m(\sin \beta) = \\
 &= j \sin \beta \frac{P_n^m(\sin \beta)}{\cos^{j+1} \beta} + \frac{1}{\cos^j \beta} \left[ -m \sin \beta P_n^{m \setminus 1}(\sin \beta) - P_n^{m+1 \setminus 0}(\sin \beta) \right] = \\
 &= j \sin \beta P_n^{m \setminus j+1}(\sin \beta) - m \sin \beta P_n^{m \setminus j+1}(\sin \beta) - P_n^{m+1 \setminus j}(\sin \beta) = \\
 &= -(m - j) \sin \beta P_n^{m \setminus j+1}(\sin \beta) - P_n^{m+1 \setminus j}(\sin \beta).
 \end{aligned}$$

Se derivan así las siguientes relaciones:

$$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus j}(\cos \beta) = (m - j) \cos \beta P_n^{m \setminus j+1}(\cos \beta) + P_n^{m+1 \setminus j}(\cos \beta), \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus j}(\sin \beta) = -(m - j) \sin \beta P_n^{m \setminus j+1}(\sin \beta) - P_n^{m+1 \setminus j}(\sin \beta). \quad (2.16)$$

En la tabla (2.1) se resumen las reglas de derivación de estas funciones.

Tabla 2.1: Resumen de las reglas de derivación básicas.

Regla de derivación
$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus 0}(\cos \beta) = m \cos \beta P_n^{m \setminus 1}(\cos \beta) + P_n^{m+1 \setminus 0}(\cos \beta)$
$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus 0}(\sin \beta) = -m \sin \beta P_n^{m \setminus 1}(\sin \beta) - P_n^{m+1 \setminus 0}(\sin \beta)$
$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus 1}(\cos \beta) = (m - 1) \cos \beta P_n^{m \setminus 2}(\cos \beta) + P_n^{m+1 \setminus 1}(\cos \beta)$
$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus 1}(\sin \beta) = -(m - 1) \sin \beta P_n^{m \setminus 2}(\sin \beta) - P_n^{m+1 \setminus 1}(\sin \beta)$
$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus j}(\cos \beta) = (m - j) \cos \beta P_n^{m \setminus j+1}(\cos \beta) + P_n^{m+1 \setminus j}(\cos \beta)$
$\frac{d}{d\beta} P_n^{m \setminus j}(\sin \beta) = -(m - j) \sin \beta P_n^{m \setminus j+1}(\sin \beta) - P_n^{m+1 \setminus j}(\sin \beta)$

## 2.4 Polinomios modificados de Jacobi

En esta sección exponemos un compendio de resultados relativos a polinomios modificados de Jacobi y que serán de ayuda en los capítulos restantes. Buena parte del contenido de esta sección se encuentra desarrollada en (Kinoshita, 1974).

### 2.4.1 Fórmulas fundamentales

Sea  $\lambda$  y  $\beta$  la longitud y latitud de un punto en una esfera unidad respecto de un plano de referencia, y  $\lambda'$  y  $\beta'$  la longitud y latitud del mismo punto respecto de un nuevo plano de referencia, que se obtiene mediante una rotación caracterizada en término de los ángulos de Euler  $\varphi, \theta$  y  $\phi$ . La definición de los ángulos de Euler es la que aparece en el Whittaker (1961). Los armónicos esféricos de orden  $n$  se definen en la forma

$$\begin{aligned} Y_n^m(\lambda, \beta) &= (-1)^m e^{im\lambda} \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\sin \beta), \\ Y_n^{-m}(\lambda, \beta) &= e^{-im\lambda} \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\sin \beta), \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde  $P_n^m(\sin \beta)$  son los polinomios asociados de Legendre. Una transformación lineal de los armónicos esféricos de orden  $n$  se expresa

$$Y_n^m(\lambda', \beta') = \sum_{m'=-n}^n D_n^{(m, m')}(\varphi, \theta, \phi) Y_n^{m'}(\lambda, \beta). \quad (2.18)$$

Los coeficientes  $D_n^{(m, m')}$  tienen la siguiente forma,

$$D_n^{(m, m')}(\varphi, \theta, \phi) = (-1)^{m'-m} \sqrt{\frac{(n-m)!(n+m')!}{(n-m')!(n+m)!}} e^{-im\varphi} e^{-im'\varphi} Q_n^{(m, m')}(\cos \theta), \quad (2.19)$$

donde

$$\begin{aligned} Q_n^{(m, m')}(z) &= \frac{(-1)^{n-m}}{2^n} \frac{(n+m)!}{(n-m)!(n+m')!} (1+z)^{-(m+m')/2} (1-z)^{-(m-m')/2} \\ &\times \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} (1+z)^{n+m'} (1-z)^{n-m'}. \end{aligned}$$

A  $Q_n^{(m, m')}$  se le da el nombre de polinomios modificados de Jacobi. La relación entre los polinomios modificados de Jacobi, y los polinomios de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$  viene dada por

$$Q_n^{(m, m')}(z) = 2^{-m} \frac{(n+m)!}{(n+m')!} (1+z)^{(m+m')/2} (1-z)^{(m-m')/2} P_{n-m}^{(m-m', m+m')}(z),$$

donde

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(z) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-z)^{-\alpha} (1+z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} (1-z)^{n+\alpha} (1+z)^{n+\beta} = \\ &= \binom{n+\alpha}{\alpha} F(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1; (1-z)/2). \end{aligned}$$

Consideraremos una rotación en el sentido contrario al de giro de las agujas del reloj alrededor de la abscisa  $x$  un ángulo  $J$ , que se expresa mediante  $\varphi = -\pi/2$ ,  $\theta = J$  y  $\phi = \pi/2$ . Para  $m \geq 0$ , sustituyendo las ecuaciones (2.17) y (2.19) en (2.18), tenemos,

$$\begin{aligned} P_n^m(\sin \beta') e^{im\lambda'} &= e^{\frac{\pi}{2}} Q_n^{(m,0)}(z) P_n(\sin \beta) + \\ + \sum_{m'=1}^n e^{\frac{\pi}{2}i(m-m')} &\left[ e^{im'\lambda} Q_n^{(m,m')}(z) + e^{-im'\lambda} \frac{(n-m')!}{(n+m')!} Q_n^{(m,-m')}(z) \right] P_n^{m'}(\sin \beta) \end{aligned}$$

con  $z = \cos J$ . Usando la definición de  $Q_n^{(m,m')}(z)$ , podemos obtener la siguiente ecuación,

$$\frac{(n-m')!}{(n+m')!} Q_n^{(m,-m')}(z) = (-1)^{n-m} Q_n^{(m,m')}(-z).$$

Entonces llegamos a que

$$P_n^m(\sin \beta') e^{im\lambda'} = \sum_{\epsilon} \sum_{m'=0}^n e^{\frac{\pi}{2}i(m-m')} \bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) P_n^{m'}(\sin \beta) e^{im'\epsilon\lambda},$$

donde

$$\bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) = \epsilon^{n-m} Q_n^{(m,m')}(\epsilon \cos J). \quad (2.20)$$

El índice  $\epsilon$  de la ecuación anterior toma los valores  $+1$  y  $-1$  para  $m \neq 0$ , y toma el valor  $+1$  para  $m = 0$  (Hori, 1971).

Para los valores negativos  $m = -l$  ( $l > 0$ ) tenemos ecuaciones parecidas,

$$P_n^l(\sin \beta') e^{-il\lambda'} = \sum_i \sum_{m'=0}^n e^{-\frac{\pi}{2}i(l-m')} \bar{Q}_n^{l,m'}(\epsilon, \cos J) e^{-im'\epsilon\lambda} P_n^{m'}(\sin \beta).$$

Combinando las ecuaciones para  $P_n^l(\sin \beta') e^{-il\lambda'}$  y  $P_n^m(\sin \beta') e^{im\lambda'}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} P_n^m(\sin \beta') e^{\pm im\lambda'} &= \sum_{\epsilon} \sum_{m'=0}^n \bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) P_n^{m'}(\sin \beta) \times \\ &\times \exp \left[ \pm i \left\{ m'\epsilon\lambda + \frac{\pi}{2}(m-m') \right\} \right]. \end{aligned}$$

La expresión para una rotación con sentido horario alrededor del eje  $x$  un ángulo  $J$ , que se expresa por  $\varphi = \pi/2$ ,  $\theta = J$  y  $\phi = -\pi/2$ , es

$$\begin{aligned} P_n^m(\sin \beta') e^{\pm im\lambda'} &= \sum_{\epsilon} \sum_{m'=0}^n \bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) P_n^{m'}(\sin \beta) \times \\ &\times \exp \left[ \pm i \left\{ m'\epsilon\lambda + \frac{\pi}{2}(m'-m) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Se ve fácilmente a simple vista que la ecuación anterior, se obtiene sustituyendo  $J$  por  $-J$  en la expresión precedente a la anterior. Estas dos últimas ecuaciones, para el caso particular en que  $m = 0$  son equivalentes al teorema de adición de polinomios de Legendre.

Podemos mostrar a continuación algunas notables propiedades de los polinomios modificados de Jacobi, que se puede demostrar de forma sencilla partiendo de la definición de los mismos.

$$\begin{aligned} Q_n^{(m,m')}(z) &= (-1)^{m-m'} \frac{(n+m)!(n-m')!}{(n-m)!(n+m')!} Q_n^{(m',m)}(z), \\ Q_n^{(m,-m')}(z) &= (-1)^{n-m} \frac{(n+m')!}{(n-m')!} Q_n^{(m,m')}(-z), \\ Q_n^{(-m,m')}(z) &= (-1)^{n-m'} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Q_n^{(m,m')}(-z), \\ Q_n^{(-m,-m')}(z) &= (-1)^{m-m'} \frac{(n+m')!(n-m)!}{(n-m')!(n+m)!} Q_n^{(m,m')}(z), \\ Q_n^{(m,0)}(z) &= P_n^m(z), \\ Q_n^{(n,m')}(z) &= \frac{(2n)!}{2^n(n+m')!} (1+z)^{(n+m')/2} (1-z)^{(n-m')/2}, \\ Q_n^{(m,m')}(z) &= \frac{1}{m-m'} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z} [Q_n^{(m,m'-1)}(z) + (n+m)(n-m+1)Q_n^{(m-1,m')}(z)]. \end{aligned}$$

Una propiedad especialmente importante es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dJ} Q_n^{(m,m')}(\cos J) &= (n+m)(n-m+1)Q_n^{(m-1,m')}(\cos J) + \\ &+ \frac{m' - m \cos J}{\sin J} Q_n^{(m,m')}(\cos J). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Se verifica además,

$$Q_n^{(m,m')}(1) = \delta_{m,m'}, \quad Q_n^{(m,m')}(-1) = 0,$$

para  $m, m' \geq 0$ , y

$$Q_n^{(0,0)}(-1) = (-1)^n.$$

Con la ayuda del teorema del binomio, tenemos, para valores positivos  $m \geq m' \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} Q_n^{(m,m')}(z) &= 2^{-n} (n+m)!(n-m')! (1-z)^{(m-m')/2} (1+z)^{(m+m')/2} \times \\ &\times \sum_{r=0}^{n-m} \frac{(-1)^r}{(m-m'+r)!(n+m'-r)!r!(n-m-r)!} (1-z)^r (1+z)^{n-m-r}. \end{aligned}$$

Las relaciones entre los polinomios modificados de Jacobi  $Q_n^{(m,m')}$ , la función de inclinación de Kalua  $F_{k,m,l}$  (1961), la de Stiefel  $\gamma_{n,m}^{(m)}$  (1965) y la de Tomoschkova  $\Phi_{n,m,m'}$

(1972) son

$$\begin{aligned} F_{k,m,l}(J) &= (-1)^{[k(-m+1)/2]} \frac{(2k-2l)!}{2^k l! (k-l)!} Q_k^{(m,k-2l)}(\cos J), \\ \gamma_{n,m'}^{(m)} &= i^{m-m'} \frac{(n+m')!}{(n+m)!} Q_n^{(m,m')}(z), \\ \Phi_{n,m,m'}(z) &= (-1)^m \frac{(n+m')!}{(n+m)!} Q_n^{(m,m')}(z), \end{aligned}$$

en donde [...] es la notación de Gauss y toma la parte entera del número entre corchetes.

### 2.4.2 Polinomios modificados de Jacobi de orden dos

En la referencia (Kinoshita, 1977) aparecen una serie de polinomios modificados de Jacobi, que son los que se emplean en el desarrollo de la teoría, y que se muestran a continuación,

$$\begin{aligned} \bar{Q}_2^{(0,0)}(\epsilon, \cos J) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 J - 1), \\ \bar{Q}_2^{(0,1)}(\epsilon, \cos J) &= -\frac{1}{2}\epsilon \sin J \cos J, \\ \bar{Q}_2^{(0,2)}(\epsilon, \cos J) &= \frac{1}{8} \sin^2 J, \\ \bar{Q}_2^{(1,0)}(\epsilon, \cos J) &= 3 \sin J \cos J, \\ \bar{Q}_2^{(1,1)}(\epsilon, \cos J) &= \frac{1}{2}\epsilon(1 + \epsilon \cos J)(-1 + 2\epsilon \cos J), \\ \bar{Q}_2^{(1,2)}(\epsilon, \cos J) &= -\frac{1}{4}\epsilon \sin J(1 + \epsilon \cos J), \\ \bar{Q}_2^{(2,0)}(\epsilon, \cos J) &= 3 \sin^2 J, \\ \bar{Q}_2^{(2,1)}(\epsilon, \cos J) &= \sin J(1 + \epsilon \cos J), \\ \bar{Q}_2^{(2,2)}(\epsilon, \cos J) &= \frac{1}{4}(1 + \epsilon \cos J)^2, \\ \bar{Q}_3^{(0,0)}(\epsilon, \cos J) &= \frac{1}{2} \cos J(-3 + 5 \cos^2 J), \\ \bar{Q}_4^{(0,0)}(\epsilon, \cos J) &= \frac{1}{8}(3 - 30 \cos^2 J + 35 \cos^4 J), \\ \bar{Q}_3^{(0,1)}(\epsilon, \cos J) &= \frac{1}{8}\epsilon \sin J(1 - 5 \cos^2 J), \end{aligned} \tag{2.22}$$

donde  $\epsilon$  toma los valores  $+1$  y  $-1$  para  $m' \neq 0$  y el valor  $+1$  para  $m' = 0$ .

Esta forma directa de obtención ahorra mucho tiempo de cómputo, dado que no se requiere usar algoritmos recurrentes como los que pueden deducirse de la lectura de la primera parte del capítulo, y por lo tanto, para obtener un polinomio modificado de Jacobi no se requieren los anteriores niveles de recursión.



### 2.4.3 Polinomios de Jacobi de orden tres y cuatro

En la referencia (Kinoshita, 1974) aparecen unas tablas en las que se dan expresiones explícitas de los polinomios modificados de Jacobi hasta orden 10. Seguidamente se muestran hasta orden cuatro. Con las tablas siguientes, resulta muy sencillo el cálculo de los polinomios  $Q_n^{(m,m')}$ , y a partir de éstos, obtenemos los polinomios modificados de Jacobi, usando la relación (2.20),

$$\bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) = \epsilon^{n-m} Q_n^{(m,m')}(\epsilon \cos J).$$

Tabla 2.2:  $Q_2^{(0,m')}$

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$
2	0	0	1/2	0	0	0	-1	0	3
2	0	1	1/2	1	0	1	-1		
2	0	2	1/8	2	0	0	1		

$z = \cos J$

Tabla 2.3:  $Q_2^{(1,m')}$

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$
2	1	0	3	1	0	1	1		
2	1	1	1/2	0	1	0	-1	2	
2	1	2	1/4	1	1	0	-1		

$z = \cos J$

Tabla 2.4:  $Q_2^{(2,m')}$

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$
2	2	0	3	2	0	0	1		
2	2	1	1	1	1	0	1		
2	2	2	1/4	0	2	0	1		

$z = \cos J$

Tabla 2.5:  $Q_3^{(0,m')}$ 

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$
3	0	0	1/2	0	0	1	-3	0	5
3	0	1	1/8	1	0	0	1	0	-5
3	0	2	1/8	2	0	1	1		
3	0	3	1/48	3	0	0	-1		

$z = \cos J$

Tabla 2.6:  $Q_3^{(1,m')}$ 

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$
3	1	0	3/2	1	0	0	-1	0	5
3	1	1	1/8	0	1	0	-1	-10	15
3	1	2	1/8	1	1	0	1	-3	
3	1	3	1/16	2	1	0	1		

$z = \cos J$

Tabla 2.7:  $Q_3^{(2,m')}$ 

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$
3	2	0	15	2	0	1	1		
3	2	1	5/4	1	1	0	-1	3	
3	2	2	1/4	0	2	0	-2	3	
3	2	3	1/8	1	2	0	-1		

$z = \cos J$

Tabla 2.8:  $Q_3^{(3,m')}$ 

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$
3	3	0	15	3	0	0	1		
3	3	1	15/4	2	1	0	1		
3	3	2	3/4	1	2	0	1		
3	3	3	1/8	0	3	0	1		

$z = \cos J$

Tabla 2.9:  $Q_4^{(0,m')}$ 

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
4	0	0	1/8	0	0	0	3	0	-30	0	35
4	0	1	1/8	1	0	1	3	0	-7		
4	0	2	1/48	2	0	0	-1	0	7		
4	0	3	1/48	3	0	1	-1				
4	0	4	1/384	4	0	0	1				

$z = \cos J$

Tabla 2.10:  $Q_4^{(1,m')}$ 

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
4	1	0	5/2	1	0	1	-3	0	7		
4	1	1	1/8	0	1	0	3	-6	-21	28	
4	1	2	1/24	1	1	0	1	7	-14		
4	1	3	1/48	2	1	0	-1	4			
4	1	4	1/96	3	1	0	-1				

$z = \cos J$

Tabla 2.11:  $Q_4^{(2,m')}$ 

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
4	2	0	15/2	2	0	0	-1	0	7		
4	2	1	3/4	1	1	0	-1	-7	14		
4	2	2	1/4	0	2	0	1	-7	7		
4	2	3	1/8	1	2	0	1	-2			
4	2	4	1/32	2	2	0	1				

$z = \cos J$

Tabla 2.12:  $Q_4^{(3,m')}$ 

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
4	3	0	105	3	0	1	1				
4	3	1	21/4	2	1	0	-1	4			

(continúa)

Tabla 2.12:  $Q_4^{(3,m')}$ 

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
4	3	2	7/4	1	2	0	-1	2			
4	3	3	1/8	0	3	0	-3	4			
4	3	4	1/16	1	4	0	-1				

$z = \cos J$

Tabla 2.13:  $Q_4^{(4,m')}$ 

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
4	4	0	105	4	0	0	1				
4	4	1	21	3	1	0	1				
4	4	2	7/2	2	2	0	1				
4	4	3	1/2	1	3	0	1				
4	4	4	1/16	0	4	0	1				

$z = \cos J$

#### 2.4.4 Derivación de un polinomio de Jacobi respecto de una variable de inclinación

En esta sección vamos a expresar la derivada de un polinomio modificado de Jacobi en función de otros polinomios modificados de Jacobi. Nos basaremos para ello en la relación (2.21),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dJ} Q_n^{(m,m')}(\cos J) &= (n+m)(n-m+1)Q_n^{(m-1,m')}(\cos J) + \\ &+ \frac{m' - m \cos J}{\sin J} Q_n^{(m,m')}(\cos J). \end{aligned}$$

Según (2.20),  $\bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) = \epsilon^{n-m} Q_n^{(m,m')}(\epsilon \cos J)$ , y entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial J} \bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) &= \epsilon^{n-m} \frac{\partial}{\partial J} Q_n^{(m,m')}(\epsilon \cos J) = \\ &= \epsilon^{n-m} \left[ (n+m)(n-m+1)Q_n^{(m-1,m')}(\epsilon \cos J) + \frac{m' - m\epsilon \cos J}{\sin J} Q_n^{(m,m')}(\epsilon \cos J) \right]. \end{aligned}$$

Agrupando adecuadamente los términos, podemos llegar a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial J} \bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) &= \epsilon(n+m)(n-m+1) \bar{Q}_n^{(m-1,m')}(\epsilon, \cos J) + \\ &+ \bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) \left( \frac{m'}{\sin J} + \frac{m\epsilon \cos J}{\sin J} \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 3

# Manipulación algebraica en Mecánica Celeste

En la segunda mitad del siglo XIX Delaunay inventó un método de perturbaciones para resolver el problema de la Luna, y le llevó más de veinte años de cálculos a mano el resolverlo hasta cierto orden de aproximación. Brown dedicó otros tantos años al estudio del problema con la influencia de los planetas en la solución. Nuevos avances en este campo requerían cálculos cada vez más pesados y precisos, por lo que a mediados del siglo veinte, muchos de los grupos de Mecánica Celeste abandonaron su estudio. Uno de los pocos lugares en los que no se dejó de investigar el problema fue en la Universidad de Louvain, en Bélgica. Allí, G. Lemaître comprendió que el avance en dicho campo estaba ligado al avance en la Ciencia de la Computación, y así incorporó las nuevas tecnologías a sus trabajos. En el año 1971, A. Deprit, un discípulo suyo, repitió los cálculos de Delaunay llegando a un orden mayor de aproximación y obteniendo una precisión mucho más alta, invirtiendo para ello tan solo 18 meses, con el uso de una computadora. Cabe señalar que la solución de Deprit, como la de Delaunay, era una solución analítica, es decir, programó la computadora para trabajar con desarrollos analíticos. Ese vino a ser uno de los primeros pasos en el desarrollo de la manipulación simbólica. Actualmente, el uso de manipuladores simbólicos (también procesadores simbólicos o algebraicos) constituye la base del desarrollo en muchos campos de la Mecánica Celeste. Así por ejemplo, es frecuente tratar con series armónicas de unos 10 000 términos en métodos de perturbaciones. Eso es lo que hace a la manipulación simbólica tan necesaria.

### 3.1 Los primeros manipuladores algebraicos

Los primeros manipuladores algebraicos se desarrollaron para trabajar con series de Fourier múltiples con monomios en los coeficientes. Estas series se llamaron *series de Poisson*. En las últimas décadas se han desarrollado diversos manipuladores algebraicos que ope-

ran con series de Poisson, aunque adaptadas a las particularidades del problema concreto que se pretende resolver. De esta forma, en la década de los sesenta aparecieron diversos procesadores simbólicos, es decir, procesadores que permitían trabajar con expresiones o desarrollos analíticos, si bien éstos tuvieron en un principio escasa generalidad. Cabe citar algunos de estos trabajos: Herget y Musen (1959), Iszak (1964), Henrard (1965), Gustavson (1966), Chapront y Mangeney (1968), Seidelmann (1970), y muchos otros. Vamos a referirnos sucintamente a uno de estos trabajos, para mostrar el tipo de expresiones con el que se enfrentaban.

En el año 1965, Henrard (1965) construyó uno de estos manipuladores algebraicos para la obtención de una solución general en la vecindad de los equilibrios colineales del problema restringido de tres cuerpos. Tal procesador operaba con series dobles de Fourier pares e impares de la forma

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{m,n} \epsilon_1^m \epsilon_2^n \sum_{r=0}^{m/2} \sum_{s=0}^{n/2} (P_{mnr}^c \cosh(m-2r)\varphi \sin(n-2s)\theta + \\
 &\quad + P_{mnr}^s \sinh(m-2r)\varphi \cos(n-2s)\theta) \\
 I &= \sum_{m,n} \epsilon_1^m \epsilon_2^n \sum_{r=0}^{m/2} \sum_{s=0}^{n/2} (I_{mnr}^c \cosh(m-2r)\varphi \cos(n-2s)\theta + \\
 &\quad + I_{mnr}^s \sinh(m-2r)\varphi \sin(n-2s)\theta), \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

con  $m+n \geq 1$ . En memoria se almacenaban respectivamente los índices de las series pares e impares en dos tablas con tres entradas:  $P(M, N, L)$  e  $I(M, N, L)$  (la tabla  $P$  para las series pares y la  $I$  para las impares). Los enteros  $M, N$  y  $L$  identificaban de forma unívoca cada elemento de cada serie. La operación fundamental desarrollada fue la multiplicación de series del tipo (3.1), de manera que a partir de las series asociadas a las variables  $x$  e  $y$ , se obtenía la serie genérica  $x^i y^j$ , para dos enteros dados  $i, j$ .

En los años 1965 y 1966 se publicaron los trabajos que establecieron los fundamentos de la manipulación general de series de Poisson: Danby *et al.* (1965), y Barton (1966). Este último desarrolló un manipulador simbólico para expandir la función de perturbación de la Luna en los elementos elípticos y las anomalías verdaderas hasta orden diez. Para ello definió el anillo  $S$  de las series de Fourier múltiples en seis variables llamadas variables armónicas (en su trabajo las variables armónicas son la longitud verdadera de la Luna, la longitud del nodo ascendente de la órbita de la Luna, la longitud del perigeo, así como las respectivas variables para el Sol:  $f, g, h, f', g'$  y  $h'$ ) con coeficientes polinómicos en ocho variables llamadas variables polinómicas. Asimismo definió las principales operaciones con este tipo de series, y mostró que para resolver el problema principal de la Luna (en la forma de Delaunay), bastaba con definir las siguientes operaciones:

— Adición.

- Substracción.
- Cambio de signo.
- Multiplicación por un número real.
- Selección de algunos términos de la serie.
- Diferenciación respecto de una de las 14 variables.
- Integración respecto de una de las 14 variables.
- Multiplicación.
- Sustitución de una variable polinómica de un miembro de  $S$  por un miembro de  $S$ .
- Sustitución de una variable armónica de un miembro de  $S$  por un miembro de  $S$  mediante un desarrollo de Taylor.

A partir de entonces aparecieron distintos sistemas de manipulación algebraica de propósito general. Cabe llamar la atención sobre el hecho de que en todos ellos las variables polinómicas y armónicas estaban claramente diferenciadas, debido a que su destino era resolver generalmente el problema de la Luna.

Entre los principales manipuladores simbólicos que surgieron, citamos algunos de los más conocidos: MAO (Mechanized Algebraic Operations, Rom 1970), TRIGMAN (Trigonometric Manipulator, Jefferys 1970, 1971 y 1972), NONAME (Broucke y Garthwaite 1970), CAMAL (Cambridge Algebra System, Bourne y Harton 1971), SPASM (Smithsonian Package for Algebra and Symbolic Manipulation, Cherniack 1973). Estos manipuladores trabajan todos ellos con objetos que se conocen con el nombre de series de Poisson, si bien algunos de ellos admitían modificaciones en la estructura para abordar diferentes problemas de Mecánica Celeste.

### 3.1.1 Procesadores de series de Poisson clásicos

La gran mayoría de los manipuladores simbólicos expuestos anteriormente trabajan con series de la forma

$$\mathcal{P} = \sum_i c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \rho_2^{\mu_{i2}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\theta_1 + \cdots + \alpha_{im}\theta_m),$$

que se conocen como series de Poisson, y que estudiaremos en profundidad en el capítulo siguiente. Este tipo de series aparecen muy a menudo en Mecánica Celeste y de forma más general en métodos de perturbaciones para mecánica no lineal o ecuaciones diferenciales no lineales. El cálculo asociado a estas series (suma, resta, producto, diferenciación, integración, etcétera) no presenta demasiado problema, y será tratado en el siguiente capítulo.



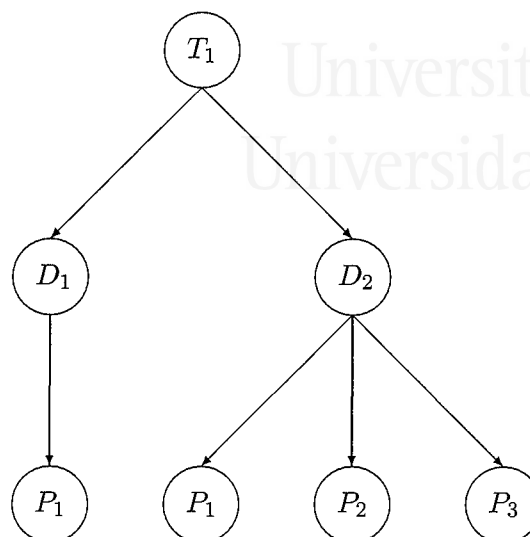


Figura 3.1: Árbol asociado a un término de una serie escalonada.

### 3.1.2 Procesadores escalonados

En el año 1970, A. Rom (1970) introdujo denominadores para trabajar de manera simbólica en el problema de la Luna (1971). Además propuso una estructura de árbol de tres niveles para representar cada término de la serie. De esta forma, sus series consistían en varios árboles (un árbol por término), cada uno de ellos con tres niveles: la raíz del árbol para el factor trigonométrico, el segundo nivel para los divisores, y las hojas del árbol (el tercer nivel) para los monomios. Podemos ver un ejemplo de esta estructura de árbol para un término en la figura 3.1, en donde la  $T$  representa el factor trigonométrico, cada  $D_i$  un divisor, y cada  $P_i$  representa un monomio. El término allí representado se corresponde con

$$T_1[D_1P_1 + D_2(P_1 + P_2 + P_3)].$$

La expresión general de una serie escalonada  $E$  (tal y como fue definida por A. Rom para resolver el problema de la Luna) es

$$E = \sum_i T_i \sum_j D_j \sum_m P_m,$$

en donde

$$T_i = \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (i_1 l_1 + \dots + i_6 l_6),$$

$$D_j = \frac{1}{\prod_k (\alpha_{j,k} n_1 + \beta_{j,k} n_2 + \gamma_{j,k} n_3)^{\delta_{j,k}}},$$



y

$$P_m = c \times p_1^{\gamma_1} \times \dots \times p_{12}^{\gamma_{12}}.$$

La primera aplicación que tuvo este manipulador fue la obtención de una solución analítica al problema de la Luna (Deprit, 1970a), y sin desarrollar en serie los divisores.

## 3.2 Aplicaciones de los manipuladores algebraicos

Vamos ahora a analizar algunos de los problemas de la Mecánica Celeste en los que han sido empleados, tales como el movimiento de la Luna, las teorías planetarias, y el movimiento de rotación terrestre. Dependiendo del problema que se trata, se trabaja con series que tienen ciertas particularidades. Así, en el caso de la teoría lunar y planetaria, se trabaja con series de Poisson de alrededor de 100 000 términos. Por otro lado, en la teoría de la rotación terrestre, el número de términos no es tan alto (en torno a 1000), pero el tipo de transformaciones usuales hace conveniente la elaboración de un nuevo tipo de manipulador algebraico, dado que actualmente se requiere cierto grado de desarrollo manual en la teoría para aplicar un manipulador usual.

### 3.2.1 El problema del satélite: función de perturbación

Sea  $M$  un satélite de masa despreciable sometido al potencial terrestre  $U$ . Podemos representar la posición del satélite empleando un sistema esférico de coordenadas ligado a la Tierra (véase la figura 3.2).

Sea  $O$  el centro de la Tierra,  $Oz$  el eje de rotación (que aquí se supone coincidente con el de la figura) y  $Ox, Oy$  dos ejes en el plano ecuatorial,  $Ox$  en el plano del meridiano de Greenwich, y  $Oy$  perpendicular a  $Ox$  formando un triedro directo, tal y como se muestra en la figura 3.2. Definamos ahora otro sistema  $XYZ$  con origen también en  $O$  de forma que  $OZ$  coincida con  $Oz$ ,  $OX$  apuntando hacia el punto  $\gamma$  (de la fecha),  $OY$  perpendicular a  $OX$ . Si se desprecia el movimiento de precesión del eje de la Tierra, podemos considerar que este sistema es inercial. Con respecto a  $OXYZ$ , el sistema  $Oxyz$  tiene un movimiento de rotación uniforme alrededor del eje  $OZ$  con un periodo de 23 horas y 56 minutos. El ángulo  $T$  que en cada instante forma el eje  $Ox$  con  $OX$  es el tiempo sidéreo de Greenwich en ese instante. Puede considerarse como una función lineal continua de  $t$ .

El paso de coordenadas esféricas en la referencia  $Oxyz$  a coordenadas rectangulares  $X, Y, Z$  en la referencia  $OXYZ$  viene dada por

$$\begin{aligned} X &= r \cos \phi \cos(T + \lambda), \\ Y &= r \cos \phi \sin(T + \lambda), \\ Z &= r \sin \phi. \end{aligned} \tag{3.2}$$

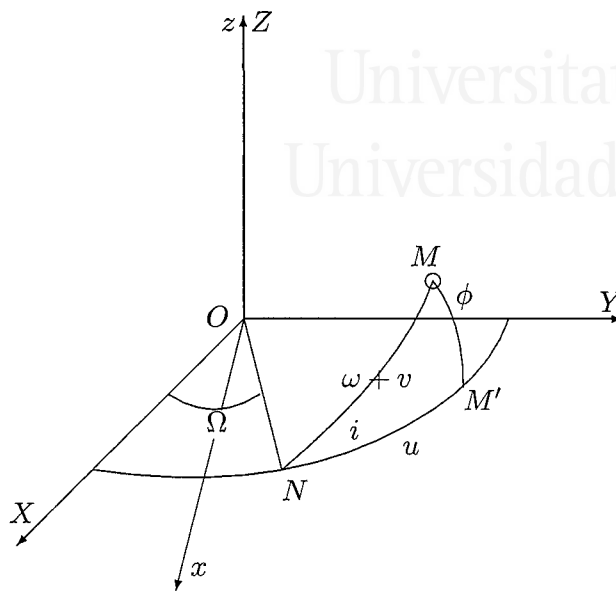


Figura 3.2: Sistemas de referencia en el problema del satélite.

Sustituyendo ahora en la expresión de  $U$  obtenida en el capítulo 1 (con el signo adecuado), las variables  $r, \lambda, \phi$  por sus expresiones en función de  $X, Y, Z$  y  $T$ , se obtiene entonces que las ecuaciones del movimiento son

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial X}, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial Z},$$

siendo  $U$  la función de fuerzas (opuesta del potencial)

$$U = \frac{\mathcal{G}m}{r} + R = U_0 + R.$$

La función  $R$ , que contiene el pequeño parámetro  $J_2$ , es la función de perturbación del movimiento del satélite. En el caso en que  $R$  sea despreciable, las ecuaciones del movimiento son las del problema de dos cuerpos y la órbita del satélite es una cónica de foco  $O$ . Se supone que las condiciones iniciales son tales que el movimiento primero es un movimiento kepleriano. Si se tiene en cuenta ahora el efecto de la perturbación, el movimiento es próximo al kepleriano, y los elementos orbitales (véase la figura 3.3)  $a, e, i, \omega, \Omega, \tau$ , son funciones del tiempo que vienen dadas por la integración de las ecuaciones de Lagrange. Para ello es preciso expresar la función  $R$  en esas variables. Vamos a estudiar aquí únicamente el caso simplificado del primer armónico zonal, que es el más importante, dado que  $J_2$  es del orden de  $10^{-3}$ , mientras que el resto de los coeficientes son de orden  $10^{-6}$ . La función de perturbación  $R$  puede ponerse en la forma

$$R = -\frac{\mu J_2 a_\oplus^2}{r^3} P_2(\sin \phi) = \mu J_2 \frac{a_\oplus^2 a^3}{a^3 r^3} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \phi \right).$$

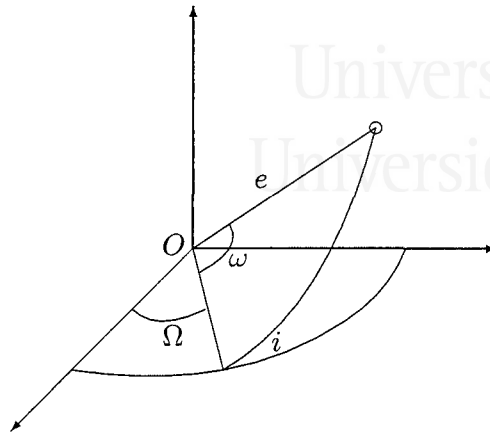


Figura 3.3: Elementos orbitales.

En la figura (3.2) se han trazado los puntos  $M$  y  $N$  que son los puntos intersección del radio vector del satélite y del nodo ascendente con la esfera de centro  $O$  y radio 1. En el triángulo esférico  $N, M', M$  se verifica la relación

$$\sin \phi = \sin i \sin(\omega + v),$$

en donde  $v$  es la anomalía verdadera. Se tiene entonces que

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{2} \sin i [1 - \cos(2\omega + 2v)],$$

de donde

$$R = \mu J_2 \frac{a_{\oplus}^2}{a^3} \frac{a^3}{r^3} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) + \frac{3}{4} \sin^2 i \cos(2\omega + 2v) \right]. \quad (3.3)$$

Se escriben ahora los desarrollos en series de Fourier en la anomalía media  $M$  de las funciones siguientes:

$$\frac{a^3}{r^3} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \cos pM, \quad \frac{a^3}{r^3} \cos 2v = \sum_{p=1}^{\infty} b_p \cos pM, \quad \frac{a^3}{r^3} \sin 2v = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \sin pM. \quad (3.4)$$

Los coeficientes  $a_p, b_p, c_p$  son funciones de la excentricidad  $e$  (Kaula, 1966; Tisserand, 1889). A partir de estas relaciones podemos poner

$$\frac{a^3}{r^3} \cos(2\omega + 2v) = \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \frac{b_p + c_p}{2} \cos(2\omega + pM) + \frac{b_p - c_p}{2} \cos(2\omega - pM) \right].$$

Sustituyendo esta ecuación así como el primero de los desarrollos (3.4) en la fórmula (3.3),

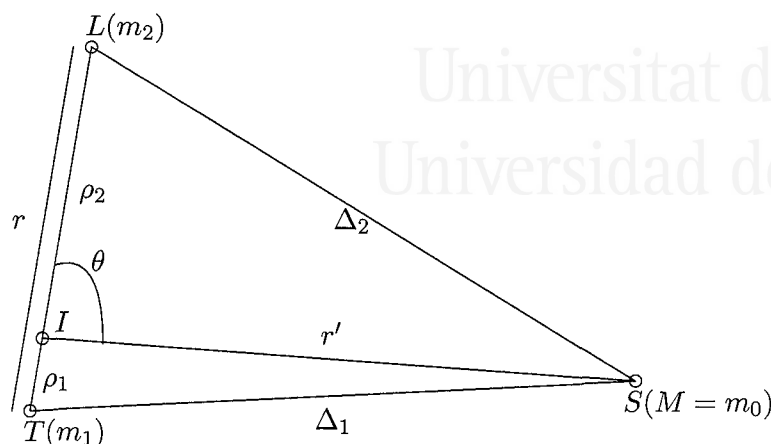


Figura 3.4: Sistema Sol-Tierra-Luna.

tenemos

$$R = \mu J_2 \frac{a_\oplus^2}{a^3} \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) a_p \cos pM + \frac{3}{4} \sin^2 i \left( \frac{b_p + c_p}{2} \cos(2\omega + pM) + \frac{b_p - c_p}{2} \cos(2\omega - pM) \right) \right].$$

### 3.2.2 El problema de la Luna

Una de las primeras aplicaciones de los procesadores simbólicos fue el de tratar de mejorar la solución del problema de la Luna. Delaunay desarrolló un método de perturbaciones para resolver el problema, y la aplicación del mismo le llevó 20 años de operaciones algebraicas a mano, y llegando hasta orden siete en la solución. Deprit *et al.* (Deprit, 1970b), mediante el uso de un sencillo manipulador simbólico de series de Poisson, reprodujo el resultado de Delaunay. Más tarde, en 1979, Henrard (Henrard, 1979) llegó hasta orden 25 en la solución, empleando también el mismo método. Actualmente, la teoría lunar más completa es la ELP (Ephemeride Lunaire Parisien) (Chapront-Touzé y Chapront, 1988), y contiene más de 50 000 términos. Vamos a describir sucintamente el problema.

Sea  $S$  el Sol con masa  $M = m_0$ ,  $T$  la Tierra, de masa  $m_1$ , y  $L$  la Luna, con masa  $m_2$ . Se considera un sistema de referencia inercial  $O\xi\eta\zeta$  con origen en un punto fijo  $O$  cualquiera. Sean  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  las coordenadas del Sol,  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  las de la Tierra y  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  las de la Luna. La función de fuerza gravitacional  $U$  viene dada por

$$U = \mathcal{G} \left[ \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{m_1 M}{\Delta_1} + \frac{m_2 M}{\Delta_2} \right], \quad (3.5)$$

en donde, como se ve en la figura 3.4,  $r$  es la distancia Tierra-Luna,  $\Delta_1$  es la distancia Tierra-Sol, y  $\Delta_2$  la distancia Luna-Sol.  $\mathcal{G}$  es la constante de gravitación universal. Las ecuaciones de movimiento vienen dadas entonces mediante:

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad \frac{d^2\eta_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \quad (3.6)$$

para  $i = 0, 1, 2$ . Tomemos otros dos sistemas de referencia con ejes paralelos a los ejes inerciales, y con orígenes respectivos la Tierra, y el baricentro  $I$  Luna-Tierra. Sean  $x, y, z$  las coordenadas de la Luna en el sistema de origen la Tierra, y  $x_0, y_0, z_0$  las coordenadas del Sol en el sistema con origen en  $I$ . Como  $\mathbf{TL} = \mathbf{OL} - \mathbf{OT}$ , se tiene que

$$x = \xi_2 - \xi_1, \quad (3.7)$$

y teniendo en cuenta las fórmulas respectivas para  $y, z$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2\xi_2}{dt^2} - \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial \xi_2} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial \xi_1}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2\eta_2}{dt^2} - \frac{d^2\eta_1}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial \eta_2} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial \eta_1}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2\zeta_2}{dt^2} - \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial \zeta_2} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial \zeta_1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Se cumple además

$$\mathbf{IS} = \mathbf{OS} - \mathbf{OI} = \mathbf{OS} - \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \mathbf{OT} + m_2 \mathbf{OL}),$$

de donde

$$x_0 = \xi_0 - \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2), \quad (3.9)$$

con fórmulas análogas para  $y_0$  y  $z_0$ , de donde

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} &= \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial \xi_0} - \frac{1}{m_1 + m_2} \left( \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \right), \\ \frac{d^2y_0}{dt^2} &= \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial \eta_0} - \frac{1}{m_1 + m_2} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta_1} + \frac{\partial U}{\partial \eta_2} \right), \\ \frac{d^2z_0}{dt^2} &= \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial \zeta_0} - \frac{1}{m_1 + m_2} \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial U}{\partial \zeta_2} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Calculemos ahora las relaciones que existen entre las derivadas parciales de  $U$  respecto de  $\xi, \eta, \zeta$  y las derivadas parciales de  $U$  respecto de  $x, y, z$  y  $x_0, y_0, z_0$ . Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.7) y (3.9), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial U}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} + \frac{\partial U}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial \xi_2} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial U}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_0} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_0} + \frac{\partial U}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial \xi_0} = \frac{\partial U}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

De la misma forma se obtienen relaciones equivalentes sustituyendo  $x$  por  $y$  ( $z$ ) y  $\xi$  por  $\eta$  ( $\zeta$ ). Sustituyendo estas nueve relaciones en las ecuaciones (3.8) y (3.10), tenemos por un lado las ecuaciones del movimiento de la Luna en torno a la Tierra:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{\partial U}{\partial z},\end{aligned}\tag{3.11}$$

y por otro lado, las ecuaciones de movimiento del Sol en torno al baricentro del sistema Tierra-Luna:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_0}{dt^2} &= \frac{M + m_1 + m_2}{M(m_1 + m_2)} \frac{\partial U}{\partial x_0}, \\ \frac{d^2y_0}{dt^2} &= \frac{M + m_1 + m_2}{M(m_1 + m_2)} \frac{\partial U}{\partial y_0}, \\ \frac{d^2z_0}{dt^2} &= \frac{M + m_1 + m_2}{M(m_1 + m_2)} \frac{\partial U}{\partial z_0}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

$U$  es función de las nuevas variables  $x, y, z, x_0, y_0, z_0$ . En la ecuación (3.5), se tiene que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

dado que

$$\Delta_1^2 = (\xi_0 - \xi_1)^2 + (\eta_0 - \eta_1)^2 + (\zeta_0 - \zeta_1)^2$$

o (según la ecuación (3.9))

$$\xi_0 = x_0 + \frac{m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2}{m_1 + m_2},$$

de donde

$$\xi_0 - \xi_1 = x_0 + \frac{m_2(\xi_2 - \xi_1)}{m_1 + m_2} = x_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x.$$

Para  $\eta_0 - \eta_1$  y  $\zeta_0 - \zeta_1$  surgen fórmulas análogas. De igual modo,

$$\Delta_2^2 = (\xi_0 - \xi_2)^2 + (\eta_0 - \eta_2)^2 + (\zeta_0 - \zeta_2)^2,$$

y entonces se obtiene

$$\xi_0 - \xi_2 = x_0 + \frac{m_1(\xi_1 - \xi_2)}{m_1 + m_2} = x_0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} x$$

y las correspondientes ecuaciones para  $\eta_0 - \eta_2$  y  $\zeta_0 - \zeta_2$ . Si escribimos  $\mu = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$ , teniendo en cuenta la ecuación (3.5), podemos escribir

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mathcal{G}M(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \left( \frac{m_1}{\Delta_1} + \frac{m_2}{\Delta_2} \right).$$

Definiendo ahora

$$u = \frac{\mu}{r}, \quad R = \frac{\mathcal{G}M(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \left( \frac{m_1}{\Delta_1} + \frac{m_2}{\Delta_2} \right),$$

las ecuaciones (3.11) del movimiento geocéntrico de la Luna, se escriben como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La función  $R$  es la función de perturbación del movimiento de la Luna. Si se prescinde de esta función, el movimiento es kepleriano. En el segundo miembro de las ecuaciones (3.12), las ecuaciones del movimiento del Sol respecto del baricentro del sistema Tierra-Luna, aparecen las derivadas parciales de  $U$  respecto de las coordenadas  $x_0, y_0, z_0$ , y como  $r$  no depende de ellas, podemos pasar a escribir las ecuaciones (3.12) en la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} &= \frac{\mathcal{G}(M + m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{m_1}{\Delta_1} + \frac{m_2}{\Delta_2} \right), \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= \frac{\mathcal{G}(M + m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial y_0} \left( \frac{m_1}{\Delta_1} + \frac{m_2}{\Delta_2} \right), \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} &= \frac{\mathcal{G}(M + m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{m_1}{\Delta_1} + \frac{m_2}{\Delta_2} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tanto en la función de perturbación de la Luna como en las ecuaciones de movimiento del Sol, aparece la función

$$\frac{m_1}{\Delta_1} + \frac{m_2}{\Delta_2}.$$

Conviene expresarla adecuadamente. Sea  $\theta$  el ángulo entre  $IS$  e  $IL$ ,  $\rho_1$  la distancia  $IT$  y  $\rho_2$  la distancia  $IL$  (véase la figura 3.4), verificándose las relaciones

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 &= r'^2 + 2r'\rho_1 \cos \theta + \rho_1^2, \\ \Delta_2^2 &= r'^2 - 2r'\rho_2 \cos \theta + \rho_2^2. \end{aligned}$$

Despejando en estas relaciones,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_1} &= \frac{1}{r'} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\rho_1}{r'} \right)^n P_n(\cos \theta) \right], \\ \frac{1}{\Delta_2} &= \frac{1}{r'} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho_2}{r'} \right)^n P_n(\cos \theta) \right], \end{aligned}$$



siendo  $P_n(\cos \theta)$  el polinomio de Legendre de orden  $n$  en  $\cos \theta$ . Por consiguiente,

$$\frac{m_1}{\Delta_1} + \frac{m_2}{\Delta_2} = \frac{m_1 + m_2}{r'} + \frac{1}{r'} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n m_1 m_2^n + m_2 m_1^n}{(m_1 + m_2)^n} \frac{r^n}{r'^n} P_n(\cos \theta). \quad (3.15)$$

### Movimiento del Sol respecto del baricentro Tierra-Luna

Si hacemos  $\nu = \mathcal{G}(M + m_1 + m_2)$  en las ecuaciones (3.14), se transforman en las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\nu}{r'} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_0} \left[ \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos \theta) + \dots \right], \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial y_0} \left( \frac{\nu}{r'} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y_0} \left[ \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos \theta) + \dots \right], \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{\nu}{r'} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial z_0} \left[ \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos \theta) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Se ve que el primer término del segundo miembro se corresponde con un movimiento kepleriano. Los términos restantes (de perturbación) son muy pequeños respecto del primero, dado que

$$r \approx 384\,000 \text{ km}, \quad r' \approx 150\,000\,000 \text{ km}, \quad \text{y} \quad m_2/m_1 \approx 0.012\,300\,02.$$

Denotemos por  $a', e'$  el semi eje mayor y la excentricidad de la órbita kepleriana del Sol alrededor de  $I$ . Tomando como plano de referencia el plano de esta órbita, la inclinación es nula. Llamaremos  $\varpi'$  al ángulo entre la dirección del punto  $\gamma$  y la dirección del perigeo, y  $\nu'$  a la anomalía verdadera del Sol en el instante  $t$ . El movimiento medio  $n'$  viene definido por

$$n'^2 a'^3 = \nu = \mathcal{G}(M + m_1 + m_2). \quad (3.17)$$

### Desarrollo de la función de perturbación de la Luna

Las ecuaciones del movimiento de la Luna son las ecuaciones (3.13), sustituyendo en  $R$  la expresión dada por (3.15). El término  $r'$  es independiente de  $x, y, z$ . La función  $R$  se escribe entonces

$$\begin{aligned} R &= \frac{\mathcal{G}M}{r'} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{m_1^{n-1} + (-1)^n m_2^{n-1}}{(m_1 + m_2)^{n-1}} \frac{r^n}{r'^n} P_n(\cos \theta) = \\ &= \frac{\mathcal{G}M}{r'} \left[ K_2 \frac{r^2}{r'^2} P_2(\cos \theta) + \dots + K_n \frac{r^n}{r'^n} P_n(\cos \theta) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

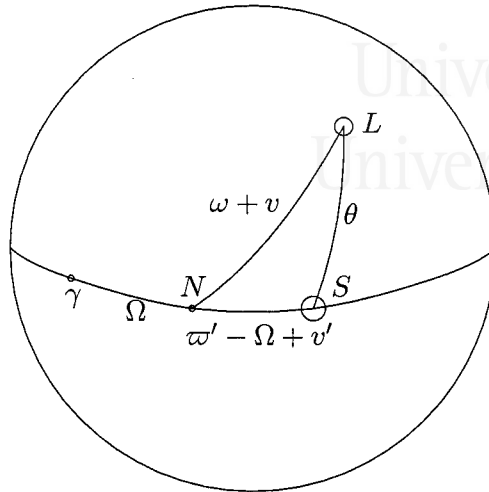


Figura 3.5: Esfera celeste geocéntrica.

Las constantes  $K_n$  dependen de  $\epsilon = m_2/m_1 = 0.01230002$ , siendo

$$K_2 = 1, \quad K_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} = 0,9756 \dots, \quad K_n = \frac{1 + (-1)^n \epsilon^{n-1}}{(1 + \epsilon)^{n-1}}.$$

Para  $n$  lo suficientemente grande se tiene

$$K_n \approx \frac{1}{1 + n\epsilon},$$

y se ve que tiende lentamente a 0 cuando  $n$  tiende a infinito.

Sean  $a, e, i, \Omega, \omega, v$  los elementos de la órbita de la Luna en el instante  $t$ , siendo  $v$  la anomalía verdadera. Teniendo en cuenta la definición de movimiento medio, podemos poner

$$\mathcal{GM} = n'^2 a'^3 = n'^2 a^2 \frac{a'^3}{a^2},$$

y ( $K_2 = 1$ )

$$\begin{aligned} R = & n'^2 a^2 \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 P_2(\cos \theta) + K_3 \frac{a}{a'} \left( \frac{r}{a} \right)^3 \left( \frac{a'}{r'} \right)^4 P_3(\cos \theta) + \right. \\ & \left. + K_4 \frac{a^2}{a'^2} \left( \frac{r}{a} \right)^4 \left( \frac{a'}{r'} \right)^5 P_4(\cos \theta) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Queda expresar  $\cos \theta$  en función de las variables del problema. La figura 3.7 representa la esfera celeste geocéntrica.  $S$  y  $L$  son los puntos de intersección de la esfera con las

direcciones Tierra-Sol y Tierra-Luna respectivamente,  $N$  es la intersección con la esfera de la dirección del nodo ascendente de la órbita lunar sobre la eclíptica. El ángulo  $\theta$  es el arco  $SL$  y el resto de elementos del triángulo esférico  $NSL$  se definen fácilmente en función de las variables. Se tiene que en dicho triángulo se verifica la relación:

$$\cos \theta = \cos(\omega + v) \cos(\varpi' - \Omega + v') + \sin(\omega + v) \sin(\varpi' - \Omega + v') \cos i,$$

en donde si ponemos  $\cos i = 1 - 2\sin^2(i/2) = 1 - 2\sigma^2$  y transformamos el producto de senos en suma:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\omega + \Omega - \varpi' + v - v') - \sigma^2 [\cos(\omega + \Omega - \varpi' + v - v') - \\ &\quad - \cos(\omega + \varpi' - \Omega + v + v')]. \end{aligned}$$

Podemos así desarrollar los  $\cos \theta$  que aparecen dentro de los polinomios de Legendre con respecto al pequeño parámetro  $\sigma$ .

### 3.2.3 Teoría planetaria

De nuevo, el problema aquí estriba en encontrar una forma adecuada de la función de perturbación. La función de perturbación de un planeta  $P$  de masa  $m$  por un planeta  $P'$  de masa  $m'$  es

$$R = \mathcal{G}m' \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{rr' \cos \sigma}{r'^3} \right],$$

con  $\mathcal{G}$  la constante de gravitación universal,  $r$  y  $r'$  las distancias de  $P$  y  $P'$  al Sol,  $\Delta$  la distancia  $PP'$  y  $\sigma$  el ángulo entre las direcciones de los dos planetas.

El segundo término del corchete, multiplicado por  $\mathcal{G}m'$  se conoce como *parte indirecta* de la función de perturbación. Su desarrollo en serie trigonométrica de las longitudes medias de dos planetas no es realmente compleja. El desarrollo de la parte principal  $\mathcal{G}m'/\Delta$  de la función de perturbación presenta un problema peculiar. Aquí no es posible desarrollar la inversa de la distancia como una serie en el parámetro  $r/r'$  como en el caso de la Luna (ecuación (3.18)). Esto es debido a que en el caso de la Luna la razón de las distancias de la Luna a la Tierra y al Sol, es del orden de 0.0026, que es pequeño. Sin embargo, el cociente de las distancias entre dos planetas y el Sol está cerca de 1 (0.7 para el caso de Venus y la Tierra). Hay que proceder de otra forma. Supongamos que dos planetas describen órbitas circulares con centro en el Sol  $S$  y están en el mismo plano, como se muestra en la figura 3.6. Sea  $a$  el radio de la órbita más pequeña y  $a'$  el de la otra:  $\alpha = a/a' < 1$ . Sea  $\Delta$  la distancia entre planetas y  $\theta$  el ángulo entre los dos radio vectores. Los movimientos son circulares y uniformes y  $\theta$  es la diferencia entre las longitudes medias de los dos planetas, que son funciones lineales del tiempo.

Sea

$$A = \left( \frac{\Delta}{a'} \right)^2 = 1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2.$$

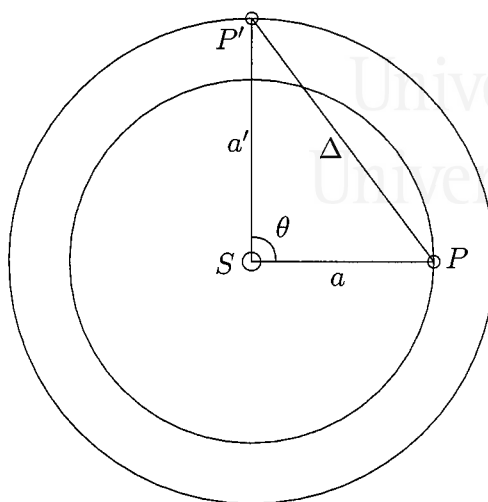


Figura 3.6: Sistema formado por Sol y dos planetas.

Se tiene

$$\frac{a'}{\Delta} = A^{-1/2} = (1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)^{-1/2}.$$

Tanto en el caso del satélite como en el de la Luna, ante una expresión como esta, se procedía desarrollando en serie entera de  $\alpha$  siendo los coeficientes polinomios de Legendre en  $\cos \theta$ . Como hemos indicado antes, en este caso debemos proceder de otra forma. Queda como única posibilidad el desarrollar  $A^{-1/2}$  en serie de Fourier de  $\theta$ , siendo los coeficientes funciones de  $\alpha$ . Como veremos más adelante, no solamente necesitamos la función  $A^{-1/2}$ , sino que también se usará  $A^{-s}$ , en donde  $s = (2p + 1)/2$ ,  $p$  entero. Entonces, escribimos

$$A^{-s} = \frac{1}{2} b_s^0(\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} b_s^k(\alpha) \cos k\theta. \quad (3.20)$$

Las funciones  $b$  se denominan *funciones de Laplace*. Para calcularlas, se pone  $z = \exp i\theta$ , de modo que

$$A = 1 - \left(z + \frac{1}{z}\right) \alpha + \alpha^2 = (1 - \alpha z) \left(1 - \frac{\alpha}{z}\right).$$

Buscamos un desarrollo de la forma

$$A^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_s^k(\alpha) z^k. \quad (3.21)$$

Podemos escribir

$$A^{-s} = (1 - \alpha z)^{-s} \left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)^{-s},$$

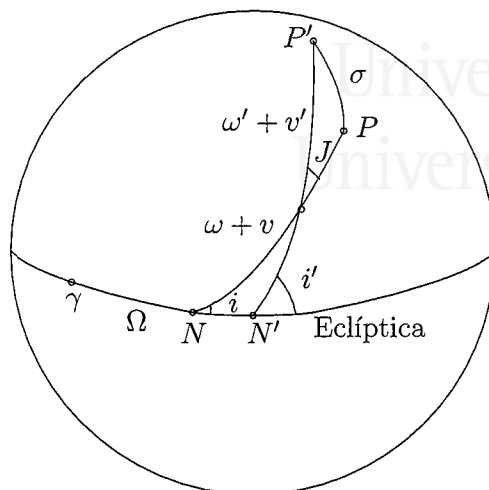


Figura 3.7: Esfera celeste geocéntrica.

y empleando los desarrollos de las dos funciones del segundo miembro:

$$(1 - \alpha z)^{-s} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+p)}{\Gamma(s)\Gamma(p+1)} \alpha^p z^p,$$

$$\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)^{-s} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+q)}{\Gamma(s)\Gamma(q+1)} \alpha^q z^{-q},$$

en donde  $\Gamma$  es la función euleriana de segunda especie, desarrollaremos ahora usando las funciones de Laplace la inversa de la distancia de dos planetas.

Supongamos que las órbitas de los planetas no son coplanarias ni tampoco circulares. Sean  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  los vectores  $SP$  y  $SP'$  de módulo  $r$  y  $r'$ , y sea  $\sigma$  el ángulo que forman dichos vectores. Sean asimismo  $a$  y  $a'$  los semiejes mayores,  $e$  y  $e'$  las excentricidades, e  $i$  e  $i'$  las inclinaciones de los planos de las órbitas sobre la eclíptica. Denotemos  $\alpha = a/a'$  y  $\rho = r/r'$ . Si  $\Delta$  es la distancia  $PP'$ , se tiene

$$\Delta^2 = (r^2 - 2rr' \cos \sigma + r'^2),$$

y entonces, podemos escribir

$$\frac{a'}{\Delta} = \frac{a'}{r'} \left[ 1 - 2\frac{r}{r'} \cos \sigma + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{a'}{r'} [1 - 2\rho \cos \sigma + \rho^2]^{-1/2}. \quad (3.22)$$

Sea  $\theta = l' - l$  la diferencia de las longitudes medias de los dos planetas, siendo la longitud media de un planeta  $P$ :

$$l = \Omega + \omega + M,$$

en donde  $M$  es la anomalía media. Para el planeta  $P'$  la fórmula es análoga.  $\Omega$  es la longitud del nodo ascendente  $N$  de la órbita de  $P$  en la eclíptica, y  $\omega$  es la distancia angular del nodo ascendente al perihelio. Agrupando apropiadamente términos en (3.22) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{a'}{\Delta} &= \frac{a'}{r'} [1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2 + \rho^2 - \alpha^2 + 2\alpha \cos \theta - 2\rho \cos \sigma]^{-1/2} = \\ &= \frac{a'}{r'} \left[ 1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2 + \alpha^2 \left( \frac{\rho^2}{\alpha^2} - 1 \right) + 2\alpha \left( \cos \theta - \frac{\rho}{\alpha} \cos \sigma \right) \right]^{-1/2}. \end{aligned}$$

En el primer término reconocemos la cantidad  $A$  definida al principio de la sección. Haciendo

$$V_1 = \cos \theta - \frac{\rho}{\alpha} \cos \sigma, \quad V_2 = \left( \frac{\rho}{\alpha} \right)^2 - 1, \quad V = 2\alpha V_1 + \alpha^2 V_2, \quad (3.23)$$

y entonces

$$\frac{a'}{\Delta} = \frac{a'}{r'} (A + V)^{-1/2}. \quad (3.24)$$

$V$  es en general pequeño en comparación con  $A$ .  $V_2$  y  $V_1$  son de orden 1 y 2 respecto de la excentricidad y las inclinaciones respectivamente. Por consiguiente, puede desarrollarse la ecuación (3.24) por la fórmula de Taylor:

$$\frac{a'}{\Delta} = \frac{a'}{r'} A^{-1/2} - \frac{1}{2} \frac{a'}{r'} V A^{-3/2} + \frac{3}{8} \frac{a'}{r'} V^2 A^{-5/2} - \frac{5}{16} \frac{a'}{r'} V^3 A^{-7/2} + \dots \quad (3.25)$$

En esta ecuación se ve la necesidad de haber definido las funciones  $A^{-s}$ .

### 3.2.4 El problema de la rotación de la Tierra

Una descripción completa del problema de la rotación de la Tierra se encuentra en el capítulo 1, que se dedica por completo a la descripción de dicho problema.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



## Capítulo 4

# Manipulador algebraico de series de Poisson

En este capítulo presentamos un manipulador algebraico de series de Poisson, diseñado en C++ y empleando por tanto una filosofía orientada a objetos, es decir, la serie de Poisson es un nuevo tipo de datos con un conjunto propio de operaciones, como la suma, producto, derivación, etcétera. Al mismo tiempo se analizan los problemas asociados al diseño de tales manipuladores, y se introducen algunas aplicaciones sencillas del manipulador al cálculo de polinomios asociados de Legendre y otras funciones especiales.

### 4.1 Definiciones y conceptos previos

Tal y como se presentó en la sección 3.1.1, una serie de Poisson es una serie de Fourier múltiple con monomios en los coeficientes, de la forma (Broucke, 1980, Barton, 1966, Danby, 1965, Henrard, 1989)

$$\mathcal{P} = \sum_i c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \rho_2^{\mu_{i2}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\theta_1 + \dots + \alpha_{im}\theta_m), \quad (4.1)$$

en donde  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$  se dicen polinómicas, y las variables  $\theta_1, \dots, \theta_m$  trigonométricas. En el manipulador desarrollado, las variables polinómicas y trigonométricas se confunden, en el sentido de que es posible (tal y como veremos) que aparezca una misma variable en ambas partes de la serie. Por consiguiente, resultará en ocasiones más adecuado escribir

$$\sum_i c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \rho_2^{\mu_{i2}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \dots + \alpha_{in}\rho_n). \quad (4.2)$$

No obstante, para definir formalmente las operaciones con series de Poisson, nos referiremos a la expresión (4.1).



## 4.2 Variables de una serie de Poisson

En el manipulador de series de Poisson, se definen varias constantes, que pueden ser modificadas de forma sencilla por el usuario con el objeto de adaptar el manipulador tanto a la notación del problema concreto que se pretende resolver, como a las necesidades de memoria.

Tabla 4.1: Constantes del manipulador.

Constante	Características
NTT	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Constante que denota el número total de variables que distingue el manipulador. Internamente las variables tienen asociado un entero comprendido entre cero y <math>NTT-1</math>.</li> <li>— No modificable por el usuario.</li> <li>— Definida en <code>termsimp.hpp</code>.</li> </ul>
DEFINIDAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Constante que denota el número de variables definidas por el usuario en la tabla <code>tablavar</code>. El usuario puede variar su valor, y con él, automáticamente las dimensiones de la tabla <code>tablavar</code>.</li> <li>— Modificable por el usuario.</li> <li>— Definida en <code>termsimp.hpp</code>.</li> </ul>
tablavar	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Tabla que almacena el nombre de las variables con las que el usuario trabajará, de modo que puede referirse a ellas por su nombre, escribiéndolas entrecomilladas. En el caso en que el nombre de una variable comience por <code>\\</code> para mejorar la salida en <math>\text{\LaTeX}</math>, internamente se referirá a ella omitiendo <code>\\</code>.</li> <li>— Modificable por el usuario.</li> <li>— Definida en la función <code>iniciartabla ()</code> en <code>poissimp.hpp</code>.</li> <li>— El usuario debe llamar a la función <code>iniciartabla ()</code> al principio de cada programa para que se carguen las variables. Esto se hace escribiendo: <code>iniciartabla ();</code>.</li> </ul>
positabla	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Función que recibe una cadena de caracteres y devuelve un entero que representa la posición que ocupa en la tabla de variables <code>tablavar</code>. En el caso en que tal cadena no esté definida en dicha tabla, la función devuelve <math>-1</math>.</li> </ul>

### 4.2.1 Sobre el nombre de las variables

Por un lado hay que definir claramente las variables en la tabla `tablavar`. Cada variable que se define en la tabla puede o no comenzar por `\\`, pero siempre que el usuario se refiera a ella lo hará sin usar `\\`. El nombre de las variables debe comenzar por una letra mayúscula o minúscula, y puede incluir letras, números y los símbolos ' } { y -.

En el caso en que se empleen variables como `sin I`, que contienen un espacio, el usuario no podrá referirse a ellas para introducir una serie de Poisson, aunque sí podrá referirse a dicha variable en la llamada a funciones. Supongamos que pretendemos trabajar con series de Poisson en las variables  $\Omega, l_M, l_S, F, D$ . Entonces, en el fichero `termsimp.hpp`, modificaremos la línea:

```
#define DEFINIDAS 5
```

y en la función `iniciartabla` del fichero `poissimp.hpp`, haremos:

```
strcpy (tablavar[0], "\\Omega");
strcpy (tablavar[1], "l_M");
strcpy (tablavar[2], "l_S");
strcpy (tablavar[3], "F");
strcpy (tablavar[4], "D");
```

## 4.3 Entrada y salida de series de Poisson

### 4.3.1 Entrada de series

La gramática que representa el lenguaje que reconoce el manipulador es:

$$\begin{aligned}
 \text{SER} &\rightarrow \text{INI SER} \mid \epsilon \\
 \text{INI} &\rightarrow \text{SIGNO COEF POL TRIG} \\
 \text{SIGNO} &\rightarrow + \mid - \\
 \text{COEF} &\rightarrow \text{realpositivo} \mid \epsilon \\
 \text{POL} &\rightarrow \text{SIMBOLO MAS} \mid \epsilon \\
 \text{MAS} &\rightarrow \text{POL} \mid \wedge \text{natural POL} \mid \wedge ( - \text{natural} ) \text{POL} \\
 \text{TRIG} &\rightarrow \epsilon \mid \\sin \text{ RAZON} \mid \\cos \text{ RAZON} \\
 \text{RAZON} &\rightarrow ( \text{SUMA} ) \mid ( - \text{SUMA} ) \mid \\
 &\quad \text{SIMBOLO} \mid \text{natural SIMBOLO} \\
 \text{SUMA} &\rightarrow \text{natural SIMBOLO OTRO} \mid \text{SIMBOLO OTRO} \\
 \text{OTRO} &\rightarrow \epsilon \mid + \text{SUMA} \mid - \text{SUMA}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Conviene tener en cuenta las siguientes consideraciones:

— Previamente a introducir cualquier serie, el usuario debe definir convenientemente la tabla `tablavar` con las variables con que desea trabajar. Como ya se ha señalado, puede hacer comenzar cuantas variables quiera por `\\` para mejorar la salida, pero prescindirá de este símbolo cuando trate de definir una serie de Poisson.

— El primer término de la serie debe ir también con signo.

— Para cada término, en primer lugar se introduce el coeficiente, seguido de la parte polinómica y la trigonométrica, exactamente en la forma que describe la gramática (4.3).

— Las variables se escriben como se han definido en la tabla, sin usar `\\` en el caso en que en la tabla comiencen así. No deben juntarse variables en la parte polinómica, es decir, habiéndose definido las variables `D` y `F`, para escribir `DF` deberá hacerse en la forma `D F`. Si se escribieran juntas, `DF`, el compilador trataría esa cadena como una sola variable, y no estando definida dicha variable, daría un mensaje de error.

Supongamos que partimos de la definición de variables del ejemplo anterior. Podemos entonces escribir las siguientes líneas de código:

```
pois P, Q, R, S;
P="+Omega \\sin (1_M-3F+4D)
+Omega \\cos (3 F-1_M)
-\\sin 4 Omega
+1_M^2";
Q="+1_S^2+1_S^3+F^4";
R="+21_S^21_M-F^(-3)D 1_M";
S="+\\cos(-31_M+F)";
```

### 4.3.2 Salida de series

#### Generando ecuaciones para $\text{\LaTeX}$

La función `latex` escribe en un fichero la serie en formato  $\text{\LaTeX}$ . Como parámetros, esta rutina recibe el nombre del fichero en el cual queremos guardar la ecuación, el número de términos ( $n$ ) que queremos que contenga cada línea de la ecuación, y un tercer parámetro, que es un entero ( $m$ ). La función `latex` va escribiendo líneas con  $n$  términos, y si el número de líneas supera el valor de  $m$ , entonces la ecuación se parte, de forma que se evita el tener fórmulas demasiado grandes que no quepan en una página.

## Generando tablas para L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

En ocasiones, tenemos series de Poisson sin variables polinómicas. Tal es el caso de series de la forma  $\sum_i A_i \cos(i_1 D + i_2 l + i_3 l' + i_4 F)$ , con  $A_i \in \mathbb{R}$ . En este caso, resulta útil poder expresar el resultado como una tabla en la que cada columna representa el coeficiente de la variable trigonométrica correspondiente. Se emplea una columna adicional para el coeficiente.

## 4.4 Estructura de la serie de Poisson

La programación de los algoritmos asociados a las series de Poisson, así como la eficiencia de los mismos, tienen una fuerte dependencia de la estructura de datos que se emplea para codificar cada término de la serie. Vamos a revisar algunas de las posibles formas de abordar el problema. Para simplificar, consideraremos únicamente polinomios en varias variables (Henrard, 1989). La extensión a series de Poisson es trivial.

Considérese el polinomio en dos variables

$$\mathcal{P} = X^2 + XY - 2X^2Y + Y^3. \quad (4.4)$$

Un primer esquema, al que llamaremos esquema *totalmente explícito*, codifica el nombre de la variable, el exponente, y los coeficientes numéricos. Cada término tiene una longitud variable, y la serie es una lista de tales términos, que se almacenan en registros. El polinomio (4.4) se codificará en la forma:

$$\left[ \begin{array}{cccc} X & 2 & 1.0 & \\ X & 1 & Y & 1 & 1.0 \\ X & 2 & Y & 1 & -2.0 \\ Y & 3 & 1.0 & & \end{array} \right].$$

Este esquema es similar al que emplean los sistemas de manipulación de carácter general, aunque éstos son mucho más complejos, dado que codifican también las operaciones: suma, resta, producto, etcétera. Estos símbolos se asumen *implícitamente* en este esquema.

Un segundo esquema, que llamaremos *parcialmente explícito*, asume que la estructura de datos es un polinomio en un conjunto de variables conocidas, y que además los nombres de las variables no se repiten. En este caso, todos los términos tienen una longitud constante. Para la representación del ejemplo (4.4) se asume que las variables son  $X$  e  $Y$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc} X & Y & c \\ \hline 2 & 0 & 1.0 \\ 1 & 1 & 1.0 \\ 2 & 1 & -2.0 \\ 0 & 3 & 1.0 \end{array} \right].$$

Como puede observarse, usando este esquema se hace implícita más información, y por consiguiente, hay que codificar menor número de datos.

Un tercer esquema, que llamaremos *matricial*, hace corresponder biunívocamente cada término del polinomio con un elemento de una matriz. Se asume en el ejemplo (4.4) que las variables son  $X$  e  $Y$  y que los exponentes únicamente pueden tomar los valores 0, 1, 2, 3. La representación en este caso es

$$\left[ \begin{array}{c|cccc} & X^0 & X^1 & X^2 & X^3 \\ \hline Y^0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ Y^1 & 0.0 & 1.0 & -2.0 & 0.0 \\ Y^2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ Y^3 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{array} \right] .$$

Nótese que en el paso de un esquema al siguiente hacemos más información implícita y por consiguiente codificamos menos. En el último esquema, el nombre de las variables y sus exponentes se deducen de la posición del coeficiente en la matriz.

En general, el carácter implícito de la información conduce a algoritmos más eficientes, pero menos flexibles. El último esquema, por ejemplo, conduce a algoritmos más eficientes debido a que la posición de un término concreto se puede calcular, mientras que con los demás esquemas ha de usarse un algoritmo de búsqueda. Sin embargo, este esquema desperdicia demasiada memoria, salvo en el caso en que todos (o casi todos) los coeficientes de la matriz sean no nulos. A pesar de todo, este esquema fue usado por Laskar (1985) para manipular series en la teoría planetaria.

Otra forma de representar los polinomios en  $n$  variables es considerarlos como polinomios en  $p(\leq n)$  variables cuyos coeficientes son polinomios en  $n - p$  variables. Esta es una representación bastante flexible, y se ha descrito sucintamente en la sección 3.1.2.

La mayoría de los procesadores de series de Poisson toman el segundo esquema como solución de compromiso, y es éste esquema el que emplearemos nosotros también para desarrollar el manipulador de series de Poisson. Para series con miles de términos, se precisa una cantidad de memoria considerable, y al mismo tiempo, de tiempo de cálculo. Cuanta más información se haga implícita, el tiempo de cálculo disminuye, pero la memoria que se emplea en la estructura aumenta. El equilibrio es difícil de conseguir, aunque actualmente el problema de la memoria no es crucial, por lo que se ha optado por el esquema segundo.

En nuestro caso, hemos escogido el siguiente esquema: una serie de Poisson (véase figura 4.1) se representa mediante una lista *ordenada* de términos. En la sección 4.5 se expone el criterio seguido para la ordenación. Cada término consta de un número real (el coeficiente), y de dos vectores de enteros para representar las variables polinómicas y trigonométricas. Así por ejemplo, si consideramos el conjunto de variables definido por  $(0 \ 1 \ 2 \ 3) = (D \ l \ l' \ F)$ , entonces el término  $\alpha \times D^{j_1} \times l^{j_2} \times l'^{j_3} \times F^{j_4} \times$

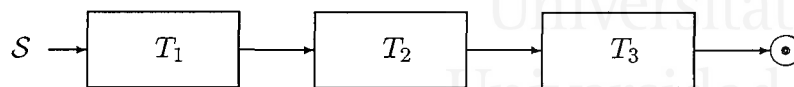


Figura 4.1: Estructura de una serie de Poisson.

$\frac{\sin}{\cos} (i_1 D + i_2 l + i_3 l' + i_4 F)$  viene representado en la forma

$$(\alpha) (j_1 | j_2 | j_3 | j_4) \begin{pmatrix} \text{SIN} \\ \text{COS} \end{pmatrix} (i_1 | i_2 | i_3 | i_4),$$

en donde  $\text{SIN} = 1$  y  $\text{COS} = 2$ . Se ha tomado el siguiente convenio: el coeficiente no nulo de la primera variable trigonométrica se tomará siempre positivo. Es decir, dado el término

$$c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \rho_2^{\mu_{i2}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1} \rho_1 + \dots + \alpha_{in} \rho_n),$$

se verifica que  $\alpha_{ij} \geq 0$  siempre que  $\alpha_{ik} = 0$  para todo  $k < j$ .

## 4.5 Ordenación de una serie de Poisson

Una serie de Poisson se representa internamente como una lista dinámica y ordenada de términos. En una serie de Poisson, por consiguiente, cabe definir un orden. Consideremos dos términos  $T_i$  y  $T_j$  de una serie de Poisson  $\mathcal{P}$ ,

$$T_i = c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \rho_2^{\mu_{i2}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \text{COS} \\ \text{SIN} \end{array} \right\} (\alpha_{i1} \theta_1 + \alpha_{i2} \theta_2 + \dots + \alpha_{im} \theta_m),$$

$$T_j = c_j \rho_1^{\mu_{j1}} \rho_2^{\mu_{j2}} \dots \rho_n^{\mu_{jn}} \left\{ \begin{array}{c} \text{COS} \\ \text{SIN} \end{array} \right\} (\alpha_{j1} \theta_1 + \alpha_{j2} \theta_2 + \dots + \alpha_{jm} \theta_m).$$

Los términos  $T_i$  y  $T_j$  tienen asociados respectivamente los vectores de enteros

$$T_i \rightarrow (\mu_{i1} \ \dots \ \mu_{in} \ \alpha_{i1} \ \dots \ \alpha_{im} \ R_i)$$

$$T_j \rightarrow (\mu_{j1} \ \dots \ \mu_{jn} \ \alpha_{j1} \ \dots \ \alpha_{jm} \ R_j),$$

en donde  $R_i, R_j$  toman los valores 1 ó 2, dependiendo de que la razón trigonométrica del término sea un coseno o un seno respectivamente. Los términos  $T_i$  y  $T_j$  son iguales si se

cumple que  $\alpha_{ik} = \alpha_{jk}$  para  $k = 1, \dots, n$  y  $\mu_{ik} = \mu_{jk}$  con  $k = 1, \dots, m$ . La relación de orden  $T_i < T_j$  se establece como sigue:

$$\begin{aligned}
 T_i < T_j &= (\mu_{i1} < \mu_{j1}) \\
 &\vee (\mu_{i1} = \mu_{j1} \wedge \mu_{i2} < \mu_{j2}) \\
 &\vee (\mu_{i1} = \mu_{j1} \wedge \mu_{i2} = \mu_{j2} \wedge \mu_{i3} < \mu_{j3}) \\
 &\vdots \\
 &\vee (\mu_{i1} = \mu_{j1} \wedge \mu_{i2} = \mu_{j2} \wedge \dots \wedge \alpha_{im} < \alpha_{jm}) \\
 &\vee (\mu_{i1} = \mu_{j1} \wedge \mu_{i2} = \mu_{j2} \wedge \dots \wedge \alpha_{im} = \alpha_{jm}) \wedge R_i < R_j.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

De la misma forma se establece que  $T_i > T_j$ .

Se procede a la ordenación de los términos de una serie de Poisson siempre que se opera con una serie. Este hecho simplifica mucho la forma de los algoritmos, al mismo tiempo que permite una fácil simplificación. Para la ordenación de una serie de Poisson se emplea el algoritmo *quicksort* en su versión recursiva (Hopcroft, 1979).

La función `ordenacoeef` ordena una serie de Poisson según el valor absoluto del coeficiente, en orden decreciente. Esto permite visualizar los términos más importantes de la serie directamente.

## 4.6 Operaciones elementales con series de Poisson

En esta sección presentamos los operadores fundamentales básicos para la manipulación de series de Poisson. Nos referiremos a una serie de Poisson en la forma

$$\mathcal{P} = \sum_i c_i \times T_i = \sum_i c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \rho_2^{\mu_{i2}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\theta_1 + \dots + \alpha_{im}\theta_m),$$

### 4.6.1 Eliminación de términos de una serie de Poisson

En Mecánica Celeste se suele trabajar con series de Poisson de miles de términos. En estos casos, resulta muy útil poder escoger los términos más significativos: aquellos cuyo coeficiente sea mayor que un valor  $\epsilon \in \mathbb{R}$  dado, despreciando el resto de términos. Para ello se emplea la función `desprecia`. Dada la serie de Poisson  $\mathcal{P} = \sum_i c_i \times T_i$ , el resultado de aplicar la rutina `desprecia` sobre dicha serie, con el parámetro  $\epsilon$ , es una serie compuesta por todos los términos de  $\mathcal{P}$  que verifican que  $|c_i| \geq \epsilon$ . El siguiente código elimina de la serie  $\mathcal{P}$  los términos con un coeficiente menor que el valor  $10^{-4}$ : `epsilon=0.0001; P.desprecia (epsilon);`

Es también posible despreciar términos empleando otros criterios distintos. En ocasiones, es conocido que una variable polinómica (sea la  $k$ -ésima variable  $\rho_k$ ) toma valores pequeños. En tal caso, puede ser aconsejable o útil eliminar de una serie de Poisson aquellos términos para los cuales el exponente de dicha variable polinómica  $\rho_k$  sea superior a un número natural dado. La función `discrimina` tiene tal efecto. La siguiente línea de código elimina los términos de la serie de Poisson  $\mathcal{Q}$  en los cuales la variable  $l$  aparece como variable polinómica con exponente mayor que 4. El resultado es asignado a la serie de Poisson  $\mathcal{P}$ : `P=Q.discrimina ("l", 4);`.

#### 4.6.2 Selección de términos

Dada una serie de Poisson  $\mathcal{P}$  (que se supone ordenada en función de algún criterio), es posible obtener una serie de Poisson a partir de  $\mathcal{P}$ , compuesta únicamente por los  $k$  primeros términos de  $\mathcal{P}$ . Así, a partir de la serie  $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^N c_i \times T_i$ , y siendo  $M \leq N$ , podemos obtener la serie  $\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^M c_i \times T_i$ . En el caso en que  $M > N$ , tendremos que  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ . En el siguiente ejemplo, la serie  $\mathcal{P}$  es ordenada en orden decreciente de sus coeficientes, y después se asigna a  $\mathcal{Q}$  los  $N$  primeros términos de  $\mathcal{P}$ : `N=10; P.ordenacoeff (); Q=P.tomaterm ();`.

#### 4.6.3 Suma y diferencia de series de Poisson

Dadas dos series de Poisson,  $\mathcal{P} = \sum_i c_i \times T_i$  y  $\mathcal{Q} = \sum_j c'_j \times T'_j$ , se define la suma (diferencia) de ambas series como una serie de Poisson resultado de sumar (restar) los términos de  $\mathcal{Q}$  a los de  $\mathcal{P}$ :

$$S = \mathcal{P} \pm \mathcal{Q} = \sum_i c_i \times T_i \pm \sum_j c'_j \times T'_j.$$

Para facilitar el uso de este operador hemos sobrecargado el operador suma (diferencia) del C++. El algoritmo que se sigue para llevar a cabo esta operación consiste en crear una nueva serie, a la que se le añaden primero los términos de  $\mathcal{P}$  (todos) y tras ellos los de la serie  $\mathcal{Q}$  (para la resta, se le cambia el signo al coeficiente). A continuación, se procede a la ordenación y agrupación de la serie.



#### 4.6.4 Producto de series de Poisson

Dadas dos series de Poisson,  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ ,

$$\mathcal{P} = \sum_i c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \rho_2^{\mu_{i2}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\theta_1 + \dots + \alpha_{im}\theta_m),$$

$$\mathcal{Q} = \sum_j c'_j \rho_1^{\mu'_{j1}} \rho_2^{\mu'_{j2}} \dots \rho_n^{\mu'_{jn}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha'_{j1}\theta_1 + \dots + \alpha'_{jm}\theta_m),$$

el producto de ambas series de Poisson  $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$  es una nueva serie de Poisson dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \mathcal{P} \times \mathcal{Q} &= \sum_i \sum_j (c_i c'_j) \rho_1^{\mu_{i1} + \mu'_{j1}} \rho_2^{\mu_{i2} + \mu'_{j2}} \dots \rho_n^{\mu_{in} + \mu'_{jn}} \times \\ &\times \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\theta_1 + \dots + \alpha_{im}\theta_m) \times \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha'_{j1}\theta_1 + \dots + \alpha'_{jm}\theta_m). \end{aligned}$$

Como se ve, la expresión anterior no responde exactamente a la definición de serie de Poisson (4.1), pues en cada término aparecen productos de senos o cosenos. Esto se resuelve empleando las relaciones trigonométricas

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha \times \cos \alpha' &= \cos(\alpha + \alpha') + \cos(\alpha - \alpha'), \\ 2 \sin \alpha \times \sin \alpha' &= \cos(\alpha - \alpha') - \cos(\alpha + \alpha'), \\ 2 \sin \alpha \times \cos \alpha' &= \sin(\alpha + \alpha') + \sin(\alpha - \alpha'), \\ 2 \cos \alpha \times \sin \alpha' &= \sin(\alpha + \alpha') - \sin(\alpha - \alpha'). \end{aligned}$$

Después del uso de estas relaciones, debe estudiarse si en algún caso se verifica que  $\alpha + \alpha' = 0$  o bien  $\alpha - \alpha' = 0$ , para realizar las simplificaciones pertinentes.

#### 4.6.5 Producto rápido de series de Poisson

En aplicaciones numéricas en las cuales el número de términos de que constan las series a multiplicar es muy elevado, conviene usar un método para realizar el producto de forma eficiente. Si empleásemos el producto convencional, deberíamos multiplicar término a término las dos series, cuando es posible que ordenando las series en orden decreciente de los coeficientes, los términos obtenidos a partir del producto  $k$ -ésimo puedan decrecerse a efectos prácticos. Esto motiva la introducción de una rutina de multiplicación rápida de series de Poisson.

Consideremos dos series de Poisson  $\mathcal{P} = \sum_i p_i \times P_i$  y  $\mathcal{Q} = \sum_i q_i \times Q_i$ , de modo que  $|p_i| \geq |p_{i+1}|$  y  $|q_j| \geq |q_{j+1}|$  para todo valor de  $i$  y  $j$ . Dado un valor  $\epsilon > 0$ , puede ocurrir que solo estemos interesados en conservar términos con coeficiente mayor en valor absoluto que  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . En tal caso, los términos para los que  $p_i q_j < \epsilon$ , no serán incluidos en la serie de Poisson resultante. Como ambas series están ordenadas según orden decreciente de los coeficientes,

para un valor dado de  $i$  y de  $j$  tales que  $p_i q_j < \epsilon$ , se cumple igualmente que  $|p_i q_{j+1}| < \epsilon$ ,  $|p_i q_{j+2}| < \epsilon \dots$ , dado que los coeficientes  $p_i, q_i$  satisfacen las relaciones  $|p_i| \geq |p_{i+1}|$  y  $|q_j| \geq |q_{j+1}|$  para todo valor de  $i$ . De este modo, para un valor de  $i$  dado, en el momento en que encontremos un valor de  $j > 1$  para el cual  $p_i q_j < \epsilon$ , pasaremos a multiplicar el término en  $p_{i+1}$  por la serie  $\mathcal{Q}$ . De igual modo, en el momento en que se cumpla que  $p_i q_1 < \epsilon$ , se cumplirá igualmente que  $p_{i+1} q_1 < \epsilon$ ,  $p_{i+2} q_1 < \epsilon$ , y así sucesivamente, de tal modo que quedará concluido el producto de las series (de manera que los coeficientes de la serie producto sean mayores o iguales a  $\epsilon$ ).

Esta rutina ordena inicialmente las series de Poisson según el orden decreciente del valor absoluto de los coeficientes, para después aplicar el algoritmo anterior. Esta función se emplea para llevar a cabo los desarrollos seno, coseno y exponencial de una serie de Poisson, lo que simplifica los cálculos de manera notable.

#### 4.6.6 Potencia de series de Poisson

Consideremos una serie de Poisson  $\mathcal{P}$ , y  $n \in \mathbb{N}$ . Se define la serie  $\mathcal{P}^n$  como  $\mathcal{P}^n = \mathcal{P} \times \mathcal{P}^{n-1}$  para  $n > 1$ , y  $\mathcal{P}^0 = 1$ . Esta función se construye a partir del operador producto ya definido anteriormente. La siguiente línea de código eleva la serie de Poisson  $\mathcal{P}$  a  $n = 4$ , y el resultado lo almacena en la serie  $\mathcal{R}$ :

```
n=4; R=P^n;
```

#### Potencia rápida

Existe una versión del operador potencia (la rutina `potencia`), que además del entero  $n$ , recibe un parámetro real que representa la precisión para los coeficientes de la serie de Poisson. Esta función, para el producto, en lugar de usar el producto normal de series de Poisson, utiliza la función `quickproduct`. Seguidamente mostramos un ejemplo de uso de esta rutina: `epsilon=0.0001; R=R.potencia(4, epsilon);`.

#### 4.6.7 Producto de un escalar por una serie de Poisson

Consideremos la serie de Poisson  $\mathcal{P} = \sum_i c_i \times T_i$ , y el escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se define el producto de  $\lambda$  por  $\mathcal{P}$ , como la serie de Poisson  $(\lambda \mathcal{P}) = \sum_i (\lambda c_i) \times T_i$ . En el siguiente fragmento de código mostramos la forma en que la serie de Poisson  $\mathcal{P}$  se multiplica por el número real  $a$ . El resultado del producto es asignado a la serie  $\mathcal{S}$ : `S=P*a`; El orden de los operadores no puede alterarse: primero debe ir la serie, y a continuación el escalar.

#### 4.6.8 Cociente de una serie de Poisson por un escalar

Consideremos la serie de Poisson  $\mathcal{P} = \sum_i c_i \times T_i$ , y el escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Se define el cociente de  $\mathcal{P}$  por  $\lambda$ , como la serie de Poisson  $(\mathcal{P}/\lambda) = \sum_i (c_i/\lambda) \times T_i$ . En el siguiente fragmento de código mostramos la forma en que la serie de Poisson  $\mathcal{P}$  se multiplica por el número real  $a$ . El resultado del producto es asignado a la serie  $\mathcal{S}$ :  $\mathcal{S}=\mathcal{P}/a$ ;

#### 4.6.9 Seno, coseno y exponencial de una serie de Poisson

Dada la serie de Poisson  $\mathcal{P}$ , se definen las series  $\sin \mathcal{P}$ ,  $\cos \mathcal{P}$  y  $\exp \mathcal{P}$  a partir de sus desarrollos en serie de Taylor en torno a  $\mathcal{P} = 0$ :

$$\sin \mathcal{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \mathcal{P}^{2n-1}, \quad \cos \mathcal{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \mathcal{P}^{2n}, \quad e^{\mathcal{P}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{P}^n.$$

El resultado es una serie de Poisson. En la programación de las rutinas hemos utilizado la rutina de multiplicación rápida de series, despreciando los términos para los que el producto de coeficientes es menor que cierto  $\epsilon \in \mathbb{R}$  que se pasa como parámetro a la función. Además, se va construyendo sucesivamente  $\mathcal{P}^n$ , de forma que para calcular  $\mathcal{P}^{2n-1}$ , se emplea  $\mathcal{P}^{2n-3}$  en el caso del seno (de la misma forma, en el cálculo del coseno se usa  $\mathcal{P}^{2n-2}$  para el cálculo de  $\mathcal{P}^{2n}$ , y para la exponencial, se calcula  $\mathcal{P}^n$  a partir de  $\mathcal{P}^{n-1}$ ), evitando realizar dos veces el mismo trabajo. En el siguiente fragmento de código se calcula el seno, coseno y exponencial de la serie  $\mathcal{P}$ , usando un desarrollo en serie de Taylor hasta orden 7, y una precisión (umbral para despreciar términos en la rutina de producto rápido) de  $10^{-4}$ . El resultado es asignado a la serie  $\mathcal{R}$  en cada caso:

```
e=0.0001; R=seno(P,7,e); R=coseno(P,7,e); R=exponencial(P,7,e);
```

#### 4.6.10 Inversa de una serie

Consideremos una serie de Poisson de la forma particular  $\mathcal{Q} = 1 + \mathcal{P}$ , siendo  $\mathcal{P}$  una serie suficientemente próxima a cero. Entonces es posible obtener un desarrollo en serie de Taylor de la serie  $1/\mathcal{Q}$ , es decir, de  $1/(1 + \mathcal{P})$ , como sigue:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{1 + \mathcal{P}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{P}^n.$$

Este resultado es una serie de Poisson. Para el producto de las series, en el algoritmo que se emplea en el cálculo de esta serie de Poisson, se emplea la rutina de multiplicación rápida de series, despreciando los términos para los que el producto de coeficientes es menor que cierto  $\epsilon \in \mathbb{R}$  que se pasa como parámetro a la función. Además, se va construyendo

sucesivamente  $\mathcal{P}^n$ , de forma que para calcular  $\mathcal{P}^n$ , se emplea  $\mathcal{P}^{n-1}$ , evitando realizar dos veces el mismo trabajo.

El siguiente fragmento de código calcula la serie  $1/(1+\mathcal{P})$  usando un desarrollo en serie de Taylor hasta orden 9, y usando una precisión (umbral para despreciar términos en la rutina de producto rápido) de 0.00001. El resultado es asignado a la serie  $\mathcal{R}$ : `R=inversa(P,9,0.00001);`;

#### 4.6.11 Desarrollo de $1/(1+\mathcal{P})^k$

Dada la serie de Poisson  $\mathcal{P}$ , suficientemente próxima a cero, se define la serie  $1/(1+\mathcal{P})^k$ , con  $k > 1$ , como una serie de Poisson dada por el desarrollo en serie de Taylor

$$S = \frac{1}{(1+\mathcal{P})^k} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!} \mathcal{P}^n.$$

Siguen siendo válidos los comentarios relativos a la función anterior.

El siguiente fragmento de código calcula la serie  $1/(1+\mathcal{P})^5$  usando un desarrollo en serie de Taylor hasta orden 9, y usando una precisión (umbral para despreciar términos en la rutina de producto rápido) de  $10^{-5}$ . El resultado es asignado a la serie  $\mathcal{R}$ : `R=menosk(P,9,5,0.00001);`;

## 4.7 Sustituciones en series de Poisson

### 4.7.1 Sustitución de una variable polinómica por una serie de Poisson

Dada una serie de Poisson  $\mathcal{P} = \sum_i T_i = \sum_i c_i \times K_i \times R_i$ , en donde

$$K_i = \rho_1^{\mu_{i1}} \dots \rho_\nu^{\mu_{i\nu}} \dots \rho_n^{\mu_{in}}, \quad R_i = \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\theta_1 + \dots + \alpha_{im}\theta_m),$$

es posible sustituir una variable polinómica  $\rho_\nu$  por una serie de Poisson  $\mathcal{P}'$  en las mismas variables, y obtener de este modo una nueva serie de Poisson. Definimos el operador  $\mathcal{S}(\mathcal{P}, \rho_\nu, \mathcal{P}')$  como el que sustituye la variable  $\rho_\nu$  de la parte *polinómica* de la serie  $\mathcal{P}$  por la serie  $\mathcal{P}'$ .  $\mathcal{S}$  es un operador lineal, es decir

$$\mathcal{S}(\mathcal{P} = \sum_i T_i, \rho_\nu, \mathcal{P}') = \sum_i \mathcal{S}(T_i, \rho_\nu, \mathcal{P}'), \quad (4.6)$$

lo que hace posible estudiar por separado cada término. Prescindiremos del índice  $i$  en la notación por simplicidad. Este operador actúa sobre cada término en la forma:

$$\mathcal{S}(c \times K \times R, \rho_\nu, \mathcal{P}') = c \times R \times \mathcal{S}(K, \rho_\nu, \mathcal{P}'). \quad (4.7)$$

La forma en que actúa sobre la parte polinómica es:

$$\mathcal{S}(K, \rho_\nu, \mathcal{P}') = \mathcal{S}(\rho_1^{\mu_1} \cdots \rho_\nu^{\mu_\nu} \cdots \rho_n^{\mu_n}, \rho_\nu, \mathcal{P}') = (\mathcal{P}')^{\mu_\nu} \times \rho_1^{\mu_1} \cdots \rho_{\nu-1}^{\mu_{\nu-1}} \rho_{\nu+1}^{\mu_{\nu+1}} \cdots \rho_n^{\mu_n}. \quad (4.8)$$

El procedimiento que se sigue en la programación de la rutina se deriva directamente de las ecuaciones (4.6), (4.7) y (4.8).

En el siguiente fragmento de código, sustituimos la variable  $l$  en la serie  $\mathcal{P}$  por la serie  $\mathcal{R}$ . El resultado es asignado a la serie  $\mathcal{P}$ :  $\mathcal{P} = \mathcal{P}.\text{sust}("l", \mathcal{R})$ .

#### 4.7.2 Sustitución de una variable por un valor real

Sea una serie de Poisson  $\mathcal{P}$  en la que variables polinómicas y trigonométricas coinciden, en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ ,  $\mathcal{P} = \sum_i T_i$ , en donde  $T_i = c_i \times K_i \times R_i$ , con

$$K_i = \rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}}, \quad R_i = \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{in}\rho_n).$$

En ocasiones es necesario sustituir una variable  $\rho_\nu$ ,  $\nu \in \{1, \dots, n\}$  por un valor real  $\lambda$ . Definimos el operador  $\mathcal{S}(\mathcal{P}, \rho_\nu, \lambda)$ , que hace  $\rho_\nu = \lambda$  en la serie de Poisson  $\mathcal{P}$ . Evidentemente,  $\mathcal{S}$  es un operador lineal, de modo que

$$\mathcal{S}(\sum_i T_i, \rho_\nu, \lambda) = \sum_i \mathcal{S}(T_i, \rho_\nu, \lambda), \quad (4.9)$$

lo que hace posible estudiar por separado cada término. Simplificaremos la notación eliminando el subíndice  $i$  del término. Se tiene a su vez que el operador  $\mathcal{S}$  verifica lo siguiente:

$$\mathcal{S}(c \times K \times R, \rho_\nu, \lambda) = c \times \mathcal{S}(K, \rho_\nu, \lambda) \times \mathcal{S}(R, \rho_\nu, \lambda). \quad (4.10)$$

Estudiemos ahora la forma en que actúa el operador sobre cada uno de los elementos del término. Sobre la parte polinómica lo hace en la forma:

$$\mathcal{S}(K, \rho_\nu, \lambda) = \mathcal{S}(\rho_1^{\mu_1} \cdots \rho_\nu^{\mu_\nu} \cdots \rho_n^{\mu_n}, \rho_\nu, \lambda) = \lambda^{\mu_\nu} \rho_1^{\mu_1} \cdots \rho_{\nu-1}^{\mu_{\nu-1}} \rho_{\nu+1}^{\mu_{\nu+1}} \cdots \rho_n^{\mu_n}. \quad (4.11)$$

Por otro lado,  $\mathcal{S}$  actúa sobre la parte trigonométrica como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(R, \rho_\nu, \lambda) &= \mathcal{S}(\cos(\alpha_1\rho_1 + \cdots + \alpha_\nu\rho_\nu + \cdots + \alpha_n\rho_n), \rho_\nu, \lambda) = \\ &= \cos(\alpha_\nu\lambda) \times \cos\left(\sum_{l=1, l \neq \nu}^n \alpha_l\rho_l\right) - \sin(\alpha_\nu\lambda) \times \sin\left(\sum_{l=1, l \neq \nu}^n \alpha_l\rho_l\right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(R, \rho_\nu, \lambda) &= \mathcal{S}(\sin(\alpha_1\rho_1 + \cdots + \alpha_\nu\rho_\nu + \cdots + \alpha_n\rho_n), \rho_\nu, \lambda) = \\ &= \sin(\alpha_\nu\lambda) \times \cos\left(\sum_{l=1, l \neq \nu}^n \alpha_l\rho_l\right) + \cos(\alpha_\nu\lambda) \times \sin\left(\sum_{l=1, l \neq \nu}^n \alpha_l\rho_l\right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

En este caso, el algoritmo para la sustitución se obtiene a partir de las ecuaciones (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) y (4.13) de forma directa.

El siguiente fragmento de código sustituye la variable  $\lambda$  por el valor  $\pi$  en la serie  $\mathcal{P}$ . El resultado es asignado a la serie  $\mathcal{P}$ :  $\mathcal{P}=\mathcal{P}.\text{sust}(\text{"lambda"},\text{PI})$ ;

### 4.7.3 Sustitución de una variable por una combinación lineal de variables

En ocasiones, resulta de especial interés el sustituir una variable polinómica, o trigonométrica, por una combinación lineal de variables. Así, en la serie  $\mathcal{P} = \sin \phi$ , puede ser necesario sustituir la variable  $\phi$  por la combinación lineal  $l + l' + F - D$ , de modo que obtengamos la serie  $\mathcal{P} = \sin(l + l' + F - D)$ . Para ello, podemos definir la serie auxiliar  $\mathcal{L} = l + l' + F - D$ , y sustituir en  $\mathcal{P} = \sin \phi$ , la variable  $\phi$  por la serie  $\mathcal{L}$ . Con este fin hemos construido una función llamada CL, que sustituye una variable por una combinación lineal de variables, actuando tanto en la parte polinómica como en la trigonométrica, a diferencia de la función `sust`, que actúa únicamente sobre la parte polinómica. Como parámetro toma una serie de Poisson  $\mathcal{L}$  que representa una combinación lineal de variables. En este punto cabe resaltar la gran utilidad que tiene el hecho de que las variables trigonométricas y polinómicas sean el mismo conjunto de variables. Ello da una gran flexibilidad. Analizamos seguidamente la forma en que se lleva a cabo esta sustitución.

Sea una serie  $\mathcal{P}$  en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , y que denotaremos como

$$\mathcal{P} = \sum_i c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \dots + \alpha_{in}\rho_n),$$

y  $\mathcal{L}$  la combinación lineal de variables

$$\mathcal{L} = \lambda_1\rho_1 + \dots + \lambda_n\rho_n = \sum_{l=1}^n \lambda_l\rho_l,$$

en donde no se impone ninguna restricción sobre  $\lambda_\nu$ . El operador  $\mathcal{S}$  que sustituye las apariciones de la variable  $\rho_\nu$  en la parte polinómica o trigonométrica actúa sobre  $\mathcal{P}$  como sigue: en primer lugar, se trata de un operador lineal, luego

$$\begin{aligned} & \mathcal{S} \left( \sum_i c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \dots + \alpha_{in}\rho_n), \rho_\nu, \mathcal{L} \right) = \\ & = \sum_i \mathcal{S} \left( c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \dots + \alpha_{in}\rho_n), \rho_\nu, \mathcal{L} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} & \mathcal{S} \left( \rho_1^{\mu_{i1}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \dots + \alpha_{in}\rho_n), \rho_\nu, \mathcal{L} \right) = \\ & = \mathcal{S}(\rho_1^{\mu_{i1}} \dots \rho_n^{\mu_{in}}, \rho_\nu, \mathcal{L}) \times \mathcal{S} \left( \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \dots + \alpha_{in}\rho_n), \rho_\nu, \mathcal{L} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Mediante la sustitución de  $\rho_\nu$  por  $\mathcal{L}$  la parte polinómica se ve transformada como sigue,

$$\mathcal{S}(\rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}}, \rho_\nu, \mathcal{L}) = \rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \mathcal{L}^{\mu_{ik}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}} = \rho_1^{\mu_{i1}} \cdots (\sum_{l=1}^n \lambda_l \rho_l)^{\mu_{ik}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}}.$$

Esta parte conviene tratarla de la misma forma en que es tratada la sustitución de una variable polinómica por una serie. Para que el cambio esté bien hecho, esto debe hacerse después de que se haya transformado adecuadamente la parte trigonométrica. Esta parte se transforma como sigue:

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}\left(\left\{\begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array}\right\}(\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{in}\rho_n), \rho_\nu, \mathcal{L}\right) = \\ &= \left\{\begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array}\right\}\left(\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{i\nu}\left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \rho_l\right) + \alpha_{in}\rho_n\right) = \\ &= \left\{\begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array}\right\}(\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{i\nu}\lambda_1\rho_1 + \cdots + \alpha_{i\nu}\lambda_n\rho_n + \cdots + \alpha_{in}\rho_n) = \\ &= \left\{\begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array}\right\}((\alpha_{i1} + \alpha_{i\nu}\lambda_1)\rho_1 + \cdots + \alpha_{i\nu}\lambda_\nu\rho_\nu + \cdots + (\alpha_{in} + \alpha_{i\nu}\lambda_n)\rho_n). \end{aligned} \tag{4.16}$$

La forma en que debe procederse algorítmicamente es muy simple, pues pasamos de tener los argumentos  $\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{in}\rho_n$ , a tener:

$$(\alpha_{i1} + \alpha_{i\nu}\lambda_1)\rho_1 + \cdots + \alpha_{i\nu}\lambda_\nu\rho_\nu + \cdots + (\alpha_{in} + \alpha_{i\nu}\lambda_n)\rho_n.$$

Una vez ha sido modificada la parte trigonométrica de esta forma, se pasa a llamar a la función *sust* para la parte polinómica únicamente.

En la sustitución de la parte trigonométrica, la ecuación (4.16) asociada al algoritmo se programa mejor pasando la serie con la combinación lineal de las variables a un vector (se recorre la serie y se mete el coeficiente de la variable de cada sumando en la posición respectiva del vector, sumándosela al valor que tiene).

En el siguiente ejemplo (en donde se suponen definidas las variables  $l_M, l_S, g$  y  $\lambda$ ), se sustituye la variable  $\lambda$  de la serie  $\mathcal{R}$  por la combinación lineal de variables  $l_M + l_S - g$ , y el resultado se asigna a la serie  $\mathcal{Q}$ .

```
P="+l_M+l_S-g";
Q=R.CL ("lambda", P);
```

## 4.8 Eliminación de variables trigonométricas

En ocasiones especiales conviene expresar una variable que aparece en un seno o coseno como una variable polinómica, para poder realizar posteriores simplificaciones, clasificar

los términos de la serie según el grado en el seno o coseno de dicha variable, etcétera. Así por ejemplo, puede ocurrir que interese eliminar la variable  $\rho_1$  en la serie  $\cos(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)$ . En tal caso, se procederá mediante la agrupación  $\alpha = \rho_1$ ,  $\beta = \rho_2 + \rho_3$ , y la posterior aplicación de la relación

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

en donde tanto  $\cos \alpha$  como  $\sin \alpha$  son ahora variables polinómicas. La función *elitrig* permite eliminar una variable trigonométrica en una serie de Poisson.

Sea  $\mathcal{P}$  la serie de Poisson dada según  $\mathcal{P} = \sum_i c_i \times K_i \times R_i$ , con

$$K_i = \rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}}, \quad R_i = \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{in}\rho_n).$$

Supongamos que se pretende eliminar la variable  $\rho_\nu$  de la parte trigonométrica e incluirla en la polinómica usando las variables  $\sin \rho_\nu$  y  $\cos \rho_\nu$ . Si definimos el operador *eliminación*  $\mathcal{E}$  en la forma en que se ha indicado anteriormente, tenemos:

$$\mathcal{E}_{\rho_\nu}(\mathcal{P}) = \mathcal{E}_{\rho_\nu}(\sum_i c_i \times K_i \times R_i) = \sum_i c_i K_i \times \mathcal{E}_{\rho_\nu}(R_i).$$

Estudiaremos seguidamente la forma en la que transforma cada uno de los términos. Expresaremos  $T_i$  agrupando las variables angulares como sigue:

$$T_i = \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i\nu}\rho_\nu + \Theta_i),$$

en donde  $\Theta_i = \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \alpha_{ij}\rho_j$ . Si  $\alpha_{i\nu} = 0$ , el operador actúa según la siguiente ecuación:

$$\mathcal{E}_{\rho_\nu} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i\nu}\rho_\nu + \Theta_i) = \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} \Theta_i,$$

es decir, dejando las cosas como están. Si  $\Theta_i = 0$ , el operador  $\mathcal{E}$  actúa sobre  $\{\cos, \sin\} \alpha_{i\nu}\rho_\nu$  de la forma que se indica seguidamente, y teniendo en cuenta que cuando aparece en el lado derecho de la ecuación  $\sin^j \rho_\nu$  o  $\cos^j \rho_\nu$ , lo hacen como variables polinómicas: si  $\alpha_{i\nu} = 1$ ,

$$\mathcal{E}(\sin \rho_\nu) = \sin \rho_\nu, \quad \mathcal{E}(\cos \rho_\nu) = \cos \rho_\nu.$$

Haciendo  $m = \alpha_{i\nu}$  para simplificar la notación, tenemos que para  $m \neq 1$ ,

$$\mathcal{E}(\cos m\rho_\nu) = \cos^m \rho_\nu - \binom{m}{2} \sin^2 \rho_\nu \cos^{m-2} \rho_\nu + \binom{m}{4} \sin^4 \rho_\nu \cos^{m-4} \rho_\nu - \cdots,$$

$$\mathcal{E}(\sin m\rho_\nu) = m \sin \rho_\nu \cos^{m-1} \rho_\nu - \binom{m}{3} \sin^3 \rho_\nu \cos^{m-3} \rho_\nu + \cdots.$$

Puede comprobarse sin problemas que las expresiones anteriores pueden escribirse de forma compacta como sigue (además la siguiente ecuación da el algoritmo para expandir los



términos):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\cos m\rho_\nu) &= \sum_{i=1}^{2i-2 \leq m} (-1)^{i+1} \binom{m}{2(i-1)} \sin^{2(i-1)} \rho_\nu \cos^{m-2(i-1)} \rho_\nu, \\ \mathcal{E}(\sin m\rho_\nu) &= \sum_{i=1}^{2i-1 \leq m} (-1)^{i+1} \binom{m}{2i-1} \sin^{2i-1} \rho_\nu \cos^{m+1-2i} \rho_\nu.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Si  $\Theta_i \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\cos(\alpha_{i\nu}\rho_\nu + \Theta_i)) &= \cos \Theta_i \mathcal{E}(\cos \alpha_{i\nu}\rho_\nu) - \sin \Theta_i \mathcal{E}(\sin \alpha_{i\nu}\rho_\nu), \\ \mathcal{E}(\sin(\alpha_{i\nu}\rho_\nu + \Theta_i)) &= \cos \Theta_i \mathcal{E}(\sin \alpha_{i\nu}\rho_\nu) + \sin \Theta_i \mathcal{E}(\cos \alpha_{i\nu}\rho_\nu).\end{aligned}\quad (4.18)$$

Como se ha mencionado, la aplicación del operador sobre la parte trigonométrica modifica también la parte polinómica, dado que se incluyen esas nuevas variables. Hay dos versiones de la rutina que realiza esta transformación:

— Una de ellas es de uso interno y usa variables polinómicas auxiliares no definidas por el usuario.

— Por otro lado, la segunda de ellas precisa de la definición de las variables polinómicas  $\sin \rho_\nu$  y  $\cos \rho_\nu$  para poder eliminar la variable  $\rho_\nu$  de la parte trigonométrica, como ha quedado patente en la definición del operador.

## 4.9 Cálculo de polinomios de Legendre

En el capítulo 2 hemos definido los polinomios de Legendre, y hemos citado algunas de sus propiedades fundamentales. Una de ellas es que los polinomios de Legendre pueden obtenerse de forma recurrente mediante la expresión

$$P_{n+1}(\rho) = \frac{2n+1}{n+1} \rho P_n(\rho) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(\rho),$$

con  $P_0(\rho) = 1$  y  $P_1(\rho) = \rho$ . En general, el parámetro  $\rho$  que recibe la función para el cálculo del polinomio de Legendre puede ser una serie de Poisson, y el resultado lo seguirá siendo. Sea  $\mathcal{R}$  una serie de Poisson,

$$\mathcal{R} = \sum_i c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\theta_1 + \cdots + \alpha_{in}\theta_n),$$

entonces el polinomio de Legendre de la serie  $\mathcal{R}$  se obtiene como sigue: en primer lugar, se obtiene el polinomio de Legendre de una variable cualquiera  $\rho$ , y a continuación se sustituye la variable  $\rho$  por la serie de Poisson  $\mathcal{R}$ .

El siguiente fragmento de código calcula el polinomio de Legendre  $P_n(\mathcal{R})$ , y el resultado lo asigna a la serie  $\mathcal{R}$ . `R=legendre (R, n);`

Esto se ha programado de este modo para obtener series de la forma  $(a/r)^3 P_2(\sin \beta)$ , en donde  $\beta$  es a su vez una serie de Poisson, como por ejemplo

$$\beta = \sum A \cos(i_1 D + i_2 l' + i_3 l + i_4 F).$$

Este uso se hace en el capítulo 6.

Por supuesto, también se ha sobrecargado de forma que se obtenga directamente el polinomio de Legendre de una variable simple, pasando su posición en la tabla de variables (no su nombre, dado que puede dar motivo de error, pues puede pasarse una serie de Poisson también con una cadena). Podemos obtener así el polinomio de Legendre  $P_2(l)$  mediante la línea de código: `R=legendre (positabla("l"), 2);`

#### 4.9.1 Cálculo de los polinomios asociados de Legendre

Se definen los polinomios asociados de Legendre en la forma (2.4),

$$P_n^m(\rho) = P_{nm}(\rho) = (1 - \rho^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\rho^m} P_n(\rho).$$

Si  $m > n$ , entonces  $P_{nm}(\rho) = 0$ . Para obtener el polinomio asociado de Legendre  $P_{nm}(\rho)$ , hay que calcular como paso previo el polinomio de Legendre  $P_n(\rho)$ . Los polinomios asociados de Legendre que nos interesan son de la forma  $P_n^m(\sin \rho)$  y  $P_n^m(\cos \rho)$ , y serán estos los que calcularemos. En este caso, la definición (2.4) queda así:

$$P_n^m(\cos \rho) = \sin^m \rho \frac{d^m}{d(\cos \rho)^m} P_n(\cos \rho),$$

$$P_n^m(\sin \rho) = \cos^m \rho \frac{d^m}{d(\sin \rho)^m} P_n(\sin \rho).$$

Hay dos versiones de la función `legeasoc` que calcula polinomios asociados de Legendre. La primera de ellas, obtiene los polinomios asociados  $P_n^m(\cos \rho)$  o  $P_n^m(\sin \rho)$ , siendo  $\rho$  una variable. La segunda de ellas, obtiene los polinomios  $P_n^m(\cos \mathcal{S})$  y  $P_n^m(\sin \mathcal{S})$ , siendo  $\mathcal{S}$  una serie de Poisson. En la tabla 4.2 se describen los pasos a seguir para el cálculo de los polinomios  $P_n^m(\sin \rho)$  y  $P_n^m(\cos \rho)$ .

Tabla 4.2: Cálculo de  $P_n^m(\sin \rho)$ ,  $P_n^m(\cos \rho)$ 

Código	Descripción
	Si $m > n$ , el polinomio asociado de Legendre es nulo, $P_n^m(\rho) = 0$ .
<code>R=legendre(0,n);</code>	En primer lugar, obtenemos el polinomio de Legendre $P_n(\rho)$ , en donde como $\rho$ tomamos una variable polinómica cualquiera, por simplicidad, la que ocupe la posición cero de la tabla de variables. Definimos así $\mathcal{R} = P_n(\rho)$ .
<code>R=R.der(0,m);</code>	Seguidamente construimos la serie de Poisson $\mathcal{R} = (d^m/d\rho^m)P_n(\rho)$ , calculando la derivada de orden $m$ .
<code>S="+1";</code> <code>S.ponvar(razon,variable);</code> <code>R=R.sust(0,S);</code>	En el cálculo del polinomio asociado de Legendre $P_n^m(\sin \rho)$ , se sustituye la variable 0 por $\sin \rho$ . En el cálculo de $P_n^m(\cos \rho)$ , se sustituye 0 por $\cos \rho$ .
<code>S="+1";</code> <code>if (razon==SIN) razon=COS;</code> <code>else razon=SIN;</code> <code>S.ponvar(razon,variable);</code> <code>S=S^m;</code> <code>R=R*S;</code>	Finalmente, queda la parte de $(1 - \rho^2)^{m/2}$ . Si la razón es un seno, multiplicamos el resultado por $\cos^m \rho$ , y si es un coseno, por $\sin^m \rho$ . Para ello, utilizamos la función <code>ponvar</code> para crear la serie, y seguidamente el operador potencia (en su forma de operador), para calcular la potencia $m$ -ésima.

En la tabla 4.3 se obtienen los polinomios asociados de una serie de Poisson  $\mathcal{S}$ ,  $P_n^m(\sin \mathcal{S})$  y  $P_n^m(\cos \mathcal{S})$ . En este caso, se pretende obtener el polinomio asociado de Legendre del seno o coseno de una serie de Poisson  $\mathcal{S}$ . Básicamente, el método de cálculo no difiere mucho del anterior. Conviene destacar el hecho de que en este caso se hace uso de las funciones `seno` y `coseno`, a las que debe pasarse como parámetro el valor de  $\epsilon$ , la precisión de los coeficientes. Luego esta versión de la función `legeasoc`, igualmente deberá tomar como parámetro el valor de un real  $\epsilon$  con el mismo fin.

Tabla 4.3: Cálculo de  $P_n^m(\sin S)$ ,  $P_n^m(\cos S)$ 

Código	Descripción
	Si $m > n$ , el polinomio asociado de Legendre es nulo, $P_n^m(\rho) = 0$ .
<code>R=legendre(0,n);</code>	En primer lugar, obtenemos el polinomio de Legendre $P_n(\rho)$ , en donde como $\rho$ tomamos una variable polinómica cualquiera, por simplicidad, la que ocupe la posición cero de la tabla de variables. Definimos así $\mathcal{R} = P_n(\rho)$ .
<code>R=R.der(0,m);</code>	Seguidamente construimos la serie de Poisson $\mathcal{R} = (d^m/d\rho^m)P_n(\rho)$ , calculando la derivada de orden $m$ .
<code>if (razon==SIN)   S=seno(S,orden,epsilon); else   S=coseno(S,orden,epsilon); R=R.sust(0,S);</code>	En el cálculo del polinomio asociado de Legendre $P_n^m(\sin S)$ , se sustituye la variable 0 por $\sin \rho$ . En el cálculo de $P_n^m(\cos S)$ , se sustituye 0 por $\cos S$ .
<code>if (razon==SIN)   S=coseno(S,orden,epsilon); else   S=seno(S,orden,epsilon); S=S^m; R=R*S;</code>	Finalmente, queda la parte de $(1 - \rho^2)^{m/2}$ . Si la razón es un seno, multiplicamos el resultado por $\cos^m S$ , y si es un coseno, por $\sin^m S$ . Como antes, se emplean primero las rutinas seno y coseno, según el caso, y seguidamente, para obtener la $m$ -ésima potencia, utilizamos la rutina potencia, que internamente usa la rutina quickproduct para operar en la forma más eficaz posible.

En el siguiente fragmento de código se obtiene el polinomio asociado de Legendre  $P_2^1(\sin \rho)$ . El resultado se asigna a la serie de Poisson  $\mathcal{R}$ .

```
R=legeasoc (SIN, "rho", 2, 1);
```

En el siguiente fragmento de código se calcula el polinomio asociado de Legendre  $P_3^2(\cos S)$ , siendo  $S$  una serie de Poisson calculada previamente mediante algún método, `epsilon` la

precisión que empleará internamente la rutina para el producto rápido, y orden el orden hasta el que quiero aproximar el seno o el coseno (en su desarrollo de Taylor). El resultado se asigna nuevamente a la serie de Poisson  $\mathcal{R}$ .

```
epsilon=0.000000001;
orden=5;
R=legeasoc (COS, S, 3, 2, orden, epsilon);
```

#### 4.9.2 Cálculo de los polinomios $P_n^{m \setminus k}$

Para obtener los polinomios  $P_n^{m \setminus k}$ , el algoritmo que se sigue es exactamente idéntico al dado para el cálculo de los polinomios asociados de Legendre, salvo en el paso último. Este queda como sigue: si la razón es un seno, se multiplica el resultado por  $\cos^{m-k} S$ , mientras que si es un coseno, se multiplica por  $\sin^{m-k} S$ .

### 4.10 Cálculo de polinomios modificados de Jacobi

En el capítulo 2 hemos introducido los conceptos básicos relativos a los polinomios de Jacobi. Ahora estudiaremos cómo calcularlos.

#### 4.10.1 Algoritmo de cálculo de los polinomios de Jacobi

Las rutinas para el cálculo de los polinomios de Jacobi y de los polinomios modificados de Jacobi son `jacobi` y `modifiedjacobi` respectivamente.

El método general para construir un polinomio de Jacobi a partir de las tablas mostradas en el capítulo 2 se describe a continuación. Para  $Q_n^{(m, m')}(\cos J)$ , se trata formar la serie de Poisson a partir de la columna correspondiente de la tabla correspondiente. Veamos un ejemplo para una línea de la tabla con el contenido que sigue:

Tabla 4.4:  $Q_n^{(m, m')}$

$n$	$m$	$m'$	Factor	$\sin J$	$1+z$	$z$	$z^0$	$z^1$	$z^2$
$n$	$m$	$m'$	$c$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$z = \cos J$									

Para este conjunto de valores, el polinomio de Jacobi es:

$$c(\sin J)^\alpha(1 + \cos J)^\beta(\cos J)^\gamma(a_1 + a_2 \cos J + a_3 \cos^2 J).$$

De este modo se ve que a partir de la tabla es posible obtener de forma mecánica los polinomios de Jacobi.

Para obtener los polinomios modificados de Jacobi, mediante la ecuación (2.20)

$$\bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) = \epsilon^{n-m} Q_n^{(m,m')}(\epsilon \cos J),$$

realmente podemos emplear las tablas anteriores, pero sustituyendo  $z = \cos J$  por  $z = \epsilon \cos J$ , y multiplicando el resultado final por  $\epsilon^{n-m}$ .

## 4.11 Derivación de series de Poisson

Para tratar más genéricamente esta función, estudiaremos el caso en que las variables trigonométricas y polinómicas no se distinguen. Consideremos entonces la serie de Poisson  $\mathcal{P}$  en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ ,

$$\mathcal{P} = \sum_i c_i \times K_i \times R_i, \quad (4.19)$$

en donde

$$K_i = \rho_1^{\mu_{i1}} \dots \rho_n^{\mu_{in}}, \quad R_i = \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \dots + \alpha_{in}\rho_n).$$

La derivada de la serie  $\mathcal{P}$  respecto de la variable  $\rho_\nu$  viene dada por

$$\mathcal{D}_{\rho_\nu} \mathcal{P} = \frac{d\mathcal{P}}{d\rho_\nu} = \frac{d}{d\rho_\nu} \sum_i c_i \times K_i \times R_i = \sum_i c_i \left( K_i \times \frac{dR_i}{d\rho_\nu} + \frac{dK_i}{d\rho_\nu} \times R_i \right). \quad (4.20)$$

La derivada de las partes polinómica y trigonométrica se obtienen según las siguientes expresiones:

$$\frac{dK_i}{d\rho_\nu} = \mu_{i\nu} \rho_1^{\mu_{i1}} \dots \rho_\nu^{\mu_{i\nu}-1} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \quad (4.21)$$

si  $\mu_{i\nu} \neq 0$ . Por otro lado,

$$\frac{dR_i}{d\rho_\nu} = \alpha_{i\nu} \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ -\sin \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \dots + \alpha_{in}\rho_n). \quad (4.22)$$

La derivada  $n$ -ésima se obtiene de forma sencilla en el caso en que las variables trigonométricas y polinómicas están diferenciadas. En ese caso, la parte polinómica y trigonométrica son independientes, y entonces,

$$\frac{d^n \mathcal{P}}{d\rho_\nu^n} = \frac{d^n}{d\rho_\nu^n} \sum_i c_i K_i \times R_i = \sum_i c_i K_i \times \frac{d^n R_i}{d\rho_\nu^n} \text{ si } \rho_\nu \text{ es trigonométrica}$$

y

$$\frac{d^n \mathcal{P}}{d\rho_\nu^n} = \frac{d^n}{d\rho_\nu^n} \sum_i c_i K_i \times R_i = \sum_i c_i R_i \times \frac{d^n K_i}{d\rho_\nu^n} \text{ si } \rho_\nu \text{ es polinómica.}$$

La derivada  $n$ -ésima de la parte polinómica y trigonométrica del término  $i$ -ésimo de la serie  $\mathcal{P}$  viene dada por las ecuaciones ( $\Theta_i = \alpha_{i1}\rho_1 + \dots + \alpha_{in}\rho_n$ ):

$$\frac{d^n}{d\rho_\nu^n} \sin \Theta_i = \begin{cases} \alpha_\nu^n \cos \Theta_i & \text{si } n \bmod 4 = 1 \\ -\alpha_\nu^n \sin \Theta_i & \text{si } n \bmod 4 = 2 \\ -\alpha_\nu^n \cos \Theta_i & \text{si } n \bmod 4 = 3 \\ \alpha_\nu^n \sin \Theta_i & \text{si } n \bmod 4 = 0 \end{cases},$$

$$\frac{d^n}{d\rho_\nu^n} \cos \Theta_i = \begin{cases} -\alpha_\nu^n \sin \Theta_i & \text{si } n \bmod 4 = 1 \\ -\alpha_\nu^n \cos \Theta_i & \text{si } n \bmod 4 = 2 \\ \alpha_\nu^n \sin \Theta_i & \text{si } n \bmod 4 = 3 \\ \alpha_\nu^n \cos \Theta_i & \text{si } n \bmod 4 = 0 \end{cases}.$$

La derivada  $n$ -ésima de la parte polinómica es:

$$\frac{d^n}{d\rho_\nu^n} K_i = \begin{cases} \binom{\mu_{ik}}{n} \rho_1^{\mu_{i1}} \dots \rho_\nu^{\mu_{ik}-n} \dots \rho_n^{\mu_{in}} & \text{si } n \neq \mu_{ik} \\ 0 & \text{si } \mu_{ik} = 0 \end{cases}.$$

En el caso general en que las variables polinómicas y trigonométricas se confunden, conviene definir recursivamente el operador de derivación, de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\rho_\nu}^n \mathcal{P} &= \mathcal{D}_{\rho_\nu}^n \left( \sum_i c_i K_i \times R_i \right) = \sum_i \mathcal{D}_{\rho_\nu}^n (K_i \times R_i) = \\ &= \mathcal{D}_{\rho_\nu}^{n-1} \left( \sum_i c_i (R_i \times \mathcal{D}_{\rho_\nu} K_i + K_i \times \mathcal{D}_{\rho_\nu} R_i) \right). \end{aligned}$$

En este caso, se obtiene en primer lugar la serie  $\mathcal{D}_{\rho_\nu} \mathcal{P}$  mediante la ecuación (4.20), y hallado el resultado, se calcula su derivada de orden  $n-1$ . Es fácil programar esto recursivamente. Dada la serie  $\mathcal{P}$  (ecuación (4.19)),

$$\mathcal{D}_{\rho_\nu}^n \mathcal{P} = \begin{cases} \mathcal{P} & \text{si } n = 0 \\ \mathcal{D}_{\rho_\nu} \mathcal{P} & \text{si } n = 1 \\ \mathcal{D}_{\rho_\nu}^{n-1} (\mathcal{D}_{\rho_\nu} \mathcal{P}) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}. \quad (4.23)$$

La función `der` calcula la derivada de orden  $n$  de una serie de Poisson. Recibe como parámetros la variable respecto de la cual se deriva, así como el orden de la derivada que se desea calcular. El algoritmo empleado reproduce la ecuación (4.23), y hace uso de las

ecuaciones (4.21) y (4.22) para el cálculo de la derivada primera. El siguiente ejemplo calcula la primera derivada de la serie de Poisson  $\mathcal{P}$  respecto de la variable que aparecería en la tabla de variables con el nombre  $l'$ , y el resultado es almacenado en la serie  $\mathcal{S}$ : `S=P.der ("l'",1);`. También puede pasarse la variable como una cadena con el nombre de la variable. En tal caso, internamente la función lleva a cabo la transformación de la cadena en la posición que ocupa dentro de la tabla de variables, para lo que llama a la función `positabla`. La llamada sería entonces (como se ve es mucho más cómoda): `S=P.der ("l'",1);`.





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



## Capítulo 5

# Manipulador algebraico de series de Kinoshita

### 5.1 Un manipulador especial para la teoría de la Tierra

La teoría de rotación de la Tierra rígida fue estudiada mediante el formalismo hamiltoniano por primera vez por Kinoshita en el año 1977. La parte principal del potencial perturbador corresponde al potencial lunisolar, que se desarrolla en variables de Andoyer mediante sucesivas aplicaciones del teorema de Wigner y sustitución de series semianalíticas para ciertas funciones armónicas dependientes de las posiciones del Sol y la Luna, calculadas a su vez mediante series de Fourier múltiples. El resultado es lo que se llama una serie de Poisson, con cientos de términos, lo que dificulta notablemente los tratamientos analíticos.

Los problemas aumentan cuando se realiza la extensión de la teoría a una Tierra deformable, pues no solo se multiplica el número de términos perturbadores, sino que se complica enormemente su dependencia funcional al pasarse de 6 a 12 ó 18 variables tipo Andoyer, según se considere un modelo de Tierra de dos o tres capas (Getino y Ferrándiz, 2000a, 2000b). De este modo los sistemas de manipulación simbólica de propósito general se vuelven insuficientes, y lo mismo pasa con los específicos de Mecánica Celeste, concebidos para la teoría de la Luna.

Los manipuladores de series de carácter específico hasta ahora únicamente permiten trabajar con series básicamente numéricas, lo que obliga a elaborar la teoría manualmente hasta un alto grado de desarrollo.

En este capítulo se presenta un nuevo tipo de manipulador algebraico idóneo para trabajar en la teoría de la rotación de la Tierra. Los objetos que maneja este manipulador, a los que hemos llamado *series de Kinoshita*, se adecúan exactamente al tipo de expresiones con las que se trabaja en la teoría. Describiremos la forma de estas series, así como las operaciones básicas definidas sobre las mismas a lo largo del capítulo. Seguidamente se

discuten algunas de las características del manipulador.

### Lenguaje de programación

El lenguaje elegido para la programación del manipulador ha sido el C++ por varios motivos:

— Los manipuladores simbólicos de tipo genérico como MAPLE V y MATLAB, son ineficientes computacionalmente, y el coste temporal es insostenible, como hemos podido comprobar experimentalmente en una primera etapa.

— La filosofía de la programación orientada a objetos en que se basa el C++ ha resultado la más adecuada para la representación tanto de las series de Poisson y Kinoshita como de los operadores y teoremas asociados a las mismas en el marco de la teoría de la Tierra. Así, hemos construido una clase para el término de una serie de Kinoshita, y partiendo de ella, hemos generado una nueva clase para la serie de Kinoshita como una lista dinámica de términos. Cualquier programador de C++ puede hacer uso de este nuevo tipo de datos incluyendo código que haga uso de la clase.

— El C++ es un lenguaje muy portable, de modo que el manipulador, escrito en C++ estándar, puede ser usado en cualquier tipo de estación o computadora personal.

— Esta elección, además, permite gestionar dinámicamente la memoria del computador, y por consiguiente utilizarla de forma óptima, cosa impensable en los manipuladores genéricos, en donde resulta inevitable trabajar con estructuras matriciales estáticas.

— La versatilidad de C++ permite generar una salida en formato  $\text{\LaTeX}$ , y una cómoda entrada de datos.

### Interfaz con el usuario

Un aspecto importante en todo procesador algebraico es la forma en que se realiza en el mismo la entrada y salida de datos. Esta debe ser lo más cómoda posible, y debe evitar al usuario conocer la estructura interna de la serie de Kinoshita (salvo aquello que debe conocer para necesitar de un manipulador de estas características).

— Para la entrada se ha incorporado un analizador sintáctico descendente recursivo como parte estructural de la clase de datos asociada a la serie. Éste emplea una gramática que reconoce series de Kinoshita en una sintaxis muy similar a la usada por  $\text{\LaTeX}$ , al mismo tiempo que genera la estructura de datos asociada a la serie de Kinoshita que se analiza. Esto permite al usuario introducir las series prácticamente tal y como lo haría en  $\text{\LaTeX}$ , al tiempo que puede obviar la representación interna de la serie.

— Por otro lado, para la salida, hemos diseñado una función que genera un fichero en formato  $\text{\LaTeX}$ . También es posible generar salida para series trigonométricas en forma de



tabla y con diferentes formatos.

### Uso de la memoria

Algunos de los principales aspectos relativos al uso de la memoria que desarrollaremos en este capítulo son los siguientes:

— Memoria dinámica: una serie de Kinoshita se define (como veremos) como una lista dinámica y ordenada de términos.

— Además, la estructura de los términos es igualmente dinámica (como se explica en la siguiente sección). Se usa así la memoria de una forma más que razonable, atendiendo a la búsqueda de un equilibrio entre el coste temporal de los algoritmos y el espacial.

### También un manipulador de series de Poisson

En una serie de Kinoshita, es posible desarrollar los polinomios asociados de Legendre y modificados de Jacobi, tomar la parte real de la exponencial compleja y eliminar denominadores, de modo que lo que se obtiene es una serie de Poisson como las estudiadas en el capítulo anterior.

— Este manipulador que se presenta puede emplearse también como procesador de series de Poisson numéricas, dado que cuando no existe ningún elemento adicional como polinomios de Legendre, no se emplea memoria, es decir, es como si no existieran en la estructura definida.

— Se incluyen rutinas rápidas de multiplicación y desarrollos en series de Taylor de series de Poisson que permiten agilizar gran cantidad de cálculos usuales en Mecánica Celeste.

— Se han construido gran número de funciones que en base a lo anterior operan con series de Poisson de forma muy eficiente. Por ejemplo, es posible calcular el polinomio asociado de Legendre de una serie de Poisson.

### Trabajo en la teoría de la rotación de la Tierra

Este tipo de series resultan de gran utilidad en múltiples problemas de Mecánica Celeste, pero especialmente cuando tratamos el problema de la rotación terrestre. Resulta conveniente en ese caso modificar la estructura de los términos para adecuarlos al tipo de transformaciones y manipulaciones frecuentes en dicha teoría. Así, la aplicación del teorema de Wigner para expresar los armónicos esféricos de los diferentes cuerpos perturbadores (Sol, Luna y principales planetas) referidos a la eclíptica de la fecha, motiva la

aparición en cada término de polinomios asociados de Legendre, polinomios modificados de Jacobi y exponenciales complejas. Estos elementos tienen además un uso general en Mecánica Celeste. De la misma forma, conviene en ocasiones dividir una serie de Kinoshita en subseries, cada una de las cuales tenga un factor común (que por definición ha de ser un polinomio modificado de Jacobi en una cierta variable de inclinación), con lo cual, hemos incluido un factor tal en la serie. Estos factores se tratarán con detalle en la sección 5.15.

Los denominadores se han introducido para incluir las frecuencias de los términos en el cálculo de la función generatriz al aplicar un método de perturbaciones (Hori o Deprit).

## 5.2 Series de Kinoshita

Una serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$  es una serie finita de la forma

$$\mathcal{K} = T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \sum_{i=1}^n T_i, \quad (5.1)$$

cuyos términos  $T_i$  responden a la expresión

$$T_i = c_i \times K_i \times R_i \times D_i \times P_i \times Q_i \times E_i, \quad (5.2)$$

con  $c_i \in \mathbb{R}$ , y

$$\begin{aligned} K_i &= \rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}}, & P_i &= \prod_j P_{n_{ij}}^{m_{ij} \setminus k_{ij}} \left( \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \beta_{ij} \right), \\ R_i &= \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\alpha_{i1} \rho_1 + \cdots + \alpha_{in} \rho_n), & Q_i &= \prod_j \bar{Q}_{n_{ij}}^{(m_{ij}, m'_{ij})} (\epsilon_{ij}, \cos J_{ij}), \\ D_i &= \prod_j \frac{1}{(a_1^{ij} n_{\rho_1} + \cdots + a_n^{ij} n_{\rho_n})^{\nu_{ij}}}, & E_i &= \exp i(b_{i1} \rho_1 + \cdots + b_{in} \rho_n + b_{i0} \pi / 2), \end{aligned} \quad (5.3)$$

en donde  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  son variables,  $\beta_{ij}, J_{ij} \in \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$ ,  $\mu_{i1}, \dots, \mu_{in}$ ,  $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}$  y  $a_1^{ij}, \dots, a_n^{ij}, \nu_{ij}, n_{ij}, m_{ij}, k_{ij}, m'_{ij}$  son números enteros, y  $\epsilon_{ij} = \pm 1$ .

## 5.3 Estructura de la serie de Kinoshita

Una serie de Kinoshita viene representada por una lista dinámica y ordenada de términos, junto a un factor común a todos los términos, cuya estructura contempla los elementos presentados anteriormente, y que seguidamente estudiaremos.

### 5.3.1 Elementos comunes a la serie de Poisson

La serie de Poisson (4.1) estudiada en el capítulo anterior es un tipo particular de serie de Kinoshita. Según hemos visto, el término  $i$ -ésimo de una serie de Kinoshita, tiene la forma general (5.2)

$$T = c \times K \times R \times D \times P \times Q \times E.$$

En lo que resta de sección, omitiremos el índice  $i$  para hacer su lectura más sencilla. Para una serie de Poisson, la forma del término es  $T = c \times K \times R$ . En el caso en que un término  $T$  de una serie de Kinoshita no contenga cualquiera de sus elementos, no se emplea memoria, es decir, en una serie de Kinoshita, la estructura de los términos es dinámica. Por consiguiente, el manipulador de series de Kinoshita trabaja también con series de Poisson. En este caso, únicamente se emplea la memoria asociada a la serie de Poisson. La representación de los elementos comunes a la serie de Poisson es exactamente la misma que la descrita en la sección 4.4.

### 5.3.2 Denominadores

En determinados problemas de Mecánica Celeste y en particular en el estudio de la rotación terrestre, es preciso trabajar con denominadores en las series (Rom, 1970). Los denominadores que incluye cada término de la serie son de la forma

$$\frac{1}{\prod_k (\alpha_{1k} n_{\rho_1} + \dots + \alpha_{nk} n_{\rho_n})^{\nu_k}}.$$

La aparición de estos términos es resultado de la aplicación sobre una serie de Kinoshita del inverso de un operador de derivación, de modo que lo que aparecen en los denominadores como literales son frecuencias. La forma más adecuada de representar computacionalmente los denominadores consiste en una matriz. Cada fila de la matriz almacena una suma de la forma  $\alpha_{1k} n_{\rho_1} + \dots + \alpha_{nk} n_{\rho_n}$ , y un entero asociado a cada una de las filas indica el valor del exponente al cual dicha suma está elevado.

Para un término  $T$  de una serie de Kinoshita (5.2),

$$T = c \times K \times R \times D \times P \times Q \times E,$$

$D$  toma la forma dada en (5.3),  $D = \prod_j (a_1^j n_{\rho_1} + a_2^j n_{\rho_2} + \dots + a_n^j n_{\rho_n})^{-\nu_j}$ . El tipo de estructura que se emplea es una matriz estática, cada una de sus filas para almacenar una combinación lineal de movimientos medios diferente (si hay dos iguales entonces se agrupan).

Con los siguientes ejemplos se muestra la forma en que se almacenan los elementos. NDEN representa el número máximo de factores que pueden aparecer en el denominador. En este ejemplo suponemos la siguiente asociación entre enteros y variables:

$$(0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4) = (D \ F \ l \ l' \ \Omega).$$

Tabla 5.1: Codificación de algunos denominadores (NDEN=2).

$\frac{1}{n_l + 2n_\Omega}$	$\left( \begin{array}{ccccc c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad N_D = 1$
$\frac{1}{(n_D + 2n_F)^2(n_l + n_{l'})}$	$\left( \begin{array}{ccccc c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad N_D = 2$

Cada fila de la matriz es empleada para la codificación de cada uno de los factores que aparecen en el denominador. La última columna de cada fila de la matriz es el exponente de cada factor.

### 5.3.3 Polinomios asociados de Legendre

El potencial perturbador en el problema de la rotación de la Tierra se desarrolla en armónicos esféricos (Kinoshita, 1977), de manera que resulta imprescindible incluir en cada término de una serie de Kinoshita uno o más polinomios de Legendre (lo habitual es que aparezca un polinomio asociado de Legendre únicamente).

Para un término general  $T$  (5.2) de una serie de Kinoshita,

$$T = c \times K \times R \times D \times P \times Q \times E,$$

se tiene que  $P = \prod_j P_{n_j}^{m_j \setminus k_j} \left( \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \beta_j \right)$ , en donde como sabemos, los polinomios vienen definidos por (2.12),

$$P_n^{m \setminus k}(\cos \beta) = \frac{P_n^m(\cos \beta)}{\sin^k \beta}, \quad P_n^{m \setminus k}(\sin \beta) = \frac{P_n^m(\sin \beta)}{\cos^k \beta},$$

con  $k \leq m$ .

A continuación mostramos algunos ejemplos para ilustrar el modo en que se codifican los datos. NLEG representa el número máximo de polinomios asociados de Legendre en el producto. En este ejemplo suponemos la siguiente asociación entre enteros y variables:

$$(0 \ 1 \ 2 \ 3) = (\lambda \ \beta \ \delta \ \alpha).$$

Tabla 5.2: Codificación de algunos polinomios asociados de Legendre. (NLEG=2)

$P_2^0(\sin \delta)$	$\left( \begin{array}{ccccc c} 2 & 0 & \text{SIN} & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad N_P = 1$
----------------------	--

Tabla 5.2: Codificación de algunos polinomios asociados de Legendre.  
(NLEG=2)

$P_2^0(\sin \delta)P_2^1(\cos \beta)$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \text{SIN} & 2 & 0 \\ 2 & 1 & \text{COS} & 1 & 0 \end{pmatrix}, N_P = 2$
$P_2^{2\setminus 1}(\sin \delta)$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \text{SIN} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_P = 1$
$P_2^{1\setminus 1}(\sin \delta)P_2^{2\setminus 1}(\cos \beta)$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \text{SIN} & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \text{COS} & 1 & 1 \end{pmatrix}, N_P = 2$

### 5.3.4 Polinomios modificados de Jacobi

Para expresar el potencial de la Tierra en las variables de Andoyer, se opera transformando los armónicos esféricos en las variables esféricas referidas al ecuador mediante el uso del teorema de Wigner (Kinoshita, 1974, 1977). De esta forma aparecen los armónicos esféricos en las variables adecuadas. Junto a éstos, aparecen también polinomios modificados de Jacobi en los ángulos de inclinación de los diferentes planos. De ahí surge la necesidad de incluir polinomios modificados de Jacobi en el término de la serie de Kinoshita. Para una tal serie de término general (5.2), se tiene que  $Q = \prod_j \bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos J_j)$ .

A continuación mostramos algunos ejemplos para ilustrar el modo en que se codifican los datos. NJAC representa el máximo número de polinomios modificados de Jacobi que pueden aparecer en un término multiplicados. En este ejemplo suponemos la siguiente asociación entre enteros y variables:

$$(0 \ 1 \ 2 \ 3) = (\lambda \ \beta \ I \ J).$$

Tabla 5.3: Codificación de algunos polinomios modificados de Jacobi.  
(NJAC=2)

$\bar{Q}_1^{(0,0)}(1, \cos J)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_Q = 1$
$\bar{Q}_1^{(0,0)}(1, \cos J)\bar{Q}_2^{(1,0)}(-1, \cos I)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, N_Q = 2$



### 5.3.5 Exponenciales complejas

También en la transformación del hamiltoniano de la Tierra a variables de Andoyer aparecen exponenciales complejas, de modo que se incluyen en los términos del manipulador como sigue. Para un término general  $T$  de una serie de Kinoshita

$$T = c \times K \times R \times D \times P \times Q \times E,$$

$E = \exp i(b_1\rho_1 + b_2\rho_2 + \dots + b_n\rho_n + b_0\pi/2)$ . La forma en que se codifica la información es muy simple, y queda clara con los ejemplos de la tabla 5.4. En este ejemplo suponemos la siguiente asociación entre enteros y variables:

$$(0 \ 1 \ 2 \ 3) = (\lambda \ \beta \ I \ J).$$

Tabla 5.4: Codificación de algunas exponenciales complejas.

$\exp i(\lambda - \pi/2)$	$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1)$
$\exp i(-\lambda + 3I - \pi)$	$(-1 \ 0 \ 3 \ 0 \ -2)$

### Notación

De ahora en adelante, para referirnos a una serie de Kinoshita genérica, emplearemos la notación  $\mathcal{K} = \sum_{i=1}^n T_i$ , o bien  $\mathcal{K} = \sum_{i=1}^n c_i \times T_i$ , según convenga. Con el mismo criterio haremos explícita la presencia de un factor común a la serie.

## 5.4 Variables de una serie de Kinoshita

En el manipulador de series de Kinoshita, se definen varias constantes que pueden ser modificadas por el usuario con el objeto de adaptar el manipulador tanto a la notación del problema concreto que se pretende resolver, como a las necesidades de memoria.

Tabla 5.5: Constantes del manipulador.

Constante	Características
NTT	— Constante que denota el número total de variables que distingue el manipulador. Internamente las variables tienen asociado un entero comprendido entre cero y NTT-1.

Tabla 5.5: Constantes del manipulador.

	<ul style="list-style-type: none"> <li>— No modificable por el usuario.</li> <li>— Definida en <code>termkino.hpp</code>.</li> </ul>
DEFINIDAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Constante que denota el número de variables definidas por el usuario en la tabla <code>tablavar</code>. El usuario puede variar su valor, y con él, automáticamente las dimensiones de la tabla <code>tablavar</code>.</li> <li>— Modificable por el usuario.</li> <li>— Definida en <code>termkino.hpp</code>.</li> </ul>
NJAC	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Constante que denota el número máximo de polinomios modificados de Jacobi que pueden aparecer en cada término. Conviene adaptarlo a las exigencias del problema a resolver.</li> <li>— Modificable por el usuario.</li> <li>— Definida en <code>termkino.hpp</code>.</li> </ul>
NLEG	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Constante que denota el número máximo de polinomios asociados de Legendre que pueden aparecer en cada término. Conviene adaptarlo a las exigencias del problema a resolver.</li> <li>— Modificable por el usuario.</li> <li>— Definida en <code>termkino.hpp</code>.</li> </ul>
NDEN	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Constante que denota el número máximo de productos que pueden aparecer en el denominador de cada término. Conviene adaptarlo a las exigencias del problema a resolver.</li> <li>— Modificable por el usuario.</li> <li>— Definida en <code>termkino.hpp</code>.</li> </ul>
tablavar	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Tabla que almacena el nombre de las variables con las que el usuario trabajará, de modo que puede referirse a ellas por su nombre, escribiéndolas entrecomilladas. En el caso en que el nombre de una variable comience por <code>\\</code> para mejorar la salida en <math>\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}</math>, internamente se referirá a ella omitiendo <code>\\</code>.</li> <li>— Modificable por el usuario.</li> <li>— Definida en la función <code>iniciartabla ()</code> en <code>kino.hpp</code>.</li> <li>— El usuario debe llamar a la función <code>iniciartabla ()</code> al principio de cada programa para que se carguen las variables. Esto se hace escribiendo: <code>iniciartabla ();</code>.</li> </ul>
frecuencias	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Tabla que almacena la frecuencia de cada una de las variables definidas en <code>tablavar</code>, que se suponen constantes.</li> </ul>

Tabla 5.5: Constantes del manipulador.

<code>positabla</code>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Modificables por el usuario.</li> <li>— Definidas en la función <code>iniciartabla</code> en <code>kino.hpp</code>.</li> <li>— Función que recibe una cadena de caracteres y devuelve un entero que representa la posición que ocupa en la tabla de variables <code>tablavar</code>. En el caso en que tal cadena no esté definida en dicha tabla, la función devuelve <code>-1</code>.</li> </ul>
------------------------	---

### 5.4.1 Sobre el nombre de las variables

Por un lado hay que definir claramente las variables en la tabla `tablavar`. Cada variable que se define en la tabla puede o no comenzar por `\\`, pero siempre que el usuario se refiera a ella lo hará sin usar `\\`. El nombre de las variables debe comenzar por una letra mayúscula o minúscula, y puede incluir letras, números y los símbolos siguientes: `'`, `}`, `{`, `--`.

En el caso en que se empleen variables como `sin I`, que contienen un espacio, el usuario no podrá referirse a ellas para introducir una serie de Kinoshita, aunque sí podrá referirse a la variable en la llamada a funciones.

En el siguiente ejemplo, suponemos que pretendemos trabajar con series de Kinoshita en las variables  $l_M$ ,  $l_S$ ,  $F$ ,  $D$ ,  $\Omega$ . Entonces, el fichero `termkino.hpp` debe incluir la línea:

```
#define DEFINIDAS 5
```

La función `iniciartabla` del fichero `kino.hpp` debe ser modificada como sigue:

```
strcpy (tablavar[0], "l_M");
strcpy (tablavar[1], "l_S");
strcpy (tablavar[2], "F");
strcpy (tablavar[3], "D");
strcpy (tablavar[4], "\\Omega");
```

### 5.4.2 Tablas de frecuencias

Cada una de las variables definidas puede tener una frecuencia asociada, expresada en las unidades que resulten más adecuadas para el problema. De esta forma es posible asignar a cada término de una serie una frecuencia o periodo. El valor de las frecuencias asociadas a cada variable se debe asignar en la función `iniciartabla` del fichero `kino.hpp`.



Universitat d'Alacant  
 Universidad de Alicante

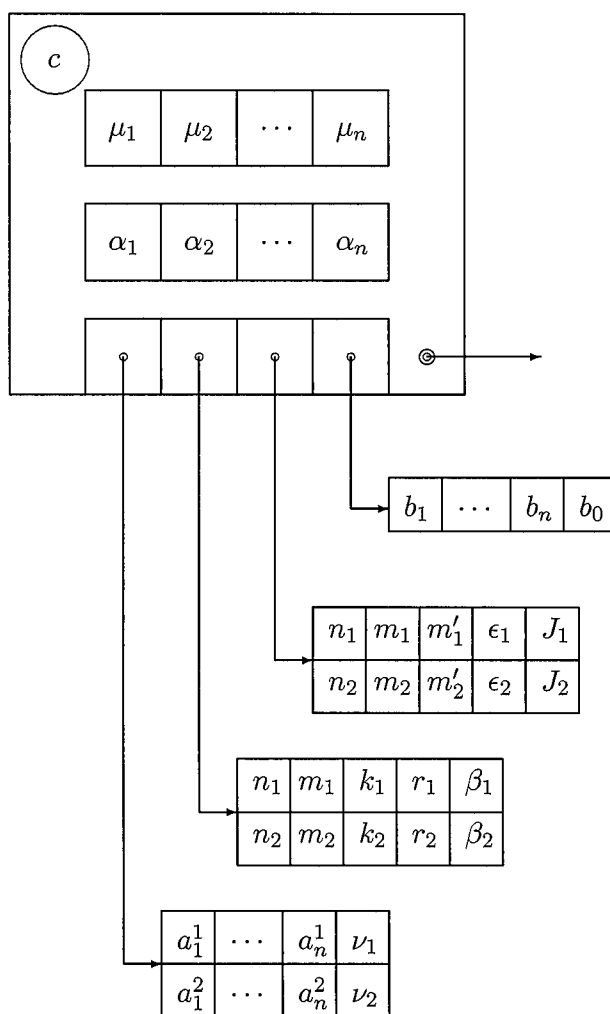


Figura 5.1: Estructura de un término de una serie de Kinoshita (5.3). Se ha hecho  $NTT=n$ ,  $NLEG=NJAC=NDEN=2$ .

Para la asignación de variables del ejemplo anterior, podemos asociar frecuencias a cada variable mediante las siguientes líneas de código:

```
frecuencia[0]=12.1;
frecuencia[1]=9.8;
frecuencia[2]=10.05;
frecuencia[3]=20.3;
frecuencia[4]=11.3;
frecuencia[5]=4.5;
```

Esta asignación ha sido arbitraria y no se corresponde con representación real alguna.

## 5.5 Entrada y salida de series de Kinoshita

### 5.5.1 Entrada de series

El usuario puede introducir en el código series de Kinoshita empleando una sintaxis similar a la del  $\text{\LaTeX}$ . Las cadenas de caracteres que representan series son elementos de la gramática dada en (5.4).

$$\begin{aligned}
 \text{SER} &\rightarrow \text{INI SER} \mid \epsilon \\
 \text{INI} &\rightarrow \text{SIGNO COEF POL TRIG LEG JAC EXP} \\
 \text{SIGNO} &\rightarrow + \mid - \\
 \text{COEF} &\rightarrow \text{realpositivo} \mid \epsilon \\
 \text{POL} &\rightarrow \text{SIMBOLO MAS} \mid \epsilon \\
 \text{MAS} &\rightarrow \text{POL} \mid \text{natural POL} \mid \text{natural POL} \\
 \text{TRIG} &\rightarrow \epsilon \mid \text{RTRIG RAZON} \\
 \text{RTRIG} &\rightarrow \text{\sin} \mid \text{\cos} \\
 \text{RAZON} &\rightarrow (\text{SUMA}) \mid (\text{- SUMA}) \mid \\
 &\quad \text{SIMBOLO} \mid \text{natural SIMBOLO} \\
 \text{SUMA} &\rightarrow \text{natural SIMBOLO OTRO} \mid \text{SIMBOLO OTRO} \\
 \text{OTRO} &\rightarrow \epsilon \mid + \text{SUMA} \mid - \text{SUMA} \\
 \text{LEG} &\rightarrow \epsilon \mid \text{POLLEG LEG} \\
 \text{POLLEG} &\rightarrow \text{\P} - \text{natural}^{\text{natural}} (\text{RTRIG SIMBOLO}) \\
 \text{JAC} &\rightarrow \epsilon \mid \text{POLJAC JAC} \\
 \text{POLJAC} &\rightarrow \text{\Q} - \text{natural}^{\text{natural}} (\text{natural}, \text{natural}) \\
 &\quad (\text{natural}, \text{\cos SIMBOLO}) \\
 \text{EXP} &\rightarrow \epsilon \mid \text{\exp RAZON}
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Las consideraciones que conviene tener en cuenta son las siguientes:

— Previamente a introducir cualquier serie, el usuario debe definir convenientemente la tabla `tablavar` con las variables con que desea trabajar. Como ya se ha señalado, puede hacer comenzar cuantas variables quiera por `\\` para mejorar la salida, pero prescindirá de este símbolo cuando trate de definir una serie de Kinoshita.

— El primer término de la serie debe ir también con signo.

— Para cada término, en primer lugar se introduce el coeficiente, seguido de la parte polinómica, parte trigonométrica, polinomio de Legendre, de Jacobi, y finalmente la exponencial compleja. Evidentemente, puede prescindirse de los elementos del término que se quiera.

— Asimismo, el compilador que reconoce las series de Kinoshita y genera la estructura, realiza diferentes comprobaciones relativas a los parámetros de los diferentes elementos. Estas son las siguientes: en un polinomio asociado de Legendre  $P_n^m(\{\sin, \cos\}\beta)$ , debe cumplirse que  $n \geq m \geq 0$ . De igual forma, para los polinomio modificado de Jacobi  $\bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos I)$ , debe darse que  $\epsilon = \pm 1$ ,  $n \geq m, m' \geq 0$ . También se controla que no se introduzcan en un mismo término más de los polinomios que marca el límite (NLEG y NJAC).

El siguiente ejemplo muestra la forma en que las series se pueden introducir. Partimos de la definición de variables del ejemplo anterior.

```

pois P, Q, R;
P="+1_M \\sin (1_M-3 1_S)
  +Omega \\cos (3 1_M-F+D)
  -\\sin 4 Omega";
Q="+1_M^2+1_S^3F^(-1)+1_M^4";
R="-1_M\\P_2^0(\\sin 1_S)+Omega\\Q_2^(0,0)(1,\\cos Omega)";

```

### 5.5.2 Salida de ecuaciones para L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

La función `latex` escribe en un fichero la serie en formato L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Como parámetros, esta rutina recibe el nombre del fichero en el cual queremos guardar la ecuación, el número de términos ( $n$ ) que queremos que contenga cada línea de la ecuación, y un tercer parámetro, que es un entero ( $m$ ). La función `latex` va escribiendo líneas con  $n$  términos, y si el número de líneas supera el valor de  $m$ , entonces la ecuación se parte, de forma que se evita el tener fórmulas demasiado grandes que no quepan en una página.

En el siguiente ejemplo mostramos un posible formato para la salida de las series.

Consideremos la serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$  dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= -0.125 \cos(g - \lambda) P_3^1(\sin \beta) - \\ &- 0.125 \cos(g + \lambda) P_3^1(\sin \beta) - \\ &- 0.125 \sin I \sin(g - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) - \\ &- 1.500 \sin I \sin g P_3^0(\sin \beta).\end{aligned}$$

Entonces, la sentencia `K.latex ("e.tex", 2, 6)`; genera la siguiente salida, que se archiva en `e.tex`:

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= -0.125 \cos(g - \lambda) P_3^1(\sin \beta) - 0.125 \cos(g + \lambda) P_3^1(\sin \beta) - \\ &- 0.125 \sin I \sin(g - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) - 1.500 \sin I \sin g P_3^0(\sin \beta).\end{aligned}$$

### Generación de tablas para $\text{\LaTeX}$

Las series trigonométricas de la forma  $\sum_i A_i \{\cos, \sin\}(\alpha_{1i}\rho_1 + \dots + \alpha_{ni}\rho_n)$  pueden expresarse como una tabla. La rutina `latextabla` tiene esta función. Como ejemplos de la forma en que se dan los resultados como tablas, remitimos al lector a las tablas 7.2 y 7.3 del capítulo 7, obtenidas con el manipulador algebraico de series de Kinoshita.

## 5.6 Ordenación de una serie de Kinoshita

Una serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$  se representa internamente por una lista ordenada de términos. Cabe entonces definir un orden entre los términos. El orden que definimos aquí es una extensión del empleado con las series de Poisson. Consideremos los términos

$$\begin{aligned}T &= c \times K \times R \times D \times P \times Q \times E, \\ T' &= c' \times K' \times R' \times D' \times P' \times Q' \times E',\end{aligned}$$

con  $c, c' \in \mathbb{R}$  y (póngase atención aquí en los límites de los productos)

$$\begin{aligned}
 K &= \rho_1^{\mu_1} \cdots \rho_n^{\mu_n}, & K' &= \rho_1^{\mu'_1} \cdots \rho_n^{\mu'_n}, \\
 R &= \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\alpha_1 \rho_1 + \cdots + \alpha_n \rho_n), & R' &= \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\alpha'_1 \rho_1 + \cdots + \alpha'_n \rho_n), \\
 D &= \prod_{j=1}^{N_D} \frac{1}{(a_{1j} n_{\rho_1} + \cdots + a_{nj} n_{\rho_n})^{\nu_j}}, & D' &= \prod_{j=1}^{N'_D} \frac{1}{(a'_{1j} n_{\rho_1} + \cdots + a'_{nj} n_{\rho_n})^{\nu'_j}}, \\
 P &= \prod_{j=1}^{N_P} P_{n_j}^{m_j \setminus k_j} \left( \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \beta_j \right), & P' &= \prod_{j=1}^{N'_P} P_{n'_j}^{m'_j \setminus k'_j} \left( \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \beta'_j \right), \\
 Q &= \prod_{j=1}^{N_Q} \bar{Q}_{\ell_j}^{(p_j, q_j)} (\epsilon_j, \cos J_j), & Q' &= \prod_{j=1}^{N'_Q} \bar{Q}_{\ell'_j}^{(p'_j, q'_j)} (\epsilon'_j, \cos J'_j), \\
 E &= \exp i (b_1 \rho_1 + \cdots + b_n \rho_n + b_0 \frac{\pi}{2}), & E' &= \exp i (b'_1 \rho_1 + \cdots + b'_n \rho_n + b'_0 \frac{\pi}{2}).
 \end{aligned}$$

A cada término (siguiendo el procedimiento usado con las series de Poisson), puede asignársele el vector

$$T \rightarrow (O_1 \ O_2 \ O_3 \ O_4 \ O_5)$$

que se ha dividido en partes por comodidad. Cada una de las partes viene dada por

$$\begin{aligned}
 O_1 &= \left( \mu_1 \ \cdots \ \mu_n \ \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n \ \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \right), \\
 O_2 &= (N_P \ P_1 \ \cdots \ P_{N_P}), \\
 O_3 &= (N_Q \ Q_1 \ \cdots \ Q_{N_Q}), \\
 O_4 &= (N_D \ D_1 \ \cdots \ D_{N_D}), \\
 O_5 &= (b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_n),
 \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned}
 P_i &= \left( n_i \ m_i \ k_i \ \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix}_i \ \beta_i \right), \quad i = 1, \dots, N_P, \\
 Q_i &= (\ell_i \ p_i \ q_i \ \epsilon_i \ J_i), \quad i = 1, \dots, N_Q, \\
 D_i &= (a_{1i} \ a_{2i} \ \cdots \ a_{ni} \ \nu_i), \quad i = 1, \dots, N_D.
 \end{aligned}$$

La definición del orden es una ampliación del orden usado para las series de Poisson. Debe tenerse en cuenta en la comparación de variables que lo que se compara realmente es el entero asociado a cada variable, y que viene dado por su posición en la tabla de variables.



### 5.6.1 Ordenación según coeficientes o periodos

Dada la serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_i c_i \times T_i$ , se permite ordenar la serie de modo que  $|c_i| \geq |c_{i+1}|$  para  $i \in I$ . Como en las series de Poisson, la rutina que realiza la ordenación según la amplitud es `ordenacoeef`. También puede ordenarse los términos de la serie en orden decreciente del periodo de la parte trigonométrica del término, mediante la rutina `ordenaperiodo`.

## 5.7 Operaciones elementales con series de Kinoshita

### 5.7.1 Eliminación de términos de una serie de Kinoshita

Dada la serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_{i=1}^N c_i \times T_i$  en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , resulta muy útil en ocasiones obtener la serie  $\mathcal{K}' = \sum_{i \in I'} c_i \times T_i$ , tal que  $|c_i| \geq \epsilon$ . La función `desprecia` descrita en el capítulo anterior para series de Poisson funciona igualmente para series de Kinoshita.

De la misma forma, podemos, a partir de la serie  $\mathcal{K}$ , escrita ahora como

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^N c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} T_i,$$

obtener la serie  $\mathcal{K}'' = \sum_{i \in I''} c_i \times T_i$ , tal que  $\mu_{ik} < \alpha$ , siendo  $\alpha$  un número entero dado. Como con las series de Poisson, esto se lleva a cabo con la función `discrimina`.

### 5.7.2 Selección de términos

Dada una serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_{i=1}^N T_i$  (que se supone ordenada en función de algún criterio), es posible obtener la serie de Kinoshita formada por los  $M$  ( $M \leq N$ ) primeros términos de  $\mathcal{K}$ . La función `tomaterm`, como con las series de Poisson, realiza dicho trabajo, devolviendo la serie  $\sum_{i=1}^M T_i$ .

### 5.7.3 Suma y diferencia de series de Kinoshita

Dadas dos series de Kinoshita,  $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^N P_i$  y  $\mathcal{Q} = \sum_{j=1}^M Q_j$ , la suma (diferencia) de ambas series es una nueva serie de Kinoshita:

$$\mathcal{P} \pm \mathcal{Q} = \sum_{i=1}^N P_i \pm \sum_{j=1}^M Q_j.$$

Dos series de Kinoshita no pueden sumarse si una de ellas tiene factor común y la segunda o bien no tiene, o bien tiene un factor diferente al de la primera. Como en las series de Poisson, se ha sobrecargado el operador suma (diferencia) para que el código que suma dos series de Kinoshita sea tan simple como:  $K=P+Q$ . El algoritmo empleado es exactamente igual que el descrito para series de Poisson.

#### 5.7.4 Producto de series de Kinoshita

Dadas dos series de Kinoshita,  $\mathcal{K} = \sum_i T_i$  y  $\mathcal{K}' = \sum_i T'_i$ , en donde respectivamente,

$$\begin{aligned} T_i &= c_i \times K_i \times R_i \times D_i \times P_i \times Q_i \times E_i, \\ T'_i &= c'_i \times K'_i \times R'_i \times D'_i \times P'_i \times Q'_i \times E'_i, \end{aligned}$$

el producto de dos series es una nueva serie de Kinoshita dada por

$$\mathcal{M} = \mathcal{K} \times \mathcal{K}' = \left( \sum_i T_i \right) \times \left( \sum_j T'_j \right) = \sum_i \sum_j T_i \times T'_j.$$

Es conveniente tener en cuenta que una serie de Kinoshita únicamente puede tener un factor común. Por consiguiente, dos series de Kinoshita no se pueden multiplicar si las dos tienen factor común. En el caso en que sea posible el producto, el factor común de la serie resultante será el de la serie que tenga factor. En caso de que ninguna de las dos series tenga factor común, el producto de ambas tampoco lo tendrá.

Consideremos el producto de dos términos genéricos cualesquiera, uno perteneciente a la serie  $\mathcal{K}$  y otro a  $\mathcal{K}'$ . Denotaremos por  $T$  y  $T'$  a los términos de  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}'$  respectivamente:

$$\begin{aligned} T &= c \times K \times R \times D \times P \times Q \times E, \\ T' &= c' \times K' \times R' \times D' \times P' \times Q' \times E', \end{aligned}$$

en donde  $c, c' \in \mathbb{R}$ , y

$$\begin{aligned} K &= \rho_1^{\mu_1} \cdots \rho_n^{\mu_n}, & K' &= \rho_1^{\mu'_1} \cdots \rho_n^{\mu'_n}, \\ R &= \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} (\alpha_1 \rho_1 + \cdots + \alpha_n \rho_n), & R' &= \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} (\alpha'_1 \rho_1 + \cdots + \alpha'_n \rho_n), \\ D &= \prod_{j=1}^{N_D} \frac{1}{(a_{1j} n_{\rho_1} + \cdots + a_{nj} n_{\rho_n})^{d_j}}, & D' &= \prod_{j=1}^{N'_D} \frac{1}{(a'_{1j} n_{\rho_1} + \cdots + a'_{nj} n_{\rho_n})^{d'_j}}, \\ P &= \prod_{j=1}^{N_P} P_{n_j}^{m_j \setminus k_j} \left( \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \beta_j \right), & P' &= \prod_{j=1}^{N'_P} P_{n'_j}^{m'_j \setminus k'_j} \left( \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \beta'_j \right), \\ Q &= \prod_{j=1}^{N_Q} \bar{Q}_{\ell_j}^{(p_j, q_j)}(\epsilon_j, \cos J_j), & Q' &= \prod_{j=1}^{N'_Q} \bar{Q}_{\ell'_j}^{(p'_j, q'_j)}(\epsilon'_j, \cos J'_j), \\ E &= \exp i (b_1 \rho_1 + \cdots + b_n \rho_n + b_0 \frac{\pi}{2}), & E' &= \exp i (b'_1 \rho_1 + \cdots + b'_n \rho_n + b'_0 \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

El producto de ambos términos  $T \times T'$  viene dado por

$$\begin{aligned} T \times T' &= (c \times K \times R \times D \times P \times Q \times E) \times \\ &\times (c' \times K' \times R' \times D' \times P' \times Q' \times E') = \\ &= (c \times c') \times (K \times K') \times (R \times R') \times \\ &\times (D \times D') \times (P \times P') \times (Q \times Q') \times (E \times E'). \end{aligned}$$

Estudiaremos ahora cómo se expresa el producto de cada uno de los componentes del término.

### • Parte polinómica

$$K \times K' = (\rho_1^{\mu_1} \cdots \rho_n^{\mu_n}) \times (\rho_1^{\mu'_1} \cdots \rho_n^{\mu'_n}) = \rho_1^{\mu_1 + \mu'_1} \cdots \rho_n^{\mu_n + \mu'_n}.$$

### • Parte trigonométrica

$$R \times R' = \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} (\alpha_1 \rho_1 + \cdots + \alpha_n \rho_n) \times \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} (\alpha'_1 \rho_1 + \cdots + \alpha'_n \rho_n).$$

Ahora, como en las series de Poisson, se desarrolla el producto de las razones trigonométricas empleando las relaciones:

$$2 \cos \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i \right) \times \cos \left( \sum_{i=1}^n \alpha'_i \rho_i \right) = \cos \left( \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha'_i) \rho_i \right) + \cos \left( \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha'_i) \rho_i \right),$$

$$2 \sin \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i \right) \times \sin \left( \sum_{i=1}^n \alpha'_i \rho_i \right) = \cos \left( \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha'_i) \rho_i \right) - \cos \left( \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha'_i) \rho_i \right),$$

$$2 \sin \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i \right) \times \cos \left( \sum_{i=1}^n \alpha'_i \rho_i \right) = \sin \left( \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha'_i) \rho_i \right) + \sin \left( \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha'_i) \rho_i \right),$$

$$2 \cos \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i \right) \times \sin \left( \sum_{i=1}^n \alpha'_i \rho_i \right) = \sin \left( \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha'_i) \rho_i \right) - \sin \left( \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha'_i) \rho_i \right).$$

Aplicando estas relaciones, obtenemos nuevamente una serie de Kinoshita.

### • Producto de denominadores

$$\begin{aligned} D \times D' &= \prod_i (a_{1i} n_{\rho_1} + \cdots + a_{ni} n_{\rho_n})^{-\nu_i} \times \prod_j (a'_{1j} n_{\rho_1} + \cdots + a'_{nj} n_{\rho_n})^{-\nu_j} = \\ &= \prod_i \prod_j (a_{1i} n_{\rho_1} + \cdots + a_{ni} n_{\rho_n})^{-\nu_i} \times (a'_{1j} n_{\rho_1} + \cdots + a'_{nj} n_{\rho_n})^{-\nu_j}. \end{aligned}$$

Luego lo que se hace es asignar inicialmente los factores del primer término y después, para cada factor del denominador del segundo término, comprobar si el factor es común al primer término. Si es así, se suman los exponentes de ambos factores, y en caso contrario, se añade el nuevo factor sin más.

- **Producto de polinomios de Legendre**

$$\begin{aligned} P \times P' &= \prod_i P_{n_i}^{m_i \setminus k_i} \left( \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \beta_i \right) \times \prod_j P_{n'_j}^{m'_j \setminus k'_j} \left( \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \beta'_j \right) = \\ &= \prod_i \prod_j P_{n_i}^{m_i \setminus k_i} \left( \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \beta_i \right) \times P_{n'_j}^{m'_j \setminus k'_j} \left( \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \beta'_j \right) \end{aligned}$$

En este caso, los elementos del productorio del término serán la unión de los elementos de los dos términos.

- **Producto de polinomios de Jacobi**

$$\begin{aligned} Q \times Q' &= \prod_i \bar{Q}_{\ell_i}^{(p_i, q_i)}(\epsilon_i, \cos J_i) \times \prod_j \bar{Q}_{\ell'_j}^{(p'_j, q'_j)}(\epsilon'_j, \cos J'_j) = \\ &= \prod_i \prod_j \bar{Q}_{\ell_i}^{(p_i, q_i)}(\epsilon_i, \cos J_i) \times \bar{Q}_{\ell'_j}^{(p'_j, q'_j)}(\epsilon'_j, \cos J'_j) \end{aligned}$$

En este caso, los elementos del productorio del término serán la unión de los elementos de los dos términos.

- **Producto de exponenciales**

$$\begin{aligned} E \times E' &= \exp i \left( b_0 \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^n b_i \rho_i \right) \times \exp i \left( b'_0 \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^n b'_i \rho_i \right) = \\ &= \exp i \left[ (b_0 + b'_0) \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^n (b_i + b'_i) \rho_i \right] \end{aligned}$$

### 5.7.5 Producto rápido de series de Kinoshita

Dadas dos series  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}'$ , ordenadas según orden decreciente de los coeficientes de sus términos,  $\mathcal{K} = \sum_i c_i \times T_i$  y  $\mathcal{K}' = \sum_i c'_i \times T'_i$ , con  $|c_i| \geq |c_{i+1}|$  y  $|c'_i| \geq |c'_{i+1}|$ , para todo  $i$ , el

producto rápido de ambas series se define del mismo modo en que se hizo para series de Poisson. Es decir, para un valor dado la precisión,  $\epsilon$ , únicamente se multiplican términos para los que el producto de los coeficientes sea mayor que  $\epsilon$ , empleando el mismo algoritmo que en series de Poisson. Esta función se emplea para llevar a cabo los desarrollos seno, coseno y exponencial de una serie de Kinoshita, lo que simplifica los cálculos.

Dadas las series de Kinoshita  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  en la ecuación (5.5), el resultado de ejecutar la línea de código que sigue viene dado por la serie  $\mathcal{K}$  en (5.6).

```
K=P.quickproduct (Q, 0.00005);
```

$$\begin{array}{l} \mathcal{P} = 0.1 \cos(l - D) - \\ \quad - 0.001 \sin(2l - F) + \\ \quad + 0.00001 \cos 2D, \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathcal{Q} = 1 - \\ \quad - 0.001 \sin(l - F) + \\ \quad + 0.00001 \cos 3F, \end{array} \right. \quad (5.5)$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{K} = 0.1 \cos(l - D) - 0.0001 \sin(2l - F) - \\ \quad - 0.00005 \sin(3l - D - F) - 0.00005 \sin(l + D - F). \end{array} \quad (5.6)$$

### 5.7.6 Potencia de una serie de Kinoshita

Dada una serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_i T_i$ , y un número natural  $n \geq 0$ , se define la potencia  $n$ -ésima de la serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}^n = (\sum_i T_i)^n$ , de la forma  $\mathcal{K}^n = \mathcal{K} \times \mathcal{K}^{n-1}$  para  $n > 1$ , y  $\mathcal{K}^0 = 1$ . Se trabaja exactamente igual que con las series de Poisson.

#### Potencia rápida

Como con las series de Poisson, existe una versión del operador potencia (la rutina *potencia*), que además del entero  $n$ , recibe un parámetro real que representa la precisión para los coeficientes de la serie de Kinoshita. Esta función emplea para el producto la rutina de multiplicación rápida *quickproduct*. Un ejemplo de uso de tal función es:

```
epsilon=0.0000001;
R=R.potencia (4, epsilon);
```

### 5.7.7 Producto de un escalar por una serie de Kinoshita

Dados el escalar real  $\lambda \in \mathbb{R}$  y la serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_i c_i \times T_i$ , se define el producto de  $\lambda$  por  $\mathcal{K}$ , como la serie de Kinoshita  $\lambda \mathcal{K} = \sum_i (\lambda c_i) \times T_i$ . Tanto el algoritmo como la forma de uso de la función coinciden con el caso de las series de Poisson.

### 5.7.8 Cociente de una serie de Kinoshita por un escalar

Dados el escalar real  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$  y la serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_i c_i \times T_i$ , se define el cociente de  $\mathcal{K}$  por  $\lambda$ , como la serie de Kinoshita  $\mathcal{K}/\lambda = \sum_i (c_i/\lambda) \times T_i$ . Tanto el algoritmo como la forma de uso de la función coinciden con el caso de las series de Poisson.

### 5.7.9 Seno, coseno y exponencial de una serie de Kinoshita

Dada la serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_i T_i$ , se define su seno, coseno y exponencial, mediante su desarrollo en serie de Taylor:

$$\sin \mathcal{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \mathcal{K}^{2n-1}, \quad \cos \mathcal{K} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \mathcal{K}^{2n}, \quad e^{\mathcal{K}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{K}^n.$$

El resultado es una serie de Kinoshita. Para el producto de las series se emplea la rutina de multiplicación rápida, así que, como en el caso de series de Poisson, es requerido el valor de  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . También aquí el cálculo de la potencia  $n$ -ésima de la serie  $\mathcal{K}$  se construye a partir de  $\mathcal{K}^{n-1}$ .

El siguiente fragmento de código calcula el seno, coseno y exponencial de la serie  $\mathcal{P}$  usando un desarrollo en serie de Taylor hasta orden 7 y una precisión (umbral para despreciar términos en la rutina de producto rápido) de 0.00001. El resultado es asignado a la serie  $\mathcal{R}$ :

```
e=1E-5; R=seno(P,7,e); R=coseno(P,7,e); R=exponencial(P,7,e);
```

### 5.7.10 Desarrollo de $1/(1 + \mathcal{K})^k$

Dada la serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_i T_i$ , se define la serie  $1/(1 + \mathcal{K})^k$  (con  $k > 1$ ) como una serie dada por el desarrollo en serie de Taylor:

$$\frac{1}{(1 + \mathcal{K})^k} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!} \mathcal{K}^n.$$

Este resultado es una serie de Kinoshita. Todos los comentarios hechos para desarrollos de Taylor de serie de Kinoshita son aplicables a este caso.

## 5.8 Sustituciones en series de Kinoshita

### 5.8.1 Sustitución de una variable polinómica por una serie de Kinoshita

Dada una serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_i T_i$  en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , que escribiremos en la forma

$$\mathcal{K} = \sum_i c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \dots \rho_\nu^{\mu_{i\nu}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \times R_i \times D_i \times P_i \times Q_i \times E_i,$$

es posible sustituir una variable polinómica  $\rho_\nu$  por una serie de Kinoshita  $\mathcal{K}'$  en las mismas variables, y obtener de este modo una nueva serie de Kinoshita. Definimos el operador  $\mathcal{S}(\mathcal{K}, \rho_\nu, \mathcal{K}')$  como el que sustituye la variable de la parte *polinómica*  $\rho_\nu$  de la serie  $\mathcal{K}$  por la serie de Kinoshita  $\mathcal{K}'$ .  $\mathcal{S}$  es un operador lineal, es decir,

$$\mathcal{S}(\sum_i T_i, \rho_\nu, \mathcal{K}') = \sum_i \mathcal{S}(T_i, \rho_\nu, \mathcal{K}'), \quad (5.7)$$

lo que hace posible estudiar por separado cada término. Este operador actúa sobre cada término en la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(T_i, \rho_\nu, \mathcal{K}') &= \mathcal{S}(c_i \times K_i \times R_i \times P_i \times Q_i \times E_i, \rho_\nu, \mathcal{K}') = \\ &= c_i \times R_i \times P_i \times Q_i \times E_i \times \mathcal{S}(K_i, \rho_\nu, \mathcal{K}'). \end{aligned} \quad (5.8)$$

La forma en que actúa sobre la parte polinómica es:

$$\mathcal{S}(K, \rho_\nu, \mathcal{K}') = \mathcal{S}(\rho_1^{\mu_1} \dots \rho_\nu^{\mu_\nu} \dots \rho_n^{\mu_n}, \rho_\nu, \mathcal{K}') = (\mathcal{K}')^{\mu_\nu} \times \rho_1^{\mu_1} \dots \rho_{\nu-1}^{\mu_{\nu-1}} \rho_{\nu+1}^{\mu_{\nu+1}} \dots \rho_n^{\mu_n}. \quad (5.9)$$

Se ha prescindido del índice  $i$  para mayor claridad en la notación.

El procedimiento que se sigue en la programación de la rutina se deriva directamente de las ecuaciones (5.7), (5.8) y (5.9).

La siguiente línea de código sustituye la variable  $A$  en la serie  $\mathcal{P}$  por la serie  $\mathcal{R}$ , con:

$$\mathcal{P} = \begin{array}{l} AB \cos(l - D) - \\ - 2B \sin(2l - F) \end{array} \quad \left| \quad \mathcal{R} = \begin{array}{l} 1 - \\ - \sin(l - F) \end{array}$$

```
P=P.sust("A",R);
```

El resultado es asignado a la serie  $\mathcal{P}$ , que viene dada por

$$\mathcal{P} = B \cos(l - D) - 0.5B \sin(2l - F - D) - 0.5B \sin(D - F) - 2B \sin(2l - F).$$

### 5.8.2 Sustitución de una variable por un valor real

Sea una serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$  en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ ,  $\mathcal{K} = \sum_i T_i$ , en donde

$$T_i = c_i \times K_i \times R_i \times D_i \times P_i \times Q_i \times E_i.$$

En ocasiones es necesario sustituir una variable  $\rho_\nu$ ,  $\nu \in \{1, \dots, n\}$  por un valor real  $\lambda$ . Definimos el operador  $\mathcal{S}(\mathcal{K}, \rho_\nu, \lambda)$ , que hace  $\rho_\nu = \lambda$  en la serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$ . Evidentemente,  $\mathcal{S}$  es un operador lineal, de modo que

$$\mathcal{S}(\sum_i T_i, \rho_\nu, \lambda) = \sum_i \mathcal{S}(T_i, \rho_\nu, \lambda),$$

lo que hace posible estudiar por separado cada término. Simplificaremos la notación eliminando el subíndice  $i$  del término. Se tiene a su vez que el operador  $\mathcal{S}$  verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(T_i, \rho_\nu, \lambda) &= \mathcal{S}(c \times K \times R \times P \times Q \times E, \rho_\nu, \lambda) = \\ &= c \times D \times \mathcal{S}(K, \rho_\nu, \lambda) \times \mathcal{S}(R, \rho_\nu, \lambda) \times \\ &\quad \times \mathcal{S}(P, \rho_\nu, \lambda) \times \mathcal{S}(Q, \rho_\nu, \lambda) \times \mathcal{S}(E, \rho_\nu, \lambda). \end{aligned}$$

Estudiamos ahora la forma en que actúa el operador sobre cada uno de los elementos del término.

Tanto en la sustitución de la parte polinómica como en la trigonométrica, se procede como en las series de Poisson.

#### • Parte polinómica

La sustitución en la parte polinómica actúa en la forma siguiente:

$$\mathcal{S}(K, \rho_\nu, \lambda) = \mathcal{S}(\rho_1^{\mu_1} \cdots \rho_\nu^{\mu_\nu} \cdots \rho_n^{\mu_n}, \rho_\nu, \lambda) = \lambda^{\mu_\nu} \rho_1^{\mu_1} \cdots \rho_{\nu-1}^{\mu_{\nu-1}} \rho_{\nu+1}^{\mu_{\nu+1}} \cdots \rho_n^{\mu_n}.$$

#### • Parte trigonométrica

La sustitución en la parte trigonométrica actúa en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(R, \rho_\nu, \lambda) &= \mathcal{S}(\cos(\alpha_1 \rho_1 + \cdots + \alpha_\nu \rho_\nu + \cdots + \alpha_n \rho_n), \rho_\nu, \lambda) = \\ &= \cos(\alpha_\nu \lambda) \times \cos\left(\sum_{l=1, l \neq \nu}^n \alpha_l \rho_l\right) - \sin(\alpha_\nu \lambda) \times \sin\left(\sum_{l=1, l \neq \nu}^n \alpha_l \rho_l\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(R, \rho_\nu, \lambda) &= \mathcal{S}(\sin(\alpha_1 \rho_1 + \cdots + \alpha_\nu \rho_\nu + \cdots + \alpha_n \rho_n), \rho_\nu, \lambda) = \\ &= \sin(\alpha_\nu \lambda) \times \cos\left(\sum_{l=1, l \neq \nu}^n \alpha_l \rho_l\right) + \cos(\alpha_\nu \lambda) \times \sin\left(\sum_{l=1, l \neq \nu}^n \alpha_l \rho_l\right). \end{aligned}$$



### • Polinomios de Legendre

La sustitución en la parte asociada a los polinomios de Legendre actúa en la forma siguiente:

$$\mathcal{S}(P, \rho_\nu, \lambda) = \mathcal{S}\left(\prod_j P_{n_j}^{m_j \setminus k_j}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_j}), \rho_\nu, \lambda\right) = \prod_j \mathcal{S}\left(P_{n_j}^{m_j \setminus k_j}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_j}), \rho_\nu, \lambda\right),$$

y en donde

$$\mathcal{S}\left(P_{n_j}^{m_j \setminus k_j}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_j}), \rho_\nu, \lambda\right) = \begin{cases} P_{n_j}^{m_j \setminus k_j}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_j}) & \text{si } \nu_j \neq \nu \\ P_{n_j}^{m_j \setminus k_j}(\{\sin, \cos\} \lambda) & \text{si } \nu_j = \nu \end{cases}.$$

La programación se hace sencilla si se siguen los siguientes pasos: se recorre cada término de la serie (para cada término hacemos  $\mathcal{R} = 1$ , en esa serie guardamos el resultado del término) y para cada polinomio de Legendre hacemos: si  $\rho_{\nu_j} = \rho_\nu$ , entonces:

- Se desarrolla el polinomio, obteniendo una serie de Poisson.
- Se sustituye  $\rho_\nu$  por  $\lambda$  (usando la función `sustsimple` que únicamente sustituye en series de Poisson). A este resultado parcial lo llamamos  $\mathcal{P}$ .
- $\mathcal{R} = \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ .

Si  $\rho_{\nu_j} \neq \rho_\nu$ , dejamos el polinomio en el término tal cual estaba.

### • Polinomios de Jacobi

La sustitución en la parte asociada a los polinomios modificados de Jacobi actúa como sigue:

$$\mathcal{S}(Q, \rho_\nu, \lambda) = \mathcal{S}\left(\prod_j \bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos \rho_{\nu_j}), \rho_\nu, \lambda\right) = \prod_j \mathcal{S}\left(\bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos \rho_{\nu_j}), \rho_\nu, \lambda\right),$$

y en donde

$$\mathcal{S}\left(\bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos \rho_{\nu_j}), \rho_\nu, \lambda\right) = \begin{cases} \bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos \rho_{\nu_j}) & \text{si } \nu_j \neq \nu \\ \bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos \lambda) & \text{si } \nu_j = \nu \end{cases}.$$

Luego se desarrolla el polinomio modificado de Jacobi en la variable, y se sustituye por el valor. El desarrollo del polinomio modificado de Jacobi se hará introduciendo únicamente a la variable  $\rho_\nu$  como polinómica, puesto que seguidamente se sustituirá por un valor real, evitando así el cálculo de senos y cosenos.

### • Exponencial compleja

En la sustitución de una variable en la exponencial compleja se toma la parte real.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(E, \rho_\nu, \lambda) &= \mathcal{S}\left(\exp i \left(b_1 \rho_1 + \cdots + b_n \rho_n + b_0 \frac{\pi}{2}\right), \rho_\nu, \lambda\right) = \\ &= \cos b_\nu \lambda \times \exp i \left(b_1 \rho_1 + \cdots + b_{\nu-1} \rho_{\nu-1} + b_{\nu+1} \rho_{\nu+1} + \cdots + b_n \rho_n + b_0 \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

El siguiente fragmento de código sustituye la variable  $\lambda$  por el valor  $\pi$  en la serie  $\mathcal{P}$ . El resultado es asignado a la serie  $\mathcal{Q}$ .

```
Q=P.sust("lambda", PI);
```

Para la serie  $\mathcal{P}$  dada por

$$\mathcal{P} = \cos(\lambda - \mu) - 2 \cos(2\lambda)P_1^0(\cos \lambda) - \sin \lambda \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos I),$$

el resultado es

$$\mathcal{Q} = 2 - \cos \mu.$$

### 5.8.3 Sustitución de una variable por una combinación lineal de variables

En ocasiones, resulta de especial interés el sustituir una variable polinómica, o trigonométrica, por una combinación lineal de variables. Así, en la serie  $\mathcal{P} = \sin \phi$ , puede ser necesario sustituir la variable  $\phi$  por la combinación lineal  $l + l' + F - D$ , de modo que obtengamos la serie  $\mathcal{P} = \sin(l + l' + F - D)$ . Para ello, podemos definir la serie auxiliar  $\mathcal{L} = l + l' + F - D$ , y sustituir en  $\mathcal{P} = \sin \phi$ , la variable  $\phi$  por la serie  $\mathcal{L}$ . Con este objetivo hemos construido una función llamada CL, que sustituye una variable por una combinación lineal de variables, actuando tanto en la parte polinómica como en la trigonométrica, a diferencia de la función `sust`, que actúa únicamente sobre la parte polinómica. Como parámetro toma una serie de Kinoshita  $\mathcal{L}$  de tipo numérica, pero hemos de asegurarnos de que  $\mathcal{L}$  es una combinación lineal de variables. En este punto cabe resaltar la gran utilidad que tiene el hecho de que las variables trigonométricas y polinómicas sean el mismo conjunto de variables. Ello da una gran flexibilidad.

Sea una serie  $\mathcal{K}$  en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , y que denotaremos como

$$\mathcal{K} = \sum_i c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \dots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \dots + \alpha_{in}\rho_n) \times \mathcal{R}_i,$$

en donde  $\mathcal{R}_i$  representa el resto del término de la serie. Una operación frecuente es la de la sustitución de una variable  $\rho_\nu$  que aparece en la parte polinómica o trigonométrica por una combinación lineal de variables. Sea  $\mathcal{L}$  la combinación lineal de variables

$$\mathcal{L} = \lambda_1 \rho_1 + \dots + \lambda_n \rho_n = \sum_{l=1}^n \lambda_l \rho_l,$$

en donde no se impone ninguna restricción sobre  $\lambda_\nu$ . El operador  $\mathcal{S}$  que sustituye las apariciones de la variable  $\rho_\nu$  en la parte polinómica o trigonométrica actúa sobre  $\mathcal{K}$  como

sigue: en primer lugar, se trata de un operador lineal, luego

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathcal{K}, \rho_\nu, \mathcal{L}) &= \mathcal{S}\left(\sum_i c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{in}\rho_n) \times \mathcal{R}_i, \rho_\nu, \mathcal{L}\right) = \\ &= \sum_i \mathcal{S}\left(c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{in}\rho_n) \times \mathcal{R}_i, \rho_\nu, \mathcal{L}\right). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}\left(c_i \rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{in}\rho_n) \times \mathcal{R}_i, \rho_\nu, \mathcal{L}\right) = \\ &= c_i \mathcal{R}_i \times \mathcal{S}\left(\rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{in}\rho_n), \rho_\nu, \mathcal{L}\right), \end{aligned}$$

y por último,

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}\left(\rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}} \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{in}\rho_n), \rho_\nu, \mathcal{L}\right) = \\ &= \mathcal{S}(\rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}}, \rho_\nu, \mathcal{L}) \times \mathcal{S}\left(\left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{in}\rho_n), \rho_\nu, \mathcal{L}\right). \end{aligned}$$

Mediante la sustitución de  $\rho_\nu$  por  $\mathcal{L}$ , la parte polinómica se ve transformada como sigue,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}}, \rho_\nu, \mathcal{L}) &= \rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \mathcal{L}^{\mu_{ik}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}} = \\ &= \rho_1^{\mu_{i1}} \cdots \left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \rho_l\right)^{\mu_{ik}} \cdots \rho_n^{\mu_{in}}. \end{aligned}$$

Esta parte conviene tratarla de la misma forma en que es tratada la sustitución de una variable polinómica por una serie. Para que el cambio esté bien hecho, esto debe hacerse después de que se haya transformado adecuadamente la parte trigonométrica. Esta parte se transforma como sigue:

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}\left(\left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{in}\rho_n), \rho_\nu, \mathcal{L}\right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} \left(\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{i\nu} \left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \rho_l\right) + \alpha_{in}\rho_n\right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_{i1}\rho_1 + \cdots + \alpha_{i\nu}\lambda_1\rho_1 + \cdots + \alpha_{i\nu}\lambda_n\rho_n + \cdots + \alpha_{in}\rho_n) = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} ((\alpha_{i1} + \alpha_{i\nu}\lambda_1)\rho_1 + \cdots + \alpha_{i\nu}\lambda_\nu\rho_\nu + \cdots + (\alpha_{in} + \alpha_{i\nu}\lambda_n)\rho_n). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Esta es la forma en que debe procederse algorítmicamente. Pasamos de tener los argumentos  $\alpha_{i1}\rho_1 + \dots + \alpha_{in}\rho_n$ , a tener:

$$(\alpha_{i1} + \alpha_{i\nu}\lambda_1)\rho_1 + \dots + \alpha_{i\nu}\lambda_\nu\rho_\nu + \dots + (\alpha_{in} + \alpha_{i\nu}\lambda_n)\rho_n.$$

Una vez ha sido modificada la parte trigonométrica de esta forma, se pasa a llamar a la función *sust* para la parte polinómica únicamente.

En la sustitución de la parte trigonométrica, la ecuación (5.10) asociada al algoritmo se programa mejor pasando la serie con la combinación lineal de las variables a un vector (se recorre la serie y se mete el coeficiente de la variable de cada sumando en la posición respectiva del vector, sumándosela al valor que tiene).

## 5.9 Eliminación de variables trigonométricas

La eliminación de variables trigonométricas se hace aquí como en el caso del manipulador de series de Poisson.

## 5.10 Cálculo de polinomios de Legendre y de Jacobi

El cálculo de polinomios de Legendre y de Jacobi es igual que en las series de Poisson.

## 5.11 Derivación de series de Kinoshita

Dada una serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = q \sum_i T_i$ , en donde  $q$  representa el factor común, tenemos que la derivada respecto de una variable  $\rho_i$  viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho_i} \left( q \sum_j T_j \right) &= \sum_j T_j \frac{dq}{d\rho_i} + q \frac{d}{d\rho_i} \left( \sum_j T_j \right) = \\ &= \left( \sum_j T_j \right) \frac{dq}{d\rho_i} + q \left( \sum_j \frac{dT_j}{d\rho_i} \right). \end{aligned}$$

Por consiguiente, hemos de estudiar la expresión que toman las derivadas siguientes:  $dq/d\rho_i$  y  $dT_j/d\rho_i$ .

### 5.11.1 Notación

Para estudiar la forma en que se deriva una serie de Kinoshita, emplearemos la siguiente notación: supondremos que las variables de las que depende la serie de Kinoshita son  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ . Un término  $T$  de la serie, tendrá la forma

$$T = c \times K \times R \times D \times P \times Q \times E,$$

en donde

$$\begin{aligned} K &= \rho_1^{\mu_1} \rho_2^{\mu_2} \cdots \rho_n^{\mu_n}, & P &= \prod_j P_{n_j}^{m_j \setminus k_j} (\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_j}), \\ R &= \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} (\alpha_1 \rho_1 + \cdots + \alpha_n \rho_n), & Q &= \prod_j \bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)} (\epsilon_j, \cos \rho_{\nu_j}), \\ D &= \prod_j \frac{1}{(b_{1j} n_{\rho_1} + \cdots + b_{nj} n_{\rho_n})^{\delta_j}}, & E &= \exp i \{ \beta_1 \rho_1 + \cdots + \beta_n \rho_n + \beta_0 \frac{\pi}{2} \}. \end{aligned}$$

El operador derivada respecto de la variable  $\rho_i$ , que actúa sobre series de Kinoshita, se denotará por  $\mathcal{D}_{\rho_i}$ , queriendo significar  $d/d\rho_i$ .

### 5.11.2 Derivación del factor común

El factor común de una serie de Kinoshita es un polinomio modificado de Jacobi, cuya regla de derivación ha sido estudiada en el capítulo anterior. Cada polinomio de Jacobi genera tres nuevos, según su regla, con lo cual no se mantiene la estructura de la serie de Kinoshita. En este caso se procede multiplicando el factor común por el resto de la serie, y derivando normalmente. En el caso de que el factor común no dependa de la variable respecto de la cual se deriva, se deriva el resto de la serie normalmente.

### 5.11.3 Derivación de un término

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\rho_i} T &= \mathcal{D}_{\rho_i} (c \times K \times R \times D \times P \times Q \times E) = \\ &= cD \times \mathcal{D}_{\rho_i} (K \times R \times P \times Q \times E), \end{aligned} \quad (5.11)$$

en donde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\rho_i} (K \times R \times P \times Q \times E) &= (R \times P \times Q \times E) \times \mathcal{D}_{\rho_i} K + \\ &+ (K \times P \times Q \times E) \times \mathcal{D}_{\rho_i} R + (K \times R \times Q \times E) \times \mathcal{D}_{\rho_i} P + \\ &+ (K \times R \times P \times E) \times \mathcal{D}_{\rho_i} Q + (K \times R \times P \times Q) \times \mathcal{D}_{\rho_i} E. \end{aligned}$$

Analicemos pues la expresión que toma la derivada de cada uno de los componentes de un término de una serie de Kinoshita.

#### 5.11.4 Derivación de la parte polinómica de un término

Sea  $K = \rho_1^{\mu_1} \rho_2^{\mu_2} \cdots \rho_n^{\mu_n}$  la parte polinómica del término  $T$ . Entonces, si  $\mu_i \neq 0$ ,

$$\mathcal{D}_{\rho_i} K = \frac{d}{d\rho_i} K = \mu_i \rho_1^{\mu_1} \cdots \rho_i^{\mu_i-1} \cdots \rho_n^{\mu_n}.$$

#### 5.11.5 Derivación de la parte trigonométrica de un término

Sea  $R$  la parte trigonométrica de un término de una serie de Kinoshita,

$$R = \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \cdots + \alpha_n \rho_n).$$

Entonces,

$$\mathcal{D}_{\rho_i} R = \frac{d}{d\rho_i} R = \alpha_i \left\{ \begin{array}{c} -\sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \cdots + \alpha_n \rho_n).$$

#### 5.11.6 Derivación de los denominadores

Lo usual al trabajar en la teoría de la rotación terrestre es que los denominadores aparezcan como consecuencia de la aplicación del método de Hori, concretamente en la obtención de la función generatriz. De ahí que las variables que aparecen en el denominador no son sino los movimientos medios (las frecuencias) de las variables, que denotaremos por  $n_{\rho_i}$  (movimiento medio de la variable  $\rho_i$ ), y que son consideradas constantes.

#### 5.11.7 Derivación de los polinomios de Legendre

Sea  $P$  la parte del término  $T$  que contiene el producto de polinomios de Legendre,  $P = \prod_j P_{n_j}^{m_j \setminus k_j}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_j})$ , en donde como ya hemos hecho notar en repetidas ocasiones,  $k_j \leq m_j$ , de modo que sea posible convertir la serie de Kinoshita en una de Poisson. Para derivar el producto de estos polinomios se aplica la ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\rho_i} \prod_{j=1}^N P_{n_j}^{m_j \setminus k_j}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_j}) &= \sum_{l=1}^N \left( \frac{d}{d\rho_i} P_{n_l}^{m_l \setminus k_l}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_l}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j=1, j \neq l}^N P_{n_j}^{m_j \setminus k_j}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_j}) \right). \end{aligned}$$

**Observación.** El algoritmo que permite aplicar la regla anterior resulta muy simple. Supongamos que existen  $N$  polinomios de Legendre en el término a derivar.

- Iniciamos la serie  $\mathcal{S}_T$  a cero (esta serie guardará el resultado de la derivación).
- Para todo polinomio de Legendre en el que esté la variable respecto de la cual se deriva:

- Obtengo la derivada y la guardo en  $\mathcal{S}_D$ .
- En la serie  $\mathcal{S}_R$  guardo el resto de polinomios de Legendre.
- Hacemos  $\mathcal{S}_T = \mathcal{S}_T + \mathcal{S}_D \times \mathcal{S}_R$ .

El trabajo se simplifica mucho empleando la función `addlegendre`, que multiplica toda la serie de Poisson por el polinomio de Legendre cuyos parámetros recibe la rutina  $(n, m, k, \{\sin, \cos\})$ , y el nombre de la variable, como entero o carácter).

Este algoritmo es igualmente útil para derivar los polinomios modificados de Jacobi.

En el capítulo 2 estudiamos la forma que toma la derivada de un polinomio asociado de Legendre respecto de una variable, obteniéndose las relaciones (2.9) y (2.11):

$$\begin{aligned}\frac{dP_n^m(\sin \rho_i)}{d\rho_i} &= -m \frac{\sin \rho_i}{\cos \rho_i} P_n^m(\sin \rho_i) - P_n^{m+1}(\sin \rho_i), \\ \frac{dP_n^m(\cos \rho_i)}{d\rho_i} &= m \frac{\cos \rho_i}{\sin \rho_i} P_n^m(\cos \rho_i) + P_n^{m+1}(\cos \rho_i).\end{aligned}$$

Como se puede observar, estas reglas de derivación no conservan la estructura de serie de Kinoshita (debido a la división por  $\sin \rho_i$  y  $\cos \rho_i$  respectivamente), a no ser que se introduzcan los polinomios  $P_n^{m \setminus k}(\cos \rho_i)$  y  $P_n^{m \setminus k}(\sin \rho_i)$  tal y como se hizo en el capítulo anterior. Así se definió (2.12)

$$P_n^{m \setminus k}(\cos \rho_i) = \frac{P_n^m(\cos \rho_i)}{\sin^k \rho_i}, \quad P_n^{m \setminus k}(\sin \rho_i) = \frac{P_n^m(\sin \rho_i)}{\cos^k \rho_i}.$$

Estos polinomios verifican las reglas de derivación (2.15) y (2.16):

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\rho_i} P_n^{m \setminus k}(\cos \rho_i) &= (m - k) \cos \rho_i P_n^{m \setminus k+1}(\cos \rho_i) + P_n^{m+1 \setminus k}(\cos \rho_i), \\ \frac{d}{d\rho_i} P_n^{m \setminus k}(\sin \rho_i) &= -(m - k) \sin \rho_i P_n^{m \setminus k+1}(\sin \rho_i) - P_n^{m+1 \setminus k}(\sin \rho_i).\end{aligned}$$

De este modo se mantiene la estructura de serie de Kinoshita, al no aparecer explícitamente ninguna razón trigonométrica dividiendo.

En el caso particular en que únicamente aparezca en el término un polinomio de Legendre, tendremos entonces que obtener la derivada

$$\mathcal{D}_{\rho_i} P_n^{m \setminus k}(\{\sin, \cos\} \rho_\nu).$$

La derivación  $\mathcal{D}_{\rho_i}$  se puede llevar a cabo si y solo si  $k + 1 \leq m$ , ya que según (2.15) y (2.16), la derivación hace aparecer en la derivada los polinomios  $P_n^{m \setminus k+1}$ .

### 5.11.8 Derivación de los polinomios modificados de Jacobi

Sea  $Q$  la parte del término que contiene el producto de polinomios modificados de Jacobi,  $Q = \prod_j \bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos \rho_{\nu_j})$ , en donde es conocido que la variable  $\rho_{\nu_j}$  es un ángulo de

inclinación típico de la teoría de la rotación terrestre, lo cual condiciona como veremos la forma en que se deriva dicha expresión. Para derivar el producto de polinomios modificados de Jacobi, se aplica la regla siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i Q &= \frac{d}{d\rho_i} \prod_{j=1}^N \bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos \rho_{\nu_j}) = \\ &= \sum_{l=1}^N \left( \frac{d}{d\rho_i} \bar{Q}_{n_l}^{(m_l, m'_l)}(\epsilon_l, \cos \rho_{\nu_l}) \times \prod_{j=1, j \neq l}^N \bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos \rho_{\nu_j}) \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

En el capítulo 2, demostramos que los polinomios modificados de Jacobi cumplían la siguiente regla de derivación (2.23):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho_i} \bar{Q}_n^{(m, m')}(\epsilon, \cos \rho_i) &= \epsilon(n+m)(n-m+1) \bar{Q}_n^{(m-1, m')}(\epsilon, \cos \rho_i) + \\ &+ \bar{Q}_n^{(m, m')}(\epsilon, \cos \rho_i) \left( \frac{m'}{\sin \rho_i} + \frac{m\epsilon \cos \rho_i}{\sin \rho_i} \right). \end{aligned}$$

Por consiguiente, llevando este resultado a la expresión (5.12), tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i Q &= \frac{d}{d\rho_i} \prod_{j=1}^N \bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos \rho_{\nu_j}) = \sum_{l=1}^N \left( \prod_{j=1, j \neq l}^N \bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos \rho_{\nu_j}) \times \right. \\ &\times \delta_i^{\nu_l} \left[ \epsilon_l(n_l + m_l)(n_l - m_l + 1) \bar{Q}_{n_l}^{(m_l-1, m'_l)}(\epsilon_l, \cos \rho_{\nu_l}) + \right. \\ &\left. \left. + \bar{Q}_{n_l}^{(m_l, m'_l)}(\epsilon_l, \cos \rho_{\nu_l}) \left( \frac{m'_l}{\sin \rho_{\nu_l}} + \frac{m_l \epsilon_l \cos \rho_{\nu_l}}{\sin \rho_{\nu_l}} \right) \right] \right), \end{aligned}$$

en donde se ha hecho uso de que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho_i} \bar{Q}_{n_l}^{(m_l, m'_l)}(\epsilon_l, \cos \rho_{\nu_l}) &= \epsilon_l(n_l + m_l)(n_l - m_l + 1) \bar{Q}_{n_l}^{(m_l-1, m'_l)}(\epsilon_l, \cos \rho_{\nu_l}) + \\ &+ \bar{Q}_{n_l}^{(m_l, m'_l)}(\epsilon_l, \cos \rho_{\nu_l}) \left( \frac{m'_l}{\sin \rho_{\nu_l}} + \frac{m_l \epsilon_l \cos \rho_{\nu_l}}{\sin \rho_{\nu_l}} \right) \end{aligned}$$

si  $i = \nu_l$ , y 0 en caso contrario (de ahí que vaya multiplicado por la delta de Kronecker  $\delta_i^{\nu_l}$ ).

### Nota

Conviene tener en cuenta una propiedad de los polinomios de Jacobi a la hora de hacer la derivación. En el caso en que pretenda derivarse el polinomio  $\bar{Q}_n^{(m, m')}(\epsilon, \cos I)$  vemos que aparecen términos incluyendo los polinomios  $\bar{Q}_n^{(m, m')}(\epsilon, \cos I)$  y  $\bar{Q}_n^{(m-1, m')}(\epsilon, \cos I)$ . En el caso en que  $m = 0$ , el índice  $m - 1 = -1$  se hace negativo. Para evitar la aparición de índices negativos, se puede operar como sigue (sólo cuando  $m = 0$ ). Como sabemos, los polinomios de Jacobi verifican la relación

$$Q_n^{(-m, m')}(\cos I) = (-1)^{n-m'} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Q_n^{(m, m')}(-\cos I),$$



y como

$$\bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos I) = \epsilon^{n-m} Q_n^{(m,m')}(\epsilon \cos I),$$

entonces, resulta que

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n^{(-m,m')}(\epsilon, \cos I) &= \epsilon^{n+m} Q_n^{(-m,m')}(\epsilon \cos I) = \\ &= \epsilon^{n+m} (-1)^{n-m'} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Q_n^{(m,m')}(-\epsilon \cos I) = \\ &= \epsilon^{n+m} (-1)^{n-m'} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (-\epsilon)^{m-n} (-\epsilon)^{n-m} Q_n^{(m,m')}(-\epsilon \cos I) = \\ &= \epsilon^{n+m} (-1)^{n-m'} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (-1)^{m-n} \epsilon^{m-n} \bar{Q}_n^{(m,m')}(-\epsilon, \cos I) = \\ &= \epsilon^{2m} (-1)^{m-m'} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \bar{Q}_n^{(m,m')}(-\epsilon, \cos I) = \\ &= (-1)^{m-m'} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \bar{Q}_n^{(m,m')}(-\epsilon, \cos I), \end{aligned}$$

en donde hemos tenido en cuenta que como  $\epsilon = \pm 1$ , entonces  $\epsilon^{2m} = 1$ . Resumiendo,

$$\bar{Q}_n^{(-m,m')}(\epsilon, \cos I) = (-1)^{m-m'} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \bar{Q}_n^{(m,m')}(-\epsilon, \cos I),$$

de modo que podemos eliminar el índice negativo de un polinomio de Jacobi usando esta sencilla ecuación.

### 5.11.9 Derivación de la exponencial compleja

Derivaremos como si se tratase de un coseno (consideramos la parte real de la expresión), dado que en los desarrollos de la teoría de la rotación terrestre empleamos la parte real del potencial. Así, para  $E = \exp i(\alpha_1 \rho_1 + \dots + \alpha_n \rho_n + \alpha_0 \pi/2)$ , tenemos que

$$\mathcal{D}_{\rho_i} E = \frac{d}{d\rho_i} E = \alpha_i \exp i \left( \alpha_1 \rho_1 + \dots + \alpha_n \rho_n + (\alpha_0 + 1) \frac{\pi}{2} \right).$$

Obsérvese que convertimos el coseno en un  $(-\sin)$  teniendo en cuenta que  $\cos(\omega + \pi/2) = -\sin \omega$  (sumamos una unidad al coeficiente de  $\pi/2$ ).

### 5.11.10 Una función para la derivación

Respecto de las funciones del manipulador de series de Kinoshita que llevan a cabo las operaciones de derivación, cabe decir:

— La función `der` deriva una serie de Kinoshita de la forma en que se ha descrito anteriormente, calculando la derivada de primer orden.

— La función `derive`, que se construye a partir de ésta, tiene en cuenta el resto de casos que se pueden presentar de forma más general, e introduce operadores de derivación propios de la teoría de la rotación de la Tierra. En la derivación de los polinomios de Jacobi supone que éstos dependen únicamente de ángulos de inclinación, y que por consiguiente, podemos encontrar, para un ángulo  $\alpha$ , tanto  $\sin \alpha$  como  $\cos \alpha$  como variables polinómicas. Esta función se estudiará más detenidamente en la siguiente sección.

El siguiente ejemplo calcula la primera derivada de la serie  $\mathcal{P}$  respecto de la variable que aparece en la tabla de variables con el nombre  $l'$ , y el resultado es almacenado en la serie  $\mathcal{S}$ .

```
S=P.der (variable("l'"));
```

También puede pasarse la variable como una cadena con el nombre de la variable. En tal caso, internamente la función lleva a cabo la transformación de la cadena en la posición que ocupa dentro de la tabla de variables, para lo que llama a la función `positabla`. La llamada sería entonces (como se ve es mucho más cómoda):

```
S=P.der ("l'");
```

## 5.12 Derivación de una serie de Kinoshita respecto de un ángulo de inclinación

Las variables de inclinación pueden aparecer de dos formas: en un polinomio modificado de Jacobi, o bien, si estos polinomios han sido desarrollados, como variables polinómicas. Derivar una serie de Kinoshita respecto a una de tales variables exige tener en cuenta todos los casos que pueden darse. Para ilustrar la explicación, supongamos que la derivación de la serie se efectúa respecto del ángulo de inclinación  $I$ .

### Caso en que aparezca en polinomios modificados de Jacobi

En el caso en que el ángulo de inclinación aparezca en un polinomio modificado de Jacobi,  $Q_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos I)$ , hay que tener en cuenta que el polinomio modificado de Jacobi puede estar bien en el factor común, o en cada uno de los términos de la serie. El caso del factor común ya ha sido tratado. En el caso en que el polinomio aparece en un término, se deriva

según se ha tratado en el apartado correspondiente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial I} \bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos I) &= \epsilon(n+m)(n-m+1) \bar{Q}_n^{(m-1,m')}(\epsilon, \cos I) + \\ &+ \frac{m'}{\sin I} \bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos I) + \frac{m\epsilon \cos I}{\sin I} \bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos I). \end{aligned}$$

Como vemos, según esto, por cada término conteniendo un polinomio modificado de Jacobi en la variable  $I$ , aparecen tres, también en la variable  $I$ .

### Caso en que aparezca en la parte polinómica

Cuando se desarrolla un polinomio modificado de Jacobi en la variable  $I$  de manera que las variables  $\sin I$ ,  $\cos I$ ,  $I$  se tienen como variables polinómicas, tenemos que cada término de la serie de Kinoshita puede ser de la forma

$$T = I^n (\cos I)^m (\sin I)^k \times R,$$

en donde  $R$  representa el resto del término en cuestión, que se supone independiente de la variable  $I$ . Para derivar cada término, el procedimiento que se sigue es el siguiente: en primer lugar se almacena el resto del término en una serie, a la que llamaremos  $R$ . A continuación, se obtiene la derivada de la parte del término dependiente de  $I$ :

$$\begin{aligned} D &= \frac{d}{dI} [I^n (\cos I)^m (\sin I)^k] = \\ &= (\cos I)^m (\sin I)^k \frac{d}{dI} I^n + I^n (\sin I)^k \frac{d}{dI} (\cos I)^m + I^n (\cos I)^m \frac{d}{dI} (\sin I)^k = \\ &= nI^{n-1} (\cos I)^m (\sin I)^k - mI^n (\cos I)^{m-1} (\sin I)^{k+1} + kI^n (\cos I)^{m+1} (\sin I)^{k-1}. \end{aligned}$$

El resultado final de la derivación del término  $T$  viene dado por:

$$\frac{dT}{dI} = D \times R.$$

## 5.13 Operadores de derivación

Como se ha estudiado en el primer capítulo, en la teoría de la rotación de la Tierra, la derivación respecto de los momentos conjugados de las variables de Andoyer, verifican las

siguientes relaciones:

$$\frac{\partial}{\partial G} = \left( \frac{\partial}{\partial G} \right) + \frac{\cot J}{G} \frac{\partial}{\partial J} + \frac{\cot I}{G} \frac{\partial}{\partial I},$$

$$\frac{\partial}{\partial L} = \left( \frac{\partial}{\partial L} \right) - \frac{1}{G \sin J} \frac{\partial}{\partial J},$$

$$\frac{\partial}{\partial H} = \left( \frac{\partial}{\partial H} \right) - \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial}{\partial I},$$

en donde las derivadas entre paréntesis son derivadas respecto de la aparición explícita de la variable. La rutina del manipulador `derive` computa estos operadores de derivación, valiéndose para ello de la función `der` descrita anteriormente para las derivaciones explícitas, y de la función `deriveIJ` que deriva respecto de las variables de inclinación, como se ha descrito en la sección precedente. Esta nueva función tiene en cuenta también dependencias sencillas entre variables, de modo que por ejemplo,

$$\frac{\partial}{\partial h} = \left( \frac{\partial}{\partial h} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial \Omega} \right).$$

## 5.14 Cálculo de Paréntesis de Poisson

Sea  $f(p, q, t)$  una función de las coordenadas, momentos generalizados y el tiempo  $t$ . La derivada total con respecto al tiempo es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

Sustituyendo  $\dot{q}_k$  y  $\dot{p}_k$  por los valores dados por las ecuaciones de Hamilton (1.1), es decir,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k},$$

resulta

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right),$$

o bien,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, \mathcal{H}],$$

donde

$$[f, \mathcal{H}] = \sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right). \quad (5.13)$$

La expresión (5.13) se llama *paréntesis de Poisson* para  $\mathcal{H}$  y  $f$ . Por ejemplo, para  $p_1, p_2, q_1, q_2$ , se tiene que

$$[f, \mathcal{H}] = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} \frac{\partial f}{\partial p_2}.$$

Para dos magnitudes cualesquiera  $f$  y  $g$ , los paréntesis de Poisson se definen del mismo modo que en (5.13),

$$[f, g] = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right). \quad (5.14)$$

### 5.14.1 Paréntesis de Poisson de dos series de Kinoshita

Sean dadas las series de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_i T_i$  y  $\mathcal{K}' = \sum_i T'_i$ , ambas en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ . Por simplicidad en la notación (aunque sin pérdida alguna de generalidad), consideremos que ambas series carecen de factor común. Definiremos el operador de Poisson en las  $2m$  variables  $\rho_{\nu_1}, \dots, \rho_{\nu_m}, \rho_{\nu_{m+1}}, \dots, \rho_{\nu_{2m}}$ , y que denotaremos por  $\mathcal{P}$ , como el operador que actúa sobre dos series de Kinoshita  $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$  y da como resultado el paréntesis de Poisson  $[\mathcal{K}, \mathcal{K}']$  tomando como coordenadas generalizadas a las variables  $\rho_{\nu_1}, \dots, \rho_{\nu_m}$  y a  $\rho_{\nu_{m+1}}, \dots, \rho_{\nu_{2m}}$  como sus momentos generalizados. Es decir,

$$\mathcal{P}(\rho_{\nu_1}, \dots, \rho_{\nu_m}, \dots, \rho_{\nu_{2m}}; \mathcal{K}, \mathcal{K}') = \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \rho_{\nu_k}} \frac{\partial \mathcal{K}'}{\partial \rho_{\nu_{k+m}}} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \rho_{\nu_{k+m}}} \frac{\partial \mathcal{K}'}{\partial \rho_{\nu_k}} \right).$$

La función del manipulador que calcula esto es `poissonbracket`. En el siguiente ejemplo se obtiene el paréntesis de Poisson de las series  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  respecto de las variables  $h, l, H, L$ , en donde  $H$  y  $L$  son los momentos conjugados de las coordenadas  $h$  y  $l$ , respectivamente. El resultado se asigna a la serie de Kinoshita  $\mathcal{R}$ .  $2m$  es el número de variables canónicas, y `var` es un array de cadenas de caracteres que contiene el nombre de las variables.

```
m=2;
var[0]="h"; var[1]="l"; var[2]="H"; var[3]="L";
R=poissonbracket (P, Q, m, var);
```

## 5.15 Factor común a una serie de Kinoshita

Dada una serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$  obtenida como consecuencia de sucesivas aplicaciones del teorema de Wigner, contiene diferentes polinomios modificados de Jacobi. Por ejemplo (Kinoshita, 1977), después de aplicar dos veces consecutivas el teorema de Wigner, se obtiene la expresión (1.10). Obtenemos así una expresión en la cual aparecen términos con polinomios modificados de Jacobi comunes (más aún si tenemos en cuenta las relaciones

entre polinomios de Jacobi). Un proceso de descomposición como el que sigue Kinoshita (1977, 1990) y han seguido posteriormente otros autores, ayuda a estructurar mejor los cálculos, así como a estudiar los diferentes efectos que aparecen en las series de nutación. Así por ejemplo, Kinoshita (1977), al aplicar el método de perturbaciones de Hori, divide la función generatriz en la forma  $\mathcal{W} = (1/2)(3 \cos^2 J - 1)\mathcal{W}_0 - (1/2) \sin 2J \mathcal{W}_1 + (1/4) \sin^2 J \mathcal{W}_2$ , siendo conveniente el análisis separado de  $\mathcal{W}_0$ ,  $\mathcal{W}_1$  y  $\mathcal{W}_2$ , para estudiar su efecto en las series finales de nutación.

Sea una serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$  en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ . Vamos a definir el operador  $\mathcal{F}(\mathcal{K}, \rho_I)$  de manera que divida la serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$  en subseries, cada una de ellas con un polinomio modificado de Jacobi común en la variable  $\rho_I$ . Veremos primero la forma de actuar del operador mediante un ejemplo, para pasar a estudiar seguidamente el caso general. Supongamos que la serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$  viene dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} = & P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos I) + \\
& + 2 \sin(\lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos I) - \\
& - 2 \cos(2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos I) - \\
& - 2 \cos(g - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos I) - \\
& - 2 \sin(g - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos I) + \\
& + 2 \cos(g) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos I) - \\
& - 2 \sin(g + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos I) - \\
& - 2 \cos(g + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos I) - \\
& - 2 \cos(2g - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,2)}(1, \cos I) - \\
& - 2 \sin(2g - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,1)}(1, \cos I) + \\
& + 2 \cos(2g) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,0)}(1, \cos I) - \\
& - 2 \sin(2g + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,1)}(-1, \cos I) - \\
& - 2 \cos(2g + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,2)}(-1, \cos I).
\end{aligned}$$

Esta serie puede obtenerse directamente mediante el manipulador de series de Kinoshita aplicando dos veces sucesivas el teorema de Wigner a  $P_2^0(\sin \beta)$ . Si aplicamos el operador  $\mathcal{F}$  a la serie  $\mathcal{K}$  y a la variable  $J$ , se obtienen las siguientes series:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos J) \times \left[ P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos I) + \right. \\ &\quad + 2 \sin(\lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos I) - \\ &\quad \left. - 2 \cos(2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos I) \right], \\ \mathcal{K}_2 &= \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos J) \times \left[ -2 \cos(g - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos I) - \right. \\ &\quad - 2 \sin(g - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos I) + \\ &\quad + 2 \cos(g) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos I) - \\ &\quad - 2 \sin(g + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos I) - \\ &\quad \left. - 2 \cos(g + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos I) \right], \\ \mathcal{K}_3 &= \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos J) \times \left[ -2 \cos(2g - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,2)}(1, \cos I) - \right. \\ &\quad - 2 \sin(2g - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,1)}(1, \cos I) + \\ &\quad + 2 \cos(2g) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,0)}(1, \cos I) - \\ &\quad - 2 \sin(2g + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,1)}(-1, \cos I) - \\ &\quad \left. - 2 \cos(2g + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,2)}(-1, \cos I) \right]. \end{aligned}$$

De este modo, fraccionada la serie de Kinoshita inicial en diversas partes, es posible analizar separadamente la influencia de cada término en el resultado final. En general, el operador  $\mathcal{F}(\mathcal{K}, \rho_I)$  actúa fraccionando la serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$  de la siguiente forma

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \cdots + \mathcal{K}_F,$$

en donde  $F$  denota el número de polinomios modificados de Jacobi en la variable  $\rho_I$  distintos que podemos encontrar en la serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$ . La forma de cada una de

estas series es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_0 &= \mathcal{R}_0, \\
 \mathcal{K}_1 &= \bar{Q}_{n_1}^{(m_1, m'_1)}(\epsilon_1, \cos \rho_I) \times \mathcal{R}_1, \\
 \mathcal{K}_2 &= \bar{Q}_{n_2}^{(m_2, m'_2)}(\epsilon_2, \cos \rho_I) \times \mathcal{R}_2, \\
 &\vdots \\
 \mathcal{K}_F &= \bar{Q}_{n_F}^{(m_F, m'_F)}(\epsilon_F, \cos \rho_I) \times \mathcal{R}_F,
 \end{aligned}$$

siendo a su vez  $\mathcal{R}_i$  series de Kinoshita, para  $i = 0, \dots, F$ . Como se ve, la primera de las series (que puede ser nula) no contiene polinomio modificado de Jacobi en tal variable, y se verifica que  $(n_i, m_i, m'_i, \epsilon_i) \neq (n_j, m_j, m'_j, \epsilon_j)$  para  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, F$ .

### 5.15.1 Algoritmo para sacar factor común

Dada una serie de Kinoshita en la cual aparecen polinomios modificados de Jacobi, la función `sacarfactor` (que toma como parámetro una variable de inclinación), divide la serie de Kinoshita en tantas series como diferentes polinomios de Jacobi en esa variable aparezcan.

#### Método

Sea dada una serie de Kinoshita  $\mathcal{K}$ , en la cual queremos sacar factor común los polinomios de Jacobi en la variable de inclinación  $I$  (por ejemplo).

**Paso I:** En primer lugar comprobamos que la serie de Kinoshita no tiene ya un factor multiplicando a toda la serie. En tal caso, la función no hace nada. Se comienza, a continuación, a recorrer término a término la serie de Kinoshita.

**Paso II:** Para cada término, examino si el término contiene un polinomio modificado de Jacobi en la variable de inclinación  $I$  (que ha sido pasada como parámetro).

En el caso en que el término no contenga un polinomio modificado de Jacobi en dicha variable, se copiará el término en la componente 0-ésima del vector de series de Kinoshita que se devuelve como parámetro, que se reserva para todos aquellos términos que no contienen un factor en tal variable  $I$ .

En el caso en que contenga un polinomio modificado de Jacobi en dicha variable, se trata de buscar en el vector de series de Kinoshita que se devolverá como parámetro, si existe una serie con dicho factor (iguales valores de  $n$ ,  $m$ ,  $m'$ ,  $\epsilon$  del polinomio modificado de Jacobi). Si existe, simplemente añadimos este nuevo término a esa serie. Y si no existe, colocamos el término en una nueva serie de Kinoshita del vector.



### 5.15.2 La función que saca factor común

En este sentido, se ha dotado al manipulador de una rutina que, dada una serie de Kinoshita, la descompone en un conjunto de series de Kinoshita, cada una de ellas con un polinomio modificado de Jacobi como factor común en una variable de inclinación que se da como parámetro a la rutina. La función devuelve un vector de series de Kinoshita (una serie de Kinoshita diferente por cada nuevo factor común que aparezca). Seguidamente se comenta un fragmento de código en el que se hace uso del manipulador simbólico, y que muestra la forma en que trabaja esta función. En primer lugar, definimos una serie de Kinoshita, así como un vector de series de Kinoshita.

```
POISSON p, q;
POISSON *vec;
```

Seguidamente, construimos la serie  $P_2^1(\sin \delta) \exp i\alpha$ :

```
p="P_2^1(\sin delta)\exp (alpha)";
```

A continuación aplicamos el teorema de Wigner dos veces sucesivas sobre la serie definida previamente. Primero en la forma

$$P_n^m(\sin \delta) e^{\pm im(\alpha+l)} = \sum_{\varrho=\pm 1} \sum_{m'=0}^n \bar{Q}_n^{(m,m')}(\varrho, \cos J) P_n^{m'}(\sin b) \times \\ \times \exp \left\{ \pm i \left[ m' \varrho a + \frac{\pi}{2} (m - m') \right] \right\},$$

y entonces, eliminando las variables  $a$  y  $b$ , según

$$P_n^{m'}(\sin b) e^{\pm im'(g+a)} = \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{m''=0}^n \bar{Q}_n^{(m',m'')}(\epsilon, \cos I) P_n^{m''}(\sin \beta) \times \\ \times \exp \left\{ \pm i \left[ m'' \epsilon (\lambda - h) + \frac{\pi}{2} (m - m') \right] \right\}.$$

El código asociado es:

```
p=p.tmawigner ("delta", "alpha", "b", "a", "J", "l");
p=p.tmawigner ("b", "a", "beta", "lambda", "I", "g");
p=p.partereal (); p=p.homogenea ();
```

El resultado es la serie  $\mathcal{P}$  que mostramos seguidamente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} = & -\sin(l-2\lambda) P_2^2(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(l-\lambda) P_2^1(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(l) P_2^0(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos I) - \\
& - \cos(l+\lambda) P_2^1(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(l+2\lambda) P_2^2(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(g-l-2\lambda) P_2^2(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g-l-\lambda) P_2^1(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(g-l) P_2^0(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g-l+\lambda) P_2^1(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(g-l+2\lambda) P_2^2(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(g+l-2\lambda) P_2^2(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g+l-\lambda) P_2^1(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(g+l) P_2^0(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g+l+\lambda) P_2^1(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(g+l+2\lambda) P_2^2(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos I) + \\
& + \sin(2g-l-2\lambda) P_2^2(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,2)}(1, \cos I) - \\
& - \cos(2g-l-\lambda) P_2^1(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,1)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(2g-l) P_2^0(\sin\beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,0)}(1, \cos I) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \cos(2g - l + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,1)}(-1, \cos I) + \\
& + \sin(2g - l + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,2)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(2g + l - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,2)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(2g + l - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(2g + l) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(2g + l + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,1)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(2g + l + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,2)}(-1, \cos I).
\end{aligned}$$

Sobre esta serie aplicamos ahora la rutina `sacarfactor` que opera como ha sido descrito en esta sección.

```
k=p.sacarfactor ("J");
```

El resultado viene dado por las siguientes series:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 = & \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos J) \times \left[ -\sin(2g + l - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,2)}(1, \cos I) + \right. \\
& + \cos(2g + l - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(2g + l) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(2g + l + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,1)}(-1, \cos I) - \\
& \left. - \sin(2g + l + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,2)}(-1, \cos I) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_2 = & \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos J) \times \left[ \sin(2g - l - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,2)}(1, \cos I) - \right. \\
& - \cos(2g - l - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,1)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(2g - l) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,0)}(1, \cos I) - \\
& - \cos(2g - l + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,1)}(-1, \cos I) + \\
& \left. + \sin(2g - l + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,2)}(-1, \cos I) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_3 = & \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos J) \times \left[ -\sin(g + l - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos I) + \right. \\
& + \cos(g + l - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(g + l) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g + l + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos I) - \\
& \left. - \sin(g + l + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos I) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_4 = & \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos J) \times \left[ -\sin(g - l - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos I) + \right. \\
& + \cos(g - l - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(g - l) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g - l + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos I) - \\
& \left. - \sin(g - l + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos I) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_5 = & \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos J) \times \left[ -\sin(l - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos I) + \right. \\
& + \cos(l - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(l) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos I) - \\
& - \cos(l + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos I) - \\
& \left. - \sin(l + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos I) \right].
\end{aligned}$$

### 5.15.3 Producto por el factor común

Dada una serie de Kinoshita factorizada, es decir, en la que existe un factor común, se permite la posibilidad de volver a incluir el polinomio de Jacobi común en los términos de la serie. El procedimiento es muy sencillo, pues se reduce al producto de dos series de Kinoshita. Sobre la serie  $\mathcal{K}_1$  del ejemplo precedente, recuperaríamos la serie siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 = & -\sin(2g + l - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,2)}(1, \cos I) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1 \cos J) + \\
& + \cos(2g + l - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,1)}(1, \cos I) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1 \cos J) + \\
& + \sin(2g + l) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,0)}(1, \cos I) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1 \cos J) + \\
& + \cos(2g + l + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,1)}(-1, \cos I) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1 \cos J) - \\
& - \sin(2g + l + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(2,2)}(-1, \cos I) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1 \cos J).
\end{aligned}$$

Esto es muy útil para separar efectos (sacando factor común) y luego poder seguir trabajando normalmente. La rutina es `introfactor`.

### 5.15.4 Eliminación del factor común

Dada una serie en la que existe un factor común (un polinomio modificado de Jacobi), resulta muy útil en la teoría de la Tierra el poder eliminar el factor común sin más. Ello permitirá sacar nuevamente un factor común más, lo que permite fragmentar sucesivamente la serie de Poisson.

La rutina `fuerafactor` toma una serie de Kinoshita, y en el caso de que dicha serie contenga un factor común, devuelve dicho factor como una serie de Kinoshita, y modifica

la serie inicial eliminando de ella el factor común. Este proceso se repite frecuentemente también en los diferentes trabajos sobre Tierra rígida.

Así por ejemplo, en la serie  $\mathcal{K}_5$  del ejemplo anterior, si hacemos:

```
p=k[5].fuerafactor ();
```

obtenemos la serie siguiente,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_5 &= -\sin(l-2\lambda)P_2^2(\sin\beta)\bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos I) + \\ &+ \cos(l-\lambda)P_2^1(\sin\beta)\bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos I) + \\ &+ \sin(l)P_2^0(\sin\beta)\bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos I) - \\ &- \cos(l+\lambda)P_2^1(\sin\beta)\bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos I) - \\ &- \sin(l+2\lambda)P_2^2(\sin\beta)\bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos I),\end{aligned}$$

y la rutina devuelve el polinomio  $\bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos J)$  como serie de Kinoshita. En este caso es asignada a la serie  $\mathcal{P}$ :

$$\mathcal{P} = \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos J).$$

## 5.16 Transformación de una serie de Kinoshita en serie de Poisson

Dada una serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_i T_i$  en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , en donde

$$T_i = c_i \times K_i \times R_i \times P_i \times Q_i \times E_i,$$

es posible recuperar la estructura de serie de Poisson  $\mathcal{P} = \sum_j c_j \times T_j \times R_j$  según (4.1). Para ello se define el operador  $\mathcal{T}$ , que transforma una serie de Kinoshita en la serie de Poisson resultado de eliminar el factor común, denominadores, productos de polinomios de Legendre y de Jacobi, y exponenciales complejas. Vamos a estudiar la forma en que actúa este operador de transformación. Por simplicidad pospondremos el estudio del factor común para el final. El operador  $\mathcal{T}$  es lineal, de modo que

$$\mathcal{T}(\mathcal{K}) = \mathcal{T}\left(\sum_i T_i\right) = \sum_i \mathcal{T}(T_i),$$

es decir, el operador  $\mathcal{T}$  actúa separadamente sobre cada término de la serie. Además, se verifica, para un término  $T$  de la serie,

$$\mathcal{T}(c \times K \times R \times P \times Q \times E) = c \times K \times R \times \mathcal{T}(D) \times \mathcal{T}(P) \times \mathcal{T}(Q) \times \mathcal{T}(E).$$

Veamos cómo actúa  $\mathcal{T}$  sobre cada uno de los elementos.

### 5.16.1 Desarrollo de los polinomios de Legendre de una serie

El operador de transformación calcula los polinomios de Legendre del producto, y los multiplica, obteniendo como resultado una serie de Poisson. Así,

$$\mathcal{T}\left(\prod_j P_{n_j}^{m_j \setminus k_j}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_j})\right) = \prod_j \mathcal{T}\left(P_{n_j}^{m_j \setminus k_j}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_j})\right)$$

y en donde  $\mathcal{T}\left(P_{n_j}^{m_j \setminus k_j}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_j})\right)$  actúa calculando efectivamente el polinomio  $P_{n_j}^{m_j \setminus k_j}$  como serie de Poisson, empleando el algoritmo dado en la sección 4.9.2.

### 5.16.2 Desarrollo de los polinomios modificados de Jacobi de una serie

El operador de transformación aplicado a los polinomios de Jacobi desarrolla los polinomios modificados de Jacobi (empleando para ello el algoritmo dado en la sección 4.10.1) y después los multiplica, obteniendo así una serie de Poisson.

$$\mathcal{T}\left(\prod_j \bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos \rho_{\nu_j})\right) = \prod_j \mathcal{T}\left(\bar{Q}_{n_j}^{(m_j, m'_j)}(\epsilon_j, \cos \rho_{\nu_j})\right).$$

La función `devjac` desarrolla todos los polinomios de Jacobi en una serie de Poisson. Como parámetro recibe un entero, que dependiendo de si toma el valor `POLINOMIAL` o no, indica si se ha de desarrollar incluyendo las variables de inclinación como términos polinómicos, o no.

```
S=S.devjac (POLINOMIAL);
R=R.devjac (SIN);
```

### 5.16.3 Eliminación de los denominadores

Para los denominadores  $D_i = \prod_j (a_1^{ij} n_{\rho_1} + \dots + a_n^{ij} n_{\rho_n})^{-\nu_{ij}}$ , se debe definir previamente una tabla de frecuencias, en la que se asigna un valor constante a cada una de las variables  $n_{\rho_1}, \dots, n_{\rho_n}$ . De este modo se incluye todo en el coeficiente del término y quedan eliminados los denominadores. La tabla de frecuencias se ha definido en la sección 5.4.2. La función para la sustitución de las frecuencias se llama `sustfrecuencias`.

### 5.16.4 Parte real de la exponencial compleja

En este caso,

$$\mathcal{T} \left( \exp i \left( \alpha_1 \rho_1 + \cdots + \alpha_n \rho_n + \alpha_0 \frac{\pi}{2} \right) \right) = \operatorname{Re} \left( \exp i \left( \alpha_1 \rho_1 + \cdots + \alpha_n \rho_n + \alpha_0 \frac{\pi}{2} \right) \right),$$

en donde  $\operatorname{Re}$  representa la parte real. La función **partereal** transforma las exponenciales complejas en cosenos (o senos), tomando la parte real de la exponencial compleja, y usando para ello la fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

en donde en nuestro caso,  $\theta$  tiene la forma genérica

$$\theta = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \cdots + \alpha_n \rho_n + \alpha_0 \frac{\pi}{2},$$

siendo  $\alpha_i$  números enteros, y  $\rho_1, \dots, \rho_n$  las variables. El algoritmo es tan sencillo como eliminar la parte exponencial (para ello se hace `hayexx=0`), e introducirla en una serie que contenga un término trigonométrico con las correspondientes variables. La razón trigonométrica viene determinada por el coeficiente de  $\pi/2$ , de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \cos & \text{si } (\alpha_0 \operatorname{div} 4) \times 4 = \alpha_0 \\ -\sin & \text{si } ((\alpha_0 + 1) \operatorname{div} 4) \times 4 = \alpha_0 + 1 \\ -\cos & \text{si } ((\alpha_0 + 2) \operatorname{div} 4) \times 4 = \alpha_0 + 2 \\ \sin & \text{si } ((\alpha_0 + 3) \operatorname{div} 4) \times 4 = \alpha_0 + 3 \end{array} \right. ,$$

en donde  $\operatorname{div}$  representa la división entera.

### 5.16.5 Eliminación del factor común

El factor común se elimina calculando el polinomio modificado de Jacobi, y después multiplicándolo por el resto de la serie ya transformada.

## 5.17 Función simplificadora

Los polinomios modificados de Jacobi cumplen ciertas propiedades que en ocasiones permiten asociar términos de una serie de Kinoshita, reduciéndose de este modo su expresión. Dos términos de una serie de Kinoshita se agrupan (al aplicar la rutina `agrupa`), si los términos son exactamente iguales (salvo el coeficiente). Existen términos que pese a ser diferentes, son agrupables si se transforman adecuadamente. Por ejemplo, la serie  $\cos a + \cos(-a)$ , es agrupable. Este problema ha sido resuelto obligando a que el primer argumento de la razón trigonométrica tenga siempre un coeficiente positivo, de modo que



un caso como el anterior no puede darse. Con los polinomios modificados de Jacobi ocurre algo parecido. Se verifican relaciones como

$$\bar{Q}_2^{(0,1)}(-1, \cos I) = -\bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos I),$$

que si se aplican permiten obtener la serie en una forma mucho más compacta, dado que es posible que se agrupen automáticamente términos que antes no lo estaban. Así por ejemplo, como  $\bar{Q}_2^{(0,1)}(-|\epsilon|, \cos I) = -\bar{Q}_2^{(0,1)}(|\epsilon|, \cos I)$ , escribiremos siempre que aparezca  $\bar{Q}_2^{(0,1)}(-|\epsilon|, \cos I)$ , en su lugar,  $-\bar{Q}_2^{(0,1)}(|\epsilon|, \cos I)$ , con  $\epsilon = \pm 1$ . La rutina que se encarga de homogeneizar los polinomios de Jacobi se llama **homogenea**.

Partiendo de las relaciones (2.22), es posible homogeneizar los polinomios de Jacobi de una serie de Kinoshita de manera que siempre aparezcan con el valor de  $\epsilon = +1$ , y de esta forma las agrupaciones sean automáticas. Según las ecuaciones (2.22), se dan las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_2^{(0,0)}(-1, \cos J) &= \bar{Q}_2^{(0,0)}(+1, \cos J), \\ \bar{Q}_2^{(0,1)}(-1, \cos J) &= -\bar{Q}_2^{(0,1)}(+1, \cos J), \\ \bar{Q}_2^{(0,2)}(-1, \cos J) &= \bar{Q}_2^{(0,2)}(+1, \cos J), \\ \bar{Q}_2^{(1,0)}(-1, \cos J) &= \bar{Q}_2^{(1,0)}(+1, \cos J), \\ \bar{Q}_2^{(2,0)}(-1, \cos J) &= \bar{Q}_2^{(2,0)}(+1, \cos J), \\ \bar{Q}_3^{(0,0)}(-1, \cos J) &= \bar{Q}_3^{(0,0)}(+1, \cos J), \\ \bar{Q}_4^{(0,0)}(-1, \cos J) &= \bar{Q}_4^{(0,0)}(+1, \cos J), \\ \bar{Q}_3^{(0,1)}(-1, \cos J) &= -\bar{Q}_3^{(0,1)}(+1, \cos J).\end{aligned}$$

El usar la variable  $J$  es cuestión arbitraria. Entre el resto de polinomios modificados de Jacobi que se encuentran en (2.22) no hay relación alguna, y por consiguiente, no se modificarán.

El resto de las relaciones existentes entre los polinomios modificados de Jacobi hasta de orden cuatro pueden obtenerse de manera relativamente sencilla a partir de las tablas en las que vienen dados los polinomios de Jacobi (Kinoshita, 1974).

## 5.18 Aplicación del teorema de Wigner

Como ya se ha mencionado en la sección 1.5 del capítulo 1, el teorema de Wigner expresa de forma sencilla la transformación de un armónico esférico debidas a ciertas rotaciones del sistema de referencia. Sean entonces  $\lambda$  y  $\beta$  la longitud y latitud de un punto en una esfera y  $\lambda'$ ,  $\beta'$  la longitud y latitud del mismo punto respecto al plano  $S$  que se obtiene al rotar el plano  $S$  origen de  $\beta$  un ángulo  $J$  en torno al eje  $x$  y en sentido contrario a las agujas del

reloj. Entonces, el armónico esférico  $P_n^m(\sin \beta')e^{im\lambda'}$  de orden  $n$  puede expresarse como combinación lineal de los armónicos  $P_n^{m'}(\sin \beta)e^{im'\lambda}$ , según se da en la ecuación (1.7):

$$P_n^m(\sin \beta')e^{\pm im\lambda'} = \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{m'=0}^n \bar{Q}_n^{(m,m')}(\epsilon, \cos J) P_n^{m'}(\sin \beta) \times \\ \times \exp \left\{ \pm i \left[ m'\epsilon\lambda + \frac{\pi}{2}(m - m') \right] \right\},$$

en donde  $\epsilon = \pm 1$ , salvo para  $m' = 0$ , en cuyo caso  $\epsilon = 1$ .

Para aplicar el teorema de Wigner con el manipulador de series de Kinoshita, tan solo es necesario pasar como parámetros la longitud y latitud  $(\lambda', \beta')$  que se pretende eliminar, las nuevas longitud y latitud  $(\lambda, \beta)$  y el ángulo de inclinación  $J$ . De este modo, el procesador realiza la sustitución dada en (1.7) y que se muestra más arriba, en aquellos términos en los que puede llevarse a cabo.

No existen restricciones relativas al número de veces que puede aplicarse el teorema sobre una serie, pero debe considerarse que el máximo número de polinomios de Jacobi por término es NJAC, y cada nueva aplicación del teorema supone la aparición de uno nuevo de estos polinomios.

Dado un armónico esférico  $P_n^m(\sin \beta') \exp(\pm im\lambda')$  a transformar, en ocasiones hay que llevar a cabo una rotación previa en el mismo plano en el que se miden las variables  $(\lambda', \beta')$ , antes de realizar la rotación para cambiar de coordenadas. Esta situación se contempla en el manipulador, dado que es una situación muy frecuente. Así se incluye un sexto parámetro (opcional) que representa el ángulo asociado a tal rotación en el plano. Esto es lo que ocurre por ejemplo en la ecuación (1.8) y (1.9). La aplicación del teorema dada en (1.8) es

$$P_n^m(\sin \delta)e^{\pm im(\alpha+l)} = \sum_{\varrho=\pm 1} \sum_{m'=0}^n \bar{Q}_n^{(m,m')}(\varrho, \cos J) P_n^{m'}(\sin b) \times \\ \times \exp \left\{ \pm i \left[ m'\varrho\alpha + \frac{\pi}{2}(m - m') \right] \right\}.$$

Si lo que se pretende eliminar en la serie de Kinoshita son las variables esféricas  $(\alpha, \delta)$ ,  $l$  se considera entonces como una rotación previa que actúa antes de aplicar el teorema. Se tendrá entonces que el teorema se aplicará según sigue:

$$P_n^m(\sin \delta)e^{\pm im\alpha} = \sum_{\varrho=\pm 1} \sum_{m'=0}^n \bar{Q}_n^{(m,m')}(\varrho, \cos J) P_n^{m'}(\sin b) \times \\ \times \exp \left\{ \pm i \left[ m'\varrho\alpha \mp ml + \frac{\pi}{2}(m - m') \right] \right\}.$$

### 5.18.1 Aplicabilidad del teorema de Wigner a una serie de Kinoshita

Sea la serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_i T_i$  en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , siendo  $T_i$  un término genérico (5.2),

$$T_i = c_i \times K_i \times R_i \times P_i \times Q_i \times E_i,$$

y en donde por simplicidad y sin pérdida de generalidad, consideraremos que cada término tiene a lo sumo un polinomio asociado de Legendre generalizado (definidos en la sección 2.3.1), es decir, suponemos que  $P_i = P_{n_i}^{m_i \setminus k_i}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_i})$ . Además, denotaremos  $E_i$  como

$$E_i = \exp i \left( b_1 \rho_1 + \dots + b_n \rho_n + b_0 \frac{\pi}{2} \right).$$

Si  $\mathcal{W}$  es el operador que expresa los armónicos esféricos en las variables  $(\rho_{i\lambda'}, \rho_{i\beta'})$  como combinación lineal de armónicos esféricos en  $(\rho_{i\lambda}, \rho_{i\beta})$ , como consecuencia de una rotación del sistema de referencia un ángulo  $\rho_{iJ}$  mediante aplicación del teorema de Wigner, e introducimos la notación

$$\xi = \left( \rho_{i\lambda'} \quad \rho_{i\beta'} \quad \rho_{i\lambda} \quad \rho_{i\beta} \quad \rho_{iJ} \quad \rho_{i0} \right),$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\xi, \mathcal{K}) &= \mathcal{W} \left( \xi, \sum_i T_i \right) = \sum_i \mathcal{W}(\xi, T_i) = \\ &= \sum_i c_i \times K_i \times R_i \times Q_i \times \mathcal{W}(\xi, P_i \times E_i). \end{aligned} \quad (5.15)$$

El problema se ha reducido a definir el operador  $\mathcal{W}$  sobre el producto  $P_i \times E_i$ , que tiene la forma

$$P_{n_i}^{m_i \setminus k_i}(\{\sin, \cos\} \rho_{\nu_i}) \exp i(b_1 \rho_i + \dots + b_n \rho_n + b_0 \pi/2).$$

De la ecuación (1.7) se deduce que  $\mathcal{W}(\xi, P_i \times E_i) = 0$  si y solo si se cumple una de las condiciones siguientes:

$$\rho_{\nu_i} \neq \rho_{i\beta'}, \quad \{\sin, \cos\} \neq \sin, \quad k_i \neq 0, \quad b_{i\lambda'} \neq m_i.$$

En otro caso, tendremos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\xi, P_i \times E_i) &= \exp i(b_1 \rho_1 + \dots + 0 \cdot \rho_{i\lambda'} + \dots + b_n \rho_n + b_0 \frac{\pi}{2}) \times \\ &\times \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{m'_i=0}^{n_i} P_{n_i}^{m'_i}(\sin \rho_{i\beta}) \bar{Q}_{n_i}^{(m_i, m'_i)}(\epsilon, \cos \rho_{iJ}) \times \\ &\times \exp \left( m'_i \epsilon \rho_{i\lambda} - m_i \rho_{i0} + (m_i - m'_i) \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Las ecuaciones (5.15) y (5.16) dan directamente el algoritmo para la programación del operador  $\mathcal{W}$ . La función `tmawigner` es la que realiza esta transformación.

En el siguiente ejemplo se aplica el teorema de Wigner sobre la serie  $\mathcal{Q}$ , para pasar de las variables  $(\delta, \alpha)$  a  $(b, a)$  mediante una primera rotación en el plano de  $(\delta, \alpha)$  de un ángulo  $l$  y después de una rotación del plano respecto del eje  $X$  de un ángulo  $J$ . El resultado se asigna a la serie  $\mathcal{P}$ .

```
P=Q.tmawigner ("delta", "alpha", "b", "a", "J", "l");
```

Si partimos de la serie  $\mathcal{Q} = P_2^0(\sin \delta)$ , el resultado obtenido por el procesador es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= P_2^0(\sin b)\bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos J) + \\ &+ P_2^1(\sin b)\bar{Q}_2^{(0,1)}(-1, \cos J) \exp i(-a - \pi/2) + \\ &+ P_2^1(\sin b)\bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos J) \exp i(a - \pi/2) + \\ &+ P_2^2(\sin b)\bar{Q}_2^{(0,2)}(-1, \cos J) \exp i(-2a - \pi) + \\ &+ P_2^2(\sin b)\bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos J) \exp i(+2a - \pi) . \end{aligned}$$

## 5.19 Sustitución de armónicos esféricos por series de Kinoshita

En ocasiones se hace preciso sustituir elementos de la serie de Kinoshita de la forma  $P_n^m(\sin \beta) \cos m\lambda$  o  $P_n^m(\sin \beta) \sin m\lambda$  por desarrollos en series de Kinoshita (llamemos  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{S}$  a tales series). Dada una serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_i T_i$  en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , definimos el operador  $\mathcal{D}$  (de Delaunay) como un operador lineal,

$$\mathcal{D} \left( \sum_i T_i, n, m, \beta, \lambda, \mathcal{C}, \mathcal{S} \right) = \sum_i \mathcal{D}(T_i, n, m, \beta, \lambda, \mathcal{C}, \mathcal{S}),$$

que actúa sobre cada término  $T$  de una serie de Kinoshita sustituyendo los desarrollos  $P_n^m(\sin \beta)(\cos, \sin)m\lambda$  (para  $n, m, \beta$  y  $\lambda$  dados) por las series de Kinoshita  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned} P_n^m(\sin \beta) \cos m\lambda &\leftarrow \mathcal{C}, \\ P_n^m(\sin \beta) \sin m\lambda &\leftarrow \mathcal{S}. \end{aligned}$$

La rutina `delaunay` lleva a cabo estas sustituciones. Para ello tiene en cuenta las relaciones:

$$\begin{aligned} P_n^m(\sin \beta_M) \sin(m\lambda_M + \Phi) &= P_n^m(\sin \beta_M) \sin m\lambda_M \cos \Phi + P_n^m(\sin \beta_M) \cos m\lambda_M \sin \Phi, \\ P_n^m(\sin \beta_M) \cos(m\lambda_M + \Phi) &= P_n^m(\sin \beta_M) \cos m\lambda_M \cos \Phi - P_n^m(\sin \beta_M) \sin m\lambda_M \sin \Phi. \end{aligned}$$

Ahora se sustituirán las series  $P_n^m(\sin \beta_M) \sin m\lambda_M$  y  $P_n^m(\sin \beta_M) \cos m\lambda_M$  por los desarrollos  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{C}$ .

El siguiente fragmento de código sustituye en la serie  $\mathcal{K}$  el elemento  $P_n^m(\sin \beta) \cos m\lambda$  por la serie de Kinoshita  $\mathcal{C}$ , y el elemento  $P_n^m(\sin \beta) \sin m\lambda$  por la serie  $\mathcal{S}$ . El resultado es asignado a la serie  $\mathcal{K}$ .

```
K=K.delaunay (n, m, "beta", "lambda", C, S);
```

Suponiendo que inicialmente las series  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{S} = \mathcal{C}$  vienen dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & -0.5P_2^0(\sin \beta) - 0.25(\sin I)^2 \cos(2\lambda) P_2^2(\sin \beta) - \\ & - \cos I \sin I \sin(\lambda) P_2^1(\sin \beta) + 1.5(\cos I)^2 P_2^0(\sin \beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = & -0.010668034795 + \\ & + 12.820384034802 \cos(2L_E - 2h) - \\ & - 1.495287120948 \cos(L_{V_e} - 3L_E + 2h) - \\ & - 20.685842833479 \cos(L_{V_e} + L_E - 2h) - \\ & - 1.674334487216 \cos(2L_{V_e} - 4L_E + 2h) + \\ & + 6.955137450328 \cos(2L_{V_e} - 2h), \end{aligned}$$

y que  $n = 2, m = 2$ , el código anterior genera el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & -0.5P_2^0(\sin \beta) + 1.5(\cos I)^2 P_2^0(\sin \beta) - \cos I \sin I \sin(\lambda) P_2^1(\sin \beta) + \\ & + 0.002667008699(\sin I)^2 - 3.205096008700(\sin I)^2 \cos(2L_E - 2h) - \\ & + 0.373821780237(\sin I)^2 \cos(L_{V_e} - 3L_E + 2h) + \\ & + 5.17146070837(\sin I)^2 \cos(L_{V_e} + L_E - 2h) + \\ & + 0.418583621804(\sin I)^2 \cos(2L_{V_e} - 4L_E + 2h) - \\ & - 1.738784362582(\sin I)^2 \cos(2L_{V_e} - 2h). \end{aligned}$$

## 5.20 Integral de la parte periódica de una serie de Kinoshita

Dada la serie de Kinoshita  $\mathcal{K} = \sum_i T_i$  en las variables  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , en donde cada término tiene la forma

$$T = R \times \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (\alpha_1 \rho_1 + \dots + \alpha_n \rho_n), \quad (5.17)$$

se define el operador  $\mathcal{G}$  de modo que

$$\mathcal{G} \left( \sum_i T_i \right) = \sum_i \mathcal{G}(T_i), \quad (5.18)$$

y en donde la actuación del operador  $\mathcal{G}$  sobre un término  $T$  de la forma (5.17) viene dada por

$$\mathcal{G}(T) = R \times \frac{1}{\alpha_1 n_{\rho_1} + \cdots + \alpha_n n_{\rho_n}} \times \begin{Bmatrix} -\cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\alpha_1 \rho_1 + \cdots + \alpha_n \rho_n), \quad (5.19)$$

en donde  $n_{\rho_i}$  es la frecuencia asociada a la variable  $\rho_i$ .

La rutina *generatrix* se define de manera que computa el operador  $\mathcal{G}$  definido por las ecuaciones (5.18) y (5.19).



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



## Capítulo 6

# Cálculo de los armónicos esféricos para Luna, Sol y planetas

### 6.1 Teorías lunar y planetaria

La nutación en el movimiento de rotación terrestre es un fenómeno que resulta de la atracción gravitatoria ejercida por los diferentes cuerpos celestes sobre la Tierra. Por consiguiente, entre otros parámetros como las masas planetarias, necesitamos incluir de alguna forma en las series de nutación las ecuaciones que dan la posición de los cuerpos celestes (efemérides). Estas efemérides vienen dadas como series armónicas. A continuación pasamos a describir de forma sucinta las teorías que hemos tomado para tal representación.

La solución para la Luna escogida es la solución ELP2000-82B (Chapront-Touzé y Chapront, 1980, 1988), que combina las series de la teoría semianalítica ELP2000-82, las constantes para las efemérides lunares ELP2000 ajustadas con la integración numérica DE 200/LE 200 del Jet Propulsion Laboratory y los argumentos de la teoría semianalítica ELP2000-85.

Para las efemérides planetarias hemos utilizado las soluciones analíticas VSOP87 (Bretagnon, 1988) para el movimiento de los planetas Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y el baricentro Tierra-Luna. Las coordenadas de los planetas son series armónicas cuyos términos tienen la forma

$$\mathcal{P}_1 = t^\alpha (S \sin \phi + K \cos \phi), \quad \phi = \sum_{i=1}^{12} a_i \lambda_i, \quad (6.1)$$

y

$$\mathcal{P}_2 = t^\alpha A \cos(B + Ct), \quad (6.2)$$

siendo  $t$  el tiempo en miles de años julianos (tjy) medidos desde J2000 (JD2451545.0), y  $\alpha$  el exponente del tiempo, que varía entre 0 y 5. El significado de las variables  $\lambda_i$



(con  $i = 1, \dots, 12$ ) viene descrito en la ecuación (6.8). Las amplitudes  $S, K$  y  $A$  vienen expresadas en  $\text{au}/(\text{tjy}^\alpha)$  para las distancias y en  $\text{rad}/(\text{tjy}^\alpha)$  para las variables angulares (au es unidad astronómica). La fase  $B$  viene expresada en radianes, la frecuencia  $C$  en  $\text{rad}/\text{tjy}$ , y los coeficientes  $a_i$  son enteros.

## 6.2 Cálculo de los armónicos esféricos lunares

A partir de la solución lunar ELP2000 obtenemos los armónicos esféricos de la Luna  $(a/r_M)^3 P_n^m(\sin \beta_M) \cos m\lambda_M$  y  $(a/r_M)^3 P_n^m(\sin \beta_M) \sin m\lambda_M$  para diferentes valores de  $m$  y  $n$ . Esta teoría da las coordenadas esféricas de la luna  $r_M, \beta_M$  y  $\lambda_M$  como series armónicas en las variables  $D, l_S, l_M, F$  y  $\Omega$ , en donde  $l_M$  es la anomalía media de la Luna,  $l_S$  es la anomalía media del Sol,  $L_M$  es la longitud media de la Luna,  $L_S$  es la longitud media del Sol,  $\Omega$  es la longitud media del nodo de la Luna,  $F = L_M - \Omega$  y  $D = L_M - L_S$ .

La distancia  $r_M$  viene dada por la serie

$$r_M = r_0 + \sum_i r_i \cos \Theta_i,$$

en donde  $r_0 = (385\,000.52719 \text{ km})$  y  $r_i$  son valores constantes, y  $\Theta_i = i_D D + i_S l_S + i_M l_M + i_F F$ . Seguidamente calculamos  $r_0/r_M$ ,

$$\frac{r_0}{r_M} = \frac{r_0}{r_0 + \sum_i r_i \cos \Theta_i} = \frac{r_0}{r_0 \left(1 + \sum_i \frac{r_i}{r_0} \cos \Theta_i\right)} = \frac{1}{1 + \sum_i \frac{r_i}{r_0} \cos \Theta_i}.$$

Dado que  $r_i \ll r_0$ , es posible obtener un desarrollo en serie de  $(r_0/r_M)^3$  como sigue,

$$\left(\frac{r_0}{r_M}\right)^3 = \left(\frac{1}{1 + \sum_i \frac{r_i}{r_0} \cos \Theta_i}\right)^3 = \frac{1}{\left(1 + \sum_i \frac{r_i}{r_0} \cos \Theta_i\right)^3}. \quad (6.3)$$

Como  $r_i/r_0$  es muy pequeño, puede hacerse el desarrollo de  $1/(1+x)^3$  en torno a  $x = 0$ , tomándose como  $x$  la serie  $\sum_i (r_i/r_0) \cos \Theta_i$ . Como hemos mostrado en el capítulo precedente, estos cálculos se llevan a cabo directamente por el manipulador.

La serie para la latitud  $\beta_M$  de la Luna viene dada como una serie de Poisson de la forma

$$\beta_M = \sum_i \beta_i \sin \Theta_i = \sum_i \beta_i \sin(i_D D + i_S l_S + i_M l_M + i_F F). \quad (6.4)$$

El polinomio asociado de Legendre  $P_n^m(\sin \beta_M)$  se calcula como sigue: `P=legeasoc (SIN, latitud, n, m, orden, epsilon);`. En esta sentencia, `orden` representa el orden en el que se trunca el desarrollo de Taylor, y `epsilon` el valor a partir del cual se discriminan

términos en la rutina de multiplicación rápida de series de Poisson. `latitud` es una serie de Kinoshita en donde hemos guardado  $\beta_M$  (6.4).

La serie para la longitud  $\lambda_M = L_M + \Delta\lambda_M$  viene dada por una serie de Poisson de la forma

$$\Delta\lambda_M = \sum_i \Delta\lambda_i \sin \Theta_i = \sum_i \Delta\lambda_i \sin(i_D D + i_{L_S} l_S + i_{l_M} l_M + i_F F). \quad (6.5)$$

$L_M$  es la longitud media de la Luna, y  $\lambda_M$  la longitud de la Luna referida al equinoccio J2000.0. En la obtención de  $(a/r_M)^3 P_n^m(\sin \beta_M) \cos m\lambda_M$ , hay que tener en cuenta la relación existente entre  $\Delta\lambda_M$ , que da la teoría ELP y es una serie puramente trigonométrica, y la longitud total de la Luna  $\lambda_M$ . Esta variable verifica la relación

$$L_M = F + \Omega. \quad (6.6)$$

Por consiguiente, la longitud de la Luna  $\lambda_M$  vendrá dada por

$$\lambda_M = L_M + \Delta\lambda_M = F + \Omega + \Delta\lambda_M.$$

Para calcular las series  $\cos m\lambda_M = \cos(m\Delta\lambda_M + mF + m\Omega)$  y  $\sin m\lambda_M$ , haremos

$$\begin{aligned} \cos(m\Delta\lambda_M + mF + m\Omega) &= \cos m\Delta\lambda_M \cos(mF + m\Omega) - \sin m\Delta\lambda_M \sin(mF + m\Omega), \\ \sin(m\Delta\lambda_M + mF + m\Omega) &= \sin m\Delta\lambda_M \cos(mF + m\Omega) + \cos m\Delta\lambda_M \sin(mF + m\Omega). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Denotemos por  $\mathcal{L}$  la serie de Poisson  $\Delta\lambda_M$  dada por la teoría (ecuación (6.5)), y sea `orden` una variable que indica el orden en el que se trunca el desarrollo de Taylor, y `epsilon` el valor a partir del cual se discriminan términos en la rutina de multiplicación rápida de series de Poisson. Entonces el siguiente código calcula la expresión (6.7), para  $m = 2$ :

```
Lm=L*2.;
Lc=coseno (Lm, orden, epsilon);
Ls=seno (Lm, orden, epsilon);
C="+\\cos (2 Omega+2 F)";
S="+\\sin (2 Omega+2 F)";
R=Lc*C-Ls*S;
```

### 6.2.1 Armónicos esféricos lunares

Hemos calculado los armónicos esféricos de orden dos de la Luna,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^0(\sin \beta_M) &= -\sum_i \bar{A}_i^{(0)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^1(\sin \beta_M) \cos \lambda_M &= 3 \sum_i \bar{A}_i^{(1)} \sin \Theta_i, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M &= 3 \sum_i A_i^{(1)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M &= 3 \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \sin 2\lambda_M &= 3 \sum_i \bar{A}_i^{(2)} \sin \Theta_i, \end{aligned}$$

así como los de tercer orden,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^0(\sin \beta_M) &= \sum_i G_i^{(0)} \sin \Theta_i, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M &= \sum_i G_i^{(1)} \sin \Theta_i, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^1(\sin \beta_M) \cos \lambda_M &= \sum_i \bar{G}_i^{(1)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^2(\sin \beta_M) \sin 2\lambda_M &= \sum_i \bar{G}_i^{(2)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M &= \sum_i G_i^{(2)} \sin \Theta_i, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^3(\sin \beta_M) \sin 3\lambda_M &= \sum_i G_i^{(3)} \sin \Theta_i, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^3(\sin \beta_M) \cos 3\lambda_M &= \sum_i \bar{G}_i^{(3)} \cos \Theta_i, \end{aligned}$$

en donde  $\Theta_i = i_{l_M} l_M + i_{l_S} l_S + i_F F + i_D D + i_\Omega \Omega$ . Los coeficientes de estos desarrollos verifican las relaciones (Kinoshita, 1977, Folgueira, 1998)

$$A_i^{(1)} = -\bar{A}_i^{(1)}, \quad A_i^{(2)} = \bar{A}_i^{(2)},$$

y

$$G_i^{(1)} = \bar{G}_i^{(1)}, \quad G_i^{(2)} = -\bar{G}_i^{(2)}, \quad G_i^{(3)} = \bar{G}_i^{(3)}.$$

Estas relaciones han sido comprobadas empíricamente con el cálculo de los armónicos esféricos de la Luna y el Sol mediante el manipulador algebraico de series de Kinoshita.

Los principales términos de tales desarrollos se muestran en las tablas 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7. En las tablas 6.1, 6.2 y 6.3 se presentan únicamente los términos con  $|A| \geq 20$  ( $10^{-7}$  rad), aunque se conservan con precisión de  $10^{-14}$  radianes para el cálculo de las series de nutación. En las tablas 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7 se han truncado en 100 ( $10^{-7}$  rad) para hacer la lectura más cómoda. Los periodos vienen expresados en días solares medios.

Tabla 6.1: Armónico esférico  $-(a_M/r_M)^3 P_2^0(\sin \beta_M)$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ ( $10^{-7}$ rad)	$P$ (días)
0	0	0	0	0	4986368.2408	
0	1	-1	0	-1	33.7182	-3232.862
0	2	0	-2	0	-337.2035	-1095.175
0	1	0	0	-1	-227.7574	411.784
0	0	1	0	0	-1566.4971	365.260
0	2	0	0	-2	7234.5404	205.892
0	0	0	2	-2	-3943.0044	173.310
0	2	1	0	-2	242.6162	131.671
0	0	1	2	-2	-176.5060	117.539
0	1	2	0	-2	226.5144	-38.522
0	3	0	0	-4	134.6105	-37.625
0	1	1	0	-2	6668.8091	-34.847
0	1	0	-2	2	-557.8307	32.764
0	1	0	0	-2	156011.0989	-31.812
0	1	-1	0	0	5011.9274	29.803
0	0	0	0	1	-4311.8319	29.531
0	1	-1	0	-2	-1024.7388	-29.263
0	1	0	0	0	815765.3971	27.555
0	0	1	0	1	653.2316	27.322
0	1	0	-2	0	-4768.8374	-26.878
0	1	1	0	0	-4180.5048	25.622
0	1	-1	-2	0	-22.2726	-25.036
0	1	0	2	-2	-1017.9615	23.775
0	2	1	0	-4	220.2929	-16.630
0	0	2	0	-2	417.8912	-16.064
0	2	0	0	-4	2539.5414	-15.906
0	0	1	0	-2	8909.5505	-15.387
0	1	0	0	-3	-213.1248	-15.314
0	0	0	0	2	135336.0308	14.765
0	2	0	-2	-2	-130.2470	-14.569
0	2	-1	0	0	825.4428	14.317
0	1	0	0	1	-716.6979	14.254
0	0	1	0	2	-1494.2773	14.192
0	2	0	0	0	66861.2286	13.777

Tabla 6.1: Armónico esférico  $-(a_M/r_M)^3 P_2^0(\sin \beta_M)$ .

0	1	1	0	1	110.1360	13.719
0	0	0	2	0	59860.6300	13.606
0	2	1	0	0	-678.7352	13.276
0	2	0	2	-2	-215.4850	12.763
0	1	1	0	-4	457.9442	-10.371
0	1	0	0	-4	4160.3003	-10.085
0	1	-1	0	2	1563.1006	9.874
0	1	0	0	2	21450.8644	9.614
0	1	0	-2	-2	2102.5815	-9.530
0	1	1	0	2	-343.7503	9.367
0	3	0	0	0	5371.0981	9.185
0	1	0	2	0	11477.6506	9.108
0	0	1	0	-4	269.4185	-7.535
0	0	0	0	4	2080.2266	7.383
0	2	-1	0	2	203.2007	7.269
0	0	1	-2	-2	118.2491	-7.221
0	2	0	0	2	2561.4830	7.127
0	0	0	2	2	1824.6373	7.081
0	4	0	0	0	424.9060	6.889
0	2	0	2	0	1519.5591	6.846
0	1	0	0	4	431.7791	5.823
0	3	0	0	2	269.5603	5.662
0	1	0	2	2	442.2969	5.633
0	3	0	2	0	171.0498	5.483

Tabla 6.2: Armónico esférico  $(1/3)(a_M/r_M)^3 P_2^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ ( $10^{-7}$ rad)	$P$ (días)
1	0	0	0	0	450830.2531	-6798.384
1	-2	0	2	0	611.6256	1305.479
1	0	1	0	0	-679.4070	385.998
1	0	-1	0	0	502.5418	-346.636
1	0	-1	2	-2	-246.9223	346.604
1	2	0	0	-2	330.4916	212.323
1	-2	0	0	2	467.1551	-199.840
1	0	0	2	-2	12469.0158	177.844
1	0	1	2	-2	514.1556	119.607
1	1	0	2	-4	201.5435	-38.742
1	-1	-1	0	2	349.1689	35.026
1	1	1	0	-2	291.9108	-34.669
1	-1	0	2	-2	1056.0099	-32.606
1	-1	0	0	2	7803.5115	31.961
1	1	0	0	-2	7051.0195	-31.664
1	1	-1	0	0	289.5867	29.934
1	-1	1	0	0	176.2417	-29.673

Tabla 6.2: Armónico esférico  $(1/3)(a_M/r_M)^3 P_2^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M$ .

1	0	0	0	1	-215.0179	29.659
1	0	0	0	-1	-189.9892	-29.403
1	1	0	0	0	37296.0491	27.667
1	-1	0	0	0	36854.8658	-27.443
1	-1	0	2	0	12370.1000	26.985
1	1	0	-2	0	-164.6073	-26.772
1	1	1	0	0	-228.7251	25.719
1	-1	-1	0	0	-142.2707	-25.525
1	1	0	2	-2	3949.0943	23.858
1	1	1	2	-2	177.1962	22.395
1	0	0	2	-4	169.9601	-16.102
1	-2	0	0	4	122.8077	15.943
1	2	0	0	-4	114.7489	-15.869
1	0	-1	0	2	-159.4997	15.422
1	0	1	0	-2	391.0994	-15.353
1	0	0	0	2	-6725.3757	14.797
1	0	0	0	-2	6038.5144	-14.733
1	-2	0	2	2	249.5109	14.600
1	0	1	0	2	219.9977	14.221
1	0	-1	2	0	-741.8117	14.162
1	2	0	0	0	2480.2430	13.805
1	-2	0	0	0	3018.4512	-13.749
1	0	0	2	0	-445917.0375	13.633
1	0	0	-2	0	889.6226	-13.579
1	0	1	2	0	970.2807	13.143
1	2	0	2	-2	1243.7500	12.787
1	0	0	4	-2	173.8334	12.639
1	-1	0	0	4	-282.3430	10.100
1	1	0	0	-4	185.1007	-10.070
1	-1	-1	2	2	-726.3375	9.799
1	1	0	0	2	-1529.7052	9.627
1	-1	0	0	-2	954.0991	-9.600
1	-1	0	2	2	-16212.1303	9.543
1	1	-1	2	0	-680.1462	9.354
1	0	0	2	1	454.6854	9.327
1	-1	1	2	2	137.9458	9.300
1	3	0	0	0	136.3958	9.197
1	-3	0	0	0	242.2243	-9.172
1	1	0	2	0	-85357.9724	9.121
1	-1	0	-2	0	171.1739	-9.096
1	-1	0	4	0	326.7432	9.045
1	1	1	2	0	610.2657	8.898
1	3	0	2	-2	251.1696	8.734
1	0	0	0	4	-304.3297	7.391
1	-2	0	2	4	-416.0555	7.341
1	0	-1	2	2	-901.2562	7.229
1	2	0	0	2	-230.5088	7.135
1	-2	0	0	-2	113.6426	-7.120

Tabla 6.2: Armónico esférico  $(1/3)(a_M/r_M)^3 P_2^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M$ .

1	0	0	2	2	-13632.8076	7.088
1	2	-1	2	0	-159.3812	6.983
1	1	0	2	1	120.2183	6.968
1	0	1	2	2	174.8570	6.953
1	2	0	2	0	-11297.0800	6.852
1	2	1	2	0	138.1510	6.726
1	-1	0	2	4	-636.2424	5.797
1	1	-1	2	2	-244.9824	5.726
1	1	0	2	2	-3293.6482	5.638
1	3	0	2	0	-1271.4144	5.488
1	0	0	2	4	-338.1939	4.789
1	2	0	2	2	-545.2286	4.680
1	4	0	2	0	-130.3779	4.576

Tabla 6.3: Armónico esférico  $(1/3)(a_M/r_M)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ ( $10^{-7}$ rad)	$P$ (días)
2	0	0	0	0	40623.2111	-3399.192
2	-2	0	2	0	123.2584	1615.748
2	0	1	0	0	-115.4111	409.234
2	0	0	2	-2	7917.7294	182.621
2	0	1	2	-2	341.8297	121.749
2	1	0	2	-4	116.1364	-38.522
2	-1	0	2	-2	705.3539	-32.451
2	-1	0	0	2	761.3082	32.112
2	1	0	0	-2	632.7403	-31.517
2	-1	-1	2	0	333.5248	29.263
2	1	0	0	0	4376.4971	27.780
2	-1	0	0	0	3317.6750	-27.333
2	0	-1	2	-1	-211.4855	27.321
2	-1	0	2	0	-280612.9703	27.093
2	1	-1	2	-2	177.5791	25.622
2	0	0	2	-1	1767.6817	25.420
2	-1	1	2	0	-1128.2378	25.222
2	1	0	2	-2	-73206.7694	23.942
2	-1	0	4	-2	245.1447	23.430
2	1	1	2	-2	-3507.6656	22.469
2	1	2	2	-2	-138.3312	21.167
2	0	0	2	-4	118.7822	-16.064
2	-2	-1	2	2	-248.8456	15.242
2	0	0	0	2	1888.9174	14.830
2	0	-2	2	0	360.2792	14.765
2	0	0	0	-2	541.3832	-14.701
2	-2	0	2	2	-5656.6816	14.632
2	0	-1	2	0	30049.4347	14.192

Tabla 6.3: Armónico esférico  $(1/3)(a_M/r_M)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M$ .

2	-1	0	2	1	-352.6491	14.130
2	-2	1	2	2	121.5504	14.068
2	2	0	0	0	392.3393	13.833
2	-2	0	0	0	271.6958	-13.722
2	1	-1	2	-1	-102.6048	13.719
2	0	0	2	0	9926621.5776	13.661
2	-2	0	4	0	351.4839	13.492
2	2	-1	2	-2	-229.5632	13.276
2	1	0	2	-1	1501.6316	13.222
2	0	1	2	0	-34139.6198	13.168
2	2	0	2	-2	-29823.8831	12.811
2	0	2	2	0	-345.3828	12.710
2	0	0	4	-2	-4310.6735	12.663
2	2	1	2	-2	-1206.7922	12.377
2	0	1	4	-2	-172.0872	12.238
2	-1	-2	2	2	596.3233	10.085
2	-1	-1	2	2	16659.3813	9.814
2	-2	0	2	3	-103.9456	9.784
2	1	0	0	2	-139.3592	9.641
2	1	-2	2	0	306.2837	9.614
2	-1	0	2	2	360984.5458	9.557
2	1	-1	2	0	17735.5391	9.367
2	0	0	2	1	-10251.5342	9.340
2	-1	1	2	2	-3527.7324	9.313
2	1	0	2	0	1900554.4016	9.133
2	0	1	2	1	1549.6718	9.107
2	-1	2	2	2	-219.2735	9.082
2	-1	0	4	0	-7280.2803	9.057
2	2	0	2	-1	443.6877	8.935
2	1	1	2	0	-15990.2327	8.910
2	3	0	2	-2	-6116.8294	8.745
2	1	2	2	0	-137.9480	8.698
2	1	0	4	-2	-1607.7539	8.676
2	3	1	2	-2	-211.4904	8.541
2	-2	-1	2	4	831.3050	7.500
2	0	-2	2	2	980.1040	7.383
2	-2	0	2	4	9266.4210	7.349
2	0	-1	2	2	20476.5019	7.236
2	-1	0	2	3	-707.0413	7.220
2	-2	1	2	4	-143.7818	7.204
2	0	0	2	2	303501.7110	7.096
2	-2	0	4	2	-355.9656	7.050
2	2	-1	2	0	3886.5907	6.991
2	1	0	2	1	-2688.1707	6.976
2	0	1	2	2	-4277.6235	6.961
2	2	0	2	0	251493.5971	6.859
2	1	1	2	1	423.6579	6.845
2	0	0	4	0	-1512.3987	6.817



Tabla 6.3: Armónico esférico  $(1/3)(a_M/r_M)^3 P_2^0(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M$ .

2	2	1	2	0	-3396.1147	6.733
2	4	0	2	-2	-938.3780	6.638
2	2	0	4	-2	-316.7700	6.598
2	-1	-2	2	4	112.2891	5.992
2	-3	0	2	6	206.6208	5.970
2	-1	-1	2	4	1601.5872	5.895
2	1	-2	2	2	287.8352	5.823
2	-1	0	2	4	14169.1205	5.802
2	1	-1	2	2	5554.1354	5.731
2	0	0	2	3	-348.1643	5.721
2	-1	1	2	4	-287.8023	5.711
2	1	0	2	2	73329.6366	5.643
2	-1	0	4	2	-313.1038	5.614
2	3	-1	2	0	605.6351	5.576
2	2	0	2	1	-447.4621	5.566
2	1	1	2	2	-1392.1939	5.557
2	3	0	2	0	28294.4592	5.492
2	1	0	4	0	-236.7558	5.465
2	3	1	2	0	-529.2913	5.411
2	5	0	2	-2	-122.4116	5.349
2	-2	0	2	6	457.0835	4.907
2	0	-1	2	4	986.9868	4.856
2	0	0	2	4	7529.9317	4.793
2	2	-1	2	2	1004.0539	4.744
2	0	1	2	4	-186.9558	4.731
2	2	0	2	2	12138.4226	4.684
2	2	1	2	2	-291.1912	4.624
2	4	0	2	0	2900.1969	4.579
2	-1	0	2	6	389.5252	4.165
2	1	-1	2	4	282.4027	4.129
2	1	0	2	4	2001.8911	4.083
2	3	-1	2	2	147.7714	4.048
2	3	0	2	2	1655.7049	4.003
2	5	0	2	0	279.6343	3.927
2	0	0	2	6	172.2401	3.618
2	2	0	2	4	381.3982	3.556
2	4	0	2	2	200.4933	3.495

Tabla 6.4: Armónico esférico  $(a_M/r_M)^4 P_3^0(\sin \beta_M)$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ ( $10^{-7}$ rad)	$P$ (días)
0	1	0	-1	0	745.5883	-2190.350
0	1	0	1	-2	-128.7700	188.201
0	0	0	1	-2	233.8542	-32.281
0	0	0	1	0	-13482.0701	27.212

Tabla 6.4: Armónico esférico  $(a_M/r_M)^4 P_3^0(\sin \beta_M)$ .

0	1	0	-1	-2	429.6085	-14.666
0	1	0	1	0	-2198.8986	13.691
0	0	0	1	2	-365.5504	9.572
0	2	0	1	0	-220.1539	9.146

Tabla 6.5: Armónico esférico  $(a_M/r_M)^4 P_3^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ ( $10^{-7}$ rad)	$P$ (días)
1	-1	0	1	0	-8090.7466	3231.496
1	1	0	1	-2	-1507.6185	193.560
1	0	1	1	-2	-108.0899	-35.227
1	0	0	1	-2	-1697.1204	-32.128
1	-2	0	1	2	-226.5437	31.502
1	0	-1	1	0	-209.0609	29.530
1	-2	0	1	0	-613.0930	-27.792
1	0	0	1	0	-148540.1927	27.322
1	0	0	-1	0	-1822.4108	-27.104
1	0	1	1	0	271.1988	25.420
1	0	0	3	-2	127.5118	23.601
1	-1	-1	1	2	-212.2565	15.314
1	-1	0	1	-2	-234.5694	-14.833
1	-1	0	1	2	-4729.2262	14.698
1	1	-1	1	0	-188.1574	14.254
1	0	0	1	1	130.9667	14.192
1	1	0	1	0	-24281.8402	13.719
1	-1	0	-1	0	-297.8347	-13.664
1	-1	0	3	0	178.0758	13.549
1	1	1	1	0	164.5112	13.222
1	-2	0	1	4	-112.8740	10.053
1	0	-1	1	2	-268.4556	9.844
1	0	0	1	2	-4070.9546	9.585
1	2	0	1	0	-2924.3082	9.159
1	0	0	3	0	-1467.9389	9.083
1	-1	0	1	4	-177.1083	7.366
1	1	0	1	2	-910.0911	7.111
1	3	0	1	0	-308.5350	6.874
1	1	0	3	0	-404.9422	6.831
1	2	0	1	2	-141.6260	5.653

Tabla 6.6: Armónico esférico  $(a_M/r_M)^4 P_3^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ ( $10^{-7}$ rad)	$P$ (días)
2	-1	0	1	0	-3676.4667	6159.136
2	1	0	1	-2	-684.2846	199.232
2	-1	0	3	-2	-108.7150	168.567
2	0	0	1	-2	-748.0282	-31.977
2	-2	0	1	2	-121.7479	31.648
2	0	-1	1	0	-181.0016	29.659
2	-2	0	1	0	-277.7172	-27.678
2	0	0	1	0	-67562.9019	27.432
2	0	0	-1	0	-273.1884	-26.996
2	0	1	1	0	214.5068	25.516
2	0	0	3	-2	-1938.5084	23.683
2	-1	-1	1	2	-107.5652	15.349
2	-1	0	1	-2	-102.6873	-14.801
2	-1	0	1	2	-2319.1506	14.730
2	1	-1	1	0	-102.5980	14.284
2	1	0	1	0	-11115.3293	13.747
2	-1	0	3	0	-3727.3381	13.576
2	1	0	3	-2	-1175.0469	12.736
2	-2	0	3	2	-143.3748	9.515
2	0	-1	3	0	209.2046	9.327
2	2	0	1	0	-1257.2350	9.171
2	0	0	3	0	66091.4508	9.095
2	0	1	3	0	-258.1901	8.874
2	2	0	3	-2	-408.9125	8.710
2	-1	-1	3	2	156.0589	7.213
2	1	0	1	2	119.4058	7.119
2	-1	0	3	2	3390.5487	7.073
2	1	-1	3	0	171.2551	6.968
2	3	0	1	0	-118.9082	6.881
2	1	0	3	0	18135.3723	6.838
2	1	1	3	0	-161.3979	6.712
2	-2	0	3	4	112.2778	5.786
2	0	-1	3	2	209.1861	5.716
2	0	0	3	2	3156.4052	5.628
2	2	0	3	0	3140.1397	5.478
2	-1	0	3	4	182.5228	4.782
2	1	0	3	2	952.8129	4.674
2	3	0	3	0	438.0452	4.570
2	0	0	3	4	107.2021	4.075
2	2	0	3	2	191.8430	3.996

Tabla 6.7: Armónico esférico  $(a_M/r_M)^4 P_3^3(\sin \beta_M) \sin 3\lambda_M$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ ( $10^{-7}$ rad)	$P$ (días)
3	-1	0	1	0	497.2598	65502.202
3	0	0	1	-2	100.3097	-31.827
3	0	0	1	0	9137.9539	27.543
3	-2	0	3	0	629.9554	26.867
3	0	0	3	-2	-553.5741	23.766
3	-1	0	1	2	319.9524	14.762
3	1	0	1	0	1805.5875	13.774
3	-1	0	3	0	-83350.1170	13.603
3	0	0	3	-1	498.2477	13.168
3	-1	1	3	0	-176.2253	13.115
3	1	0	3	-2	-20522.0765	12.760
3	1	1	3	-2	-925.0346	12.329
3	-2	-1	3	2	-141.2384	9.784
3	0	0	1	2	572.5213	9.612
3	-2	0	3	2	-3204.7830	9.529
3	0	-1	3	0	6686.2216	9.340
3	2	0	1	0	244.9820	9.184
3	0	0	3	0	1471648.9133	9.107
3	-2	0	5	0	119.1616	9.032
3	1	0	3	-1	405.4327	8.910
3	0	1	3	0	-7592.6928	8.886
3	2	0	3	-2	-8984.1542	8.721
3	0	0	5	-2	-930.6924	8.653
3	2	1	3	-2	-346.6325	8.518
3	-1	-2	3	2	129.7491	7.366
3	-1	-1	3	2	3577.1075	7.220
3	-1	0	3	2	75492.0453	7.080
3	1	-1	3	0	4367.9852	6.976
3	0	0	3	1	-2169.4230	6.961
3	-1	1	3	2	-867.5403	6.946
3	1	0	3	0	403849.1134	6.845
3	0	1	3	1	332.1559	6.830
3	-1	0	5	0	-1553.7411	6.802
3	2	0	3	-1	137.2833	6.733
3	1	1	3	0	-4101.8744	6.719
3	3	0	3	-2	-2157.0979	6.625
3	1	0	5	-2	-421.6449	6.585
3	-2	-1	3	4	226.6246	5.885
3	0	-2	3	2	227.7369	5.812
3	-2	0	3	4	2500.4890	5.791
3	0	-1	3	2	4752.8318	5.721
3	-1	0	3	3	-185.4423	5.711
3	0	0	3	2	70273.9556	5.633
3	-1	1	3	3	23.2602	5.623

Tabla 6.7: Armónico esférico  $(a_M/r_M)^4 P_3^3(\sin \beta_M) \sin 3\lambda_M$ .

3	2	-1	3	0	1181.9656	5.566
3	1	0	3	1	-743.3538	5.557
3	0	1	3	2	-1114.4497	5.547
3	2	0	3	0	69914.6325	5.483
3	1	1	3	1	119.0653	5.474
3	0	0	5	0	-465.5423	5.456
3	2	1	3	0	-1067.7040	5.402
3	4	0	3	-2	-386.9051	5.341
3	2	0	5	-2	-101.7763	5.315
3	-1	-1	3	4	461.3235	4.849
3	-1	0	3	4	4064.1143	4.786
3	1	-1	3	2	1620.0260	4.737
3	0	0	3	3	-119.1235	4.731
3	1	0	3	2	21213.5408	4.677
3	3	-1	3	0	222.5701	4.631
3	2	0	3	1	-153.3958	4.624
3	1	1	3	2	-439.7418	4.618
3	3	0	3	0	9749.6914	4.573
3	3	1	3	0	-199.8542	4.516
3	-2	0	3	6	158.2230	4.160
3	0	-1	3	4	312.1197	4.123
3	0	0	3	4	2386.4045	4.077
3	2	-1	3	2	356.8594	4.042
3	2	0	3	2	4270.8972	3.998
3	2	1	3	2	-109.6754	3.955
3	4	0	3	0	1194.9040	3.922
3	-1	0	3	6	142.9546	3.614
3	1	-1	3	4	104.3255	3.587
3	1	0	3	4	740.1225	3.552
3	3	0	3	2	689.7203	3.492
3	5	0	3	0	134.2897	3.433
3	2	0	3	4	163.5421	3.146

## 6.2.2 Cálculo de las frecuencias

Calculadas las series  $(a/r_M)^3 P_n^m(\sin \beta_M) \cos m\lambda_M$  y  $(a/r_M)^3 P_n^m(\sin \beta_M) \sin m\lambda_M$ , el resultado toma la forma de una serie de Poisson en las variables  $D, l_M, l_S, F, \Omega, \sum_i C_i \cos(i_D D + i_S l_S + i_M l_M + i_F F + i_\Omega \Omega) + S_i \sin(i_D D + i_S l_S + i_M l_M + i_F F + i_\Omega \Omega)$ , en donde las amplitudes  $C_i, S_i$  se han determinado mediante el procedimiento de cálculo anterior. Las variables de

Delaunay vienen dadas en una aproximación de primer orden por las expresiones:

$$\begin{aligned} l_M &= 134^\circ.96340251 + 1717915923'' .2178 t, \\ l_S &= 357^\circ.52910918 + 129596581'' .0481 t, \\ F &= 93^\circ.27209062 + 1739527262'' .8478 t, \\ D &= 297^\circ.85019547 + 1602961601'' .2090 t, \\ \Omega &= 125^\circ.04455501 - 6962890'' .2665 t. \end{aligned}$$

La parte constante es la fase, y la parte en  $t$ , la frecuencia. El tiempo viene medido en siglos julianos. Supongamos que  $n_D, n_{l_S}, n_{l_M}, n_F, n_\Omega$  son las frecuencias asociadas a las variables  $D, l_S, l_M, F$  y  $\Omega$ , respectivamente, así como que vienen expresadas en radianes/(siglos julianos). Dado un término cualquiera de la serie, como  $C_i \cos(i_D D + i_S l_S + i_M l_M + i_F F + i_\Omega \Omega)$ , su frecuencia se calcula sumando las contribuciones de las diferentes variables, esto es,  $n_i = i_D n_D + i_S n_{l_S} + i_M n_{l_M} + i_F n_F + i_\Omega n_\Omega$ . A partir del valor de la frecuencia  $n_i$  de ese término, podemos calcular su periodo expresado en días. Un siglo juliano tiene 36 525 días solares medios, de modo que el periodo viene dado por  $T_i = 2\pi \times 36\,525/n_i$  (en días).

### 6.3 Cálculo de los armónicos esféricos del Sol

Para obtener el desarrollo de los armónicos esféricos del Sol en función de las variables de Delaunay, usamos la teoría planetaria VSOP87. Esta teoría da la posición de la Tierra en coordenadas heliocéntricas esféricas. Las variables  $\beta, \lambda, r$  para la Tierra vienen dadas como una serie cuyos términos responden a la expresión (6.1) ó (6.2). Tomaremos la forma (6.1),

$$\mathcal{P} = \sum_{\alpha} t^{\alpha} \left[ S \sin \left( \sum_{i=1}^{12} a_i \lambda_i \right) + C \sin \left( \sum_{i=1}^{12} a_i \lambda_i \right) \right],$$

en donde  $\lambda_i$  son las longitudes medias de los planetas (referidas al equinoccio J2000.0) y las variables de Delaunay expresadas en radianes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4.40260884240 + 26087.9031415742 t && \text{(Mercurio),} \\ \lambda_2 &= 3.17614669689 + 10213.2855462110 t && \text{(Venus),} \\ \lambda_3 &= 1.75347045953 + 6283.0758499914 t && \text{(Tierra),} \\ \lambda_4 &= 6.20347611291 + 3340.6124266998 t && \text{(Marte),} \\ \lambda_5 &= 0.59954649739 + 529.6909650946 t && \text{(Júpiter),} \\ \lambda_6 &= 0.87401675650 + 213.2990954380 t && \text{(Saturno),} \\ \lambda_7 &= 5.48129387159 + 74.7815985673 t && \text{(Urano),} \\ \lambda_8 &= 5.31188628676 + 38.1330356378 t && \text{(Neptuno),} \\ \lambda_9 &= 5.19846674103 + 77713.7714681205 t && \text{(Luna } D), \\ \lambda_{10} &= 1.62790523337 + 84334.6615813083 t && \text{(Luna } F), \\ \lambda_{11} &= 2.35555589827 + 83286.9142695536 t && \text{(Luna } l_M), \\ \lambda_{12} &= 3.81034454697 + 83997.0911355954 t && \text{(Luna } L_M). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Para que en la serie del Sol aparezcan las mismas variables que en los desarrollos para la Luna, únicamente incluiremos aquellos términos en los cuales aparezcan solo las variables de la Luna y de la Tierra ( $D, F, l_M, l_S$  y  $\lambda_3$ ).

Así obtenemos los desarrollos en series (para un segundo orden,  $m = 2$ ) siguientes, que se obtienen de forma análoga a los correspondientes de la Luna:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_2^0(\sin \beta_S) &= -\sum_i \bar{A}_i^{(0)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_2^1(\sin \beta_S) \cos \lambda_S &= 3 \sum_i \bar{A}_i^{(1)} \sin \Theta_i, \\ \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_2^1(\sin \beta_S) \sin \lambda_S &= 3 \sum_i A_i^{(1)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_S) \cos 2\lambda_S &= 3 \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a_S}{r_S}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_S) \sin 2\lambda_S &= 3 \sum_i \bar{A}_i^{(2)} \sin \Theta_i, \end{aligned}$$

en donde  $\Theta_i = i_{l_M} l_M + i_{l_S} l_S + i_F F + i_D D + i_\Omega \Omega$ .

Ha quedado establecido que en la teoría planetaria VSOP87 se dan las series  $r_E, \beta_E, \Delta\lambda_E$  para la Tierra. A partir de las variables esféricas de la Tierra,  $r_E, \lambda_E, \beta_E$ , se obtienen las del Sol mediante las relaciones

$$r_S = r_E, \quad \lambda_S = \lambda_E + \pi, \quad \beta_S = \beta_E.$$

Estas series son de la forma (6.1),

$$\sum_\alpha t^\alpha \sum_i \left( S_i \sin \sum_{j=1}^{12} a_{ij} \lambda_j + C_i \cos \sum_{j=1}^{12} a_{ij} \lambda_j \right), \quad (6.9)$$

y en donde se tomarán los términos para los que  $\alpha = 0$ . Además, tal y como hemos comentado, únicamente se consideran los términos en los que solo aparecen las variables  $\lambda_3, \lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}$  y  $\lambda_{12}$ , es decir, la longitud media de la Tierra y la Luna y las variables de Delaunay de la Luna. Partiendo de las relaciones

$$L_E = L_S - \pi + h, \quad (6.10)$$

y

$$L_M = D + L_S, \quad (6.11)$$

se obtienen las relaciones que permiten escribir los armónicos esféricos en las variables adecuadas.

$$\begin{aligned}
 \lambda_3 &= L_E = L_S + h - \pi, \\
 \lambda_9 &= D, \\
 \lambda_{10} &= F, \\
 \lambda_{11} &= l_M, \\
 \lambda_{12} &= L_M = D + L_S.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

El efecto del ángulo  $\pi$  (6.10), se tiene en cuenta como sigue: si  $a_3$  (coeficiente de  $\lambda_3$ ) es par, no afecta, pues  $\sin(\Phi + 2n\pi) = \sin \Phi$  y  $\cos(\Phi + 2n\pi) = \cos \Phi$ . En el caso en que  $a_3$  sea impar, usaremos las relaciones  $\sin(\Phi + (2n+1)\pi) = -\sin \Phi$  y  $\cos(\Phi + (2n+1)\pi) = -\cos \Phi$ :

$$\begin{aligned}
 \sin(a_3 L_E + \Phi) &= \begin{cases} \sin(a_3 L_S + a_3 h + \Phi) & \text{si } a_3 \text{ es par} \\ -\sin(a_3 L_S + a_3 h + \Phi) & \text{si } a_3 \text{ es impar} \end{cases}, \\
 \cos(a_3 L_E + \Phi) &= \begin{cases} \cos(a_3 L_S + a_3 h + \Phi) & \text{si } a_3 \text{ es par} \\ -\cos(a_3 L_S + a_3 h + \Phi) & \text{si } a_3 \text{ es impar} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

La determinación de los armónicos solares es análoga a la de los lunares. Las tablas 6.8 y 6.9 muestran los principales términos de los armónicos solares. Se presentan únicamente los términos con  $|A| \geq 20$  ( $10^{-7}$  rad), aunque se conservan con precisión de  $10^{-14}$  radianes para el cálculo de las series de nutación.

Tabla 6.8: Armónico esférico  $(a_S/r_S)^3 P_2^0(\sin \beta_S)$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ ( $10^{-7}$ rad)	$P$ (días)
0	0	0	0	0	5004189.6440	29.531
0	1	0	0	-1	46.0872	411.784
0	0	1	0	0	250814.8578	365.260
0	0	2	0	0	6285.5159	182.630
0	0	3	0	0	154.5971	121.753
0	0	1	0	-1	-23.8415	-32.128
0	0	0	0	1	-463.1321	29.531

Tabla 6.9: Armónico esférico  $(a_S/r_S)^3 P_2^2(\sin \beta_S) \cos 2\lambda_S$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ ( $10^{-7}$ rad)	$P$ (días)
2	0	-1	2	-2	-83578.2771	365.225
2	-1	0	2	-1	25.5056	328.153
2	0	0	2	-2	9997206.3231	182.621



Tabla 6.9: Armónico esférico  $(a_S/r_S)^3 P_2^2(\sin \beta_S) \cos 2\lambda_S$ .

2	1	0	2	-3	66.5270	126.514
2	0	1	2	-2	584694.6401	121.749
2	0	2	2	-2	23725.5463	91.313
2	0	3	2	-2	820.9837	73.051
2	0	4	2	-2	25.9529	60.876
2	0	1	2	-3	-66.0492	-38.987
2	0	0	2	-3	-775.3023	-35.227
2	0	0	2	-1	-149.1567	25.420
2	-1	0	2	-3	-21.4257	-15.461

### 6.3.1 Nota sobre las variables utilizadas

Como puede verse en las relaciones (6.12), los armónicos esféricos del Sol  $(a_S/r_S)^3 P_2^0(\sin \beta_S)$  y  $(a_S/r_S)^3 P_2^2(\sin \beta_S) \cos 2\lambda_S$  vienen dados en función de las variables  $\Omega, L_S, l_M, F, D$  y  $h$ . Resulta conveniente expresar estos armónicos en las mismas variables en que se han obtenido los armónicos de la Luna, de modo que es preciso eliminar  $L_S$  de los desarrollos. Para ello, utilizamos las relaciones  $L_S = L_M - D$  y  $L_M = F + \Omega$ , de modo que

$$L_S = F + \Omega - D.$$

De la relación  $L_S + h = l_S + \varpi$ , en donde  $\varpi$  es la longitud del perigeo de la Tierra, se obtiene

$$\varpi = 102^\circ.93737 \times \frac{\pi}{180^\circ} - \pi. \quad (6.13)$$

De este modo, podemos escribir,

$$\begin{aligned} \alpha_{L_S} L_S + \alpha_h h &= \alpha_h (L_S + h) + (\alpha_{L_S} - \alpha_h) L_S = \\ &= \alpha_h (l_S + \varpi) + (\alpha_{L_S} - \alpha_h) L_S = \\ &= \alpha_h (l_S + \varpi) + (\alpha_{L_S} - \alpha_h) (F - D + \Omega). \end{aligned}$$

Por consiguiente, la asociación entre coeficientes se da como sigue:

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow \alpha_\Omega + \alpha_{L_S} - \alpha_h, \\ l_S &\rightarrow \alpha_h, \\ l_M &\rightarrow \alpha_{l_M}, \\ D &\rightarrow \alpha_D - \alpha_{L_S} + \alpha_h, \\ F &\rightarrow \alpha_F + \alpha_{L_S} - \alpha_h, \\ \varpi &\rightarrow \alpha_h. \end{aligned}$$

Para la sustitución de  $\varpi$  por el valor dado en (6.13), se emplea la variable  $h$ , es decir, introducimos el sumando  $\alpha_h h$  y seguidamente sustituimos  $h$  por el valor dado en (6.13).

Empleando la ecuación anterior, el término se escribe en la forma:

$$A \times \frac{\sin}{\cos} \left( (\alpha_\Omega + \alpha_{L_S} - \alpha_h)\Omega + \alpha_h l_S + \alpha_{l_M} l_M + \right. \\ \left. + (\alpha_F + \alpha_{L_S} - \alpha_h)F + (\alpha_D - \alpha_{L_S} + \alpha_h)D + \alpha_h h \right). \quad (6.14)$$

De nuevo,  $h$  se sustituye por el valor dado en (6.13).

## 6.4 Efecto planetario en los armónicos de la Luna

En esta sección calculamos la influencia planetaria en los armónicos lunares. Consideramos los términos de las series en los que aparecen las longitudes medias de los planetas. Este nuevo efecto planetario que no ha sido tenido en cuenta hasta ahora se recoge en las series

$$\Delta\lambda_M^* = \sum_i A_i \sin \Phi_i, \quad \beta_M^* = \sum_i B_i \sin \Phi_i, \quad r_M^* = \sum_i R_i \cos \Phi_i,$$

en donde  $\Phi_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D + i_6L_{Me} + i_7L_{Ve} + i_8L_E + i_9L_{Ma} + i_{10}L_{Ju} + i_{11}L_{Sa} + i_{12}L_{Ur} + i_{13}L_{Ne}$ . Hemos denotado con un asterisco a la parte de la serie de las variables esféricas que contienen el efecto planetario. El método de cálculo de los armónicos esféricos

$$\left( \frac{a_M}{r_M + r_M^*} \right)^3 P_2^0(\sin(\beta_M + \beta_M^*)), \\ \left( \frac{a_M}{r_M + r_M^*} \right)^3 P_2^1(\sin(\beta_M + \beta_M^*)) \sin(\lambda_M + \lambda_M^*), \\ \left( \frac{a_M}{r_M + r_M^*} \right)^3 P_2^2(\sin(\beta_M + \beta_M^*)) \cos(2\lambda_M + 2\lambda_M^*)$$

es el mismo seguido para la obtención de los armónicos lunares debido al *main problem*. En las tablas 6.10, 6.11 y 6.12 se muestran los principales términos de dichos armónicos recalculados, mostrando únicamente los términos que incluyen efecto planetario indirecto. Estas tablas han sido usadas para calcular la influencia indirecta planetaria (parte lunar) en las series de nutación de la Tierra.

Tabla 6.10: Términos del armónico esférico  $(1/3)(a_M/r_M)^3 P_2^0(\sin \beta_M)$  que únicamente contemplan el efecto indirecto planetario (solo se muestran los términos en las longitudes medias de los planetas). La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D + i_6L_{Me} + i_7L_{Ve} + i_8L_E + i_9L_{Ma} + i_{10}L_{Ju} + i_{11}L_{Sa}$ . Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_{ci}|, |A_{si}|\} \geq 1$  ( $10^{-7}$  rad), aunque el nivel de truncación es de  $10^{-14}$  rad.  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $10^{-7}$  rad.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$L_{Me}$	$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
0	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	6793.477	-3.2909	0.3874
0	1	0	0	-2	0	2	-2	0	0	0	-35.702	0.0000	1.7196

Tabla 6.10: Términos del armónico esférico  $(1/3)(a_M/r_M)^3 P_2^0(\sin \beta_M)$  que únicamente contemplan el efecto indirecto planetario (solo se muestran los términos en las longitudes medias de los planetas). La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 \Omega + i_2 l_M + i_3 l_S + i_4 F + i_5 D + i_6 L_{Me} + i_7 L_{Ve} + i_8 L_E + i_9 L_{Ma} + i_{10} L_{Ju} + i_{11} L_{Sa}$ . Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_{ci}|, |A_{si}|\} \geq 1$  ( $10^{-7}$  rad), aunque el nivel de truncación es de  $10^{-14}$  rad.  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $10^{-7}$  rad.

0	1	0	0	-2	0	0	1	0	-1	0	-34.569	-0.0709	2.2930
0	1	0	0	-2	0	1	-1	0	0	0	-33.645	0.0000	-1.4424
0	1	0	0	-2	0	2	-3	0	0	0	-32.523	0.6934	0.0198
0	1	0	0	0	0	-3	3	0	0	0	32.099	0.0000	1.4311
0	1	0	0	0	0	0	-2	0	2	0	31.972	0.0000	2.1094
0	0	0	0	2	0	-18	16	0	0	0	31.822	0.8460	1.6947
0	1	0	0	-2	0	0	-4	8	-3	0	-31.813	1.5123	-0.4655
0	1	0	0	-2	0	0	4	-8	3	0	-31.810	1.5116	0.4652
0	2	0	0	-2	0	-18	16	0	0	0	-31.802	-0.7959	-1.5935
0	1	0	0	0	0	0	-2	0	3	0	31.738	-0.1906	-1.0655
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	29.599	0.0356	1.6354
0	1	0	0	-2	0	0	-1	0	1	0	-29.462	0.0000	-0.6037
0	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	28.919	0.0000	-1.7745
0	1	0	0	-2	0	-2	2	0	0	0	-28.686	0.0000	-1.6159
0	1	0	-1	1	0	0	1	0	0	0	27.667	1.0072	0.0977
0	1	0	0	-2	0	0	-2	0	3	0	-27.611	-0.9376	-5.2796
0	2	0	0	0	0	-18	16	0	0	0	27.562	4.2289	8.4658
0	1	0	0	0	0	0	4	-8	3	0	27.556	-1.9827	-0.5308
0	1	0	0	0	0	0	-4	8	-3	0	27.553	-1.9826	0.5308
0	0	0	0	0	0	18	-16	0	0	0	27.547	3.9693	-7.9456
0	1	0	0	-2	0	0	-2	0	2	0	-27.436	0.0288	13.8132
0	1	0	0	-2	0	-3	3	0	0	0	-27.343	0.0000	7.7911
0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	26.313	0.0000	1.5886
0	1	0	0	-2	0	-4	4	0	0	0	-26.120	0.0000	1.0108
0	1	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	25.774	0.0251	-1.3903
0	0	0	0	2	0	0	-2	0	2	0	15.946	-0.0237	-1.4296
0	0	0	0	2	0	-2	2	0	0	0	15.552	0.0146	2.3888
0	0	0	0	2	0	0	-1	0	1	0	15.333	0.0933	2.9832
0	0	0	0	2	0	-1	1	0	0	0	15.148	0.0000	-1.8252
0	1	0	0	2	0	-18	16	0	0	0	14.767	1.4008	2.8045
0	0	0	0	2	0	0	4	-8	3	0	14.766	-1.6411	-0.4920
0	0	0	0	2	0	0	-4	8	-3	0	14.765	-1.6397	0.4915
0	1	0	0	-2	0	-18	16	0	0	0	-14.763	-1.3843	-2.7713
0	3	0	0	0	0	-18	16	0	0	0	13.779	0.6933	1.3879
0	1	0	0	0	0	18	-16	0	0	0	13.775	0.6506	-1.3022
0	0	0	0	2	0	0	2	0	-2	0	13.748	0.0000	2.0359
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	13.633	-3.2374	-0.3791
0	1	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	13.608	0.6072	1.2155
0	1	0	-2	0	0	-18	16	0	0	0	-13.604	-0.6080	-1.2172

Tabla 6.11: Términos del armónico esférico  $(1/3)(a_M/r_M)^3 P_2^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M$  que únicamente contemplan el efecto indirecto planetario (solo se muestran los términos en las longitudes medias de los planetas). La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 \Omega + i_2 l_M + i_3 l_S + i_4 F + i_5 D + i_6 L_{Me} + i_7 L_{Ve} + i_8 L_E + i_9 L_{Ma} + i_{10} L_{Ju} + i_{11} L_{Sa}$ . Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_{ci}|, |A_{si}|\} \geq 1$  ( $10^{-7}$  rad), aunque el nivel de truncación es de  $10^{-14}$  rad.  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $10^{-7}$  rad.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$L_{Me}$	$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	9412520.083	-36.4956	4.2711
1	0	0	2	-2	0	-5	6	0	0	0	-4948.506	-1.5623	0.0629
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	2	0	2165.796	1.1740	-0.2179
1	0	0	2	-2	0	-3	3	0	0	0	2060.860	0.0000	1.0117
1	2	0	0	0	0	-18	16	0	0	0	27.674	-0.5866	-1.1744
1	0	0	0	0	0	18	-16	0	0	0	27.659	-0.5511	1.1033
1	-1	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	-27.555	-2.9174	0.3429
1	1	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	27.554	-2.9351	0.3454
1	-1	0	0	2	0	0	2	0	-2	0	27.547	0.0000	-1.8635
1	-1	0	0	2	0	3	-3	0	0	0	27.453	0.0000	-1.0325
1	-2	0	0	0	0	18	-16	0	0	0	-27.451	0.5665	-1.1342
1	0	0	0	0	0	-18	16	0	0	0	-27.436	0.5312	1.0633
1	1	0	0	-2	0	0	-2	0	2	0	-27.326	0.0000	-1.8845
1	1	0	0	-2	0	-3	3	0	0	0	-27.233	0.0000	-1.0598
1	-1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	27.093	1.0960	0.1260
1	0	0	0	2	0	3	-3	0	0	0	13.752	0.0000	-1.1491
1	0	0	1	1	0	0	1	0	-2	0	13.748	1.1891	0.2209
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	13.661	-36.0454	-4.2262
1	1	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	13.635	13.6787	27.3839
1	0	0	2	0	0	0	4	-8	3	0	13.634	-1.1121	-0.3227
1	-1	0	2	0	0	10	-3	0	0	0	13.634	-0.5445	-1.0812
1	1	0	2	0	0	-10	3	0	0	0	13.633	-0.5450	1.0812
1	0	0	2	0	0	0	-4	8	-3	0	13.633	-1.1122	0.3227
1	-1	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	13.632	13.6923	-27.4118
1	0	0	0	2	0	5	-6	0	0	0	13.623	-1.6607	-0.0674
1	0	0	2	0	0	1	-1	0	0	0	13.322	0.0000	1.1590
1	-1	0	1	3	0	0	1	0	0	0	9.557	-1.3125	-0.1539
1	0	0	2	2	0	-18	16	0	0	0	9.544	0.7612	1.5241
1	-2	0	2	2	0	18	-16	0	0	0	9.543	0.7460	-1.4935
1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	9.133	-6.8377	-0.8030
1	-1	0	2	2	0	0	2	0	-3	0	9.127	0.3060	-1.7232
1	2	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	9.122	3.9464	7.9004
1	0	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	9.120	3.8665	-7.7404
1	-1	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	9.108	0.0000	4.2336
1	-1	0	2	2	0	3	-3	0	0	0	9.097	0.0000	2.4042
1	0	0	1	3	0	0	1	0	0	0	7.096	-1.1000	-0.1290
1	1	0	2	2	0	-18	16	0	0	0	7.089	0.8434	1.6884
1	-1	0	2	2	0	18	-16	0	0	0	7.088	0.8353	-1.6720
1	3	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	6.853	0.6980	1.3975
1	1	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	6.852	0.6766	-1.3546
1	0	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	6.845	0.0000	1.0997

Tabla 6.12: Términos del armónico esférico  $(1/3)(a_M/r_M)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M$  que únicamente contemplan el efecto indirecto planetario (solo se muestran los términos en las longitudes medias de los planetas). La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 \Omega + i_2 l_M + i_3 l_S + i_4 F + i_5 D + i_6 L_{Me} + i_7 L_{Ve} + i_8 L_E + i_9 L_{Ma} + i_{10} L_{Ju} + i_{11} L_{Sa}$ . Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_{ci}|, |A_{si}|\} \geq 5 (10^{-7} \text{ rad})$ , aunque el nivel de truncación es de  $10^{-14}$  rad.  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $10^{-7}$  rad.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$L_{Me}$	$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
2	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	-6803.298	-6.6557	0.7717
2	1	0	2	-2	0	-3	3	0	0	0	27.300	0.0000	7.9771
2	1	0	2	-2	0	0	-2	0	2	0	27.208	0.0000	14.3446
2	0	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	27.100	4.5641	9.1371
2	-2	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	27.085	4.2956	-8.6058
2	1	0	2	-2	0	0	-2	0	3	0	27.039	-0.9068	-5.1043
2	0	0	2	0	0	0	-2	0	2	0	14.665	0.0000	9.3993
2	0	0	2	0	0	-2	2	0	0	0	14.331	0.0000	-13.4736
2	0	0	2	0	0	0	-2	2	0	0	14.157	0.0000	-8.8081
2	0	0	2	0	0	0	-1	0	1	0	14.145	-0.6212	-28.9652
2	0	0	2	0	0	-3	4	0	0	0	14.124	7.9493	0.0000
2	0	0	2	0	0	0	-3	4	0	0	14.122	1.0617	-1.8452
2	0	0	2	0	0	0	-1	0	2	0	14.099	6.4208	-3.8585
2	0	0	2	0	0	-1	1	0	0	0	13.988	0.0000	37.9980
2	0	0	2	0	0	-2	3	0	0	0	13.790	16.2670	0.0000
2	0	0	2	0	0	0	1	-2	0	0	13.693	10.3862	11.5868
2	2	0	2	-2	0	0	-2	0	2	0	13.690	0.0000	-7.8024
2	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	13.688	-16.8842	-1.5237
2	-1	0	2	2	0	-20	21	0	0	0	13.675	5.1290	0.0000
2	-2	0	2	2	0	0	2	0	-3	0	13.675	-2.0920	11.8539
2	0	0	2	0	0	-8	13	0	0	0	13.663	9.0179	6.1406
2	1	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	13.663	-306.2783	-613.1442
2	0	0	2	0	0	0	0	0	2	-5	13.661	1.6703	7.7010
2	0	0	2	0	0	0	4	-8	3	0	13.661	41.6905	11.9445
2	-1	0	2	0	0	10	-3	0	0	0	13.661	12.1824	24.2233
2	1	0	2	0	0	-10	3	0	0	0	13.661	12.1824	-24.2233
2	0	0	2	0	0	0	-4	8	-3	0	13.661	41.6905	-11.9445
2	0	0	2	0	0	0	0	0	-2	5	13.660	1.6703	-7.7011
2	-1	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	13.659	-306.5817	613.7752
2	0	0	2	0	0	8	-13	0	0	0	13.659	9.0180	-6.1406
2	1	0	2	-1	0	-3	4	0	0	0	13.655	5.2229	0.0000
2	2	0	2	-2	0	0	-2	0	3	0	13.647	-2.6558	-14.9655
2	1	0	2	-2	0	20	-21	0	0	0	13.646	5.1187	0.0000
2	0	0	3	-1	0	0	-1	0	0	0	13.633	-10.4762	0.7586
2	-2	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	13.632	0.0000	15.8536
2	0	0	2	0	0	0	-1	2	0	0	13.628	10.4623	-11.6805
2	-2	0	2	2	0	3	-3	0	0	0	13.609	0.0000	5.7737
2	0	0	2	0	0	2	-3	0	0	0	13.534	16.8034	0.0000
2	0	0	2	0	0	1	-1	0	0	0	13.349	0.0000	-41.0966
2	0	0	2	0	0	0	1	0	-2	0	13.249	7.1377	4.2906
2	0	0	2	0	0	3	-4	0	0	0	13.227	8.9146	0.0000
2	0	0	2	0	0	0	1	0	-1	0	13.208	-0.7001	32.5446

Tabla 6.12: Términos del armónico esférico  $(1/3)(a_M/r_M)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M$  que únicamente contemplan el efecto indirecto planetario (solo se muestran los términos en las longitudes medias de los planetas). La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 \Omega + i_2 l_M + i_3 l_S + i_4 F + i_5 D + i_6 L_{Me} + i_7 L_{Ve} + i_8 L_E + i_9 L_{Ma} + i_{10} L_{Ju} + i_{11} L_{Sa}$ . Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_{ci}|, |A_{si}|\} \geq 5 (10^{-7} \text{ rad})$ , aunque el nivel de truncación es de  $10^{-14} \text{ rad}$ .  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $10^{-7} \text{ rad}$ .

2	0	0	2	0	0	0	2	-2	0	0	13.198	0.0000	9.9174
2	0	0	2	0	0	2	-2	0	0	0	13.050	0.0000	15.5636
2	0	0	2	0	0	0	2	0	-2	0	12.785	0.0000	-8.0637
2	-1	0	2	2	0	0	-2	0	2	0	10.038	0.0000	6.8612
2	-1	0	2	2	0	-2	2	0	0	0	9.880	0.0000	-12.5531
2	-1	0	2	2	0	0	-1	0	1	0	9.791	-0.5131	-17.0916
2	-1	0	2	2	0	-1	1	0	0	0	9.716	0.0000	11.4690
2	-1	0	2	2	0	-2	3	0	0	0	9.620	5.4116	0.0000
2	1	0	2	0	0	-3	3	0	0	0	9.583	0.0000	-9.3675
2	1	0	2	0	0	0	-2	0	2	0	9.571	0.0000	-12.9034
2	0	0	2	2	0	-18	16	0	0	0	9.558	-17.0158	-34.0614
2	-1	0	2	2	0	0	4	-8	3	0	9.557	12.0192	3.6710
2	-1	0	2	2	0	0	-4	8	-3	0	9.557	12.0125	-3.6686
2	-2	0	2	2	0	18	-16	0	0	0	9.556	-16.6734	33.3866
2	1	0	2	0	0	0	-2	0	3	0	9.550	1.2845	7.1879
2	1	0	2	0	0	-2	2	0	0	0	9.428	0.0000	-7.1375
2	1	0	2	0	0	0	-2	2	0	0	9.352	0.0000	-5.1188
2	1	0	2	0	0	0	-1	0	1	0	9.347	-0.3680	-17.2428
2	-1	0	2	2	0	0	1	0	-1	0	9.333	0.0000	5.3135
2	1	0	2	0	0	-1	1	0	0	0	9.278	0.0000	19.9375
2	-1	0	2	2	0	2	-2	0	0	0	9.254	0.0000	11.7575
2	1	0	2	0	0	-2	3	0	0	0	9.191	8.1286	0.0000
2	1	0	2	0	0	0	1	-2	0	0	9.147	5.8834	5.9106
2	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	9.145	-8.3663	-0.7536
2	-1	0	2	2	0	0	2	0	-3	0	9.139	-6.9199	38.9870
2	-1	0	2	2	0	6	-8	0	0	0	9.138	-1.5281	-6.7544
2	0	0	2	1	0	3	-4	0	0	0	9.135	6.3747	0.0000
2	2	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	9.134	-88.2053	-176.5841
2	1	0	2	0	0	0	0	0	2	-5	9.133	1.6555	7.0504
2	1	0	2	0	0	0	4	-8	3	0	9.133	21.8408	5.9961
2	0	0	2	0	0	10	-3	0	0	0	9.133	3.5102	6.9741
2	2	0	2	0	0	-10	3	0	0	0	9.133	3.4997	-6.9605
2	1	0	2	0	0	0	-4	8	-3	0	9.133	21.8414	-5.9963
2	1	0	2	0	0	0	0	0	-2	5	9.133	1.6555	-7.0493
2	0	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	9.132	-86.4355	173.0317
2	0	0	2	1	0	0	1	0	-1	0	9.126	0.0000	-5.4195
2	1	0	3	-1	0	0	-1	0	0	0	9.121	-7.0891	0.6017
2	-1	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	9.120	0.0000	-93.5880
2	1	0	2	0	0	0	-1	2	0	0	9.118	5.8748	-5.8840
2	-1	0	2	2	0	3	-3	0	0	0	9.110	0.0000	-53.2687
2	1	0	2	0	0	2	-3	0	0	0	9.076	7.9075	0.0000
2	1	0	2	0	0	1	-1	0	0	0	8.992	0.0000	-18.7239
2	-1	0	2	2	0	4	-4	0	0	0	8.970	0.0000	-7.1308
2	1	0	2	0	0	0	1	0	-1	0	8.929	-0.3194	15.7027
2	1	0	2	0	0	2	-2	0	0	0	8.856	0.0000	7.3937

Tabla 6.12: Términos del armónico esférico  $(1/3)(a_M/r_M)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M$  que únicamente contemplan el efecto indirecto planetario (solo se muestran los términos en las longitudes medias de los planetas). La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 \Omega + i_2 l_M + i_3 l_S + i_4 F + i_5 D + i_6 L_{Me} + i_7 L_{Ve} + i_8 L_E + i_9 L_{Ma} + i_{10} L_{Ju} + i_{11} L_{Sa}$ . Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_{ci}|, |A_{si}|\} \geq 5 (10^{-7} \text{ rad})$ , aunque el nivel de truncación es de  $10^{-14}$  rad.  $A_s$  y  $A_e$  vienen dadas en  $10^{-7}$  rad.

2	0	0	2	2	0	0	-2	0	2	0	7.358	0.0000	9.1892
2	0	0	2	2	0	-2	2	0	0	0	7.273	0.0000	-16.0070
2	0	0	2	2	0	0	-2	2	0	0	7.227	0.0000	-5.7690
2	0	0	2	2	0	0	-1	0	1	0	7.224	-0.6215	-20.5402
2	0	0	2	2	0	-1	1	0	0	0	7.183	0.0000	13.3083
2	0	0	2	2	0	-2	3	0	0	0	7.131	5.7539	0.0000
2	1	0	2	2	0	-18	16	0	0	0	7.096	-18.8256	-37.6860
2	0	0	2	2	0	0	4	-8	3	0	7.096	12.3150	3.6780
2	0	0	2	2	0	0	-4	8	-3	0	7.096	12.3068	-3.6750
2	-1	0	2	2	0	18	-16	0	0	0	7.095	-18.6421	37.3271
2	0	0	2	2	0	0	1	0	-1	0	6.972	0.0000	5.2406
2	0	0	2	2	0	2	-2	0	0	0	6.927	0.0000	6.3299
2	0	0	2	2	0	0	2	0	-3	0	6.863	-1.7910	10.0791
2	3	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	6.860	-15.5884	-31.2025
2	1	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	6.859	-15.1045	30.2423
2	0	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	6.852	0.0000	-24.4617
2	0	0	2	2	0	3	-3	0	0	0	6.846	0.0000	-12.7572
2	1	0	2	2	0	0	-1	0	1	0	5.724	0.0000	-5.5351
2	2	0	2	2	0	-18	16	0	0	0	5.643	-5.6669	-11.3691
2	0	0	2	2	0	18	-16	0	0	0	5.642	-5.5639	11.1637

## 6.5 Efecto planetario en los armónicos del Sol

El efecto planetario en los armónicos del Sol se obtiene tomando todos los argumentos de la serie y no únicamente aquellos que aparecen en las series lunares (*main problem*). Si se opera de esta forma, el método de cálculo de los armónicos es el mismo que el descrito en la sección 6.3. En este caso los armónicos se dan directamente en las variables siguientes:

$$\left( \Omega \quad L_{Me} \quad L_{Ve} \quad L_E \quad L_{Ma} \quad L_{Ju} \quad L_{Sa} \quad L_{Ur} \quad L_{Ne} \quad D \quad l_S \quad l_M \quad F \right).$$

La única variable a eliminar de las dadas por la teoría VSOP87 es  $L_M$ . Además, en el cálculo del armónico esférico  $(a/r)^3 P_2^2(\sin \beta_S) \cos 2\lambda_S$ , se debe tener en cuenta que

$$\cos 2\lambda_S = \cos(2\Delta\lambda_S + 2L_S),$$

siendo  $\Delta\lambda_S$  lo que da la teoría. En este caso, para expresar los armónicos en las variables señaladas, es necesario poner  $L_S$  como  $L_E - h + \pi$ . Esto facilita asimismo la comparación con la teoría de Souchay y Kinoshita (1990). Los resultados que se han obtenido vienen dados en las tablas 6.13 y 6.14.

Tabla 6.13: Términos del armónico esférico  $(1/3)(a_S/r_S)^3 P_2^0(\sin \beta_S)$  que únicamente contemplan el efecto indirecto planetario (solo se muestran los términos en las longitudes medias de los planetas). La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_{ci}|, |A_{si}|\} \geq 0.5$  ( $10^{-7}$  rad), aunque el nivel de truncación del cálculo es de  $10^{-14}$  rad.

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h = -p_A$	$P$ (días)	$A_s$ ( $10^{-7}$ rad)	$A_c$ ( $10^{-7}$ rad)
0	1	-2	0	0	0	0	-5764.006	-1.6144	-1.5308
0	0	0	1	0	0	0	4332.589	1.6567	2.3514
3	-5	0	0	0	0	0	-2959.209	-0.5986	-1.7616
0	2	-4	0	0	0	0	-2882.003	-1.1416	-0.6307
2	-3	0	0	0	0	0	1454.936	8.0044	-0.1371
0	3	-5	0	0	0	0	1069.318	0.8992	0.5354
1	-2	0	0	0	0	0	-975.378	-0.0401	0.5311
0	2	-3	0	0	0	0	901.985	1.2488	2.1819
0	1	-1	0	0	0	0	779.936	0.0000	1.7227
4	-6	0	0	0	0	0	727.468	0.2757	0.9975
1	-1	0	0	0	0	0	583.921	0.0150	-27.1566
0	5	-8	0	0	0	0	9.275	0.5145	0.0202
0	1	0	-3	0	0	0	488.908	1.7845	1.3692
0	4	-6	0	0	0	0	450.992	1.3780	0.8371
0	1	0	-2	0	0	0	439.332	14.7740	10.0838
0	3	-4	0	0	0	0	418.266	2.7531	4.8033
3	-4	0	0	0	0	0	416.688	16.8490	0.2842
0	1	0	-1	0	0	0	398.884	-1.5677	81.5065
0	1	0	0	-2	0	0	391.862	1.2109	0.3426
0	2	-2	0	0	0	0	389.968	0.0881	23.6854
0	1	0	0	-1	0	0	378.092	-0.0357	4.9279
0	1	0	2	-5	0	0	365.670	-1.9390	0.8784
0	5	-8	3	0	0	0	365.461	0.1670	-1.3788
0	3	-8	3	0	0	0	-365.052	0.7022	-1.2418
0	1	0	1	0	0	0	336.858	0.8192	-0.5564
5	-7	0	0	0	0	0	323.919	-0.3534	-1.6346
2	-2	0	0	0	0	0	291.961	-0.1828	78.5686
0	5	-7	0	0	0	0	285.756	-0.5785	-0.3928
0	4	-5	0	0	0	0	272.259	-0.5571	-1.1212
0	3	-3	0	0	0	0	259.979	0.1274	-1.9699
4	-5	0	0	0	0	0	243.165	-2.3432	-0.1139
1	0	0	0	0	0	0	224.701	-1.7007	0.4689
0	2	0	-4	0	0	0	219.666	0.4673	-1.2350
0	2	0	-3	0	0	0	209.066	1.7282	-9.2005
0	2	0	-2	0	0	0	199.442	0.3742	-46.8305
0	4	-4	0	0	0	0	194.984	0.2089	-0.6419
3	-3	0	0	0	0	0	194.640	-0.1834	11.6149



Tabla 6.13: Términos del armónico esférico  $(1/3)(a_S/r_S)^3 P_2^0(\sin \beta_S)$  que únicamente contemplan el efecto indirecto planetario (solo se muestran los términos en las longitudes medias de los planetas). La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_{ci}|, |A_{si}|\} \geq 0.5$  ( $10^{-7}$  rad), aunque el nivel de truncación del cálculo es de  $10^{-14}$  rad.

0	2	0	-1	0	0	0	190.665	4.3495	0.0331
0	2	0	0	-2	0	0	189.046	0.0000	-1.8910
0	3	-2	0	0	0	0	188.604	1.1540	-0.2480
5	-6	0	0	0	0	0	171.674	-0.7695	0.0000
2	-1	0	0	0	0	0	162.261	3.6988	-0.8363
4	-4	0	0	0	0	0	145.980	0.0141	4.4029
0	3	0	-4	0	0	0	137.171	0.0958	-0.8599
0	3	0	-3	0	0	0	132.961	-0.4678	-3.2304
0	3	0	-2	0	0	0	129.002	-2.2714	0.6543
3	-2	0	0	0	0	0	126.976	0.5122	-0.1138
5	-5	0	0	0	0	0	116.784	0.0000	1.8993
6	-6	0	0	0	0	0	97.320	0.0000	0.9267
0	4	0	0	0	0	0	91.314	-0.9829	-0.7736

Tabla 6.14: Términos del armónico esférico  $(1/3)(a_S/r_S)^3 P_2^2(\sin \beta_S) \cos 2\lambda_S$  que únicamente contemplan el efecto indirecto planetario (solo se muestran los términos en las longitudes medias de los planetas). La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_{ci}|, |A_{si}|\} \geq 5$  ( $10^{-7}$  rad), aunque el nivel de truncación es de  $10^{-14}$  rad.

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h = -p_A$	$P$ (días)	$A_s$ ( $10^{-7}$ rad)	$A_c$ ( $10^{-7}$ rad)
0	0	0	2	0	0	-2	2165.298	1.0182	6.5913
2	-4	0	0	0	0	2	-487.638	0.3275	32.6691
0	5	-8	3	0	0	-2	365.433	-3.5079	6.2094
0	1	0	0	1	0	-2	353.237	0.0000	5.6199
0	0	2	0	0	0	-2	343.465	0.9177	28.9335
0	1	0	1	0	0	-2	336.834	0.5906	105.6740
3	-6	0	0	0	0	2	-325.103	23.4397	-0.8954
0	1	-4	0	0	0	2	-324.149	3.7208	7.1396
5	-7	0	0	0	0	2	323.941	0.0000	-5.5517
0	1	0	2	0	0	-2	312.536	-22.0378	16.0526
1	-3	0	0	0	0	2	-265.727	0.0000	-152.7740
0	1	1	0	0	0	-2	238.455	0.0000	8.0290
0	0	3	0	0	0	-2	228.982	-6.6817	11.5432

Tabla 6.14: Términos del armónico esférico  $(1/3)(a_S/r_S)^3 P_2^2(\sin \beta_S) \cos 2\lambda_S$  que únicamente contemplan el efecto indirecto planetario (solo se muestran los términos en las longitudes medias de los planetas). La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_{ci}|, |A_{si}|\} \geq 5$  ( $10^{-7}$  rad), aunque el nivel de truncación es de  $10^{-14}$  rad.

0	1	-5	0	0	0	2	-220.233	5.7785	3.5984
2	-5	0	0	0	0	2	-208.834	88.2070	-1.3444
5	-10	0	0	0	0	2	-195.067	-5.8638	0.0000
0	4	-4	0	0	0	-2	194.976	-21.4831	-12.8109
3	-3	0	0	0	0	-2	194.632	-11.1442	-40.1575
0	2	0	-1	0	0	-2	190.657	-22.6835	116.2772
0	3	-2	0	0	0	-2	188.596	-54.1078	-61.1523
0	2	0	0	-1	0	-2	185.774	-15.7188	0.0000
0	6	-15	0	0	0	2	-184.908	0.0000	-8.7681
8	-15	0	0	0	0	2	-183.004	75.6255	-48.3404
3	-9	4	0	0	0	2	-182.924	-6.7612	-10.6671
0	2	0	2	-5	0	-2	182.725	0.0000	8.7891
0	6	-8	3	0	0	-2	182.672	-327.1889	-96.7359
0	12	-19	0	3	0	-2	182.635	10.9176	0.0000
0	6	-16	4	5	0	2	-182.622	34.0456	-10.6206
0	10	-16	4	5	0	-2	182.620	-34.0379	10.6206
0	8	-19	0	3	0	2	-182.607	-10.9176	0.0000
0	2	-8	3	0	0	2	-182.570	327.8793	96.8186
0	2	0	-2	5	0	-2	182.518	0.0000	-9.2803
3	-5	4	0	0	0	-2	182.320	6.7612	10.6671
8	-11	0	0	0	0	-2	182.240	-76.3049	48.8148
0	10	-15	0	0	0	-2	180.390	0.0000	9.1876
0	2	0	0	1	0	-2	179.573	-15.3340	0.0000
0	1	2	0	0	0	-2	177.013	-57.1872	68.8812
0	2	0	1	0	0	-2	175.235	-9.8808	-136.1804
3	-7	0	0	0	0	2	-172.006	13.5804	55.4591
0	0	4	0	0	0	-2	171.739	-26.5765	17.3547
5	-6	0	0	0	0	-2	171.668	8.1564	0.0000
2	-1	0	0	0	0	-2	162.255	-153.7037	-1.8589
0	6	-7	0	0	0	-2	160.321	-6.4303	0.0000
0	5	-5	0	0	0	-2	155.982	-10.9281	-6.8604
1	-4	0	0	0	0	2	-153.821	10.8162	0.8799
0	4	-3	0	0	0	-2	151.872	-13.4053	-24.4328
0	3	-1	0	0	0	-2	147.973	0.0000	-18.3768
4	-4	0	0	0	0	-2	145.976	-0.6973	-10.6781
1	1	0	0	0	0	-2	139.113	0.0000	315.3011
0	7	-8	0	0	0	-2	132.985	-1.5222	0.0000
0	3	0	-3	0	0	-2	132.958	-12.3135	-9.7939
2	-6	0	0	0	0	2	-132.867	-1.4461	6.6558
0	6	-6	0	0	0	-2	129.986	-10.4433	-2.5110
0	3	0	-2	0	0	-2	128.999	-101.8780	-74.4028

Tabla 6.14: Términos del armónico esférico  $(1/3)(a_S/r_S)^3 P_2^2(\sin \beta_S) \cos 2\lambda_S$  que únicamente contemplan el efecto indirecto planetario (solo se muestran los términos en las longitudes medias de los planetas). La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_{ci}|, |A_{si}|\} \geq 5$  ( $10^{-7}$  rad), aunque el nivel de truncación es de  $10^{-14}$  rad.

0	5	-4	0	0	0	-2	127.119	-20.7916	-33.7992
3	-2	0	0	0	0	-2	126.973	-129.6906	0.0000
0	3	0	-1	0	0	-2	125.269	18.6871	-593.7529
0	4	-2	0	0	0	-2	124.376	-3.2463	-165.7652
0	3	0	0	-1	0	-2	123.142	0.0000	-34.0318
8	-16	0	0	0	0	2	-121.919	2.1580	6.0345
0	3	0	2	-5	0	-2	121.795	14.0729	-2.7457
0	7	-8	3	0	0	-2	121.772	-1.7292	29.5995
0	1	-8	3	0	0	2	-121.726	-11.9141	21.1285
0	2	2	0	0	0	-2	119.231	4.5660	3.3315
0	3	0	1	0	0	-2	118.421	-9.6847	3.7703
5	-5	0	0	0	0	-2	116.781	0.9981	10.3290
0	8	-9	0	0	0	-2	113.613	1.1525	0.0000
2	0	0	0	0	0	-2	112.348	2.0933	-494.5082
0	5	-3	0	0	0	-2	107.270	-1.2770	12.9380
4	-3	0	0	0	0	-2	104.294	13.0558	0.0000
1	2	0	0	0	0	-2	100.744	21.0942	-5.0784
0	4	0	-3	0	0	-2	97.475	-5.0414	54.8817
0	7	-6	0	0	0	-2	95.869	0.4588	1.4136
0	4	0	-2	0	0	-2	95.331	-3.8685	277.8786
3	-1	0	0	0	0	-2	94.220	1.9441	-60.3629
0	4	0	-1	0	0	-2	93.278	-48.8787	5.6356
0	4	0	0	-2	0	-2	92.889	0.0000	10.8524
0	5	-2	0	0	0	-2	92.782	-11.2496	2.6436
2	1	0	0	0	0	-2	85.920	-39.1953	7.6829
4	-2	0	0	0	0	-2	81.129	0.0000	-23.7653
0	5	0	-3	0	0	-2	76.942	3.8176	17.2646
0	5	0	-2	0	0	-2	75.599	19.0138	-4.6651
0	5	0	0	0	0	-2	73.050	-639.5647	514.5399
5	-3	0	0	0	0	-2	71.232	0.0000	-5.6800
0	6	0	0	0	0	-2	60.875	18.6637	16.0538
7	-5	0	0	0	0	-2	57.262	0.0000	-1.4463

## 6.6 Cálculo de los armónicos esféricos planetarios

En esta sección vamos a describir el procedimiento de cálculo de los armónicos esféricos planetarios:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_p}{r_p}\right)^3 P_2(\sin \beta_p) &= \sum_i (A_{si}^0 \sin \Phi_i + A_{ci}^0 \cos \Phi_i), \\ \left(\frac{a_p}{r_p}\right)^3 P_2^1(\sin \beta_p) \sin \lambda_p &= \sum_i (A_{si}^1 \sin \Phi_i + A_{ci}^1 \cos \Phi_i), \\ \left(\frac{a_p}{r_p}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_p) \cos 2\lambda_p &= \sum_i (A_{si}^2 \sin \Phi_i + A_{ci}^2 \cos \Phi_i), \end{aligned}$$

con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . A continuación los calcularemos usando el manipulador de series de Kinoshita para obtener los armónicos esféricos para Venus, Júpiter y Saturno.

La teoría planetaria VSOP87 proporciona las series asociadas a las coordenadas esféricas de los planetas en una referencia heliocéntrica, es decir, considerando al Sol en el origen. Para el cálculo de los armónicos esféricos se necesita expresar dichas series en coordenadas geocéntricas.

La distancia geocéntrica del planeta  $r$  puede expresarse de la forma

$$r = \|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_E\|,$$

en donde  $\mathbf{r}_p$  y  $\mathbf{r}_E$  son respectivamente los vectores que unen el Sol con el planeta y la Tierra. La función  $(a_p/r)^3$  puede escribirse como

$$\left(\frac{a_p}{r}\right)^3 = \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times \alpha_i^3 \times (1 - 2\alpha_i \cos \Theta + \alpha_i^2)^{-3/2}, \quad (6.15)$$

con  $\alpha_i = r_p/r_E$  en el caso de planetas internos, y

$$\left(\frac{a_p}{r}\right)^3 = \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times (1 - 2\alpha_o \cos \Theta + \alpha_o^2)^{-3/2}, \quad (6.16)$$

con  $\alpha_o = r_E/r_p$  en el caso de planetas externos, siendo

$$\cos \Theta = \frac{\|\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_E\|}{\|\mathbf{r}_p\| \|\mathbf{r}_E\|},$$

en donde  $\Theta$  es el ángulo entre los vectores que unen respectivamente el Sol a la Tierra y al planeta. En el primer orden de las excentricidades de los planetas, podemos realizar las siguientes aproximaciones:

$$\Theta \approx L_p - L_E, \quad r_p \approx a_p^0, \quad r_E \approx a_E^0, \quad \alpha_i \approx \frac{a_p^0}{a_E^0}, \quad \alpha_o \approx \frac{a_E^0}{a_p^0},$$

aunque esta aproximación no es posible en el caso de planetas como Júpiter o Saturno, pues se eliminan términos importantes.

De este modo, las ecuaciones (6.15) y (6.16) se pueden escribir de forma simplificada:

$$\left(\frac{a_p^0}{r}\right)^3 \approx \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times \alpha_i^3 \times (1 - 2\alpha_i \cos(L_p - L_E) + \alpha_i^2)^{-3/2}, \quad (6.17)$$

y

$$\left(\frac{a_p^0}{r}\right)^3 \approx \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times (1 - 2\alpha_o \cos(L_p - L_E) + \alpha_o^2)^{-3/2}, \quad (6.18)$$

considerando el parámetro  $\alpha$  como una constante. Cabe señalar en este punto la diferencia entre la aproximación llevada a cabo aquí (ecuaciones (6.17) y (6.18)) y la publicada por Souchay y Kinoshita (1990). En esta última se realiza la aproximación  $(a_p^0/r)^3 = 1$ , y las ecuaciones resultantes son:

$$\left(\frac{a_p^0}{r}\right)^3 \approx \alpha_i^3 \times (1 - 2\alpha_i \cos(L_p - L_E) + \alpha_i^2)^{-3/2}, \quad (6.19)$$

y

$$\left(\frac{a_p^0}{r}\right)^3 \approx (1 - 2\alpha_o \cos(L_p - L_E) + \alpha_o^2)^{-3/2}. \quad (6.20)$$

La cantidad entre paréntesis elevada a  $-3/2$  en el lado derecho de las ecuaciones (6.17) y (6.18) puede escribirse mediante las funciones de Laplace introducidas en la sección 3.2.3 del capítulo 3. Por otro lado, el término  $(a_p^0/r_p)^3$  se refiere a la distancia geocéntrica del planeta, que puede calcularse directamente a partir de las series dadas por VSOP87 de manera análoga a como se ha desarrollado en el caso del Sol. Partimos entonces del hecho de que disponemos de desarrollos de la forma

$$\left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 = \sum_i (S_i \sin \Phi_i + C_i \cos \Phi_i),$$

en donde  $\Phi_i$  es combinación lineal de las longitudes de los planetas y de las variables de Delaunay de la Luna.

### 6.6.1 Cálculo de las funciones de Laplace

Según se estudió en la sección 3.2.3 del capítulo 3, las funciones de Laplace se definen a partir de

$$A^{-s} = (1 - 2\alpha \cos \Theta + \alpha^2)^{-s},$$

en donde  $s = (2p + 1)/2$ , siendo  $p$  un número entero. Escribimos entonces

$$A^{-s} = \frac{1}{2}b_s^0(\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} b_s^k(\alpha) \cos k\Theta. \quad (6.21)$$

A las funciones  $b$  se les conoce como funciones de Laplace. Escribiendo  $z = \exp(i\Theta)$ , tenemos que

$$A = 1 - \left(z + \frac{1}{z}\right) \alpha + \alpha^2 = (1 - \alpha z) \left(1 - \frac{\alpha}{z}\right).$$

Buscaremos un desarrollo de la forma

$$A^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} b_s^k(\alpha) z^k. \quad (6.22)$$

Estas funciones son las que aparecen en (6.21). En efecto, sustituyendo  $z$  por  $1/z$ ,  $A$  no varía, y por consiguiente,

$$b_s^{-k}(\alpha) = b_s^k(\alpha).$$

Así, la fórmula (6.22) se escribe como

$$A^{-s} = \frac{1}{2}b_s^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}b_s^k(z^k + z^{-k}) = \frac{1}{2}b_s^0(\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} b_s^k(\alpha) \cos k\Theta.$$

Al mismo tiempo, se tiene que

$$A^{-s} = (1 - \alpha z)^{-s} \left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)^{-s}.$$

A su vez,

$$(1 - \alpha z)^{-s} = 1 + s\alpha z + \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2 z^2 + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s-p+1)}{p!}\alpha^p z^p + \dots,$$

que puede escribirse introduciendo la función euleriana de segunda especie  $\Gamma$ :

$$(1 - \alpha z)^{-s} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+p)}{\Gamma(s)\Gamma(p+1)} \alpha^p z^p,$$

e igualmente,

$$\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)^{-s} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+q)}{\Gamma(s)\Gamma(q+1)} \alpha^q z^{-q}.$$

$A^{-s}$  se obtiene mediante el producto de los dos desarrollos anteriores. En el producto aparece  $z^{p-q}$ , de modo que conviene poner  $k = p - q$ . El coeficiente de  $z^k$  en  $A^{-s}$  es:

$$\frac{1}{2}b_s^k = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)\Gamma(k+1)}\alpha^k \sum_q \frac{\Gamma(s+q)\Gamma(s+q+k)\Gamma(k+1)}{\Gamma(s)\Gamma(s+k)\Gamma(q+k+1)} \frac{\alpha^{2q}}{\Gamma(q+1)}.$$

De forma explícita, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b_s^k(\alpha) &= \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+k-1)}{k!}\alpha^k \times \left(1 + \frac{s(s+k)}{1 \cdot (k+1)}\alpha^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s(s+1)(s+k)(s+k+1)}{1 \cdot 2 \cdot (k+1)(k+2)}\alpha^4 + \cdots \right) \end{aligned} \quad (6.23)$$

para  $k \neq 0$  y

$$\frac{1}{2}b_s^0(\alpha) = 1 + s^2\alpha^2 + \left(\frac{s(s+1)}{1 \cdot 2}\right)^2 \alpha^4 + \cdots \quad (6.24)$$

### Algunas propiedades de las funciones de Laplace

La ecuación de la definición de las funciones de Laplace se escribe como

$$\left[1 - \alpha \left(z + \frac{1}{z}\right) + \alpha^2\right]^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} b_s^k z^k. \quad (6.25)$$

Calculando la derivada respecto de  $z$  en ambos miembros de la ecuación, tenemos

$$s\alpha \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \left[1 - \alpha \left(z + \frac{1}{z}\right) + \alpha^2\right]^{-s-1} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} k b_s^k z^{k-1}.$$

Si ahora multiplicamos ambos miembros de la ecuación obtenida por

$$z \left[1 - \alpha \left(z + \frac{1}{z}\right) + \alpha^2\right],$$

obtenemos por resultado

$$s\alpha \left(z - \frac{1}{z}\right) \left[1 - \alpha \left(z + \frac{1}{z}\right) + \alpha^2\right]^{-s} = \frac{1}{2} \left[1 - \alpha \left(z + \frac{1}{z}\right) + \alpha^2\right] \sum_{-\infty}^{\infty} k b_s^k z^k.$$

Sustituyendo ahora la ecuación (6.25) en el primer miembro, tenemos

$$s\alpha \left(z - \frac{1}{z}\right) \sum_{-\infty}^{\infty} b_s^k z^k = \left[1 - \alpha \left(z + \frac{1}{z}\right) + \alpha^2\right] \sum_{-\infty}^{\infty} k b_s^k z^k.$$

Igualando los coeficientes de  $z^{k-1}$  en ambos miembros,

$$s\alpha[b_s^{k-2} - b_s^k] = (1 + \alpha^2)(k-1)b_s^{k-1} - \alpha[(k-2)b_s^{k-2} + kb_s^k].$$

De aquí se obtiene la siguiente relación recurrente:

$$b_s^k = \frac{k-1}{k-s} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) b_s^{k-1} - \frac{k+s-2}{k-s} b_s^{k-2}. \quad (6.26)$$

Otra relación recurrente (que relaciona funciones de Laplace para diferentes valores de  $s$ ) se obtiene sustituyendo  $s$  por  $s+1$  en la ecuación (6.25),

$$\left[ 1 - \alpha \left( z + \frac{1}{z} \right) + \alpha^2 \right]^{-s-1} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} b_{s+1}^k z^k,$$

de donde por un procedimiento similar al anterior, se obtiene:

$$kb_s^k = s\alpha[b_{s+1}^{k-1} - b_{s+1}^{k+1}]. \quad (6.27)$$

De las relaciones (6.26) y (6.27), surge una tercera relación,

$$b_{s+1}^k = \frac{(s-k)(1+\alpha^2)b_s^k + 2(k+s-1)\alpha b_s^{k-1}}{s(1-\alpha^2)^2}.$$

Las ecuaciones que emplearemos para el cálculo de las funciones de Laplace constan de (6.26) junto con las ecuaciones para  $k=0$  y  $k=1$  dadas por

$$\frac{1}{2}b_s^0 = 1 + s^2\alpha^2 + \left( \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} \right)^2 \alpha^4 + \left( \frac{s(s+1)(s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)^2 \alpha^6 + \dots, \quad (6.28)$$

$$\frac{1}{2}b_s^1 = \alpha s \left( 1 + \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 + \frac{s(s+1)(s+1)(s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^4 + \dots \right). \quad (6.29)$$

### 6.6.2 Cálculo de los armónicos esféricos mediante las funciones de Laplace

El desarrollo de Laplace

$$(1 - 2\alpha \cos(L_p - L_E) + \alpha^2)^{-s} \approx \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} b_s^j \cos j(L_p - L_E) \quad (6.30)$$

permite obtener de forma sencilla el desarrollo en serie de los armónicos esféricos del planeta.



**Armónico**  $(a_p/r)^3 P_2^0(\sin \beta)$ 

La latitud de los planetas medida desde la eclíptica es muy pequeña, de modo que en buena aproximación consideraremos  $\sin^2 \beta \approx 0$ , con lo cual el armónico esférico de orden cero se aproximará por:

$$\left(\frac{a_p}{r}\right)^3 P_2^0(\sin \beta) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{a_p}{r}\right)^3 \approx \frac{1}{4} \times \alpha_i^3 \times \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times \sum_{-\infty}^{\infty} b_{3/2}^j \cos j(L_p - L_E) \quad (6.31)$$

para los planetas interiores, y

$$\left(\frac{a_p}{r}\right)^3 P_2^0(\sin \beta) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{a_p}{r}\right)^3 \approx \frac{1}{4} \times \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times \sum_{-\infty}^{\infty} b_{3/2}^j \cos j(L_p - L_E) \quad (6.32)$$

para los exteriores. Las longitudes  $L_p$  y  $L_E$  se sustituyen por los desarrollos de la teoría VSOP87 en la forma

$$L_p = L_p + \Delta\lambda_p, \quad L_E = L_E + \Delta\lambda_E,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \cos j(L_p - L_E) &= \cos j(\Delta\lambda_p - \Delta\lambda_E) \cos j(L_p - L_E) + \\ &+ \sin j(\Delta\lambda_p - \Delta\lambda_E) \sin j(L_p - L_E). \end{aligned}$$

**Armónico**  $(a_p/r)^3 P_2^1(\sin \beta) \sin \lambda$ 

Estudiaremos seguidamente el armónico  $(a_p/r)^3 P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h)$  de orden uno. Haremos aquí la aproximación  $P_2^1(\sin \beta) \approx 3 \sin \beta$  (es decir, tomamos  $\cos \beta \approx 1$ ), de modo que

$$\begin{aligned} \sin \beta &\approx 2 \left(\frac{r_p}{r}\right) (q_p \sin L_p - p_p \cos L_p) \approx \\ &\approx 2 \alpha_i (1 - 2\alpha_i \cos(L_p - L_E) + \alpha_i^2)^{1/2} \times (q_p^0 \sin L_p - p_p^0 \cos L_p) \end{aligned}$$

para los planetas interiores y

$$\begin{aligned} \sin \beta &\approx 2 \left(\frac{r_p}{r}\right) (q_p \sin L_p - p_p \cos L_p) \approx \\ &\approx 2 (1 - 2\alpha_o \cos(L_p - L_E) + \alpha_o^2)^{1/2} \times (q_p^0 \sin L_p - p_p^0 \cos L_p) \end{aligned}$$

para los exteriores. Los valores de  $q_p^0$  y  $p_p^0$  se obtienen de la teoría VSOP87 y vienen dados en la tabla 6.15. En cuanto a  $\sin(\lambda - h)$ , se aproxima como

$$\begin{aligned} \sin(\lambda - h) &\approx \frac{r_p \sin(L_p - h) - r_E \sin(L_E - h)}{r} \approx \\ &\approx (\alpha_i \sin(L_p - h) - \sin(L_E - h)) \times (1 - 2\alpha_i \cos(L_p - L_E) - \alpha_i^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

para los planetas interiores y

$$\begin{aligned}\sin(\lambda - h) &\approx \frac{r_p \sin(L_p - h) - r_E \sin(L_E - h)}{r} \\ &\approx (\sin(L_p - h) - \alpha_o \sin(L_E - h)) \times (1 - 2\alpha_o \cos(L_p - L_E) - \alpha_o^2)^{-1/2}\end{aligned}$$

para los exteriores, y en donde  $h = -p_A$ . Con todo esto, podemos expresar los armónicos de orden uno en la forma:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a_p}{r}\right)^3 P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h) \approx 3 \left(\frac{a_p}{r}\right)^3 \sin \beta \sin(\lambda - h) \approx \\ &\approx 6 \alpha_i^4 \times \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times (1 - 2\alpha_i \cos(L_p - L_E) + \alpha_i^2)^{-5/2} (q_p^0 \sin L_p - p_p^0 \cos L_p) \times \\ &\times (\alpha_i \sin(L_p - h) - \sin(L_E - h))\end{aligned}\quad (6.33)$$

para los planetas interiores, y

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a_p}{r}\right)^3 P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h) \approx 3 \left(\frac{a_p}{r}\right)^3 \sin \beta \sin(\lambda - h) \approx \\ &\approx 6 \times \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times (1 - 2\alpha_o \cos(L_p - L_E) + \alpha_o^2)^{-5/2} (q_p^0 \sin L_p - p_p^0 \cos L_p) \times \\ &\times (\sin(L_p - h) - \alpha_o \sin(L_E - h))\end{aligned}\quad (6.34)$$

para los exteriores. También aquí usamos los desarrollos de Laplace para expresar en este caso la función  $(1 - 2\alpha \cos(L_p - L_E) + \alpha^2)^{-5/2}$ , en la forma

$$(1 - 2\alpha \cos(L_p - L_E) + \alpha^2)^{-5/2} \approx \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} b_{5/2}^j \cos j(L_p - L_E).$$

Por consiguiente, los armónicos esféricos de primer orden resultan

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a_p}{r}\right)^3 P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h) \approx 6 \alpha_i^4 \times \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} b_{5/2}^j \cos j(L_p - L_E) \times \\ &\times (q_p^0 \sin L_p - p_p^0 \cos L_p) \times (\alpha_i \sin(L_p - h) - \sin(L_E - h))\end{aligned}\quad (6.35)$$

para los planetas interiores y

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a_p}{r}\right)^3 P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h) \approx 6 \times \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} b_{5/2}^j \cos j(L_p - L_E) \times \\ &\times (q_p^0 \sin L_p - p_p^0 \cos L_p) \times (\sin(L_p - h) - \alpha_o \sin(L_E - h))\end{aligned}\quad (6.36)$$

para los exteriores.

Tabla 6.15: Valores de los parámetros  $q_p^0$  y  $p_p^0$  para algunos planetas.

Planeta	$q_p^0$	$p_p^0$
Venus	0.00682410142	0.02882285775
Júpiter	0.00206561098	0.01118377157
Saturno	0.00206561098	0.01118377157

**Armónico**  $(a_p/r)^3 P_2^2(\sin \beta) \cos 2\lambda$

El armónico  $(a_p/r)^3 \cos(2\lambda - 2h)$  se obtiene de forma análoga. Para los planetas interiores se tiene

$$\left(\frac{a_p}{r}\right)^3 \cos(2\lambda - 2h) \approx \alpha_i^3 \times \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times (1 - 2\alpha_i \cos(L_p - L_E) + \alpha_i^2)^{-5/2} \times \\ \times (\cos(2L_E - 2h) - 2\alpha_i \cos(L_p + L_E - 2h) + \alpha_i^2 \cos(2L_p - 2h)),$$

y para los exteriores:

$$\left(\frac{a_p}{r}\right)^3 \cos(2\lambda - 2h) \approx \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times (1 - 2\alpha_o \cos(L_p - L_E) + \alpha_o^2)^{-5/2} \times \\ \times (\alpha_o^2 \cos(2L_E - 2h) - 2\alpha_o \cos(L_p + L_E - 2h) + \cos(2L_p - 2h)).$$

Usando los desarrollos de Laplace, los armónicos de orden dos quedan:

$$\left(\frac{a_p}{r}\right)^3 P_2^2(\cos \beta) \cos(2\lambda - 2h) \approx 3 \left(\frac{a_p}{r}\right)^3 \cos(2\lambda - 2h) \approx \\ \approx 3 \alpha_i^3 \times \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} b_{5/2}^j \cos j(L_p - L_E)\right) \times \\ \times (\cos(2L_E - 2h) - 2\alpha_i \cos(L_p + L_E - 2h) + \alpha_i^2 \cos(2L_p - 2h)) \quad (6.37)$$

para los planetas interiores, y

$$\left(\frac{a_p}{r}\right)^3 P_2^2(\cos \beta) \cos(2\lambda - 2h) \approx 3 \left(\frac{a_p}{r}\right)^3 \cos(2\lambda - 2h) \approx \\ \approx 3 \times \left(\frac{a_p^0}{r_p}\right)^3 \times \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} b_{5/2}^j \cos j(L_p - L_E)\right) \times \\ \times (\alpha_o^2 \cos(2L_E - 2h) - 2\alpha_o \cos(L_p + L_E - 2h) + \cos(2L_p - 2h)) \quad (6.38)$$

para los exteriores.

### 6.6.3 Armónicos esféricos de Venus

Los armónicos esféricos de Venus vienen dados en las tablas 6.16, 6.17 y 6.18.

Tabla 6.16: Armónico esférico  $(a_{Ve}/r_{Ve})^3 P_2^0(\sin \beta_{Ve})$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 10000$  ( $10^{-7}$  rad). Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$ ( $10^{-7}$ rad)	$A_c$ ( $10^{-7}$ rad)
2	-3	0	0	0	0	0	1454.936	-85528.6648	-75839.2531
1	-2	0	0	0	0	0	-975.378	-106117.9417	-94096.0023
1	-1	0	0	0	0	0	583.921	0.0000	16773368.3543
3	-4	0	0	0	0	0	416.688	-67572.7085	-59917.4997
0	1	0	0	0	0	0	365.256	127461.8600	-113021.9008
2	-2	0	0	0	0	0	291.961	0.0000	13964594.1905
4	-5	0	0	0	0	0	243.165	-52664.7438	-46698.4355
1	0	0	0	0	0	0	224.701	143575.3470	-127309.9155
3	-3	0	0	0	0	0	194.640	0.0000	11255250.0837
5	-6	0	0	0	0	0	171.674	-40640.8107	-36036.6754
2	-1	0	0	0	0	0	162.261	127461.8600	-113021.9008
4	-4	0	0	0	0	0	145.980	0.0000	8892343.1202
6	-7	0	0	0	0	0	132.669	-31125.8510	-27599.6509
3	-2	0	0	0	0	0	126.976	106117.9417	-94096.0023
5	-5	0	0	0	0	0	116.784	0.0000	6930517.9255
7	-8	0	0	0	0	0	108.107	-23696.8507	-21012.2707
4	-3	0	0	0	0	0	104.297	85528.6648	-75839.2531
6	-6	0	0	0	0	0	97.320	0.0000	5348212.2686
8	-9	0	0	0	0	0	91.219	-17954.1253	-15920.1299
5	-4	0	0	0	0	0	88.491	67572.7085	-59917.4997
7	-7	0	0	0	0	0	83.417	0.0000	4096075.1129
9	-10	0	0	0	0	0	78.894	-13548.9796	-12014.0364
6	-5	0	0	0	0	0	76.845	52664.7438	-46698.4355
8	-8	0	0	0	0	0	72.990	0.0000	3118441.6345
10	-11	0	0	0	0	0	69.503	-10190.4958	-9036.0302
7	-6	0	0	0	0	0	67.908	40640.8107	-36036.6754
9	-9	0	0	0	0	0	64.880	0.0000	2362715.7909
11	-12	0	0	0	0	0	62.110	-7642.7242	-6776.8917
8	-7	0	0	0	0	0	60.834	31125.8510	-27599.6509
10	-10	0	0	0	0	0	58.392	0.0000	1783010.9927
9	-8	0	0	0	0	0	55.094	23696.8507	-21012.2707
11	-11	0	0	0	0	0	53.084	0.0000	1341043.6436
10	-9	0	0	0	0	0	50.344	17954.1253	-15920.1299
12	-12	0	0	0	0	0	48.660	0.0000	1005751.6628
11	-10	0	0	0	0	0	46.348	13548.9796	-12014.0364
13	-13	0	0	0	0	0	44.917	0.0000	752475.5788
12	-11	0	0	0	0	0	42.940	10190.4958	-9036.0302
14	-14	0	0	0	0	0	41.709	0.0000	561791.7381
0	0	0	0	0	0	0		-57.5312	9446930.8013

Tabla 6.17: Armónico esférico  $(a_{Ve}/r_{Ve})^3 P_2^1(\sin \beta_{Ve}) \sin \lambda_{Ve}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 10000$  ( $10^{-7}$  rad). Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$ ( $10^{-7}$ rad)	$A_c$ ( $10^{-7}$ rad)
0	0	0	0	0	0	1	-9412504.982	2525108.7430	598098.8217
3	-5	0	0	0	0	1	-2958.279	2742635.3695	-649622.3129
5	-8	0	0	0	0	1	2863.023	-8722.5787	16237.7942
2	-3	0	0	0	0	1	1455.161	-54731.9591	0.0000
2	-3	0	0	0	0	-1	1454.711	6214.8907	-11569.5278
1	-2	0	0	0	0	-1	-975.479	7972.5958	-14841.6398
1	-2	0	0	0	0	1	-975.277	-55055.3370	0.0000
4	-7	0	0	0	0	1	-733.526	-10295.7577	19166.3958
4	-6	0	0	0	0	1	727.524	2417893.4339	-572703.7365
1	-1	0	0	0	0	1	583.958	3007874.5261	712447.0244
1	-1	0	0	0	0	-1	583.885	-2040933.5639	483416.7882
2	-4	0	0	0	0	1	-487.664	3022514.3026	-715914.6109
6	-9	0	0	0	0	1	485.004	-7288.7409	13568.5879
3	-4	0	0	0	0	1	416.707	-51607.4432	0.0000
0	1	0	0	0	0	1	365.271	-10079.9965	-18764.7385
0	1	0	0	0	0	-1	365.242	51357.4760	0.0000
3	-6	0	0	0	0	1	-325.115	-11941.7653	22230.5737
5	-7	0	0	0	0	1	323.930	2084623.0475	-493765.1060
2	-2	0	0	0	0	1	291.970	3224445.9274	763744.2610
2	-2	0	0	0	0	-1	291.952	-1614248.7124	382351.9491
1	-3	0	0	0	0	1	-265.735	3205503.9261	-759257.6471
7	-10	0	0	0	0	1	264.943	-6026.9290	11219.6216
4	-5	0	0	0	0	1	243.171	-46828.6126	0.0000
1	0	0	0	0	0	1	224.706	-12471.3253	-23216.3929
1	0	0	0	0	0	-1	224.695	43114.5405	0.0000
2	-5	0	0	0	0	1	-208.838	-13545.6589	25216.3529
6	-8	0	0	0	0	1	208.349	1766097.3269	-418318.9064
3	-3	0	0	0	0	1	194.644	3205503.9261	759257.6471
3	-3	0	0	0	0	-1	194.636	-1258360.6664	298056.0860
0	2	0	0	0	0	-1	182.625	-3224445.9274	-763744.2610
5	-6	0	0	0	0	1	171.677	-41283.8022	0.0000
2	-1	0	0	0	0	1	162.263	-14855.6793	-27655.0631
2	-1	0	0	0	0	-1	162.258	34847.4927	0.0000
1	-4	0	0	0	0	1	-153.824	-14927.9849	27789.6659
7	-9	0	0	0	0	1	153.558	1475783.6949	-349555.0396
4	-4	0	0	0	0	1	145.983	3022514.3026	715914.6109
4	-4	0	0	0	0	-1	145.978	-970276.7815	229820.3587
1	1	0	0	0	0	-1	139.115	-3007874.5261	-712447.0244
6	-7	0	0	0	0	1	132.671	-35593.3996	0.0000
3	-2	0	0	0	0	1	126.978	-15925.3237	-29646.2938

Tabla 6.17: Armónico esférico  $(a_{V_e}/r_{V_e})^3 P_2^1(\sin \beta_{V_e}) \sin \lambda_{V_e}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_a} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 L_{U_r} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 10000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

3	-2	0	0	0	0	-1	126.975	27562.0111	0.0000
0	3	0	0	0	0	-1	121.751	15831.7833	29472.1607
8	-10	0	0	0	0	1	121.584	1220300.1670	-289041.0529
5	-5	0	0	0	0	1	116.786	2742635.3695	649622.3129
5	-5	0	0	0	0	-1	116.783	-741083.2283	175533.4318
2	0	0	0	0	0	-1	112.349	-2525108.7430	-598098.8217
7	-8	0	0	0	0	1	108.108	-30154.7721	0.0000
4	-3	0	0	0	0	1	104.298	-15831.7833	-29472.1607
4	-3	0	0	0	0	-1	104.295	21485.4598	0.0000
1	2	0	0	0	0	-1	100.745	15925.3237	29646.2938
9	-11	0	0	0	0	1	100.631	1001802.2181	-237287.4934
6	-6	0	0	0	0	1	97.321	2417893.4339	572703.7365
6	-6	0	0	0	0	-1	97.319	-560243.4840	132699.6181
3	-1	0	0	0	0	-1	94.221	-2040933.5639	-483416.7882
8	-9	0	0	0	0	1	91.220	-25197.8607	0.0000
5	-4	0	0	0	0	1	88.492	-14927.9849	-27789.6659
5	-4	0	0	0	0	-1	88.490	16566.6458	0.0000
2	1	0	0	0	0	-1	85.921	14855.6793	27655.0631
10	-12	0	0	0	0	1	85.838	819794.5548	-194177.0456
7	-7	0	0	0	0	1	83.418	2084623.0475	493765.1060
7	-7	0	0	0	0	-1	83.417	-417345.0861	98852.6152
4	-2	0	0	0	0	-1	81.130	-1614248.7124	-382351.9491
9	-10	0	0	0	0	1	78.895	-20835.6584	0.0000
6	-5	0	0	0	0	1	76.846	-13545.6589	-25216.3529
6	-5	0	0	0	0	-1	76.845	12653.3514	0.0000
3	0	0	0	0	0	-1	74.900	12471.3253	23216.3929
11	-13	0	0	0	0	1	74.837	672450.3180	-159276.9995
8	-8	0	0	0	0	1	72.991	1766097.3269	418318.9064
8	-8	0	0	0	0	-1	72.990	-302643.5456	71684.3374
5	-3	0	0	0	0	-1	71.233	-1258360.6664	-298056.0860
10	-11	0	0	0	0	1	69.504	-17104.9643	0.0000
7	-6	0	0	0	0	1	67.909	-11941.7653	-22230.5737
7	-6	0	0	0	0	-1	67.908	9565.6657	0.0000
4	-1	0	0	0	0	-1	66.385	10079.9965	18764.7385
12	-14	0	0	0	0	1	66.335	557635.8873	-132081.9809
9	-9	0	0	0	0	1	64.881	1475783.6949	349555.0396
9	-9	0	0	0	0	-1	64.880	-206982.6125	49026.0297
6	-4	0	0	0	0	-1	63.488	-970276.7815	-229820.3587
3	1	0	0	0	0	-1	62.154	97.6816	-302.1679
11	-12	0	0	0	0	1	62.111	-13997.3229	0.0000
8	-7	0	0	0	0	1	60.834	-10295.7577	-19166.3958
5	-2	0	0	0	0	-1	59.608	7972.5958	14841.6398
13	-15	0	0	0	0	1	59.568	464791.9590	-110090.9107

Tabla 6.17: Armónico esférico  $(a_{Ve}/r_{Ve})^3 P_2^1(\sin \beta_{Ve}) \sin \lambda_{Ve}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 10000$  ( $10^{-7}$  rad). Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

10	-10	0	0	0	0	1	58.392	1220300.1670	289041.0529
10	-10	0	0	0	0	-1	58.392	-121340.1067	28740.6928
7	-5	0	0	0	0	-1	57.262	-741083.2283	-175533.4318
12	-13	0	0	0	0	1	56.139	-11481.7263	0.0000
9	-8	0	0	0	0	1	55.094	-8722.5787	-16237.7942
6	-3	0	0	0	0	-1	54.087	6214.8907	11569.5278
11	-11	0	0	0	0	1	53.084	1001802.2181	237287.4934
11	-11	0	0	0	0	-1	53.083	-36081.7743	8546.3516
8	-6	0	0	0	0	-1	52.148	-560243.4840	-132699.6181
10	-9	0	0	0	0	1	50.344	-7288.7409	-13568.5879
12	-12	0	0	0	0	1	48.660	819794.5548	194177.0456
12	-12	0	0	0	0	-1	48.660	60082.5999	-14231.2031
9	-7	0	0	0	0	-1	47.873	-417345.0861	-98852.6152
11	-10	0	0	0	0	1	46.348	-6026.9290	-11219.6216
13	-13	0	0	0	0	1	44.917	672450.3180	159276.9995
13	-13	0	0	0	0	-1	44.917	181640.2719	-43023.4273
10	-8	0	0	0	0	-1	44.245	-302643.5456	-71684.3374
14	-14	0	0	0	0	1	41.709	557635.8873	132081.9809
14	-14	0	0	0	0	-1	41.708	336155.8592	-79622.0849
11	-9	0	0	0	0	-1	41.129	-206982.6125	-49026.0297
15	-15	0	0	0	0	1	38.928	464791.9590	110090.9107
12	-10	0	0	0	0	-1	38.422	-121340.1067	-28740.6928
13	-11	0	0	0	0	-1	36.050	-36081.7743	-8546.3516
14	-12	0	0	0	0	-1	33.954	60082.5999	14231.2031
15	-13	0	0	0	0	-1	32.088	181640.2719	43023.4273
16	-14	0	0	0	0	-1	30.417	336155.8592	79622.0849

Tabla 6.18: Armónico esférico  $(a_{Ve}/r_{Ve})^3 P_2^2(\sin \beta_{Ve}) \cos 2\lambda_{Ve}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 10000$  ( $10^{-7}$  rad). Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$ ( $10^{-7}$ rad)	$A_c$ ( $10^{-7}$ rad)
3	-5	0	0	0	0	2	-2957.349	0.0000	-49836536.9311
5	-8	0	0	0	0	2	2863.894	294280.2069	260941.6522
2	-3	0	0	0	0	2	1455.386	-330287.1252	292869.4018
1	-2	0	0	0	0	2	-975.176	-246347.0513	218438.7705
4	-7	0	0	0	0	2	-733.469	331789.5116	294201.5852

Tabla 6.18: Armónico esférico  $(a_{V_e}/r_{V_e})^3 P_2^2(\sin \beta_{V_e}) \cos 2\lambda_{V_e}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_a} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 L_{U_r} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 10000$  ( $10^{-7}$  rad). Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

4	-6	0	0	0	0	2	727.580	0.0000	-47677395.1467
2	-4	0	0	0	0	2	-487.638	0.0000	-48904385.4126
6	-9	0	0	0	0	2	485.029	254708.0307	225852.5473
3	-4	0	0	0	0	2	416.725	-371628.3688	329527.1592
0	1	0	0	0	0	-2	365.228	127463.9910	113023.7904
3	-6	0	0	0	0	2	-325.103	362302.9033	321258.1613
5	-7	0	0	0	0	2	323.941	0.0000	-43662064.1720
1	-3	0	0	0	0	2	-265.727	0.0000	-43464366.5828
7	-10	0	0	0	0	2	264.950	216237.3645	191740.1641
4	-5	0	0	0	0	2	243.178	-378711.2038	335807.5906
1	0	0	0	0	0	-2	224.690	78245.9078	69381.5486
2	-5	0	0	0	0	2	-208.834	378711.2038	335807.5906
6	-8	0	0	0	0	2	208.353	0.0000	-38726070.4053
0	2	0	0	0	0	-2	182.621	0.0000	-32418269.1774
8	-11	0	0	0	0	2	182.254	180712.3201	160239.6977
5	-6	0	0	0	0	2	171.680	-362302.9033	321258.1613
2	-1	0	0	0	0	-2	162.255	50355.9207	44651.1754
1	-4	0	0	0	0	2	-153.821	371628.3688	329527.1592
7	-9	0	0	0	0	2	153.560	0.0000	-33518583.7666
1	1	0	0	0	0	-2	139.113	0.0000	-16773770.9758
9	-12	0	0	0	0	2	138.900	149049.0964	132163.5522
6	-7	0	0	0	0	2	132.673	-331789.5116	294201.5852
3	-2	0	0	0	0	-2	126.973	33119.5743	29367.5084
0	3	0	0	0	0	-2	121.749	-330287.1252	292869.4018
8	-10	0	0	0	0	2	121.586	0.0000	-28456029.6793
2	0	0	0	0	0	-2	112.348	0.0000	-10297046.6941
10	-13	0	0	0	0	2	112.209	121545.9600	107776.2040
7	-8	0	0	0	0	2	108.109	-294280.2069	260941.6522
4	-3	0	0	0	0	-2	104.294	21933.2475	19448.4634
1	2	0	0	0	0	-2	100.744	-246347.0513	218438.7705
9	-11	0	0	0	0	2	100.632	0.0000	-23781091.7437
3	-1	0	0	0	0	-2	94.220	0.0000	-6627028.8094
11	-14	0	0	0	0	2	94.122	98113.2562	86998.1554
8	-9	0	0	0	0	2	91.220	-254708.0307	225852.5473
5	-4	0	0	0	0	-2	88.489	14337.6526	12713.3619
2	1	0	0	0	0	-2	85.920	-127463.9910	113023.7904
10	-12	0	0	0	0	2	85.839	0.0000	-19614351.7803
4	-2	0	0	0	0	-2	81.129	0.0000	-4358553.8307
12	-15	0	0	0	0	2	81.056	80732.5171	71586.4536
9	-10	0	0	0	0	2	78.895	-216237.3645	191740.1641
3	0	0	0	0	0	-2	74.899	-78245.9078	69381.5486
11	-13	0	0	0	0	2	74.837	0.0000	-15995431.8719
5	-3	0	0	0	0	-2	71.232	0.0000	-2886408.0547



Tabla 6.18: Armónico esférico  $(a_{Ve}/r_{Ve})^3 P_2^2(\sin \beta_{Ve}) \cos 2\lambda_{Ve}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 10000$  ( $10^{-7}$  rad). Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

13	-16	0	0	0	0	2	71.176	169425.8388	150231.8446
10	-11	0	0	0	0	2	69.504	-180712.3201	160239.6977
4	-1	0	0	0	0	-2	66.384	-50355.9207	44651.1754
12	-14	0	0	0	0	2	66.335	0.0000	-12910721.7416
6	-4	0	0	0	0	-2	63.487	0.0000	-1886822.6498
11	-12	0	0	0	0	2	62.111	-149049.0964	132163.5522
5	-2	0	0	0	0	-2	59.607	-33119.5743	29367.5084
13	-15	0	0	0	0	2	59.568	0.0000	-10624217.6131
7	-5	0	0	0	0	-2	57.262	0.0000	-1163618.6117
12	-13	0	0	0	0	2	56.140	-121545.9600	107776.2040
6	-3	0	0	0	0	-2	54.086	-21933.2475	19448.4634
14	-16	0	0	0	0	2	54.054	0.0000	-22296039.1087
8	-6	0	0	0	0	-2	52.148	0.0000	-582866.0396
13	-14	0	0	0	0	2	51.216	-98113.2562	86998.1554
10	-9	0	0	0	0	-2	50.343	-10337.3361	-9166.2351
7	-4	0	0	0	0	-2	49.501	-14337.6526	12713.3619
9	-7	0	0	0	0	-2	47.872	0.0000	-38373.5367
14	-15	0	0	0	0	2	47.086	-80732.5171	71586.4536
11	-10	0	0	0	0	-2	46.347	-18837.0756	-16703.0521
10	-8	0	0	0	0	-2	44.245	0.0000	571007.2675
15	-16	0	0	0	0	2	43.572	-169425.8388	150231.8446
12	-11	0	0	0	0	-2	42.939	-31419.1423	-27859.7157
11	-9	0	0	0	0	-2	41.129	0.0000	1360401.8409
13	-12	0	0	0	0	-2	39.998	-50368.8328	-44662.6248
12	-10	0	0	0	0	-2	38.422	0.0000	2478948.2607
14	-13	0	0	0	0	-2	37.434	-74648.8307	-66191.9788
13	-11	0	0	0	0	-2	36.050	0.0000	4133985.5980
15	-14	0	0	0	0	-2	35.179	88624.3308	78584.2159
12	-9	0	0	0	0	-2	34.765	10337.3361	-9166.2351
14	-12	0	0	0	0	-2	33.954	0.0000	6628762.7754
13	-10	0	0	0	0	-2	32.812	18837.0756	-16703.0521
15	-13	0	0	0	0	-2	32.088	0.0000	9823531.3758
14	-11	0	0	0	0	-2	31.066	31419.1423	-27859.7157
16	-14	0	0	0	0	-2	30.417	0.0000	-11662847.6845
15	-12	0	0	0	0	-2	29.497	50368.8328	-44662.6248
16	-13	0	0	0	0	-2	28.078	74648.8307	-66191.9788
17	-14	0	0	0	0	-2	26.790	-88624.3308	78584.2159

### 6.6.4 Armónicos esféricos de Júpiter

Los armónicos esféricos de Júpiter vienen dados en las tablas 6.19, 6.20 y 6.21.

Tabla 6.19: Armónico esférico  $(a_{Ju}/r_{Ju})^3 P_2^0(\sin \beta_{Ju})$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 1000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s (10^{-7} \text{ rad})$	$A_c (10^{-7} \text{ rad})$
0	0	0	2	-3	0	0	5470.840	2343.0641	3.2865
0	0	0	3	-5	0	0	4391.566	-5965.6923	-10.5944
0	0	0	1	0	0	0	4332.589	196810.2590	773553.0077
0	0	0	2	0	0	0	2166.295	27733.6723	62147.7800
0	0	0	3	0	0	0	1444.196	3082.4296	5406.1718
0	1	0	-4	0	0	0	551.095	-875.5728	1535.6384
0	1	0	-3	0	0	0	488.908	-7877.8281	17653.2528
0	1	0	-2	0	0	0	439.332	-55904.5111	219729.9210
0	1	0	-4	5	0	0	438.734	1694.5718	-3.0094
0	1	0	-1	0	0	0	398.884	0.0000	3112621.8553
0	1	0	2	-5	0	0	365.670	-1694.5718	-3.0094
0	1	0	0	0	0	0	365.256	55904.5111	219729.9210
0	1	0	1	0	0	0	336.858	7877.8281	17653.2528
0	1	0	2	0	0	0	312.557	875.5728	1535.6384
0	2	0	-4	0	0	0	219.666	-1881.9318	4217.1798
0	2	0	-3	0	0	0	209.066	-13355.0103	52491.2086
0	2	0	-2	0	0	0	199.442	0.0000	743573.2124
0	2	0	-1	0	0	0	190.665	13355.0103	52491.2086
0	2	0	0	0	0	0	182.628	1881.9318	4217.1798
0	3	0	-4	0	0	0	137.171	-2984.6072	11730.8511
0	3	0	-3	0	0	0	132.961	0.0000	166175.3820
0	3	0	-2	0	0	0	129.002	2984.6072	11730.8511
0	4	0	-5	0	0	0	102.070	-643.7867	2530.3720
0	4	0	-4	0	0	0	99.721	0.0000	35844.4184
0	4	0	-3	0	0	0	97.477	643.7867	2530.3720
0	5	0	-5	0	0	0	79.777	0.0000	7563.4590
0	6	0	-6	0	0	0	66.481	0.0000	1572.1922
0	0	0	0	0	0	0		0.0000	5478948.8543



Tabla 6.20: Armónico esférico  $(a_{J_u}/r_{J_u})^3 P_2^1(\sin \beta_{J_u}) \sin \lambda_{J_u}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{s_i} \sin \Phi_i + A_{c_i} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_a} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 L_{U_r} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{s_i}, A_{c_i}\} \geq 1000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

0	4	0	-6	0	0	1	104.534	-4748.6494	623.7373
0	4	0	-4	0	0	1	99.722	-4667.7163	-1072.9135
0	4	0	-4	0	0	-1	99.720	4086.8674	-4296.6092
0	4	0	-2	0	0	-1	95.332	5329.4983	-2599.9584
0	5	0	-7	0	0	1	82.828	-1179.3671	157.0338
0	5	0	-5	0	0	1	79.777	-1160.0078	-264.4772
0	5	0	-5	0	0	-1	79.776	1006.8031	-1114.7592
0	5	0	-3	0	0	-1	76.943	1332.5718	-693.2481

Tabla 6.21: Armónico esférico  $(a_{J_u}/r_{J_u})^3 P_2^2(\sin \beta_{J_u}) \cos 2\lambda_{J_u}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{s_i} \sin \Phi_i + A_{c_i} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_a} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 L_{U_r} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{s_i}, A_{c_i}\} \geq 1000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

$L_{V_e}$	$L_E$	$L_{M_a}$	$L_{J_u}$	$L_{S_a}$	$L_{U_r}$	$h$	$P$ (días)	$A_s (10^{-7} \text{ rad})$	$A_c (10^{-7} \text{ rad})$
0	0	0	0	0	0	2	-4706252.491	-80175.8219	-179664.2468
0	0	0	2	-5	0	2	-301917.969	2785.1484	-407.9662
0	0	0	1	-3	0	2	-20732.238	-1067.5865	160.0767
0	0	0	1	-4	0	2	-7083.280	1940.5002	-15.8826
0	0	0	3	-5	0	-2	4387.472	2775.6216	50.6203
0	0	0	1	0	0	2	4336.582	-8911.0566	-15628.8091
0	0	0	1	0	0	-2	4328.604	568962.6716	-2236279.6942
0	0	0	1	-5	0	2	-4271.295	17246.3378	30.6274
0	0	0	0	3	0	-2	3583.678	6773.6104	-9.5009
0	0	0	4	-5	0	-2	2179.929	1343.0673	350.7510
0	0	0	2	0	0	2	2167.292	-924.1951	-1291.4678
0	0	0	2	0	0	-2	2165.298	0.0000	-31678403.2810
0	0	0	0	5	0	-2	2150.862	-1343.0673	350.7510
0	0	0	4	-3	0	-2	1551.308	-6773.6104	-9.5009
0	0	0	5	-5	0	-2	1450.243	17246.3378	30.6274
0	0	0	3	0	0	-2	1443.753	-568962.6716	-2236279.6942
0	0	0	1	5	0	-2	1437.321	-2775.6216	50.6203
0	0	0	5	-4	0	-2	1277.983	1940.5002	-15.8826
0	0	0	5	-3	0	-2	1142.301	-1067.5865	160.0767
0	0	0	6	-5	0	-2	1086.545	2785.1484	-407.9662
0	0	0	4	0	0	-2	1082.898	-80175.8219	-179664.2468
0	0	0	5	0	0	-2	866.358	-8911.0566	-15628.8091
0	1	0	-6	0	0	2	739.242	4217.2195	-7396.4425
0	0	0	6	0	0	-2	721.987	-924.1951	-1291.4678
0	1	0	-5	0	0	2	631.494	37943.7648	-85027.3532

Tabla 6.21: Armónico esférico  $(a_{Ju}/r_{Ju})^3 P_2^2(\sin \beta_{Ju}) \cos 2\lambda_{Ju}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 1000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

0	1	0	-7	5	0	2	630.260	-1318.0908	-193.0729
0	1	0	-2	-5	0	2	552.103	1313.5822	23.9564
0	1	0	-4	0	0	2	551.160	269265.5380	-1058334.9047
0	1	0	-6	5	0	2	550.220	-8161.9492	14.4946
0	1	0	-5	3	0	2	536.948	3205.6582	-4.4964
0	1	0	-3	0	0	2	488.958	0.0000	-14992024.4799
0	1	0	-1	-3	0	2	448.843	-3205.6582	-4.4964
0	1	0	0	-5	0	2	439.972	8161.9492	14.4946
0	1	0	-2	0	0	2	439.373	-269265.5380	-1058334.9047
0	1	0	-2	0	0	-2	439.291	875.5728	-1535.6384
0	1	0	-4	5	0	2	438.775	-1313.5822	23.9564
0	1	0	1	-5	0	2	399.412	1318.0908	-193.0729
0	1	0	-1	0	0	2	398.918	-37943.7648	-85027.3532
0	1	0	-1	0	0	-2	398.850	7877.8281	-17653.2528
0	1	0	0	0	0	2	365.285	-4217.2195	-7396.4425
0	1	0	0	0	0	-2	365.228	55904.5111	-219729.9210
0	1	0	-2	5	0	-2	364.815	-1694.5718	3.0094
0	1	0	1	0	0	-2	336.834	0.0000	-3112621.8553
0	1	0	4	-5	0	-2	312.839	1694.5718	3.0094
0	1	0	2	0	0	-2	312.536	-55904.5111	-219729.9210
0	1	0	3	0	0	-2	291.508	-7877.8281	-17653.2528
0	1	0	4	0	0	-2	273.131	-875.5728	-1535.6384
0	2	0	-7	0	0	2	259.085	1410.3053	-2473.4881
0	2	0	-6	0	0	2	244.466	12688.9988	-28434.4999
0	2	0	-5	0	0	2	231.409	90046.6807	-353924.0332
0	2	0	-7	5	0	2	231.243	-2729.4857	4.8472
0	2	0	-6	3	0	2	228.866	1072.0231	-1.5037
0	2	0	-4	0	0	2	219.676	0.0000	-5013571.5515
0	2	0	-2	-3	0	2	211.196	-1072.0231	-1.5037
0	2	0	-1	-5	0	2	209.211	2729.4857	4.8472
0	2	0	-3	0	0	2	209.075	-90046.6807	-353924.0332
0	2	0	-2	0	0	2	199.450	-12688.9988	-28434.4999
0	2	0	-2	0	0	-2	199.434	1143.2632	-2561.9135
0	2	0	-1	0	0	2	190.673	-1410.3053	-2473.4881
0	2	0	-1	0	0	-2	190.657	8113.0952	-31888.1202
0	2	0	0	0	0	-2	182.621	0.0000	-451716.6326
0	2	0	1	0	0	-2	175.235	-8113.0952	-31888.1202
0	2	0	2	0	0	-2	168.423	-1143.2632	-2561.9135
0	3	0	-7	0	0	2	151.572	3645.8539	-8169.9142
0	3	0	-6	0	0	2	146.448	25872.5724	-101690.8686
0	3	0	-5	0	0	2	141.660	0.0000	-1440519.4280
0	3	0	-4	0	0	2	137.175	-25872.5724	-101690.8686
0	3	0	-3	0	0	2	132.965	-3645.8539	-8169.9142
0	3	0	-2	0	0	-2	128.999	1303.1959	-5122.1470

Tabla 6.21: Armónico esférico  $(a_{J_u}/r_{J_u})^3 P_2^2(\sin \beta_{J_u}) \cos 2\lambda_{J_u}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 1000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

0	3	0	-1	0	0	-2	125.269	0.0000	-72558.6508
0	3	0	0	0	0	-2	121.749	-1303.1959	-5122.1470
0	4	0	-8	0	0	2	109.835	961.1618	-2153.8464
0	4	0	-7	0	0	2	107.120	6820.8240	-26808.9121
0	4	0	-6	0	0	2	104.535	0.0000	-379766.2386
0	4	0	-5	0	0	2	102.073	-6820.8240	-26808.9121
0	4	0	-4	0	0	2	99.723	-961.1618	-2153.8464
0	4	0	-2	0	0	-2	95.331	0.0000	-12218.8432
0	5	0	-8	0	0	2	84.443	1700.9125	-6685.3524
0	5	0	-7	0	0	2	82.828	0.0000	-94702.5059
0	5	0	-6	0	0	2	81.275	-1700.9125	-6685.3524
0	5	0	-3	0	0	-2	76.942	0.0000	-2114.7967
0	6	0	-9	0	0	2	69.690	407.9550	-1603.4469
0	6	0	-8	0	0	2	68.586	0.0000	-22713.9026
0	6	0	-7	0	0	2	67.518	-407.9550	-1603.4469
0	7	0	-9	0	0	2	58.524	0.0000	-5293.0624
0	8	0	-10	0	0	2	51.036	0.0000	-1206.3803
0	14	0	-16	0	0	2	28.872	0.0000	1785.8295
0	14	0	-12	0	0	-2	28.122	0.0000	1671.4599

### 6.6.5 Armónicos esféricos de Saturno

Los armónicos esféricos de Saturno vienen dados en las tablas 6.22, 6.23 y 6.24.

Tabla 6.22: Armónico esférico  $(a_{S_a}/r_{S_a})^3 P_2^0(\sin \beta_{S_a})$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 1000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s (10^{-7} \text{ rad})$	$A_c (10^{-7} \text{ rad})$
0	0	0	2	-5	0	0	-322614.503	176.6311	2487.9649
0	0	0	1	-2	0	0	22260.856	-1051.8363	241.9411
0	0	0	1	-3	0	0	-20823.973	-1677.8283	-108.8357
0	0	0	2	-4	0	0	11130.428	28484.9596	88.4136
0	0	0	0	1	0	0	10759.227	841740.0922	-252.8528
0	0	0	2	-6	0	0	-10411.986	5626.8144	10.8198
0	0	0	1	-1	0	0	7253.453	1493.2298	108.7653
0	0	0	2	-3	0	0	5470.840	970.4818	-3133.9682
0	0	0	0	2	0	0	5379.614	-2359.3428	-46424.6815

Tabla 6.22: Armónico esférico  $(a_{S_a}/r_{S_a})^3 P_2^0(\sin \beta_{S_a})$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{s_i} \sin \Phi_i + A_{c_i} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_a} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 L_{U_r} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{s_i}, A_{c_i}\} \geq 1000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

0	0	0	1	0	0	0	4332.589	7.0398	-22241.5589
0	0	0	0	3	0	0	3586.409	-3100.2064	268.1486
0	0	0	1	1	0	0	3088.781	-2444.7248	-0.1626
0	0	0	2	-1	0	0	2712.422	1843.5624	23.5346
0	0	0	2	0	0	0	2166.295	1.5862	-16846.1594
0	0	0	2	1	0	0	1803.228	-1846.9750	0.5856
0	1	0	-2	-1	0	0	458.034	-0.2480	-2633.4261
0	1	0	-1	-1	0	0	414.241	-1.1005	-3476.8459
0	1	0	0	-3	0	0	406.674	368.8173	-7257.2010
0	1	0	0	-2	0	0	391.862	-131582.5306	-39.5265
0	1	0	-2	3	0	0	391.387	-4452.8271	13.8210
0	1	0	0	-1	0	0	378.092	0.0000	1595840.4002
0	1	0	2	-5	0	0	365.670	4452.8271	13.8210
0	1	0	0	0	0	0	365.256	131582.5306	-39.5265
0	1	0	0	1	0	0	353.264	-368.8173	-7257.2010
0	1	0	1	-1	0	0	347.745	1.1005	-3476.8459
0	1	0	2	-1	0	0	321.908	0.2480	-2633.4261
0	2	0	0	-3	0	0	192.427	-17187.9501	-5.1631
0	2	0	0	-2	0	0	189.046	0.0000	208456.4339
0	2	0	0	-1	0	0	185.782	17187.9501	-5.1631
0	3	0	0	-4	0	0	127.524	-2096.9335	-0.6299
0	3	0	0	-3	0	0	126.031	0.0000	25431.7280
0	3	0	0	-2	0	0	124.571	2096.9335	-0.6299
0	4	0	0	-4	0	0	94.523	0.0000	2992.6889
0	13	0	0	-13	0	0	29.084	0.0000	3239.2913
0	14	0	0	-15	0	0	27.075	-2654.6210	-0.7974
0	14	0	0	-14	0	0	27.007	0.0000	32195.3947
0	14	0	0	-13	0	0	26.939	2654.6210	-0.7974
0	0	0	0	0	0	0		0.0000	5104335.7835

Tabla 6.23: Armónico esférico  $(a_{S_a}/r_{S_a})^3 P_2^1(\sin \beta_{S_a}) \sin \lambda_{S_a}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{s_i} \sin \Phi_i + A_{c_i} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_a} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 L_{U_r} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{s_i}, A_{c_i}\} \geq 1000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

$L_{V_e}$	$L_E$	$L_{M_a}$	$L_{J_u}$	$L_{S_a}$	$L_{U_r}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$ ( $10^{-7}$ rad)	$A_c$ ( $10^{-7}$ rad)
0	0	0	0	0	0	1	-9412504.982	-346626.2373	-64683.5268
0	0	0	2	-4	0	-1	11117.282	-140.6127	-1163.9647
0	0	0	0	1	0	1	10771.540	-5322.6818	28607.4014
0	0	0	0	1	0	-1	10746.943	-10622.5085	0.0000

Tabla 6.23: Armónico esférico  $(a_{S\alpha}/r_{S\alpha})^3 P_2^1(\sin \beta_{S\alpha}) \sin \lambda_{S\alpha}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{S\alpha} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Unicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 1000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

0	0	0	2	-6	0	1	-10400.482	140.6127	1163.9647
0	0	0	0	2	0	1	5382.690	1592.1807	215.9598
0	0	0	0	2	0	-1	5376.541	346626.2373	64683.5268
0	0	0	0	3	0	-1	3585.043	5322.6818	-28607.4014
0	0	0	0	4	0	-1	2689.038	-1592.1807	-215.9598
0	1	0	0	-4	0	1	422.668	-1375.4630	-7392.5936
0	1	0	0	-3	0	1	406.691	-89573.5638	16715.2206
0	1	0	0	-2	0	1	391.879	2745.0200	0.0000
0	1	0	0	-2	0	-1	391.846	829.8108	4459.9192
0	1	0	0	-1	0	1	378.107	-89573.5638	-16715.2206
0	1	0	0	-1	0	-1	378.077	54039.3369	-10084.2190
0	1	0	0	0	0	1	365.271	-1375.4630	7392.5936
0	1	0	0	0	0	-1	365.242	-1656.0585	0.0000
0	1	0	0	1	0	-1	353.250	54039.3369	10084.2190
0	1	0	0	2	0	-1	342.021	829.8108	-4459.9192
0	2	0	0	-5	0	1	199.570	-250.8471	-1348.2080
0	2	0	0	-4	0	1	195.935	-16335.7820	3048.4017
0	2	0	0	-2	0	1	189.050	-16335.7820	-3048.4017
0	2	0	0	-2	0	-1	189.042	7052.4750	-1316.0543
0	2	0	0	-1	0	1	185.785	-250.8471	1348.2080
0	2	0	0	0	0	-1	182.625	7052.4750	1316.0543
0	3	0	0	-5	0	1	129.056	-2558.8594	477.5058
0	3	0	0	-3	0	1	126.032	-2558.8594	-477.5058
0	13	0	0	-13	0	-1	29.084	-1199.0437	223.7522
0	13	0	0	-11	0	-1	28.928	-1199.0437	-223.7522
0	14	0	0	-17	0	1	27.212	200.8781	1079.6437
0	14	0	0	-16	0	1	27.143	13081.6789	-2441.1572
0	14	0	0	-15	0	-1	27.074	-198.9327	-1069.1882
0	14	0	0	-14	0	1	27.007	13081.6789	2441.1572
0	14	0	0	-14	0	-1	27.006	-12954.9932	2417.5165
0	14	0	0	-13	0	1	26.939	200.8781	-1079.6437
0	14	0	0	-12	0	-1	26.872	-12954.9932	-2417.5165
0	14	0	0	-11	0	-1	26.805	-198.9327	1069.1882
0	15	0	0	-15	0	-1	25.206	1368.9142	-255.4515
0	15	0	0	-13	0	-1	25.089	1368.9142	255.4515



Tabla 6.24: Armónico esférico  $(a_{Sa}/r_{Sa})^3 P_2^2(\sin \beta_{Sa}) \cos 2\lambda_{Sa}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 1000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$ ( $10^{-7}$ rad)	$A_c$ ( $10^{-7}$ rad)
0	0	0	0	0	0	2	-4706252.491	7000.8396	137755.2049
0	0	0	2	-5	0	-2	-346357.367	0.0000	-1855.4380
0	0	0	2	-5	0	2	-301917.969	-2879.6949	9299.3729
0	0	0	1	-2	0	2	22366.652	-20.8892	65997.0173
0	0	0	1	-3	0	2	-20732.238	-4430.8366	-322.7375
0	0	0	2	-4	0	-2	11104.166	-16696.3551	-32.1055
0	0	0	0	1	0	2	10783.881	9199.1922	-795.6730
0	0	0	0	1	0	-2	10734.686	2497681.7326	750.2860
0	0	0	2	-6	0	2	-10389.002	-84522.9590	-262.3481
0	0	0	1	-1	0	2	7264.649	7254.1923	0.0000
0	0	0	1	-1	0	-2	7242.291	4978.5926	322.9463
0	0	0	1	-4	0	2	-7083.280	3121.0967	-717.9080
0	0	0	2	-3	0	2	5477.207	-5470.3730	-69.8337
0	0	0	2	-3	0	-2	5464.488	-524.1145	-7382.4979
0	0	0	0	2	0	2	5385.770	-239.2192	-576.9257
0	0	0	0	2	0	-2	5373.471	0.0000	-30292025.8283
0	0	0	2	-7	0	2	-5285.437	-524.1145	-7382.4979
0	0	0	1	0	0	2	4336.582	-13.3726	-498.3082
0	0	0	1	0	0	-2	4328.604	3121.0967	-717.9080
0	0	0	1	-5	0	2	-4271.295	4978.5926	322.9463
0	0	0	2	-2	0	2	3629.523	-4.7067	49987.3359
0	0	0	2	-2	0	-2	3623.934	-84522.9590	-262.3481
0	0	0	0	3	0	-2	3583.678	-2497681.7326	750.2860
0	0	0	2	-8	0	2	-3544.307	-16696.3551	-32.1055
0	0	0	1	1	0	-2	3086.755	-4430.8366	-322.7375
0	0	0	2	-1	0	2	2713.986	5480.4991	0.0000
0	0	0	2	-1	0	-2	2710.859	-2879.6949	9299.3729
0	0	0	0	4	0	-2	2688.270	7000.8396	137755.2049
0	0	0	2	-9	0	2	-2666.055	0.0000	-1855.4380
0	0	0	1	2	0	-2	2398.609	-20.8892	65997.0173
0	0	0	0	5	0	-2	2150.862	9199.1922	-795.6730
0	0	0	1	3	0	-2	1961.354	7254.1923	0.0000
0	0	0	2	1	0	-2	1802.537	-5470.3730	-69.8337
0	0	0	2	2	0	-2	1543.884	-4.7067	49987.3359
0	0	0	2	3	0	-2	1350.146	5480.4991	0.0000
0	1	0	-2	-4	0	2	525.155	-1427.8283	0.0000
0	1	0	-2	-3	0	2	500.715	0.0000	13023.1445
0	1	0	-2	-2	0	2	478.449	1425.1901	-18.1937
0	1	0	-1	-4	0	2	468.382	-1889.9266	0.0000
0	1	0	0	-6	0	2	458.730	-2396.6552	-207.2958
0	1	0	-1	-3	0	2	448.843	5.4422	17194.1288

Tabla 6.24: Armónico esférico  $(a_{S_a}/r_{S_a})^3 P_2^2(\sin \beta_{S_a}) \cos 2\lambda_{S_a}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_a} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 L_{U_r} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 1000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

0	1	0	0	-5	0	2	439.972	-1823.9209	35889.2088
0	1	0	-2	0	0	2	439.373	750.2437	2422.7552
0	1	0	-1	-2	0	2	430.868	1154.3609	-84.0824
0	1	0	2	-9	0	2	423.242	-4349.8826	-8.3644
0	1	0	0	-4	0	2	422.687	650718.2160	195.4712
0	1	0	-2	1	0	2	422.134	22020.6716	-68.3493
0	1	0	-2	1	0	-2	422.058	0.0000	2633.4261
0	1	0	1	-6	0	2	414.811	1297.0671	84.1368
0	1	0	2	-8	0	2	407.222	-136.5470	-1923.3539
0	1	0	0	-3	0	2	406.709	0.0000	-7891947.4597
0	1	0	-2	2	0	2	406.197	136.5470	-1923.3539
0	1	0	-1	0	0	2	398.918	-1297.0671	84.1368
0	1	0	2	-7	0	2	392.372	-22020.6716	-68.3493
0	1	0	0	-2	0	2	391.895	-650718.2160	195.4712
0	1	0	-2	3	0	2	391.420	4349.8826	-8.3644
0	1	0	1	-4	0	2	385.115	-1154.3609	-84.0824
0	1	0	-1	1	0	-2	384.593	0.0000	3476.8459
0	1	0	2	-6	0	2	378.566	-750.2437	2422.7552
0	1	0	0	-1	0	2	378.122	1823.9209	35889.2088
0	1	0	0	-1	0	-2	378.062	-368.8173	7257.2010
0	1	0	1	-3	0	2	371.807	-5.4422	17194.1288
0	1	0	0	0	0	2	365.285	2396.6552	-207.2958
0	1	0	0	0	0	-2	365.228	131582.5306	39.5265
0	1	0	-2	5	0	-2	364.815	4452.8271	-13.8210
0	1	0	1	-2	0	2	359.387	1889.9266	0.0000
0	1	0	2	-4	0	2	353.678	-1425.1901	-18.1937
0	1	0	0	1	0	-2	353.237	0.0000	-1595840.4002
0	1	0	2	-3	0	2	342.421	0.0000	13023.1445
0	1	0	2	-3	0	-2	342.372	-4452.8271	-13.8210
0	1	0	0	2	0	-2	342.009	-131582.5306	39.5265
0	1	0	2	-2	0	2	331.860	1427.8283	0.0000
0	1	0	0	3	0	-2	331.472	368.8173	7257.2010
0	1	0	1	1	0	-2	326.609	0.0000	3476.8459
0	1	0	2	1	0	-2	303.713	0.0000	2633.4261
0	2	0	-2	-4	0	2	215.424	0.0000	2381.5870
0	2	0	-1	-4	0	2	205.220	0.0000	3144.3491
0	2	0	0	-6	0	2	203.346	-333.5467	6563.1824
0	2	0	0	-5	0	2	199.574	118999.0662	35.7465
0	2	0	-2	0	0	2	199.450	4026.9955	-12.4993
0	2	0	0	-4	0	2	195.939	0.0000	-1443227.4292
0	2	0	2	-8	0	2	192.550	-4026.9955	-12.4993
0	2	0	0	-3	0	2	192.435	-118999.0662	35.7465
0	2	0	0	-2	0	2	189.054	333.5467	6563.1824
0	2	0	1	-4	0	2	187.462	0.0000	3144.3491

Tabla 6.24: Armónico esférico  $(a_{Sa}/r_{Sa})^3 P_2^2(\sin \beta_{Sa}) \cos 2\lambda_{Sa}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 1000 (10^{-7} \text{ rad})$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

0	2	0	0	-1	0	-2	185.774	10350.5940	3.1092
0	2	0	0	0	0	-2	182.621	0.0000	-125532.5911
0	2	0	2	-4	0	2	179.687	0.0000	2381.5870
0	2	0	0	1	0	-2	179.573	-10350.5940	3.1092
0	3	0	0	-7	0	2	132.230	-52.3191	1029.4806
0	3	0	0	-6	0	2	130.624	18665.8284	5.6071
0	3	0	0	-5	0	2	129.058	0.0000	-226380.2258
0	3	0	0	-4	0	2	127.528	-18665.8284	5.6071
0	3	0	0	-3	0	2	126.034	52.3191	1029.4806
0	3	0	0	-1	0	-2	123.142	0.0000	-10959.3573
0	4	0	0	-7	0	2	97.084	2684.6179	0.0000
0	4	0	0	-6	0	2	96.215	0.0000	-32559.1987
0	4	0	0	-5	0	2	95.363	-2684.6179	0.0000
0	4	0	0	-2	0	-2	92.889	0.0000	-1004.1635
0	5	0	0	-7	0	2	76.698	0.0000	-4428.0206
0	12	0	0	-10	0	-2	31.324	0.0000	9766.0876
0	13	0	0	-16	0	2	29.322	11310.2976	3.3975
0	13	0	0	-15	0	2	29.242	0.0000	-137171.9310
0	13	0	0	-14	0	2	29.163	-11310.2976	3.3975
0	13	0	0	-12	0	-2	29.005	-8795.0015	-2.6417
0	13	0	0	-11	0	-2	28.927	0.0000	106666.2770
0	13	0	0	-10	0	-2	28.850	8795.0015	-2.6417
0	14	0	-2	-16	0	2	27.487	0.0000	-1938.9550
0	14	0	-1	-16	0	2	27.314	0.0000	-2559.9534
0	14	0	0	-18	0	2	27.281	271.5550	-5343.3763
0	14	0	2	-22	0	2	27.214	647.6337	0.0000
0	14	0	0	-17	0	2	27.212	-96882.3901	-29.1028
0	14	0	-2	-12	0	2	27.209	-3278.5547	10.1762
0	14	0	-2	-12	0	-2	27.209	0.0000	-1901.5804
0	14	0	0	-16	0	2	27.143	0.0000	1174995.1260
0	14	0	2	-20	0	2	27.077	3278.5547	10.1762
0	14	0	0	-15	0	2	27.075	96882.3901	-29.1028
0	14	0	-1	-12	0	-2	27.039	0.0000	-2510.6086
0	14	0	0	-14	0	2	27.007	-271.5550	-5343.3763
0	14	0	0	-14	0	-2	27.006	266.3206	-5240.3792
0	14	0	1	-16	0	2	26.974	0.0000	-2559.9534
0	14	0	0	-13	0	-2	26.939	-95014.9180	-28.5418
0	14	0	-2	-8	0	-2	26.937	-3215.3584	9.9800
0	14	0	0	-12	0	-2	26.872	0.0000	1152346.3188
0	14	0	2	-16	0	2	26.807	0.0000	-1938.9550
0	14	0	2	-16	0	-2	26.807	3215.3584	9.9800
0	14	0	0	-11	0	-2	26.805	95014.9180	-28.5418
0	14	0	0	-10	0	-2	26.738	-266.3206	-5240.3792
0	14	0	1	-12	0	-2	26.706	0.0000	-2510.6086

Tabla 6.24: Armónico esférico  $(a_{S_a}/r_{S_a})^3 P_2^2(\sin \beta_{S_a}) \cos 2\lambda_{S_a}$ . La serie es de la forma  $\sum_i (A_{si} \sin \Phi_i + A_{ci} \cos \Phi_i)$ , con  $\Phi_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Únicamente mostramos los términos para los cuales  $\max\{A_{si}, A_{ci}\} \geq 1000$  ( $10^{-7}$  rad). Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ .

0	14	0	2	-12	0	-2	26.542	0.0000	-1901.5804
0	15	0	0	-15	0	-2	25.206	-56.5578	1112.8855
0	15	0	0	-14	0	-2	25.147	20178.0678	6.0613
0	15	0	0	-13	0	-2	25.088	0.0000	-244720.7519
0	15	0	0	-12	0	-2	25.030	-20178.0678	6.0613
0	15	0	0	-11	0	-2	24.972	56.5578	1112.8855
0	16	0	0	-15	0	-2	23.579	-1060.8899	0.0000
0	16	0	0	-14	0	-2	23.527	0.0000	12866.5335
0	16	0	0	-13	0	-2	23.476	1060.8899	0.0000



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 7

### Efecto lunisolar de primer orden en la nutación

Este capítulo se dedica al cálculo del efecto de la perturbación de primer orden de la Luna y el Sol en las series de nutación de la Tierra, con el uso del manipulador algebraico de series de Kinoshita descrito en el capítulo 5. Por efecto de primer orden entendemos el primer orden de perturbación restringido a la perturbación de achatamiento.

#### 7.1 Efecto de primer orden de la Luna en las series de nutación

Para un cuerpo rígido de masa  $M_{\oplus}$  y radio ecuatorial  $a_{\oplus}$  (la Tierra), la forma del potencial debido a la presencia de un cuerpo perturbador  $P$  de masa  $M_p$ , es (ecuación (1.5) del capítulo 1)

$$U = -\frac{\mathcal{G}M_pM_{\oplus}}{r} \left[ 1 - \sum_{n \geq 2} J_n \left( \frac{a_{\oplus}}{r} \right)^n P_n(\sin \delta) + \sum_{n \geq 2} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_{\oplus}}{r} \right)^n P_n^m(\sin \delta) (C_n^m \cos m\alpha + S_n^m \sin m\alpha) \right],$$

en donde  $r, \alpha, \delta$  son las coordenadas esféricas del cuerpo perturbador. La ecuación anterior puede reescribirse como

$$U = -\frac{\mathcal{G}M_p M_\oplus}{r} + \frac{\mathcal{G}M_p M_\oplus}{r} \sum_{n \geq 2} J_n \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^n P_n(\sin \delta) - \\ - \frac{\mathcal{G}M_p M_\oplus}{r} \sum_{n \geq 2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^n P_n^m(\sin \delta) (C_n^m \cos m\alpha + S_n^m \sin m\alpha).$$

El primer sumando afecta únicamente al movimiento de traslación, luego podemos prescindir del mismo para el estudio de la rotación de la Tierra. Tenemos entonces que pasamos a estudiar el potencial

$$U = \frac{\mathcal{G}M_p M_\oplus}{r} \sum_{n \geq 2} J_n \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^n P_n(\sin \delta) - \\ - \frac{\mathcal{G}M_p M_\oplus}{r} \sum_{n \geq 2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^n P_n^m(\sin \delta) (C_n^m \cos m\alpha + S_n^m \sin m\alpha).$$

Tomando como sistema de ejes el sistema de ejes principales de la Tierra, se anulan los coeficientes  $J_1, C_{11}, S_{11}, C_{21}, S_{21}$  y  $S_{22}$ , del desarrollo del potencial, y entonces la expresión del mismo se reduce, en primer orden de perturbación a:

$$U = \frac{\mathcal{G}M_\oplus M_p}{r} J_2 \left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^2 P_2(\sin \delta),$$

o bien

$$U = \frac{\mathcal{G}M_\oplus M_p a_\oplus^2}{r^3} J_2 P_2(\sin \delta),$$

en donde el coeficiente  $J_2$ , como se muestra en la tabla 1.5, viene dado por

$$J_2 = \frac{2C - A - B}{2M_\oplus a_\oplus^2},$$

de donde resulta

$$U = \frac{\mathcal{G}M_p}{r^3} \frac{2C - A - B}{2} P_2(\sin \delta). \quad (7.1)$$

Para el cálculo de las series de nutación de una Tierra rígida debido al efecto de la perturbación lunar (en concreto debido al efecto del *main problem* lunar), se ha definido en el manipulador el siguiente conjunto de variables, que se muestra con sus respectivas frecuencias:

Tabla 7.1: Conjunto de variables usadas y frecuencias asociadas.

0	$\Omega$	$n_{\Omega} =$	-6962890.2665	"/sj
1	$l_M$	$n_{l_M} =$	1717915923.2178	"/sj
2	$l_S$	$n_{l_S} =$	129596581.0481	"/sj
3	$F$	$n_F =$	1739527262.8478	"/sj
4	$D$	$n_D =$	1602961601.2090	"/sj
5	$L_{Me}$	$n_{L_{Me}} =$	2608.79031415742	rad/sj
6	$L_{Ve}$	$n_{L_{Ve}} =$	1021.32855462110	rad/sj
7	$L_E$	$n_{L_E} =$	628.30758499914	rad/sj
8	$L_{Ma}$	$n_{L_{Ma}} =$	334.06124266998	rad/sj
9	$L_{Ju}$	$n_{L_{Ju}} =$	52.96909650946	rad/sj
10	$L_{Sa}$	$n_{L_{Sa}} =$	21.32990954380	rad/sj
11	$L_{Ur}$	$n_{L_{Ur}} =$	7.47815985673	rad/sj
12	$L_S$	$n_{L_S} =$	628.30758499914	rad/sj
13	$h$	$n_h =$	-0.02438175	rad/sj
14	$g$	$n_g =$	230121.6483	rad/sj
15	$\beta$	$n_{\beta} =$	0	
16	$G$	$n_G =$	0	
17	$J$	$n_J =$	0	
18	$\alpha$	$n_{\alpha} =$	0	
19	$a$	$n_a =$	0	
20	$b$	$n_b =$	0	
21	$H$	$n_H =$	0	
22	$I$	$n_I =$	0	
23	$\delta$	$n_{\delta} =$	0	
24	$l$	$n_l =$	0	
25	$L$	$n_L =$	0	
26	$\cos I$	$n_{\cos I} =$	0	
27	$\sin I$	$n_{\sin I} =$	0	
28	$\cos J$	$n_{\cos J} =$	0	
29	$\sin J$	$n_{\sin J} =$	0	
30	$\lambda$	$n_{\lambda} =$	0	

Todas las series de Kinoshita que aparecen seguidamente van multiplicadas, aunque no se indique explícitamente, por el término  $(a/r)^3$ . En la sustitución de los armónicos esféricos se supone su presencia igualmente.

### 7.1.1 Cálculo de las nutaciones del eje del momento angular

La construcción del potencial  $U$  (7.1) resulta muy sencilla con el uso del procesador de series de Kinoshita. Comenzamos definiendo la serie  $\mathcal{P} = P_2^0(\sin \delta)$ :

```
POISSON p; p="P_2^0(\sin delta);"
```



Seguidamente, mediante dos aplicaciones sucesivas del teorema de Wigner, tal y como se muestra en las ecuaciones (1.8) y (1.9) del capítulo 1, expresamos en las variables adecuadas el potencial. En primer lugar rotamos un ángulo  $J$  para pasar del plano del ecuador al plano de Andoyer (ecuación (1.8)):

$$P_n^m(\sin \delta)e^{\pm im(\alpha+l)} = \sum_{\varrho=\pm 1} \sum_{m'=0}^n \bar{Q}_n^{(m,m')}(\varrho, \cos J) P_n^{m'}(\sin b) \times \\ \times \exp \left\{ \pm i \left[ m' \varrho a + \frac{\pi}{2} (m - m') \right] \right\}.$$

Seguidamente giramos un ángulo  $I$  para expresar las coordenadas esféricas del cuerpo perturbador del plano de Andoyer (perpendicular al momento angular) en el plano de la eclíptica de la fecha, respecto del cual se conocen las posiciones de los cuerpos perturbadores (ecuación (1.9)):

$$P_n^{m'}(\sin b)e^{\pm im'(g+a)} = \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{m''=0}^n \bar{Q}_n^{(m',m'')}(\epsilon, \cos I) P_n^{m''}(\sin \beta) \times \\ \times \exp \left\{ \pm i \left[ m'' \epsilon (\lambda - h) + \frac{\pi}{2} (m - m') \right] \right\}.$$

Combinando las ecuaciones (1.8) y (1.9), tenemos el armónico esférico  $P_n^m(\sin \delta)e^{\pm im\alpha}$  expresado como combinación de los armónicos esféricos en las coordenadas del cuerpo perturbador, referidos a la eclíptica de la fecha (ecuación (1.10) del capítulo 1):

$$P_n^m(\sin \delta)e^{\pm im\alpha} = \sum_{\varrho, \epsilon=\pm 1} \sum_{m', m''=0}^n \bar{Q}_n^{(m,m')}(\varrho, \cos J) \bar{Q}_n^{(m',m'')}(\epsilon, \cos I) \times \\ \times P_n^{m''}(\sin \beta) \times \exp \left\{ \pm i \left[ m'' \varrho \epsilon (\lambda - h) - m l - m' \varrho g + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi}{2} (m - m') + \frac{\pi}{2} \varrho (m' - m'') \right] \right\}.$$

Estas transformaciones se realizan de manera simbólica con el procesador de series con dos líneas de código:

```
p=p.tmawigner ("delta", "alpha", "b", "a", "J", "l");
p=p.tmawigner ("b", "a", "beta", "lambda", "I", "g");
```

Una vez expresado el potencial en dichas variables, tomamos la parte real del mismo y agrupamos los polinomios modificados de Jacobi que guardan alguna de las relaciones simples estudiadas en el capítulo 5.

```
p=p.partereal (); p=p.homogenea ();
```

En este punto, el resultado que se obtiene viene dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} = & P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos I) + \\
& + 2 \sin(\lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos I) - \\
& - 2 \cos(2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos I) - \\
& - 2 \cos(g - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,2)}(1, \cos I) - \\
& - 2 \sin(g - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,1)}(1, \cos I) + \\
& + 2 \cos(g) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,0)}(1, \cos I) - \\
& - 2 \sin(g + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,1)}(-1, \cos I) - \\
& - 2 \cos(g + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(1,2)}(-1, \cos I) - \\
& - 2 \cos(2g - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,2)}(1, \cos I) - \\
& - 2 \sin(2g - \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,1)}(1, \cos I) + \\
& + 2 \cos(2g) P_2^0(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,0)}(1, \cos I) - \\
& - 2 \sin(2g + \lambda) P_2^1(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,1)}(-1, \cos I) - \\
& - 2 \cos(2g + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \bar{Q}_2^{(0,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_2^{(2,2)}(-1, \cos I).
\end{aligned}$$

Seguidamente desarrollamos los polinomios modificados de Jacobi y llevamos a cabo la aproximación  $J \approx 0$ , ya que sabemos que los términos así despreciados no afectan al momento angular.

```

p=p.devjac ();
p=p.sust ("sin J", 0.E0);
p=p.sust ("cos J", 1.E0);

```

De este modo, la serie resultante viene dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} = & -0.5P_2^0(\sin \beta) - 0.25(\sin I)^2 \cos(2\lambda) P_2^2(\sin \beta) \\
& - \cos I \sin I \sin(\lambda) P_2^1(\sin \beta) + 1.5(\cos I)^2 P_2^0(\sin \beta).
\end{aligned}$$

En el siguiente paso sustituimos los elementos siguientes:

$$\begin{aligned} P_2^0(\sin \beta) &\rightarrow \mathcal{P}_0, \\ P_2^1(\sin \beta) \sin \lambda &\rightarrow \mathcal{P}_1|_s, \\ P_2^2(\sin \beta) \cos 2\lambda &\rightarrow \mathcal{P}_2|_c, \end{aligned}$$

en donde las series  $\mathcal{P}_0$ ,  $\mathcal{P}_1|_s$  y  $\mathcal{P}_2|_c$  representan los desarrollos de los armónicos esféricos en las variables de Delaunay de la Luna:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^0(\sin \beta_M) &= -\sum_i \bar{A}_i^{(0)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M &= 3 \sum_i A_i^{(1)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M &= 3 \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i, \end{aligned}$$

en donde como sabemos  $\Theta_i = i_{l_M} l_M + i_{l_S} l_S + i_F F + i_D D + i_\Omega \Omega$ . Las sustituciones se realizan como sigue:

```
p=p.delaunay (2, 0, "beta", "lambda", p0, p0);
p=p.delaunay (2, 1, "beta", "lambda", p1c, p1s);
p=p.delaunay (2, 2, "beta", "lambda", p2c, p2s);
```

Expresado el potencial en función de las variables de Delaunay, procedemos al cálculo de la función generatriz

$$\mathcal{W} = \int \mathcal{P}_{\text{per}} dt,$$

siendo  $\mathcal{P}_{\text{per}}$  la parte periódica de  $\mathcal{P}$ .

```
p=p.generatrix ();
```

A continuación pasamos a calcular las nutaciones en longitud y oblicuidad, mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial H} = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial I}, \\ \Delta I &= \frac{1}{G} \left( -\frac{1}{\sin I} \Delta H + \cot I \Delta G \right) = \frac{1}{G} \left( \frac{1}{\sin I} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial h} - \cot I \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} \right). \end{aligned}$$

De esta forma, el cálculo de  $\Delta h$  se reduce a:

```
q=p;
p=p.derive ("H");
```

Por otro lado, la nutación en oblicuidad se calcula mediante:

```
q=q.delta ("I");
```

Ahora eliminamos los denominadores sustituyendo los movimientos medios de las variables por su valor:

```
p=p.sustfrecuencias ();
```

Finalmente realizamos la sustitución  $\sin I = 0.39777716$  (McCarthy, 1996), y tenemos en cuenta la relación  $G = C\omega$ . Podemos incluir la constante  $G$  inicialmente en la expresión del potencial. Así tenemos para el potencial (por cada uno de los cuerpos perturbadores),

$$U = \frac{GM_p}{r^3} \frac{2C - A - B}{2C} \frac{1}{\omega} P_2(\sin \delta)$$

```
p=p.sust ("sin I", -0.39777716);
p=p.sust ("cos I", 0.9174820603054 );
p=p.sust ("G", 1.0);
k_M=-7.547198149;
p=p*k_M;
```

Debe tenerse en cuenta que la constante de la Luna  $k_M$  incluye el factor 3, de modo que los armónicos esféricos de la Luna se han dividido por 3.

$$k_M = 3 \frac{2C - A - B}{2C} \times k^2 \frac{M_M}{a_M^3} \frac{1}{\omega} = 7547'' .198149 / (\text{siglo juliano}).$$

Este valor de la constante  $k_M$  (Kinoshita y Souchay, 1990) incluye la conversión a  $\mu\text{as}$  (microsegundos de arco). El cambio de signo en la constante se debe a que  $\Delta\psi = -\Delta h$ .

En las tablas 7.2 y 7.3 mostramos las series de nutación en longitud y oblicuidad del eje del momento angular.

Tabla 7.2: Serie de nutación en longitud del eje del momento angular (seno)  $\Delta\psi = -\Delta h$ . Efecto de la perturbación lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas (milisegundos de arco). Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ (seno)	$P$ (días)
1	0	0	0	0	-17284.7680	-6798.384
2	0	0	0	0	207.8902	-3399.192
2	0	0	2	0	-204.1557	13.661
0	1	0	0	0	67.6819	27.555
1	0	0	2	0	-34.2849	13.633
2	1	0	2	0	-26.1321	9.133
0	1	0	0	-2	-14.9438	-31.812
1	0	0	2	-2	12.5059	177.844
2	-1	0	2	0	11.4457	27.093
0	0	0	0	2	6.0169	14.765
1	1	0	0	0	5.8192	27.667
1	-1	0	0	0	-5.7040	-27.443
2	-1	0	2	2	-5.1938	9.557
1	-2	0	2	0	4.5030	1305.479
0	2	0	0	-2	4.4850	205.892
1	1	0	2	0	-4.3905	9.121
2	0	0	2	2	-3.2422	7.096
0	2	0	0	0	2.7737	13.777
2	1	0	2	-2	2.6387	23.942
2	2	0	2	0	-2.5971	6.859
0	0	0	2	0	2.4524	13.606
2	0	0	2	-2	-2.1769	182.621
0	0	0	2	-2	-2.0576	173.310
1	-1	0	2	0	1.8825	26.985
0	0	1	0	0	-1.7228	365.260
1	0	1	0	0	-1.4790	385.998
1	-1	0	0	2	1.4066	31.961
1	1	0	0	-2	-1.2591	-31.664
0	2	0	-2	0	1.1120	-1095.175
1	0	-1	0	0	-0.9824	-346.636
1	-1	0	2	2	-0.8725	9.543
0	1	1	0	-2	-0.6997	-34.847
2	0	1	2	0	0.6768	13.168
2	0	-1	2	0	-0.6420	14.192
2	1	0	2	2	-0.6229	5.643
0	1	0	0	2	0.6209	9.614
2	2	0	2	-2	0.5752	12.811
1	0	0	0	2	-0.5612	14.797
1	0	0	2	2	-0.5450	7.088
1	1	0	2	-2	0.5313	23.858
1	-2	0	0	2	-0.5265	-199.840

Tabla 7.2: Serie de nutación en longitud del eje del momento angular (seno)  $\Delta\psi = -\Delta h$ . Efecto de la perturbación lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas (milisegundos de arco). Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

1	0	0	0	-2	-0.5017	-14.733
1	0	-1	2	-2	-0.4827	346.604
0	1	-1	0	0	0.4498	29.803
1	2	0	2	0	-0.4366	6.852
0	0	1	0	-2	-0.4128	-15.387
1	2	0	0	-2	0.3957	212.323
0	1	0	-2	0	0.3859	-26.878
0	0	0	0	1	-0.3834	29.531
1	0	1	2	-2	0.3468	119.607
0	1	-1	0	-1	-0.3282	-3232.862
0	1	1	0	0	-0.3225	25.622
0	1	0	2	0	0.3148	9.108
2	-2	0	2	0	-0.2998	1615.748
0	1	0	0	-1	-0.2824	411.784
2	1	-1	2	0	-0.2501	9.367
2	-1	-1	2	2	-0.2461	9.814
1	-2	0	0	0	-0.2341	-13.749
2	3	0	2	0	-0.2340	5.492
2	0	-1	2	2	-0.2231	7.236
2	1	1	2	0	0.2145	8.910
1	-1	0	2	-2	-0.1942	-32.606
1	2	0	0	0	0.1931	13.805
2	1	0	0	0	-0.1830	27.780
0	3	0	0	0	0.1485	9.185
2	0	0	2	1	0.1442	9.340
2	-1	0	0	0	0.1365	-27.333
0	1	0	0	-4	-0.1263	-10.085
2	-2	0	2	2	0.1246	14.632
2	-1	0	2	4	-0.1238	5.802
0	2	0	0	-4	-0.1216	-15.906
2	1	1	2	-2	0.1187	22.469
1	1	0	2	2	-0.1047	5.638
2	-2	0	2	4	-0.1025	7.349
2	-1	0	4	0	0.0993	9.057
0	2	1	0	-2	0.0962	131.671
0	1	-1	0	-2	0.0903	-29.263
1	2	0	2	-2	0.0897	12.787
2	2	0	2	2	-0.0856	4.684
1	1	0	0	2	-0.0831	9.627
2	0	0	4	-2	0.0822	12.663
2	3	0	2	-2	0.0805	8.745
0	0	1	-2	2	-0.0782	-329.791
1	0	0	-2	2	0.0770	-169.002
1	2	0	-2	0	0.0754	-943.227
0	1	0	2	-2	-0.0729	23.775

Tabla 7.2: Serie de nutación en longitud del eje del momento angular (seno)  $\Delta\psi = -\Delta h$ . Efecto de la perturbación lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas (milisegundos de arco). Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

1	0	1	2	0	0.0719	13.143
2	0	1	0	0	0.0711	409.234
1	-1	-1	0	2	0.0690	35.026
1	0	0	-2	0	-0.0681	-13.579
2	0	0	2	-1	-0.0676	25.420
1	-1	0	0	1	0.0645	-388.267
0	0	1	0	2	-0.0639	14.192
2	0	1	2	-2	-0.0627	121.749
0	0	1	2	-2	-0.0625	117.539
0	1	0	-2	-2	-0.0603	-9.530
1	0	-1	2	0	-0.0592	14.162
1	1	1	0	-2	-0.0571	-34.669
0	1	0	-2	2	-0.0550	32.764
0	2	0	0	2	0.0550	7.127
2	0	0	2	4	-0.0543	4.793
2	0	-1	2	-2	0.0538	365.225
0	0	1	0	1	0.0537	27.322
1	-1	0	0	-2	-0.0517	-9.600
2	-1	1	2	2	0.0495	9.313
1	1	-1	0	0	0.0489	29.934
2	0	-1	0	0	0.0485	-329.819
2	1	-1	2	2	-0.0479	5.731
0	1	-1	0	2	0.0465	9.874
0	0	0	0	4	0.0462	7.383
2	0	1	2	2	0.0448	6.961
1	1	0	2	-4	-0.0440	-38.742
2	-1	1	2	0	0.0428	25.222
2	0	0	0	2	-0.0422	14.830
2	2	-1	2	0	-0.0409	6.991
1	-1	-1	2	2	-0.0401	9.799
1	3	0	2	0	-0.0393	5.488
0	0	0	2	2	0.0389	7.081
2	-1	0	0	2	-0.0368	32.112
1	0	-1	2	2	-0.0367	7.229
1	0	0	0	1	-0.0360	29.659
1	1	-1	2	0	-0.0359	9.354
0	2	-1	0	0	0.0356	14.317
2	-1	0	2	-2	0.0345	-32.451
2	2	1	2	0	0.0344	6.733
1	0	1	0	-2	-0.0339	-15.353
1	1	1	0	0	-0.0332	25.719
1	0	0	0	-1	0.0315	-29.403
0	2	0	2	0	0.0313	6.846
0	1	0	0	1	-0.0308	14.254
1	1	1	2	0	0.0306	8.898

Tabla 7.2: Serie de nutación en longitud del eje del momento angular (seno)  $\Delta\psi = -\Delta h$ . Efecto de la perturbación lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas (milisegundos de arco). Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

2	1	0	0	-2	0.0300	-31.517
2	1	0	2	-1	-0.0299	13.222
1	-1	1	0	0	-0.0295	-29.673
2	1	0	2	1	0.0282	6.976
0	2	1	0	0	-0.0271	13.276
0	1	2	0	-2	-0.0263	-38.522
1	1	0	-2	0	0.0249	-26.772
1	0	0	2	1	0.0239	9.327
1	-1	0	2	-1	-0.0229	313.042
0	2	-2	0	-2	0.0225	-1616.431
2	2	1	2	-2	0.0225	12.377
1	1	1	2	-2	0.0224	22.395
2	0	1	2	1	-0.0212	9.107
2	1	0	4	-2	0.0210	8.676
1	-1	0	2	4	-0.0208	5.797
1	-2	0	2	2	0.0205	14.600
1	-1	-1	0	0	0.0205	-25.525
0	0	2	0	-2	-0.0202	-16.064
2	4	0	2	0	-0.0200	4.579
0	0	2	0	0	-0.0182	182.630
1	0	1	0	2	0.0176	14.221
1	-2	0	2	4	-0.0172	7.341
1	-1	0	4	0	0.0167	9.045
1	-1	0	0	4	-0.0161	10.100
2	-2	0	0	2	0.0160	-194.133
2	0	0	4	0	0.0155	6.817
1	0	0	2	-4	-0.0154	-16.102
0	3	0	0	-4	-0.0153	-37.625
2	-1	-1	2	0	-0.0147	29.263
1	2	0	2	2	-0.0144	4.680
0	1	1	0	-4	-0.0143	-10.371
2	-1	-1	2	4	-0.0142	5.895
1	0	-1	0	2	-0.0139	15.422
1	0	0	0	4	-0.0127	7.391
1	-3	0	0	0	-0.0125	-9.172
1	0	0	4	-2	0.0124	12.639
1	3	0	2	-2	0.0124	8.734
2	1	0	2	4	-0.0123	4.083
1	-2	-1	0	2	-0.0123	-129.169
0	2	-1	0	-2	-0.0122	471.891
2	0	0	0	-2	0.0120	-14.701
2	1	1	2	2	0.0116	5.557
1	-2	0	0	4	0.0110	15.943
0	2	1	0	-4	-0.0110	-16.630
2	0	-2	2	2	-0.0109	7.383



Tabla 7.2: Serie de nutación en longitud del eje del momento angular (seno)  $\Delta\psi = -\Delta h$ . Efecto de la perturbación lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas (milisegundos de arco). Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

1	1	0	0	-4	-0.0105	-10.070
1	-1	1	0	2	-0.0104	29.390
1	2	0	0	-4	-0.0103	-15.869
1	-1	1	2	-2	-0.0103	-35.803
2	3	0	2	2	-0.0100	4.003
2	2	0	0	-2	-0.0099	219.167
0	1	0	0	-3	0.0098	-15.314
1	0	0	2	-1	-0.0098	25.325
1	2	0	2	-4	0.0098	95.421
0	1	1	0	2	-0.0097	9.367
2	-2	-1	2	4	-0.0094	7.500
2	4	0	2	-2	0.0094	6.638
1	2	0	0	2	-0.0093	7.135
1	0	2	0	0	-0.0092	187.671
1	0	0	2	4	-0.0091	4.789
2	-1	-2	2	2	-0.0091	10.085
1	-1	1	2	0	0.0088	25.129
0	4	0	0	0	0.0088	6.889
1	-1	0	-2	0	-0.0088	-9.096
2	0	-1	2	-1	0.0087	27.321
2	-1	0	4	-2	-0.0086	23.430
1	0	2	2	-2	0.0084	90.103
0	2	0	2	-2	-0.0083	12.763
2	2	0	0	0	-0.0082	13.833
0	1	-2	0	0	0.0081	32.451
2	0	-2	2	0	-0.0080	14.765
1	2	1	0	-2	0.0080	134.272
1	1	-1	2	2	-0.0079	5.726
1	-2	0	2	-2	-0.0078	-14.934
2	-1	0	2	3	0.0077	7.220
0	1	0	0	4	0.0076	5.823
1	-3	0	2	0	-0.0076	-28.149
0	1	-2	0	-2	0.0075	-27.093
0	1	0	2	2	0.0075	5.633
2	-1	0	2	1	0.0075	14.130
1	-1	1	2	2	0.0072	9.300
2	0	-1	2	4	-0.0072	4.856
2	2	-1	2	2	-0.0072	4.744
2	-2	0	4	0	-0.0071	13.492
0	1	0	2	-4	0.0071	-38.964
1	3	0	0	0	0.0071	9.197
1	0	1	2	2	0.0069	6.953
2	1	-1	2	-2	-0.0068	25.622
2	1	0	2	-4	0.0067	-38.522
2	0	2	2	0	0.0066	12.710

Tabla 7.2: Serie de nutación en longitud del eje del momento angular (seno)  $\Delta\psi = -\Delta h$ . Efecto de la perturbación lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas (milisegundos de arco). Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

1	2	-1	2	0	-0.0063	6.983
1	1	-1	0	-2	0.0061	-29.138
0	0	1	0	-4	-0.0061	-7.535
2	2	0	2	-1	-0.0060	8.935
1	-1	-1	2	0	-0.0058	29.138
0	2	0	-2	-2	0.0057	-14.569
2	-2	-1	2	2	0.0057	15.242
2	-2	0	0	0	0.0056	-13.722
0	1	0	-2	1	-0.0056	-299.262
1	2	1	2	0	0.0052	6.726
2	3	-1	2	0	-0.0051	5.576
0	2	0	0	-3	0.0049	-34.475
0	2	1	-2	0	0.0048	548.041
1	1	0	2	1	0.0047	6.968
1	0	1	0	1	0.0047	27.432
1	0	-1	0	-2	0.0046	-14.162
0	3	0	0	2	0.0046	5.662
2	2	-1	2	-2	0.0046	13.276
1	-2	0	0	-2	-0.0046	-7.120
0	1	1	0	1	0.0045	13.719
1	0	-1	0	-1	-0.0045	-27.212
0	2	-1	0	2	0.0044	7.269
2	1	-2	2	0	-0.0044	9.614
2	1	2	2	-2	0.0044	21.167
1	-1	-1	2	-2	0.0044	-29.934
2	1	1	2	1	-0.0044	6.845
2	3	1	2	0	0.0043	5.411
2	-3	0	2	2	0.0042	31.198
1	1	1	2	-4	-0.0042	-43.339
2	0	0	4	-4	-0.0042	88.922
1	-1	1	0	-2	-0.0038	-9.859
1	0	0	0	-4	-0.0038	-7.375
2	-2	0	4	2	0.0038	7.050
1	1	-1	2	-2	-0.0038	25.525
2	2	0	2	1	0.0037	5.566
0	2	0	0	-1	0.0036	25.826
1	-1	0	-2	2	0.0036	-23.692
1	2	1	2	-2	0.0036	12.354
1	1	0	-2	2	-0.0035	32.922
1	0	1	2	1	-0.0035	9.095
1	1	0	2	-1	-0.0035	13.196
0	1	1	0	-1	0.0034	193.565
2	-2	0	2	6	-0.0034	4.907
1	4	0	2	0	-0.0034	4.576
1	1	0	4	-2	0.0034	8.665

Tabla 7.2: Serie de nutación en longitud del eje del momento angular (seno)  $\Delta\psi = -\Delta h$ . Efecto de la perturbación lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas (milisegundos de arco). Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

0	1	2	0	0	-0.0033	23.942
0	1	-1	-2	2	-0.0032	35.992
2	0	1	4	-2	0.0032	12.238
2	2	0	4	-2	0.0031	6.598
2	2	0	2	-4	-0.0031	96.780
1	1	-1	0	2	-0.0031	9.888
1	2	-1	0	0	0.0031	14.348
2	0	0	2	3	0.0030	5.721
2	-1	2	2	2	0.0030	9.082
0	0	0	2	-1	0.0030	25.231
2	0	0	2	-4	0.0029	-16.064
0	1	1	2	-2	-0.0028	22.322
0	3	0	2	0	0.0028	5.483
1	1	1	0	2	0.0028	9.380
0	3	-1	0	0	0.0028	9.422
0	2	0	-2	2	-0.0028	14.967
0	2	-1	-2	0	0.0027	-273.907
0	2	0	2	-4	-0.0027	94.101
2	3	1	2	-2	0.0027	8.541
1	-2	1	0	0	-0.0027	-14.287
1	-1	-2	0	2	0.0027	38.742
0	1	1	-2	-2	-0.0027	-9.785
2	-1	0	4	2	0.0026	5.614
1	0	0	4	0	0.0026	6.810
1	-1	0	0	-1	0.0026	-14.224
2	-2	1	2	2	-0.0026	14.068
0	0	1	-2	-2	-0.0026	-7.221
1	1	0	0	4	-0.0025	5.828
2	3	0	2	-4	-0.0025	21.448
2	1	-2	2	2	-0.0025	5.823
1	-3	0	2	2	0.0025	31.055
1	0	0	2	-3	0.0025	-35.410
2	-1	1	2	4	0.0025	5.711
2	-1	0	2	6	-0.0024	4.165
0	2	0	0	1	-0.0024	9.394
0	1	-2	0	2	0.0024	10.148
1	-1	-1	2	4	-0.0024	5.890
0	3	0	-2	0	-0.0023	28.266
2	-1	1	2	-2	0.0023	-35.615
0	3	1	0	0	-0.0022	8.960
0	1	-1	2	0	0.0021	9.341
0	1	-1	0	-4	0.0021	-9.814
2	1	-1	2	-1	0.0021	13.719
1	1	2	0	-2	-0.0021	-38.305
1	1	0	2	4	-0.0021	4.080

Tabla 7.2: Serie de nutación en longitud del eje del momento angular (seno)  $\Delta\psi = -\Delta h$ . Efecto de la perturbación lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas (milisegundos de arco). Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

2	2	0	2	4	-0.0020	3.556
2	2	1	2	2	0.0020	4.624
2	1	0	0	2	0.0020	9.641
2	0	-1	0	2	-0.0020	15.457
1	-2	-1	0	0	0.0020	-13.251
1	2	1	0	0	-0.0020	13.302
2	1	0	4	0	0.0019	5.465
0	0	1	2	0	-0.0019	13.117
0	2	2	0	-2	0.0019	96.782
0	4	0	0	-2	-0.0019	12.913
1	-3	0	0	4	0.0019	37.835
2	-1	-1	0	2	-0.0019	35.208
1	1	0	0	1	-0.0019	14.284
2	-3	0	2	6	-0.0019	5.970
1	1	1	2	2	0.0018	5.552
0	2	0	0	-6	-0.0018	-7.657
2	1	2	2	0	0.0018	8.698
0	1	1	2	0	-0.0018	8.887
1	-1	0	4	-2	-0.0018	23.349
1	0	-2	2	2	-0.0018	7.375
2	1	-1	2	4	-0.0018	4.129
1	0	1	2	-4	-0.0017	-16.845
2	-3	0	2	0	0.0017	-28.033
2	0	-1	4	-2	-0.0017	13.117
2	1	-1	0	0	-0.0017	30.066
0	1	-1	-2	0	0.0017	-25.036
1	3	0	2	2	-0.0017	4.001
2	5	0	2	0	-0.0017	3.927
0	0	0	2	1	-0.0016	9.314
1	0	2	0	-2	-0.0016	-16.026
0	0	2	2	-2	-0.0016	88.924
0	1	1	-2	0	-0.0016	-29.013
1	-1	0	2	-4	-0.0016	-10.163
2	-2	1	2	4	0.0016	7.204
1	1	0	-2	-2	-0.0016	-9.517
1	-2	-1	2	4	-0.0016	7.492
1	-3	0	0	2	-0.0015	-24.216
2	-2	0	2	3	0.0015	9.784
1	0	-1	2	-1	0.0015	27.212
2	-2	0	2	-2	0.0015	-14.901
0	1	0	-2	-4	-0.0015	-5.792
1	4	0	2	-2	0.0015	6.632
1	-1	-2	2	2	-0.0014	10.070
0	2	-1	0	-4	0.0014	-15.242
0	0	0	0	3	-0.0014	9.844

Tabla 7.2: Serie de nutación en longitud del eje del momento angular (seno)  $\Delta\psi = -\Delta h$ . Efecto de la perturbación lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas (milisegundos de arco). Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

0	3	1	0	-4	-0.0013	-41.946
2	0	1	2	4	0.0013	4.731
1	0	-1	0	4	-0.0013	7.543
2	-1	0	0	4	-0.0013	10.115
2	1	1	0	-2	0.0013	-34.493
2	0	0	0	1	0.0013	29.789
0	1	0	0	-6	-0.0013	-5.992
1	-1	0	2	3	0.0013	7.213
2	1	1	0	0	0.0013	25.816
0	0	1	0	-1	0.0012	-32.128
2	-1	0	0	-2	0.0012	-9.587
2	3	-1	2	-2	0.0012	8.960
1	0	-1	2	4	-0.0012	4.853
0	1	0	-4	0	0.0012	-9.033
1	2	-1	2	2	-0.0012	4.741
1	-1	-1	0	4	-0.0012	10.387
1	1	1	0	-4	-0.0012	-10.355
2	0	-1	2	1	0.0012	9.585
2	1	-2	2	-2	-0.0012	27.554
2	0	1	0	2	0.0012	14.251
0	2	0	-2	-4	-0.0012	-7.333
0	2	1	0	2	-0.0011	6.991
0	4	0	0	-4	0.0011	102.946
1	0	0	-2	-2	-0.0011	-7.074
0	1	-1	0	4	0.0011	5.917
2	4	0	2	2	-0.0011	3.495
0	3	0	0	-6	-0.0010	-10.604
1	-2	-1	0	4	0.0010	16.671
1	0	0	0	3	0.0010	9.858
0	2	0	2	2	0.0010	4.677
0	1	1	-2	2	0.0010	30.067
2	-1	-2	2	4	-0.0010	5.992
0	1	2	0	-4	-0.0010	-10.674
0	0	1	-2	0	-0.0010	-14.133
0	1	-1	0	-3	-0.0010	-14.698
0	0	1	0	4	-0.0010	7.236
0	3	0	2	-2	-0.0010	8.723
1	-2	0	4	0	-0.0010	13.466
2	5	0	2	-2	0.0010	5.349
2	0	0	4	-1	-0.0010	8.862
2	1	0	4	-4	-0.0010	21.036

Tabla 7.3: Serie de nutación en oblicuidad del eje del momento angular (coseno)  $\Delta\epsilon = -\Delta I$ . Efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ (cos)	$P$ (días)
1	0	0	0	0	9228.5360	-6798.384
2	0	0	0	0	-90.1314	-3399.192
2	0	0	2	0	88.5123	13.661
1	0	0	2	0	18.3051	13.633
2	1	0	2	0	11.3297	9.133
1	0	0	2	-2	-6.6771	177.844
2	-1	0	2	0	-4.9623	27.093
1	1	0	0	0	-3.1069	27.667
1	-1	0	0	0	3.0454	-27.443
1	-2	0	2	0	-2.4042	1305.479
1	1	0	2	0	2.3442	9.121
2	-1	0	2	2	2.2518	9.557
2	0	0	2	2	1.4057	7.096
2	1	0	2	-2	-1.1440	23.942
2	2	0	2	0	1.1260	6.859
1	-1	0	2	0	-1.0051	26.985
2	0	0	2	-2	0.9438	182.621
1	0	1	0	0	0.7896	385.998
1	-1	0	0	2	-0.7510	31.961
1	1	0	0	-2	0.6722	-31.664
1	0	-1	0	0	0.5245	-346.636
1	-1	0	2	2	0.4659	9.543
1	0	0	0	2	0.2997	14.797
2	0	1	2	0	-0.2934	13.168
1	0	0	2	2	0.2910	7.088
1	1	0	2	-2	-0.2837	23.858
1	-2	0	0	2	0.2811	-199.840
2	0	-1	2	0	0.2784	14.192
2	1	0	2	2	0.2701	5.643
1	0	0	0	-2	0.2679	-14.733
1	0	-1	2	-2	0.2577	346.604
2	2	0	2	-2	-0.2494	12.811
1	2	0	2	0	0.2331	6.852
1	2	0	0	-2	-0.2113	212.323
1	0	1	2	-2	-0.1852	119.607
2	-2	0	2	0	0.1300	1615.748
1	-2	0	0	0	0.1250	-13.749
2	1	-1	2	0	0.1084	9.367
2	-1	-1	2	2	0.1067	9.814
1	-1	0	2	-2	0.1037	-32.606
1	2	0	0	0	-0.1031	13.805
2	3	0	2	0	0.1014	5.492

Tabla 7.3: Serie de nutación en oblicuidad del eje del momento angular (coseno)  $\Delta\epsilon = -\Delta I$ . Efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

2	0	-1	2	2	0.0967	7.236
2	1	1	2	0	-0.0930	8.910
2	1	0	0	0	0.0794	27.780
2	0	0	2	1	-0.0625	9.340
2	-1	0	0	0	-0.0592	-27.333
1	1	0	2	2	0.0559	5.638
2	-2	0	2	2	-0.0540	14.632
2	-1	0	2	4	0.0537	5.802
2	1	1	2	-2	-0.0514	22.469
1	2	0	2	-2	-0.0479	12.787
2	-2	0	2	4	0.0444	7.349
1	1	0	0	2	0.0443	9.627
2	-1	0	4	0	-0.0430	9.057
1	0	0	-2	2	-0.0411	-169.002
1	2	0	-2	0	-0.0403	-943.227
1	0	1	2	0	-0.0384	13.143
2	2	0	2	2	0.0371	4.684
1	-1	-1	0	2	-0.0368	35.026
1	0	0	-2	0	0.0364	-13.579
2	0	0	4	-2	-0.0356	12.663
2	3	0	2	-2	-0.0349	8.745
1	-1	0	0	1	-0.0344	-388.267
1	0	-1	2	0	0.0316	14.162
2	0	1	0	0	-0.0308	409.234
1	1	1	0	-2	0.0305	-34.669
2	0	0	2	-1	0.0293	25.420
1	-1	0	0	-2	0.0276	-9.600
2	0	1	2	-2	0.0272	121.749
1	1	-1	0	0	-0.0261	29.934
2	0	0	2	4	0.0236	4.793
1	1	0	2	-4	0.0235	-38.742
2	0	-1	2	-2	-0.0233	365.225
2	-1	1	2	2	-0.0214	9.313
1	-1	-1	2	2	0.0214	9.799
2	0	-1	0	0	-0.0210	-329.819
1	3	0	2	0	0.0210	5.488
2	1	-1	2	2	0.0208	5.731
1	0	-1	2	2	0.0196	7.229
2	0	1	2	2	-0.0194	6.961
1	0	0	0	1	0.0192	29.659
1	1	-1	2	0	0.0192	9.354
2	-1	1	2	0	-0.0186	25.222
2	0	0	0	2	0.0183	14.830
1	0	1	0	-2	0.0181	-15.353
2	2	-1	2	0	0.0177	6.991

Tabla 7.3: Serie de nutación en oblicuidad del eje del momento angular (coseno)  $\Delta\epsilon = -\Delta I$ . Efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

1	1	1	0	0	0.0177	25.719
1	0	0	0	-1	-0.0168	-29.403
1	1	1	2	0	-0.0164	8.898
2	-1	0	0	2	0.0160	32.112
1	-1	1	0	0	0.0157	-29.673
2	-1	0	2	-2	-0.0149	-32.451
2	2	1	2	0	-0.0149	6.733
1	1	0	-2	0	-0.0133	-26.772
2	1	0	0	-2	-0.0130	-31.517
2	1	0	2	-1	0.0130	13.222
1	0	0	2	1	-0.0128	9.327
2	1	0	2	1	-0.0122	6.976
1	-1	0	2	-1	0.0122	313.042
1	1	1	2	-2	-0.0119	22.395
1	-1	0	2	4	0.0111	5.797
1	-2	0	2	2	-0.0110	14.600
1	-1	-1	0	0	-0.0109	-25.525
2	2	1	2	-2	-0.0097	12.377
1	0	1	0	2	-0.0094	14.221
2	0	1	2	1	0.0092	9.107
1	-2	0	2	4	0.0092	7.341
2	1	0	4	-2	-0.0091	8.676
1	-1	0	4	0	-0.0089	9.045
2	4	0	2	0	0.0087	4.579
1	-1	0	0	4	0.0086	10.100
1	0	0	2	-4	0.0082	-16.102
1	2	0	2	2	0.0077	4.680
1	0	-1	0	2	0.0074	15.422
2	-2	0	0	2	-0.0069	-194.133
1	0	0	0	4	0.0068	7.391
2	0	0	4	0	-0.0067	6.817
1	-3	0	0	0	0.0067	-9.172
1	0	0	4	-2	-0.0066	12.639
1	3	0	2	-2	-0.0066	8.734
1	-2	-1	0	2	0.0065	-129.169
2	-1	-1	2	0	0.0064	29.263
2	-1	-1	2	4	0.0062	5.895
1	-2	0	0	4	-0.0059	15.943
1	1	0	0	-4	0.0056	-10.070
1	-1	1	0	2	0.0056	29.390
1	2	0	0	-4	0.0055	-15.869
1	-1	1	2	-2	0.0055	-35.803
2	1	0	2	4	0.0053	4.083
1	0	0	2	-1	0.0052	25.325
1	2	0	2	-4	-0.0052	95.421



Tabla 7.3: Serie de nutación en oblicuidad del eje del momento angular (coseno)  $\Delta\epsilon = -\Delta I$ . Efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

2	0	0	0	-2	-0.0052	-14.701
2	1	1	2	2	-0.0050	5.557
1	2	0	0	2	0.0050	7.135
1	0	2	0	0	0.0049	187.671
1	0	0	2	4	0.0049	4.789
2	0	-2	2	2	0.0047	7.383
1	-1	1	2	0	-0.0047	25.129
1	-1	0	-2	0	0.0047	-9.096
1	0	2	2	-2	-0.0045	90.103
2	3	0	2	2	0.0043	4.003
2	2	0	0	-2	0.0043	219.167
1	2	1	0	-2	-0.0043	134.272
1	1	-1	2	2	0.0042	5.726
1	-2	0	2	-2	0.0042	-14.934
2	-2	-1	2	4	0.0041	7.500
2	4	0	2	-2	-0.0041	6.638
1	-3	0	2	0	0.0040	-28.149
2	-1	-2	2	2	0.0039	10.085
1	-1	1	2	2	-0.0039	9.300
1	3	0	0	0	-0.0038	9.197
2	0	-1	2	-1	-0.0038	27.321
2	-1	0	4	-2	0.0037	23.430
1	0	1	2	2	-0.0037	6.953
2	2	0	0	0	0.0035	13.833
2	0	-2	2	0	0.0035	14.765
1	2	-1	2	0	0.0034	6.983
2	-1	0	2	3	-0.0033	7.220
1	1	-1	0	-2	-0.0033	-29.138
2	-1	0	2	1	-0.0033	14.130
2	0	-1	2	4	0.0031	4.856
2	2	-1	2	2	0.0031	4.744
1	-1	-1	2	0	0.0031	29.138
2	-2	0	4	0	0.0031	13.492
2	1	-1	2	-2	0.0030	25.622
2	1	0	2	-4	-0.0029	-38.522
2	0	2	2	0	-0.0029	12.710
1	2	1	2	0	-0.0028	6.726
2	2	0	2	-1	0.0026	8.935
1	1	0	2	1	-0.0025	6.968
1	0	1	0	1	-0.0025	27.432
1	0	-1	0	-2	-0.0025	-14.162
2	-2	-1	2	2	-0.0025	15.242
1	-2	0	0	-2	0.0024	-7.120
2	-2	0	0	0	-0.0024	-13.722
1	0	-1	0	-1	0.0024	-27.212

Tabla 7.3: Serie de nutación en oblicuidad del eje del momento angular (coseno)  $\Delta\epsilon = -\Delta I$ . Efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

1	-1	-1	2	-2	-0.0023	-29.934
1	1	1	2	-4	0.0022	-43.339
2	3	-1	2	0	0.0022	5.576
1	-1	1	0	-2	0.0020	-9.859
1	0	0	0	-4	0.0020	-7.375
1	1	-1	2	-2	0.0020	25.525
2	2	-1	2	-2	-0.0020	13.276
2	1	-2	2	0	0.0019	9.614
1	-1	0	-2	2	-0.0019	-23.692
2	1	2	2	-2	-0.0019	21.167
1	2	1	2	-2	-0.0019	12.354
2	1	1	2	1	0.0019	6.845
1	1	0	-2	2	0.0019	32.922
1	0	1	2	1	0.0019	9.095
1	1	0	2	-1	0.0019	13.196
2	3	1	2	0	-0.0019	5.411
2	-3	0	2	2	-0.0018	31.198
2	0	0	4	-4	0.0018	88.922
1	4	0	2	0	0.0018	4.576
1	1	0	4	-2	-0.0018	8.665
1	1	-1	0	2	0.0017	9.888
2	-2	0	4	2	-0.0016	7.050
1	2	-1	0	0	-0.0016	14.348
2	2	0	2	1	-0.0016	5.566
1	1	1	0	2	-0.0015	9.380
2	-2	0	2	6	0.0015	4.907
1	-2	1	0	0	0.0014	-14.287
1	-1	-2	0	2	-0.0014	38.742
1	0	0	4	0	-0.0014	6.810
1	-1	0	0	-1	-0.0014	-14.224
2	0	1	4	-2	-0.0014	12.238
2	2	0	4	-2	-0.0014	6.598
2	2	0	2	-4	0.0014	96.780
1	1	0	0	4	0.0014	5.828
1	-3	0	2	2	-0.0013	31.055
1	0	0	2	-3	-0.0013	-35.410
2	0	0	2	3	-0.0013	5.721
2	-1	2	2	2	-0.0013	9.082
1	-1	-1	2	4	0.0013	5.890
2	0	0	2	-4	-0.0012	-16.064
2	3	1	2	-2	-0.0012	8.541
2	-1	0	4	2	-0.0011	5.614
1	1	2	0	-2	0.0011	-38.305
2	-2	1	2	2	0.0011	14.068
1	1	0	2	4	0.0011	4.080

Tabla 7.3: Serie de nutación en oblicuidad del eje del momento angular (coseno)  $\Delta\epsilon = -\Delta I$ . Efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

2	3	0	2	-4	0.0011	21.448
2	1	-2	2	2	0.0011	5.823
2	-1	1	2	4	-0.0011	5.711
1	-2	-1	0	0	-0.0011	-13.251
2	-1	0	2	6	0.0011	4.165
1	2	1	0	0	0.0011	13.302
1	-3	0	0	4	-0.0010	37.835
1	1	0	0	1	0.0010	14.284
2	-1	1	2	-2	-0.0010	-35.615
1	1	1	2	2	-0.0010	5.552
1	-1	0	4	-2	0.0010	23.349

## 7.2 Efecto de primer orden del Sol en las series de nutación

El cálculo del efecto del Sol en las series de nutación del eje del momento angular es análogo al de la Luna. Las únicas diferencias se encuentran en el uso de los armónicos esféricos del Sol y de la constante  $k_S$  del Sol. Esta constante viene dada por (Kinoshita y Souchay, 1990)

$$k_S = 3475'' .413512 / (\text{siglo juliano}).$$

Las sustituciones de los armónicos esféricos se realizan según:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0^\odot &= \left(\frac{a_\odot}{r_\odot}\right)^3 P_2(\sin \beta_\odot) = -\sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i, \\ \mathcal{P}_2^\odot|_c &= \left(\frac{a_\odot}{r_\odot}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_\odot) \cos 2\lambda_\odot = 3 \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i, \\ \mathcal{P}_2^\odot|_s &= \left(\frac{a_\odot}{r_\odot}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_\odot) \sin 2\lambda_\odot = 3 \sum_i \bar{A}_i^{(2)} \sin \Theta_i, \end{aligned}$$

donde como sabemos,  $i = (i_{l_M}, i_{l_S}, i_F, i_D, i_\Omega)$  y  $\Theta_i = i_{l_M} l_M + i_{l_S} l_S + i_F F + i_D D + i_\Omega \Omega$ . Las tablas 7.4 y 7.5 muestran el resultado obtenido para las series de nutación debido al efecto del Sol, en longitud y oblicuidad respectivamente.

Tabla 7.4: Serie de nutación en longitud del eje del momento angular (seno)  $\Delta\psi = -\Delta h$ . Efecto solar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ (seno)	$P$ (días)
2	0	0	2	-2	-1267.7990	182.621
0	0	1	0	0	127.2348	365.260
2	0	1	2	-2	-49.4329	121.749
2	0	-1	2	-2	21.1970	365.225
0	0	2	0	0	1.5943	182.630
2	0	2	2	-2	-1.5044	91.313
2	0	3	2	-2	-0.0416	73.051
0	1	0	0	-1	0.0264	411.784
0	0	3	0	0	0.0261	121.753
0	0	0	0	1	-0.0190	29.531
2	0	0	2	-3	-0.0190	-35.227
2	1	0	2	-3	-0.0058	126.514
2	-1	0	2	-1	-0.0058	328.153
0	1	-1	0	-1	-0.0053	-3232.862
2	0	0	2	-1	0.0026	25.420
2	0	1	2	-3	-0.0018	-38.987
2	-1	-1	2	-1	-0.0011	3230.131
2	0	4	2	-2	-0.0011	60.876
0	0	1	0	-1	0.0011	-32.128

Tabla 7.5: Serie de nutación en oblicuidad del eje del momento angular (coseno)  $\Delta\epsilon = -\Delta I$ . Efecto solar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$A$ (cos)	$P$ (días)
2	0	0	2	-2	549.6582	182.621
2	0	1	2	-2	21.4318	121.749
2	0	-1	2	-2	-9.1900	365.225
2	0	2	2	-2	0.6522	91.313
2	0	3	2	-2	0.0181	73.051
2	0	0	2	-3	0.0082	-35.227
2	1	0	2	-3	0.0025	126.514
2	-1	0	2	-1	0.0025	328.153
2	0	0	2	-1	-0.0011	25.420

### 7.3 Términos de Oppolzer debidos a la Luna

El cálculo de los términos de Oppolzer en primer orden para la Luna y el Sol se obtienen directamente a partir de las expresiones (1.26) y (1.27), para longitud y oblicuidad respectivamente. Estos términos representan el movimiento del plano ecuatorial, que viene fijado por los ángulos de Euler, con respecto al plano invariante (o de Andoyer). El cálculo se lleva a cabo mediante las ecuaciones (1.26) y (1.27), dadas por

$$\begin{aligned}\Delta(\delta h_f) = \Delta(h_f - h) &\approx \frac{k_M}{\sin I} \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g} \sin g - \mathcal{W}_1 \cos g \right) = \\ &= \frac{k_M}{\sin I} \sum_{\tau} \sum_i \frac{\tau C_i(\tau)}{n_g - \tau n_i} \sin \Theta_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\delta I_f) = \Delta(I_f - I) &\approx k_M \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g} \cos g + \mathcal{W}_1 \sin g \right) = \\ &= k_M \sum_{\tau} \sum_i \frac{\tau C_i(\tau)}{n_g - \tau n_i} \cos \Theta_i,\end{aligned}$$

en donde  $\mathcal{W}_1$  es la parte de la función generatriz de la forma

$$\mathcal{W}_1 = k_M \sum_{i,\tau} \frac{C_i(\tau)}{n_g - \tau n_i} \sin(g - \tau \Theta_i)$$

(véase ecuación (1.24)). Una forma cómoda de obtener esta parte consiste en derivar respecto de  $J$  la expresión del geopotencial y después sustituir  $J = 0$ . De este modo se eliminan todos los términos salvo los términos en  $\sin(g - \tau \Theta_i)$ . Esto puede hacerse antes de la obtención de la función generatriz para evitar cálculos inútiles. De este modo se obtiene en este caso, antes de obtener la función generatriz propiamente dicha, los siguientes términos de Oppolzer:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1 &= -0.5 \sin(g - \lambda) P_2^1(\sin \beta) + 0.5 \sin(g + \lambda) P_2^1(\sin \beta) - \\ &- 0.25 \sin I \cos(g - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) + 0.25 \sin I \cos(g + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) + \\ &+ 0.5 \cos I \sin(g - \lambda) P_2^1(\sin \beta) + 0.5 \cos I \sin(g + \lambda) P_2^1(\sin \beta) - \\ &- 0.25 \cos I \sin I \cos(g - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) - 3 \cos I \sin I \cos(g) P_2^0(\sin \beta) - \\ &- 0.25 \cos I \sin I \cos(g + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) + (\cos I)^2 \sin(g - \lambda) P_2^1(\sin \beta) - \\ &- (\cos I)^2 \sin(g + \lambda) P_2^1(\sin \beta).\end{aligned}$$

Seguidamente llevamos a cabo las sustituciones de los armónicos esféricos tal y como se hizo en la determinación de los términos de Poisson, y mediante las ecuaciones (1.26) y (1.27) obtenemos las series de nutación. Los resultados se muestran (para la Luna) en las tablas 7.6 y 7.7. En estas tablas hemos truncado la serie al nivel del  $\mu\text{as}$ , aunque se han obtenido términos hasta de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

Tabla 7.6: Serie de nutación (seno) en longitud  $\Delta(\delta h_f) = \Delta(h_f - h)$ . Términos de Oppolzer del efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ (seno)
1	0	0	0	0	-6798.384	3.4029
2	0	0	0	0	-3399.192	-0.0665
1	-2	0	2	0	1305.479	0.0046
1	0	1	0	0	385.998	-0.0051
1	0	-1	0	0	-346.636	0.0038
1	0	-1	2	-2	346.604	-0.0019
1	2	0	0	-2	212.323	0.0025
1	-2	0	0	2	-199.840	0.0035
2	0	0	2	-2	182.621	-0.0130
1	0	0	2	-2	177.844	0.0945
1	0	1	2	-2	119.607	0.0039
1	1	0	2	-4	-38.742	0.0015
1	-1	-1	0	2	35.026	0.0027
1	1	1	0	-2	-34.669	0.0022
1	-1	0	2	-2	-32.606	0.0078
2	-1	0	2	-2	-32.451	-0.0011
2	-1	0	0	2	32.112	-0.0013
1	-1	0	0	2	31.961	0.0603
0	1	0	0	-2	-31.812	-0.0147
1	1	0	0	-2	-31.664	0.0520
2	1	0	0	-2	-31.517	-0.0010
1	1	-1	0	0	29.934	0.0022
1	-1	1	0	0	-29.673	0.0013
1	0	0	0	1	29.659	-0.0017
1	0	0	0	-1	-29.403	-0.0014
2	1	0	0	0	27.780	-0.0074
1	1	0	0	0	27.667	0.2895
0	1	0	0	0	27.555	0.0888
1	-1	0	0	0	-27.443	0.2710
2	-1	0	0	0	-27.333	-0.0053
2	-1	0	2	0	27.093	0.4754
1	-1	0	2	0	26.985	0.0961
1	1	0	-2	0	-26.772	-0.0012
1	1	1	0	0	25.719	-0.0018
1	-1	-1	0	0	-25.525	-0.0010

Tabla 7.6: Serie de nutación (seno) en longitud  $\Delta(\delta h_f) = \Delta(h_f - h)$ . Términos de Oppolzer del efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

2	0	0	2	-1	25.420	-0.0030
2	-1	1	2	0	25.222	0.0019
2	1	0	2	-2	23.942	0.1246
1	1	0	2	-2	23.858	0.0308
2	1	1	2	-2	22.469	0.0060
1	1	1	2	-2	22.395	0.0014
1	0	0	2	-4	-16.102	0.0012
1	-2	0	0	4	15.943	0.0010
1	0	-1	0	2	15.422	-0.0013
0	0	1	0	-2	-15.387	-0.0017
1	0	1	0	-2	-15.353	0.0028
2	0	0	0	2	14.830	-0.0033
1	0	0	0	2	14.797	-0.0536
0	0	0	0	2	14.765	0.0276
1	0	0	0	-2	-14.733	0.0435
2	-2	0	2	2	14.632	0.0099
1	-2	0	2	2	14.600	0.0020
1	0	1	0	2	14.221	0.0018
2	0	-1	2	0	14.192	-0.0526
1	0	-1	2	0	14.162	-0.0059
1	2	0	0	0	13.805	0.0198
0	2	0	0	0	13.777	0.0146
1	-2	0	0	0	-13.749	0.0217
2	0	0	2	0	13.661	-17.4252
1	0	0	2	0	13.633	-3.5688
0	0	0	2	0	13.606	0.0132
1	0	0	-2	0	-13.579	0.0064
2	1	0	2	-1	13.222	-0.0026
2	0	1	2	0	13.168	0.0601
1	0	1	2	0	13.143	0.0078
2	2	0	2	-2	12.811	0.0526
1	2	0	2	-2	12.787	0.0100
2	0	0	4	-2	12.663	0.0076
1	0	0	4	-2	12.639	0.0014
2	2	1	2	-2	12.377	0.0021
1	-1	0	0	4	10.100	-0.0023
0	1	0	0	-4	-10.085	-0.0012
2	-1	-2	2	2	10.085	-0.0011
1	1	0	0	-4	-10.070	0.0013
2	-1	-1	2	2	9.814	-0.0301
1	-1	-1	2	2	9.799	-0.0060
1	1	0	0	2	9.627	-0.0126
0	1	0	0	2	9.614	0.0068
1	-1	0	0	-2	-9.600	0.0067
2	-1	0	2	2	9.557	-0.6544

Tabla 7.6: Serie de nutación (seno) en longitud  $\Delta(\delta h_f) = \Delta(h_f - h)$ . Términos de Oppolzer del efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

1	-1	0	2	2	9.543	-0.1334
2	1	-1	2	0	9.367	-0.0322
1	1	-1	2	0	9.354	-0.0056
2	0	0	2	1	9.340	0.0186
1	0	0	2	1	9.327	0.0037
2	-1	1	2	2	9.313	0.0064
1	-1	1	2	2	9.300	0.0011
1	3	0	0	0	9.197	0.0011
0	3	0	0	0	9.185	0.0018
1	-3	0	0	0	-9.172	0.0017
2	1	0	2	0	9.133	-3.4630
1	1	0	2	0	9.121	-0.7053
0	1	0	2	0	9.108	0.0038
2	0	1	2	1	9.107	-0.0028
1	-1	0	-2	0	-9.096	0.0012
2	-1	0	4	0	9.057	0.0133
1	-1	0	4	0	9.045	0.0027
2	1	1	2	0	8.910	0.0292
1	1	1	2	0	8.898	0.0051
2	3	0	2	-2	8.745	0.0112
1	3	0	2	-2	8.734	0.0021
2	1	0	4	-2	8.676	0.0029
2	-2	-1	2	4	7.500	-0.0016
1	0	0	0	4	7.391	-0.0026
2	0	-2	2	2	7.383	-0.0018
2	-2	0	2	4	7.349	-0.0174
1	-2	0	2	4	7.341	-0.0035
2	0	-1	2	2	7.236	-0.0385
1	0	-1	2	2	7.229	-0.0076
2	-1	0	2	3	7.220	0.0013
1	2	0	0	2	7.135	-0.0020
0	2	0	0	2	7.127	0.0011
2	0	0	2	2	7.096	-0.5720
1	0	0	2	2	7.088	-0.1160
2	2	-1	2	0	6.991	-0.0073
1	2	-1	2	0	6.983	-0.0014
2	1	0	2	1	6.976	0.0051
1	1	0	2	1	6.968	0.0010
2	0	1	2	2	6.961	0.0081
1	0	1	2	2	6.953	0.0015
2	2	0	2	0	6.859	-0.4765
1	2	0	2	0	6.852	-0.0966
2	0	0	4	0	6.817	0.0029
2	2	1	2	0	6.733	0.0065
1	2	1	2	0	6.726	0.0012



Tabla 7.6: Serie de nutación (seno) en longitud  $\Delta(\delta h_f) = \Delta(h_f - h)$ . Términos de Oppolzer del efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

2	4	0	2	-2	6.638	0.0018
2	-1	-1	2	4	5.895	-0.0031
2	-1	0	2	4	5.802	-0.0277
1	-1	0	2	4	5.797	-0.0056
2	1	-1	2	2	5.731	-0.0109
1	1	-1	2	2	5.726	-0.0022
2	1	0	2	2	5.643	-0.1440
1	1	0	2	2	5.638	-0.0290
2	3	-1	2	0	5.576	-0.0012
2	1	1	2	2	5.557	0.0027
2	3	0	2	0	5.492	-0.0559
1	3	0	2	0	5.488	-0.0113
2	3	1	2	0	5.411	0.0010
2	0	-1	2	4	4.856	-0.0020
2	0	0	2	4	4.793	-0.0153
1	0	0	2	4	4.789	-0.0031
2	2	-1	2	2	4.744	-0.0021
2	2	0	2	2	4.684	-0.0249
1	2	0	2	2	4.680	-0.0050
2	4	0	2	0	4.579	-0.0060
1	4	0	2	0	4.576	-0.0012
2	1	0	2	4	4.083	-0.0043
2	3	0	2	2	4.003	-0.0035

Tabla 7.7: Serie de nutación (coseno) en oblicuidad  $\Delta(\delta I_f) = \Delta(I_f - I)$ . Términos de Oppolzer del efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ (coseno)
1	0	0	0	0	-6798.384	-1.0084
2	0	0	0	0	-3399.192	0.0243
1	-2	0	2	0	1305.479	-0.0014
1	0	1	0	0	385.998	0.0015
0	0	1	0	0	365.260	0.0019
1	0	-1	0	0	-346.636	-0.0011
0	2	0	0	-2	205.892	-0.0086
1	-2	0	0	2	-199.840	-0.0010
2	0	0	2	-2	182.621	0.0048
1	0	0	2	-2	177.844	-0.0281
0	0	0	2	-2	173.310	0.0047
1	0	1	2	-2	119.607	-0.0012

Tabla 7.7: Serie de nutación (coseno) en oblicuidad  $\Delta(\delta I_f) = \Delta(I_f - I)$ . Términos de Oppolzer del efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

0	1	1	0	-2	-34.847	-0.0080
1	-1	0	2	-2	-32.606	-0.0023
1	-1	0	0	2	31.961	-0.0182
0	1	0	0	-2	-31.812	-0.1865
1	1	0	0	-2	-31.664	-0.0151
0	1	-1	0	0	29.803	-0.0060
0	0	0	0	1	29.531	0.0052
0	1	-1	0	-2	-29.263	0.0012
2	1	0	0	0	27.780	0.0027
1	1	0	0	0	27.667	-0.0876
0	1	0	0	0	27.555	-0.9757
1	-1	0	0	0	-27.443	-0.0785
2	-1	0	0	0	-27.333	0.0019
2	-1	0	2	0	27.093	-0.1745
1	-1	0	2	0	26.985	-0.0291
0	1	0	-2	0	-26.878	0.0057
0	1	1	0	0	25.622	0.0050
2	0	0	2	-1	25.420	0.0011
2	1	0	2	-2	23.942	-0.0458
1	1	0	2	-2	23.858	-0.0093
0	1	0	2	-2	23.775	0.0012
2	1	1	2	-2	22.469	-0.0022
0	2	0	0	-4	-15.906	-0.0030
0	0	1	0	-2	-15.387	-0.0107
2	0	0	0	2	14.830	0.0012
1	0	0	0	2	14.797	0.0165
0	0	0	0	2	14.765	-0.1624
1	0	0	0	-2	-14.733	-0.0123
2	-2	0	2	2	14.632	-0.0036
0	2	-1	0	0	14.317	-0.0010
0	0	1	0	2	14.192	0.0018
2	0	-1	2	0	14.192	0.0194
1	0	-1	2	0	14.162	0.0018
1	2	0	0	0	13.805	-0.0061
0	2	0	0	0	13.777	-0.0803
1	-2	0	0	0	-13.749	-0.0061
2	0	0	2	0	13.661	6.4344
1	0	0	2	0	13.633	1.1014
0	0	0	2	0	13.606	-0.0719
1	0	0	-2	0	-13.579	-0.0018
2	1	0	2	-1	13.222	0.0010
2	0	1	2	0	13.168	-0.0222
1	0	1	2	0	13.143	-0.0024
2	2	0	2	-2	12.811	-0.0194
1	2	0	2	-2	12.787	-0.0031

Tabla 7.7: Serie de nutación (coseno) en oblicuidad  $\Delta(\delta I_f) = \Delta(I_f - I)$ . Términos de Oppolzer del efecto lunar de primer orden.  $A$  viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

2	0	0	4	-2	12.663	-0.0028
0	1	0	0	-4	-10.085	-0.0050
0	1	-1	0	2	9.874	-0.0019
2	-1	-1	2	2	9.814	0.0112
1	-1	-1	2	2	9.799	0.0019
1	1	0	0	2	9.627	0.0039
0	1	0	0	2	9.614	-0.0259
1	-1	0	0	-2	-9.600	-0.0019
2	-1	0	2	2	9.557	0.2428
1	-1	0	2	2	9.543	0.0418
0	1	0	-2	-2	-9.530	-0.0025
2	1	-1	2	0	9.367	0.0120
1	1	-1	2	0	9.354	0.0018
2	0	0	2	1	9.340	-0.0069
1	0	0	2	1	9.327	-0.0012
2	-1	1	2	2	9.313	-0.0024
0	3	0	0	0	9.185	-0.0065
2	1	0	2	0	9.133	1.2855
1	1	0	2	0	9.121	0.2216
0	1	0	2	0	9.108	-0.0139
2	0	1	2	1	9.107	0.0010
2	-1	0	4	0	9.057	-0.0049
2	1	1	2	0	8.910	-0.0109
1	1	1	2	0	8.898	-0.0016
2	3	0	2	-2	8.745	-0.0042
2	1	0	4	-2	8.676	-0.0011
0	0	0	0	4	7.383	-0.0025
2	-2	0	2	4	7.349	0.0065
1	-2	0	2	4	7.341	0.0011
2	0	-1	2	2	7.236	0.0143
1	0	-1	2	2	7.229	0.0024
0	2	0	0	2	7.127	-0.0031
2	0	0	2	2	7.096	0.2132
1	0	0	2	2	7.088	0.0370
0	0	0	2	2	7.081	-0.0022
2	2	-1	2	0	6.991	0.0027
2	1	0	2	1	6.976	-0.0019
2	0	1	2	2	6.961	-0.0030
2	2	0	2	0	6.859	0.1778
1	2	0	2	0	6.852	0.0309
0	2	0	2	0	6.846	-0.0019
2	0	0	4	0	6.817	-0.0011
2	2	1	2	0	6.733	-0.0024
2	-1	-1	2	4	5.895	0.0012
2	-1	0	2	4	5.802	0.0104

Tabla 7.7: Serie de nutación (coseno) en oblicuidad  $\Delta(\delta I_f) = \Delta(I_f - I)$ . Términos de Oppolzer del efecto lunar de primer orden. A viene dada en mas. Se muestran únicamente los términos con  $|A| \geq 0.001$  mas.

1	-1	0	2	4	5.797	0.0018
2	1	-1	2	2	5.731	0.0041
2	1	0	2	2	5.643	0.0539
1	1	0	2	2	5.638	0.0094
2	1	1	2	2	5.557	-0.0010
2	3	0	2	0	5.492	0.0209
1	3	0	2	0	5.488	0.0037
2	0	0	2	4	4.793	0.0058
1	0	0	2	4	4.789	0.0010
2	2	0	2	2	4.684	0.0094
1	2	0	2	2	4.680	0.0016
2	4	0	2	0	4.579	0.0022
2	1	0	2	4	4.083	0.0016
2	3	0	2	2	4.003	0.0013
0	0	0	0	0	3.495	-5.9559
0	0	0	0	0	3.495	-5.9559

## 7.4 Términos de Oppolzer del Sol

De la misma forma que en el caso lunar, los términos de Oppolzer del Sol se calculan mediante las ecuaciones (1.26) y (1.27), para longitud y oblicuidad respectivamente. Estos términos representan el movimiento del plano ecuatorial, que viene fijado por los ángulos de Euler, con respecto al plano invariante (o de Andoyer). En este caso, las ecuaciones (1.26) y (1.27) se escriben

$$\begin{aligned}\Delta(\delta h_f) = \Delta(h_f - h) &\approx \frac{k_S}{\sin I} \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g} \sin g - \mathcal{W}_1 \cos g \right) = \\ &= \frac{k_S}{\sin I} \sum_{\tau} \sum_i \frac{\tau C_i(\tau)}{n_g - \tau n_i} \sin \Theta_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\delta I_f) = \Delta(I_f - I) &\approx k_S \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g} \cos g + \mathcal{W}_1 \sin g \right) = \\ &= k_S \sum_{\tau} \sum_i \frac{\tau C_i(\tau)}{n_g - \tau n_i} \cos \Theta_i,\end{aligned}$$

en donde  $\mathcal{W}_1$  es la parte de la función generatriz de la forma

$$\mathcal{W}_1 = k_S \sum_{i,\tau} \frac{C_i(\tau)}{n_g - \tau n_i} \sin(g - \tau \Theta_i)$$

(véase ecuación (1.24)). Los resultados se muestran (para el Sol) en las tablas 7.8 y 7.9. En estas tablas hemos truncado la serie al nivel del  $\mu\text{as}$ , aunque se han obtenido términos hasta de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

Tabla 7.8: Serie de nutación en longitud  $\Delta(\delta h_f) = \Delta(h_f - h) = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 \Omega + i_2 l_M + i_3 l_S + i_4 F + i_5 D$ . Términos de Oppolzer del efecto solar de primer orden.  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en mas. Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_s|, |A_c|\} \geq 0.001 \text{ mas}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A_s$ (seno)	$A_c$ (coseno)
2	0	-1	2	-2	365.225	0.0002	0.0631
2	0	0	2	-2	182.621	-0.0378	-7.5462
2	0	1	2	-2	121.749	-0.0033	-0.4414
2	0	2	2	-2	91.313	-0.0002	-0.0179

Tabla 7.9: Serie de nutación en oblicuidad  $\Delta(\delta I_f) = \Delta(I - I_f) = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 \Omega + i_2 l_M + i_3 l_S + i_4 F + i_5 D$ . Términos de Oppolzer del efecto solar de primer orden.  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en mas. Se muestran únicamente los términos con  $\max\{|A_s|, |A_c|\} \geq 0.001 \text{ mas}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A_s$ (seno)	$A_c$ (coseno)
0	0	1	0	0	365.260	0.0000	-0.1382
2	0	-1	2	-2	365.225	0.0001	-0.0230
0	0	2	0	0	182.630	0.0000	-0.0035
2	0	0	2	-2	182.621	-0.0164	2.7540
2	0	1	2	-2	121.749	-0.0014	0.1611
2	0	2	2	-2	91.313	-0.0001	0.0065
0	0	0	0	0	6.976	0.0000	-2.7570

## 7.5 Términos relacionados con la precesión

En el cálculo de las series de nutación en longitud del eje del momento angular a partir de la ecuación

$$\Delta h = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}_0}{\partial I},$$

en donde (ecuación (1.24)),

$$\mathcal{W}_0 = k' \sum_{i \neq 0} \frac{B_i}{n_i} \sin \Theta_i,$$

no hemos considerado el hecho de que  $I$  está incluida en realidad en  $n_i$ , lo que afecta al cálculo de las derivadas respecto de  $I$ . El movimiento medio  $n_\Omega$  de la longitud del nodo de la Luna tiene la forma  $n_\Omega = n_{\Omega_0} - n_h$ , donde  $n_{\Omega_0}$  es el movimiento medio referido al equinocio de la época y la precesión general en longitud  $n_h$  depende de  $I$ . Considerando que la solución analítica del movimiento secular da  $n_h$  como una constante multiplicada por  $\cos I$ , tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{B_i}{n_i} \right) = \frac{1}{n_i} \frac{\partial B_i}{\partial I} - i_5 \frac{n_h}{n_i^2} B_i \tan I,$$

siendo  $i_5$  el coeficiente de  $n_h$  en el denominador. Si tenemos en cuenta esta relación, entonces obtenemos las siguientes contribuciones a las series de nutación (tabla 7.10). La serie se muestra con un nivel de truncación de  $0.001 \mu\text{as}$ . La amplitud está expresada en  $\mu\text{as}$ .

Tabla 7.10: Serie de nutación en longitud  $\Delta\psi = -\Delta h = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ . Efecto de la perturbación de la Luna en primer orden.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (days)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	2889.8515
2	0	0	0	0	-3399.192	-14.1120
1	-2	0	2	0	1305.479	0.1446
2	0	0	2	0	13.661	-0.0557
1	0	0	2	-2	177.844	0.0547
1	0	1	0	0	385.998	-0.0140
1	0	0	2	0	13.633	-0.0115
2	-2	0	2	0	1615.748	-0.0097
1	0	-1	0	0	-346.636	0.0084
2	0	0	2	-2	182.621	-0.0079
2	-1	0	2	0	27.093	0.0062
2	1	0	2	0	9.133	-0.0048
1	0	-1	2	-2	346.604	-0.0041
1	1	0	0	0	27.667	0.0040
1	-1	0	0	0	-27.443	0.0038
1	-2	0	0	2	-199.840	0.0026
1	2	0	0	-2	212.323	0.0021
1	2	0	-2	0	-943.227	-0.0017
2	1	0	2	-2	23.942	0.0013
1	-1	0	2	0	26.985	0.0012
1	-1	0	0	2	31.961	0.0011
1	0	1	2	-2	119.607	0.0010
2	-1	0	2	2	9.557	-0.0010
1	1	0	2	0	9.121	-0.0010
1	1	0	0	-2	-31.664	0.0010

### 7.5.1 Determinación de $\dot{h}$

En esta sección mostramos los resultados obtenidos con el procesador simbólico de series de Kinoshita en el cálculo de la precesión  $\dot{h}$  derivada de la parte secular del potencial. De forma precisa,  $\dot{h}$  viene determinada por las ecuaciones canónicas

$$\dot{h} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial H}, \quad \dot{H} = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial h},$$

en donde  $\mathcal{H}^*$  es el hamiltoniano dado en (1.23), y que incluye los efectos lunisolar y planetarios. Hemos considerado de forma separada la influencia del Sol ( $S$ ), la Luna ( $M$ ), Júpiter ( $J$ ), Saturno ( $Sa$ ) y Venus ( $V$ ). Los resultados se exponen a continuación.

$$\begin{aligned} \dot{h}_M &= \frac{\partial (U_{1M})_{sec}}{\partial H} = -3445''.6291/cy, \\ \dot{h}_S &= \frac{\partial (U_{1S})_{sec}}{\partial H} = -1594''.9779/cy, \\ \dot{h}_J &= \frac{\partial (U_{1J})_{sec}}{\partial H} = -0''.0118/cy, \\ \dot{h}_{Sa} &= \frac{\partial (U_{1Sa})_{sec}}{\partial H} = -0''.0005/cy, \\ \dot{h}_V &= \frac{\partial (U_{1V})_{sec}}{\partial H} = -0''.0206/cy. \end{aligned}$$

La siguiente tabla resume las diferentes contribuciones, mostrando además los valores dados para la precesión por (Kinoshita y Souchay, 1990).

$\dot{h}_M$	-3445.6291		"/cy
$\dot{h}_S$	-1594.9779		"/cy
		Kino-Souchay	
$\dot{h}_{lunisolar}$	-5040.6070	-5040.9672	"/cy
$\dot{h}_J$	-0.0118		"/cy
$\dot{h}_{Sa}$	-0.0005		"/cy
$\dot{h}_V$	-0.0206		"/cy
		Kino-Souchay	
$\dot{h}_{planetario}$	-0.0329	-0.0321	"/cy



## Capítulo 8

### Efecto de los armónicos zonales de orden mayor que dos

El potencial de segundo orden debido a la perturbación de un cuerpo externo (Luna, Sol), puede desarrollarse en forma de armónicos esféricos en la forma

$$U_2 = \frac{\mathcal{G}M_p M_{\oplus} a_{\oplus}^3}{r^4} \left[ J_3 P_3^0(\sin \delta) - \sum_{m=1}^3 P_3^m(\sin \delta) (C_n^m \cos m\alpha + S_n^m \sin m\alpha) \right],$$

en donde  $r$  es la distancia del cuerpo perturbador,  $(\alpha, \delta)$  sus coordenadas ecuatoriales, y  $M_p$  su masa. La parte de  $U_2$  debida al Sol es despreciable, dado que  $a_{\oplus}/r_S$  es del orden de  $5 \times 10^{-5}$  (Kinoshita, 1977 y 1990). Por consiguiente, tan solo consideraremos el potencial perturbador de segundo orden debido a la Luna:

$$U_2 = \frac{\mathcal{G}M_M M_{\oplus} a_{\oplus}^3}{r_M^4} \times \left[ J_3 P_3^0(\sin \delta_M) - \sum_{m=1}^3 P_3^m(\sin \delta_M) \times (C_n^m \cos m\alpha_M + S_n^m \sin m\alpha_M) \right].$$

Como ya conocemos,  $P_3^m(\sin \delta_M)$  son los polinomios asociados de Legendre, y pueden ser expresados, mediante aplicación del teorema de Wigner, en función de los polinomios  $P_3^m(\sin \beta_M)$ ; para  $m = 0, 1, 2, 3$  y combinaciones lineales de  $\lambda_M$  y las variables de Andoyer. En la expresión de  $U_2$  vemos que aparecen los términos  $P_3^m(\sin \delta_M) \cos m\alpha_M$  para  $m =$



0, 1, 2, 3. Podemos aplicar sobre cada uno de ellos el teorema de Wigner:

$$\begin{aligned}
 P_3^m(\sin \delta_M) e^{im\alpha_M} &= \sum_{\varrho, \epsilon = \pm 1} \sum_{m', m''=0}^3 \bar{Q}_3^{(m, m')}(\varrho, \cos J) \bar{Q}_3^{(m', m'')}(\epsilon, \cos I) \times \\
 &\times P_3^{m''}(\sin \beta_M) \times \exp i \left[ m'' \rho \epsilon (\lambda_M - h) - ml - m' \rho g + \right. \\
 &\left. + \frac{\pi}{2}(m - m') + \frac{\pi}{2} \rho (m' - m'') \right].
 \end{aligned}$$

Desarrollando los sumatorios y los polinomios modificados de Jacobi, aparecen una gran cantidad de términos con el factor  $\sin J$ , y pueden ser despreciados sin problema ( $\sin J \approx J < 2 \times 10^{-6}$ ).

Tomamos como  $U_{2M}$  únicamente el término del  $J_3$ :

$$U_{2M} = \frac{\mathcal{G} M_M M_{\oplus} a_{\oplus}^3}{r_M^4} \times J_3 P_3^0(\sin \delta_M),$$

en donde por el teorema de Wigner en la forma anterior, podemos escribir

$$\begin{aligned}
 P_3^0(\sin \delta_M) &= \frac{1}{2} \cos J (-3 + 5 \cos^2 J) \times \left[ \frac{1}{2} \cos I (1 - 5 \cos^2 I) P_3^0(\sin \beta_M) + \right. \\
 &+ \frac{1}{4} \sin I (1 - 5 \cos^2 I) \sin(\lambda_M - h) P_3^1(\sin \beta_M) - \\
 &- \frac{1}{4} \sin^2 I \cos I \cos 2(\lambda_M - h) P_3^2(\sin \beta_M) + \\
 &\left. + \frac{1}{24} \sin^3 I \sin 3(\lambda_M - h) P_3^3(\sin \beta_M) \right] + O(\sin J).
 \end{aligned}$$

Este resultado se compara más adelante con el obtenido mediante el manipulador algebraico de series de Kinoshita. Entonces, la función generatriz asociada al potencial  $U_2$  es:

$$\mathcal{W}_2 = \int U_{2\text{per}} dt,$$

y los términos correspondientes de la nutación vienen dados por las ecuaciones

$$\Delta_2 h = -\Delta \psi = \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial H} = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial I},$$

y

$$\Delta_2 I = -\Delta \epsilon = \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial h}.$$

El cálculo de  $\mathcal{W}_2$  se simplifica mucho si consideramos que en cada uno de los términos que aparecen en los segundos miembros de las ecuaciones que dan  $P_3^m(\sin \delta_M) \cos m\alpha_M$  para  $m = 1, 2, 3$ , contienen un sumando  $\varrho g$ , con  $\varrho = \pm 1, 2, 3$  en sus argumentos. Entonces, el valor de  $\varrho \dot{g}$  que aparece en los denominadores que se obtienen al integrar  $U_{2\text{per}}$ , tiene un periodo corto. Podemos por consiguiente prescindir de todos estos términos, y así aproximaremos  $\mathcal{W}_2$  mediante (Kinoshita, 1990)

$$\mathcal{W}_2 \approx \int \frac{\mathcal{G} M_M M_\oplus a_\oplus^3}{r_M^4} \times J_3 P_3^0(\sin \delta_M) dt.$$

Haciendo  $J \approx 0$ , tenemos que  $P_3^0(\sin \delta_M)$  toma la forma:

$$\begin{aligned} P_3^0(\sin \delta_M) &= \frac{1}{2} \cos I (-3 + 5 \cos^2 I) P_3^0(\sin \beta_M) + \\ &+ \frac{1}{4} \sin I (1 - 5 \cos^2 I) \sin(\lambda_M - h) P_3^1(\sin \beta_M) - \\ &- \frac{1}{4} \sin^2 I \cos I \cos 2(\lambda_M - h) P_3^2(\sin \beta_M) + \\ &+ \frac{1}{24} \sin^3 I \sin 3(\lambda_M - h) P_3^3(\sin \beta_M). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Seguidamente se sustituyen los armónicos esféricos por sus correspondientes desarrollos en serie en función de las variables de Delaunay de la Luna.

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^0(\sin \beta_M) &= \sum_\nu G_\nu^0 \sin \Theta_\nu, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M &= \sum_\nu G_\nu^1 \sin \Theta_\nu, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M &= \sum_\nu G_\nu^2 \sin \Theta_\nu, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^3(\sin \beta_M) \cos 3\lambda_M &= \sum_\nu G_\nu^3 \sin \Theta_\nu, \end{aligned} \quad (8.2)$$

con  $\Theta_\nu = i_1 l_M + i_2 l_S + i_3 F + i_4 D + i_5 \Omega$ . Finalmente se obtienen las series de nutación, teniendo en cuenta que

$$k_M^{J_3} = \frac{J_3}{J_2} \frac{a_E}{a_M} \times k_M = -0''.2961 / (\text{siglo juliano}).$$

## 8.1 Cálculo de la contribución a la nutación en longitud

Vamos a estudiar en esta sección el fragmento principal de código que calcula la contribución de la parte de segundo orden del potencial lunar en la nutación de una Tierra

rígida.

Para el uso adecuado del manipulador se parte de la definición de las variables dadas en la tabla 7.1. De la misma forma suponemos que las series asociadas a los armónicos esféricos dados en (8.2) se encuentran en las series siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3^0 &\rightarrow \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^0(\sin \beta_M), \\ (\mathcal{P}_3^1)_c &\rightarrow \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^1(\sin \beta_M) \cos \lambda_M, \\ (\mathcal{P}_3^1)_s &\rightarrow \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M, \\ (\mathcal{P}_3^2)_c &\rightarrow \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M, \\ (\mathcal{P}_3^2)_s &\rightarrow \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^2(\sin \beta_M) \sin 2\lambda_M, \\ (\mathcal{P}_3^3)_c &\rightarrow \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^3(\sin \beta_M) \cos 3\lambda_M, \\ (\mathcal{P}_3^3)_s &\rightarrow \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^3(\sin \beta_M) \sin 3\lambda_M. \end{aligned}$$

En primer lugar definimos la serie de Kinoshita  $\mathcal{P} = P_3^0(\sin \delta)$ :

```
p="P_3^0(\sin delta)";
```

Sobre ella aplicamos dos veces consecutivas el teorema de Wigner, en la misma forma en que se aplicó en el capítulo 7.

```
p=p.tmawigner ("delta", "alpha", "b", "a", "J", "l");
p=p.tmawigner ("b", "a", "beta", "lambda", "I", "g");
p=p.partereal ();
p=p.homogenea ();
```

Desarrollamos ahora los polinomios modificados de Jacobi, y aproximamos  $J \approx 0$ :

```
p=p.devjac ();
p=p.sust ("sin J", 0.E0);
p=p.sust ("cos J", 1.E0);
```

El resultado viene dado por la serie

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & \frac{1}{4} \sin I \sin(\lambda) P_3^1(\sin \beta) + \frac{1}{24} (\sin I)^3 \sin(3\lambda) P_3^3(\sin \beta) - \\ & - \frac{3}{2} \cos I P_3^0(\sin \beta) - \frac{1}{4} \cos I (\sin I)^2 \cos(2\lambda) P_3^2(\sin \beta) - \\ & - \frac{5}{4} (\cos I)^2 \sin I \sin(\lambda) P_3^1(\sin \beta) + \frac{5}{2} (\cos I)^3 P_3^0(\sin \beta), \end{aligned}$$

y coincide con el dado en (8.1). El siguiente paso consiste en sustituir los armónicos esféricos por los desarrollos en series en las variables de Delaunay de la Luna. Para ello sirve el siguiente fragmento de código.

```
p=p.delaunay (3, 0, "beta", "lambda", p30, p30);
p=p.delaunay (3, 1, "beta", "lambda", p31c, p31s);
p=p.delaunay (3, 2, "beta", "lambda", p32c, p32s);
p=p.delaunay (3, 3, "beta", "lambda", p33c, p33s);
```

A continuación se calcula la función generatriz como:

$$\mathcal{W} = \int \mathcal{P}_{\text{per}} dt$$

```
p=p.generatrix ();
```

La serie  $\Delta h$  viene dada por

$$\Delta h = k_M^{J_3} \frac{\partial}{\partial H} \mathcal{P}.$$

Finalmente, sustituimos los valores de las frecuencias que aparecen en los denominadores así como las constantes.

```
p=p.derive ("H");
p=p.sustfrecuencias ();
p=p.sust ("sin I", -0.39777716);
p=p.sust ("cos I", 0.9174820603054 );
p=p.sust ("G", 1.0);
k_MJ3=-0.2961/100.E0;
p=p*k_MJ3;
```

## 8.2 Resultados obtenidos

En la tabla 8.1 mostramos la serie de nutación en longitud del eje del momento angular  $\Delta\psi = -\Delta h$  obtenida para un nivel de truncación de 0.001 milisegundos de arco (m.a.s.). En la tabla 8.2 mostramos la tabla relativa a la nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon = -\Delta I$ .

Tabla 8.1: Principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi = -\Delta h: \sum_i A_i \cos(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ . Efecto de la parte de segundo orden del potencial de la Luna.  $A$  viene dada en mas (milisegundos de arco).

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ (mas)
3	-1	0	1	0	65502.202	-0.0064
2	-1	0	1	0	6159.136	0.0371
1	-1	0	1	0	3231.496	-0.1053
0	1	0	-1	0	-2190.350	0.0337
1	1	0	-1	0	-1656.612	0.0005
2	1	0	1	-2	199.232	0.0002
1	1	0	1	-2	193.560	-0.0012
0	1	0	1	-2	188.201	0.0005
0	0	0	1	-2	-32.281	0.0002
1	0	0	1	-2	-32.128	0.0002
2	0	0	1	0	27.432	0.0030
1	0	0	1	0	27.322	-0.0163
0	0	0	1	0	27.212	0.0076
1	0	0	-1	0	-27.104	0.0002
1	-1	0	1	2	14.698	-0.0003
0	1	0	-1	-2	-14.666	0.0001
2	1	0	1	0	13.747	0.0003
1	1	0	1	0	13.719	-0.0013
0	1	0	1	0	13.691	0.0006
3	-1	0	3	0	13.603	0.0002
1	0	0	1	2	9.585	-0.0002
1	2	0	1	0	9.159	-0.0001
3	0	0	3	0	9.107	-0.0026
2	0	0	3	0	9.095	-0.0010
3	-1	0	3	2	7.080	-0.0001
3	1	0	3	0	6.845	-0.0005
2	1	0	3	0	6.838	-0.0002

Tabla 8.2: Principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon = -\Delta I: \sum_i A_i \sin(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ . Efecto de la parte de segundo orden del potencial de la Luna.  $A$  viene dada en mas.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ (mas)
3	-1	0	1	0	65502.202	-0.0028
2	-1	0	1	0	6159.136	0.0177
1	-1	0	1	0	3231.496	-0.0900
1	1	0	-1	0	-1656.612	0.0004
2	1	0	1	-2	199.232	0.0001

Tabla 8.2: Principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon = -\Delta I: \sum_i A_i \sin(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ . Efecto de la parte de segundo orden del potencial de la Luna.  $A$  viene dada en mas.

1	1	0	1	-2	193.560	-0.0010
1	0	0	1	-2	-32.128	0.0002
2	0	0	1	0	27.432	0.0015
1	0	0	1	0	27.322	-0.0140
1	0	0	-1	0	-27.104	0.0002
1	-1	0	1	2	14.698	-0.0002
2	1	0	1	0	13.747	0.0001
1	1	0	1	0	13.719	-0.0011
1	0	0	1	2	9.585	-0.0001
3	0	0	3	0	9.107	-0.0011
2	0	0	3	0	9.095	-0.0005
3	1	0	3	0	6.845	-0.0002

### 8.3 Términos de Oppolzer

El movimiento del plano ecuatorial viene determinado por los ángulos de Euler  $h_f, I_f$  (figura 1.3). De acuerdo con Kinoshita (1977), las relaciones entre las variables de Euler y Andoyer ( $h_f, I_f, \phi$  y  $h, l, g$ ) se derivan del triángulo esférico mostrado en la figura 1.12,

$$\cos I_f = \cos I \cos J - \sin I \sin J \cos g,$$

$$\frac{\sin(h_f - h)}{\sin J} = \frac{\sin(\phi - l)}{\sin I} = \frac{\sin g}{\sin I_f}.$$

El ángulo  $J$  formado entre el vector momento angular y el eje de figura de la Tierra es del orden de  $10^{-6}$  rad, y por consiguiente, despreciando los términos de segundo orden en  $J$ , tenemos

$$h_f = h + \frac{J}{\sin I} \sin g + O(J^2),$$

$$I_f = I + J \cos g + O(J^2),$$

$$\phi = l + g - J \cot I \sin g + O(J^2),$$

y entonces,

$$h_f = h + \frac{J}{\sin I} \sin g,$$

$$I_f = I + J \cos g.$$

Así,

$$\begin{aligned}\Delta(\delta h_f) &= \Delta(h_f - h) \approx \Delta\left(\frac{J}{\sin I} \sin g\right), \\ \Delta(\delta I_f) &= \Delta(I_f - I) \approx \Delta(J \cos g).\end{aligned}$$

Una vez las derivadas han sido calculadas, obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta(h_f - h) &= \frac{1}{\sin I} \left( \sin g \frac{\mathcal{H}}{\partial l} - \sin g \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g} \right) + \frac{1}{\sin I} (\mathcal{H} \cos g), \\ \Delta(I_f - I) &= \cos g \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g} \right) - \mathcal{H} \sin g.\end{aligned}\tag{8.3}$$

Los segundos miembros de estas ecuaciones se conocen como *términos de Oppolzer para el plano de figura*. Estos han sido calculados con el uso del procesador simbólico de series de Kinoshita desarrollado. Para ello, comenzamos definiendo la serie  $\mathcal{P} = P_3^0(\sin \delta)$ , y la expresamos, como en el caso del cálculo de los términos de Poisson, en las variables esféricas  $(\lambda, \beta)$ . Los términos de Oppolzer son los asociados a la parte del potencial en  $\sin J$ , y son los que se toman para formar la función  $\mathcal{H}$  de las ecuaciones (8.3).

Seguidamente llevamos a cabo las sustituciones siguientes, como en el cálculo de los términos de Poisson:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^0(\sin \beta_M) &= \sum_{\nu} G_{\nu}^0 \sin \Theta_{\nu}, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M &= \sum_{\nu} G_{\nu}^1 \sin \Theta_{\nu}, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M &= \sum_{\nu} G_{\nu}^2 \sin \Theta_{\nu}, \\ \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^3(\sin \beta_M) \cos 3\lambda_M &= \sum_{\nu} G_{\nu}^3 \sin \Theta_{\nu},\end{aligned}$$

con  $\Theta_{\nu} = i_1 l_M + i_2 l_S + i_3 F + i_4 D + i_5 \Omega$ . Una vez desarrollados los armónicos esféricos, calculamos la función generatriz ( $\mathcal{H}$  en (8.3)). Las ecuaciones (8.3) dan los términos de Oppolzer de las series de nutación en longitud y oblicuidad respectivamente. Las derivaciones se llevan a cabo de manera automática con el procesador. En las tablas 8.3 y 8.4 mostramos los resultados obtenidos. Hay que resaltar que ninguno de estos términos fue considerado en las sucesivas revisiones de Souchay, Kinoshita y sus colaboradores, aunque varios de los términos exceden su nivel de truncación de  $0.1 \mu\text{as}$ .

Tabla 8.3: Términos de Oppolzer. Principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\psi$ :  $\sum_i A_i \cos(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ . Efecto de la parte de segundo orden del potencial de la Luna.  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	-1	0	1	0	3231.49562	-0.0698
1	1	0	1	-2	193.55971	-0.0130
1	0	0	1	-2	-32.12822	-0.0145
2	0	0	1	0	27.43183	0.1368
1	0	0	1	0	27.32158	-1.3057
0	0	0	1	0	27.21222	0.0102
1	0	0	-1	0	-27.10373	-0.0155
1	-1	0	1	2	14.69814	-0.0423
2	1	0	1	0	13.74653	0.0233
1	1	0	1	0	13.71879	-0.2178
3	-1	0	3	0	13.60328	0.0190
1	0	0	1	2	9.58520	-0.0372
1	2	0	1	0	9.15882	-0.0268
3	0	0	3	0	9.10719	-0.3488
2	0	0	3	0	9.09501	-0.1433
1	0	0	3	0	9.08286	-0.0135
3	-1	0	3	2	7.08025	-0.0185
3	1	0	3	0	6.84486	-0.0995
2	1	0	3	0	6.83798	-0.0408
3	0	0	3	2	5.63286	-0.0179
3	2	0	3	0	5.48286	-0.0180

Tabla 8.4: Términos de Oppolzer. Principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$ :  $\sum_i A_i \sin(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ . Efecto de la parte de segundo orden del potencial de la Luna.  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	-1	0	1	0	3231.49562	-0.0129
2	0	0	1	0	27.43183	0.0458
1	0	0	1	0	27.32158	-0.2562
0	0	0	1	0	27.21222	0.1106
1	1	0	1	0	13.71879	-0.0451
0	1	0	1	0	13.69116	0.0181
3	0	0	3	0	9.10719	-0.1295
2	0	0	3	0	9.09501	-0.0492
3	1	0	3	0	6.84486	-0.0371
2	1	0	3	0	6.83798	-0.0141





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



## Capítulo 9

### Efecto de los armónicos no zonales de tercer orden

La influencia de los coeficientes del geopotencial  $C_3^m$  y  $S_3^m$ , con  $m = 1, 2, 3$ , fue considerada desde un punto de vista hamiltoniano por primera vez en 1998 por Folgueira *et al*, cuando su importancia es del mismo orden que la de los términos del  $J_3$  (Folgueira, 1998). Estos coeficientes están asociados a las nutaciones diurnas y subdiurnas.

En este capítulo estudiaremos el efecto de los coeficientes  $C_3^m$  y  $S_3^m$  (para  $m = 1, 2, 3$ ) en las series de nutación de la Tierra. La comparación con las soluciones de otros autores se hará en el capítulo 12. La parte del potencial lunar asociada al efecto de estos coeficientes puede escribirse como sigue:

$$U_3 = -\frac{\mathcal{G}M_M M_\oplus a_\oplus^3}{r_M^4} \sum_{m=1}^3 P_3^m(\sin \delta) \times (C_3^m \cos m\alpha + S_3^m \sin m\alpha), \quad (9.1)$$

siendo  $M_M$  la masa del cuerpo perturbador (Luna),  $\delta, \alpha$  su latitud y longitud respecto del plano del Ecuador,  $r$  la distancia del cuerpo perturbador a la Tierra, y  $M_\oplus$  y  $a_\oplus$  la masa y radio ecuatorial de la Tierra. Los coeficientes  $C_3^m$  y  $S_3^m$  son los coeficientes armónicos no zonales del geopotencial (para  $m = 1$ , los diurnos; para  $m = 2$  los semidiurnos). La expresión desarrollada toma la forma

$$\begin{aligned} U_3 = & -\frac{\mathcal{G}M_p M_\oplus a_\oplus^3}{r^4} P_3^1(\sin \delta) \times (C_3^1 \cos \alpha + S_3^1 \sin \alpha) - \\ & -\frac{\mathcal{G}M_p M_\oplus a_\oplus^3}{r^4} P_3^2(\sin \delta) \times (C_3^2 \cos 2\alpha + S_3^2 \sin 2\alpha) - \\ & -\frac{\mathcal{G}M_p M_\oplus a_\oplus^3}{r^4} P_3^3(\sin \delta) \times (C_3^3 \cos 3\alpha + S_3^3 \sin 3\alpha). \end{aligned}$$

Utilizaremos la relación

$$C_3^m \cos m\alpha + S_3^m \sin m\alpha = \sqrt{(C_3^m)^2 + (S_3^m)^2} \cos(m\alpha + \tau_3^m),$$

para introducir el parámetro  $\tau_3^m$  de Folgueira *et al.*,

$$\tan \tau_3^m = -\frac{S_3^m}{C_3^m},$$

en lugar del habitual, definido como  $\tan m\tau_3^m = -S_3^m/C_3^m$ . Por consiguiente, partiremos del potencial inicial:

$$P_3^m(\sin \delta) \exp i(m\alpha + \tau_3^m) = P_3^m(\sin \delta) \exp i(m\alpha) \exp i(\tau_3^m),$$

al que aplicaremos el teorema de Wigner sobre  $P_3^m(\sin \delta) \exp i(m\alpha)$  para expresarlo en las variables adecuadas, como se ha hecho al considerar la parte principal del potencial lunisolar. Se obtiene entonces

$$\begin{aligned} P_3^m(\sin \delta_M) e^{i(m\alpha_M + \tau_3^m)} &= \sum_{\varrho, \epsilon = \pm 1} \sum_{m', m''=0}^3 \bar{Q}_3^{(m, m')}(\varrho, \cos J) \times \\ &\times \bar{Q}_3^{(m', m'')}(\epsilon, \cos I) \times P_3^{m''}(\sin \beta_M) \times \\ &\times \exp i [m''\rho\epsilon(\lambda_M - h) - ml - m'\rho g + \\ &+ \frac{\pi}{2}(m - m') + \frac{\pi}{2}\rho(m' - m'') + \tau_3^m]. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Analizaremos a continuación las contribuciones de los diferentes armónicos no zonales ( $m = 1, 2, 3$ ). El manipulador permite el estudio de la influencia de los diferentes términos por separado. De este modo procederemos definiendo primeramente las siguientes series de Kinoshita:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= -\frac{\mathcal{G}M_p M_{\oplus} a_{\oplus}^3}{r^4} J_3^1 \cos(\alpha + \tau_3^1) \times P_3^1(\sin \delta), \\ \mathcal{K}_2 &= -\frac{\mathcal{G}M_p M_{\oplus} a_{\oplus}^3}{r^4} J_3^2 \cos(2\alpha + \tau_3^2) \times P_3^2(\sin \delta), \\ \mathcal{K}_3 &= -\frac{\mathcal{G}M_p M_{\oplus} a_{\oplus}^3}{r^4} J_3^3 \cos(3\alpha + \tau_3^3) \times P_3^3(\sin \delta), \end{aligned} \quad (9.3)$$

y actuando separadamente sobre cada una de ellas para calcular las series de nutación.

## 9.1 Efecto de los coeficientes $C_3^1$ y $S_3^1$

Después de aplicar dos veces consecutivas el teorema de Wigner según se muestra en (9.2), obtenemos la contribución  $\mathcal{K}_1$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 = & -\cos(\delta - l - 3\lambda) P_3^3(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(0,3)}(-1, \cos I) + \\
& + \sin(\delta - l - 2\lambda) P_3^2(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(0,2)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(\delta - l - \lambda) P_3^1(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(0,1)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(\delta - l) P_3^0(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(0,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(\delta - l + \lambda) P_3^1(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(0,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(\delta - l + 2\lambda) P_3^2(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(0,2)}(1, \cos I) - \\
& - \cos(\delta - l + 3\lambda) P_3^3(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,0)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(0,3)}(1, \cos I) - \\
& - \cos(g - \delta + l - 3\lambda) P_3^3(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,3)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(g - \delta + l - 2\lambda) P_3^2(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,2)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g - \delta + l - \lambda) P_3^1(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(g - \delta + l) P_3^0(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g - \delta + l + \lambda) P_3^1(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,1)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(g - \delta + l + 2\lambda) P_3^2(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,2)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(g - \delta + l + 3\lambda) P_3^3(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,3)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(g + \delta - l - 3\lambda) P_3^3(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,3)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(g + \delta - l - 2\lambda) P_3^2(\sin\beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,2)}(1, \cos I) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos(g + \delta - l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(g + \delta - l) P_3^0(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g + \delta - l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,1)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(g + \delta - l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,2)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(g + \delta - l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(1,3)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(2g - \delta + l - 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,3)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(2g - \delta + l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,2)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(2g - \delta + l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(2g - \delta + l) P_3^0(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(2g - \delta + l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,1)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(2g - \delta + l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,2)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(2g - \delta + l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,3)}(-1, \cos I) + \\
& + \cos(2g + \delta - l - 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,3)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(2g + \delta - l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,2)}(1, \cos I) - \\
& - \cos(2g + \delta - l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,1)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(2g + \delta - l) P_3^0(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,0)}(1, \cos I) - \\
& - \cos(2g + \delta - l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,1)}(-1, \cos I) + \\
& + \sin(2g + \delta - l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,2)}(-1, \cos I) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos(2g + \delta - l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(2,3)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(3g - \delta + l - 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,3)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(3g - \delta + l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,2)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(3g - \delta + l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(3g - \delta + l) P_3^0(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(3g - \delta + l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,1)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(3g - \delta + l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,2)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(3g - \delta + l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,3)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(3g + \delta - l - 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,3)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(3g + \delta - l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,2)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(3g + \delta - l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,1)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(3g + \delta - l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,1)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(3g + \delta - l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,2)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(3g + \delta - l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(-1, \cos J) \bar{Q}_3^{(3,3)}(-1, \cos I).
\end{aligned}$$

El código en C++ para el cálculo de la serie anterior viene dado por:

```

p="P_3^1(\\sin delta)\\exp(alpha)";
p=p.tmawigner("delta","alpha","b","a","J","l");
p=p.tmawigner("b","a","beta","lambda","I","g");
p=p*e("delta"); p=p.partereal(); p=p.homogenea();

```

La variable  $\delta$  se introduce con el objeto de tener en cuenta en la exponencial compleja a la variable  $\tau_3^1$ .

En la expresión del geopotencial suele sacarse factor común los diferentes polinomios modificados de Jacobi en la variable de inclinación  $J$  para estudiar los diferentes efectos en las series de nutación. De este modo, la serie  $\mathcal{K}_1$  se descompone en las siguientes subseries:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1^1 = \bar{Q}_3^{(1,3)}(-1, \cos J) \times [ & -\cos(3g + \delta - l - 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,3)}(1, \cos I) - \\ & - \sin(3g + \delta - l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,2)}(1, \cos I) + \\ & + \cos(3g + \delta - l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,1)}(1, \cos I) + \\ & + \cos(3g + \delta - l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,1)}(-1, \cos I) - \\ & - \sin(3g + \delta - l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,2)}(-1, \cos I) - \\ & - \cos(3g + \delta - l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,3)}(-1, \cos I) \quad ] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1^2 = \bar{Q}_3^{(1,3)}(1, \cos J) \times [ & -\cos(3g - \delta + l - 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,3)}(1, \cos I) \\ & - \sin(3g - \delta + l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,2)}(1, \cos I) + \\ & + \cos(3g - \delta + l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,1)}(1, \cos I) + \\ & + \sin(3g - \delta + l) P_3^0(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,0)}(1, \cos I) + \\ & + \cos(3g - \delta + l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,1)}(-1, \cos I) - \\ & - \sin(3g - \delta + l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,2)}(-1, \cos I) - \\ & - \cos(3g - \delta + l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(3,3)}(-1, \cos I) \quad ] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1^3 = \bar{Q}_3^{(1,2)}(-1, \cos J) \times [ & \cos(2g + \delta - l - 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,3)}(1, \cos I) \\
& + \sin(2g + \delta - l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,2)}(1, \cos I) - \\
& - \cos(2g + \delta - l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,1)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(2g + \delta - l) P_3^0(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,0)}(1, \cos I) - \\
& - \cos(2g + \delta - l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,1)}(-1, \cos I) + \\
& + \sin(2g + \delta - l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,2)}(-1, \cos I) + \\
& + \cos(2g + \delta - l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,3)}(-1, \cos I) ] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1^4 = \bar{Q}_3^{(1,2)}(1, \cos J) \times [ & -\cos(2g - \delta + l - 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,3)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(2g - \delta + l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,2)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(2g - \delta + l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(2g - \delta + l) P_3^0(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(2g - \delta + l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,1)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(2g - \delta + l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,2)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(2g - \delta + l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(2,3)}(-1, \cos I) ] ,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1^5 = \bar{Q}_3^{(1,1)}(-1, \cos J) \times [ & -\cos(g + \delta - l - 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(g + \delta - l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g + \delta - l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(g + \delta - l) P_3^0(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g + \delta - l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(g + \delta - l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(g + \delta - l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(-1, \cos I) ] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1^6 = \bar{Q}_3^{(1,1)}(1, \cos J) \times [ & -\cos(g - \delta + l - 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(1, \cos I) - \\
& - \sin(g - \delta + l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g - \delta + l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(1, \cos I) + \\
& + \sin(g - \delta + l) P_3^0(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,0)}(1, \cos I) + \\
& + \cos(g - \delta + l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,1)}(-1, \cos I) - \\
& - \sin(g - \delta + l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,2)}(-1, \cos I) - \\
& - \cos(g - \delta + l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) \bar{Q}_3^{(1,3)}(-1, \cos I) ] .
\end{aligned}$$

Para sacar factor común hemos empleado el código:

```
k=p.sacarfactor ("J");
```

Después de efectuar la aproximación  $J \approx 0$ , la serie resultante es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 = & -0.125 \cos(g - \delta + l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) - \\
& - 0.125 \cos(g - \delta + l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) - \\
& - 0.125 \sin I \sin(g - \delta + l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) - \\
& - 1.500 \sin I \sin(g - \delta + l) P_3^0(\sin \beta) - \\
& - 0.125 \sin I \sin(g - \delta + l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) - \\
& - 0.0625(\sin I)^2 \cos(g - \delta + l - 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) - \\
& - 0.0625(\sin I)^2 \cos(g - \delta + l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) - \\
& - 1.375 \cos I \cos(g - \delta + l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) + \\
& + 1.375 \cos I \cos(g - \delta + l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) + \\
& + 0.250 \cos I \sin I \sin(g - \delta + l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) - \\
& - 0.250 \cos I \sin I \sin(g - \delta + l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) - \\
& - 0.0625 \cos I (\sin I)^2 \cos(g - \delta + l - 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) + \\
& + 0.0625 \cos I (\sin I)^2 \cos(g - \delta + l + 3\lambda) P_3^3(\sin \beta) + \\
& + 0.625 (\cos I)^2 \cos(g - \delta + l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) + \\
& + 0.625 (\cos I)^2 \cos(g - \delta + l + \lambda) P_3^1(\sin \beta) + \\
& + 0.375 (\cos I)^2 \sin I \sin(g - \delta + l - 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) + \\
& + 7.500 (\cos I)^2 \sin I \sin(g - \delta + l) P_3^0(\sin \beta) + \\
& + 0.375 (\cos I)^2 \sin I \sin(g - \delta + l + 2\lambda) P_3^2(\sin \beta) +
\end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
& + 1.875(\cos I)^3 \cos(g - \delta + l - \lambda) P_3^1(\sin \beta) - \\
& - 1.875(\cos I)^3 \cos(g - \delta + l + \lambda) P_3^1(\sin \beta).
\end{aligned}$$

Realizada dicha simplificación pasamos ahora a sustituir los desarrollos de los armónicos esféricos en variables de Delaunay de la Luna:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^0(\sin \beta) &= \sum_i G_i^0 \sin \Theta_i, \\
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^1(\sin \beta) \sin \lambda &= \sum_i G_i^1 \sin \Theta_i, \\
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^1(\sin \beta) \cos \lambda &= \sum_i \bar{G}_i^1 \cos \Theta_i, \\
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^2(\sin \beta) \sin 2\lambda &= \sum_i \bar{G}_i^2 \cos \Theta_i, \\
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^2(\sin \beta) \cos 2\lambda &= \sum_i G_i^2 \sin \Theta_i, \\
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^3(\sin \beta) \sin 3\lambda &= \sum_i G_i^3 \sin \Theta_i, \\
\left(\frac{a_M}{r_M}\right)^4 P_3^3(\sin \beta) \cos 3\lambda &= \sum_i \bar{G}_i^3 \cos \Theta_i,
\end{aligned}$$

en donde

$$G_i^1 = \bar{G}_i^1, \quad \bar{G}_i^2 = -G_i^2, \quad G_i^3 = \bar{G}_i^3,$$

y  $\Theta_i$  es una combinación lineal de las variables  $\Omega, l_M, l_S, F$  y  $D$ . En lo que resta de capítulo identificaremos las anteriores series de Poisson de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_3^0 &= \sum_i G_i^0 \sin \Theta_i, \\
\mathcal{P}_3^1|_s &= \sum_i G_i^1 \sin \Theta_i, & \mathcal{P}_3^1|_c &= \sum_i \bar{G}_i^1 \cos \Theta_i, \\
\mathcal{P}_3^2|_s &= \sum_i \bar{G}_i^2 \cos \Theta_i, & \mathcal{P}_3^2|_c &= \sum_i G_i^2 \sin \Theta_i, \\
\mathcal{P}_3^3|_s &= \sum_i G_i^3 \sin \Theta_i, & \mathcal{P}_3^3|_c &= \sum_i \bar{G}_i^3 \cos \Theta_i.
\end{aligned}$$

En la lectura de las series, se dividen los coeficientes por 3, dado que este coeficiente viene incluido en la constante  $k_{M3}^1$ . El término  $(a_M/r_M)^4$  que no aparece en la serie  $\mathcal{K}_1$  es común a todos los términos de la serie que representa el potencial, de modo que no lo incluimos

explícitamente en  $\mathcal{K}_1$ . La sustitución de los armónicos esféricos tiene asociado el siguiente código:

```
p=p.delaunay (3, 0, "beta", "lambda", p30, p30);
p=p.delaunay (3, 1, "beta", "lambda", p31c, p31s);
p=p.delaunay (3, 2, "beta", "lambda", p32c, p32s);
p=p.delaunay (3, 3, "beta", "lambda", p33c, p33s);
```

Una vez hemos realizado la sustitución de los armónicos esféricos, calculamos la función generatriz  $\mathcal{W}_1$ ,

$$\mathcal{W}_1 = \int (\mathcal{K}_1)_{\text{per}} dt,$$

en donde el subíndice per representa la parte periódica de la serie.

```
p=p.generatrix ();
```

Obtenemos seguidamente la serie  $\mathcal{H}_1$ ,

$$\mathcal{H}_1 = k_{M3}^1 \mathcal{W}_1,$$

en donde la constante  $k_{M3}^1$  viene dada por

$$k_{M3}^1 = \frac{\sqrt{(C_3^1)^2 + (S_3^1)^2}}{J_2} \frac{a_{\oplus}}{a_M} k_M^{J_2} = 0''.2549974/(\text{siglo juliano}).$$

Finalmente, obtenemos las series de nutación  $\Delta h_3^1$  y  $\Delta I_3^1$ :

$$\Delta h_3^1 = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial H} = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial I},$$

$$\Delta I_3^1 = \frac{1}{G} \left( -\frac{1}{\sin I} \Delta H + \cot I \Delta G \right) = \frac{1}{G} \left( \frac{1}{\sin I} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h} - \cot I \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g} \right).$$

El código desarrollado para la obtención de estas series viene dado seguidamente:

```
q=p;
p=p.derive ("H");
q1=q.derive ("h");
aux1="+1";
aux1.ponvar (POLINOMIAL, positabla("G"), -1);
aux1.ponvar (POLINOMIAL, positabla("sin I"), -1);
q1=q1*aux1;
q2=q.derive ("g");
aux2="+1";
```

```

aux2.ponvar (POLINOMIAL, positabla("G"), -1);
aux2.ponvar (POLINOMIAL, positabla("cos I"), 1);
aux2.ponvar (POLINOMIAL, positabla("sin I"), -1);
q2=q2*aux2;
q=q1-q2;

```

Después de las derivaciones podemos eliminar las frecuencias y las variables  $I$  y  $G$  ( $G$  se hace 1 porque va incluida en la constante  $k_{M3}^1$ ):

```

p=p.sustfrecuencias ();
q=q.sustfrecuencias ();
p=p.sust ("sin I", -0.39777716);
p=p.sust ("cos I", 0.9174820603054 );
p=p.sust ("G", 1.0);
q=q.sust ("sin I", -0.39777716);
q=q.sust ("cos I", 0.9174820603054 );
q=q.sust ("G", 1.0);

```

Finalmente incluimos en la serie la constante  $k_{M3}^1$  y sustituimos  $\delta = \tau_3^1$  por su valor.

```

k31=2.549974E0; p=p*k31; q=q*k31;
p=p.sust ("delta", atan (-0.26918523/2.19018166));
q=q.sust ("delta", atan (-0.26918523/2.19018166));

```

En las tablas 9.1 y 9.2 mostramos el resultado final para las series de nutación en longitud y oblicuidad  $\Delta h_3^1$  y  $\Delta I_3^1$ .

Tabla 9.1:  $\Delta\psi_3^1 = -\Delta h_3^1 = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D + i_6l + i_7g$ . Esta tabla ha sido calculada con un nivel de truncación de  $0.01 \mu\text{as}$ .  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$A_s$ (seno)	$A_c$ (coseno)
3	1	0	3	2	-1	-1	-1.26803	-0.0208	0.0026
3	2	0	3	0	-1	-1	-1.21899	-0.0658	0.0081
3	0	0	3	2	-1	-1	-1.21182	-0.0657	0.0081
2	1	0	3	0	-1	-1	-1.16755	-0.0464	0.0057
3	1	0	3	0	-1	-1	-1.16735	-0.3640	0.0447
3	-1	0	3	2	-1	-1	-1.16077	-0.0677	0.0083
1	1	0	1	2	-1	-1	-1.15993	0.0175	-0.0021
1	0	0	3	0	-1	-1	-1.12027	0.0272	-0.0033
2	0	0	3	0	-1	-1	-1.12009	-0.1621	0.0199
3	0	0	3	0	-1	-1	-1.11990	-1.2724	0.1564

Tabla 9.1:  $\Delta\psi_3^1 = -\Delta h_3^1 = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D + i_6l + i_7g$ . Esta tabla ha sido calculada con un nivel de truncación de  $0.01 \mu\text{as}$ .  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $\mu\text{as}$ .

1	2	0	1	0	-1	-1	-1.11913	0.0542	-0.0067
1	0	0	1	2	-1	-1	-1.11308	0.0751	-0.0092
3	1	0	3	-2	-1	-1	-1.08182	0.0171	-0.0021
3	-1	0	3	0	-1	-1	-1.07616	0.0693	-0.0085
0	1	0	1	0	-1	-1	-1.07562	0.0245	-0.0030
1	1	0	1	0	-1	-1	-1.07545	0.4326	-0.0532
2	1	0	1	0	-1	-1	-1.07528	0.0262	-0.0032
1	-1	0	1	2	-1	-1	-1.06986	0.0838	-0.0103
1	0	0	-1	0	1	1	1.03537	0.0154	0.0019
0	0	0	1	0	-1	-1	-1.03521	0.1444	-0.0177
1	0	0	1	0	-1	-1	-1.03505	2.5472	-0.3131
2	0	0	1	0	-1	-1	-1.03489	0.1531	-0.0188
1	0	0	1	-2	1	1	1.02922	0.0142	0.0017
1	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00243	0.0250	-0.0031
1	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99758	0.1337	-0.0164
1	-1	0	1	0	1	1	0.99696	0.0656	0.0081
1	1	0	1	-2	1	1	0.99216	0.0122	0.0015
1	0	0	1	-2	-1	-1	-0.96725	0.0272	-0.0033
2	0	0	1	0	1	1	0.96229	-0.0630	-0.0077
1	0	0	1	0	1	1	0.96215	1.1627	0.1429
0	0	0	1	0	1	1	0.96201	0.1342	0.0165
1	0	0	-1	0	-1	-1	-0.96188	0.0290	-0.0036
1	-1	0	1	2	1	1	0.93390	0.0359	0.0044
1	1	0	1	0	1	1	0.92969	0.1837	0.0226
0	1	0	1	0	1	1	0.92956	0.0211	0.0026
1	0	0	1	2	1	1	0.90329	0.0299	0.0037
0	0	0	1	2	1	1	0.90317	0.0034	0.0004
3	0	0	3	0	1	1	0.89884	0.0941	0.0116
2	0	0	3	0	1	1	0.89872	0.0575	0.0071
1	0	0	3	0	1	1	0.89861	0.0107	0.0013
3	1	0	3	0	1	1	0.87045	0.0250	0.0031
2	1	0	3	0	1	1	0.87034	0.0153	0.0019

Tabla 9.2:  $\Delta\epsilon_3^1 = -\Delta l_3^1 = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D + i_6l + i_7g$ . La tabla ha sido calculada con un nivel de truncación de  $0.001 \mu\text{as}$ .  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$A_s$ (seno)	$A_c$ (coseno)
3	2	0	3	0	-1	-1	-1.21899	0.0038	0.0311
3	0	0	3	2	-1	-1	-1.21182	0.0038	0.0311
2	1	0	3	0	-1	-1	-1.16755	0.0043	0.0354

Tabla 9.2:  $\Delta\epsilon_3^1 = -\Delta I_3^1 = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D + i_6l + i_7g$ . La tabla ha sido calculada con un nivel de truncación de  $0.001 \mu\text{as}$ .  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $\mu\text{as}$ .

3	1	0	3	0	-1	-1	-1.16735	0.0211	0.1720
2	0	0	3	0	-1	-1	-1.12009	0.0152	0.1237
3	0	0	3	0	-1	-1	-1.11990	0.0739	0.6015
3	-1	0	3	0	-1	-1	-1.07616	-0.0040	-0.0327
0	1	0	1	0	-1	-1	-1.07562	0.0024	0.0192
1	1	0	1	0	-1	-1	-1.07545	0.0014	0.0117
2	1	0	1	0	-1	-1	-1.07528	-0.0025	-0.0200
0	0	0	1	0	-1	-1	-1.03521	0.0139	0.1133
1	0	0	1	0	-1	-1	-1.03505	0.0085	0.0689
2	0	0	1	0	-1	-1	-1.03489	-0.0144	-0.1169
1	-1	0	1	0	1	1	0.99696	0.0038	-0.0307
2	0	0	1	0	1	1	0.96229	-0.0033	0.0270
1	0	0	1	0	1	1	0.96215	0.0668	-0.5434
0	0	0	1	0	1	1	0.96201	0.0129	-0.1053
1	-1	0	1	2	1	1	0.93390	0.0021	-0.0168
1	1	0	1	0	1	1	0.92969	0.0105	-0.0858
0	1	0	1	0	1	1	0.92956	0.0020	-0.0166
1	0	0	1	2	1	1	0.90329	0.0017	-0.0140
1	2	0	1	0	1	1	0.89934	0.0012	-0.0100
3	0	0	3	0	1	1	0.89884	0.0048	-0.0391
2	0	0	3	0	1	1	0.89872	0.0030	-0.0247
3	1	0	3	0	1	1	0.87045	0.0013	-0.0104

## 9.2 Efecto de los coeficientes $C_3^2$ , $S_3^2$ , $C_3^3$ y $S_3^3$

Para determinar la influencia de las partes del geopotencial dadas por  $\mathcal{K}_2$  y  $\mathcal{K}_3$  (9.3) puede seguirse el método anterior. Una vez desarrolladas ambas contribuciones al potencial, realizamos en  $\mathcal{K}_2$  y  $\mathcal{K}_3$  las sustituciones de los armónicos esféricos:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3^0 &= \sum_i G_i^0 \sin \Theta_i, \\ \mathcal{P}_3^1|_s &= \sum_i G_i^1 \sin \Theta_i, & \mathcal{P}_3^1|_c &= \sum_i \bar{G}_i^1 \cos \Theta_i, \\ \mathcal{P}_3^2|_s &= \sum_i \bar{G}_i^2 \cos \Theta_i, & \mathcal{P}_3^2|_c &= \sum_i G_i^2 \sin \Theta_i, \\ \mathcal{P}_3^3|_s &= \sum_i G_i^3 \sin \Theta_i, & \mathcal{P}_3^3|_c &= \sum_i \bar{G}_i^3 \cos \Theta_i. \end{aligned}$$

También aquí los coeficientes de las series deben dividirse por 3, pues dicho factor se incluye en las constantes  $k_{M3}^2$  y  $k_{M3}^3$ . Calculamos ahora las funciones generatrices

$$\mathcal{W}_m = \int (\mathcal{K}_m)_{\text{per}} dt, \quad m = 2, 3.$$

El geopotencial toma la forma

$$\mathcal{H}_m = k_{M3}^m \mathcal{W}_m, \quad m = 2, 3,$$

en donde las constantes  $k_{M3}^2$  y  $k_{M3}^3$  vienen dadas por

$$\begin{aligned} k_{M3}^2 &= 0'' .0432698 / (\text{siglo juliano}), \\ k_{M3}^3 &= 0'' .0255695 / (\text{siglo juliano}). \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos las series de nutación  $\Delta h_3^2, \Delta I_3^2, \Delta h_3^3, \Delta I_3^3$ :

$$\begin{aligned} \Delta h_3^m &= \frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial H} = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial I}, \\ \Delta I_3^m &= \frac{1}{G} \left( -\frac{1}{\sin I} \Delta H + \cot I \Delta G \right) = \frac{1}{G} \left( \frac{1}{\sin I} \frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial h} - \cot I \frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial g} \right). \end{aligned}$$

para  $m = 2, 3$ . Después de las derivaciones podemos eliminar las frecuencias y las variables  $I$  y  $G$  como en la sección anterior, y sustituir la variable  $\delta = \tau_3^m$  en cada serie:

$$\tau_3^2 = 0.6005013 \text{ rad}, \quad \tau_3^3 = -1.0995953 \text{ rad}.$$

Las tablas 9.3, 9.2, 9.3 y 9.2 recogen los resultados obtenidos para un nivel de truncación en las series de  $0.01 \mu\text{as}$ .

Tabla 9.3:  $\Delta\psi_3^2 = -\Delta h_3^2 = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 \Omega + i_2 l_M + i_3 l_S + i_4 F + i_5 D + i_6 l + i_7 g$ . La tabla ha sido calculada con un nivel de truncación de  $0.01 \mu\text{as}$ .  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$A_s$ (seno)	$A_c$ (coseno)
3	2	0	3	0	-2	-2	-0.54852	0.0118	-0.0173
3	0	0	3	2	-2	-2	-0.54706	0.0119	-0.0173
2	1	0	3	0	-2	-2	-0.53786	-0.0121	0.0176
3	1	0	3	0	-2	-2	-0.53781	0.0671	-0.0979
3	-1	0	3	2	-2	-2	-0.53641	0.0125	-0.0183
2	0	0	3	0	-2	-2	-0.52756	-0.0431	0.0629
3	0	0	3	0	-2	-2	-0.52752	0.2397	-0.3500
3	-1	0	3	0	-2	-2	-0.51761	-0.0133	0.0194
1	1	0	1	0	-2	-2	-0.51744	-0.0266	0.0388
2	1	0	1	0	-2	-2	-0.51740	0.0000	-0.0104
0	0	0	1	0	-2	-2	-0.50794	0.0278	-0.0406



Tabla 9.3:  $\Delta\psi_3^2 = -\Delta h_3^2 = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D + i_6l + i_7g$ . La tabla ha sido calculada con un nivel de truncación de  $0.01 \mu\text{as}$ .  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $\mu\text{as}$ .

1	0	0	1	0	-2	-2	-0.50790	-0.1596	0.2330
2	0	0	1	0	-2	-2	-0.50787	0.0424	-0.0619
1	-1	0	1	0	-2	-2	-0.49871	0.0000	0.0125
1	0	0	1	0	2	2	0.48970	0.0681	0.0994
0	0	0	1	0	2	2	0.48966	0.0268	0.0392
1	1	0	1	0	2	2	0.48115	0.0109	0.0160

Tabla 9.4:  $\Delta\epsilon_3^2 = -\Delta I_3^2 = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D + i_6l + i_7g$ . La tabla ha sido calculada con un nivel de truncación de  $0.01 \mu\text{as}$ .  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$A_s$ (seno)	$A_c$ (coseno)
3	2	0	3	0	-2	-2	-0.54852	-0.0106	0.0000
3	0	0	3	2	-2	-2	-0.54706	-0.0107	0.0000
3	1	0	3	0	-2	-2	-0.53781	-0.0603	-0.0413
3	-1	0	3	2	-2	-2	-0.53641	-0.0112	0.0000
3	0	0	3	0	-2	-2	-0.52752	-0.2155	-0.1476
3	-1	0	3	0	-2	-2	-0.51761	0.0120	0.0000
1	1	0	1	0	-2	-2	-0.51744	-0.0228	-0.0156
0	0	0	1	0	-2	-2	-0.50794	0.0178	0.0122
1	0	0	1	0	-2	-2	-0.50790	-0.1372	-0.0940
1	0	0	1	0	2	2	0.48970	0.0414	-0.0283
0	0	0	1	0	2	2	0.48966	0.0172	-0.0118

Tabla 9.5:  $\Delta\psi_3^3 = -\Delta h_3^3 = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D + i_6l + i_7g$ . La tabla ha sido calculada con un nivel de truncación de  $0.01 \mu\text{as}$ .  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$A_s$ (seno)	$A_c$ (coseno)
3	2	0	3	0	-3	-3	-0.35388	-0.0058	0.0113
3	0	0	3	2	-3	-3	-0.35327	-0.0058	0.0113
2	1	0	3	0	-3	-3	-0.34941	0.0056	-0.0109
3	1	0	3	0	-3	-3	-0.34939	-0.0328	0.0644
3	-1	0	3	2	-3	-3	-0.34880	-0.0061	0.0120
2	0	0	3	0	-3	-3	-0.34503	0.0201	-0.0394
3	0	0	3	0	-3	-3	-0.34502	-0.1180	0.2317
3	-1	0	3	0	-3	-3	-0.34075	0.0066	-0.0130

Tabla 9.5:  $\Delta\psi_3^3 = -\Delta h_3^3 = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D + i_6l + i_7g$ . La tabla ha sido calculada con un nivel de truncación de  $0.01 \mu\text{as}$ .  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $\mu\text{as}$ .

1	1	0	1	0	-3	-3	-0.34068	-0.0176	0.0345
0	0	0	1	0	-3	-3	-0.33653	0.0063	-0.0123
1	0	0	1	0	-3	-3	-0.33652	-0.1062	0.2084
2	0	0	1	0	-3	-3	-0.33650	-0.0200	0.0392
1	0	0	1	0	3	3	0.32843	0.0096	0.0187
0	0	0	1	0	3	3	0.32841	0.0061	0.0120

Tabla 9.6:  $\Delta\epsilon_3^3 = -\Delta I_3^3 = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D + i_6l + i_7g$ . La tabla ha sido calculada con un nivel de truncación de  $0.01 \mu\text{as}$ .  $A_s$  y  $A_c$  vienen dadas en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$A_s$ (seno)	$A_c$ (coseno)
3	1	0	3	0	-3	-3	-0.34939	-0.0256	-0.0130
2	0	0	3	0	-3	-3	-0.34503	0.0157	0.0080
3	0	0	3	0	-3	-3	-0.34502	-0.0922	-0.0469
1	1	0	1	0	-3	-3	-0.34068	-0.0137	-0.0070
1	0	0	1	0	-3	-3	-0.33652	-0.0829	-0.0422
2	0	0	1	0	-3	-3	-0.33650	-0.0156	-0.0080

En la sección 12.2 del capítulo 12, comparamos los resultados obtenidos con los correspondientes de Folgueira-Souchay-Kinoshita (1998). La tabla (9.7) muestra los valores de algunas constantes importantes y su origen.

Tabla 9.7: Valores numéricos de algunos coeficientes del geopotencial.

Parámetro	Valor	Origen
$J_2$	$-1082.626075 \times 10^{-6}$	IERS Standars
$J_3$	$2.532516 \times 10^{-6}$	IERS Standars
$J_4$	$-1.618563 \times 10^{-6}$	IERS Standars
$C_{22}$	$1.574410 \times 10^{-6}$	IERS Standars
$S_{22}$	$-0.903757 \times 10^{-6}$	IERS Standars
$C_{31}$	$2.19018166 \times 10^{-6}$	GEM-T3
$S_{31}$	$0.26918523 \times 10^{-6}$	GEM-T3
$C_{32}$	$0.30893556 \times 10^{-6}$	GEM-T3
$S_{32}$	$-0.21158167 \times 10^{-6}$	GEM-T3
$C_{33}$	$0.10044696 \times 10^{-6}$	GEM-T3

Tabla 9.7: Valores numéricos de algunos coeficientes del geopotencial.

$S_{33}$	$0.19715677 \times 10^{-6}$	GEM-T3
$C_{41}$	$-0.508638 \times 10^{-6}$	IERS Standars
$S_{41}$	$-0.449141 \times 10^{-6}$	IERS Standars

### 9.3 Términos de Oppolzer

El proceso de cálculo de los términos de Oppolzer debido a los armónicos no zonales de tercer orden es análogo al expuesto en la sección 8.3 del capítulo anterior. A continuación mostramos los resultados obtenidos. En la sección 12.2 del capítulo 12 se comparan nuestras tablas con las calculadas recientemente por Folgueira-Souchay-Kinoshita.

Tabla 9.8: Efecto de los coeficientes  $C_3^1, S_3^1$ . Términos de Oppolzer. Serie  $\Delta\psi_3^1$  (dada en  $\mu\text{s}$ ).

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$\Delta\psi_3^1$ (sin)	$\Delta\psi_3^1$ (cos)
2	1	0	3	0	-1	-1	-1.16755	0.1556	-0.0191
3	1	0	3	0	-1	-1	-1.16735	0.3837	-0.0472
1	0	0	3	0	-1	-1	-1.12027	0.1117	-0.0137
2	0	0	3	0	-1	-1	-1.12009	0.7148	-0.0879
3	0	0	3	0	-1	-1	-1.11990	1.6269	-0.2000
1	2	0	1	0	-1	-1	-1.11913	0.2246	-0.0276
1	0	0	1	2	-1	-1	-1.11308	0.3280	-0.0403
3	-1	0	3	0	-1	-1	-1.07616	-0.1186	0.0146
0	1	0	1	0	-1	-1	-1.07562	0.4676	-0.0575
1	1	0	1	0	-1	-1	-1.07545	2.8442	-0.3496
2	1	0	1	0	-1	-1	-1.07528	-0.1718	0.0211
1	-1	0	1	2	-1	-1	-1.06986	0.5949	-0.0731
1	0	0	-1	0	1	1	1.03537	0.4367	0.0537
0	0	0	1	0	-1	-1	-1.03521	5.6635	-0.6961
1	0	0	1	0	-1	-1	-1.03505	35.2492	-4.3323
2	0	0	1	0	-1	-1	-1.03489	-1.9705	0.2422
1	-2	0	1	0	1	1	1.03439	0.1507	0.0185
1	0	0	1	-2	1	1	1.02922	0.4820	0.0592
0	0	0	1	-2	1	1	1.02906	-0.1164	-0.0143
0	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00258	0.3722	-0.0457
1	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00243	2.5706	-0.3159
2	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00229	-0.1380	0.0170
1	-1	1	1	0	-1	-1	-1.00031	0.1022	-0.0126
0	0	0	1	-1	-1	-1	-1.00015	-0.0220	0.0027
1	0	0	1	-1	-1	-1	-1.00000	-0.1316	0.0162
1	-1	-1	1	0	1	1	0.99969	-0.1065	-0.0131
1	1	0	-1	0	1	1	0.99787	1.0264	0.1262
0	1	0	-1	0	1	1	0.99772	-25.0600	-3.0800

Tabla 9.8: Efecto de los coeficientes  $C_3^1, S_3^1$ . Términos de Oppolzer.  
Serie  $\Delta\psi_3^1$  (dada en  $\mu\text{as}$ ).

1	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99758	230.8152	-28.3684
2	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99743	-22.7459	2.7956
3	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99728	2.3666	-0.2909
1	0	-1	1	-1	-1	-1	-0.99727	513.7884	-63.1474
1	0	-1	1	-1	1	1	0.99727	-377.2197	-46.3624
3	-1	0	1	0	1	1	0.99725	-2.3602	-0.2901
2	-1	0	1	0	1	1	0.99711	22.7344	2.7942
1	-1	0	1	0	1	1	0.99696	-230.8135	-28.3682
0	1	0	-1	0	-1	-1	-0.99682	25.0541	-3.0793
1	1	0	-1	0	-1	-1	-0.99667	-1.0266	0.1262
0	1	1	-1	0	1	1	0.99501	-0.0236	-0.0029
1	-1	-1	1	0	-1	-1	-0.99486	0.1066	-0.0131
1	0	0	1	-1	1	1	0.99455	0.1317	0.0162
1	-1	1	1	0	1	1	0.99425	-0.1023	-0.0126
2	1	0	1	-2	1	1	0.99230	0.1369	0.0168
1	1	0	1	-2	1	1	0.99216	-2.5758	-0.3166
0	1	0	1	-2	1	1	0.99201	-0.3715	-0.0457
0	0	0	1	-2	-1	-1	-0.96738	0.1152	-0.0142
1	0	0	1	-2	-1	-1	-0.96725	-0.4878	0.0600
1	-2	0	1	0	-1	-1	-0.96272	-0.1527	0.0188
2	0	0	1	0	1	1	0.96229	1.8598	0.2286
1	0	0	1	0	1	1	0.96215	-35.7788	-4.3974
0	0	0	1	0	1	1	0.96201	-5.5959	-0.6878
1	0	0	-1	0	-1	-1	-0.96188	-0.4430	0.0544
1	-1	0	1	2	1	1	0.93390	-0.6121	-0.0752
2	1	0	1	0	1	1	0.92981	0.1532	0.0188
1	1	0	1	0	1	1	0.92969	-2.9327	-0.3604
0	1	0	1	0	1	1	0.92956	-0.4566	-0.0561
1	0	0	1	2	1	1	0.90329	-0.3431	-0.0422
1	2	0	1	0	1	1	0.89934	-0.2355	-0.0289
3	0	0	3	0	1	1	0.89884	-0.9714	-0.1194
2	0	0	3	0	1	1	0.89872	-0.6024	-0.0740
1	0	0	3	0	1	1	0.89861	-0.1172	-0.0144
3	1	0	3	0	1	1	0.87045	-0.2003	-0.0246
2	1	0	3	0	1	1	0.87034	-0.1242	-0.0153

Tabla 9.9: Efecto de los coeficientes  $C_3^1, S_3^1$ . Términos de Oppolzer.  
Serie  $\Delta\epsilon_3^1$  (dada en  $\mu\text{as}$ ).

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon_3^1$ (sin)	$\Delta\epsilon_3^1$ (cos)
2	0	0	3	0	-1	-1	-1.12009	0.0241	0.1959
3	0	0	3	0	-1	-1	-1.11990	0.0155	0.1265
0	2	0	1	0	-1	-1	-1.11931	0.0015	0.0121
1	2	0	1	0	-1	-1	-1.11913	0.0121	0.0988
0	0	0	1	2	-1	-1	-1.11326	0.0026	0.0210
1	0	0	1	2	-1	-1	-1.11308	0.0176	0.1436
0	1	0	1	0	-1	-1	-1.07562	0.0223	0.1815

Tabla 9.9: Efecto de los coeficientes  $C_3^1, S_3^1$ . Términos de Oppolzer.  
Serie  $\Delta e_3^1$  (dada en  $\mu\text{as}$ ).

1	1	0	1	0	-1	-1	-1.07545	0.1485	1.2084
2	1	0	1	0	-1	-1	-1.07528	-0.0066	-0.0537
1	-1	0	1	2	-1	-1	-1.06986	0.0309	0.2516
1	0	0	-1	0	1	1	1.03537	0.0213	-0.1732
0	0	0	1	0	-1	-1	-1.03521	0.2735	2.2254
1	0	0	1	0	-1	-1	-1.03505	1.7801	14.4838
2	0	0	1	0	-1	-1	-1.03489	-0.0856	-0.6967
1	-2	0	1	0	1	1	1.03439	0.0073	-0.0598
1	0	0	1	-2	1	1	1.02922	0.0235	-0.1912
0	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00258	0.0182	0.1478
1	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00243	0.1262	1.0271
2	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00229	-0.0066	-0.0540
1	0	0	1	-1	-1	-1	-1.00000	-0.0064	-0.0525
1	1	0	-1	0	1	1	0.99787	0.0502	-0.4083
0	1	0	-1	0	1	1	0.99772	-1.2250	9.9668
1	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99758	11.2874	91.8377
2	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99743	-1.1115	-9.0432
3	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99728	0.1157	0.9412
1	0	-1	1	-1	-1	-1	-0.99727	25.1186	204.3733
1	0	-1	1	-1	1	1	0.99727	-18.4419	150.0494
3	-1	0	1	0	1	1	0.99725	-0.1154	0.9388
2	-1	0	1	0	1	1	0.99711	1.1115	-9.0433
1	-1	0	1	0	1	1	0.99696	-11.2845	91.8146
0	1	0	-1	0	-1	-1	-0.99682	1.2251	9.9674
1	1	0	-1	0	-1	-1	-0.99667	-0.0502	-0.4082
1	0	0	1	-1	1	1	0.99455	0.0064	-0.0524
2	1	0	1	-2	1	1	0.99230	0.0067	-0.0545
1	1	0	1	-2	1	1	0.99216	-0.1260	1.0250
0	1	0	1	-2	1	1	0.99201	-0.0182	0.1480
1	0	0	1	-2	-1	-1	-0.96725	-0.0232	-0.1889
1	-2	0	1	0	-1	-1	-0.96272	-0.0072	-0.0589
2	0	0	1	0	1	1	0.96229	0.0910	-0.7408
1	0	0	1	0	1	1	0.96215	-1.7542	14.2731
0	0	0	1	0	1	1	0.96201	-0.2768	2.2523
1	0	0	-1	0	-1	-1	-0.96188	-0.0210	-0.1707
1	-1	0	1	2	1	1	0.93390	-0.0301	0.2448
0	1	0	-1	-2	-1	-1	-0.93378	0.0048	0.0389
2	1	0	1	0	1	1	0.92981	0.0075	-0.0611
1	1	0	1	0	1	1	0.92969	-0.1442	1.1732
0	1	0	1	0	1	1	0.92956	-0.0228	0.1859
1	0	0	1	2	1	1	0.90329	-0.0169	0.1376
1	2	0	1	0	1	1	0.89934	-0.0116	0.0945
3	0	0	3	0	1	1	0.89884	-0.0476	0.3873
2	0	0	3	0	1	1	0.89872	-0.0296	0.2406
3	1	0	3	0	1	1	0.87045	-0.0098	0.0799

Tabla 9.10: Efecto de los coeficientes  $C_3^2, S_3^2$ . Términos de Oppolzer. Serie  $\Delta\psi_3^2$  (dada en  $\mu\text{as}$ ).

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$\Delta\psi_3^2$ (sin)	$\Delta\psi_3^2$ (cos)
3	2	0	3	0	-2	-2	-0.54852	0.0169	-0.0247
3	0	0	3	2	-2	-2	-0.54706	0.0169	-0.0247
2	1	0	3	0	-2	-2	-0.53786	0.0189	-0.0275
3	1	0	3	0	-2	-2	-0.53781	0.0952	-0.1390
3	-1	0	3	2	-2	-2	-0.53641	0.0177	-0.0259
2	0	0	3	0	-2	-2	-0.52756	0.0662	-0.0967
3	0	0	3	0	-2	-2	-0.52752	0.3385	-0.4943
1	2	0	1	0	-2	-2	-0.52735	0.0081	-0.0118
1	0	0	1	2	-2	-2	-0.52600	0.0112	-0.0163
3	-1	0	3	0	-2	-2	-0.51761	-0.0187	0.0273
0	1	0	1	0	-2	-2	-0.51748	-0.0099	0.0145
1	1	0	1	0	-2	-2	-0.51744	0.0642	-0.0937
2	1	0	1	0	-2	-2	-0.51740	-0.0107	0.0157
1	-1	0	1	2	-2	-2	-0.51615	0.0124	-0.0181
0	0	0	1	0	-2	-2	-0.50794	-0.0586	0.0855
1	0	0	1	0	-2	-2	-0.50790	0.3771	-0.5507
2	0	0	1	0	-2	-2	-0.50787	-0.0631	0.0922
1	-1	0	1	0	-2	-2	-0.49871	0.0198	-0.0289
1	-1	0	1	0	2	2	0.49856	-0.0077	-0.0112
1	0	0	1	0	2	2	0.48970	-0.1355	-0.1979
0	0	0	1	0	2	2	0.48966	-0.0544	-0.0794
1	1	0	1	0	2	2	0.48115	-0.0214	-0.0313
0	1	0	1	0	2	2	0.48111	-0.0086	-0.0125

Tabla 9.11: Efecto de los coeficientes  $C_3^2, S_3^2$ . Términos de Oppolzer. Serie  $\Delta\epsilon_3^2$  (dada en  $\mu\text{as}$ ).

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon_3^2$ (sin)	$\Delta\epsilon_3^2$ (cos)
2	0	0	3	0	-2	-2	-0.52756	0.0255	0.0175
3	0	0	3	0	-2	-2	-0.52752	-0.0349	-0.0239
1	1	0	1	0	-2	-2	-0.51744	0.0421	0.0289
0	0	0	1	0	-2	-2	-0.50794	-0.0351	-0.0241
1	0	0	1	0	-2	-2	-0.50790	0.2485	0.1702
2	0	0	1	0	-2	-2	-0.50787	-0.0238	-0.0163
1	-1	0	1	0	-2	-2	-0.49871	0.0131	0.0089
1	0	0	1	0	2	2	0.48970	-0.0800	0.0548
0	0	0	1	0	2	2	0.48966	-0.0327	0.0224
1	1	0	1	0	2	2	0.48115	-0.0126	0.0087

Tabla 9.12: Efecto de los coeficientes  $C_3^3, S_3^3$ . Términos de Oppolzer. Serie  $\Delta\psi_3^3$  (dada en  $\mu\text{as}$ ).

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$\Delta\psi_3^3$ (sin)	$\Delta\psi_3^3$ (cos)
3	2	0	3	0	-3	-3	-0.35388	0.0089	-0.0175
3	0	0	3	2	-3	-3	-0.35327	0.0089	-0.0175
2	1	0	3	0	-3	-3	-0.34941	0.0086	-0.0168
3	1	0	3	0	-3	-3	-0.34939	0.0504	-0.0989
3	-1	0	3	2	-3	-3	-0.34880	0.0094	-0.0184
2	0	0	3	0	-3	-3	-0.34503	0.0306	-0.0601
3	0	0	3	0	-3	-3	-0.34502	0.1801	-0.3535
3	-1	0	3	0	-3	-3	-0.34075	-0.0100	0.0196
1	1	0	1	0	-3	-3	-0.34068	-0.0266	0.0523
1	-1	0	1	2	-3	-3	-0.34012	-0.0052	0.0102
0	0	0	1	0	-3	-3	-0.33653	0.0095	-0.0186
1	0	0	1	0	-3	-3	-0.33652	-0.1599	0.3139
2	0	0	1	0	-3	-3	-0.33650	-0.0301	0.0591
1	-1	0	1	0	-3	-3	-0.33246	-0.0086	0.0168
1	0	0	1	0	3	3	0.32843	0.0142	0.0279
0	0	0	1	0	3	3	0.32841	0.0091	0.0179

Tabla 9.13: Efecto de los coeficientes  $C_3^3, S_3^3$ . Términos de Oppolzer. Serie  $\Delta\epsilon_3^3$  (dada en  $\mu\text{as}$ ).

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon_3^3$ (sin)	$\Delta\epsilon_3^3$ (cos)
3	1	0	3	0	-3	-3	-0.34939	0.0393	0.0200
2	0	0	3	0	-3	-3	-0.34503	0.0239	0.0122
3	0	0	3	0	-3	-3	-0.34502	0.1406	0.0716
1	1	0	1	0	-3	-3	-0.34068	-0.0208	-0.0106
1	0	0	1	0	-3	-3	-0.33652	-0.1249	-0.0636
2	0	0	1	0	-3	-3	-0.33650	-0.0235	-0.0120
1	0	0	1	0	3	3	0.32843	0.0111	-0.0057



## Capítulo 10

# Teoría de segundo orden para Tierra rígida

Para un cuerpo rígido, tomando como origen del sistema de referencia el centro de masas y como base el sistema de ejes principales, los coeficientes  $J_1, C_{11}, S_{11}, C_{21}, S_{21}$  y  $S_{22}$ , que afectan al desarrollo del potencial, se anulan, tal y como quedó establecido en la sección 1.4. Entonces, el potencial que afecta al movimiento de rotación debido a la presencia de un cuerpo perturbador  $P$  de masa  $M_p$ , adquiere la forma

$$U = \frac{\mathcal{G}M_p}{r^3} \frac{2C - (A + B)}{2} P_2(\sin \delta) - \frac{\mathcal{G}M_p}{r^3} \frac{B - A}{4} P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\mathcal{G}M_{\oplus} M_p a_{\oplus}^n}{r^{n+1}} \left[ J_n P_n(\sin \delta) - \sum_{m=1}^n P_n^m(\sin \delta) (C_n^m \cos m\alpha + S_n^m \sin m\alpha) \right].$$

Pasamos a dividir el potencial usando la misma notación que Kinoshita (1977), para simplificar las comparaciones,

$$U = U_1 + U_2,$$

$$U_1 = \frac{\mathcal{G}M_p}{r^3} \left[ \frac{2C - A - B}{2} P_2(\sin \delta) + \frac{A - B}{4} P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha \right],$$

$$U_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\mathcal{G}M_p M_{\oplus} a_{\oplus}^n}{r^{n+1}} \left[ J_n P_n(\sin \delta) - \sum_{m=1}^n P_n^m(\sin \delta) \times \right.$$

$$\left. \times (C_n^m \cos m\alpha + S_n^m \sin m\alpha) \right].$$

En esta sección consideramos como cuerpos perturbadores puntuales solamente a la Luna y el Sol.



Las ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$\frac{d}{dt}(L, G, H) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(l, g, h)}, \quad \frac{d}{dt}(l, g, h) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(L, G, H)},$$

con la notación habitual. Las resolveremos aproximadamente empleando el método de Hori hasta el segundo orden, eliminando los términos de corto periodo. En el problema dado, las variables  $l, g$  y las variables angulares que aparecen en los movimientos de la Luna y Sol son consideradas argumentos de corto periodo. Los periodos de  $g$  y  $l$  son de aproximadamente un día y un año, respectivamente; la longitud de la Luna tiene el periodo más largo, casi de 19 años.

En la solución clásica de Kinoshita (1977), la función generatriz que elimina los términos de corto periodo puede escribirse genéricamente como

$$S = S_1 + S_2 + \dots,$$

y el nuevo hamiltoniano se convierte en

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_2^* + \dots,$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^* &= T + E, \\ \mathcal{H}_1^* &= U_{1\text{sec}}, \\ S_1 &= \int U_{1\text{per}} dt^*, \\ \mathcal{H}_2^* &= U_{2\text{sec}} + \frac{1}{2} \{U_1 + \mathcal{H}_1^*, S_1\}_{\text{sec}}, \\ S_2 &= \int U_{2\text{per}} dt^* + \frac{1}{2} \int \{U_1 + \mathcal{H}_1^*, S_1\}_{\text{per}} dt^*. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Los subíndices per y sec representan la parte la periódica y secular respectivamente, mientras que  $\{\dots, \dots\}$  es el paréntesis de Poisson. El parámetro  $t^*$  viene definido por

$$\frac{d}{dt^*}(l^*, g^*, h^*) = \frac{\partial \mathcal{H}_0^*}{\partial(L^*, G^*, H^*)},$$

lo que no hace sino expresar que la integral se calcula a lo largo de las soluciones del problema no perturbado y se sustituyen después las variables canónicas (utilizando las condiciones iniciales presentes en dichas soluciones). Si  $\mathcal{H}^*$  se obtiene como se ha descrito,  $L^*$  y  $G^*$  son constantes y el sistema se reduce a uno de un grado de libertad.

$$\frac{dH^*}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial h^*}, \quad \frac{dh^*}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial H^*}.$$

Las diferencias entre las variables antiguas y nuevas, en segundo orden, vienen dadas por

$$\begin{aligned}\Delta(L, G, H) &= (L, G, H) - (L^*, G^*, H^*) = \\ &= -\frac{\partial(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)}{\partial(l^*, g^*, h^*)} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial(l^*, g^*, h^*)}, \mathcal{S}_1 \right\}, \\ \Delta(l, g, h) &= (l, g, h) - (l^*, g^*, h^*) = \\ &= \frac{\partial(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)}{\partial(L^*, G^*, H^*)} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial(L^*, G^*, H^*)}, \mathcal{S}_1 \right\}.\end{aligned}\quad (10.2)$$

## 10.1 Mejora de la aproximación de la solución asintótica

La aproximación de la solución anterior (10.2) puede mejorarse utilizando la técnica propuesta por Howland (1977) de modo general y avalada por su utilidad en varios problemas de Mecánica Celeste. Se trata de incluir en el hamiltoniano no perturbado la mayor parte de perturbación que se pueda manteniendo la manejabilidad de las ecuaciones de perturbación. Esto suele proporcionar una mejor aproximación a la solución, aunque no se ha probado como teorema que sepamos, sino que se trata mas bien de una regla empírica de actuación.

En nuestro caso, una elección muy útil es incluir en el hamiltoniano no perturbado tanto la parte  $E$  debida al movimiento de la eclíptica (de la fecha respecto a la época fija) como la parte  $\mathcal{H}_{1\text{sec}}$  responsable de la mayor parte de la precesión.

Las ecuaciones de perturbación se escribirán ahora como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0^{**} &= T + E + U_{1\text{sec}}, \\ \mathcal{H}_1^{**} &= 0, \\ \mathcal{W}_1 &= \int U_{1\text{per}} dt^{**}, \\ \mathcal{H}_2^{**} &= U_{2\text{sec}} + \frac{1}{2} \{U_{1\text{per}}, \mathcal{W}_1\}_{\text{sec}}, \\ \mathcal{W}_2 &= \int U_{2\text{per}} dt^{**} + \frac{1}{2} \int \{U_{1\text{per}}, \mathcal{W}_1\}_{\text{per}} dt^{**}.\end{aligned}$$

Nótese que, con esta elección de  $\mathcal{H}_0$ , es  $\mathcal{H}_1 = U_{1\text{per}}$ , aunque hemos preferido no escribir  $\mathcal{H}_1$  en las ecuaciones anteriores para evitar confusiones.

Notemos que el parámetro  $t^{**}$  expresa la integración a lo largo del problema no perturbado  $\mathcal{H}_0^{**}$ , es decir, que se cumplen las relaciones

$$\frac{d}{dt^{**}}(l^{**}, g^{**}, h^{**}) = \frac{\partial \mathcal{H}_0^{**}}{\partial(L^{**}, G^{**}, H^{**})} = \frac{\partial(\mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1^*)}{\partial(L^*, G^*, H^*)}.$$

La última igualdad fue utilizada por Kubo (1982) y por Kinoshita y Souchay (1990). Hay que advertir que en el último caso se recurrió a introducir variables adicionales canónicas de Delaunay para los movimientos de la Luna y el Sol, al tiempo que se reescribía parte del hamiltoniano en las nuevas variables (6 de rotación y 12 orbitales), lo que obligaba a realizar cálculos muy enojosos.

Intuitivamente, la variable  $h$  es próxima a cero sobre la solución de  $\mathcal{H}_0^{**}$ , ya que el término  $E$  descuenta de  $h$  el movimiento total (modelado) de la eclíptica, mientras que el término  $U_{1\text{sec}}$  aporta a  $h$  la precesión lunisolar, de modo que alrededor de los cuatro primeros dígitos del valor de  $h(t)$  se cancelan. No obstante, como las dependencias funcionales de  $E$  y  $U_{1\text{sec}}$  son distintas, las derivadas de órdenes superiores no tienen porqué ser próximas como lo son las de primer orden, hecho este que influirá en la obtención de las soluciones como se comentará en su lugar.

A partir de ahora, para simplificar la notación escribiremos sólo  $*$  en lugar de  $**$ , refiriéndonos a esta elección de  $\mathcal{H}_0^{**}$ . Las ecuaciones de perturbación se escriben ahora

$$\begin{aligned}\Delta(L, G, H) &= (L, G, H) - (L^*, G^*, H^*) = \\ &= -\frac{\partial(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2)}{\partial(l^*, g^*, h^*)} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial(l^*, g^*, h^*)}, \mathcal{W}_1 \right\}, \\ \Delta(l, g, h) &= (l, g, h) - (l^*, g^*, h^*) = \\ &= \frac{\partial(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2)}{\partial(L^*, G^*, H^*)} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial(L^*, G^*, H^*)}, \mathcal{W}_1 \right\}.\end{aligned}\quad (10.3)$$

Para facilitar las comparaciones, adoptamos la siguiente notación (Kinoshita y Souchay, 1990)

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_2 &= \mathcal{W}_2^A + \mathcal{W}_2^B, \\ \mathcal{W}_2^A &= \int U_{2\text{per}} dt, \\ \mathcal{W}_2^B &= \frac{1}{2} \int \{U_{1\text{per}}, \mathcal{W}_1\}_{\text{per}} dt.\end{aligned}$$

Por simplicidad vamos a considerar únicamente la influencia de la parte de primer orden del potencial debida al  $J_2$ , de modo que  $U_2$  se anula y

$$U_1 = \frac{GM_p}{r^3} \frac{2C - A - B}{2} P_2(\sin \delta).$$

Por consiguiente, pasamos a tener

$$\mathcal{W}_1 = \int U_{1\text{per}} dt,$$

y  $\mathcal{W}_2$  queda reducido a

$$\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_2^B = \frac{1}{2} \int \{U_{1\text{per}}, \mathcal{W}_1\}_{\text{per}} dt.$$

En nuestro estudio, únicamente estamos interesados en las ecuaciones relacionadas con la nutación que, con las simplificaciones anteriores, quedan reducidas a

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \int U_{1\text{per}} dt, \\ \mathcal{W}_2^B &= \frac{1}{2} \int \{U_{1\text{per}}, \mathcal{W}_1\}_{\text{per}} dt, \\ \Delta h &= \frac{\partial(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2^B)}{\partial H} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial H}, \mathcal{W}_1 \right\}, \\ \Delta H &= -\frac{\partial(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2^B)}{\partial h} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial h}, \mathcal{W}_1 \right\}. \end{aligned}$$

Las contribuciones  $\partial \mathcal{W}_1 / \partial H$  y  $\partial \mathcal{W}_1 / \partial h$  del primer sumando fueron consideradas en la integración de primer orden del problema, de modo que prescindiremos de ellas aquí. Las series  $\Delta \psi$  y  $\Delta \epsilon$  vienen dadas mediante

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= -\Delta h, \\ \Delta \epsilon &= -\Delta I, \end{aligned}$$

siendo

$$\Delta h = \frac{\partial \mathcal{W}_2^B}{\partial H} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial H}, \mathcal{W}_1 \right\},$$

y

$$\Delta I = \{I, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2^B\} + \frac{1}{2} \{ \{I, \mathcal{W}_1\}, \mathcal{W}_1 \}.$$

Al desarrollar estos paréntesis obtenemos:

$$\{I, \mathcal{W}_1\} = -\frac{\partial I}{\partial H} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial h} - \frac{\partial I}{\partial G} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g} = \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial h} - \frac{1}{G \tan I} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g},$$

y análogamente,

$$\{I, \mathcal{W}_2^B\} = \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}_2^B}{\partial h} - \frac{1}{G \tan I} \frac{\partial \mathcal{W}_2^B}{\partial g}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{ \{I, \mathcal{W}_1\}, \mathcal{W}_1 \} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial h} - \frac{1}{G \tan I} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g}, \mathcal{W}_1 \right\} = \\ &= \frac{1}{2G \sin I} \left\{ \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial h}, \mathcal{W}_1 \right\} - \frac{1}{2G \tan I} \left\{ \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g}, \mathcal{W}_1 \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, para hacer más sencillas las comparaciones con los resultados de Kinoshita y Souchay (1990), agruparemos las expresiones de la siguiente forma:

$$\Delta\psi = -\Delta h = -\frac{\partial\mathcal{W}_2^B}{\partial H} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial H}, \mathcal{W}_1 \right\}, \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon = -\Delta I = & -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial\mathcal{W}_2^B}{\partial h} - \frac{1}{2G \sin I} \left\{ \frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial h}, \mathcal{W}_1 \right\} + \\ & + \frac{1}{G \tan I} \frac{\partial(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2^B)}{\partial g} + \frac{1}{2G \tan I} \left\{ \frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial g}, \mathcal{W}_1 \right\}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Obsérvese que hemos prescindido de las contribuciones  $\partial\mathcal{W}_1/\partial h$  en la ecuación (10.5), por haberla tenido en cuenta en el primer orden.

En una primera aproximación, podemos suponer  $J \approx 0$  como hicieron Kinoshita y Souchay (1990), de manera que desaparece la dependencia respecto de  $g$  de la expresión desarrollada del potencial en las variables de Delaunay. En primer lugar estudiaremos las series que se obtienen haciendo dicha aproximación. Después calcularemos las nutaciones completas y compararemos los resultados.

## 10.2 Cálculo de las series de nutación en primera aproximación

En esta sección aproximamos  $J \approx 0$  antes del cálculo de las derivadas. Esta hipótesis es equivalente a calcular los paréntesis de Poisson únicamente en las variables  $(h, H)$  hecha por Kinoshita y Souchay (1991), ya que así los términos con el factor  $\sin J$  resultan eliminados. De esta forma, como veremos en la siguiente sección, perdemos contribuciones importantes a las series de nutación. Esto es debido a que al hacer  $J = 0$ , eliminamos la dependencia de  $g$  en el potencial.

### Cálculo del potencial debido a la Luna

En primer lugar definimos la serie de Kinoshita  $\mathcal{U}_M = k_M P_2^0(\sin \delta)$ , del modo siguiente:

```
U_M="P_2^0(\sin delta)";
kM=7547.198149; U_M=U_M*kM;
```

Seguidamente transformamos en la forma habitual el geopotencial mediante el teorema de Wigner y aproximamos  $J \approx 0$ ,

```
U_M=U_M.tmawigner ("delta", "alpha", "b", "a", "J", "l");
```

```

U_M=U_M.tmawigner ("b", "a", "beta", "lambda", "I", "g");
U_M=U_M.partereal ();
U_M=U_M.homogenea (); U_M=U_M.devjac ();
U_M=U_M.sust ("sin J", 0.E0); U_M=U_M.sust ("cos J", 1.E0);

```

El siguiente paso consiste en sustituir los armónicos esféricos por sus correspondientes desarrollos en serie:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0 &= \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2(\sin \beta_M) = -\sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i, \\
\mathcal{P}_1|_c &= \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^1(\sin \beta_M) \cos \lambda_M = 3 \sum_i \bar{A}_i^{(1)} \sin \Theta_i, \\
\mathcal{P}_1|_s &= \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M = 3 \sum_i A_i^{(1)} \cos \Theta_i, \\
\mathcal{P}_2|_c &= \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M = 3 \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i, \\
\mathcal{P}_2|_s &= \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \sin 2\lambda_M = 3 \sum_i \bar{A}_i^{(2)} \sin \Theta_i,
\end{aligned}$$

donde como sabemos,  $i = (i_M, i_S, i_F, i_D, i_\Omega)$  y  $\Theta_i = i_M l_M + i_S l_S + i_F F + i_D D + i_\Omega \Omega$ . El término  $(a_M/r_M)^3$  es común a todos los términos del desarrollo, por lo cual se omite su escritura en la serie.

```

U_M=U_M.delaunay (2, 0, "beta", "lambda", p0, p0);
U_M=U_M.delaunay (2, 1, "beta", "lambda", p1c, p1s);
U_M=U_M.delaunay (2, 2, "beta", "lambda", p2c, p2s);

```

### Cálculo del potencial debido al Sol

Del mismo modo calculamos la parte del geopotencial debido al Sol,  $\mathcal{U}_S$ .

```

U_S="P_{2}^{0}(\sin \delta)";
kS=3475.413512;
U_S=U_S*kS;
U_S=U_S.tmawigner ("delta", "alpha", "b", "a", "J", "l");
U_S=U_S.tmawigner ("b", "a", "beta", "lambda", "I", "g");
U_S=U_S.partereal (); U_S=U_S.homogenea ();
U_S=U_S.devjac (); U_S=U_S.discrimina ("sin J", 1);
U_S=U_S.sust ("sin J", 0.E0);
U_S=U_S.sust ("cos J", 1.E0);

```

Seguidamente realizamos las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0^\odot &= \left(\frac{a_\odot}{r_\odot}\right)^3 P_2(\sin \beta_\odot) = -\sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i, \\ \mathcal{P}_2^\odot|_c &= \left(\frac{a_\odot}{r_\odot}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_\odot) \cos 2\lambda_\odot = 3 \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i, \\ \mathcal{P}_2^\odot|_s &= \left(\frac{a_\odot}{r_\odot}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_\odot) \sin 2\lambda_\odot = 3 \sum_i \bar{A}_i^{(2)} \sin \Theta_i,\end{aligned}$$

donde como sabemos,  $i = (i_{l_M}, i_{l_S}, i_F, i_D, i_\Omega)$  y  $\Theta_i = i_{l_M} l_M + i_{l_S} l_S + i_F F + i_D D + i_\Omega \Omega$ . El código asociado se muestra a continuación:

```
p=p.delaunay (2, 0, "beta", "lambda", p0S, p0S);
p=p.delaunay (2, 1, "beta", "lambda", p1cS, p1sS);
p=p.delaunay (2, 2, "beta", "lambda", p2cS, p2sS);
```

### Aplicación del método de Hori de orden dos

En primer lugar obtenemos el geopotencial lunisolar,  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_M + \mathcal{U}_S$ .

```
U_1=U_M+U_S;
```

Ahora calculamos la función  $\mathcal{W}_1$ ,

$$\mathcal{W}_1 = \int \mathcal{U}_{\text{per}} dt,$$

sustituyendo seguidamente las frecuencias por su valor.

```
W_1=U_1.generatrix ();
W_1=W_1.sustfrecuencias ();
```

Seguidamente, obtendremos el paréntesis de Poisson  $\{U_{1\text{per}}, \mathcal{W}_1\}$ . Para el cálculo correcto del paréntesis de Poisson definimos previamente el vector de variables canónicas y momentos conjugados. Dado que hemos aproximado  $J \approx 0$ , hemos eliminado con ello la dependencia del potencial de la variable  $g$ . Por siguiente, el paréntesis de Poisson, toma la forma:

$$\{U_{1\text{per}}, \mathcal{W}_1\} = \frac{\partial U_{1\text{per}}}{\partial h} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial H} - \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial h} \frac{\partial U_{1\text{per}}}{\partial H}.$$

Definimos para su cálculo el vector de variables  $\varpi = (h \ H)$  y calculamos el paréntesis teniendo en cuenta esa dependencia:

```

char **varpi; varpi=new char*[2];
for (i=0; i<2; i++) varpi[i]=new char[20];
strcpy (var[0], "h"); strcpy (var[1], "H");
U_1per=U_1.periodic ();
bracket=poissonbracket (U_1per, W_1, 1, var);

```

Seguidamente, calculamos la función  $\mathcal{W}_2$ ,

$$\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_2^B = \frac{1}{2} \int \{U_{1\text{per}}, \mathcal{W}_1\}_{\text{per}} dt.$$

```

bracket=bracket*(-0.5E0);
W_2=bracket.generatrix ();
W_2=W_2.sustfrecuencias ();

```

Calculamos ahora  $\Delta\psi$  separándola de la siguiente forma:

$$\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2,$$

con

$$\Delta\psi_1 = -\frac{\partial \mathcal{W}_2^B}{\partial H}, \quad \Delta\psi_2 = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial H}, \mathcal{W}_1 \right\}.$$

En primer lugar procedemos al cálculo de  $\Delta\psi_1$ .

```

W_12=W_2;
W_12=W_12.derive ("H");
W_12=W_12.sust ("sin I", -0.39777716);
W_12=W_12.sust ("cos I", 0.9174820603054 );
W_12=W_12.sust ("G", 1.0);
W_12=W_12*PI/double(180*60*60);
W_12=W_12*1000000; // microarc second.

```

Al mismo tiempo hemos sustituido las variables  $I$  y  $G$  por su valor. En el cálculo de los paréntesis de Poisson aparecen los productos de las constantes  $k_M^2, k_M k_S$  o  $k_S^2$ . Como ambas constantes ( $k_M$  y  $k_S$ ) incluyen el paso de radianes a arcosegundos, al multiplicarse las constantes dicho cambio se lleva a cabo dos veces. Es por esto que deshacemos unos de ellos multiplicando el resultado por  $\pi/(180 \times 60 \times 60)$ . Seguidamente se obtiene  $\Delta\psi_2$ .

```

dW_1H=W_1.derive ("H");
dW_1H=poissonbracket (dW_1H, W_1, 3, var);
dW_1H=dW_1H*(-0.5E0);
dW_1H=dW_1H.sust ("sin I", -0.39777716);

```



```

dW_1H=dW_1H.sust ("cos I", 0.9174820603054 );
dW_1H=dW_1H.sust ("G", 1.0);
dW_1H=dW_1H*PI/double(180*60*60);
dW_1H=dW_1H*1000000; // microarc second.

```

Finalmente calculamos la contribución final:

```
W_12=W_12+dW_1H;
```

En las tablas 10.1 y 10.2 mostramos las contribuciones  $\Delta\psi_1 = -\Delta h_1$  y  $\Delta\psi_2 = -\Delta h_2$ . En la tabla 10.3 se muestra la serie de nutación total  $\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2$ .

Tabla 10.1: **Efecto de segundo orden** ( $J \approx 0$ ). Serie de nutación en longitud,  $\Delta\psi_1 = -\Delta h_1 = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	16.9973
2	0	0	0	0	-3399.192	-0.3467
3	0	0	0	0	-2266.128	1.0101
2	-2	0	2	0	1615.748	0.3071
0	2	0	-2	0	-1095.175	0.1743
2	0	1	0	0	409.234	-0.1443
1	0	1	0	0	385.998	4.5364
3	0	-1	2	-2	385.959	0.3409
0	0	1	0	0	365.260	-1.0129
2	0	-1	2	-2	365.225	2.1173
1	0	-1	0	0	-346.636	-3.6581
1	0	-1	2	-2	346.604	0.3233
3	0	0	2	-2	187.662	-19.5038
2	0	0	2	-2	182.621	0.1165
1	0	0	2	-2	177.844	-21.2883
0	0	0	2	-2	173.310	0.3674
3	0	1	2	-2	123.969	-0.7472
2	0	1	2	-2	121.749	-0.2312
1	0	1	2	-2	119.607	-0.8436
2	-1	0	2	-2	-32.451	-0.2570
1	-1	0	0	2	31.961	0.2413
1	1	0	0	-2	-31.664	-0.2400
1	1	0	0	0	27.667	1.0908
0	1	0	0	0	27.555	-0.7304
1	-1	0	0	0	-27.443	-1.0747
3	-1	0	2	0	27.201	0.1642
2	-1	0	2	0	27.093	0.1207

Tabla 10.1: **Efecto de segundo orden** ( $J \approx 0$ ). Serie de nutación en longitud,  $\Delta\psi_1 = -\Delta h_1 = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

1	-1	0	2	0	26.985	0.2051
0	1	0	-2	0	-26.878	0.1183
2	1	0	2	-2	23.942	0.1575
0	0	0	0	2	14.765	-1.3299
2	0	-1	2	0	14.192	0.1229
3	0	0	2	0	13.688	-2.9879
1	0	0	2	0	13.633	-3.5484
0	0	0	2	0	13.606	2.1439
2	0	1	2	0	13.168	-0.1048
0	1	0	0	2	9.614	-0.1605
3	1	0	2	0	9.145	-0.3816
1	1	0	2	0	9.121	-0.4560
0	1	0	2	0	9.108	0.2753

Tabla 10.2: **Efecto de segundo orden** ( $J \approx 0$ ). Serie de nutación en longitud,  $\Delta\psi_2 = -\Delta h_2 = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	11.7627
2	0	0	0	0	-3399.192	1220.9336
3	0	0	0	0	-2266.128	-22.4622
4	0	0	0	0	-1699.596	0.1146
2	-2	0	2	0	1615.748	-0.6223
2	0	1	0	0	409.234	0.3483
1	0	1	0	0	385.998	-6.5187
3	0	-1	2	-2	385.959	-2.2899
2	0	-1	2	-2	365.225	0.9205
1	0	-1	0	0	-346.636	6.5277
1	0	-1	2	-2	346.604	1.1872
1	-2	0	0	2	-199.840	0.1161
4	0	0	2	-2	192.989	-1.4009
3	0	0	2	-2	187.662	137.2905
2	0	0	2	-2	182.621	-1.7179
1	0	0	2	-2	177.844	-71.6651
3	0	1	2	-2	123.969	5.3623
2	0	1	2	-2	121.749	-0.8997
4	0	-1	4	-4	121.745	-0.1433
1	0	1	2	-2	119.607	-2.7928
3	0	2	2	-2	92.556	0.1632
4	0	0	4	-4	91.311	4.2751

Tabla 10.2: **Efecto de segundo orden** ( $J \approx 0$ ). Serie de nutación en longitud,  $\Delta\psi_2 = -\Delta h_2 = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

4	0	1	4	-4	73.049	0.3335
2	-1	0	2	-2	-32.451	0.2550
2	-1	0	0	2	32.112	-0.1904
1	-1	0	0	2	31.961	-0.3877
1	1	0	0	-2	-31.664	0.3936
2	1	0	0	-2	-31.517	0.1683
2	1	0	0	0	27.780	-0.7846
1	1	0	0	0	27.667	-1.7554
1	-1	0	0	0	-27.443	1.7504
2	-1	0	0	0	-27.333	0.7684
3	-1	0	2	0	27.201	-1.2381
2	-1	0	2	0	27.093	-0.2778
1	-1	0	2	0	26.985	0.6589
3	1	0	2	-2	24.027	-0.3290
2	1	0	2	-2	23.942	-0.2938
1	1	0	2	-2	23.858	0.1301
1	0	0	0	2	14.797	-0.1491
2	0	-1	2	0	14.192	0.1445
4	0	0	2	0	13.716	-0.2249
3	0	0	2	0	13.688	22.0195
2	0	0	2	0	13.661	4.8311
1	0	0	2	0	13.633	-11.5879
2	0	1	2	0	13.168	-0.1472
4	0	0	4	-2	12.710	1.3762
3	0	0	4	-2	12.686	0.2476
2	0	0	4	-2	12.663	-0.0124
3	-1	0	2	2	9.570	0.5585
2	-1	0	2	2	9.557	0.1153
1	-1	0	2	2	9.543	-0.2962
3	1	0	2	0	9.145	2.8112
2	1	0	2	0	9.133	0.5805
1	1	0	2	0	9.121	-1.4906
4	1	0	4	-2	8.698	0.1734
3	0	0	2	2	7.103	0.3500
1	0	0	2	2	7.088	-0.1851
3	2	0	2	0	6.866	0.2789
1	2	0	2	0	6.852	-0.1486
4	0	0	4	0	6.830	0.1308
3	0	0	4	0	6.824	0.0454

Tabla 10.3: Efecto de segundo orden ( $J \approx 0$ ). Serie total de nutación en longitud,  $\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	28.7600
2	0	0	0	0	-3399.192	1220.5869
3	0	0	0	0	-2266.128	-21.4521
4	0	0	0	0	-1699.596	0.1146
2	-2	0	2	0	1615.748	-0.3152
0	2	0	-2	0	-1095.175	0.1743
2	0	1	0	0	409.234	0.2041
1	0	1	0	0	385.998	-1.9823
3	0	-1	2	-2	385.959	-1.9489
0	0	1	0	0	365.260	-1.0129
2	0	-1	2	-2	365.225	3.0378
1	0	-1	0	0	-346.636	2.8696
1	0	-1	2	-2	346.604	1.5105
4	0	0	2	-2	192.989	-1.4009
3	0	0	2	-2	187.662	117.7866
2	0	0	2	-2	182.621	-1.6014
1	0	0	2	-2	177.844	-92.9535
0	0	0	2	-2	173.310	0.3674
3	0	1	2	-2	123.969	4.6151
2	0	1	2	-2	121.749	-1.1309
4	0	-1	4	-4	121.745	-0.1433
1	0	1	2	-2	119.607	-3.6365
3	0	2	2	-2	92.556	0.1406
4	0	0	4	-4	91.311	4.2751
1	0	2	2	-2	90.103	-0.1108
4	0	1	4	-4	73.049	0.3335
2	-1	0	0	2	32.112	-0.1972
1	-1	0	0	2	31.961	-0.1464
1	1	0	0	-2	-31.664	0.1536
2	1	0	0	-2	-31.517	0.1764
2	1	0	0	0	27.780	-0.8159
1	1	0	0	0	27.667	-0.6646
0	1	0	0	0	27.555	-0.7304
1	-1	0	0	0	-27.443	0.6757
2	-1	0	0	0	-27.333	0.7985
3	-1	0	2	0	27.201	-1.0740
2	-1	0	2	0	27.093	-0.1572
1	-1	0	2	0	26.985	0.8639
0	1	0	-2	0	-26.878	0.1183
3	1	0	2	-2	24.027	-0.2954
2	1	0	2	-2	23.942	-0.1363

Tabla 10.3: Efecto de segundo orden ( $J \approx 0$ ). Serie total de nutación en longitud,  $\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

1	1	0	2	-2	23.858	0.1820
0	0	0	0	2	14.765	-1.3299
2	0	-1	2	0	14.192	0.2675
4	0	0	2	0	13.716	-0.2249
3	0	0	2	0	13.688	19.0317
2	0	0	2	0	13.661	4.8518
1	0	0	2	0	13.633	-15.1363
0	0	0	2	0	13.606	2.1439
2	0	1	2	0	13.168	-0.2521
4	0	0	4	-2	12.710	1.3762
3	0	0	4	-2	12.686	0.2822
0	1	0	0	2	9.614	-0.1605
3	-1	0	2	2	9.570	0.4827
2	-1	0	2	2	9.557	0.1139
1	-1	0	2	2	9.543	-0.3868
3	1	0	2	0	9.145	2.4296
2	1	0	2	0	9.133	0.5722
1	1	0	2	0	9.121	-1.9465
0	1	0	2	0	9.108	0.2753
4	1	0	4	-2	8.698	0.1734
3	0	0	2	2	7.103	0.3027
1	0	0	2	2	7.088	-0.2416
3	2	0	2	0	6.866	0.2411
1	2	0	2	0	6.852	-0.1941
4	0	0	4	0	6.830	0.1308

Las nutaciones en oblicuidad hasta segundo orden se calculan de la forma

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_1 + \Delta\epsilon_2 + \Delta\epsilon_3,$$

siendo

$$\Delta\epsilon_1 = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}_2^B}{\partial h},$$

$$\Delta\epsilon_2 = -\frac{1}{2G \sin I} \left\{ \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial h}, \mathcal{W}_1 \right\},$$

$$\Delta\epsilon_3 = \frac{1}{G \tan I} \frac{\partial (\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2^B)}{\partial g} + \frac{1}{2G \tan I} \left\{ \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g}, \mathcal{W}_1 \right\}.$$

En las tablas 10.4, 10.5 y 10.6 mostramos las contribuciones parciales de  $\Delta\epsilon_1$ ,  $\Delta\epsilon_2$  y  $\Delta\epsilon_3$  respectivamente. La serie total de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  viene dada en la tabla 10.7.

Tabla 10.4: **Efecto de segundo orden** ( $J \approx 0$ ). Serie de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon_1 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	-19.6483
2	0	0	0	0	-3399.192	0.1668
3	0	0	0	0	-2266.128	-0.4397
2	-2	0	2	0	1615.748	-0.1473
1	0	1	0	0	385.998	-3.1580
3	0	-1	2	-2	385.959	-0.1481
2	0	-1	2	-2	365.225	-1.0131
1	0	-1	0	0	-346.636	2.5466
1	0	-1	2	-2	346.604	-0.3758
3	0	0	2	-2	187.662	8.4735
1	0	0	2	-2	177.844	24.4797
3	0	1	2	-2	123.969	0.3246
2	0	1	2	-2	121.749	0.1106
1	0	1	2	-2	119.607	0.9707
2	-1	0	2	-2	-32.451	0.1232
1	-1	0	0	2	31.961	-0.1675
1	1	0	0	-2	-31.664	0.1682
1	1	0	0	0	27.667	-0.7573
1	-1	0	0	0	-27.443	0.7469
1	-1	0	2	0	26.985	-0.2365
3	0	0	2	0	13.688	1.3008
1	0	0	2	0	13.633	4.1094
1	-1	0	2	2	9.543	0.1049
3	1	0	2	0	9.145	0.1661
1	1	0	2	0	9.121	0.5277

Tabla 10.5: **Efecto de segundo orden** ( $J \approx 0$ ). Serie de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon_2 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	-12.7236
3	0	0	0	0	-2266.128	-0.4389
0	2	0	-2	0	-1095.175	-0.2059
1	0	1	0	0	385.998	2.8289
0	0	1	0	0	365.260	0.2619
2	0	-1	2	-2	365.225	-0.3378
1	0	-1	0	0	-346.636	-2.8387

Tabla 10.5: **Efecto de segundo orden** ( $J \approx 0$ ). Serie de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon_2 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

1	0	-1	2	-2	346.604	-1.2858
3	0	0	2	-2	187.662	2.6771
1	0	0	2	-2	177.844	77.3907
0	0	0	2	-2	173.310	-1.6779
3	0	1	2	-2	123.969	0.1046
2	0	1	2	-2	121.749	0.3371
1	0	1	2	-2	119.607	3.0187
1	-1	0	0	2	31.961	0.1702
1	1	0	0	-2	-31.664	-0.1767
1	1	0	0	0	27.667	0.7702
1	-1	0	0	0	-27.443	-0.7648
1	-1	0	2	0	26.985	-0.7035
0	1	0	-2	0	-26.878	-0.0763
2	1	0	2	-2	23.942	0.0872
1	1	0	2	-2	23.858	-0.1382
0	0	0	0	2	14.765	1.1414
3	0	0	2	0	13.688	0.4303
1	0	0	2	0	13.633	12.4937
0	0	0	2	0	13.606	1.3636
0	1	0	0	2	9.614	0.1461
1	-1	0	2	2	9.543	0.3189
1	1	0	2	0	9.121	1.6048
0	1	0	2	0	9.108	0.1750
1	0	0	2	2	7.088	0.1992
1	2	0	2	0	6.852	0.1599

Tabla 10.6: **Efecto de segundo orden** ( $J \approx 0$ ). Serie de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon_3 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	4.6813
2	0	0	0	0	-3399.192	-239.0763
3	0	0	0	0	-2266.128	4.6700
2	-2	0	2	0	1615.748	0.1246
0	2	0	-2	0	-1095.175	0.1267
3	0	-1	2	-2	385.959	0.4751
0	0	1	0	0	365.260	-0.1059
1	0	-1	2	-2	346.604	0.4741
4	0	0	2	-2	192.989	0.2782
3	0	0	2	-2	187.662	-28.4846

Tabla 10.6: **Efecto de segundo orden** ( $J \approx 0$ ). Serie de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon_3 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

2	0	0	2	-2	182.621	0.3459
1	0	0	2	-2	177.844	-28.4814
0	0	0	2	-2	173.310	0.6262
3	0	1	2	-2	123.969	-1.1126
1	0	1	2	-2	119.607	-1.1116
4	0	0	4	-4	91.311	-0.8471
2	1	0	0	0	27.780	0.1610
2	-1	0	0	0	-27.333	-0.1578
3	-1	0	2	0	27.201	0.2574
1	-1	0	2	0	26.985	0.2566
0	0	0	0	2	14.765	-0.3024
3	0	0	2	0	13.688	-4.5780
2	0	0	2	0	13.661	-0.9485
1	0	0	2	0	13.633	-4.5866
0	0	0	2	0	13.606	-0.9053
4	0	0	4	-2	12.710	-0.2733
3	-1	0	2	2	9.570	-0.1161
1	-1	0	2	2	9.543	-0.1170
3	1	0	2	0	9.145	-0.5845
2	1	0	2	0	9.133	-0.1211
1	1	0	2	0	9.121	-0.5886
0	1	0	2	0	9.108	-0.1162

Tabla 10.7: **Efecto de segundo orden** ( $J \approx 0$ ). Serie total de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_1 + \Delta\epsilon_2 + \Delta\epsilon_3 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Es probable que esta tabla no resulte exactamente de la suma de las tres anteriores, dado que únicamente mostramos en ellas las contribuciones superiores a  $0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
2	0	-2	2	-2	3823418.489	-59.2446
1	0	0	0	0	-6798.384	-27.6906
2	0	0	0	0	-3399.192	-238.9095
3	0	0	0	0	-2266.128	3.7914
1	0	1	0	0	385.998	-0.3291
3	0	-1	2	-2	385.959	0.2823
0	0	1	0	0	365.260	0.1560
2	0	-1	2	-2	365.225	-1.3642
1	0	-1	0	0	-346.636	-0.2921
1	0	-1	2	-2	346.604	-1.1875



Tabla 10.7: **Efecto de segundo orden** ( $J \approx 0$ ). Serie total de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_1 + \Delta\epsilon_2 + \Delta\epsilon_3 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Es probable que esta tabla no resulte exactamente de la suma de las tres anteriores, dado que únicamente mostramos en ellas las contribuciones superiores a  $0.1 \mu\text{as}$ .

4	0	0	2	-2	192.989	0.2782
3	0	0	2	-2	187.662	-17.3340
2	0	0	2	-2	182.621	0.2707
1	0	0	2	-2	177.844	73.3890
0	0	0	2	-2	173.310	-1.0517
3	0	1	2	-2	123.969	-0.6834
2	0	1	2	-2	121.749	0.4477
1	0	1	2	-2	119.607	2.8778
4	0	0	4	-4	91.311	-0.8471
2	1	0	0	0	27.780	0.1611
2	-1	0	0	0	-27.333	-0.1574
3	-1	0	2	0	27.201	0.1617
1	-1	0	2	0	26.985	-0.6834
1	1	0	2	-2	23.858	-0.1481
0	0	0	0	2	14.765	0.8390
2	0	-1	2	0	14.192	-0.1130
3	0	0	2	0	13.688	-2.8469
1	0	0	2	0	13.633	12.0165
0	0	0	2	0	13.606	0.4583
2	0	1	2	0	13.168	0.1049
4	0	0	4	-2	12.710	-0.2733
0	1	0	0	2	9.614	0.1074
1	-1	0	2	2	9.543	0.3068
3	1	0	2	0	9.145	-0.3635
2	1	0	2	0	9.133	-0.1059
1	1	0	2	0	9.121	1.5439
1	0	0	2	2	7.088	0.1917
1	2	0	2	0	6.852	0.1539

### 10.3 Cálculo de las series de nutación en mejor aproximación

La obtención de estas series mediante el uso del manipulador es automática, y seguidamente pasamos a analizar el código empleado y el significado de cada comando, así como los resultados obtenidos.

### Cálculo del geopotencial debido a la Luna

En primer lugar definimos la serie de Kinoshita  $\mathcal{U}_M = k_M P_2^0(\sin \delta)$ , del modo siguiente:

```
U_M="P_2^0(\sin delta)";
kM=7547.198149; U_M=U_M*kM;
```

Seguidamente transformamos en la forma habitual el geopotencial mediante el teorema de Wigner:

```
U_M=U_M.tmawigner ("delta", "alpha", "b", "a", "J", "l");
U_M=U_M.tmawigner ("b", "a", "beta", "lambda", "I", "g");
U_M=U_M.partereal (); U_M=U_M.homogenea (); U_M=U_M.devjac ();
```

A continuación eliminamos los términos que contengan el factor  $\sin^2 J$ .

```
U_M=U_M.discrimina ("sin J", 1);
```

El resultado tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_M = & -22641.5944467 \cos I \sin I \cos J \sin J \cos(g) P_2^0(\sin \beta) + \\ & + 16981.19583525 (\cos I)^2 (\cos J)^2 P_2^0(\sin \beta) - \\ & - 11320.7972235 \cos I \sin I (\cos J)^2 \sin(\lambda) P_2^1(\sin \beta) + \\ & + 7547.198149 (\cos I)^2 \cos J \sin J \sin(g - \lambda) P_2^1(\sin \beta) - \\ & - 7547.198149 (\cos I)^2 \cos J \sin J \sin(g + \lambda) P_2^1(\sin \beta) - \\ & - 5660.39861175 (\cos I)^2 P_2^0(\sin \beta) - \\ & - 5660.39861175 (\cos J)^2 P_2^0(\sin \beta) + \\ & + 3773.5990745 \cos I \sin I \sin(\lambda) P_2^1(\sin \beta) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 3773.5990745 \cos J \sin J \sin (g - \lambda) P_2^1(\sin \beta) + \\
& + 3773.5990745 \cos I \cos J \sin J \sin (g - \lambda) P_2^1(\sin \beta) + \\
& + 3773.5990745 \cos I \cos J \sin J \sin (g + \lambda) P_2^1(\sin \beta) + \\
& + 3773.5990745 \cos J \sin J \sin (g + \lambda) P_2^1(\sin \beta) - \\
& - 2830.199305875(\sin I)^2(\cos J)^2 \cos (2\lambda) P_2^2(\sin \beta) - \\
& - 1886.79953725 \sin I \cos J \sin J \cos (g - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) + \\
& + 1886.79953725 \sin I \cos J \sin J \cos (g + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) - \\
& - 1886.79953725 \cos I \sin I \cos J \sin J \cos (g - 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) + \\
& + 1886.79953725 P_2^0(\sin \beta) - \\
& - 1886.79953725 \cos I \sin I \cos J \sin J \cos (g + 2\lambda) P_2^2(\sin \beta) + \\
& + 943.399768625(\sin I)^2 \cos (2\lambda) P_2^2(\sin \beta)
\end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en sustituir los armónicos esféricos por sus correspondientes desarrollos en serie:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0 &= \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2(\sin \beta_M) = - \sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i, \\
\mathcal{P}_1|_c &= \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^1(\sin \beta_M) \cos \lambda_M = 3 \sum_i \bar{A}_i^{(1)} \sin \Theta_i, \\
\mathcal{P}_1|_s &= \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M = 3 \sum_i A_i^{(1)} \cos \Theta_i, \\
\mathcal{P}_2|_c &= \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M = 3 \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i, \\
\mathcal{P}_2|_s &= \left(\frac{a_M}{r_M}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \sin 2\lambda_M = 3 \sum_i \bar{A}_i^{(2)} \sin \Theta_i,
\end{aligned}$$

donde como sabemos,  $i = (i_M, i_S, i_F, i_D, i_\Omega)$  y  $\Theta_i = i_M l_M + i_S l_S + i_F F + i_D D + i_\Omega \Omega$ . El término  $(a_M/r_M)^3$  es común a todos los términos del desarrollo, por lo cual se omite su

escritura en la serie.

```
U_M=U_M.delaunay (2, 0, "beta", "lambda", p0, p0);
U_M=U_M.delaunay (2, 1, "beta", "lambda", p1c, p1s);
U_M=U_M.delaunay (2, 2, "beta", "lambda", p2c, p2s);
```

### Cálculo del geopotencial debido al Sol

Del mismo modo calculamos la parte del geopotencial debido al Sol,  $U_S$ .

```
U_S="P_{2}^{0}(\sin \delta)";
kS=3475.413512;
U_S=U_S*kS;
U_S=U_S.tmawigner ("delta", "alpha", "b", "a", "J", "l");
U_S=U_S.tmawigner ("b", "a", "beta", "lambda", "I", "g");
U_S=U_S.partereal (); U_S=U_S.homogenea ();
U_S=U_S.devjac (); U_S=U_S.discrimina ("sin J", 1);
```

Seguidamente realizamos las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0^\odot &= \left(\frac{a_\odot}{r_\odot}\right)^3 P_2(\sin \beta_\odot) = -\sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i, \\ \mathcal{P}_2^\odot|_c &= \left(\frac{a_\odot}{r_\odot}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_\odot) \cos 2\lambda_\odot = 3 \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i, \\ \mathcal{P}_2^\odot|_s &= \left(\frac{a_\odot}{r_\odot}\right)^3 P_2^2(\sin \beta_\odot) \sin 2\lambda_\odot = 3 \sum_i \bar{A}_i^{(2)} \sin \Theta_i, \end{aligned}$$

donde como sabemos,  $i = (i_M, i_S, i_F, i_D, i_\Omega)$  y  $\Theta_i = i_M l_M + i_S l_S + i_F F + i_D D + i_\Omega \Omega$ . El código asociado se muestra a continuación:

```
p=p.delaunay (2, 0, "beta", "lambda", p0S, p0S);
p=p.delaunay (2, 1, "beta", "lambda", p1cS, p1sS);
p=p.delaunay (2, 2, "beta", "lambda", p2cS, p2sS);
```

### Aplicación del método de Hori de orden dos

En primer lugar obtenemos el geopotencial lunisolar,  $U_1 = U_M + U_S$ .

```
U_1=U_M+U_S;
```

Ahora calculamos la función  $\mathcal{W}_1$ ,

$$\mathcal{W}_1 = \int \mathcal{U}_{\text{per}} dt,$$

eliminando seguidamente las frecuencias por su valor.

```
W_1=U_1.generatrix ();
W_1=W_1.sustfrecuencias ();
W_1.ordenacoef ();
```

Seguidamente, obtendremos el paréntesis de Poisson  $\{U_{1\text{per}}, \mathcal{W}_1\}$ . Para el cálculo correcto de éste definimos antes que nada el vector de variables canónicas y momentos conjugados  $\varpi = (h \ g \ H \ G)$ , dado que ahora la dependencia del potencial no se limita únicamente a la variable  $h$  y su momento conjugado:

$$\{U_{1\text{per}}, \mathcal{W}_1\} = \frac{\partial U_{1\text{per}}}{\partial h} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial H} - \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial h} \frac{\partial U_{1\text{per}}}{\partial H} + \frac{\partial U_{1\text{per}}}{\partial g} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial G} - \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g} \frac{\partial U_{1\text{per}}}{\partial G}.$$

La definición de  $\varpi$  y el cálculo del paréntesis se realiza mediante el siguiente código:

```
char **varpi; varpi=new char*[6];
for (i=0; i<6; i++) varpi[i]=new char[20];
strcpy (var[0], "h"); strcpy (var[1], "g"); strcpy (var[2], "l");
strcpy (var[3], "H"); strcpy (var[4], "G"); strcpy (var[5], "L");
U_1per=U_1.periodic ();
bracket=poissonbracket (U_1per, W_1, 3, var);
bracket=bracket*0.5E0;
```

Para evitar trabajar con series demasiado largas, eliminamos ahora los términos con  $\sin^2 J$ , y calculamos la función  $\mathcal{W}_2$ :

$$\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_2^B = \frac{1}{2} \int \{U_{1\text{per}}, \mathcal{W}_1\}_{\text{per}} dt.$$

```
bracket=bracket.discrimina ("sin J", 1);
W_2=bracket.generatrix ();
W_2=W_2.sustfrecuencias ();
W_2.ordenacoef ();
```

Calculamos ya  $\Delta h$ , separándola para ello en varias contribuciones:

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2,$$

con

$$\Delta h_1 = \frac{\partial \mathcal{W}_2^B}{\partial H}, \quad \Delta h_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial H}, \mathcal{W}_1 \right\}.$$

```

W_12=W_2;
W_12=W_12.derive ("H");
W_12=W_12.sust ("sin J", 0.E0);
W_12=W_12.sust ("cos J", 1.E0);
W_12=W_12.sust ("sin I", -0.39777716);
W_12=W_12.sust ("cos I", 0.9174820603054 );
W_12=W_12.sust ("G", 1.0);
W_12=W_12*PI/double(180*60*60);
W_12=W_12*1000000; // microarc second.

```

Al mismo tiempo hemos sustituido las variables  $I, J, G$  por su valor. En el cálculo de los paréntesis de Poisson aparecen los productos de las constantes  $k_M^2, k_M k_S$  o  $k_S^2$ . Como ambas constantes ( $k_M$  y  $k_S$ ) incluyen el paso de radianes a arcosegundos, al multiplicarse las constantes dicho cambio se lleva a cabo dos veces. Es por esto que deshacemos unos de ellos multiplicando el resultado por  $\pi/(180 \times 60 \times 60)$ . A continuación calculamos la serie  $\Delta\psi_2 = -\Delta h_2$ .

```

dW_1H=W_1.derive ("H");
dW_1H=poissonbracket (dW_1H, W_1, 3, var);
dW_1H=dW_1H*0.5E0;
dW_1H=dW_1H.sust ("sin J", 0.E0);
dW_1H=dW_1H.sust ("cos J", 1.E0);
dW_1H=dW_1H.sust ("sin I", -0.39777716);
dW_1H=dW_1H.sust ("cos I", 0.9174820603054 );
dW_1H=dW_1H.sust ("G", 1.0);
dW_1H=dW_1H*PI/double(180*60*60);
dW_1H=dW_1H*1000; // m.a.s.

```

Finalmente calculamos la serie de nutación final.

```

W_12=W_12+dW_1H;
W_12.ordenacoeef ();

```

En las tablas 10.8 y 10.9 mostramos las contribuciones  $\Delta\psi_1 = -\Delta h_1$  y  $\Delta\psi_2 = -\Delta h_2$ . En la tabla 10.10 se muestra la serie de nutación total  $\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2$ .

Tabla 10.8: **Efecto de segundo orden.** Serie de nutación en longitud,  $\Delta\psi_1 = -\Delta h_1 = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	17.9067
1	0	1	0	0	385.998	4.5283
3	0	-1	2	-2	385.959	0.7679
0	0	1	0	0	365.260	-0.6820
2	0	-1	2	-2	365.225	1.5779
1	0	-1	0	0	-346.636	-3.6409
1	0	-1	2	-2	346.604	0.7289
3	0	0	2	-2	187.662	-19.5036
1	0	0	2	-2	177.844	-21.2548
0	0	0	2	-2	173.310	-0.6071
3	0	1	2	-2	123.969	-0.5609
2	0	1	2	-2	121.749	-0.1727
1	0	1	2	-2	119.607	-1.0149
2	1	0	2	-4	-38.522	-0.1331
2	-1	0	2	-2	-32.451	-0.1934
1	-1	0	0	2	31.961	0.2404
0	1	0	0	-2	-31.812	0.2141
1	1	0	0	-2	-31.664	-0.2441
1	1	0	0	0	27.667	1.0899
0	1	0	0	0	27.555	-0.6287
1	-1	0	0	0	-27.443	-1.0723
3	-1	0	2	0	27.201	0.1224
1	-1	0	2	0	26.985	0.2538
0	1	0	-2	0	-26.878	0.2695
2	1	0	2	-2	23.942	0.1180
0	0	0	0	2	14.765	-1.3306
3	0	0	2	0	13.688	-2.9876
1	0	0	2	0	13.633	-3.5478
0	0	0	2	0	13.606	2.1469
0	1	0	0	2	9.614	-0.1623
0	1	0	-2	-2	-9.530	-0.1232
3	1	0	2	0	9.145	-0.3817
1	1	0	2	0	9.121	-0.4533
0	1	0	2	0	9.108	0.2755

Tabla 10.9: **Efecto de segundo orden.** Serie de nutación en longitud,  $\Delta\psi_2 = -\Delta h_2 = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	11.7627
2	0	0	0	0	-3399.192	1220.9336
3	0	0	0	0	-2266.128	-22.4617
4	0	0	0	0	-1699.596	0.1146
2	-2	0	2	0	1615.748	-0.9398
2	0	1	0	0	409.234	0.4521
1	0	1	0	0	385.998	-6.4981
3	0	-1	2	-2	385.959	-2.2795
2	0	-1	2	-2	365.225	0.8493
1	0	-1	0	0	-346.636	6.5039
1	0	-1	2	-2	346.604	1.1831
1	-2	0	0	2	-199.840	0.1150
2	-2	0	0	2	-194.133	0.1090
4	0	0	2	-2	192.989	-1.4009
3	0	0	2	-2	187.662	137.2909
2	0	0	2	-2	182.621	-1.7181
1	0	0	2	-2	177.844	-71.6651
3	0	1	2	-2	123.969	5.3616
2	0	1	2	-2	121.749	-0.9213
4	0	-1	4	-4	121.745	-0.1429
1	0	1	2	-2	119.607	-2.7929
3	0	2	2	-2	92.556	0.1633
4	0	0	4	-4	91.311	4.2751
4	0	1	4	-4	73.049	0.3331
2	-1	0	2	-2	-32.451	0.2480
2	-1	0	0	2	32.112	-0.1904
1	-1	0	0	2	31.961	-0.3854
1	1	0	0	-2	-31.664	0.3918
2	1	0	0	-2	-31.517	0.1676
2	1	0	0	0	27.780	-0.7849
1	1	0	0	0	27.667	-1.7606
1	-1	0	0	0	-27.443	1.7431
2	-1	0	0	0	-27.333	0.7687
3	-1	0	2	0	27.201	-1.2381
2	-1	0	2	0	27.093	-0.2778
1	-1	0	2	0	26.985	0.6641
3	1	0	2	-2	24.027	-0.3287
2	1	0	2	-2	23.942	-0.3125
1	1	0	2	-2	23.858	0.1282
2	0	0	0	2	14.830	0.1014
1	0	0	0	2	14.797	-0.1465



Tabla 10.9: **Efecto de segundo orden.** Serie de nutación en longitud,  $\Delta\psi_2 = -\Delta h_2 = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

2	0	0	0	-2	-14.701	0.1113
2	0	-1	2	0	14.192	0.1352
4	0	0	2	0	13.716	-0.2251
3	0	0	2	0	13.688	22.0208
2	0	0	2	0	13.661	4.8308
1	0	0	2	0	13.633	-11.5889
2	0	1	2	0	13.168	-0.1366
4	0	0	4	-2	12.710	1.3761
3	0	0	4	-2	12.686	0.2564
3	-1	0	2	2	9.570	0.5584
2	-1	0	2	2	9.557	0.1157
1	-1	0	2	2	9.543	-0.2945
3	1	0	2	0	9.145	2.8105
2	1	0	2	0	9.133	0.5804
1	1	0	2	0	9.121	-1.4944
4	1	0	4	-2	8.698	0.1734
3	0	0	2	2	7.103	0.3499
1	0	0	2	2	7.088	-0.1842
3	2	0	2	0	6.866	0.2787
1	2	0	2	0	6.852	-0.1478
4	0	0	4	0	6.830	0.1309

Tabla 10.10: **Efecto de segundo orden.** Serie total de nutación en longitud,  $\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 = -\Delta h = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	83.3921
2	0	0	0	0	-3399.192	1220.9336
3	0	0	0	0	-2266.128	-22.4617
4	0	0	0	0	-1699.596	0.1146
2	-2	0	2	0	1615.748	-0.9398
2	0	1	0	0	409.234	0.4521
1	0	1	0	0	385.998	11.6123
3	0	-1	2	-2	385.959	-0.7437
0	0	1	0	0	365.260	-3.0864
2	0	-1	2	-2	365.225	7.1605
1	0	-1	0	0	-346.636	-8.0633
1	0	-1	2	-2	346.604	2.6409
1	-2	0	0	2	-199.840	0.1150
2	-2	0	0	2	-194.133	0.1090

Tabla 10.10: **Efecto de segundo orden.** Serie total de nutación en longitud,  $\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 = -\Delta h = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

4	0	0	2	-2	192.989	-1.4009
3	0	0	2	-2	187.662	59.2795
2	0	0	2	-2	182.621	-1.7181
1	0	0	2	-2	177.844	-156.6819
0	0	0	2	-2	173.310	-2.4310
3	0	1	2	-2	123.969	3.1180
2	0	1	2	-2	121.749	-1.6123
4	0	-1	4	-4	121.745	-0.1429
1	0	1	2	-2	119.607	-6.8525
3	0	2	2	-2	92.556	0.1633
4	0	0	4	-4	91.311	4.2751
4	0	1	4	-4	73.049	0.3331
2	1	0	2	-4	-38.522	-0.3047
2	-1	0	2	-2	-32.451	-0.5266
2	-1	0	0	2	32.112	-0.1904
1	-1	0	0	2	31.961	0.5780
0	1	0	0	-2	-31.812	0.3250
1	1	0	0	-2	-31.664	-0.5862
2	1	0	0	-2	-31.517	0.1676
2	1	0	0	0	27.780	-1.0641
1	1	0	0	0	27.667	2.5990
0	1	0	0	0	27.555	-2.7036
1	-1	0	0	0	-27.443	-2.5463
2	-1	0	0	0	-27.333	1.0395
3	-1	0	2	0	27.201	-0.7445
1	-1	0	2	0	26.985	1.6751
0	1	0	-2	0	-26.878	1.0768
3	1	0	2	-2	24.027	-0.1273
2	1	0	2	-2	23.942	0.1599
1	1	0	2	-2	23.858	0.2858
2	0	0	2	-4	-16.064	-0.1574
0	0	1	0	-2	-15.387	0.1802
2	0	0	0	2	14.830	0.1014
1	0	0	0	2	14.797	0.1607
0	0	0	0	2	14.765	-5.3191
1	0	0	0	-2	-14.733	-0.1155
2	0	0	0	-2	-14.701	0.1113
0	0	1	0	2	14.192	0.1346
2	0	-1	2	0	14.192	0.4980
4	0	0	2	0	13.716	-0.2251
3	0	0	2	0	13.688	10.0686
2	0	0	2	0	13.661	5.1360
1	0	0	2	0	13.633	-25.7819
0	0	0	2	0	13.606	8.5878
2	0	1	2	0	13.168	-0.4482

Tabla 10.10: **Efecto de segundo orden.** Serie total de nutación en longitud,  $\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 = -\Delta h = \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

1	2	0	2	-2	12.787	0.1134
4	0	0	4	-2	12.710	1.3761
3	0	0	4	-2	12.686	0.3560
0	1	0	0	2	9.614	-0.6506
3	-1	0	2	2	9.570	0.2546
2	-1	0	2	2	9.557	0.1157
1	-1	0	2	2	9.543	-0.6607
0	1	0	-2	-2	-9.530	-0.4506
3	1	0	2	0	9.145	1.2837
2	1	0	2	0	9.133	0.5804
1	1	0	2	0	9.121	-3.3232
0	1	0	2	0	9.108	1.1022
4	1	0	4	-2	8.698	0.1734
3	0	0	2	2	7.103	0.1837
1	0	0	2	2	7.088	-0.4368
0	0	0	2	2	7.081	0.3160
3	2	0	2	0	6.866	0.1649
1	2	0	2	0	6.852	-0.3694
0	2	0	2	0	6.846	0.2472
4	0	0	4	0	6.830	0.1309

Las nutaciones en oblicuidad hasta segundo orden se calculan de la forma

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_1 + \Delta\epsilon_2 + \Delta\epsilon_3,$$

siendo

$$\Delta\epsilon_1 = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}_2^B}{\partial h},$$

$$\Delta\epsilon_2 = -\frac{1}{2G \sin I} \left\{ \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial h}, \mathcal{W}_1 \right\},$$

$$\Delta\epsilon_3 = \frac{1}{G \tan I} \frac{\partial (\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2^B)}{\partial g} + \frac{1}{2G \tan I} \left\{ \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial g}, \mathcal{W}_1 \right\}.$$

En las tablas 10.11, 10.12 y 10.13 mostramos las contribuciones parciales de  $\Delta\epsilon_1$ ,  $\Delta\epsilon_2$  y  $\Delta\epsilon_3$  respectivamente. La serie total de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  viene dada en la tabla 10.14.

Tabla 10.11: **Efecto de segundo orden.** Serie de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon_1 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	-20.5463
1	0	1	0	0	385.998	-3.1460
3	0	-1	2	-2	385.959	-0.3329
2	0	-1	2	-2	365.225	-0.7551
1	0	-1	0	0	-346.636	2.5294
1	0	-1	2	-2	346.604	-0.8457
3	0	0	2	-2	187.662	8.4559
1	0	0	2	-2	177.844	24.4060
3	0	1	2	-2	123.969	0.2432
1	0	1	2	-2	119.607	0.9921
1	-1	0	0	2	31.961	-0.1670
1	1	0	0	-2	-31.664	0.1696
1	1	0	0	0	27.667	-0.7572
1	-1	0	0	0	-27.443	0.7450
1	-1	0	2	0	26.985	-0.2466
3	0	0	2	0	13.688	1.2953
1	0	0	2	0	13.633	4.0918
1	-1	0	2	2	9.543	0.1051
3	1	0	2	0	9.145	0.1655
1	1	0	2	0	9.121	0.5237

Tabla 10.12: **Efecto de segundo orden.** Serie de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon_2 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	-12.6714
3	0	0	0	0	-2266.128	-0.4371
0	2	0	-2	0	-1095.175	-0.3022
1	0	1	0	0	385.998	2.8153
0	0	1	0	0	365.260	0.3164
2	0	-1	2	-2	365.225	-0.3366
1	0	-1	0	0	-346.636	-2.8215
1	0	-1	2	-2	346.604	-1.2775
2	0	-1	0	0	-329.819	0.0550
3	0	0	2	-2	187.662	2.6715
1	0	0	2	-2	177.844	77.2304
0	0	0	2	-2	173.310	-1.6698

Tabla 10.12: **Efecto de segundo orden.** Serie de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon_2 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

3	0	1	2	-2	123.969	0.1043
2	0	1	2	-2	121.749	0.3359
1	0	1	2	-2	119.607	3.0116
1	-1	0	0	2	31.961	0.1671
1	1	0	0	-2	-31.664	-0.1741
2	1	0	0	0	27.780	-0.0147
1	1	0	0	0	27.667	0.7731
1	-1	0	0	0	-27.443	-0.7533
1	-1	0	2	0	26.985	-0.7029
1	1	0	2	-2	23.858	-0.1368
0	0	0	0	2	14.765	1.1499
3	0	0	2	0	13.688	0.4285
1	0	0	2	0	13.633	12.4434
0	0	0	2	0	13.606	1.3554
0	1	0	0	2	9.614	0.1396
1	-1	0	2	2	9.543	0.3169
1	1	0	2	0	9.121	1.5997
0	1	0	2	0	9.108	0.1741
1	0	0	2	2	7.088	0.1981
1	2	0	2	0	6.852	0.1589

Tabla 10.13: **Efecto de segundo orden.** Serie de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon_3 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	4.6620
2	0	0	0	0	-3399.192	-238.0883
3	0	0	0	0	-2266.128	4.6506
2	-2	0	2	0	1615.748	0.1861
0	2	0	-2	0	-1095.175	0.1861
3	0	-1	2	-2	385.959	0.4720
0	0	1	0	0	365.260	-0.1395
1	0	-1	2	-2	346.604	0.4707
4	0	0	2	-2	192.989	0.2776
3	0	0	2	-2	187.662	-28.4256
2	0	0	2	-2	182.621	0.3445
1	0	0	2	-2	177.844	-28.4224
0	0	0	2	-2	173.310	0.6221
3	0	1	2	-2	123.969	-1.1101
1	0	1	2	-2	119.607	-1.1087

Tabla 10.13: **Efecto de segundo orden.** Serie de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon_3 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

4	0	0	4	-4	91.311	-0.8471
2	1	0	0	0	27.780	0.1603
2	-1	0	0	0	-27.333	-0.1571
3	-1	0	2	0	27.201	0.2563
1	-1	0	2	0	26.985	0.2555
0	0	0	0	2	14.765	-0.3086
3	0	0	2	0	13.688	-4.5591
2	0	0	2	0	13.661	-0.9446
1	0	0	2	0	13.633	-4.5680
0	0	0	2	0	13.606	-0.8998
4	0	0	4	-2	12.710	-0.2727
3	-1	0	2	2	9.570	-0.1156
1	-1	0	2	2	9.543	-0.1165
3	1	0	2	0	9.145	-0.5819
2	1	0	2	0	9.133	-0.1206
1	1	0	2	0	9.121	-0.5861
0	1	0	2	0	9.108	-0.1155

Tabla 10.14: **Efecto de segundo orden.** Serie total de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_1 + \Delta\epsilon_2 + \Delta\epsilon_3 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	-82.3197
2	0	0	0	0	-3399.192	-238.0839
3	0	0	0	0	-2266.128	3.7764
2	-2	0	2	0	1615.748	0.1745
0	2	0	-2	0	-1095.175	-0.4183
2	0	1	0	0	409.234	-0.1709
1	0	1	0	0	385.998	-3.8062
3	0	-1	2	-2	385.959	-0.6155
0	0	1	0	0	365.260	0.4933
2	0	-1	2	-2	365.225	-2.9385
1	0	-1	0	0	-346.636	1.9463
1	0	-1	2	-2	346.604	-4.6214
4	0	0	2	-2	192.989	0.2776
3	0	0	2	-2	187.662	2.2851
2	0	0	2	-2	182.621	0.3061
1	0	0	2	-2	177.844	199.2564
0	0	0	2	-2	173.310	-2.7175
3	0	1	2	-2	123.969	-0.1719

Tabla 10.14: **Efecto de segundo orden.** Serie total de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_1 + \Delta\epsilon_2 + \Delta\epsilon_3 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Se muestran únicamente los términos para los que  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

2	0	1	2	-2	121.749	0.9340
1	0	1	2	-2	119.607	7.8908
0	0	1	2	-2	117.539	-0.1078
4	0	0	4	-4	91.311	-0.8471
1	0	2	2	-2	90.103	0.1496
2	1	0	2	-4	-38.522	0.1513
1	-1	0	0	2	31.961	-0.1668
0	1	0	0	-2	-31.812	-0.1117
1	1	0	0	-2	-31.664	0.1632
2	1	0	0	0	27.780	0.2311
1	1	0	0	0	27.667	-0.7313
1	-1	0	0	0	-27.443	0.7270
2	-1	0	0	0	-27.333	-0.2243
1	-1	0	2	0	26.985	-1.8901
1	1	0	2	-2	23.858	-0.3607
0	0	0	0	2	14.765	1.9912
1	0	0	0	-2	-14.733	0.1289
2	0	-1	2	0	14.192	-0.2370
1	0	-1	2	0	14.162	0.1136
3	0	0	2	0	13.688	0.1838
2	0	0	2	0	13.661	-1.0712
1	0	0	2	0	13.633	32.5942
0	0	0	2	0	13.606	1.8110
2	0	1	2	0	13.168	0.2206
1	0	1	2	0	13.143	-0.1192
1	2	0	2	-2	12.787	-0.1397
4	0	0	4	-2	12.710	-0.2727
0	1	0	0	2	9.614	0.2443
1	-1	0	2	2	9.543	0.8326
1	1	0	2	0	9.121	4.1844
0	1	0	2	0	9.108	0.2327
1	0	0	2	2	7.088	0.5256
1	2	0	2	0	6.852	0.4217

## 10.4 Comparación de ambas aproximaciones

En las tablas 10.15 y 10.16 comparamos los resultados obtenidos con y sin aproximación, con un nivel de truncación de  $0.1 \mu\text{as}$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Como se muestra en las tablas, se encuentran importantes diferencias apreciables (mayores de  $10 \mu\text{as}$ ) en los períodos 6798.384, 385.998, 346.636, 187.662, 177.844 y 13.633 (días).

Tabla 10.15: **Efecto de segundo orden.** Comparación de las series de nutación en longitud,  $\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A_{J \neq 0}$ ( $\mu\text{as}$ )	$A_{J=0}$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta A $ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	83.392	28.760	54.632
2	0	0	0	0	-3399.192	1220.934	1220.587	0.347
3	0	0	0	0	-2266.128	-22.462	-21.452	1.010
4	0	0	0	0	-1699.596	0.115	0.115	0.000
2	-2	0	2	0	1615.748	-0.940	-0.315	0.625
2	0	1	0	0	409.234	0.452	0.204	0.248
1	0	1	0	0	385.998	11.612	-1.982	13.595
3	0	-1	2	-2	385.959	-0.744	-1.949	1.205
0	0	1	0	0	365.260	-3.086	-1.013	2.074
2	0	-1	2	-2	365.225	7.160	3.038	4.123
1	0	-1	0	0	-346.636	-8.063	2.870	10.933
1	0	-1	2	-2	346.604	2.641	1.510	1.130
1	-2	0	0	2	-199.840	0.115	0.049	0.066
2	-2	0	0	2	-194.133	0.109	0.072	0.037
4	0	0	2	-2	192.989	-1.401	-1.401	0.000
3	0	0	2	-2	187.662	59.279	117.787	58.507
2	0	0	2	-2	182.621	-1.718	-1.601	0.117
1	0	0	2	-2	177.844	-156.682	-92.954	63.728
0	0	0	2	-2	173.310	-2.431	0.367	2.798
3	0	1	2	-2	123.969	3.118	4.615	1.497
2	0	1	2	-2	121.749	-1.612	-1.131	0.481
4	0	-1	4	-4	121.745	-0.143	-0.143	0.000
1	0	1	2	-2	119.607	-6.853	-3.636	3.216
3	0	2	2	-2	92.556	0.163	0.141	0.023
4	0	0	4	-4	91.311	4.275	4.275	0.000
4	0	1	4	-4	73.049	0.333	0.333	0.000
2	1	0	2	-4	-38.522	-0.305	-0.003	0.302
2	-1	0	2	-2	-32.451	-0.527	-0.002	0.525
2	-1	0	0	2	32.112	-0.190	-0.197	0.007
1	-1	0	0	2	31.961	0.578	-0.146	0.724
0	1	0	0	-2	-31.812	0.325	0.087	0.238
1	1	0	0	-2	-31.664	-0.586	0.154	0.740
2	1	0	0	-2	-31.517	0.168	0.176	0.009
2	1	0	0	0	27.780	-1.064	-0.816	0.248
1	1	0	0	0	27.667	2.599	-0.665	3.264
0	1	0	0	0	27.555	-2.704	-0.730	1.973
1	-1	0	0	0	-27.443	-2.546	0.676	3.222
2	-1	0	0	0	-27.333	1.040	0.799	0.241
3	-1	0	2	0	27.201	-0.745	-1.074	0.329
1	-1	0	2	0	26.985	1.675	0.864	0.811
0	1	0	-2	0	-26.878	1.077	0.118	0.959
3	1	0	2	-2	24.027	-0.127	-0.295	0.168
2	1	0	2	-2	23.942	0.160	-0.136	0.296



Tabla 10.15: **Efecto de segundo orden.** Comparación de las series de nutación en longitud,  $\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

1	1	0	2	-2	23.858	0.286	0.182	0.104
2	0	0	2	-4	-16.064	-0.157	0.003	0.160
0	0	1	0	-2	-15.387	0.180		0.180
2	0	0	0	2	14.830	0.101	0.078	0.024
1	0	0	0	2	14.797	0.161	-0.050	0.211
0	0	0	0	2	14.765	-5.319	-1.330	3.989
1	0	0	0	-2	-14.733	-0.116	-0.030	0.085
2	0	0	0	-2	-14.701	0.111	0.071	0.041
0	0	1	0	2	14.192	0.135	0.268	0.133
2	0	-1	2	0	14.192	0.498		0.498
4	0	0	2	0	13.716	-0.225	-0.225	0.000
3	0	0	2	0	13.688	10.069	19.032	8.963
2	0	0	2	0	13.661	5.136	4.852	0.284
1	0	0	2	0	13.633	-25.782	-15.136	10.646
0	0	0	2	0	13.606	8.588	2.144	6.444
2	0	1	2	0	13.168	-0.448	-0.252	0.196
1	2	0	2	-2	12.787	0.113	0.042	0.072
4	0	0	4	-2	12.710	1.376	-0.002	1.378
3	0	0	4	-2	12.686	0.356		0.356
0	1	0	0	2	9.614	-0.651	-0.160	0.490
3	-1	0	2	2	9.570	0.255	0.483	0.228
2	-1	0	2	2	9.557	0.116	0.114	0.002
1	-1	0	2	2	9.543	-0.661	-0.387	0.274
0	1	0	-2	-2	-9.530	-0.451	-0.055	0.395
3	1	0	2	0	9.145	1.284	2.430	1.146
2	1	0	2	0	9.133	0.580	0.572	0.008
1	1	0	2	0	9.121	-3.323	-1.947	1.377
0	1	0	2	0	9.108	1.102	0.275	0.827
4	1	0	4	-2	8.698	0.173	0.173	0.000
3	0	0	2	2	7.103	0.184	0.303	0.119
1	0	0	2	2	7.088	-0.437	-0.242	0.195
0	0	0	2	2	7.081	0.316	0.034	0.282
3	2	0	2	0	6.866	0.165	0.241	0.076
1	2	0	2	0	6.852	-0.369	-0.194	0.175
0	2	0	2	0	6.846	0.247	0.028	0.220
4	0	0	4	0	6.830	0.131	0.131	0.000

Tabla 10.16: **Efecto de segundo orden.** Comparación de las series de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_1 + \Delta\epsilon_2 + \Delta\epsilon_3 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A_{J \neq 0}$ ( $\mu\text{as}$ )	$A_{J=0}$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta A $ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	-82.320	-27.691	54.629
2	0	0	0	0	-3399.192	-238.084	-238.910	0.826
3	0	0	0	0	-2266.128	3.776	3.791	0.015
2	-2	0	2	0	1615.748	0.175	-0.023	0.197
0	2	0	-2	0	-1095.175	-0.418	-0.079	0.339
2	0	1	0	0	409.234	-0.171	-0.027	0.144
1	0	1	0	0	385.998	-3.806	-0.329	3.477
3	0	-1	2	-2	385.959	-0.616	0.282	0.898
0	0	1	0	0	365.260	0.493	0.156	0.337
2	0	-1	2	-2	365.225	-2.938	-1.364	1.574
1	0	-1	0	0	-346.636	1.946	-0.292	2.238
1	0	-1	2	-2	346.604	-4.621	-1.188	3.434
4	0	0	2	-2	192.989	0.278	0.278	0.001
3	0	0	2	-2	187.662	2.285	-17.334	19.619
2	0	0	2	-2	182.621	0.306	0.271	0.035
1	0	0	2	-2	177.844	199.256	73.389	125.867
0	0	0	2	-2	173.310	-2.718	-1.052	1.666
3	0	1	2	-2	123.969	-0.172	-0.683	0.512
2	0	1	2	-2	121.749	0.934	0.448	0.486
1	0	1	2	-2	119.607	7.891	2.878	5.013
0	0	1	2	-2	117.539	-0.108	-0.039	0.069
4	0	0	4	-4	91.311	-0.847	-0.847	0.000
1	0	2	2	-2	90.103	0.150	0.088	0.062
2	1	0	2	-4	-38.522	0.151	0.009	0.143
1	-1	0	0	2	31.961	-0.167	0.003	0.170
0	1	0	0	-2	-31.812	-0.112	-0.047	0.065
1	1	0	0	-2	-31.664	0.163	-0.009	0.172
2	1	0	0	0	27.780	0.231	0.161	0.070
1	1	0	0	0	27.667	-0.731	0.013	0.744
1	-1	0	0	0	-27.443	0.727	-0.018	0.745
2	-1	0	0	0	-27.333	-0.224	-0.157	0.067
1	-1	0	2	0	26.985	-1.890	-0.683	1.207
1	1	0	2	-2	23.858	-0.361	-0.148	0.213
0	0	0	0	2	14.765	1.991	0.839	1.152
1	0	0	0	-2	-14.733	0.129	0.029	0.100
2	0	-1	2	0	14.192	-0.237	-0.113	0.124
1	0	-1	2	0	14.162	0.114		0.114
3	0	0	2	0	13.688	0.184	-2.847	3.031
2	0	0	2	0	13.661	-1.071	-0.948	0.123
1	0	0	2	0	13.633	32.594	12.017	20.578
0	0	0	2	0	13.606	1.811	0.458	1.353
2	0	1	2	0	13.168	0.221	0.105	0.116

Tabla 10.16: **Efecto de segundo orden.** Comparación de las series de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_1 + \Delta\epsilon_2 + \Delta\epsilon_3 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

1	0	1	2	0	13.143	-0.119	-0.020	0.099
1	2	0	2	-2	12.787	-0.140	-0.033	0.106
4	0	0	4	-2	12.710	-0.273		0.273
0	1	0	0	2	9.614	0.244	0.107	0.137
1	-1	0	2	2	9.543	0.833	0.307	0.526
1	1	0	2	0	9.121	4.184	1.544	2.641
0	1	0	2	0	9.108	0.233	0.059	0.174
1	0	0	2	2	7.088	0.526	0.192	0.334
1	2	0	2	0	6.852	0.422	0.154	0.268



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 11

# Efecto de la perturbación de los planetas

La perturbación que los planetas originan en la rotación de la Tierra suele separarse en dos partes: un efecto directo, debido al momento que crean los planetas en la Tierra, y uno indirecto, que tiene en cuenta las perturbaciones de los planetas en las órbitas de la Tierra y de la Luna. El cálculo detallado de ambos efectos ha sido realizado por Vondrak (1983a, 1983b and 1983c) y Kinoshita y Souchay (1991). Williams (1995) y Hartman y Soffel (1994) derivaron efectos planetarios directos alternativos. La solución de Tierra rígida de Roosbeek y Dehant (1998) también incluye términos planetarios, aunque las efemérides planetarias se toman de una aproximación kepleriana. En este capítulo realizamos un estudio detallado de la influencia directa e indirecta de los planetas sobre las series de nutación de la Tierra, empleando el manipulador simbólico de series de Kinoshita desarrollado.

### 11.1 Efecto planetario directo

El potencial de primer orden debido a la perturbación de un planeta  $P$  sobre la Tierra tiene la forma siguiente:

$$U = \frac{\mathcal{G}M_{\oplus}M_p a_{\oplus}^2}{r^3} J_2 P_2(\sin \delta),$$

en donde  $J_2$ , como se muestra en la tabla 1.5, viene dado por  $J_2 = (2C - A - B)/(2M_{\oplus}a_{\oplus}^2)$ . El conjunto de variables definidas en el manipulador de series de Kinoshita es el mismo que el usado en el estudio de la perturbación lunisolar y viene dado en la tabla 7.1.

Los posteriores desarrollos del geopotencial en las variables de Andoyer se llevan a cabo de la misma forma en que se realizaron para la Luna y el Sol. Así, hacemos la

transformación

$$\begin{aligned}
 P_n^m(\sin \delta) e^{\pm i m \alpha} &= \sum_{\varrho, \epsilon = \pm 1} \sum_{m', m''=0}^n \bar{Q}_n^{(m, m')}(\varrho, \cos J) \bar{Q}_n^{(m', m'')}(\epsilon, \cos I) \times \\
 &\times P_n^{m''}(\sin \beta_p) \times \exp \left\{ \pm i \left[ m'' \varrho \epsilon (\lambda_p - h) - m l - m' \varrho g + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{\pi}{2} (m - m') + \frac{\pi}{2} \varrho (m' - m'') \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Seguidamente sustituimos los armónicos esféricos del planeta:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_0|_p &= \left( \frac{a_p}{r_p} \right)^3 P_2^0(\sin \beta_p) = \sum_i (A_{si}^0 \sin \Theta_i + A_{ci}^0 \cos \Theta_i), \\
 \mathcal{P}_1|_p &= \left( \frac{a_p}{r_p} \right)^3 P_2^1(\sin \beta_p) \sin \lambda_p = \sum_i (A_{si}^1 \sin \Theta_i + A_{ci}^1 \cos \Theta_i), \\
 \mathcal{P}_2|_p &= \left( \frac{a_p}{r_p} \right)^3 P_2^2(\sin \beta_p) \cos 2\lambda_p = \sum_i (A_{si}^2 \sin \Theta_i + A_{ci}^2 \cos \Theta_i),
 \end{aligned}$$

con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ . Estos armónicos han sido calculados en el capítulo 6. Así el potencial queda expresado en función de las longitudes medias de los planetas. Llamando  $\mathcal{P}$  al potencial asociado al efecto perturbador de un planeta  $P$ , la función generatriz se obtiene como

$$W = k_P \int \mathcal{P}_{\text{per}} dt,$$

siendo  $\mathcal{P}_{\text{per}}$  la parte periódica de  $\mathcal{P}$ . Las constantes  $k_P$  de los planetas se relacionan de forma sencilla con la constante  $k_S$  del Sol mediante

$$k_P = \rho_P k_S, \quad \rho_P = \frac{M_P}{M_{\oplus}} \left( \frac{a_{\oplus}}{a_P} \right)^3,$$

en donde los valores de las constantes  $\rho_P$  para los diferentes planetas viene dados en la tabla 11.1.

Tabla 11.1: Valores numéricos de las constantes de los planetas (valores tomados de Kinoshita, 1990).

Planeta	$\rho_P$
Mercurio	$2.86 \times 10^{-6}$
Venus	$6.46 \times 10^{-6}$
Marte	$9.10 \times 10^{-8}$
Júpiter	$6.78 \times 10^{-6}$
Saturno	$3.27 \times 10^{-7}$
Urano	$6.16 \times 10^{-9}$
Neptuno	$1.89 \times 10^{-9}$

Finalmente calculamos las nutaciones en longitud y oblicuidad, mediante las expresiones:

$$\Delta h = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial H} = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial I},$$

$$\Delta I = \frac{1}{G} \left( -\frac{1}{\sin I} \Delta H + \cot I \Delta G \right) = \frac{1}{G} \left( \frac{1}{\sin I} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial h} - \cot I \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} \right).$$

En las secciones 11.3, 11.4 y 11.5 mostramos los resultados obtenidos para  $\Delta\psi = -\Delta h$  y  $\Delta\epsilon = -\Delta I$  debido al efecto directo de la perturbación planetaria (Venus, Júpiter y Saturno). Las dos tablas siguientes recogen los términos más importantes de la perturbación planetaria directa.

Tabla 11.2: Términos principales de la perturbación planetaria directa. Serie de nutación  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 5\mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
0	0	0	0	2	0	-2	5373.471	-12.3258	0.0000
0	0	0	1	0	0	0	4332.589	31.5719	-8.0144
0	0	0	1	0	0	-2	4328.604	-25.5439	-6.4901
3	-5	0	0	0	0	1	-2958.279	-10.7690	-45.4656
3	-5	0	0	0	0	2	-2957.349	220.4782	0.0000
0	0	0	2	0	0	-1	2165.796	-0.4910	5.6199
0	0	0	2	0	0	-2	2165.298	-108.8510	0.0000
0	0	0	3	0	0	-2	1443.753	-8.5198	2.1647
4	-6	0	0	0	0	2	727.580	-51.8930	0.0000
4	-6	0	0	0	0	1	727.524	2.3348	9.8574
1	-1	0	0	0	0	1	583.958	-2.3314	9.8428
1	-1	0	0	0	0	0	583.921	87.9106	0.0000
1	-1	0	0	0	0	-1	583.885	-1.5817	-6.6778
0	1	0	-3	0	0	2	488.958	-11.6328	0.0000
2	-4	0	0	0	0	1	-487.664	-1.9564	-8.2597
2	-4	0	0	0	0	2	-487.638	35.6747	0.0000
0	1	0	-1	0	0	0	398.884	11.6960	0.0000
5	-7	0	0	0	0	2	323.941	-21.1586	0.0000
2	-2	0	0	0	0	1	291.970	-1.2496	5.2756
2	-2	0	0	0	0	0	291.961	36.5948	0.0000
1	-3	0	0	0	0	2	-265.727	17.2776	0.0000
6	-8	0	0	0	0	2	208.353	-12.0703	0.0000
3	-3	0	0	0	0	0	194.640	19.6632	0.0000
0	2	0	0	0	0	-2	182.621	-8.8564	0.0000
7	-9	0	0	0	0	2	153.560	-7.6998	0.0000
4	-4	0	0	0	0	0	145.980	11.6514	0.0000

Tabla 11.2: Términos principales de la perturbación planetaria directa. Serie de nutación  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 5\mu\text{as}$ .

8	-10	0	0	0	0	2	121.586	-5.1757	0.0000
5	-5	0	0	0	0	0	116.784	7.2647	0.0000

Tabla 11.3: Términos principales de la perturbación planetaria directa. Serie de nutación  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 5\mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
0	0	0	0	2	0	-2	5373.471	0.0000	5.3439
3	-5	0	0	0	0	1	-2958.279	24.2746	-5.7497
3	-5	0	0	0	0	2	-2957.349	0.0000	95.5890
0	0	0	2	0	0	-2	2165.298	0.0000	47.1927
4	-6	0	0	0	0	2	727.580	0.0000	-22.4984
4	-6	0	0	0	0	1	727.524	-5.2630	1.2466
1	-1	0	0	0	0	1	583.958	-5.2552	-1.2447
0	1	0	-3	0	0	2	488.958	0.0000	-5.0434
2	-4	0	0	0	0	2	-487.638	0.0000	15.4669
5	-7	0	0	0	0	2	323.941	0.0000	-9.1734
1	-3	0	0	0	0	2	-265.727	0.0000	7.4908
6	-8	0	0	0	0	2	208.353	0.0000	-5.2331

## 11.2 Efecto planetario indirecto

El efecto planetario indirecto es el efecto que produce en las series de nutación la influencia de los planetas en el movimiento de la Luna y de la Tierra. Se habla de efecto planetario indirecto en la Luna y el Sol (o Tierra). El método de cálculo de estas contribuciones a las series de nutación es idéntico al dado en el capítulo 7 para el cálculo del efecto lunisolar de primer orden. La diferencia está en que las series que representan el movimiento de la Luna y el Sol en los armónicos esféricos incluyen el efecto planetario. Estos armónicos vienen dados en las tablas 6.10, 6.11, 6.12 (para la Luna), 6.13 y 6.14 (para el Sol) del

capítulo 6. Según estas, los armónicos esféricos toman ahora la forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \left( \frac{a_M}{r_M} \right)^3 P_2^0(\sin \beta_M) &= \sum_i (A_{si}^0 \sin \Theta_i + A_{ci}^0 \cos \Theta_i), \\ \frac{1}{3} \left( \frac{a_M}{r_M} \right)^3 P_2^1(\sin \beta_M) \sin \lambda_M &= \sum_i (A_{si}^1 \sin \Theta_i + A_{ci}^1 \cos \Theta_i), \\ \frac{1}{3} \left( \frac{a_M}{r_M} \right)^3 P_2^2(\sin \beta_M) \cos 2\lambda_M &= \sum_i (A_{si}^2 \sin \Theta_i + A_{ci}^2 \cos \Theta_i),\end{aligned}$$

con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D + i_6L_{Me} + i_7L_{Ve} + i_8L_E + i_9L_{Ma} + i_{10}L_{Ju} + i_{11}L_{Sa}$  para la Luna, y

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \left( \frac{a_S}{r_S} \right)^3 P_2^0(\sin \beta_S) &= \sum_i (B_{si}^0 \sin \Theta_i + B_{ci}^0 \cos \Theta_i), \\ \frac{1}{3} \left( \frac{a_S}{r_S} \right)^3 P_2^2(\sin \beta_S) \cos 2\lambda_S &= \sum_i (B_{si}^2 \sin \Theta_i + B_{ci}^2 \cos \Theta_i),\end{aligned}$$

con  $\Theta_i = i_1L_{Ve} + i_2L_E + i_3L_{Ma} + i_4L_{Ju} + i_5L_{Sa} + i_6L_{Ur} + i_7h$ , para los del Sol. Las tablas citadas anteriormente únicamente contienen los términos que incluyen efecto planetario indirecto, de manera que la obtención de las series de nutación es directa.

En las secciones 11.6 y 11.7 mostramos el efecto planetario indirecto debido a la influencia de los planetas en el movimiento de la Luna y de la Tierra. Las tablas siguientes resumen los términos más significativos de las series de nutación en longitud y oblicuidad respectivamente. Las tablas 11.4 y 11.5 recogen el efecto lunar, mientras que 11.6 y 11.7 el efecto indirecto debido a la Tierra.

Tabla 11.4: Términos principales de la perturbación planetaria indirecta (parte de la Luna). Serie de nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 10 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$L_{Me}$	$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	-2	5	311923.319	-306.4475	511.2262
1	-2	0	0	2	0	0	2	0	-2	0	100155.423	28.3130	0.0000
0	1	0	0	0	0	-18	16	0	0	0	-99727.792	-22.2975	10.3030
1	0	0	1	-1	0	-8	12	0	0	0	-88082.028	119.3913	59.6497
0	0	0	1	-1	0	0	0	-2	0	0	-38036.684	-26.7747	-7.8228
1	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	37883.593	-45.9360	-43.3147
0	1	0	0	-1	0	-3	4	0	0	0	34989.308	0.0000	13.3072
0	0	0	2	-2	0	-5	6	0	0	0	-18185.987	0.0000	23.4602
0	2	0	0	-2	0	0	-2	0	3	0	13562.891	35.1178	-6.2097
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	-1	-10771.540	17.3458	8.3885
1	0	0	0	0	0	0	-4	8	-3	0	-6870.085	8.3672	29.7938
2	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	-6803.298	7.9046	68.1730



Tabla 11.4: Términos principales de la perturbación planetaria indirecta (parte de la Luna). Serie de nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 10 \mu\text{as}$ .

1	0	0	0	0	0	0	4	-8	3	0	-6728.164	-8.1944	29.1784
0	2	0	0	-2	0	0	-2	0	2	0	-6366.253	43.8592	0.0000
1	0	0	1	-1	0	0	0	-2	0	0	-5767.538	27.3000	7.9524
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	2	5376.541	-4.8523	-10.9389
1	0	0	2	-2	0	-5	6	0	0	0	-4948.506	-1.7567	-43.6014
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	-1	0	-4334.585	-5.0001	19.3554
0	2	0	0	-2	0	-3	3	0	0	0	-3561.662	13.8678	0.0000
1	0	0	1	-1	0	-5	7	0	0	0	-2863.023	13.9937	2.6481
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	2	0	2165.796	-2.6612	-14.3396
1	0	0	2	-2	0	-3	3	0	0	0	2060.860	11.7584	0.0000
2	1	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	13.663	12.6123	-6.3001
2	-1	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	13.659	-12.6218	-6.3046

Tabla 11.5: Términos principales de la perturbación planetaria indirecta (parte de la Luna). Serie de nutación  $\Delta\epsilon$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 10 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$L_{Me}$	$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	-2	5	311923.319	272.9495	163.6159
1	-2	0	0	2	0	0	2	0	-2	0	100155.423	0.0000	-15.1167
1	0	0	1	-1	0	-8	12	0	0	0	-88082.028	31.8477	-63.7444
1	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	37883.593	-23.1262	24.5258
1	0	0	0	0	0	0	-4	8	-3	0	-6870.085	15.9073	-4.4674
2	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	-6803.298	29.5566	-3.4270
1	0	0	0	0	0	0	4	-8	3	0	-6728.164	15.5787	4.3751
1	0	0	1	-1	0	0	0	-2	0	0	-5767.538	4.2459	-14.5758
1	0	0	2	-2	0	-5	6	0	0	0	-4948.506	-23.2793	0.9379
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	-1	0	-4334.585	10.3341	2.6696

Tabla 11.6: Términos principales de la perturbación planetaria indirecta (parte de la Tierra). Serie de nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 10 \mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
0	4	-8	3	0	0	0	-651392.660	-50.6422	158.7290
0	0	0	2	-5	0	0	-322614.503	-45.7978	0.0000
8	-13	0	0	0	0	0	87265.401	23.3264	33.4941
0	1	-2	0	0	0	0	-5764.006	-36.7643	38.7709
0	0	0	1	0	0	0	4332.589	-42.4471	29.9057
3	-5	0	0	0	0	0	-2959.209	-21.7197	7.3809

Tabla 11.6: Términos principales de la perturbación planetaria indirecta (parte de la Tierra). Serie de nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 10 \mu\text{as}$ .

0	2	-4	0	0	0	0	-2882.003	-7.5731	13.7077
2	-3	0	0	0	0	0	1454.936	0.8312	48.5226
1	-1	0	0	0	0	0	583.921	66.0696	0.0000
2	-4	0	0	0	0	2	-487.638	11.0626	-0.1109
0	1	0	-2	0	0	0	439.332	-18.4582	27.0435
3	-4	0	0	0	0	0	416.688	-0.4934	29.2521
0	1	0	0	-1	0	0	411.784	26.3573	0.0000
0	1	0	-1	0	0	0	398.884	-135.4599	-2.6054
0	2	-2	0	0	0	0	389.968	-38.4842	0.1431
0	1	0	1	0	0	-2	336.834	-24.7175	0.1381
2	-2	0	0	0	0	0	291.961	-95.5752	-0.2223
1	-3	0	0	0	0	2	-265.727	-28.1907	0.0000
2	-5	0	0	0	0	2	-208.834	-0.1950	-12.7916
0	2	0	-2	0	0	0	199.442	38.9150	0.3110
0	2	0	-1	0	0	-2	190.657	-15.3946	-3.0032
0	6	-8	3	0	0	-2	182.672	12.2710	-41.5042
0	2	-8	3	0	0	2	-182.570	12.2746	-41.5685
0	2	0	1	0	0	-2	175.235	16.5713	-1.2024
2	-1	0	0	0	0	-2	162.255	0.2094	-17.3182
1	1	0	0	0	0	-2	139.113	-30.4590	0.0000
3	-2	0	0	0	0	-2	126.973	0.0000	-11.4351
0	3	0	-1	0	0	-2	125.269	51.6500	1.6256
0	4	-2	0	0	0	-2	124.376	14.3170	-0.2804
0	3	0	0	0	0	0	121.752	16.3866	20.3679
2	0	0	0	0	0	-2	112.348	38.5797	0.1633
0	4	0	-2	0	0	-2	95.331	-18.3954	-0.2561

Tabla 11.7: Términos principales de la perturbación planetaria indirecta (parte de la Tierra). Serie de nutación  $\Delta\epsilon$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 10 \mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
0	1	0	1	0	0	-2	336.834	0.0000	10.7163
1	-3	0	0	0	0	2	-265.727	0.0000	-12.2222
0	6	-8	3	0	0	-2	182.672	-17.9943	-5.3201
0	2	-8	3	0	0	2	-182.570	18.0221	5.3217
1	1	0	0	0	0	-2	139.113	0.0000	13.2056
0	3	0	-1	0	0	-2	125.269	0.7048	-22.3930
2	0	0	0	0	0	-2	112.348	0.0000	-16.7263
0	5	0	0	0	0	-2	73.050	-14.0659	11.3163

### 11.3 Influencia directa de Venus

Las tablas 11.8 y 11.9 muestran respectivamente las series de nutación en longitud y oblicuidad asociadas al efecto directo de la perturbación de Venus.

Tabla 11.8: Influencia directa de Venus en la nutación  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4}$   $\mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
3	-5	0	0	0	0	1	-2958.279	-10.7690	-45.4656
3	-5	0	0	0	0	2	-2957.349	220.4782	0.0000
5	-8	0	0	0	0	2	2863.894	1.1179	-1.2608
5	-8	0	0	0	0	1	2863.023	-0.2605	-0.1399
2	-3	0	0	0	0	2	1455.386	0.6376	0.7191
2	-3	0	0	0	0	1	1455.161	0.0000	-0.4463
2	-3	0	0	0	0	0	1454.936	-0.9904	1.1169
1	-2	0	0	0	0	0	-975.378	0.8238	-0.9290
1	-2	0	0	0	0	1	-975.277	0.0000	0.3009
1	-2	0	0	0	0	2	-975.176	-0.3187	-0.3594
4	-7	0	0	0	0	2	-733.469	-0.3228	0.3640
4	-6	0	0	0	0	2	727.580	-51.8930	0.0000
4	-6	0	0	0	0	1	727.524	2.3348	9.8574
1	-1	0	0	0	0	1	583.958	-2.3314	9.8428
1	-1	0	0	0	0	0	583.921	87.9106	0.0000
1	-1	0	0	0	0	-1	583.885	-1.5817	-6.6778
2	-4	0	0	0	0	1	-487.664	-1.9564	-8.2597
2	-4	0	0	0	0	2	-487.638	35.6747	0.0000
6	-9	0	0	0	0	2	485.029	0.1639	-0.1848
3	-4	0	0	0	0	2	416.725	0.2054	0.2317
3	-4	0	0	0	0	1	416.707	0.0000	-0.1205
3	-4	0	0	0	0	0	416.688	-0.2241	0.2527
0	1	0	0	0	0	0	365.256	-0.3705	-0.4179
0	1	0	0	0	0	-1	365.242	0.0000	0.1051
3	-6	0	0	0	0	2	-325.103	-0.1562	0.1762
5	-7	0	0	0	0	2	323.941	-21.1586	0.0000
5	-7	0	0	0	0	1	323.930	0.8963	3.7840
2	-2	0	0	0	0	1	291.970	-1.2496	5.2756
2	-2	0	0	0	0	0	291.961	36.5948	0.0000
2	-2	0	0	0	0	-1	291.952	-0.6255	-2.6409
1	-3	0	0	0	0	1	-265.735	-1.1306	-4.7733
1	-3	0	0	0	0	2	-265.727	17.2776	0.0000
4	-5	0	0	0	0	2	243.178	0.1222	0.1378

Tabla 11.8: Influencia directa de Venus en la nutación  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

4	-5	0	0	0	0	0	243.165	-0.1019	0.1149
1	0	0	0	0	0	0	224.701	-0.2568	-0.2896
2	-5	0	0	0	0	2	-208.834	-0.1049	0.1183
6	-8	0	0	0	0	2	208.353	-12.0703	0.0000
6	-8	0	0	0	0	1	208.349	0.4884	2.0620
3	-3	0	0	0	0	1	194.644	-0.8281	3.4963
3	-3	0	0	0	0	0	194.640	19.6632	0.0000
3	-3	0	0	0	0	-1	194.636	-0.3251	-1.3725
0	2	0	0	0	0	-1	182.625	0.7816	-3.2998
0	2	0	0	0	0	-2	182.621	-8.8564	0.0000
2	-1	0	0	0	0	0	162.261	-0.1646	-0.1856
7	-9	0	0	0	0	2	153.560	-7.6998	0.0000
7	-9	0	0	0	0	1	153.558	0.3008	1.2699
4	-4	0	0	0	0	1	145.983	-0.5857	2.4726
4	-4	0	0	0	0	0	145.980	11.6514	0.0000
4	-4	0	0	0	0	-1	145.978	-0.1880	-0.7937
1	1	0	0	0	0	-1	139.115	0.5554	-2.3448
1	1	0	0	0	0	-2	139.113	-3.4907	0.0000
3	-2	0	0	0	0	0	126.976	-0.1072	-0.1209
8	-10	0	0	0	0	2	121.586	-5.1757	0.0000
8	-10	0	0	0	0	1	121.584	0.1969	0.8314
5	-5	0	0	0	0	1	116.786	-0.4251	1.7949
5	-5	0	0	0	0	0	116.784	7.2647	0.0000
5	-5	0	0	0	0	-1	116.783	-0.1149	-0.4850
2	0	0	0	0	0	-1	112.349	0.3765	-1.5897
2	0	0	0	0	0	-2	112.348	-1.7306	0.0000
9	-11	0	0	0	0	2	100.632	-3.5800	0.0000
9	-11	0	0	0	0	1	100.631	0.1338	0.5649
6	-6	0	0	0	0	1	97.321	-0.3123	1.3186
6	-6	0	0	0	0	0	97.320	4.6717	0.0000
6	-6	0	0	0	0	-1	97.319	-0.0724	-0.3055
3	-1	0	0	0	0	-1	94.221	0.2552	-1.0776
3	-1	0	0	0	0	-2	94.220	-0.9341	0.0000
10	-12	0	0	0	0	2	85.839	-2.5187	0.0000
10	-12	0	0	0	0	1	85.838	0.0934	0.3943
7	-7	0	0	0	0	1	83.418	-0.2308	0.9745
7	-7	0	0	0	0	0	83.417	3.0668	0.0000
7	-7	0	0	0	0	-1	83.417	-0.0462	-0.1951
4	-2	0	0	0	0	-1	81.130	0.1738	-0.7339
4	-2	0	0	0	0	-2	81.129	-0.5290	0.0000
11	-13	0	0	0	0	2	74.837	-1.7907	0.0000
11	-13	0	0	0	0	1	74.837	0.0668	0.2820

Tabla 11.8: Influencia directa de Venus en la nutación  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4}$   $\mu\text{as}$ .

8	-8	0	0	0	0	1	72.991	-0.1711	0.7224
8	-8	0	0	0	0	0	72.990	2.0430	0.0000
8	-8	0	0	0	0	-1	72.990	-0.0293	-0.1238
5	-3	0	0	0	0	-1	71.233	0.1190	-0.5023
5	-3	0	0	0	0	-2	71.232	-0.3076	0.0000
12	-14	0	0	0	0	2	66.335	-1.2812	0.0000
12	-14	0	0	0	0	1	66.335	0.0491	0.2073
9	-9	0	0	0	0	1	64.881	-0.1271	0.5366
9	-9	0	0	0	0	0	64.880	1.3759	0.0000
6	-4	0	0	0	0	-1	63.488	0.0818	-0.3452
6	-4	0	0	0	0	-2	63.487	-0.1792	0.0000
13	-15	0	0	0	0	2	59.568	-0.9467	0.0000
13	-15	0	0	0	0	1	59.568	0.0367	0.1551
10	-10	0	0	0	0	1	58.392	-0.0946	0.3993
10	-10	0	0	0	0	0	58.392	0.9345	0.0000
7	-5	0	0	0	0	-1	57.262	0.0563	-0.2378
14	-16	0	0	0	0	2	54.054	-1.8029	0.0000
11	-11	0	0	0	0	1	53.084	-0.0706	0.2980
11	-11	0	0	0	0	0	53.084	0.6390	0.0000
8	-6	0	0	0	0	-1	52.148	0.0388	-0.1637
12	-12	0	0	0	0	1	48.660	-0.0529	0.2235
12	-12	0	0	0	0	0	48.660	0.4393	0.0000
9	-7	0	0	0	0	-1	47.873	0.0265	-0.1120
13	-13	0	0	0	0	1	44.917	-0.0401	0.1693
13	-13	0	0	0	0	0	44.917	0.3034	0.0000
14	-14	0	0	0	0	1	41.709	-0.0309	0.1303
14	-14	0	0	0	0	0	41.709	0.2103	0.0000
15	-15	0	0	0	0	1	38.928	-0.0240	0.1014
12	-10	0	0	0	0	-2	38.422	0.1425	0.0000
13	-11	0	0	0	0	-2	36.050	0.2229	0.0000
14	-12	0	0	0	0	-2	33.954	0.3367	0.0000
15	-13	0	0	0	0	-2	32.088	0.4715	0.0000
16	-14	0	0	0	0	-2	30.417	-0.5307	0.0000

Tabla 11.9: Influencia directa de Venus en la nutación  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
3	-5	0	0	0	0	1	-2958.279	24.2746	-5.7497
3	-5	0	0	0	0	2	-2957.349	0.0000	95.5890
5	-8	0	0	0	0	2	2863.894	0.5466	0.4847
5	-8	0	0	0	0	1	2863.023	0.0747	-0.1391
2	-3	0	0	0	0	2	1455.386	-0.3118	0.2764
2	-3	0	0	0	0	1	1455.161	0.2383	0.0000
1	-2	0	0	0	0	1	-975.277	-0.1606	0.0000
1	-2	0	0	0	0	2	-975.176	0.1558	-0.1382
4	-7	0	0	0	0	2	-733.469	-0.1578	-0.1400
4	-6	0	0	0	0	2	727.580	0.0000	-22.4984
4	-6	0	0	0	0	1	727.524	-5.2630	1.2466
1	-1	0	0	0	0	1	583.958	-5.2552	-1.2447
1	-1	0	0	0	0	-1	583.885	-3.5653	0.8445
2	-4	0	0	0	0	1	-487.664	4.4100	-1.0445
2	-4	0	0	0	0	2	-487.638	0.0000	15.4669
3	-4	0	0	0	0	2	416.725	-0.1004	0.0891
5	-7	0	0	0	0	2	323.941	0.0000	-9.1734
5	-7	0	0	0	0	1	323.930	-2.0203	0.4785
2	-2	0	0	0	0	1	291.970	-2.8167	-0.6672
2	-2	0	0	0	0	-1	291.952	-1.4100	0.3340
1	-3	0	0	0	0	1	-265.735	2.5485	-0.6036
1	-3	0	0	0	0	2	-265.727	0.0000	7.4908
6	-8	0	0	0	0	2	208.353	0.0000	-5.2331
6	-8	0	0	0	0	1	208.349	-1.1009	0.2608
3	-3	0	0	0	0	1	194.644	-1.8667	-0.4422
3	-3	0	0	0	0	-1	194.636	-0.7328	0.1736
0	2	0	0	0	0	-1	182.625	-1.7618	-0.4173
0	2	0	0	0	0	-2	182.621	0.0000	3.8397
7	-9	0	0	0	0	2	153.560	0.0000	-3.3383
7	-9	0	0	0	0	1	153.558	-0.6780	0.1606
4	-4	0	0	0	0	1	145.983	-1.3201	-0.3127
4	-4	0	0	0	0	-1	145.978	-0.4238	0.1004
1	1	0	0	0	0	-1	139.115	-1.2519	-0.2965
1	1	0	0	0	0	-2	139.113	0.0000	1.5134
8	-10	0	0	0	0	2	121.586	0.0000	-2.2440
8	-10	0	0	0	0	1	121.584	-0.4439	0.1051
5	-5	0	0	0	0	1	116.786	-0.9583	-0.2270
5	-5	0	0	0	0	-1	116.783	-0.2589	0.0613
2	0	0	0	0	0	-1	112.349	-0.8488	-0.2010

Tabla 11.9: Influencia directa de Venus en la nutación  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4}$   $\mu\text{as}$ .

2	0	0	0	0	0	-2	112.348	0.0000	0.7503
9	-11	0	0	0	0	2	100.632	0.0000	-1.5521
9	-11	0	0	0	0	1	100.631	-0.3016	0.0714
6	-6	0	0	0	0	1	97.321	-0.7040	-0.1668
6	-6	0	0	0	0	-1	97.319	-0.1631	0.0386
3	-1	0	0	0	0	-1	94.221	-0.5753	-0.1363
3	-1	0	0	0	0	-2	94.220	0.0000	0.4050
10	-12	0	0	0	0	2	85.839	0.0000	-1.0920
10	-12	0	0	0	0	1	85.838	-0.2105	0.0499
7	-7	0	0	0	0	1	83.418	-0.5203	-0.1232
7	-7	0	0	0	0	-1	83.417	-0.1042	0.0247
4	-2	0	0	0	0	-1	81.130	-0.3918	-0.0928
4	-2	0	0	0	0	-2	81.129	0.0000	0.2293
11	-13	0	0	0	0	2	74.837	0.0000	-0.7764
11	-13	0	0	0	0	1	74.837	-0.1506	0.0357
8	-8	0	0	0	0	1	72.991	-0.3857	-0.0914
5	-3	0	0	0	0	-1	71.233	-0.2682	-0.0635
5	-3	0	0	0	0	-2	71.232	0.0000	0.1333
12	-14	0	0	0	0	2	66.335	0.0000	-0.5555
12	-14	0	0	0	0	1	66.335	-0.1107	0.0262
9	-9	0	0	0	0	1	64.881	-0.2865	-0.0679
6	-4	0	0	0	0	-1	63.488	-0.1843	-0.0437
13	-15	0	0	0	0	2	59.568	0.0000	-0.4105
10	-10	0	0	0	0	1	58.392	-0.2132	-0.0505
7	-5	0	0	0	0	-1	57.262	-0.1270	-0.0301
14	-16	0	0	0	0	2	54.054	0.0000	-0.7817
11	-11	0	0	0	0	1	53.084	-0.1591	-0.0377
12	-12	0	0	0	0	1	48.660	-0.1194	-0.0283
14	-12	0	0	0	0	-2	33.954	0.0000	-0.1460
15	-13	0	0	0	0	-2	32.088	0.0000	-0.2044
16	-14	0	0	0	0	-2	30.417	0.0000	0.2301

## 11.4 Influencia directa de Júpiter

Las tablas 11.10 y 11.11 muestran respectivamente las series de nutación en longitud y oblicuidad asociadas al efecto directo de la perturbación de Júpiter.

Tabla 11.10: Influencia directa de Júpiter en la nutación  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
0	0	0	1	0	0	2	4336.582	-0.2605	-0.0330
0	0	0	1	0	0	1	4334.585	0.0000	-1.3671
0	0	0	1	0	0	0	4332.589	31.5719	-8.0144
0	0	0	1	0	0	-1	4330.596	0.2114	2.4502
0	0	0	1	0	0	-2	4328.604	-25.5439	-6.4901
0	0	0	2	0	0	0	2166.295	1.2683	-0.6017
0	0	0	2	0	0	-1	2165.796	-0.4910	5.6199
0	0	0	2	0	0	-2	2165.298	-108.8510	0.0000
0	0	0	3	0	0	-1	1443.975	0.0724	0.4497
0	0	0	3	0	0	-2	1443.753	-8.5198	2.1647
0	0	0	4	0	0	-2	1082.898	-0.6536	0.3245
0	1	0	-5	0	0	2	631.494	-0.1804	-0.0842
0	1	0	-4	0	0	2	551.160	-1.5393	-0.3911
0	1	0	-3	0	0	2	488.958	-11.6328	0.0000
0	1	0	-3	0	0	1	488.933	-0.0628	-0.5677
0	1	0	-2	0	0	2	439.373	-1.2271	0.3118
0	1	0	-2	0	0	1	439.352	0.0070	-0.1117
0	1	0	-2	0	0	0	439.332	0.9094	0.2302
0	1	0	-1	0	0	2	398.918	-0.1139	0.0532
0	1	0	-1	0	0	1	398.901	0.1090	-0.4531
0	1	0	-1	0	0	0	398.884	11.6960	0.0000
0	1	0	-1	0	0	-1	398.867	0.2759	0.4238
0	1	0	0	0	0	0	365.256	0.7561	-0.1914
0	1	0	0	0	0	-2	365.228	-0.2118	-0.0538
0	1	0	1	0	0	-1	336.846	0.0976	0.4158
0	1	0	1	0	0	-2	336.834	-1.6638	0.0000
0	1	0	2	0	0	-2	312.536	-0.1812	0.0460
0	2	0	-5	0	0	2	231.409	-0.2161	-0.0549
0	2	0	-4	0	0	2	219.676	-1.7478	0.0000
0	2	0	-3	0	0	2	209.075	-0.1953	0.0496
0	2	0	-3	0	0	0	209.066	0.1034	0.0263
0	2	0	-2	0	0	0	199.442	1.3970	0.0000
0	2	0	0	0	0	-2	182.621	-0.1309	0.0000
0	3	0	-5	0	0	2	141.660	-0.3238	0.0000
0	3	0	-3	0	0	0	132.961	0.2081	0.0000



Tabla 11.11: Influencia directa de Júpiter en la nutación  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4}$   $\mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
0	0	0	1	0	0	2	4336.582	0.0143	-0.1129
0	0	0	1	0	0	1	4334.585	0.7299	0.0000
0	0	0	1	0	0	-1	4330.596	1.3082	-0.1129
0	0	0	1	0	0	-2	4328.604	-2.8138	11.0746
0	0	0	2	0	0	-1	2165.796	3.0005	0.2622
0	0	0	2	0	0	-2	2165.298	0.0000	47.1927
0	0	0	3	0	0	-1	1443.975	0.2401	-0.0386
0	0	0	3	0	0	-2	1443.753	0.9385	3.6938
0	0	0	4	0	0	-2	1082.898	0.1407	0.2834
0	1	0	-4	0	0	2	551.160	0.1696	-0.6674
0	1	0	-3	0	0	2	488.958	0.0000	-5.0434
0	1	0	-3	0	0	1	488.933	0.3031	-0.0336
0	1	0	-2	0	0	2	439.373	-0.1352	-0.5320
0	1	0	-1	0	0	1	398.901	0.2419	0.0582
0	1	0	-1	0	0	-1	398.867	0.2263	-0.1473
0	1	0	1	0	0	-1	336.846	0.2220	-0.0521
0	1	0	1	0	0	-2	336.834	0.0000	0.7213
0	2	0	-4	0	0	2	219.676	0.0000	-0.7577
0	3	0	-5	0	0	2	141.660	0.0000	-0.1404

## 11.5 Influencia directa de Saturno

Las tablas 11.12 y 11.13 muestran respectivamente las series de nutación en longitud y oblicuidad asociadas al efecto directo de la perturbación de Saturno.

Tabla 11.12: Influencia directa de Saturno en la nutación  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
0	0	0	2	-5	0	0	-322614.503	-0.3647	0.0259
0	0	0	2	-5	0	2	-301917.969	-0.2126	-0.0658
0	0	0	1	-2	0	2	22366.652	0.1118	0.0000
0	0	0	2	-4	0	0	11130.428	0.0004	-0.1440
0	0	0	0	1	0	0	10759.227	-0.0012	-4.1147
0	0	0	0	1	0	-2	10734.686	0.0000	-2.0303
0	0	0	0	2	0	0	5379.614	-0.1135	0.0058
0	0	0	0	2	0	-1	5376.541	-0.0986	0.5286
0	0	0	0	2	0	-2	5373.471	-12.3258	0.0000
0	0	0	0	3	0	-2	3583.678	0.0000	0.6778
0	1	0	0	-3	0	2	406.709	-0.2431	0.0000
0	1	0	0	-1	0	0	378.092	0.2741	0.0000

Tabla 11.13: Influencia directa de Saturno en la nutación  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 L_{Ur} + i_7 h$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
0	0	0	0	1	0	-2	10734.686	-0.8802	0.0000
0	0	0	0	2	0	-1	5376.541	0.2822	0.0527
0	0	0	0	2	0	-2	5373.471	0.0000	5.3439
0	0	0	0	3	0	-2	3583.678	0.2939	0.0000
0	1	0	0	-3	0	2	406.709	0.0000	-0.1054

## 11.6 Efecto planetario indirecto debido a la Luna

Las tablas 11.14 y 11.15 muestran respectivamente las series de nutación en longitud y oblicuidad asociadas al efecto indirecto de la perturbación planetaria en la órbita de la Luna.

Tabla 11.14: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Luna en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$L_{Me}$	$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	-2	5	311923.319	-306.4475	511.2262
1	-2	0	0	2	0	0	2	0	-2	0	100155.423	28.3130	0.0000
0	1	0	0	0	0	-18	16	0	0	0	-99727.792	-22.2975	10.3030
1	0	0	1	-1	0	-8	12	0	0	0	-88082.028	119.3913	59.6497
0	0	0	1	-1	0	0	0	-2	0	0	-38036.684	-26.7747	-7.8228
1	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	37883.593	-45.9360	-43.3147
0	1	0	0	-1	0	-3	4	0	0	0	34989.308	0.0000	13.3072
0	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	-1	18430.955	4.2228	2.0414
0	0	0	2	-2	0	-5	6	0	0	0	-18185.987	0.0000	23.4602
0	2	0	0	-2	0	-6	8	0	0	0	17494.654	-7.8231	-1.8379
1	2	0	0	-2	0	0	-2	0	3	0	-13630.813	8.8875	0.0000
0	2	0	0	-2	0	0	-2	0	3	0	13562.891	35.1178	-6.2097
0	2	0	0	-2	0	0	-6	8	0	0	13286.253	1.5189	2.2382
0	1	0	0	-1	0	0	-1	0	1	0	-12732.506	5.1666	0.0000
0	0	0	1	-1	0	0	-1	0	-1	0	-11960.459	2.0702	-7.8198
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	11945.280	0.0000	-7.0593
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	-1	-10771.540	17.3458	8.3885
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	1	10746.943	-6.6549	0.0000
1	0	0	2	-2	0	0	-9	13	0	0	-10648.784	0.0000	-2.1963
0	2	0	0	-2	0	0	-5	6	0	0	-10180.741	2.3706	1.2365
1	1	0	0	-1	0	-3	4	0	0	0	-8437.848	0.0000	2.8830
1	0	0	0	0	0	8	-13	0	0	0	-7372.756	4.6158	6.6354
0	0	0	1	-1	0	-8	12	0	0	0	7366.985	1.4472	0.7224
1	-1	0	0	0	0	18	-16	0	0	0	-7295.729	-6.7707	-3.3760
1	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	5	-6944.728	7.6423	1.7492
1	0	0	0	0	0	0	-4	8	-3	0	-6870.085	8.3672	29.7938
2	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	-6803.298	7.9046	68.1730
1	0	0	0	0	0	0	4	-8	3	0	-6728.164	-8.1944	29.1784
1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	-6658.080	-7.3267	1.6771
0	0	0	1	-1	0	0	-1	0	-2	5	6653.373	0.9485	-1.5824
0	2	0	0	-2	0	0	-2	0	2	0	-6366.253	43.8592	0.0000
1	1	0	0	0	0	-18	16	0	0	0	-6364.518	5.6847	-2.8418
1	0	0	0	0	0	-8	13	0	0	0	-6307.036	-3.9510	5.6767
1	0	0	1	-1	0	0	0	-2	0	0	-5767.538	27.3000	7.9524
0	0	0	0	0	0	0	1	-2	0	0	-5764.006	0.6679	-0.6656
1	0	0	1	-1	0	0	-2	2	0	0	5760.479	0.0000	-4.7488
1	-1	0	0	1	0	3	-4	0	0	0	-5692.364	0.0000	2.3586
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	2	5376.541	-4.8523	-10.9389
1	0	0	0	0	0	-3	5	0	0	0	5240.146	-2.0570	0.0000
1	0	0	0	0	0	0	-2	4	0	0	5002.824	-1.1446	-2.0380
1	0	0	2	-2	0	-5	6	0	0	0	-4948.506	-1.7567	-43.6014
0	0	0	1	-1	0	-5	7	0	0	0	-4945.906	-3.5313	-0.6785
1	-2	0	0	2	0	6	-8	0	0	0	-4895.862	1.1670	0.0000
1	-2	0	0	2	0	0	2	0	-3	0	-4528.486	-5.2737	-0.9461
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	-1	0	-4334.585	-5.0001	19.3554

Tabla 11.14: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Luna en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	1	0	4330.596	0.0000	-4.6825
1	0	0	2	-2	0	0	-8	11	0	0	-3739.745	0.0000	0.7676
1	0	0	2	-2	-1	0	2	0	0	0	-3716.241	0.0000	0.7857
0	2	0	0	-2	0	0	-4	4	0	0	-3680.325	0.4461	0.0000
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	3	3585.043	-0.7487	0.0000
0	2	0	0	-2	0	-3	3	0	0	0	-3561.662	13.8678	0.0000
1	0	0	-1	1	0	0	1	0	0	0	-3397.965	0.0000	1.0030
1	2	0	0	-2	0	0	-2	0	2	0	-3287.613	5.3864	0.0000
2	0	0	1	-1	0	0	-1	0	2	0	3178.335	0.0000	1.0003
1	0	0	0	0	0	0	1	-2	0	0	-3119.305	-3.7102	3.4929
0	0	0	1	-1	0	0	-2	2	0	0	3118.272	0.0000	0.3752
0	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	2	3002.219	0.3956	0.8913
1	0	0	2	-2	0	0	-2	0	0	2	3001.262	0.7544	0.0000
1	0	0	1	-1	0	3	-6	0	0	0	-2960.140	-0.8500	-1.4136
1	0	0	1	-1	0	-3	4	0	0	0	2958.279	-0.9610	3.9474
2	0	0	2	-2	0	-3	3	0	0	0	2957.349	-1.1610	0.0000
1	0	0	1	-1	0	0	-3	4	0	0	2881.121	0.9474	-1.3449
2	0	0	2	-2	0	-5	6	0	0	0	-2863.894	0.0000	1.1901
1	0	0	1	-1	0	-5	7	0	0	0	-2863.023	13.9937	2.6481
1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-2646.184	0.0000	1.5047
0	0	0	1	-1	0	0	-1	0	1	0	2645.440	0.0000	0.4175
1	2	0	0	-2	0	-3	3	0	0	0	-2337.204	1.6075	0.0000
0	2	0	0	-2	0	0	-2	0	0	2	-2310.488	0.2621	0.0000
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	2	0	2165.796	-2.6612	-14.3396
1	0	0	0	0	0	3	-5	0	0	0	-2061.762	-0.7826	0.0000
0	0	0	1	-1	0	-3	4	0	0	0	2061.311	0.0000	-0.4074
1	0	0	2	-2	0	-3	3	0	0	0	2060.860	11.7584	0.0000
1	0	0	0	0	0	0	2	-4	0	0	-2023.986	-0.4508	0.7999
1	0	0	1	-1	0	0	-4	6	0	0	1920.943	0.4066	0.0000
0	0	0	1	-1	0	-2	2	0	0	0	-1851.456	-0.3296	0.0000
1	0	0	0	0	0	2	-3	0	0	0	1851.091	0.0000	-3.1662
0	0	0	1	-1	0	0	-1	0	2	0	1642.528	0.2947	1.5751
1	0	0	2	-2	0	0	-2	0	2	0	1642.241	4.9839	0.0000
0	0	0	2	-2	0	-3	3	0	0	0	1581.457	-1.2176	0.0000
1	0	0	1	-1	0	-2	2	0	0	0	-1455.161	1.7545	0.0000
0	0	0	0	0	0	2	-3	0	0	0	1454.936	0.0000	-0.8713
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	3	0	1443.975	-0.3311	-0.8699
0	2	0	0	-2	0	-4	5	0	0	0	1343.227	0.0000	-0.2263
0	0	0	2	-2	0	0	-2	0	2	0	1322.720	-0.5361	0.0000
1	0	0	0	0	0	-2	3	0	0	0	-1198.452	0.0000	1.9004
1	0	0	2	-2	0	0	-2	0	3	0	1190.855	0.6498	0.0000
1	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	1138.758	0.0000	0.2697
0	2	0	0	-2	0	-5	6	0	0	0	-1032.969	0.0000	-0.1361
0	0	0	2	-2	0	0	-2	0	3	0	1013.349	-0.1182	0.0000
1	0	0	1	-1	0	1	-3	0	0	0	-975.479	-0.3919	0.0000
0	0	0	0	0	0	1	-2	0	0	0	-975.378	0.0000	0.1660
0	0	0	2	-2	0	-4	4	0	0	0	-925.728	-0.4455	0.0000
1	0	0	0	0	0	1	-2	0	0	0	-852.997	0.0000	-0.1720

Tabla 11.14: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Luna en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

1	0	0	2	-2	0	-4	4	0	0	0	-814.780	2.6884	0.0000
0	0	0	1	-1	0	-4	5	0	0	0	-814.710	0.1090	-0.4499
1	0	0	1	-1	0	-4	6	0	0	0	733.526	0.2760	0.0000
1	0	0	1	-1	0	-4	5	0	0	0	-727.524	-0.6598	2.7514
0	2	0	0	-2	0	-2	2	0	0	0	698.426	0.4950	0.0000
1	0	0	2	-2	0	-4	5	0	0	0	662.042	0.0000	-0.2040
0	0	0	1	-1	0	-1	0	0	0	0	-638.831	-0.0805	-0.3079
1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	638.788	-2.8071	0.0000
1	0	0	2	-2	0	0	-3	0	4	0	-599.786	0.1217	0.0000
1	0	0	1	-1	0	-1	0	0	0	0	-583.958	0.4968	2.0974
0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	583.921	-2.1718	0.0000
1	0	0	1	-1	0	1	-2	0	0	0	583.885	0.1197	0.5014
1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	-537.735	-1.9450	0.0000
1	0	0	2	-2	0	0	-3	0	3	0	-526.851	0.3878	0.0000
1	0	0	2	-2	0	-6	7	0	0	0	-522.291	0.0000	-0.1413
0	2	0	0	-2	0	-4	4	0	0	0	-501.674	0.2617	0.0000
1	0	0	1	-1	0	-2	3	0	0	0	487.664	-0.2124	0.8901
1	0	0	1	-1	0	-6	8	0	0	0	-485.004	0.1580	0.0000
1	0	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	469.684	0.2264	-0.3763
0	0	0	1	-1	0	-2	3	0	0	0	455.024	0.0000	-0.1214
1	0	0	2	-2	0	-2	2	0	0	0	455.002	1.1244	0.0000
1	0	0	0	0	0	0	3	-4	0	0	445.687	0.1028	0.0000
1	0	0	0	0	0	3	-4	0	0	0	443.896	0.0000	-0.4343
0	0	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	439.332	0.2173	-0.3722
0	0	0	2	-2	0	-2	2	0	0	0	426.460	-0.1572	0.0000
1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	423.747	1.5479	0.0000
0	0	0	0	0	0	0	3	-4	0	0	418.266	0.1077	-0.0586
1	0	0	1	-1	0	-3	3	0	0	0	-416.707	0.1209	0.0000
0	0	0	0	0	0	3	-4	0	0	0	416.688	0.0000	-0.4512
1	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	413.699	0.4600	0.0000
1	0	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	-412.664	0.1554	0.2575
0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	398.884	1.6350	0.0000
1	0	0	0	0	0	-3	4	0	0	0	-392.624	0.0000	0.2953
0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	389.968	0.5065	0.0000
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	378.092	0.1011	0.0000
1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	-376.777	1.0512	0.0000
1	0	0	0	0	0	0	-2	2	0	0	-368.812	0.3080	0.0000
1	0	1	1	-1	0	0	-1	0	0	0	365.245	0.0000	-0.1115
1	0	0	2	-2	0	-5	5	0	0	0	-340.149	0.3959	0.0000
1	-1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	328.164	0.0000	0.1519
1	0	0	2	-2	0	0	-2	2	0	0	326.947	0.1535	0.0000
1	0	0	1	-1	0	-5	6	0	0	0	-323.930	-0.0954	0.3942
1	0	0	2	-2	0	0	-1	0	1	0	320.933	0.5235	0.0000
1	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	305.062	0.5805	0.0000
1	0	0	1	-1	0	-2	1	0	0	0	-291.970	0.1221	0.5180
0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	291.961	0.8160	0.0000
1	0	0	0	0	0	-2	2	0	0	0	-279.939	0.3569	0.0000
1	0	0	1	-1	0	-1	2	0	0	0	265.735	-0.0628	0.2642

Tabla 11.14: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Luna en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4}$   $\mu\text{as}$ .

1	0	0	2	-2	0	-1	1	0	0	0	255.731	-0.2157	0.0000
1	0	0	2	-2	0	-6	6	0	0	0	-214.941	0.1362	0.0000
1	0	0	1	-1	0	-6	7	0	0	0	-208.349	0.0000	0.1293
1	0	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	205.470	-0.2877	0.0000
1	0	0	2	-2	0	-2	3	0	0	0	202.610	0.0000	0.1374
0	0	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	199.442	-0.9755	0.0000
1	0	0	1	-1	0	-3	2	0	0	0	-194.644	0.0502	0.2130
0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0	0	194.640	-0.4125	0.0000
1	0	0	2	-2	0	0	0	0	-1	0	185.456	0.1591	0.0000
1	0	0	2	-2	0	-8	13	0	0	0	178.207	-0.0644	0.1001
1	0	0	2	-2	0	0	4	-8	3	0	177.892	-0.1277	0.4248
1	0	0	2	-2	0	0	-4	8	-3	0	177.795	0.1278	0.4250
1	0	0	2	-2	0	8	-13	0	0	0	177.482	0.0643	0.1001
1	0	0	2	-2	0	0	0	0	1	0	170.832	-0.1590	0.0000
1	0	0	2	-2	0	2	-3	0	0	0	158.473	0.0000	0.1627
1	0	0	1	-1	0	-4	3	0	0	0	-145.983	0.0000	0.1085
0	0	0	0	0	0	4	-4	0	0	0	145.980	-0.1546	0.0000
1	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	0	139.115	-0.0316	0.1330
1	0	0	2	-2	0	1	-1	0	0	0	136.324	0.2701	0.0000
0	2	0	0	-2	0	0	1	0	-1	0	135.798	-0.1037	0.0000
1	0	0	2	-2	0	0	1	0	-1	0	123.003	-0.3733	0.0000
1	0	0	2	-2	0	0	2	-2	0	0	122.142	-0.1029	0.0000
0	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0	116.784	-0.1014	0.0000
1	0	0	2	-2	0	2	-2	0	0	0	110.521	-0.2424	0.0000
1	0	0	2	-2	0	0	2	0	-2	0	94.012	0.1042	0.0000
0	1	0	0	-2	0	0	2	0	-2	0	-37.849	-0.3139	-0.0049
0	1	0	0	-2	0	2	-2	0	0	0	-35.702	0.5546	0.0000
0	1	0	0	-2	0	0	2	-2	0	0	-34.638	0.2001	-0.0041
0	1	0	0	-2	0	0	1	0	-1	0	-34.569	0.7160	0.0222
0	1	0	0	-2	0	3	-4	0	0	0	-34.441	0.0000	-0.1577
0	1	0	0	-2	0	0	1	0	-2	0	-34.295	0.0905	-0.1241
0	1	0	0	-2	0	1	-1	0	0	0	-33.645	-0.4384	0.0000
0	1	0	0	-2	0	2	-3	0	0	0	-32.523	0.0058	-0.2037
0	1	0	0	0	0	-3	3	0	0	0	32.099	-0.4150	0.0000
0	1	0	0	-2	0	0	0	0	1	0	-32.047	0.1884	0.0000
0	1	0	0	0	0	0	-2	0	2	0	31.972	-0.6092	0.0000
0	1	0	0	-2	0	8	-13	0	0	0	-31.824	-0.0667	-0.1071
0	0	0	0	2	0	-18	16	0	0	0	31.822	-0.4871	0.2432
0	1	0	0	-2	0	0	-4	8	-3	0	-31.813	-0.1338	-0.4346
0	1	0	0	-2	0	0	4	-8	3	0	-31.810	0.1337	-0.4344
0	2	0	0	-2	0	-18	16	0	0	0	-31.802	-0.4578	0.2287
0	1	0	0	-2	0	-8	13	0	0	0	-31.800	0.0662	-0.1062
0	1	0	0	0	0	0	-2	0	3	0	31.738	0.3055	-0.0546
0	1	0	0	-2	0	0	0	0	-1	0	-31.580	-0.1705	-0.0122
0	1	0	0	-2	0	-2	3	0	0	0	-31.131	0.0000	-0.1110
0	1	0	0	0	0	-2	2	0	0	0	30.426	-0.1712	0.0000
0	1	0	0	0	0	0	-2	2	0	0	29.650	-0.1283	0.0000
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	29.599	-0.4373	0.0095

Tabla 11.14: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Luna en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

0	1	0	0	0	0	-3	4	0	0	0	29.506	0.0000	-0.1199
0	1	0	0	-2	0	0	-1	0	1	0	-29.462	-0.1607	0.0000
0	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	28.919	0.4636	0.0000
0	1	0	0	-2	0	-2	2	0	0	0	-28.686	-0.4187	0.0000
0	1	0	0	0	0	-2	3	0	0	0	28.086	0.0040	-0.1812
0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	27.731	-0.0514	-0.1092
1	-1	0	0	2	0	0	2	0	-3	0	27.723	0.1156	0.0205
0	1	0	0	0	0	0	1	-2	0	0	27.687	0.1317	-0.1389
1	2	0	0	0	0	-18	16	0	0	0	27.674	-0.1833	0.0915
1	0	0	0	0	0	18	-16	0	0	0	27.659	0.1721	0.0860
0	1	0	0	-2	0	0	-2	0	3	0	-27.611	-1.3168	0.2339
0	1	0	0	-2	0	-6	8	0	0	0	-27.598	0.2243	0.0508
0	0	0	0	1	0	3	-4	0	0	0	27.576	0.0000	-0.1955
0	2	0	0	0	0	-18	16	0	0	0	27.562	-2.1078	1.0529
0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	27.557	0.1988	-0.0475
0	1	0	0	0	0	0	4	-8	3	0	27.556	0.1321	-0.4935
1	-1	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	-27.555	-0.0533	-0.4534
1	1	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	27.554	0.0537	0.4561
0	1	0	0	0	0	0	-4	8	-3	0	27.553	-0.1321	-0.4935
0	1	0	0	0	0	0	0	0	-2	5	27.552	-0.1988	-0.0475
1	-1	0	0	2	0	0	2	0	-2	0	27.547	-0.2895	0.0000
0	0	0	0	0	0	18	-16	0	0	0	27.547	1.9772	0.9877
1	1	0	0	-2	0	0	-2	0	3	0	-27.499	-0.1091	0.0194
0	0	0	0	1	0	0	1	0	-1	0	27.495	-0.2014	0.0000
0	1	0	0	-2	0	0	-5	6	0	0	-27.480	0.1134	0.0610
1	-1	0	0	2	0	3	-3	0	0	0	27.453	-0.1599	0.0000
1	-2	0	0	0	0	18	-16	0	0	0	-27.451	0.1756	0.0877
0	1	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	27.443	0.0081	0.1129
0	1	0	0	-2	0	0	-2	0	2	0	-27.436	3.4234	-0.0071
1	0	0	0	0	0	-18	16	0	0	0	-27.436	-0.1645	0.0822
0	1	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	27.423	-0.1295	-0.1377
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	27.380	0.0477	-0.1108
0	1	0	0	-2	0	-3	3	0	0	0	-27.343	1.9244	0.0000
1	1	0	0	-2	0	0	-2	0	2	0	-27.326	0.2904	0.0000
2	1	0	2	-2	0	-3	3	0	0	0	27.300	-0.3279	0.0000
1	1	0	0	-2	0	-3	3	0	0	0	-27.233	0.1628	0.0000
2	1	0	2	-2	0	0	-2	0	2	0	27.208	-0.5876	0.0000
2	0	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	27.100	-0.3728	0.1862
1	-1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	27.093	0.0192	-0.1675
2	-2	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	27.085	0.3509	0.1752
0	1	0	0	0	0	2	-3	0	0	0	27.042	-0.0042	-0.1646
2	1	0	2	-2	0	0	-2	0	3	0	27.039	0.2078	-0.0369
0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	26.313	-0.3776	0.0000
0	1	0	0	-2	0	-4	4	0	0	0	-26.120	0.2385	0.0000
0	1	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	25.774	0.3237	0.0058
0	1	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	25.178	0.1498	0.0000
0	1	0	0	-2	0	-5	5	0	0	0	-25.002	0.1058	0.0000
0	1	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	24.210	-0.1028	0.0000

Tabla 11.14: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Luna en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

2	-1	0	2	0	0	0	2	0	-2	0	23.852	-0.1133	0.0000
2	1	0	2	-2	0	0	1	0	-1	0	22.586	-0.1222	0.0000
0	0	0	0	2	0	0	-2	0	2	0	15.946	0.2059	-0.0034
0	0	0	0	2	0	-2	2	0	0	0	15.552	-0.3356	-0.0021
0	0	0	0	2	0	0	-2	2	0	0	15.346	-0.1155	-0.0027
0	0	0	0	2	0	0	-1	0	1	0	15.333	-0.4132	0.0129
0	0	0	0	2	0	-1	1	0	0	0	15.148	0.2498	0.0000
0	0	0	0	2	0	-2	3	0	0	0	14.917	-0.0026	-0.1061
0	1	0	0	2	0	-18	16	0	0	0	14.767	-0.3741	0.1869
0	0	0	0	2	0	0	4	-8	3	0	14.766	0.0656	-0.2189
0	0	0	0	2	0	0	-4	8	-3	0	14.765	-0.0656	-0.2187
0	1	0	0	-2	0	-18	16	0	0	0	-14.763	-0.3696	0.1846
2	0	0	2	0	0	0	-2	0	2	0	14.665	-0.2075	0.0000
2	0	0	2	0	0	-2	2	0	0	0	14.331	0.2907	0.0000
2	0	0	2	0	0	0	-2	2	0	0	14.157	0.1877	0.0000
2	0	0	2	0	0	0	-1	0	1	0	14.145	0.6169	-0.0132
2	0	0	2	0	0	-3	4	0	0	0	14.124	0.0000	0.1690
2	0	0	2	0	0	0	-1	0	2	0	14.099	0.0819	0.1363
0	0	0	0	2	0	2	-2	0	0	0	14.055	0.1001	0.0000
2	0	0	2	0	0	-1	1	0	0	0	13.988	-0.8002	0.0000
0	0	0	0	2	0	0	2	0	-3	0	13.791	0.1115	0.0200
2	0	0	2	0	0	-2	3	0	0	0	13.790	0.0000	0.3377
0	3	0	0	0	0	-18	16	0	0	0	13.779	-0.1728	0.0863
0	1	0	0	0	0	18	-16	0	0	0	13.775	0.1620	0.0810
0	0	0	0	2	0	0	2	0	-2	0	13.748	-0.2528	0.0000
0	0	0	0	2	0	3	-3	0	0	0	13.724	-0.1128	0.0000
2	0	0	2	0	0	0	1	-2	0	0	13.693	-0.2389	0.2141
2	2	0	2	-2	0	0	-2	0	2	0	13.690	0.1608	0.0000
2	-1	0	2	2	0	-20	21	0	0	0	13.675	0.0000	0.1056
2	-2	0	2	2	0	0	2	0	-3	0	13.675	-0.2440	-0.0431
2	1	0	2	0	0	-26	29	0	0	0	13.665	0.0269	-0.1003
2	0	0	2	0	0	-8	13	0	0	0	13.663	-0.1263	0.1855
2	1	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	13.663	12.6123	-6.3001
2	0	0	2	0	0	0	0	0	2	-5	13.661	-0.1584	0.0344
2	0	0	2	0	0	0	4	-8	3	0	13.661	-0.2457	0.8575
2	-1	0	2	0	0	10	-3	0	0	0	13.661	-0.4982	0.2506
2	1	0	2	0	0	-10	3	0	0	0	13.661	0.4982	0.2506
2	0	0	2	0	0	0	-4	8	-3	0	13.661	0.2457	0.8574
2	0	0	2	0	0	0	0	0	-2	5	13.660	0.1584	0.0344
2	-1	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	13.659	-12.6218	-6.3046
2	0	0	2	0	0	8	-13	0	0	0	13.659	0.1263	0.1854
2	-1	0	2	0	0	26	-29	0	0	0	13.657	-0.0269	-0.1003
2	1	0	2	-1	0	-3	4	0	0	0	13.655	0.0000	0.1074
2	2	0	2	-2	0	0	-2	0	3	0	13.647	0.3075	-0.0546
2	1	0	2	-2	0	20	-21	0	0	0	13.646	0.0000	0.1052
1	1	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	13.635	2.1058	-1.0519
2	-2	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	13.632	-0.3254	0.0000
1	-1	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	13.632	-2.1074	-1.0526



Tabla 11.14: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Luna en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

2	0	0	2	0	0	0	-1	2	0	0	13.628	0.2397	0.2147
1	0	0	0	2	0	5	-6	0	0	0	13.623	-0.0052	0.1276
2	-2	0	2	2	0	3	-3	0	0	0	13.609	-0.1183	0.0000
0	1	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	13.608	-0.1494	0.0746
0	1	0	-2	0	0	-18	16	0	0	0	-13.604	-0.1496	0.0747
2	0	0	2	0	0	2	-3	0	0	0	13.534	0.0000	0.3424
2	0	0	2	0	0	1	-1	0	0	0	13.349	0.8259	0.0000
2	0	0	2	0	0	0	1	0	-2	0	13.249	-0.0856	0.1424
2	0	0	2	0	0	3	-4	0	0	0	13.227	0.0000	0.1775
2	0	0	2	0	0	0	1	0	-1	0	13.208	-0.6472	-0.0139
2	0	0	2	0	0	0	2	-2	0	0	13.198	-0.1971	0.0000
2	0	0	2	0	0	2	-2	0	0	0	13.050	-0.3058	0.0000
2	0	0	2	0	0	0	2	0	-2	0	12.785	0.1552	0.0000
2	-1	0	2	2	0	0	-2	0	2	0	10.038	-0.1037	0.0000
2	-1	0	2	2	0	-2	2	0	0	0	9.880	0.1867	0.0000
2	-1	0	2	2	0	0	-1	0	1	0	9.791	0.2520	-0.0076
2	-1	0	2	2	0	-1	1	0	0	0	9.716	-0.1678	0.0000
2	1	0	2	0	0	-3	3	0	0	0	9.583	0.1351	0.0000
2	1	0	2	0	0	0	-2	0	2	0	9.571	0.1859	0.0000
2	0	0	2	2	0	-18	16	0	0	0	9.558	0.4901	-0.2449
2	-1	0	2	2	0	0	4	-8	3	0	9.557	-0.0528	0.1729
2	-1	0	2	2	0	0	-4	8	-3	0	9.557	0.0528	0.1728
2	-2	0	2	2	0	18	-16	0	0	0	9.556	-0.4803	-0.2399
2	1	0	2	0	0	0	-2	0	3	0	9.550	-0.1033	0.0185
2	1	0	2	0	0	-2	2	0	0	0	9.428	0.1013	0.0000
2	1	0	2	0	0	0	-1	0	1	0	9.347	0.2426	-0.0052
2	1	0	2	0	0	-1	1	0	0	0	9.278	-0.2785	0.0000
2	-1	0	2	2	0	2	-2	0	0	0	9.254	-0.1638	0.0000
2	1	0	2	0	0	-2	3	0	0	0	9.191	0.0000	0.1125
2	-1	0	2	2	0	0	2	0	-3	0	9.139	-0.5364	-0.0952
2	2	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	9.134	2.4283	-1.2129
2	1	0	2	0	0	0	4	-8	3	0	9.133	-0.0824	0.3003
2	1	0	2	0	0	0	-4	8	-3	0	9.133	0.0824	0.3003
2	0	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	9.132	-2.3790	-1.1884
1	2	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	9.122	0.4064	-0.2030
2	-1	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	9.120	1.2850	0.0000
1	0	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	9.120	-0.3981	-0.1989
2	-1	0	2	2	0	3	-3	0	0	0	9.110	0.7306	0.0000
1	-1	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	9.108	0.2175	0.0000
1	-1	0	2	2	0	3	-3	0	0	0	9.097	0.1234	0.0000
2	1	0	2	0	0	2	-3	0	0	0	9.076	0.0000	0.1081
2	1	0	2	0	0	1	-1	0	0	0	8.992	0.2535	0.0000
2	1	0	2	0	0	0	1	0	-1	0	8.929	-0.2111	-0.0043
2	0	0	2	2	0	0	-2	0	2	0	7.358	-0.1018	0.0000
2	0	0	2	2	0	-2	2	0	0	0	7.273	0.1753	0.0000
2	0	0	2	2	0	0	-1	0	1	0	7.224	0.2234	-0.0068
2	0	0	2	2	0	-1	1	0	0	0	7.183	-0.1439	0.0000
2	1	0	2	2	0	-18	16	0	0	0	7.096	0.4026	-0.2011

Tabla 11.14: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Luna en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

2	0	0	2	2	0	0	4	-8	3	0	7.096	-0.0393	0.1316
2	0	0	2	2	0	0	-4	8	-3	0	7.096	0.0393	0.1315
2	-1	0	2	2	0	18	-16	0	0	0	7.095	-0.3987	-0.1991
2	0	0	2	2	0	0	2	0	-3	0	6.863	-0.1041	-0.0185
2	3	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	6.860	0.3223	-0.1610
2	1	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	6.859	-0.3123	-0.1560
2	0	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	6.852	0.2523	0.0000
2	0	0	2	2	0	3	-3	0	0	0	6.846	0.1315	0.0000

Tabla 11.15: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Luna en la nutación  $\Delta\epsilon$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$L_{Me}$	$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	-2	5	311923.319	272.9495	163.6159
1	-2	0	0	2	0	0	2	0	-2	0	100155.423	0.0000	-15.1167
1	0	0	1	-1	0	-8	12	0	0	0	-88082.028	31.8477	-63.7444
1	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	37883.593	-23.1262	24.5258
1	2	0	0	-2	0	0	-2	0	3	0	-13630.813	0.0000	-4.7451
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	11945.280	-3.7690	0.0000
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	-1	-10771.540	4.4787	-9.2611
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	1	10746.943	0.0000	3.5531
1	0	0	2	-2	0	0	-9	13	0	0	-10648.784	-1.1726	0.0000
1	1	0	0	-1	0	-3	4	0	0	0	-8437.848	1.5393	0.0000
1	0	0	0	0	0	8	-13	0	0	0	-7372.756	3.5427	-2.4644
1	-1	0	0	0	0	18	-16	0	0	0	-7295.729	-1.8025	3.6149
1	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	5	-6944.728	0.9339	-4.0803
1	0	0	0	0	0	0	-4	8	-3	0	-6870.085	15.9073	-4.4674
2	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	-6803.298	29.5566	-3.4270
1	0	0	0	0	0	0	4	-8	3	0	-6728.164	15.5787	4.3751
1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	-6658.080	0.8954	3.9118
1	1	0	0	0	0	-18	16	0	0	0	-6364.518	-1.5173	-3.0351
1	0	0	0	0	0	-8	13	0	0	0	-6307.036	3.0309	2.1095
1	0	0	1	-1	0	0	0	-2	0	0	-5767.538	4.2459	-14.5758
1	0	0	1	-1	0	0	-2	2	0	0	5760.479	-2.5354	0.0000
1	-1	0	0	1	0	3	-4	0	0	0	-5692.364	1.2593	0.0000
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	2	5376.541	-5.8404	2.5907
1	0	0	0	0	0	-3	5	0	0	0	5240.146	0.0000	1.0982
1	0	0	0	0	0	0	-2	4	0	0	5002.824	-1.0881	0.6111
1	0	0	2	-2	0	-5	6	0	0	0	-4948.506	-23.2793	0.9379
1	-2	0	0	2	0	6	-8	0	0	0	-4895.862	0.0000	-0.6231
1	-2	0	0	2	0	0	2	0	-3	0	-4528.486	-0.5051	2.8157
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	-1	0	-4334.585	10.3341	2.6696

Tabla 11.15: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Luna en la nutación  $\Delta\epsilon$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	1	0	4330.596	-2.5000	0.0000
1	0	0	2	-2	0	0	-8	11	0	0	-3739.745	0.4098	0.0000
1	0	0	2	-2	-1	0	2	0	0	0	-3716.241	0.4195	0.0000
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	3	3585.043	0.0000	0.3997
1	2	0	0	-2	0	0	-2	0	2	0	-3287.613	0.0000	-2.8758
2	0	0	1	-1	0	0	0	-1	0	2	3178.335	0.4337	0.0000
1	0	0	0	0	0	0	1	-2	0	0	-3119.305	1.8649	1.9809
1	0	0	2	-2	0	0	-2	0	0	2	3001.262	0.0000	-0.4028
1	0	0	1	-1	0	3	-6	0	0	0	-2960.140	-0.7548	0.4538
1	0	0	1	-1	0	-3	4	0	0	0	2958.279	2.1076	0.5131
2	0	0	2	-2	0	-3	3	0	0	0	2957.349	0.0000	0.5033
1	0	0	1	-1	0	0	-3	4	0	0	2881.121	-0.7181	-0.5058
2	0	0	2	-2	0	-5	6	0	0	0	-2863.894	0.5160	0.0000
1	0	0	1	-1	0	-5	7	0	0	0	-2863.023	1.4139	-7.4714
1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-2646.184	0.8034	0.0000
1	2	0	0	-2	0	-3	3	0	0	0	-2337.204	0.0000	-0.8583
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	2	0	2165.796	-7.6561	1.4209
1	0	0	0	0	0	3	-5	0	0	0	-2061.762	0.0000	0.4178
1	0	0	2	-2	0	-3	3	0	0	0	2060.860	0.0000	-6.2779
1	0	0	0	0	0	0	2	-4	0	0	-2023.986	0.4271	0.2407
1	0	0	1	-1	0	0	-4	6	0	0	1920.943	0.0000	-0.2171
1	0	0	0	0	0	2	-3	0	0	0	1851.091	-1.6905	0.0000
1	0	0	2	-2	0	0	-2	0	2	0	1642.241	0.0000	-2.6609
1	0	0	1	-1	0	-2	2	0	0	0	-1455.161	0.0000	-0.9367
1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	3	0	1443.975	-0.4645	0.1768
1	0	0	0	0	0	-2	3	0	0	0	-1198.452	1.0146	0.0000
1	0	0	2	-2	0	0	-2	0	3	0	1190.855	0.0000	-0.3469
1	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	1138.758	0.1440	0.0000
1	0	0	1	-1	0	1	-3	0	0	0	-975.479	0.0000	0.2092
1	0	0	2	-2	0	-4	4	0	0	0	-814.780	0.0000	-1.4354
1	0	0	1	-1	0	-4	6	0	0	0	733.526	0.0000	-0.1474
1	0	0	1	-1	0	-4	5	0	0	0	-727.524	1.4690	0.3523
1	0	0	2	-2	0	-4	5	0	0	0	662.042	-0.1089	0.0000
1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	638.788	0.0000	1.4987
1	0	0	1	-1	0	-1	0	0	0	0	-583.958	1.1198	-0.2652
1	0	0	1	-1	0	1	-2	0	0	0	583.885	0.2677	-0.0639
1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	-537.735	0.0000	1.0385
1	0	0	2	-2	0	0	-3	0	3	0	-526.851	0.0000	-0.2071
1	0	0	1	-1	0	-2	3	0	0	0	487.664	0.4752	0.1134
1	0	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	469.684	-0.2009	-0.1209
1	0	0	2	-2	0	-2	2	0	0	0	455.002	0.0000	-0.6003
1	0	0	0	0	0	3	-4	0	0	0	443.896	-0.2319	0.0000
1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	423.747	0.0000	-0.8265
1	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	413.699	0.0000	-0.2456
1	0	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	-412.664	0.1375	-0.0830
1	0	0	0	0	0	-3	4	0	0	0	-392.624	0.1577	0.0000
1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	-376.777	0.0000	-0.5613
1	0	0	0	0	0	0	-2	2	0	0	-368.812	0.0000	-0.1644

Tabla 11.15: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Luna en la nutación  $\Delta\epsilon$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

1	0	0	2	-2	0	-5	5	0	0	0	-340.149	0.0000	-0.2114
1	0	0	1	-1	0	-5	6	0	0	0	-323.930	0.2104	0.0509
1	0	0	2	-2	0	0	-1	0	1	0	320.933	0.0000	-0.2795
1	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	305.062	0.0000	-0.3100
1	0	0	1	-1	0	-2	1	0	0	0	-291.970	0.2765	-0.0652
1	0	0	0	0	0	-2	2	0	0	0	-279.939	0.0000	-0.1905
1	0	0	1	-1	0	-1	2	0	0	0	265.735	0.1411	0.0335
1	0	0	2	-2	0	-1	1	0	0	0	255.731	0.0000	0.1152
1	0	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	205.470	0.0000	0.1536
1	0	0	1	-1	0	-3	2	0	0	0	-194.644	0.1137	-0.0268
1	0	0	2	-2	0	0	4	-8	3	0	177.892	0.2268	0.0682
1	0	0	2	-2	0	0	-4	8	-3	0	177.795	0.2269	-0.0682
1	0	0	2	-2	0	1	-1	0	0	0	136.324	0.0000	-0.1442
1	0	0	2	-2	0	0	1	0	-1	0	123.003	0.0000	0.1993
1	0	0	2	-2	0	2	-2	0	0	0	110.521	0.0000	0.1294
1	-1	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	-27.555	-0.2421	0.0285
1	1	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	27.554	0.2435	-0.0287
1	-1	0	0	2	0	0	2	0	-2	0	27.547	0.0000	0.1546
1	1	0	0	-2	0	0	-2	0	2	0	-27.326	0.0000	-0.1551
2	1	0	2	-2	0	-3	3	0	0	0	27.300	0.0000	0.1422
2	1	0	2	-2	0	0	-2	0	2	0	27.208	0.0000	0.2548
2	0	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	27.100	0.0807	0.1616
2	-2	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	27.085	0.0759	-0.1521
2	0	0	2	0	0	-2	2	0	0	0	14.331	0.0000	-0.1260
2	0	0	2	0	0	0	-1	0	1	0	14.145	-0.0057	-0.2674
2	0	0	2	0	0	-1	1	0	0	0	13.988	0.0000	0.3469
2	0	0	2	0	0	-2	3	0	0	0	13.790	0.1464	0.0000
2	0	0	2	0	0	0	1	-2	0	0	13.693	0.0928	0.1036
2	-2	0	2	2	0	0	2	0	-3	0	13.675	-0.0187	0.1058
2	1	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	13.663	-2.7314	-5.4681
2	0	0	2	0	0	0	4	-8	3	0	13.661	0.3718	0.1065
2	-1	0	2	0	0	10	-3	0	0	0	13.661	0.1086	0.2160
2	1	0	2	0	0	-10	3	0	0	0	13.661	0.1086	-0.2160
2	0	0	2	0	0	0	-4	8	-3	0	13.661	0.3717	-0.1065
2	-1	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	13.659	-2.7334	5.4722
2	2	0	2	-2	0	0	-2	0	3	0	13.647	-0.0237	-0.1333
1	1	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	13.635	-0.5616	-1.1243
2	-2	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	13.632	0.0000	0.1411
1	-1	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	13.632	-0.5620	1.1251
2	0	0	2	0	0	0	-1	2	0	0	13.628	0.0931	-0.1039
2	0	0	2	0	0	2	-3	0	0	0	13.534	0.1484	0.0000
2	0	0	2	0	0	1	-1	0	0	0	13.349	0.0000	-0.3581
2	0	0	2	0	0	0	1	0	-1	0	13.208	-0.0060	0.2806
2	0	0	2	0	0	2	-2	0	0	0	13.050	0.0000	0.1326
2	-1	0	2	2	0	0	-1	0	1	0	9.791	-0.0033	-0.1092
2	0	0	2	2	0	-18	16	0	0	0	9.558	-0.1062	-0.2125
2	-2	0	2	2	0	18	-16	0	0	0	9.556	-0.1040	0.2083
2	1	0	2	0	0	0	-1	0	1	0	9.347	-0.0022	-0.1052

Tabla 11.15: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Luna en la nutación  $\Delta\epsilon$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Únicamente se muestran los términos para los que  $\max\{|A_c|, |A_s|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

2	1	0	2	0	0	-1	1	0	0	0	9.278	0.0000	0.1207
2	-1	0	2	2	0	0	2	0	-3	0	9.139	-0.0413	0.2326
2	2	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	9.134	-0.5259	-1.0528
2	1	0	2	0	0	0	4	-8	3	0	9.133	0.1302	0.0357
2	1	0	2	0	0	0	-4	8	-3	0	9.133	0.1302	-0.0357
2	0	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	9.132	-0.5152	1.0314
1	2	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	9.122	-0.1084	-0.2170
2	-1	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	9.120	0.0000	-0.5571
1	0	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	9.120	-0.1062	0.2126
2	-1	0	2	2	0	3	-3	0	0	0	9.110	0.0000	-0.3167
1	-1	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	9.108	0.0000	-0.1161
2	1	0	2	0	0	1	-1	0	0	0	8.992	0.0000	-0.1099
2	1	0	2	2	0	-18	16	0	0	0	7.096	-0.0872	-0.1746
2	-1	0	2	2	0	18	-16	0	0	0	7.095	-0.0863	0.1729
2	3	0	2	0	0	-18	16	0	0	0	6.860	-0.0698	-0.1397
2	1	0	2	0	0	18	-16	0	0	0	6.859	-0.0676	0.1354
2	0	0	2	2	0	0	2	0	-2	0	6.852	0.0000	-0.1094

## 11.7 Efecto planetario indirecto debido al Sol

Las tablas 11.16 y 11.17 muestran respectivamente las series de nutación en longitud y oblicuidad asociadas al efecto indirecto de la perturbación planetaria en la órbita de la Tierra.

Tabla 11.16: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Tierra en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
0	4	-8	3	0	0	0	-651392.660	-50.6422	158.7290
0	0	0	2	-5	0	0	-322614.503	-45.7978	0.0000
8	-13	0	0	0	0	0	87265.401	23.3264	33.4941
0	8	-15	0	0	0	0	14765.973	4.4704	-2.0681
0	0	0	0	1	0	0	10759.227	1.1027	9.5320
0	0	0	0	1	0	-2	10734.686	0.0000	4.1036
0	9	-17	0	0	0	0	-9454.730	0.0000	-0.6043
3	-5	0	2	0	0	0	8084.756	1.1088	0.0000
0	1	-2	0	0	0	0	-5764.006	-36.7643	38.7709

Tabla 11.16: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Tierra en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4}\mu\text{as}$ .

0	1	-2	0	0	0	2	-5756.956	1.4475	7.9582
0	0	0	3	-5	0	0	4391.566	0.0000	-0.3719
0	0	0	1	0	0	0	4332.589	-42.4471	29.9057
0	0	0	1	0	0	-2	4328.604	3.0492	0.0000
0	7	-13	0	0	0	0	4145.701	1.0975	0.0000
0	0	0	2	-2	0	0	3626.726	-0.4339	0.0000
0	0	0	0	3	0	-2	3583.678	0.0000	2.7360
3	-5	0	0	0	0	0	-2959.209	-21.7197	7.3809
3	-5	0	0	0	0	2	-2957.349	-8.5180	-0.7902
0	2	-4	0	0	0	0	-2882.003	-7.5731	13.7077
0	2	-4	0	0	0	2	-2880.239	2.6208	0.8337
5	-8	0	0	0	0	2	2863.894	0.0000	4.0505
5	-8	0	0	0	0	0	2862.152	-1.1186	-3.0872
0	6	-11	0	0	0	0	2411.358	0.8706	0.5793
0	0	0	4	-5	0	-2	2179.929	1.1489	0.0000
0	0	0	2	0	0	0	2166.295	-3.1526	2.1912
0	0	0	2	0	0	-2	2165.298	-9.9108	1.5309
0	0	0	0	5	0	-2	2150.862	-1.1783	0.0000
0	3	-6	0	0	0	0	-1921.335	0.0000	2.7363
0	3	-6	0	0	0	2	-1920.551	1.0644	-0.6504
0	5	-9	0	0	0	0	1700.118	0.6719	1.3061
6	-10	0	0	0	0	2	-1479.139	0.5056	0.0000
2	-3	0	0	0	0	2	1455.386	-1.3000	0.0000
2	-3	0	0	0	0	0	1454.936	0.8312	48.5226
0	0	0	3	0	0	0	1444.196	-0.1778	0.1648
0	0	0	3	0	0	-2	1443.753	-0.6865	4.9095
0	4	-8	0	0	0	0	-1441.002	0.2797	0.5090
0	4	-8	0	0	0	2	-1440.561	0.0000	-0.4310
0	0	0	4	-2	0	-2	1355.820	-0.3035	0.0000
0	4	-7	0	0	0	2	1313.245	-0.3121	0.0000
0	4	-7	0	0	0	0	1312.879	0.0000	2.4789
0	5	-10	0	0	0	0	-1152.801	0.1106	0.0000
0	0	0	4	0	0	-2	1082.898	-2.7775	1.0461
0	3	-5	0	0	0	2	1069.561	-0.3768	0.0000
0	3	-5	0	0	0	0	1069.318	-2.3852	4.0061
1	-2	0	0	0	0	0	-975.378	2.1582	0.1631
1	-2	0	0	0	0	2	-975.176	-0.8354	-2.9508
0	2	-3	0	0	0	0	901.985	-8.1999	4.6930
0	0	0	5	0	0	-2	866.358	-0.2541	0.0000
0	1	-1	0	0	0	0	779.936	-5.5981	0.0000
4	-7	0	0	0	0	0	-733.583	0.0000	-0.1498
4	-6	0	0	0	0	2	727.580	1.3025	0.0000
4	-6	0	0	0	0	0	727.468	-3.0236	0.8357

Tabla 11.16: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Tierra en la mutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4}\mu\text{as}$ .

0	0	1	0	0	0	0	686.980	-0.7378	-0.4178
0	1	0	-5	0	0	2	631.494	-0.1816	0.0000
0	1	-3	0	0	0	2	-613.742	-0.2430	0.0000
0	7	-12	0	0	0	0	589.324	0.1256	0.0000
1	-1	0	0	0	0	0	583.921	66.0696	0.0000
1	-1	0	0	0	0	-2	583.849	-0.1585	0.0000
0	2	-5	0	0	0	2	-554.680	1.2541	-0.6636
0	1	0	-4	0	0	2	551.160	-0.9762	-0.2059
0	1	0	-4	0	0	0	551.095	-0.3797	0.3750
0	6	-10	0	0	0	0	534.659	0.1756	0.3448
0	3	-7	0	0	0	2	-505.988	0.3963	-0.6129
0	5	-8	0	0	0	0	489.275	0.0000	1.0489
0	1	0	-3	0	0	2	488.958	-0.5967	0.2212
0	1	0	-3	0	0	0	488.908	-2.7892	3.6350
2	-4	0	0	0	0	0	-487.689	-0.8255	0.0000
2	-4	0	0	0	0	2	-487.638	11.0626	-0.1109
6	-9	0	0	0	0	2	485.029	0.0000	0.3086
6	-9	0	0	0	0	0	484.979	-0.1006	-0.3125
0	4	-9	0	0	0	2	-465.155	0.0000	-0.3723
0	4	-6	0	0	0	0	450.992	-1.5729	2.5893
0	1	0	-3	2	0	0	448.177	-0.1308	0.0000
0	1	0	0	-5	0	0	439.931	-0.1236	0.1380
0	1	0	-2	0	0	2	439.373	0.3766	0.9922
0	1	0	-2	0	0	0	439.332	-18.4582	27.0435
0	5	-11	0	0	0	2	-430.420	0.0000	-0.1872
5	-9	0	0	0	0	2	-418.650	-0.3173	-0.3130
0	3	-4	0	0	0	0	418.266	-8.3707	4.7979
3	-4	0	0	0	0	2	416.725	0.0000	-0.2092
3	-4	0	0	0	0	0	416.688	-0.4934	29.2521
3	-4	0	0	0	0	-2	416.651	0.0000	-0.2427
0	1	0	0	-1	0	0	411.784	26.3573	0.0000
0	1	0	0	-3	0	0	406.674	-0.3122	0.0000
0	6	-13	0	0	0	2	-400.512	-0.1114	0.0000
0	1	0	1	-5	0	0	399.378	-0.3736	0.0000
0	1	0	-1	0	0	0	398.884	-135.4599	-2.6054
0	1	0	-1	0	0	-2	398.850	-0.4681	0.8392
0	1	0	-3	5	0	0	398.391	0.3498	0.0000
0	1	0	0	-2	0	0	391.862	-0.5593	1.9771
0	2	-2	0	0	0	0	389.968	-38.4842	0.1431
0	2	-2	0	0	0	-2	389.936	-0.3384	-0.1261
0	1	0	0	-1	0	0	378.092	-7.7630	0.0000
0	7	-15	0	0	0	2	-374.491	-0.2036	0.0000
0	1	0	0	0	-2	0	374.163	0.0000	0.1261

Tabla 11.16: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Tierra en la mutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4}\mu\text{as}$ .

0	1	0	-1	2	0	-2	371.320	-0.1770	0.0000
0	1	0	0	0	-1	0	369.656	-0.1959	0.0000
8	-14	0	0	0	0	0	-366.792	-0.5389	0.1932
8	-14	0	0	0	0	2	-366.763	-0.2404	0.0000
0	1	0	2	-5	0	0	365.670	-1.3384	-2.9541
0	5	-8	3	0	0	0	365.461	2.0994	0.2544
0	5	-8	3	0	0	-2	365.433	-1.5757	-0.8902
0	1	0	0	0	0	2	365.285	-0.1313	-0.1623
0	7	-16	4	5	0	0	-365.260	-0.2263	0.0000
0	9	-16	4	5	0	0	365.252	0.1958	-0.1142
0	7	-16	4	5	0	2	-365.232	0.1633	0.0000
0	9	-16	4	5	0	-2	365.224	-0.1885	0.0000
0	3	-8	3	0	0	0	-365.052	-1.8888	-1.0681
0	3	-8	3	0	0	2	-365.023	0.3709	0.1715
0	1	0	-2	5	0	0	364.843	0.1248	0.0000
0	1	0	-2	5	0	-2	364.815	0.6698	0.4790
8	-12	0	0	0	0	0	363.734	-0.7429	0.1210
8	-12	0	0	0	0	-2	363.706	-0.4494	0.1610
0	1	0	1	-2	0	0	359.360	0.3434	0.0000
0	9	-15	0	0	0	0	356.439	-0.3822	0.0000
0	1	0	0	1	0	0	353.264	0.1273	0.0000
0	1	0	0	1	0	-2	353.237	-1.3785	0.0000
0	0	2	0	0	0	0	343.490	0.5499	-0.1155
0	0	2	0	0	0	-2	343.465	-6.9009	0.2189
0	1	0	0	2	0	-2	342.009	0.2274	0.7910
0	1	0	3	-5	0	-2	337.186	-0.1472	0.0000
0	1	0	1	0	0	0	336.858	0.7809	1.1497
0	1	0	1	0	0	-2	336.834	-24.7175	0.1381
0	1	0	-1	5	0	-2	336.482	0.1571	0.0000
0	8	-13	0	0	0	0	335.681	-0.1869	-0.1427
0	1	0	0	3	0	-2	331.472	0.1271	0.0000
3	-6	0	0	0	0	0	-325.126	0.0000	-0.3681
3	-6	0	0	0	0	2	-325.103	-0.2021	-5.2917
0	1	-4	0	0	0	0	-324.172	-0.1607	-0.1051
0	1	-4	0	0	0	2	-324.149	1.6071	-0.8375
5	-7	0	0	0	0	2	323.941	1.2488	0.0000
5	-7	0	0	0	0	0	323.919	2.2061	-0.4769
0	7	-11	0	0	0	0	317.208	-0.1250	-0.2803
0	1	0	2	0	0	-2	312.536	-3.4839	-4.7829
0	2	-6	0	0	0	2	-306.891	-0.5225	-0.4832
0	6	-9	0	0	0	0	300.662	0.0000	-0.4858
2	-2	0	0	0	0	0	291.961	-95.5752	-0.2223
2	-2	0	0	0	0	-2	291.943	-0.5656	-0.1351



Tabla 11.16: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Tierra en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4}\mu\text{as}$ .

0	1	0	3	0	0	-2	291.508	-0.5522	-0.6624
0	3	-8	0	0	0	2	-291.377	0.0000	0.3080
0	5	-7	0	0	0	0	285.756	0.4677	-0.6887
0	4	-5	0	0	0	0	272.259	1.2719	-0.6320
1	-3	0	0	0	0	0	-265.742	-0.1504	0.0000
1	-3	0	0	0	0	2	-265.727	-28.1907	0.0000
0	3	-3	0	0	0	0	259.979	2.1338	0.1380
0	3	-3	0	0	0	-2	259.964	0.0000	-0.1227
0	2	-1	0	0	0	0	248.759	0.0000	0.1284
0	2	-1	0	0	0	-2	248.746	0.1507	-0.1523
4	-8	0	0	0	0	2	-243.832	0.6359	0.1229
4	-5	0	0	0	0	0	243.165	0.1154	-2.3740
0	1	1	0	0	0	-2	238.455	-1.3295	0.0000
0	2	0	-5	0	0	0	231.398	0.1338	0.0000
0	0	3	0	0	0	-2	228.982	-1.8355	-1.0625
1	0	0	0	0	0	-2	224.690	0.0000	0.7289
0	1	-5	0	0	0	2	-220.233	0.5503	-0.8837
0	2	0	-4	0	0	2	219.676	-0.1583	0.0000
0	2	0	-4	0	0	0	219.666	1.1303	0.4277
0	2	-7	0	0	0	2	-212.128	0.0000	-0.5621
0	6	-8	0	0	0	0	209.133	0.1005	-0.1266
0	2	0	-3	0	0	0	209.066	8.0143	1.5054
2	-5	0	0	0	0	2	-208.834	-0.1950	-12.7916
6	-8	0	0	0	0	2	208.353	0.3934	0.0000
6	-8	0	0	0	0	0	208.344	0.1392	0.0000
0	5	-6	0	0	0	0	201.811	0.2947	-0.1036
0	5	-6	0	0	0	-2	201.802	0.0000	0.1102
0	2	0	0	-5	0	0	199.565	0.2214	0.0000
0	2	0	-2	0	0	0	199.442	38.9150	0.3110
0	2	0	-2	0	0	-2	199.434	0.0000	-0.1962
0	2	0	-4	5	0	0	199.319	-0.2117	0.0000
5	-10	0	0	0	0	2	-195.067	0.0000	0.7943
0	4	-4	0	0	0	0	194.984	0.5215	0.1697
0	4	-4	0	0	0	-2	194.976	1.7345	-2.9087
3	-3	0	0	0	0	0	194.640	-9.4193	-0.1487
3	-3	0	0	0	0	-2	194.632	5.4275	-1.5062
0	2	0	0	-3	0	0	192.427	0.0000	0.3058
0	2	0	-1	0	0	0	190.665	0.0000	3.4553
0	2	0	-1	0	0	-2	190.657	-15.3946	-3.0032
0	2	0	0	-2	0	0	189.046	1.4895	0.0000
0	3	-2	0	0	0	0	188.604	0.1949	0.9068
0	3	-2	0	0	0	-2	188.596	8.0088	-7.0862
0	2	0	0	-1	0	0	185.782	0.0000	0.2259

Tabla 11.16: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Tierra en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4}\mu\text{as}$ .

0	2	0	0	-1	0	-2	185.774	0.0000	-2.0278
0	6	-15	0	0	0	2	-184.908	-1.1259	0.0000
8	-15	0	0	0	0	2	-183.004	-6.1432	-9.6106
3	-9	4	0	0	0	2	-182.924	-1.3550	0.8588
0	2	0	2	-5	0	-2	182.725	-1.1152	0.0000
0	6	-8	3	0	0	-2	182.672	12.2710	-41.5042
0	12	-19	0	3	0	-2	182.635	0.0000	1.3846
0	2	0	0	0	0	2	182.635	-0.1343	0.0000
0	6	-16	4	5	0	2	-182.622	-1.3469	-4.3175
0	10	-16	4	5	0	-2	182.620	-1.3468	-4.3165
0	8	-19	0	3	0	2	-182.607	0.0000	1.3844
0	2	-8	3	0	0	2	-182.570	12.2746	-41.5685
0	2	0	-2	5	0	-2	182.518	1.1762	0.0000
3	-5	4	0	0	0	-2	182.320	-1.3505	0.8560
8	-11	0	0	0	0	-2	182.240	-6.1775	-9.6564
0	10	-15	0	0	0	-2	180.390	-1.1509	0.0000
0	2	0	0	1	0	-2	179.573	0.0000	-1.9121
0	1	2	0	0	0	-2	177.013	-8.4669	-7.0295
0	2	0	1	0	0	-2	175.235	16.5713	-1.2024
3	-7	0	0	0	0	2	-172.006	6.6243	-1.6221
0	0	4	0	0	0	-2	171.739	-2.0697	-3.1695
5	-6	0	0	0	0	0	171.674	0.0000	-0.5504
5	-6	0	0	0	0	-2	171.668	0.0000	0.9723
0	2	0	2	0	0	-2	168.423	0.0000	0.2112
0	1	-6	0	0	0	2	-166.770	0.0000	-0.1086
2	-1	0	0	0	0	0	162.261	0.5654	2.5006
2	-1	0	0	0	0	-2	162.255	0.2094	-17.3182
0	6	-7	0	0	0	-2	160.321	0.0000	-0.7159
0	5	-5	0	0	0	-2	155.982	0.7431	-1.1837
1	-4	0	0	0	0	2	-153.821	0.0000	-1.1553
7	-9	0	0	0	0	2	153.560	0.1542	0.0000
0	4	-3	0	0	0	-2	151.872	2.5768	-1.4138
0	3	-1	0	0	0	-2	147.973	1.8883	0.0000
4	-4	0	0	0	0	0	145.980	-2.6780	0.0000
4	-4	0	0	0	0	-2	145.976	1.0824	0.0000
0	2	1	0	0	0	-2	144.270	0.0000	0.1193
0	1	3	0	0	0	-2	140.747	0.0000	0.1169
1	1	0	0	0	0	-2	139.113	-30.4590	0.0000
0	3	0	-4	0	0	0	137.171	0.4914	0.0000
0	7	-8	0	0	0	-2	132.985	0.0000	-0.1406
0	3	0	-3	0	0	0	132.961	1.7896	-0.2592
0	3	0	-3	0	0	-2	132.958	0.9043	-1.1369
2	-6	0	0	0	0	2	-132.867	0.6141	0.1334

Tabla 11.16: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Tierra en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4}\mu\text{as}$ .

6	-7	0	0	0	0	0	132.669	0.0000	-0.1718
0	6	-6	0	0	0	-2	129.986	0.2267	-0.9427
0	3	0	-2	0	0	0	129.002	-0.3517	-1.2209
0	3	0	-2	0	0	-2	128.999	6.6649	-9.1261
0	5	-4	0	0	0	-2	127.119	2.9836	-1.8353
3	-2	0	0	0	0	0	126.976	0.0000	0.2710
3	-2	0	0	0	0	-2	126.973	0.0000	-11.4351
0	3	0	-1	0	0	-2	125.269	51.6500	1.6256
0	3	0	0	-2	0	-2	124.568	0.0000	-0.2789
0	4	-2	0	0	0	-2	124.376	14.3170	-0.2804
0	3	0	0	-1	0	-2	123.142	2.9101	0.0000
8	-16	0	0	0	0	2	-121.919	0.5109	-0.1827
0	3	0	2	-5	0	-2	121.795	0.2322	1.1902
0	7	-8	3	0	0	-2	121.772	-2.5029	-0.1462
0	3	0	0	0	0	0	121.752	16.3866	20.3679
0	5	-16	4	5	0	2	-121.749	0.2135	0.0000
0	11	-16	4	5	0	-2	121.749	-0.1849	0.1079
0	1	-8	3	0	0	2	-121.726	1.7860	1.0071
8	-10	0	0	0	0	-2	121.579	-0.1875	0.2970
0	2	2	0	0	0	-2	119.231	-0.2758	0.3780
0	3	0	1	0	0	-2	118.421	-0.3100	-0.7964
3	-8	0	0	0	0	2	-116.938	0.0000	0.3059
0	1	4	0	0	0	-2	116.814	-0.1231	0.1028
5	-5	0	0	0	0	0	116.784	-0.9242	0.0000
5	-5	0	0	0	0	-2	116.781	-0.8376	0.0000
2	0	0	0	0	0	-2	112.348	38.5797	0.1633
0	7	-7	0	0	0	-2	111.417	-0.1133	0.1394
0	6	-5	0	0	0	-2	109.304	-0.2957	0.1135
0	5	-3	0	0	0	-2	107.270	-0.9638	0.0000
4	-3	0	0	0	0	-2	104.294	0.0000	0.9455
1	2	0	0	0	0	-2	100.744	0.3553	1.4757
0	4	0	-4	0	0	0	99.721	0.1402	0.0000
0	4	0	-4	0	0	-2	99.719	-0.2584	0.0000
0	4	0	-3	0	0	-2	97.475	-3.7149	-0.3412
6	-6	0	0	0	0	0	97.320	-0.3757	0.0000
0	4	0	-2	0	0	-2	95.331	-18.3954	-0.2561
0	6	-4	0	0	0	-2	94.300	-0.1891	-0.1372
3	-1	0	0	0	0	-2	94.220	3.9494	0.1272
0	4	0	-1	0	0	-2	93.278	-0.3650	-3.1661
0	4	0	0	-2	0	-2	92.889	-0.7000	0.0000
0	5	-2	0	0	0	-2	92.782	-0.1703	-0.7248
0	4	0	0	-1	0	-2	92.094	0.0000	-0.1591
5	-4	0	0	0	0	-2	88.489	0.0000	0.1400

Tabla 11.16: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Tierra en la nutación  $\Delta\psi$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

2	1	0	0	0	0	-2	85.920	-0.4584	-2.3386
7	-7	0	0	0	0	0	83.417	-0.1696	0.0000
4	-2	0	0	0	0	-2	81.129	1.3389	0.0000
0	5	0	-4	0	0	-2	78.333	-0.1404	0.0000
0	5	0	-3	0	0	-2	76.942	-0.9224	0.2040
0	5	0	-2	0	0	-2	75.599	0.2449	0.9982
3	0	0	0	0	0	-2	74.899	0.0000	-0.2252
5	-3	0	0	0	0	-2	71.232	0.2810	0.0000
6	-4	0	0	0	0	-2	63.487	0.1223	0.0000
0	6	0	0	0	0	-2	60.875	-0.6786	0.7890

Tabla 11.17: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Tierra en la nutación  $\Delta\epsilon = -\Delta I$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$L_{Ur}$	$h$	$P$ (días)	$A_s$	$A_c$
0	0	0	0	1	0	-2	10734.686	1.7791	0.0000
0	1	-2	0	0	0	2	-5756.956	-3.4503	0.6276
0	0	0	1	0	0	-2	4328.604	0.0000	-1.3220
0	0	0	0	3	0	-2	3583.678	1.1862	0.0000
3	-5	0	0	0	0	2	-2957.349	0.3426	-3.6930
0	2	-4	0	0	0	2	-2880.239	-0.3615	1.1363
5	-8	0	0	0	0	2	2863.894	-1.7561	0.0000
0	0	0	4	-5	0	-2	2179.929	0.0000	-0.4981
0	0	0	2	0	0	-2	2165.298	0.6637	4.2968
0	0	0	0	5	0	-2	2150.862	0.0000	0.5109
0	3	-6	0	0	0	2	-1920.551	0.2820	0.4615
6	-10	0	0	0	0	2	-1479.139	0.0000	0.2192
2	-3	0	0	0	0	2	1455.386	0.0000	-0.5636
0	0	0	3	0	0	-2	1443.753	2.1285	0.2976
0	4	-8	0	0	0	2	-1440.561	0.1869	0.0000
0	0	0	4	-2	0	-2	1355.820	0.0000	0.1316
0	4	-7	0	0	0	2	1313.245	0.0000	-0.1353
0	0	0	4	0	0	-2	1082.898	0.4535	1.2042
0	3	-5	0	0	0	2	1069.561	0.0000	-0.1634
1	-2	0	0	0	0	2	-975.176	1.2793	-0.3622
0	0	0	5	0	0	-2	866.358	0.0000	0.1102

Tabla 11.17: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Tierra en la nutación  $\Delta\epsilon = -\Delta I$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

4	-6	0	0	0	0	2	727.580	0.0000	0.5647
0	1	-3	0	0	0	2	-613.742	0.0000	-0.1054
0	2	-5	0	0	0	2	-554.680	0.2877	0.5437
0	1	0	-4	0	0	2	551.160	0.0000	-0.4233
0	3	-7	0	0	0	2	-505.988	0.2657	0.1718
0	1	0	-3	0	0	2	488.958	0.0000	-0.2587
2	-4	0	0	0	0	2	-487.638	0.0000	4.7962
6	-9	0	0	0	0	2	485.029	-0.1338	0.0000
0	4	-9	0	0	0	2	-465.155	0.1614	0.0000
0	1	0	-2	0	0	2	439.373	-0.4302	0.1633
5	-9	0	0	0	0	2	-418.650	0.1357	-0.1376
3	-4	0	0	0	0	-2	416.651	-0.1052	0.0000
0	1	0	-1	0	0	-2	398.850	0.3638	0.2029
0	2	-2	0	0	0	-2	389.936	0.0000	0.1467
8	-14	0	0	0	0	2	-366.763	0.0000	-0.1042
0	5	-8	3	0	0	-2	365.433	-0.3859	0.6832
0	3	-8	3	0	0	2	-365.023	0.0000	0.1608
0	1	0	-2	5	0	-2	364.815	0.2077	-0.2904
8	-12	0	0	0	0	-2	363.706	0.0000	0.1948
0	1	0	0	1	0	-2	353.237	0.0000	0.5977
0	0	2	0	0	0	-2	343.465	0.0000	2.9919
0	1	0	0	2	0	-2	342.009	0.3429	0.0000
0	1	0	1	0	0	-2	336.834	0.0000	10.7163
3	-6	0	0	0	0	2	-325.103	2.2942	0.0000
0	1	-4	0	0	0	2	-324.149	0.3631	0.6968
5	-7	0	0	0	0	2	323.941	0.0000	0.5414
0	1	0	2	0	0	-2	312.536	-2.0736	1.5105
0	2	-6	0	0	0	2	-306.891	0.2095	-0.2265
2	-2	0	0	0	0	-2	291.943	0.0000	0.2452
0	1	0	3	0	0	-2	291.508	-0.2872	0.2394
0	3	-8	0	0	0	2	-291.377	-0.1335	0.0000
1	-3	0	0	0	0	2	-265.727	0.0000	-12.2222
4	-8	0	0	0	0	2	-243.832	0.0000	0.2757
0	1	1	0	0	0	-2	238.455	0.0000	0.5764
0	0	3	0	0	0	-2	228.982	-0.4606	0.7958
1	0	0	0	0	0	-2	224.690	0.3160	0.0000
0	1	-5	0	0	0	2	-220.233	0.3831	0.2386
0	2	-7	0	0	0	2	-212.128	0.2437	0.0000
2	-5	0	0	0	0	2	-208.834	5.5458	0.0000
6	-8	0	0	0	0	2	208.353	0.0000	0.1706
5	-10	0	0	0	0	2	-195.067	-0.3444	0.0000
0	4	-4	0	0	0	-2	194.976	-1.2611	-0.7520
3	-3	0	0	0	0	-2	194.632	-0.6530	-2.3531

Tabla 11.17: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Tierra en la nutación  $\Delta\epsilon = -\Delta I$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

0	2	0	-1	0	0	-2	190.657	-1.3020	6.6744
0	3	-2	0	0	0	-2	188.596	-3.0722	-3.4722
0	2	0	0	-1	0	-2	185.774	-0.8792	0.0000
0	6	-15	0	0	0	2	-184.908	0.0000	-0.4881
8	-15	0	0	0	0	2	-183.004	4.1667	-2.6634
3	-9	4	0	0	0	2	-182.924	-0.3724	-0.5875
0	2	0	2	-5	0	-2	182.725	0.0000	0.4835
0	6	-8	3	0	0	-2	182.672	-17.9943	-5.3201
0	12	-19	0	3	0	-2	182.635	0.6003	0.0000
0	6	-16	4	5	0	2	-182.622	1.8719	-0.5839
0	10	-16	4	5	0	-2	182.620	-1.8714	0.5839
0	8	-19	0	3	0	2	-182.607	-0.6002	0.0000
0	2	-8	3	0	0	2	-182.570	18.0221	5.3217
0	2	0	-2	5	0	-2	182.518	0.0000	-0.5100
3	-5	4	0	0	0	-2	182.320	0.3711	0.5855
8	-11	0	0	0	0	-2	182.240	-4.1866	2.6783
0	10	-15	0	0	0	-2	180.390	0.0000	0.4990
0	2	0	0	1	0	-2	179.573	-0.8290	0.0000
0	1	2	0	0	0	-2	177.013	-3.0477	3.6709
0	2	0	1	0	0	-2	175.235	-0.5213	-7.1845
3	-7	0	0	0	0	2	-172.006	0.7033	2.8720
0	0	4	0	0	0	-2	171.739	-1.3741	0.8973
5	-6	0	0	0	0	-2	171.668	0.4216	0.0000
2	-1	0	0	0	0	-2	162.255	-7.5084	0.0000
0	6	-7	0	0	0	-2	160.321	-0.3104	0.0000
0	5	-5	0	0	0	-2	155.982	-0.5132	-0.3222
1	-4	0	0	0	0	2	-153.821	0.5009	0.0000
0	4	-3	0	0	0	-2	151.872	-0.6129	-1.1172
0	3	-1	0	0	0	-2	147.973	0.0000	-0.8187
4	-4	0	0	0	0	-2	145.976	0.0000	-0.4693
1	1	0	0	0	0	-2	139.113	0.0000	13.2056
0	3	0	-3	0	0	-2	132.958	-0.4929	-0.3920
2	-6	0	0	0	0	2	-132.867	0.0000	0.2662
0	6	-6	0	0	0	-2	129.986	-0.4087	0.0000
0	3	0	-2	0	0	-2	128.999	-3.9567	-2.8896
0	5	-4	0	0	0	-2	127.119	-0.7957	-1.2935
3	-2	0	0	0	0	-2	126.973	-4.9577	0.0000
0	3	0	-1	0	0	-2	125.269	0.7048	-22.3930
0	3	0	0	-2	0	-2	124.568	-0.1209	0.0000
0	4	-2	0	0	0	-2	124.376	-0.1216	-6.2072
0	3	0	0	-1	0	-2	123.142	0.0000	-1.2617
8	-16	0	0	0	0	2	-121.919	0.0000	0.2215
0	3	0	2	-5	0	-2	121.795	0.5160	-0.1007

Tabla 11.17: Influencia indirecta de los planetas debido al efecto en la órbita de la Tierra en la nutación  $\Delta\epsilon = -\Delta I$ .  $A_s$  (seno) y  $A_c$  (coseno) vienen dadas en  $\mu\text{as}$ . Para comparación con otras teorías téngase en cuenta que  $h = -p_A$ . Únicamente se muestran los términos con  $\max\{A_s, A_c\} \geq 0.1\mu\text{as}$ . Se conservan en tablas términos de  $10^{-4} \mu\text{as}$ .

0	7	-8	3	0	0	-2	121.772	0.0000	1.0852
0	1	-8	3	0	0	2	-121.726	-0.4366	0.7743
8	-10	0	0	0	0	-2	121.579	0.1288	0.0000
0	2	2	0	0	0	-2	119.231	0.1639	0.1196
0	3	0	1	0	0	-2	118.421	-0.3453	0.1344
3	-8	0	0	0	0	2	-116.938	-0.1326	0.0000
5	-5	0	0	0	0	-2	116.781	0.0000	0.3632
2	0	0	0	0	0	-2	112.348	0.0000	-16.7263
0	6	-5	0	0	0	-2	109.304	0.0000	0.1282
0	5	-3	0	0	0	-2	107.270	0.0000	0.4178
4	-3	0	0	0	0	-2	104.294	0.4099	0.0000
1	2	0	0	0	0	-2	100.744	0.6398	-0.1540
0	4	0	-4	0	0	-2	99.719	0.0000	0.1120
0	4	0	-3	0	0	-2	97.475	-0.1479	1.6106
0	4	0	-2	0	0	-2	95.331	-0.1110	7.9754
3	-1	0	0	0	0	-2	94.220	0.0000	-1.7123
0	4	0	-1	0	0	-2	93.278	-1.3727	0.1583
0	4	0	0	-2	0	-2	92.889	0.0000	0.3035
0	5	-2	0	0	0	-2	92.782	-0.3142	0.0000
2	1	0	0	0	0	-2	85.920	-1.0139	0.1987
4	-2	0	0	0	0	-2	81.129	0.0000	-0.5805
0	5	0	-3	0	0	-2	76.942	0.0000	0.3999
0	5	0	-2	0	0	-2	75.599	0.4328	-0.1062
0	5	0	0	0	0	-2	73.050	-14.0659	11.3163
5	-3	0	0	0	0	-2	71.232	0.0000	-0.1218
0	6	0	0	0	0	-2	60.875	0.3421	0.2942



## Capítulo 12

### Comparación con otras teorías

#### 12.1 Términos principales de Kinoshita, 1990

En esta sección comparamos algunas contribuciones a las series de nutación en longitud y oblicuidad con los resultados publicados por Souchay y Kinoshita en 1990. Se aprecian diferencias en algunos términos del orden de  $1 \mu\text{as}$ . Asimismo, en las tablas 12.3 y 12.4 se muestra la influencia de periodos no considerados en (Kinoshita y Souchay, 1990), del orden de  $1 - 10 \mu\text{as}$ . Esto mismo pasa con el cálculo del efecto del  $J_3$  en la nutación (tablas 12.5 y 12.6).

Tabla 12.1: **Efecto lunar de primer orden.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Kinoshita, 1990.  $\Delta\psi = \sum_i A_i \sin(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ .  $A$  viene dada en m.a.s.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$\Delta\psi$	$\Delta\psi_{\text{Kino}}$	$ \Delta\psi - \Delta\psi_{\text{Kino}} $
1	0	0	0	0	-6798.384	-17284.7680	-17284.7680	0.0000
2	0	0	0	0	-3399.192	207.8902	207.9130	0.0228
2	0	0	2	0	13.661	-204.1557	-204.1750	0.0193
0	1	0	0	0	27.555	67.6819	67.6880	0.0061
1	0	0	2	0	13.633	-34.2849	-34.2880	0.0031
2	1	0	2	0	9.133	-26.1321	-26.1340	0.0019
0	1	0	0	-2	-31.812	-14.9438	-14.9450	0.0012
1	0	0	2	-2	177.844	12.5059	12.5070	0.0011
2	-1	0	2	0	27.093	11.4457	11.4460	0.0003
0	0	0	0	2	14.765	6.0168	6.0170	0.0002



Tabla 12.2: **Efecto lunar de primer orden.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Kinoshita, 1990.  $\Delta\epsilon = \sum_i A_i \cos(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ .  $A$  viene dada en m.a.s.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon$	$\Delta\epsilon_{\text{Kino}}$	$ \Delta\epsilon - \Delta\epsilon_{\text{Kino}} $
1	0	0	0	0	-6798.384	9228.5362	9229.4760	0.9398
2	0	0	0	0	-3399.192	-90.1314	-90.1400	0.0086
2	0	0	2	0	13.661	88.5123	88.5210	0.0087
1	0	0	2	0	13.633	18.3051	18.3070	0.0019
2	1	0	2	0	9.133	11.3297	11.3300	0.0003
1	0	0	2	-2	177.844	-6.6771	-6.6770	0.0001
2	-1	0	2	0	27.093	-4.9624	-4.9620	0.0004

Tabla 12.3: **Efecto solar de primer orden.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Kinoshita, 1990.  $\Delta\psi = \sum_i A_i \sin(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ .  $A$  viene dada en m.a.s.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$\Delta\psi$	$\Delta\psi_{\text{Kino}}$	$ \Delta\psi - \Delta\psi_{\text{Kino}} $
2	0	0	2	-2	182.621	-1267.7990	-1267.7990	0.0000
0	0	1	0	0	365.260	127.2348	127.2340	0.0008
2	0	1	2	-2	121.749	-49.4329	-49.4330	0.0001
2	0	-1	2	-2	365.225	21.1970	21.1970	0.0000
0	0	2	0	0	182.630	1.5943	1.5940	0.0003
2	0	2	2	-2	91.313	-1.5044	-1.5050	0.0006
2	0	3	2	-2	73.051	-0.0416	-0.0420	0.0004
0	1	0	0	-1	411.784	0.0264	0.0220	0.0044
0	0	3	0	0	121.753	0.0261		0.0261
0	0	0	0	1	29.531	-0.0190	-0.0190	0.0000
2	0	0	2	-3	-35.227	-0.0190	-0.0190	0.0000

Tabla 12.4: **Efecto solar de primer orden.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Kinoshita, 1990.  $\Delta\epsilon = \sum_i A_i \cos(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ .  $A$  viene dada en m.a.s.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon$	$\Delta\epsilon_{\text{Kino}}$	$ \Delta\epsilon - \Delta\epsilon_{\text{Kino}} $
2	0	0	2	-2	182.621	549.6582	549.6600	0.0018
2	0	1	2	-2	121.749	21.4318	21.4320	0.0002
2	0	-1	2	-2	365.225	-9.1900	-9.1900	0.0000
2	0	2	2	-2	91.313	0.6522	0.6520	0.0002

Tabla 12.4: **Efecto solar de primer orden.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Kinoshita, 1990.  $\Delta\epsilon = \sum_i A_i \cos(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ .  $A$  viene dada en m.a.s.

2	0	3	2	-2	73.051	0.0181	0.0180	0.0001
2	0	0	2	-3	-35.227	0.0082	0.0080	0.0002
2	1	0	2	-3	126.514	0.0025		0.0025
2	-1	0	2	-1	328.153	0.0025		0.0025
2	0	0	2	-1	25.420	-0.0011		0.0011

Tabla 12.5: **Efecto del  $J_3$ .** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Kinoshita, 1990.  $\Delta\psi = \sum_i A_i \cos(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ .  $A$  viene dada en m.a.s.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$\Delta\psi$	$\Delta\psi_{\text{Kino}}$	$ \Delta\psi - \Delta\psi_{\text{Kino}} $
3	-1	0	1	0	65502.202	-0.0064	-0.0060	0.0004
2	-1	0	1	0	6159.136	0.0371	0.0360	0.0011
1	-1	0	1	0	3231.496	-0.1053	-0.1050	0.0003
0	1	0	-1	0	-2190.350	0.0337	0.0330	0.0007
1	1	0	1	-2	193.560	-0.0012	-0.0012	0.0000
2	0	0	1	0	27.432	0.0030		0.0030
1	0	0	1	0	27.322	-0.0163	-0.0160	0.0003
0	0	0	1	0	27.212	0.0076	0.0080	0.0004
1	1	0	1	0	13.719	-0.0013		0.0013
3	0	0	3	0	9.107	-0.0026		0.0026

Tabla 12.6: **Efecto del  $J_3$ .** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Kinoshita, 1990.  $\Delta\epsilon = \sum_i A_i \sin(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ .  $A$  viene dada en m.a.s.

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon$	$\Delta\epsilon_{\text{Kino}}$	$ \Delta\epsilon - \Delta\epsilon_{\text{Kino}} $
3	-1	0	1	0	65502.202	-0.0028		0.0028
2	-1	0	1	0	6159.136	0.0177	0.0180	0.0003
1	-1	0	1	0	3231.496	-0.0900	-0.0890	0.0010
1	1	0	1	-2	193.560	-0.0010		0.0010
2	0	0	1	0	27.432	0.0015		0.0015
1	0	0	1	0	27.322	-0.0140	-0.0140	0.0000
1	1	0	1	0	13.719	-0.0011		0.0011
3	0	0	3	0	9.107	-0.0011		0.0011

## 12.2 Comparación de términos diurnos, semidiurnos y terdiurnos con resultados de Folgueira, Souchay y Kinoshita

En esta sección comparamos el efecto de los armónicos no zonales de orden mayor que dos, calculados con el procesador simbólico, con los resultados publicados en (Folgueira, Souchay y Kinoshita, 1998). En los términos de Poisson no se encuentran discrepancias apreciables, aunque sí un buen número de nuevos términos que no habían sido considerados hasta ahora por Folgueira *et al.* Es en los términos de Oppolzer donde tienen lugar las mayores diferencias, algunas del orden de  $100 \mu\text{as}$ .

Tabla 12.7: Efecto de los coeficientes  $C_3^1, S_3^1$ . Términos de Poisson. Comparación de los términos principales de las series de nutación en longitud  $\Delta\psi_3^1$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita series, 1998.  $\Delta\psi_3^1$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l+g$	$P$ (días)	$\Delta\psi_3^1$ (sin)	$\Delta\psi_3^1$ (cos)	$(\Delta\psi_3^1)_{\text{FSK}}$ (sin)	$(\Delta\psi_3^1)_{\text{FSK}}$ (cos)
3	1	0	3	2	-1	-1.26803	-0.0208	0.0026		
3	2	0	3	0	-1	-1.21899	-0.0658	0.0081	-0.066	0.008
3	0	0	3	2	-1	-1.21182	-0.0657	0.0081	-0.066	0.008
2	1	0	3	0	-1	-1.16755	-0.0464	0.0057		
3	1	0	3	0	-1	-1.16735	-0.3640	0.0447	-0.363	0.045
3	-1	0	3	2	-1	-1.16077	-0.0677	0.0083	-0.067	0.008
1	1	0	1	2	-1	-1.15993	0.0175	-0.0021		
1	0	0	3	0	-1	-1.12027	0.0272	-0.0033		
2	0	0	3	0	-1	-1.12009	-0.1621	0.0199	-0.162	0.020
3	0	0	3	0	-1	-1.11990	-1.2724	0.1564	-1.269	0.156
1	2	0	1	0	-1	-1.11913	0.0542	-0.0067	0.054	-0.007
1	0	0	1	2	-1	-1.11308	0.0751	-0.0092	0.074	-0.009
3	1	0	3	-2	-1	-1.08182	0.0171	-0.0021		
3	-1	0	3	0	-1	-1.07616	0.0693	-0.0085		
0	1	0	1	0	-1	-1.07562	0.0245	-0.0030		
1	1	0	1	0	-1	-1.07545	0.4326	-0.0532	0.432	-0.053
2	1	0	1	0	-1	-1.07528	0.0262	-0.0032		
1	-1	0	1	2	-1	-1.06986	0.0838	-0.0103	0.083	-0.010
1	0	0	-1	0	1	1.03537	0.0154	0.0019		
0	0	0	1	0	-1	-1.03521	0.1444	-0.0177	0.144	-0.018
1	0	0	1	0	-1	-1.03505	2.5472	-0.3131	2.541	-0.312
2	0	0	1	0	-1	-1.03489	0.1531	-0.0188	0.067	0.008
1	0	0	1	-2	1	1.02922	0.0142	0.0017		
1	1	0	1	-2	-1	-1.00243	0.0250	-0.0031		
1	-1	0	1	0	-1	-0.99758	0.1337	-0.0164	0.133	-0.016
1	-1	0	1	0	1	0.99696	0.0656	0.0081	0.066	0.008
1	1	0	1	-2	1	0.99216	0.0122	0.0015		
1	0	0	1	-2	-1	-0.96725	0.0272	-0.0033		
2	0	0	1	0	1	0.96229	-0.0630	-0.0077	0.142	0.017
1	0	0	1	0	1	0.96215	1.1627	0.1429	1.159	0.142
0	0	0	1	0	1	0.96201	0.1342	0.0165	0.134	0.016

Tabla 12.7: Efecto de los coeficientes  $C_3^1, S_3^1$ . Términos de Poisson. Comparación de los términos principales de las series de nutación en longitud  $\Delta\psi_3^1$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita series, 1998.  $\Delta\psi_3^1$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

1	0	0	-1	0	-1	-0.96188	0.0290	-0.0036		
1	-1	0	1	2	1	0.93390	0.0359	0.0044		
1	1	0	1	0	1	0.92969	0.1837	0.0226	0.184	0.023
0	1	0	1	0	1	0.92956	0.0211	0.0026		
1	0	0	1	2	1	0.90329	0.0299	0.0037		
0	0	0	1	2	1	0.90317	0.0034	0.0004		
3	0	0	3	0	1	0.89884	0.0941	0.0116	0.094	0.012
2	0	0	3	0	1	0.89872	0.0575	0.0071	0.058	0.007
1	0	0	3	0	1	0.89861	0.0107	0.0013		
3	1	0	3	0	1	0.87045	0.0250	0.0031		
2	1	0	3	0	1	0.87034	0.0153	0.0019		

Tabla 12.8: Efecto de los coeficientes  $C_3^2, S_3^2$ . Términos de Poisson. Comparación de los términos principales de las series de nutación en longitud  $\Delta\psi_3^2$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita series, 1998.  $\Delta\psi_3^2$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l+g$	$P$ (días)	$\Delta\psi_3^2$ (sin)	$\Delta\psi_3^2$ (cos)	$(\Delta\psi_3^2)_{\text{FSK}}$ (sin)	$(\Delta\psi_3^2)_{\text{FSK}}$ (cos)
3	2	0	3	0	-2	-0.54852	0.0118	-0.0173		
3	0	0	3	2	-2	-0.54706	0.0119	-0.0173		
2	1	0	3	0	-2	-0.53786	-0.0121	0.0176		
3	1	0	3	0	-2	-0.53781	0.0671	-0.0979	0.067	-0.097
3	-1	0	3	2	-2	-0.53641	0.0125	-0.0183		
2	0	0	3	0	-2	-0.52756	-0.0431	0.0629	-0.043	0.063
3	0	0	3	0	-2	-0.52752	0.2397	-0.3500	0.239	-0.349
3	-1	0	3	0	-2	-0.51761	-0.0133	0.0194		
1	1	0	1	0	-2	-0.51744	-0.0266	0.0388		
2	1	0	1	0	-2	-0.51740	0.0000	-0.0104		
0	0	0	1	0	-2	-0.50794	0.0278	-0.0406		
1	0	0	1	0	-2	-0.50790	-0.1596	0.2330	-0.159	0.233
2	0	0	1	0	-2	-0.50787	0.0424	-0.0619	0.041	-0.059
1	-1	0	1	0	-2	-0.49871	0.0000	0.0125		
1	0	0	1	0	2	0.48970	0.0681	0.0994	0.068	0.099
0	0	0	1	0	2	0.48966	0.0268	0.0392		
1	1	0	1	0	2	0.48115	0.0109	0.0160		

Tabla 12.9: Efecto de los coeficientes  $C_3^3, S_3^3$ . Términos de Poisson. Comparación de los términos principales de las series de nutación en longitud  $\Delta\psi_3^3$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\psi_3^3$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l+g$	$P$ (días)	$\Delta\psi_3^3$ (sin)	$\Delta\psi_3^3$ (cos)	$(\Delta\psi_3^3)_{\text{FSK}}$ (sin)	$(\Delta\psi_3^3)_{\text{FSK}}$ (cos)
3	2	0	3	0	-3	-0.35388	-0.0058	0.0113		
3	0	0	3	2	-3	-0.35327	-0.0058	0.0113		
2	1	0	3	0	-3	-0.34941	0.0056	-0.0109		
3	1	0	3	0	-3	-0.34939	-0.0328	0.0644	-0.033	0.064
3	-1	0	3	2	-3	-0.34880	-0.0061	0.0120		
2	0	0	3	0	-3	-0.34503	0.0201	-0.0394		
3	0	0	3	0	-3	-0.34502	-0.1180	0.2317	-0.118	0.231
3	-1	0	3	0	-3	-0.34075	0.0066	-0.0130		
1	1	0	1	0	-3	-0.34068	-0.0176	0.0345		
0	0	0	1	0	-3	-0.33653	0.0063	-0.0123		
1	0	0	1	0	-3	-0.33652	-0.1062	0.2084	-0.106	0.208
2	0	0	1	0	-3	-0.33650	-0.0200	0.0392		
1	0	0	1	0	3	0.32843	0.0096	0.0187		
0	0	0	1	0	3	0.32841	0.0061	0.0120		

Tabla 12.10: Efecto de los coeficientes  $C_3^1, S_3^1$ . Términos de Poisson. Comparación de los términos principales de las series de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon_3^1$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\epsilon_3^1$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l+g$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon_3^1$ (sin)	$\Delta\epsilon_3^1$ (cos)	$(\Delta\epsilon_3^1)_{\text{FSK}}$ (sin)	$(\Delta\epsilon_3^1)_{\text{FSK}}$ (cos)
3	2	0	3	0	-1	-1.21899	0.0038	0.0311		
3	0	0	3	2	-1	-1.21182	0.0038	0.0311		
2	1	0	3	0	-1	-1.16755	0.0043	0.0354		
3	1	0	3	0	-1	-1.16735	0.0211	0.1720	0.021	0.172
2	0	0	3	0	-1	-1.12009	0.0152	0.1237	0.015	0.123
3	0	0	3	0	-1	-1.11990	0.0739	0.6015	0.074	0.599
3	-1	0	3	0	-1	-1.07616	-0.0040	-0.0327		
0	1	0	1	0	-1	-1.07562	0.0024	0.0192		
1	1	0	1	0	-1	-1.07545	0.0014	0.0117		
2	1	0	1	0	-1	-1.07528	-0.0025	-0.0200		
0	0	0	1	0	-1	-1.03521	0.0139	0.1133	0.014	0.113
1	0	0	1	0	-1	-1.03505	0.0085	0.0689	0.008	0.068
2	0	0	1	0	-1	-1.03489	-0.0144	-0.1169		
1	-1	0	1	0	1	0.99696	0.0038	-0.0307	0.010	-0.083
2	0	0	1	0	1	0.96229	-0.0033	0.0270	-0.036	0.292
1	0	0	1	0	1	0.96215	0.0668	-0.5434	0.067	-0.542
0	0	0	1	0	1	0.96201	0.0129	-0.1053	0.013	-0.105
1	-1	0	1	2	1	0.93390	0.0021	-0.0168		
1	1	0	1	0	1	0.92969	0.0105	-0.0858	0.010	-0.085
0	1	0	1	0	1	0.92956	0.0020	-0.0166		

Tabla 12.10: Efecto de los coeficientes  $C_3^1, S_3^1$ . Términos de Poisson. Comparación de los términos principales de las series de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon_3^1$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\epsilon_3^1$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

1	0	0	1	2	1	0.90329	0.0017	-0.0140		
1	2	0	1	0	1	0.89934	0.0012	-0.0100		
3	0	0	3	0	1	0.89884	0.0048	-0.0391		
2	0	0	3	0	1	0.89872	0.0030	-0.0247		
3	1	0	3	0	1	0.87045	0.0013	-0.0104		

Tabla 12.11: Efecto de los coeficientes  $C_3^2, S_3^2$ . Términos de Poisson. Comparación de los términos principales de las series de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon_3^2$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\epsilon_3^2$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l+g$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon_3^2$ (sin)	$\Delta\epsilon_3^2$ (cos)	$(\Delta\epsilon_3^2)_{\text{FSK}}$ (sin)	$(\Delta\epsilon_3^2)_{\text{FSK}}$ (cos)
3	2	0	3	0	-2	-0.54852	-0.0106	0.0000		
3	0	0	3	2	-2	-0.54706	-0.0107	0.0000		
3	1	0	3	0	-2	-0.53781	-0.0603	-0.0413	-0.060	-0.041
3	-1	0	3	2	-2	-0.53641	-0.0112	0.0000		
3	0	0	3	0	-2	-0.52752	-0.2155	-0.1476	-0.215	-0.147
3	-1	0	3	0	-2	-0.51761	0.0120	0.0000		
1	1	0	1	0	-2	-0.51744	-0.0228	-0.0156		
0	0	0	1	0	-2	-0.50794	0.0178	0.0122		
1	0	0	1	0	-2	-0.50790	-0.1372	-0.0940	-0.137	-0.094
1	0	0	1	0	2	0.48970	0.0414	-0.0283	0.041	-0.028
0	0	0	1	0	2	0.48966	0.0172	-0.0118		

Tabla 12.12: Efecto de los coeficientes  $C_3^3, S_3^3$ . Términos de Poisson. Comparación de los términos principales de las series de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon_3^3$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\epsilon_3^3$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l+g$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon_3^3$ (sin)	$\Delta\epsilon_3^3$ (cos)	$(\Delta\epsilon_3^3)_{\text{FSK}}$ (sin)	$(\Delta\epsilon_3^3)_{\text{FSK}}$ (cos)
3	1	0	3	0	-3	-0.34939	-0.0256	-0.0130		
2	0	0	3	0	-3	-0.34503	0.0157	0.0080		
3	0	0	3	0	-3	-0.34502	-0.0922	-0.0469	-0.092	-0.047
1	1	0	1	0	-3	-0.34068	-0.0137	-0.0070		
1	0	0	1	0	-3	-0.33652	-0.0829	-0.0422	-0.083	-0.042
2	0	0	1	0	-3	-0.33650	-0.0156	-0.0080		

Tabla 12.13: Efecto de los coeficientes  $C_3^1, S_3^1$ . Términos de Oppolzer. Comparación de los términos principales de las series de nutación en longitud  $\Delta\psi_3^1$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\psi_3^1$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$\Delta\psi_3^1$ (sin)	$\Delta\psi_3^1$ (cos)	$(\Delta\psi_3^1)_{\text{FSK}}$ (sin)	$(\Delta\psi_3^1)_{\text{FSK}}$ (cos)
2	1	0	3	0	-1	-1	-1.16755	0.1556	-0.0191	0.122	-0.015
3	1	0	3	0	-1	-1	-1.16735	0.3837	-0.0472	0.197	-0.024
1	0	0	3	0	-1	-1	-1.12027	0.1117	-0.0137		
2	0	0	3	0	-1	-1	-1.12009	0.7148	-0.0879	0.586	-0.072
3	0	0	3	0	-1	-1	-1.11990	1.6269	-0.2000	0.944	-0.116
1	2	0	1	0	-1	-1	-1.11913	0.2246	-0.0276	0.229	-0.028
1	0	0	1	2	-1	-1	-1.11308	0.3280	-0.0403	0.333	-0.041
3	-1	0	3	0	-1	-1	-1.07616	-0.1186	0.0146		
0	1	0	1	0	-1	-1	-1.07562	0.4676	-0.0575	0.443	-0.054
1	1	0	1	0	-1	-1	-1.07545	2.8442	-0.3496	2.909	-0.358
2	1	0	1	0	-1	-1	-1.07528	-0.1718	0.0211	-0.147	0.018
1	-1	0	1	2	-1	-1	-1.06986	0.5949	-0.0731	0.586	-0.072
1	0	0	-1	0	1	1	1.03537	0.4367	0.0537	0.400	0.049
0	0	0	1	0	-1	-1	-1.03521	5.6635	-0.6961	5.164	-0.635
1	0	0	1	0	-1	-1	-1.03505	35.2492	-4.3323	33.442	-4.110
2	0	0	1	0	-1	-1	-1.03489	-1.9705	0.2422	-1.706	0.210
1	-2	0	1	0	1	1	1.03439	0.1507	0.0185	0.138	0.017
1	0	0	1	-2	1	1	1.02922	0.4820	0.0592	0.436	0.054
0	0	0	1	-2	1	1	1.02906	-0.1164	-0.0143		
0	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00258	0.3722	-0.0457	-0.227	-0.028
1	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00243	2.5706	-0.3159	1.574	-0.193
2	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00229	-0.1380	0.0170		
1	-1	1	1	0	-1	-1	-1.00031	0.1022	-0.0126		
0	0	0	1	-1	-1	-1	-1.00015	-0.0220	0.0027		
1	0	0	1	-1	-1	-1	-1.00000	-0.1316	0.0162		
1	-1	-1	1	0	1	1	0.99969	-0.1065	-0.0131		
0	1	0	-1	0	1	1	0.99787	1.0264	0.1262	0.160	0.020
0	1	0	-1	0	1	1	0.99772	-25.0600	-3.0800	-3.047	-0.375
1	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99758	230.8152	-28.3684	19.874	-2.443
2	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99743	-22.7459	2.7956	-1.071	0.132
3	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99728	2.3666	-0.2909		
1	0	-1	1	-1	-1	-1	-0.99727	513.7884	-63.1474		
1	0	-1	1	-1	1	1	0.99727	-377.2197	-46.3624		
3	-1	0	1	0	1	1	0.99725	-2.3602	-0.2901		
2	-1	0	1	0	1	1	0.99711	22.7344	2.7942	1.182	0.145
1	-1	0	1	0	1	1	0.99696	-230.8135	-28.3682	-24.011	-2.951
0	1	0	-1	0	-1	-1	-0.99682	25.0541	-3.0793	4.032	0.496
1	1	0	-1	0	-1	-1	-0.99667	-1.0266	0.1262		
0	1	1	-1	0	1	1	0.99501	-0.0236	-0.0029		
1	-1	-1	1	0	-1	-1	-0.99486	0.1066	-0.0131	0.303	-0.037
1	0	0	1	-1	1	1	0.99455	0.1317	0.0162	0.662	0.081
1	-1	1	1	0	1	1	0.99425	-0.1023	-0.0126	-1.323	-0.163
2	1	0	1	-2	1	1	0.99230	0.1369	0.0168	0.395	0.049
1	1	0	1	-2	1	1	0.99216	-2.5758	-0.3166	-7.063	-0.868
0	1	0	1	-2	1	1	0.99201	-0.3715	-0.0457	-0.964	-0.118

Tabla 12.13: Efecto de los coeficientes  $C_3^1, S_3^1$ . Términos de Oppolzer. Comparación de los términos principales de las series de nutación en longitud  $\Delta\psi_3^1$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\psi_3^1$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

0	0	0	1	-2	-1	-1	-0.96738	0.1152	-0.0142		
1	0	0	1	-2	-1	-1	-0.96725	-0.4878	0.0600	-0.538	0.066
1	-2	0	1	0	-1	-1	-0.96272	-0.1527	0.0188	-0.166	0.020
2	0	0	1	0	1	1	0.96229	1.8598	0.2286	2.044	0.251
1	0	0	1	0	1	1	0.96215	-35.7788	-4.3974	-39.391	-4.841
0	0	0	1	0	1	1	0.96201	-5.5959	-0.6878	-6.178	-0.759
1	0	0	-1	0	-1	-1	-0.96188	-0.4430	0.0544	-0.478	0.059
1	-1	0	1	2	1	1	0.93390	-0.6121	-0.0752	-0.644	-0.079
2	1	0	1	0	1	1	0.92981	0.1532	0.0188	0.161	0.020
1	1	0	1	0	1	1	0.92969	-2.9327	-0.3604	-3.078	-0.378
0	1	0	1	0	1	1	0.92956	-0.4566	-0.0561	-0.484	-0.060
1	0	0	1	2	1	1	0.90329	-0.3431	-0.0422	-0.355	-0.044
1	2	0	1	0	1	1	0.89934	-0.2355	-0.0289	-0.243	-0.030
3	0	0	3	0	1	1	0.89884	-0.9714	-0.1194	-1.001	0.123
2	0	0	3	0	1	1	0.89872	-0.6024	-0.0740	-0.621	-0.076
1	0	0	3	0	1	1	0.89861	-0.1172	-0.0144	-0.121	-0.015
3	1	0	3	0	1	1	0.87045	-0.2003	-0.0246	-0.205	0.025
2	1	0	3	0	1	1	0.87034	-0.1242	-0.0153	-0.127	-0.016

Tabla 12.14: Efecto de los coeficientes  $C_3^1, S_3^1$ . Términos de Oppolzer. Comparación de los términos principales de las series de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon_3^1$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\epsilon_3^1$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon_3^1$ (sin)	$\Delta\epsilon_3^1$ (cos)	$(\Delta\epsilon_3^1)_{\text{FSK}}$ (sin)	$(\Delta\epsilon_3^1)_{\text{FSK}}$ (cos)
2	0	0	3	0	-1	-1	-1.12009	0.0241	0.1959	0.029	0.233
3	0	0	3	0	-1	-1	-1.11990	0.0155	0.1265	0.046	0.375
0	2	0	1	0	-1	-1	-1.11931	0.0015	0.0121		
1	2	0	1	0	-1	-1	-1.11913	0.0121	0.0988		
0	0	0	1	2	-1	-1	-1.11326	0.0026	0.0210		
1	0	0	1	2	-1	-1	-1.11308	0.0176	0.1436	-0.016	0.133
0	1	0	1	0	-1	-1	-1.07562	0.0223	0.1815	0.022	0.176
1	1	0	1	0	-1	-1	-1.07545	0.1485	1.2084	0.137	1.119
2	1	0	1	0	-1	-1	-1.07528	-0.0066	-0.0537		
1	-1	0	1	2	-1	-1	-1.06986	0.0309	0.2516	0.029	0.233
1	0	0	-1	0	1	1	1.03537	0.0213	-0.1732	0.020	-0.159
0	0	0	1	0	-1	-1	-1.03521	0.2735	2.2254	0.253	2.055
1	0	0	1	0	-1	-1	-1.03505	1.7801	14.4838	1.578	12.842
2	0	0	1	0	-1	-1	-1.03489	-0.0856	-0.6967	-0.083	-0.679
1	-2	0	1	0	1	1	1.03439	0.0073	-0.0598		
1	0	0	1	-2	1	1	1.02922	0.0235	-0.1912	0.021	-0.173
0	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00258	0.0182	0.1478		
1	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00243	0.1262	1.0271	0.077	0.626
2	1	0	1	-2	-1	-1	-1.00229	-0.0066	-0.0540		
1	0	0	1	-1	-1	-1	-1.00000	-0.0064	-0.0525		



Tabla 12.14: Efecto de los coeficientes  $C_3^1, S_3^1$ . Términos de Oppolzer. Comparación de los términos principales de las series de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon_3^1$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\epsilon_3^1$  viene dada en  $\mu\text{s}$ .

1	1	0	-1	0	1	1	0.99787	0.0502	-0.4083		
0	1	0	-1	0	1	1	0.99772	-1.2250	9.9668	-0.149	1.212
1	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99758	11.2874	91.8377	0.972	7.906
2	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99743	-1.1115	-9.0432	-0.052	-0.426
3	-1	0	1	0	-1	-1	-0.99728	0.1157	0.9412		
1	0	-1	1	-1	-1	-1	-0.99727	25.1186	204.3733		
1	0	-1	1	-1	1	1	0.99727	-18.4419	150.0494		
3	-1	0	1	0	1	1	0.99725	-0.1154	0.9388		
2	-1	0	1	0	1	1	0.99711	1.1115	-9.0433	-0.058	0.470
1	-1	0	1	0	1	1	0.99696	-11.2845	91.8146	1.174	-9.551
0	1	0	-1	0	-1	-1	-0.99682	1.2251	9.9674	-0.197	-1.604
1	1	0	-1	0	-1	-1	-0.99667	-0.0502	-0.4082		
1	0	0	1	-1	1	1	0.99455	0.0064	-0.0524	-0.032	0.263
2	1	0	1	-2	1	1	0.99230	0.0067	-0.0545	0.019	-0.157
1	1	0	1	-2	1	1	0.99216	-0.1260	1.0250	-0.345	2.809
0	1	0	1	-2	1	1	0.99201	-0.0182	0.1480	-0.047	0.383
1	0	0	1	-2	-1	-1	-0.96725	-0.0232	-0.1889	-0.026	-0.214
1	-2	0	1	0	-1	-1	-0.96272	-0.0072	-0.0589		
2	0	0	1	0	1	1	0.96229	0.0910	-0.7408	0.100	-0.813
1	0	0	1	0	1	1	0.96215	-1.7542	14.2731	-1.923	15.648
0	0	0	1	0	1	1	0.96201	-0.2768	2.2523	-0.302	2.458
1	0	0	-1	0	-1	-1	-0.96188	-0.0210	-0.1707	-0.023	-0.191
1	-1	0	1	2	1	1	0.93390	-0.0301	0.2448	-0.031	0.256
0	1	0	-1	-2	-1	-1	-0.93378	0.0048	0.0389		
2	1	0	1	0	1	1	0.92981	0.0075	-0.0611		
1	1	0	1	0	1	1	0.92969	-0.1442	1.1732	-0.151	1.225
0	1	0	1	0	1	1	0.92956	-0.0228	0.1859	-0.024	0.193
1	0	0	1	2	1	1	0.90329	-0.0169	0.1376	-0.017	0.141
1	2	0	1	0	1	1	0.89934	-0.0116	0.0945		
3	0	0	3	0	1	1	0.89884	-0.0476	0.3873	0.049	-0.399
2	0	0	3	0	1	1	0.89872	-0.0296	0.2406	-0.030	0.247
3	1	0	3	0	1	1	0.87045	-0.0098	0.0799		

Tabla 12.15: Efecto de los coeficientes  $C_3^2, S_3^2$ . Términos de Oppolzer. Comparación de los términos principales de las series de nutación en longitud  $\Delta\psi_3^2$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\psi_3^2$  viene dada en  $\mu\text{s}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$\Delta\psi_3^2$ (sin)	$\Delta\psi_3^2$ (cos)	$(\Delta\psi_3^2)_{\text{FSK}}$ (sin)	$(\Delta\psi_3^2)_{\text{FSK}}$ (cos)
3	2	0	3	0	-2	-2	-0.54852	0.0169	-0.0247		
3	0	0	3	2	-2	-2	-0.54706	0.0169	-0.0247		
2	1	0	3	0	-2	-2	-0.53786	0.0189	-0.0275		
3	1	0	3	0	-2	-2	-0.53781	0.0952	-0.1390		
3	-1	0	3	2	-2	-2	-0.53641	0.0177	-0.0259		
2	0	0	3	0	-2	-2	-0.52756	0.0662	-0.0967	0.055	-0.081

Tabla 12.15: Efecto de los coeficientes  $C_3^2, S_3^2$ . Términos de Oppolzer. Comparación de los términos principales de las series de nutación en longitud  $\Delta\psi_3^2$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\psi_3^2$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

3	0	0	3	0	-2	-2	-0.52752	0.3385	-0.4943	0.059	0.087
1	2	0	1	0	-2	-2	-0.52735	0.0081	-0.0118		
1	0	0	1	2	-2	-2	-0.52600	0.0112	-0.0163		
3	-1	0	3	0	-2	-2	-0.51761	-0.0187	0.0273		
0	1	0	1	0	-2	-2	-0.51748	-0.0099	0.0145		
1	1	0	1	0	-2	-2	-0.51744	0.0642	-0.0937	0.068	-0.100
2	1	0	1	0	-2	-2	-0.51740	-0.0107	0.0157		
1	-1	0	1	2	-2	-2	-0.51615	0.0124	-0.0181		
0	0	0	1	0	-2	-2	-0.50794	-0.0586	0.0855	-0.060	0.087
1	0	0	1	0	-2	-2	-0.50790	0.3771	-0.5507	0.403	-0.589
2	0	0	1	0	-2	-2	-0.50787	-0.0631	0.0922		
1	-1	0	1	0	-2	-2	-0.49871	0.0198	-0.0289		
1	-1	0	1	0	2	2	0.49856	-0.0077	-0.0112		
1	0	0	1	0	2	2	0.48970	-0.1355	-0.1979	-0.137	-0.200
0	0	0	1	0	2	2	0.48966	-0.0544	-0.0794	-0.055	-0.081
1	1	0	1	0	2	2	0.48115	-0.0214	-0.0313		
0	1	0	1	0	2	2	0.48111	-0.0086	-0.0125		

Tabla 12.16: Efecto de los coeficientes  $C_3^2, S_3^2$ . Términos de Oppolzer. Comparación de los términos principales de las series de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon_3^2$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\epsilon_3^2$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon_3^2$ (sin)	$\Delta\epsilon_3^2$ (cos)	$(\Delta\epsilon_3^2)_{\text{FSK}}$ (sin)	$(\Delta\epsilon_3^2)_{\text{FSK}}$ (cos)
2	0	0	3	0	-2	-2	-0.52756	0.0255	0.0175		
3	0	0	3	0	-2	-2	-0.52752	-0.0349	-0.0239	0.196	0.134
1	1	0	1	0	-2	-2	-0.51744	0.0421	0.0289		
0	0	0	1	0	-2	-2	-0.50794	-0.0351	-0.0241		
1	0	0	1	0	-2	-2	-0.50790	0.2485	0.1702	0.234	0.160
2	0	0	1	0	-2	-2	-0.50787	-0.0238	-0.0163		
1	-1	0	1	0	-2	-2	-0.49871	0.0131	0.0089		
1	0	0	1	0	2	2	0.48970	-0.0800	0.0548	-0.079	0.054
0	0	0	1	0	2	2	0.48966	-0.0327	0.0224		
1	1	0	1	0	2	2	0.48115	-0.0126	0.0087		

Tabla 12.17: Efecto de los coeficientes  $C_3^3, S_3^3$ . Términos de Oppolzer. Comparación de los términos principales de las series de nutación en longitud  $\Delta\psi_3^3$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\psi_3^3$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$\Delta\psi_3^3$ (sin)	$\Delta\psi_3^3$ (cos)	$(\Delta\psi_3^3)_{\text{FSK}}$ (sin)	$(\Delta\psi_3^3)_{\text{FSK}}$ (cos)
3	2	0	3	0	-3	-3	-0.35388	0.0089	-0.0175		
3	0	0	3	2	-3	-3	-0.35327	0.0089	-0.0175		
2	1	0	3	0	-3	-3	-0.34941	0.0086	-0.0168		
3	1	0	3	0	-3	-3	-0.34939	0.0504	-0.0989	0.050	-0.099
3	-1	0	3	2	-3	-3	-0.34880	0.0094	-0.0184		
2	0	0	3	0	-3	-3	-0.34503	0.0306	-0.0601		
3	0	0	3	0	-3	-3	-0.34502	0.1801	-0.3535	0.180	-0.354
3	-1	0	3	0	-3	-3	-0.34075	-0.0100	0.0196		
1	1	0	1	0	-3	-3	-0.34068	-0.0266	0.0523	-0.027	0.053
1	-1	0	1	2	-3	-3	-0.34012	-0.0052	0.0102		
0	0	0	1	0	-3	-3	-0.33653	0.0095	-0.0186		
1	0	0	1	0	-3	-3	-0.33652	-0.1599	0.3139	-0.160	0.315
2	0	0	1	0	-3	-3	-0.33650	-0.0301	0.0591		
1	-1	0	1	0	-3	-3	-0.33246	-0.0086	0.0168		
1	0	0	1	0	3	3	0.32843	0.0142	0.0279		
0	0	0	1	0	3	3	0.32841	0.0091	0.0179		

Tabla 12.18: Efecto de los coeficientes  $C_3^3, S_3^3$ . Términos de Oppolzer. Comparación de los términos principales de las series de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon_3^3$  con las series de Folgueira-Souchay-Kinoshita, 1998.  $\Delta\epsilon_3^3$  viene dada en  $\mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$l$	$g$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon_3^3$ (sin)	$\Delta\epsilon_3^3$ (cos)	$(\Delta\epsilon_3^3)_{\text{FSK}}$ (sin)	$(\Delta\epsilon_3^3)_{\text{FSK}}$ (cos)
3	1	0	3	0	-3	-3	-0.34939	0.0393	0.0200		
2	0	0	3	0	-3	-3	-0.34503	0.0239	0.0122		
3	0	0	3	0	-3	-3	-0.34502	0.1406	0.0716	0.141	0.072
1	1	0	1	0	-3	-3	-0.34068	-0.0208	-0.0106		
1	0	0	1	0	-3	-3	-0.33652	-0.1249	-0.0636	-0.125	-0.064
2	0	0	1	0	-3	-3	-0.33650	-0.0235	-0.0120		
1	0	0	1	0	3	3	0.32843	0.0111	-0.0057		

## 12.3 Comparación con REN2000

En esta sección comparamos las distintas contribuciones a las series de nutación calculadas con el procesador, con las dadas por la teoría REN2000. Para hacer más cómoda la inspección de los resultados, hemos separado los efectos del siguiente modo:

1. Efecto lunisolar de primer y segundo orden, junto al efecto del  $J_3$ .
2. Efecto de segundo orden de perturbación.
3. Influencia planetaria directa.
4. Influencia planetaria indirecta.

Los efectos de los armónicos no zonales de tercer orden no se consideran en REN2000, por lo que no han sido incluidos en estas tablas.

### 12.3.1 Efecto lunisolar de primer y segundo orden y del $J_3$

Tabla 12.19: Serie total de nutación en longitud (efectos lunisolar de primer y segundo orden y del  $J_3$ , ángulos en el plano de figura). Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados REN2000 (términos con  $\max\{|A_s|, |A_c|\} \geq 0.1$  mas).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{s_i} \sin \Theta_i + A_{c_i} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_s$	$(\Delta\psi)_c$	$(\Delta\psi_R)_s$	$(\Delta\psi_R)_c$	$ \delta(\Delta\psi) _s$	$ \delta(\Delta\psi) _c$
							(mas)	(mas)	(mas)	(mas)	(mas)
1	0	0	0	0	6798.384	-17281.8472	0.0000	-17280.5921	0.3826	1.2551	0.3826
2	0	0	0	0	3399.192	209.0504	0.0000	209.0296	0.0059	0.0208	0.0059
0	1	-1	0	-1	3232.862	-0.3335	0.0000	-0.3279	0.0000	0.0056	0.0000
1	-1	0	1	0	3231.496	0.0000	-0.1053	0.0000	-0.1044	0.0000	0.0009
2	-2	0	2	0	1615.748	-0.3001	0.0000	-0.3041	0.0000	0.0040	0.0000
1	-2	0	2	0	1305.479	4.5077	0.0000	4.5078	0.0000	0.0001	0.0000
0	2	0	-2	0	1095.175	1.1122	0.0000	1.1122	0.0000	0.0000	0.0000
0	1	0	0	-1	411.784	-0.2560	0.0000	-0.2564	0.0000	0.0004	0.0000
1	0	1	0	0	385.998	-1.4861	0.0000	-1.4821	0.0000	0.0040	0.0000
0	0	1	0	0	365.260	125.5109	0.0000	125.5036	0.0000	0.0073	0.0000
2	0	-1	2	-2	365.225	21.3169	0.0000	21.3112	0.0030	0.0057	0.0030
1	0	-1	0	0	346.636	-0.9757	0.0000	-0.9771	0.0000	0.0014	0.0000
1	0	-1	2	-2	346.604	-0.4831	0.0000	-0.4811	0.0000	0.0020	0.0000
1	2	0	0	-2	212.323	0.3982	0.0000	0.3982	0.0000	0.0000	0.0000
0	2	0	0	-2	205.892	4.4852	0.0000	4.4853	0.0000	0.0001	0.0000
1	-2	0	0	2	199.840	-0.5230	0.0000	-0.5229	0.0000	0.0001	0.0000
3	0	0	2	-2	187.662	0.1178	0.0000	0.1188	0.0000	0.0010	0.0000

Tabla 12.19: Serie total de nutación en longitud (efectos lunisolar de primer y segundo orden y del  $J_3$ , ángulos en el plano de figura). Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados REN2000 (términos con  $\max\{|A_s|, |A_c|\} \geq 0.1$  mas).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

0	0	2	0	0	182.630	1.5761	0.0000	1.5759	0.0000	0.0002	0.0000
2	0	0	2	-2	182.621	-1277.5368	0.0000	-1277.4752	0.0000	0.0616	0.0000
1	0	0	2	-2	177.844	12.5078	0.0000	12.5103	0.0000	0.0025	0.0000
0	0	0	2	-2	173.310	-2.0574	0.0000	-2.0574	0.0000	0.0000	0.0000
2	0	1	2	-2	121.749	-49.9387	0.0000	-49.9378	0.0000	0.0009	0.0000
1	0	1	2	-2	119.607	0.3471	0.0000	0.3471	0.0000	0.0000	0.0000
2	0	2	2	-2	91.313	-1.5224	0.0000	-1.5235	0.0000	0.0011	0.0000
0	1	1	0	-2	34.847	-0.7003	0.0000	-0.7003	0.0000	0.0000	0.0000
1	-1	0	2	-2	32.606	-0.1864	0.0000	-0.1864	0.0000	0.0000	0.0000
1	-1	0	0	2	31.961	1.4668	0.0000	1.4665	0.0000	0.0003	0.0000
0	1	0	0	-2	31.812	-14.9588	0.0000	-14.9588	0.0000	0.0000	0.0000
1	1	0	0	-2	31.664	-1.2069	0.0000	-1.2071	0.0000	0.0002	0.0000
0	1	-1	0	0	29.803	0.4503	0.0000	-0.0005	0.0000	0.4508	0.0000
0	0	0	0	1	29.531	-0.4028	0.0000	-0.4029	0.0000	0.0001	0.0000
2	1	0	0	0	27.780	-0.1912	0.0000	-0.1912	0.0000	0.0000	0.0000
1	1	0	0	0	27.667	6.1082	0.0000	6.1093	0.0000	0.0011	0.0000
0	1	0	0	0	27.555	67.7720	0.0000	67.7677	0.0000	0.0043	0.0000
1	-1	0	0	0	27.443	-5.4324	0.0000	-5.4318	0.0000	0.0006	0.0000
2	-1	0	0	0	27.333	0.1320	0.0000	0.1321	0.0000	0.0001	0.0000
2	-1	0	2	0	27.093	0.4754	0.0000	0.0075	0.0000	0.4679	0.0000
2	-1	0	2	0	27.093	11.4458	0.0000			11.4458	0.0000
1	-1	0	2	0	26.985	1.9796	0.0000	0.0006	0.0000	1.9790	0.0000
0	1	0	-2	0	26.878	0.3866	0.0000	0.3865	0.0000	0.0001	0.0000
0	1	1	0	0	25.622	-0.3230	0.0000	-0.3230	0.0000	0.0000	0.0000
2	1	0	2	-2	23.942	0.1246	0.0000	-0.0033	0.0000	0.1279	0.0000
2	1	0	2	-2	23.942	2.6387	0.0000			2.6387	0.0000
1	1	0	2	-2	23.858	0.5624	0.0000	0.5622	0.0000	0.0002	0.0000
2	1	1	2	-2	22.469	0.1247	0.0000	0.1247	0.0000	0.0000	0.0000
0	2	0	0	-4	15.906	-0.1221	0.0000	-0.1222	0.0000	0.0001	0.0000
0	0	1	0	-2	15.387	-0.4144	0.0000	-0.4145	0.0000	0.0001	0.0000
1	0	0	0	2	14.797	-0.6150	0.0000	-0.6149	0.0000	0.0001	0.0000
0	0	0	0	2	14.765	6.0433	0.0000	6.0432	0.0000	0.0001	0.0000
1	0	0	0	-2	14.733	-0.4583	0.0000	-0.4584	0.0000	0.0001	0.0000
2	-2	0	2	2	14.632	0.1246	0.0000			0.1246	0.0000
2	0	-1	2	0	14.192	-0.6943	0.0000	-0.6944	0.0000	0.0001	0.0000
1	2	0	0	0	13.805	0.2129	0.0000	0.2129	0.0000	0.0000	0.0000
0	2	0	0	0	13.777	2.7883	0.0000	2.7883	0.0000	0.0000	0.0000
1	-2	0	0	0	13.749	-0.2124	0.0000	-0.2125	0.0000	0.0001	0.0000
2	0	0	2	0	13.661	-17.4257	0.0000	-0.0007	0.0000	17.4250	0.0000
2	0	0	2	0	13.661	-204.1568	0.0000			204.1568	0.0000
1	0	0	2	0	13.633	-37.8699	0.0000	-37.8530	0.0000	0.0169	0.0000
0	0	0	2	0	13.606	2.4678	0.0000	2.4684	0.0000	0.0006	0.0000
2	0	1	2	0	13.168	0.7366	0.0000	0.7367	0.0000	0.0001	0.0000
2	2	0	2	-2	12.811	0.5752	0.0000			0.5752	0.0000
0	1	0	0	-4	10.085	-0.1275	0.0000	-0.1276	0.0000	0.0001	0.0000
2	-1	-1	2	2	9.814	-0.2461	0.0000			0.2461	0.0000
0	1	0	0	2	9.614	0.6276	0.0000	0.6276	0.0000	0.0000	0.0000

Tabla 12.19: Serie total de nutación en longitud (efectos lunisolar de primer y segundo orden y del  $J_3$ , ángulos en el plano de figura). Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados REN2000 (términos con  $\max\{|A_s|, |A_c|\} \geq 0.1$  mas).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

2	-1	0	2	2	9.557	-0.6544	0.0000	-5.8462	0.0000	5.1918	0.0000
2	-1	0	2	2	9.557	-5.1939	0.0000			5.1939	0.0000
1	-1	0	2	2	9.543	-1.0064	0.0000	-1.0058	0.0000	0.0006	0.0000
2	1	-1	2	0	9.367	-0.2823	0.0000	-0.2822	0.0000	0.0001	0.0000
2	0	0	2	1	9.340	0.1628	0.0000	0.1628	0.0000	0.0000	0.0000
0	3	0	0	0	9.185	0.1503	0.0000	0.1503	0.0000	0.0000	0.0000
2	1	0	2	0	9.133	-29.5954	0.0000			29.5954	0.0000
1	1	0	2	0	9.121	-5.0979	0.0000	-5.0948	0.0000	0.0031	0.0000
0	1	0	2	0	9.108	0.3189	0.0000	0.3186	0.0000	0.0003	0.0000
2	-1	0	4	0	9.057	0.1126	0.0000	0.1125	0.0000	0.0001	0.0000
2	1	1	2	0	8.910	0.2437	0.0000	0.2436	0.0000	0.0001	0.0000
2	-2	0	2	4	7.349	-0.1199	0.0000	-0.1198	0.0000	0.0001	0.0000
2	0	-1	2	2	7.236	-0.2231	0.0000			0.2231	0.0000
2	0	0	2	2	7.096	-3.8142	0.0000	-3.8123	0.0000	0.0019	0.0000
1	0	0	2	2	7.088	-0.6612	0.0000	-0.6608	0.0000	0.0004	0.0000
2	2	0	2	0	6.859	-3.0736	0.0000	-3.0720	0.0000	0.0016	0.0000
1	2	0	2	0	6.852	-0.5334	0.0000	-0.5330	0.0000	0.0004	0.0000
2	-1	0	2	4	5.802	-0.1515	0.0000	-0.1514	0.0000	0.0001	0.0000
2	1	0	2	2	5.643	-0.7670	0.0000	-0.7664	0.0000	0.0006	0.0000
1	1	0	2	2	5.638	-0.1337	0.0000	-0.1336	0.0000	0.0001	0.0000
2	3	0	2	0	5.492	-0.2899	0.0000	-0.2896	0.0000	0.0003	0.0000
2	2	0	2	2	4.684	-0.1105	0.0000	-0.1104	0.0000	0.0001	0.0000

Tabla 12.20: Serie total de nutación en oblicuidad (efectos lunisolar de primer y segundo orden y del  $J_3$ , ángulos en el plano de figura). Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados REN2000 (términos con  $\max\{|A_s|, |A_c|\} \geq 0.1$  mas).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$(\Delta\epsilon)_s$	$(\Delta\epsilon)_c$	$(\Delta\epsilon_R)_s$	$(\Delta\epsilon_R)_c$	$ \delta(\Delta\epsilon) _s$	$ \delta(\Delta\epsilon) _c$
						(mas)	(mas)	(mas)	(mas)	(mas)	(mas)
1	0	0	0	0	6798.384	0.0000	9227.7984	-0.0031	9227.9100	0.0031	0.1116
2	0	0	0	0	3399.192	0.0000	-90.3487	0.0032	-90.3369	0.0032	0.0118
2	-2	0	2	0	1615.748	0.0000	0.1300	0.0000	0.1301	0.0000	0.0001
1	-2	0	2	0	1305.479	0.0000	-2.4057	0.0000	-2.4057	0.0000	0.0000
1	0	1	0	0	385.998	0.0000	0.7852	0.0000	0.7893	0.0000	0.0041
0	0	1	0	0	365.260	0.0000	-0.1367	0.0000	-0.1349	0.0000	0.0018
2	0	-1	2	-2	365.225	0.0000	-9.2370	0.0000	-9.2356	0.0000	0.0014
1	0	-1	0	0	346.636	0.0000	0.5288	0.0000	0.5232	0.0000	0.0056
1	0	-1	2	-2	346.604	0.0000	0.2597	0.0000	0.2575	0.0000	0.0022
1	2	0	0	-2	212.323	0.0000	-0.2121	0.0000	-0.2120	0.0000	0.0001
1	-2	0	0	2	199.840	0.0000	0.2802	0.0000	0.2801	0.0000	0.0001
2	0	0	2	-2	182.621	0.0000	553.3611	0.0000	553.3348	0.0000	0.0263
1	0	0	2	-2	177.844	0.0000	-6.7868	0.0000	-6.6322	0.0000	0.1546
2	0	1	2	-2	121.749	0.0000	21.6201	0.0000	21.6199	0.0000	0.0002
1	0	1	2	-2	119.607	0.0000	-0.1896	0.0000	-0.1826	0.0000	0.0070
2	0	2	2	-2	91.313	0.0000	0.6587	0.0000	0.6593	0.0000	0.0006
1	-1	0	2	-2	32.606	0.0000	0.1014	0.0000	0.1014	0.0000	0.0000
1	-1	0	0	2	31.961	0.0000	-0.7695	0.0000	-0.7688	0.0000	0.0007
0	1	0	0	-2	31.812	0.0000	-0.1865	0.0000	-0.1859	0.0000	0.0006
1	1	0	0	-2	31.664	0.0000	0.6575	0.0000	0.6567	0.0000	0.0008
1	1	0	0	0	27.667	0.0000	-3.1961	0.0000	-3.1946	0.0000	0.0015
0	1	0	0	0	27.555	0.0000	-0.9757	0.0000	-0.9725	0.0000	0.0032
1	-1	0	0	0	27.443	0.0000	2.9685	0.0000	2.9675	0.0000	0.0010
2	-1	0	2	0	27.093	0.0000	-5.1371	0.0000	-5.1365	0.0000	0.0006
1	-1	0	2	0	26.985	0.0000	-1.0335	0.0000	-0.0003	0.0000	1.0332
2	1	0	2	-2	23.942	0.0000	-1.1900			0.0000	1.1900
1	1	0	2	-2	23.858	0.0000	-0.2929	0.0000	-0.2930	0.0000	0.0001
1	0	0	0	2	14.797	0.0000	0.3161	0.0000	0.3161	0.0000	0.0000
0	0	0	0	2	14.765	0.0000	-0.1638	0.0000	-0.1611	0.0000	0.0027
1	0	0	0	-2	14.733	0.0000	0.2555	0.0000	0.2556	0.0000	0.0001
2	0	-1	2	0	14.192	0.0000	0.2978	0.0000	0.2977	0.0000	0.0001
1	2	0	0	0	13.805	0.0000	-0.1093	0.0000	-0.1092	0.0000	0.0001
1	-2	0	0	0	13.749	0.0000	0.1190	0.0000	0.1189	0.0000	0.0001
2	0	0	2	0	13.661	0.0000	94.9485	0.0000	94.9211	0.0000	0.0274
1	0	0	2	0	13.633	0.0000	19.3941	0.0000	19.4127	0.0000	0.0186
2	0	1	2	0	13.168	0.0000	-0.3156	0.0000	-0.3155	0.0000	0.0001
2	2	0	2	-2	12.811	0.0000	-0.2688	0.0000	-0.2688	0.0000	0.0000
2	-1	-1	2	2	9.814	0.0000	0.1179			0.0000	0.1179
2	-1	0	2	2	9.557	0.0000	2.4947	0.0000	2.4938	0.0000	0.0009
1	-1	0	2	2	9.543	0.0000	0.5074	0.0000	0.5078	0.0000	0.0004
2	1	-1	2	0	9.367	0.0000	0.1204	0.0000	0.1203	0.0000	0.0001
2	1	0	2	0	9.133	0.0000	12.6154			0.0000	12.6154

Tabla 12.20: Serie total de nutación en oblicuidad (efectos lunisolar de primer y segundo orden y del  $J_3$ , ángulos en el plano de figura). Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados REN2000 (términos con  $\max\{|A_s|, |A_c|\} \geq 0.1$  mas).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

1	1	0	2	0	9.121	0.0000	2.5641	0.0000	2.5660	0.0000	0.0019
2	1	1	2	0	8.910	0.0000	-0.1039	0.0000	-0.1038	0.0000	0.0001
2	0	-1	2	2	7.236	0.0000	0.1110	0.0000	0.0000	0.0000	0.1110
2	0	0	2	2	7.096	0.0000	1.6189	0.0000	1.6182	0.0000	0.0007
1	0	0	2	2	7.088	0.0000	0.3278	0.0000	0.3282	0.0000	0.0004
2	2	0	2	0	6.859	0.0000	1.3038	0.0000	1.3031	0.0000	0.0007
1	2	0	2	0	6.852	0.0000	0.2638	0.0000	0.2639	0.0000	0.0001
2	1	0	2	2	5.643	0.0000	0.3240	0.0000	0.3238	0.0000	0.0002
2	3	0	2	0	5.492	0.0000	0.1223	0.0000	0.1222	0.0000	0.0001

### 12.3.2 Efecto de segundo orden

En una primera aproximación, en el desarrollo de la teoría hasta segundo orden, hemos llevado a cabo la aproximación  $J \approx 0$ , como hicieron Kinoshita y Souchay (1990), de manera que desaparece la dependencia respecto de  $g$  de la expresión desarrollada del potencial en las variables de Delaunay. En las tablas 12.21 y 12.22 comparamos los valores obtenidos por Kinoshita y Souchay con los nuestros (siguiendo el mismo procedimiento). Como comprobaremos más adelante, de esta forma se desprecian contribuciones importantes.

Tabla 12.21: Efecto lunisolar de segundo orden. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i A_i \sin(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Solo términos con  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$\Delta\psi$	$\Delta\psi_{\text{Kino}}$	$ \Delta\psi - \Delta\psi_{\text{Kino}} $
1	0	0	0	0	-6798.384	28.760	28.800	0.040
2	0	0	0	0	-3399.192	1220.587	1220.600	0.013
3	0	0	0	0	-2266.128	-21.452	-21.600	0.148
4	0	0	0	0	-1699.596	0.115	0.100	0.015
2	-2	0	2	0	1615.748	-0.315	-0.300	0.015
0	2	0	-2	0	-1095.175	0.174	0.200	0.026
2	0	1	0	0	409.234	0.204	0.200	0.004
1	0	1	0	0	385.998	-1.982	-1.000	0.982
3	0	-1	2	-2	385.959	-1.949	-1.900	0.049
0	0	1	0	0	365.260	-1.013	-1.000	0.013
2	0	-1	2	-2	365.225	3.038	1.500	1.538
1	0	-1	0	0	-346.636	2.870	1.400	1.470
1	0	-1	2	-2	346.604	1.510	1.500	0.010
4	0	0	2	-2	192.989	-1.401	-1.400	0.001



Tabla 12.21: **Efecto lunisolar de segundo orden.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i A_i \sin(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Solo términos con  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

3	0	0	2	-2	187.662	117.787	117.700	0.087
2	0	0	2	-2	182.621	-1.601	-1.700	0.099
1	0	0	2	-2	177.844	-92.954	-92.800	0.154
0	0	0	2	-2	173.310	0.367	0.400	0.033
3	0	1	2	-2	123.969	4.615	4.600	0.015
2	0	1	2	-2	121.749	-1.131	-0.600	0.531
4	0	-1	4	-4	121.745	-0.143	-0.100	0.043
1	0	1	2	-2	119.607	-3.636	-3.600	0.036
3	0	2	2	-2	92.556	0.141		0.141
4	0	0	4	-4	91.311	4.275	4.300	0.025
1	0	2	2	-2	90.103	-0.111		0.111
4	0	1	4	-4	73.049	0.333	0.300	0.033
2	-1	0	0	2	32.112	-0.197	-0.100	0.097
1	-1	0	0	2	31.961	-0.146	-0.200	0.054
1	1	0	0	-2	-31.664	0.154	0.200	0.046
2	1	0	0	-2	-31.517	0.176	0.100	0.076
2	1	0	0	0	27.780	-0.816	-0.800	0.016
1	1	0	0	0	27.667	-0.665	-0.600	0.065
0	1	0	0	0	27.555	-0.730	-0.800	0.070
1	-1	0	0	0	-27.443	0.676	-0.700	1.376
2	-1	0	0	0	-27.333	0.799	-0.800	1.599
3	-1	0	2	0	27.201	-1.074	-1.100	0.026
2	-1	0	2	0	27.093	-0.157	-0.300	0.143
1	-1	0	2	0	26.985	0.864	0.800	0.064
0	1	0	-2	0	-26.878	0.118		0.118
3	1	0	2	-2	24.027	-0.295	-0.300	0.005
2	1	0	2	-2	23.942	-0.136	-0.100	0.036
1	1	0	2	-2	23.858	0.182	0.100	0.082
0	0	0	0	2	14.765	-1.330	-1.300	0.030
2	0	-1	2	0	14.192	0.268		0.268
4	0	0	2	0	13.716	-0.225	-0.200	0.025
3	0	0	2	0	13.688	19.032	19.000	0.032
2	0	0	2	0	13.661	4.852	4.800	0.052
1	0	0	2	0	13.633	-15.136	-15.200	0.064
0	0	0	2	0	13.606	2.144	2.100	0.044
2	0	1	2	0	13.168	-0.252		0.252
4	0	0	4	-2	12.710	1.376	1.400	0.024
3	0	0	4	-2	12.686	0.282	0.300	0.018
0	1	0	0	2	9.614	-0.160	0.200	0.361
3	-1	0	2	2	9.570	0.483	0.600	0.117
2	-1	0	2	2	9.557	0.114		0.114
1	-1	0	2	2	9.543	-0.387	-0.300	0.087
3	1	0	2	0	9.145	2.430	2.400	0.030
2	1	0	2	0	9.133	0.572	0.600	0.028

Tabla 12.21: **Efecto lunisolar de segundo orden.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i A_i \sin(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Solo términos con  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

1	1	0	2	0	9.121	-1.947	-1.900	0.046
0	1	0	2	0	9.108	0.275		0.275
4	1	0	4	-2	8.698	0.173	0.200	0.027
3	0	0	2	2	7.103	0.303	0.300	0.003
1	0	0	2	2	7.088	-0.242	-0.200	0.042
3	2	0	2	0	6.866	0.241	0.300	0.059
1	2	0	2	0	6.852	-0.194	-0.200	0.006
4	0	0	4	0	6.830	0.131	0.100	0.031

Tabla 12.22: **Efecto lunisolar de segundo orden.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i A_i \cos(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Solo términos con  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$\Delta\epsilon$	$\Delta\epsilon_{\text{Kino}}$	$ \Delta\epsilon - \Delta\epsilon_{\text{Kino}} $
2	0	-2	2	-2	3823418.489	-59.245		59.245
1	0	0	0	0	-6798.384	-27.691	-27.700	0.009
2	0	0	0	0	-3399.192	-238.910	-238.100	0.810
3	0	0	0	0	-2266.128	3.791	4.200	0.409
1	0	1	0	0	385.998	-0.329	-0.400	0.071
3	0	-1	2	-2	385.959	0.282	0.500	0.218
0	0	1	0	0	365.260	0.156	0.200	0.044
2	0	-1	2	-2	365.225	-1.364	-1.700	0.336
1	0	-1	0	0	-346.636	-0.292	-0.200	0.092
1	0	-1	2	-2	346.604	-1.188	-0.800	0.387
4	0	0	2	-2	192.989	0.278	0.300	0.022
3	0	0	2	-2	187.662	-17.334	-17.300	0.034
2	0	0	2	-2	182.621	0.271	0.300	0.029
1	0	0	2	-2	177.844	73.389	73.100	0.289
0	0	0	2	-2	173.310	-1.052	-1.000	0.052
3	0	1	2	-2	123.969	-0.683	-1.000	0.317
2	0	1	2	-2	121.749	0.448	0.200	0.248
1	0	1	2	-2	119.607	2.878	3.800	0.922
4	0	0	4	-4	91.311	-0.847	-0.800	0.047
2	1	0	0	0	27.780	0.161	0.200	0.039
2	-1	0	0	0	-27.333	-0.157	-0.200	0.043
3	-1	0	2	0	27.201	0.162	0.300	0.138
1	-1	0	2	0	26.985	-0.683	-0.400	0.283
1	1	0	2	-2	23.858	-0.148		0.148
0	0	0	0	2	14.765	0.839	0.800	0.039

Tabla 12.22: **Efecto lunisolar de segundo orden.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i A_i \cos(i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D)$ .  $A$  viene dada en  $\mu\text{as}$ . Solo términos con  $|A| \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

2	0	-1	2	0	14.192	-0.113		0.113
3	0	0	2	0	13.688	-2.847	-2.800	0.047
2	0	0	2	0	13.661	-0.948	-0.900	0.048
1	0	0	2	0	13.633	12.017	12.000	0.017
0	0	0	2	0	13.606	0.458	0.500	0.042
2	0	1	2	0	13.168	0.105		0.105
4	0	0	4	-2	12.710	-0.273	-0.300	0.027
0	1	0	0	2	9.614	0.107	0.100	0.007
1	-1	0	2	2	9.543	0.307	0.200	0.107
0	0	0	0	0	9.354	303.769		303.769
3	1	0	2	0	9.145	-0.364	-0.600	0.237
2	1	0	2	0	9.133	-0.106	-0.100	0.006
1	1	0	2	0	9.121	1.544	1.500	0.044
1	0	0	2	2	7.088	0.192	0.100	0.092
1	2	0	2	0	6.852	0.154	0.100	0.054

En las dos tablas siguientes se muestra la diferencia que produce la aproximación  $J \approx 0$  en los resultados. Estas diferencias llegan a ser en ocasiones del orden de  $50 \mu\text{as}$ .

Tabla 12.23: **Efecto de segundo orden.** Comparación de las series de nutación en longitud,  $\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A_{J \neq 0}$ ( $\mu\text{as}$ )	$A_{J=0}$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta A $ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	83.392	28.760	54.632
2	0	0	0	0	-3399.192	1220.934	1220.587	0.347
3	0	0	0	0	-2266.128	-22.462	-21.452	1.010
4	0	0	0	0	-1699.596	0.115	0.115	0.000
2	-2	0	2	0	1615.748	-0.940	-0.315	0.625
2	0	1	0	0	409.234	0.452	0.204	0.248
1	0	1	0	0	385.998	11.612	-1.982	13.595
3	0	-1	2	-2	385.959	-0.744	-1.949	1.205
0	0	1	0	0	365.260	-3.086	-1.013	2.074
2	0	-1	2	-2	365.225	7.160	3.038	4.123
1	0	-1	0	0	-346.636	-8.063	2.870	10.933
1	0	-1	2	-2	346.604	2.641	1.510	1.130
1	-2	0	0	2	-199.840	0.115	0.049	0.066
2	-2	0	0	2	-194.133	0.109	0.072	0.037
4	0	0	2	-2	192.989	-1.401	-1.401	0.000
3	0	0	2	-2	187.662	59.279	117.787	58.507
2	0	0	2	-2	182.621	-1.718	-1.601	0.117

Tabla 12.23: **Efecto de segundo orden.** Comparación de las series de nutación en longitud,  $\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

1	0	0	2	-2	177.844	-156.682	-92.954	63.728
0	0	0	2	-2	173.310	-2.431	0.367	2.798
3	0	1	2	-2	123.969	3.118	4.615	1.497
2	0	1	2	-2	121.749	-1.612	-1.131	0.481
4	0	-1	4	-4	121.745	-0.143	-0.143	0.000
1	0	1	2	-2	119.607	-6.853	-3.636	3.216
3	0	2	2	-2	92.556	0.163	0.141	0.023
4	0	0	4	-4	91.311	4.275	4.275	0.000
4	0	1	4	-4	73.049	0.333	0.333	0.000
2	1	0	2	-4	-38.522	-0.305	-0.003	0.302
2	-1	0	2	-2	-32.451	-0.527	-0.002	0.525
2	-1	0	0	2	32.112	-0.190	-0.197	0.007
1	-1	0	0	2	31.961	0.578	-0.146	0.724
0	1	0	0	-2	-31.812	0.325	0.087	0.238
1	1	0	0	-2	-31.664	-0.586	0.154	0.740
2	1	0	0	-2	-31.517	0.168	0.176	0.009
2	1	0	0	0	27.780	-1.064	-0.816	0.248
1	1	0	0	0	27.667	2.599	-0.665	3.264
0	1	0	0	0	27.555	-2.704	-0.730	1.973
1	-1	0	0	0	-27.443	-2.546	0.676	3.222
2	-1	0	0	0	-27.333	1.040	0.799	0.241
3	-1	0	2	0	27.201	-0.745	-1.074	0.329
1	-1	0	2	0	26.985	1.675	0.864	0.811
0	1	0	-2	0	-26.878	1.077	0.118	0.959
3	1	0	2	-2	24.027	-0.127	-0.295	0.168
2	1	0	2	-2	23.942	0.160	-0.136	0.296
1	1	0	2	-2	23.858	0.286	0.182	0.104
2	0	0	2	-4	-16.064	-0.157	0.003	0.160
0	0	1	0	-2	-15.387	0.180		0.180
2	0	0	0	2	14.830	0.101	0.078	0.024
1	0	0	0	2	14.797	0.161	-0.050	0.211
0	0	0	0	2	14.765	-5.319	-1.330	3.989
1	0	0	0	-2	-14.733	-0.116	-0.030	0.085
2	0	0	0	-2	-14.701	0.111	0.071	0.041
0	0	1	0	2	14.192	0.135	0.268	0.133
2	0	-1	2	0	14.192	0.498		0.498
4	0	0	2	0	13.716	-0.225	-0.225	0.000
3	0	0	2	0	13.688	10.069	19.032	8.963
2	0	0	2	0	13.661	5.136	4.852	0.284
1	0	0	2	0	13.633	-25.782	-15.136	10.646
0	0	0	2	0	13.606	8.588	2.144	6.444
2	0	1	2	0	13.168	-0.448	-0.252	0.196
1	2	0	2	-2	12.787	0.113	0.042	0.072
4	0	0	4	-2	12.710	1.376	-0.002	1.378
3	0	0	4	-2	12.686	0.356		0.356
0	1	0	0	2	9.614	-0.651	-0.160	0.490

Tabla 12.23: **Efecto de segundo orden.** Comparación de las series de nutación en longitud,  $\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 \sum_i A_i \sin \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

3	-1	0	2	2	9.570	0.255	0.483	0.228
2	-1	0	2	2	9.557	0.116	0.114	0.002
1	-1	0	2	2	9.543	-0.661	-0.387	0.274
0	1	0	-2	-2	-9.530	-0.451	-0.055	0.395
3	1	0	2	0	9.145	1.284	2.430	1.146
2	1	0	2	0	9.133	0.580	0.572	0.008
1	1	0	2	0	9.121	-3.323	-1.947	1.377
0	1	0	2	0	9.108	1.102	0.275	0.827
4	1	0	4	-2	8.698	0.173	0.173	0.000
3	0	0	2	2	7.103	0.184	0.303	0.119
1	0	0	2	2	7.088	-0.437	-0.242	0.195
0	0	0	2	2	7.081	0.316	0.034	0.282
3	2	0	2	0	6.866	0.165	0.241	0.076
1	2	0	2	0	6.852	-0.369	-0.194	0.175
0	2	0	2	0	6.846	0.247	0.028	0.220
4	0	0	4	0	6.830	0.131	0.131	0.000

Tabla 12.24: **Efecto de segundo orden.** Comparación de las series de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_1 + \Delta\epsilon_2 + \Delta\epsilon_3 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

$\Omega$	$l_M$	$l_S$	$F$	$D$	$P$ (días)	$A_{J \neq 0}$ ( $\mu\text{as}$ )	$A_{J=0}$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta A $ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	0	0	0	-6798.384	-82.320	-27.691	54.629
2	0	0	0	0	-3399.192	-238.084	-238.910	0.826
3	0	0	0	0	-2266.128	3.776	3.791	0.015
2	-2	0	2	0	1615.748	0.175	-0.023	0.197
0	2	0	-2	0	-1095.175	-0.418	-0.079	0.339
2	0	1	0	0	409.234	-0.171	-0.027	0.144
1	0	1	0	0	385.998	-3.806	-0.329	3.477
3	0	-1	2	-2	385.959	-0.616	0.282	0.898
0	0	1	0	0	365.260	0.493	0.156	0.337
2	0	-1	2	-2	365.225	-2.938	-1.364	1.574
1	0	-1	0	0	-346.636	1.946	-0.292	2.238
1	0	-1	2	-2	346.604	-4.621	-1.188	3.434
4	0	0	2	-2	192.989	0.278	0.278	0.001
3	0	0	2	-2	187.662	2.285	-17.334	19.619
2	0	0	2	-2	182.621	0.306	0.271	0.035
1	0	0	2	-2	177.844	199.256	73.389	125.867
0	0	0	2	-2	173.310	-2.718	-1.052	1.666
3	0	1	2	-2	123.969	-0.172	-0.683	0.512
2	0	1	2	-2	121.749	0.934	0.448	0.486
1	0	1	2	-2	119.607	7.891	2.878	5.013
0	0	1	2	-2	117.539	-0.108	-0.039	0.069
4	0	0	4	-4	91.311	-0.847	-0.847	0.000
1	0	2	2	-2	90.103	0.150	0.088	0.062
2	1	0	2	-4	-38.522	0.151	0.009	0.143
1	-1	0	0	2	31.961	-0.167	0.003	0.170
0	1	0	0	-2	-31.812	-0.112	-0.047	0.065
1	1	0	0	-2	-31.664	0.163	-0.009	0.172
2	1	0	0	0	27.780	0.231	0.161	0.070
1	1	0	0	0	27.667	-0.731	0.013	0.744
1	-1	0	0	0	-27.443	0.727	-0.018	0.745
2	-1	0	0	0	-27.333	-0.224	-0.157	0.067
1	-1	0	2	0	26.985	-1.890	-0.683	1.207
1	1	0	2	-2	23.858	-0.361	-0.148	0.213
0	0	0	0	2	14.765	1.991	0.839	1.152
1	0	0	0	-2	-14.733	0.129	0.029	0.100
2	0	-1	2	0	14.192	-0.237	-0.113	0.124
1	0	-1	2	0	14.162	0.114		0.114
3	0	0	2	0	13.688	0.184	-2.847	3.031
2	0	0	2	0	13.661	-1.071	-0.948	0.123
1	0	0	2	0	13.633	32.594	12.017	20.578
0	0	0	2	0	13.606	1.811	0.458	1.353
2	0	1	2	0	13.168	0.221	0.105	0.116

Tabla 12.24: **Efecto de segundo orden.** Comparación de las series de nutación en oblicuidad,  $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_1 + \Delta\epsilon_2 + \Delta\epsilon_3 = \sum_i A_i \cos \Theta_i$ , con  $\Theta_i = i_1\Omega + i_2l_M + i_3l_S + i_4F + i_5D$ .

1	0	1	2	0	13.143	-0.119	-0.020	0.099
1	2	0	2	-2	12.787	-0.140	-0.033	0.106
4	0	0	4	-2	12.710	-0.273		0.273
0	1	0	0	2	9.614	0.244	0.107	0.137
1	-1	0	2	2	9.543	0.833	0.307	0.526
1	1	0	2	0	9.121	4.184	1.544	2.641
0	1	0	2	0	9.108	0.233	0.059	0.174
1	0	0	2	2	7.088	0.526	0.192	0.334
1	2	0	2	0	6.852	0.422	0.154	0.268

### 12.3.3 Perturbaciones planetarias directas

En esta sección comparamos el efecto directo de algunos planetas con los incluidos en la solución REN2000. Las influencias de cada planeta (Venus, Júpiter y Saturno) se analizan separadamente para facilitar la edición de las tablas.

Tabla 12.25: **Efecto directo de Venus.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1L_{Ve} + i_2L_E + i_3L_{Ma} + i_4h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$h$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_{\sin}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi)_{\cos}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_s$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_c$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _s$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _c$ ( $\mu\text{as}$ )
3	-5	0	1	-2958.279	-10.7690	-45.4656	-10.2000	-43.0000	0.5690	2.4656
3	-5	0	2	-2957.349	220.4782	0.0000	215.0000	0.0000	5.4782	0.0000
5	-8	0	2	2863.894	1.1179	-1.2608	1.1000	-26.8000	0.0179	25.5392
5	-8	0	1	2863.023	-0.2605	-0.1399	-5.7000	1.1000	5.4395	1.2399
2	-3	0	2	1455.386	0.6376	0.7191	-0.5000	-1.1000	1.1376	1.8191
2	-3	0	1	1455.161	0.0000	-0.4463	-1.8000	-0.3000	1.8000	0.1463
1	-2	0	0	-975.378	0.8238	-0.9290	0.0000	-8.7000	0.8238	7.7710
1	-2	0	1	-975.277	0.0000	0.3009	0.7000	0.0000	0.7000	0.3009
1	-2	0	2	-975.176	-0.3187	-0.3594	0.3000	0.0000	0.6187	0.3594
4	-7	0	2	-733.469	-0.3228	0.3640	-0.3000	6.6000	0.0228	6.2360
4	-6	0	2	727.580	-51.8930	0.0000	-50.4000	0.0000	1.4930	0.0000
4	-6	0	1	727.524	2.3348	9.8574	2.2000	9.3000	0.1348	0.5574
1	-1	0	1	583.958	-2.3314	9.8428	-2.2000	9.5000	0.1314	0.3428
1	-1	0	0	583.921	87.9106	0.0000	84.6000	0.0000	3.3106	0.0000
1	-1	0	-1	583.885	-1.5817	-6.6778	-1.5000	-6.4000	0.0817	0.2778
2	-4	0	1	-487.664	-1.9564	-8.2597	-1.9000	-7.9000	0.0564	0.3597
2	-4	0	2	-487.638	35.6747	0.0000	34.9000	0.0000	0.7747	0.0000
6	-9	0	2	485.029	0.1639	-0.1848	0.0000	-4.5000	0.1639	4.3152
3	-4	0	2	416.725	0.2054	0.2317	0.0000	-0.5000	0.2054	0.7317
3	-4	0	1	416.707	0.0000	-0.1205	-0.7000	0.0000	0.7000	0.1205
3	-4	0	0	416.688	-0.2241	0.2527	0.0000	3.9000	0.2241	3.6473
0	1	0	0	365.256	-0.3705	-0.4179	0.0000	-2.7000	0.3705	2.2821
0	1	0	-1	365.242	0.0000	0.1051			0.0000	0.1051
3	-6	0	2	-325.103	-0.1562	0.1762	0.0000	2.6000	0.1562	2.4238
5	-7	0	2	323.941	-21.1586	0.0000	-20.5000	0.0000	0.6586	0.0000

Tabla 12.25: **Efecto directo de Venus.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

5	-7	0	1	323.930	0.8963	3.7840	0.8000	3.5000	0.0963	0.2840
2	-2	0	1	291.970	-1.2496	5.2756	-1.2000	5.1000	0.0496	0.1756
2	-2	0	0	291.961	36.5948	0.0000	35.0000	0.0000	1.5948	0.0000
2	-2	0	-1	291.952	-0.6255	-2.6409	-0.6000	-2.5000	0.0255	0.1409
1	-3	0	1	-265.735	-1.1306	-4.7733	-1.1000	-4.6000	0.0306	0.1733
1	-3	0	2	-265.727	17.2776	0.0000	16.9000	0.0000	0.3776	0.0000
4	-5	0	2	243.178	0.1222	0.1378	0.0000	-0.4000	0.1222	0.5378
4	-5	0	0	243.165	-0.1019	0.1149	0.0000	2.1000	0.1019	1.9851
1	0	0	0	224.701	-0.2568	-0.2896	0.0000	-1.2000	0.2568	0.9104
2	-5	0	2	-208.834	-0.1049	0.1183	0.0000	1.4000	0.1049	1.2817
6	-8	0	2	208.353	-12.0703	0.0000	-11.7000	0.0000	0.3703	0.0000
6	-8	0	1	208.349	0.4884	2.0620	0.5000	1.9000	0.0116	0.1620
3	-3	0	1	194.644	-0.8281	3.4963	-0.8000	3.4000	0.0281	0.0963
3	-3	0	0	194.640	19.6632	0.0000	18.7000	0.0000	0.9632	0.0000
3	-3	0	-1	194.636	-0.3251	-1.3725	-0.3000	-1.3000	0.0251	0.0725
0	2	0	-1	182.625	0.7816	-3.2998	0.7000	-3.2000	0.0816	0.0998
0	2	0	-2	182.621	-8.8564	0.0000	-8.6000	0.0000	0.2564	0.0000
2	-1	0	0	162.261	-0.1646	-0.1856	0.0000	-0.6000	0.1646	0.4144
7	-9	0	2	153.560	-7.6998	0.0000	-7.4000	0.0000	0.2998	0.0000
7	-9	0	1	153.558	0.3008	1.2699	0.3000	1.2000	0.0008	0.0699
4	-4	0	1	145.983	-0.5857	2.4726	-0.6000	2.4000	0.0143	0.0726
4	-4	0	0	145.980	11.6514	0.0000	11.0000	0.0000	0.6514	0.0000
4	-4	0	-1	145.978	-0.1880	-0.7937	0.0000	-0.7000	0.1880	0.0937
1	1	0	-1	139.115	0.5554	-2.3448	0.5000	-2.3000	0.0554	0.0448
1	1	0	-2	139.113	-3.4907	0.0000	-3.4000	0.0000	0.0907	0.0000
3	-2	0	0	126.976	-0.1072	-0.1209	0.0000	-0.3000	0.1072	0.1791
8	-10	0	2	121.586	-5.1757	0.0000	-5.0000	0.0000	0.1757	0.0000
8	-10	0	1	121.584	0.1969	0.8314	0.0000	0.7000	0.1969	0.1314
5	-5	0	1	116.786	-0.4251	1.7949	-0.4000	1.7000	0.0251	0.0949
5	-5	0	0	116.784	7.2647	0.0000	6.8000	0.0000	0.4647	0.0000
5	-5	0	-1	116.783	-0.1149	-0.4850	0.0000	-0.4000	0.1149	0.0850
2	0	0	-1	112.349	0.3765	-1.5897	0.4000	-1.5000	0.0235	0.0897
2	0	0	-2	112.348	-1.7306	0.0000	-1.6000	0.0000	0.1306	0.0000
9	-11	0	2	100.632	-3.5800	0.0000	-3.4000	0.0000	0.1800	0.0000
9	-11	0	1	100.631	0.1338	0.5649	0.0000	0.5000	0.1338	0.0649
6	-6	0	1	97.321	-0.3123	1.3186	-0.3000	1.3000	0.0123	0.0186
6	-6	0	0	97.320	4.6717	0.0000	4.4000	0.0000	0.2717	0.0000
6	-6	0	-1	97.319	-0.0724	-0.3055	0.0000	-0.3000	0.0724	0.0055
3	-1	0	-1	94.221	0.2552	-1.0776	0.0000	-1.0000	0.2552	0.0776
3	-1	0	-2	94.220	-0.9341	0.0000	-0.9000	0.0000	0.0341	0.0000
10	-12	0	2	85.839	-2.5187	0.0000	-2.4000	0.0000	0.1187	0.0000
10	-12	0	1	85.838	0.0934	0.3943	0.0000	0.3000	0.0934	0.0943
7	-7	0	1	83.418	-0.2308	0.9745	0.0000	0.9000	0.2308	0.0745
7	-7	0	0	83.417	3.0668	0.0000	2.8000	0.0000	0.2668	0.0000
7	-7	0	-1	83.417	-0.0462	-0.1951			0.0462	0.1951
4	-2	0	-1	81.130	0.1738	-0.7339			0.1738	0.7339
4	-2	0	-2	81.129	-0.5290	0.0000	-0.5000	0.0000	0.0290	0.0000
11	-13	0	2	74.837	-1.7907	0.0000	-1.7000	0.0000	0.0907	0.0000
11	-13	0	1	74.837	0.0668	0.2820			0.0668	0.2820
8	-8	0	1	72.991	-0.1711	0.7224			0.1711	0.7224
8	-8	0	0	72.990	2.0430	0.0000	1.9000	0.0000	0.1430	0.0000
8	-8	0	-1	72.990	-0.0293	-0.1238			0.0293	0.1238
5	-3	0	-1	71.233	0.1190	-0.5023			0.1190	0.5023
5	-3	0	-2	71.232	-0.3076	0.0000	-0.3000	0.0000	0.0076	0.0000
12	-14	0	2	66.335	-1.2812	0.0000	-1.2000	0.0000	0.0812	0.0000
12	-14	0	1	66.335	0.0491	0.2073			0.0491	0.2073
9	-9	0	1	64.881	-0.1271	0.5366			0.1271	0.5366



Tabla 12.25: **Efecto directo de Venus.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

9	-9	0	0	64.880	1.3759	0.0000	1.3000	0.0000	0.0759	0.0000
6	-4	0	-1	63.488	0.0818	-0.3452			0.0818	0.3452
6	-4	0	-2	63.487	-0.1792	0.0000			0.1792	0.0000
13	-15	0	2	59.568	-0.9467	0.0000	-0.9000	0.0000	0.0467	0.0000
13	-15	0	1	59.568	0.0367	0.1551			0.0367	0.1551
10	-10	0	1	58.392	-0.0946	0.3993	0.0000	0.4000	0.0946	0.0007
10	-10	0	0	58.392	0.9345	0.0000	0.8000	0.0000	0.1345	0.0000
7	-5	0	-1	57.262	0.0563	-0.2378			0.0563	0.2378
14	-16	0	2	54.054	-1.8029	0.0000	-0.6000	0.0000	1.2029	0.0000
11	-11	0	1	53.084	-0.0706	0.2980	0.6000	0.0000	0.6706	0.2980
11	-11	0	0	53.084	0.6390	0.0000			0.6390	0.0000
8	-6	0	-1	52.148	0.0388	-0.1637			0.0388	0.1637
12	-12	0	1	48.660	-0.0529	0.2235	0.4000	0.0000	0.4529	0.2235
12	-12	0	0	48.660	0.4393	0.0000			0.4393	0.0000
9	-7	0	-1	47.873	0.0265	-0.1120			0.0265	0.1120
13	-13	0	1	44.917	-0.0401	0.1693	0.3000	0.0000	0.3401	0.1693
13	-13	0	0	44.917	0.3034	0.0000			0.3034	0.0000
14	-14	0	1	41.709	-0.0309	0.1303			0.0309	0.1303
14	-14	0	0	41.709	0.2103	0.0000			0.2103	0.0000
15	-15	0	1	38.928	-0.0240	0.1014			0.0240	0.1014
12	-10	0	-2	38.422	0.1425	0.0000			0.1425	0.0000
13	-11	0	-2	36.050	0.2229	0.0000			0.2229	0.0000
14	-12	0	-2	33.954	0.3367	0.0000			0.3367	0.0000
15	-13	0	-2	32.088	0.4715	0.0000			0.4715	0.0000
16	-14	0	-2	30.417	-0.5307	0.0000			0.5307	0.0000

Tabla 12.26: **Efecto directo de Venus.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$h$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_{\sin}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi)_{\cos}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_s$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_c$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _s$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _c$ ( $\mu\text{as}$ )
3	-5	0	1	-2958.279	24.2746	-5.7497	23.0000	-5.5000	1.2746	0.2497
3	-5	0	2	-2957.349	0.0000	95.5890	0.0000	93.2000	0.0000	2.3890
5	-8	0	2	2863.894	0.5466	0.4847	11.6000	0.5000	11.0534	0.0153
5	-8	0	1	2863.023	0.0747	-0.1391	-0.6000	-3.0000	0.6747	2.8609
2	-3	0	2	1455.386	-0.3118	0.2764	0.5000	-0.2000	0.8118	0.4764
2	-3	0	1	1455.161	0.2383	0.0000	0.2000	-1.0000	0.0383	1.0000
1	-2	0	1	-975.277	-0.1606	0.0000	0.0000	0.4000	0.1606	0.4000
1	-2	0	2	-975.176	0.1558	-0.1382	0.0000	0.1000	0.1558	0.2382
4	-7	0	2	-733.469	-0.1578	-0.1400	-2.9000	-0.1000	2.7422	0.0400
4	-6	0	2	727.580	0.0000	-22.4984	0.0000	-21.9000	0.0000	0.5984
4	-6	0	1	727.524	-5.2630	1.2466	-4.9000	1.2000	0.3630	0.0466
1	-1	0	1	583.958	-5.2552	-1.2447	-5.1000	-1.2000	0.1552	0.0447
1	-1	0	-1	583.885	-3.5653	0.8445	-3.4000	0.8000	0.1653	0.0445
2	-4	0	1	-487.664	4.4100	-1.0445	4.2000	-1.0000	0.2100	0.0445
2	-4	0	2	-487.638	0.0000	15.4669	0.0000	15.1000	0.0000	0.3669
3	-4	0	2	416.725	-0.1004	0.0891	0.2000	0.0000	0.3004	0.0891
5	-7	0	2	323.941	0.0000	-9.1734	0.0000	-8.9000	0.0000	0.2734
5	-7	0	1	323.930	-2.0203	0.4785	-1.9000	0.5000	0.1203	0.0215
2	-2	0	1	291.970	-2.8167	-0.6672	-2.7000	-0.6000	0.1167	0.0672
2	-2	0	-1	291.952	-1.4100	0.3340	-1.3000	0.3000	0.1100	0.0340

Tabla 12.26: **Efecto directo de Venus.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

1	-3	0	1	-265.735	2.5485	-0.6036	2.4000	-0.6000	0.1485	0.0036
1	-3	0	2	-265.727	0.0000	7.4908	0.0000	7.3000	0.0000	0.1908
6	-8	0	2	208.353	0.0000	-5.2331	0.0000	-5.1000	0.0000	0.1331
6	-8	0	1	208.349	-1.1009	0.2608	-1.0000	0.2000	0.1009	0.0608
3	-3	0	1	194.644	-1.8667	-0.4422	-1.8000	-0.4000	0.0667	0.0422
3	-3	0	-1	194.636	-0.7328	0.1736	-0.7000	0.2000	0.0328	0.0264
0	2	0	-1	182.625	-1.7618	-0.4173	-1.7000	-0.4000	0.0618	0.0173
0	2	0	-2	182.621	0.0000	3.8397	0.0000	3.7000	0.0000	0.1397
7	-9	0	2	153.560	0.0000	-3.3383	0.0000	-3.2000	0.0000	0.1383
7	-9	0	1	153.558	-0.6780	0.1606	-0.6000	0.2000	0.0780	0.0394
4	-4	0	1	145.983	-1.3201	-0.3127	-1.3000	-0.3000	0.0201	0.0127
4	-4	0	-1	145.978	-0.4238	0.1004	-0.4000	0.0000	0.0238	0.1004
1	1	0	-1	139.115	-1.2519	-0.2965	-1.2000	-0.3000	0.0519	0.0035
1	1	0	-2	139.113	0.0000	1.5134	0.0000	1.5000	0.0000	0.0134
8	-10	0	2	121.586	0.0000	-2.2440	0.0000	-2.2000	0.0000	0.0440
8	-10	0	1	121.584	-0.4439	0.1051	-0.4000	0.0000	0.0439	0.1051
5	-5	0	1	116.786	-0.9583	-0.2270	-0.9000	-0.2000	0.0583	0.0270
5	-5	0	-1	116.783	-0.2589	0.0613	-0.2000	0.0000	0.0589	0.0613
2	0	0	-1	112.349	-0.8488	-0.2010	-0.8000	-0.2000	0.0488	0.0010
2	0	0	-2	112.348	0.0000	0.7503	0.0000	0.7000	0.0000	0.0503
9	-11	0	2	100.632	0.0000	-1.5521	0.0000	-1.5000	0.0000	0.0521
9	-11	0	1	100.631	-0.3016	0.0714	-0.3000	0.0000	0.0016	0.0714
6	-6	0	1	97.321	-0.7040	-0.1668	-0.7000	-0.2000	0.0040	0.0332
6	-6	0	-1	97.319	-0.1631	0.0386	-0.2000	0.0000	0.0369	0.0386
3	-1	0	-1	94.221	-0.5753	-0.1363	-0.6000	-0.1000	0.0247	0.0363
3	-1	0	-2	94.220	0.0000	0.4050	0.0000	0.4000	0.0000	0.0050
10	-12	0	2	85.839	0.0000	-1.0920	0.0000	-1.0000	0.0000	0.0920
10	-12	0	1	85.838	-0.2105	0.0499	-0.2000	0.0000	0.0105	0.0499
7	-7	0	1	83.418	-0.5203	-0.1232	-0.5000	-0.1000	0.0203	0.0232
7	-7	0	-1	83.417	-0.1042	0.0247			0.1042	0.0247
4	-2	0	-1	81.130	-0.3918	-0.0928	-0.4000	0.0000	0.0082	0.0928
4	-2	0	-2	81.129	0.0000	0.2293	0.0000	0.2000	0.0000	0.0293
11	-13	0	2	74.837	0.0000	-0.7764	0.0000	-0.7000	0.0000	0.0764
11	-13	0	1	74.837	-0.1506	0.0357			0.1506	0.0357
8	-8	0	1	72.991	-0.3857	-0.0914			0.3857	0.0914
5	-3	0	-1	71.233	-0.2682	-0.0635	-0.3000	0.0000	0.0318	0.0635
5	-3	0	-2	71.232	0.0000	0.1333	0.0000	0.1000	0.0000	0.0333
12	-14	0	2	66.335	0.0000	-0.5555	0.0000	-0.5000	0.0000	0.0555
12	-14	0	1	66.335	-0.1107	0.0262			0.1107	0.0262
9	-9	0	1	64.881	-0.2865	-0.0679			0.2865	0.0679
6	-4	0	-1	63.488	-0.1843	-0.0437	-0.2000	0.0000	0.0157	0.0437
13	-15	0	2	59.568	0.0000	-0.4105	0.0000	-0.4000	0.0000	0.0105
10	-10	0	1	58.392	-0.2132	-0.0505	-0.2000	0.0000	0.0132	0.0505
7	-5	0	-1	57.262	-0.1270	-0.0301			0.1270	0.0301
14	-16	0	2	54.054	0.0000	-0.7817	0.0000	-0.3000	0.0000	0.4817
11	-11	0	1	53.084	-0.1591	-0.0377			0.1591	0.0377
12	-12	0	1	48.660	-0.1194	-0.0283			0.1194	0.0283
14	-12	0	-2	33.954	0.0000	-0.1460			0.0000	0.1460
15	-13	0	-2	32.088	0.0000	-0.2044			0.0000	0.2044
16	-14	0	-2	30.417	0.0000	0.2301			0.0000	0.2301

Tabla 12.27: **Efecto directo de Júpiter.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_E + i_2 L_{Ma} + i_3 L_{Ju} + i_4 L_{Sa} + i_5 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$h$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_{\sin}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi)_{\cos}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_s$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_c$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _s$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _c$ ( $\mu\text{as}$ )
0	0	1	0	2	4336.582	-0.2605	-0.0330			0.2605	0.0330
0	0	1	0	1	4334.585	0.0000	-1.3671	-0.3000	-0.8000	0.3000	0.5671
0	0	1	0	0	4332.589	31.5719	-8.0144	33.4000	-4.7000	1.8281	3.3144
0	0	1	0	-1	4330.596	0.2114	2.4502	0.0000	0.5000	0.2114	1.9502
0	0	1	0	-2	4328.604	-25.5439	-6.4901	4.7000	2.0000	30.2439	8.4901
0	0	2	0	0	2166.295	1.2683	-0.6017	0.6000	0.0000	0.6683	0.6017
0	0	2	0	-1	2165.796	-0.4910	5.6199	0.9000	4.9000	1.3910	0.7199
0	0	2	0	-2	2165.298	-108.8510	0.0000	-106.2000	0.0000	2.6510	0.0000
0	0	3	0	-1	1443.975	0.0724	0.4497	0.0000	0.6000	0.0724	0.1503
0	0	3	0	-2	1443.753	-8.5198	2.1647	-11.9000	2.1000	3.3802	0.0647
0	0	4	0	-2	1082.898	-0.6536	0.3245	-0.9000	0.3000	0.2464	0.0245
1	0	-5	0	2	631.494	-0.1804	-0.0842	-0.5000	0.0000	0.3196	0.0842
1	0	-4	0	2	551.160	-1.5393	-0.3911	-3.0000	-0.6000	1.4607	0.2089
1	0	-3	0	2	488.958	-11.6328	0.0000	-11.2000	0.0000	0.4328	0.0000
1	0	-3	0	1	488.933	-0.0628	-0.5677	0.0000	-0.5000	0.0628	0.0677
1	0	-2	0	2	439.373	-1.2271	0.3118	0.5000	0.0000	1.7271	0.3118
1	0	-2	0	1	439.352	0.0070	-0.1117			0.0070	0.1117
1	0	-2	0	0	439.332	0.9094	0.2302	1.9000	0.3000	0.9906	0.0698
1	0	-1	0	2	398.918	-0.1139	0.0532			0.1139	0.0532
1	0	-1	0	1	398.901	0.1090	-0.4531	0.0000	-0.4000	0.1090	0.0531
1	0	-1	0	0	398.884	11.6960	0.0000	11.6000	0.0000	0.0960	0.0000
1	0	-1	0	-1	398.867	0.2759	0.4238	0.0000	0.3000	0.2759	0.1238
1	0	0	0	0	365.256	0.7561	-0.1914	0.5000	0.0000	0.2561	0.1914
1	0	0	0	-2	365.228	-0.2118	-0.0538			0.2118	0.0538
1	0	1	0	-1	336.846	0.0976	0.4158			0.0976	0.4158
1	0	1	0	-2	336.834	-1.6638	0.0000	-1.6000	0.0000	0.0638	0.0000
1	0	2	0	-2	312.536	-0.1812	0.0460			0.1812	0.0460
2	0	-5	0	2	231.409	-0.2161	-0.0549	-0.5000	0.0000	0.2839	0.0549
2	0	-4	0	2	219.676	-1.7478	0.0000	-1.7000	0.0000	0.0478	0.0000
2	0	-3	0	2	209.075	-0.1953	0.0496			0.1953	0.0496
2	0	-3	0	0	209.066	0.1034	0.0263	0.3000	0.0000	0.1966	0.0263
2	0	-2	0	0	199.442	1.3970	0.0000	1.4000	0.0000	0.0030	0.0000
2	0	0	0	-2	182.621	-0.1309	0.0000			0.1309	0.0000
3	0	-5	0	2	141.660	-0.3238	0.0000	-0.3000	0.0000	0.0238	0.0000
3	0	-3	0	0	132.961	0.2081	0.0000			0.2081	0.0000

Tabla 12.28: **Efecto directo de Júpiter.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_E + i_2 L_{Ma} + i_3 L_{Ju} + i_4 L_{Sa} + i_5 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$h$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_{\sin}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi)_{\cos}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_s$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_c$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _s$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _c$ ( $\mu\text{as}$ )
0	0	1	0	2	4336.582	0.0143	-0.1129			0.0143	0.1129
0	0	1	0	1	4334.585	0.7299	0.0000	0.4000	-0.2000	0.3299	0.2000
0	0	1	0	-1	4330.596	1.3082	-0.1129	0.3000	0.0000	1.0082	0.1129
0	0	1	0	-2	4328.604	-2.8138	11.0746	0.9000	-2.1000	3.7138	13.1746
0	0	2	0	-1	2165.796	3.0005	0.2622	2.6000	-0.5000	0.4005	0.7622

Tabla 12.28: **Efecto directo de Júpiter.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_E + i_2 L_{Ma} + i_3 L_{Ju} + i_4 L_{Sa} + i_5 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

0	0	2	0	-2	2165.298	0.0000	47.1927	0.0000	46.0000	0.0000	1.1927
0	0	3	0	-1	1443.975	0.2401	-0.0386	0.3000	-0.1000	0.0599	0.0614
0	0	3	0	-2	1443.753	0.9385	3.6938	0.9000	5.2000	0.0385	1.5062
0	0	4	0	-2	1082.898	0.1407	0.2834	0.1000	0.4000	0.0407	0.1166
1	0	-4	0	2	551.160	0.1696	-0.6674	0.2000	-1.3000	0.0304	0.6326
1	0	-3	0	2	488.958	0.0000	-5.0434	0.0000	-4.9000	0.0000	0.1434
1	0	-3	0	1	488.933	0.3031	-0.0336	0.3000	0.0000	0.0031	0.0336
1	0	-2	0	2	439.373	-0.1352	-0.5320	0.0000	0.2000	0.1352	0.7320
1	0	-1	0	1	398.901	0.2419	0.0582	0.2000	0.0000	0.0419	0.0582
1	0	-1	0	-1	398.867	0.2263	-0.1473	0.1000	0.0000	0.1263	0.1473
1	0	1	0	-1	336.846	0.2220	-0.0521			0.2220	0.0521
1	0	1	0	-2	336.834	0.0000	0.7213	0.0000	0.7000	0.0000	0.0213
2	0	-4	0	2	219.676	0.0000	-0.7577	0.0000	-0.7000	0.0000	0.0577
3	0	-5	0	2	141.660	0.0000	-0.1404	0.0000	-0.1000	0.0000	0.0404

Tabla 12.29: **Efecto directo de Saturno.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_E + i_2 L_{Ma} + i_3 L_{Ju} + i_4 L_{Sa} + i_5 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$h$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_{\sin}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi)_{\cos}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_s$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_c$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _s$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _c$ ( $\mu\text{as}$ )
0	0	2	-5	0	-322614.503	-0.3647	0.0259			0.3647	0.0259
0	0	2	-5	2	-301917.969	-0.2126	-0.0658			0.2126	0.0658
0	0	1	-2	2	22366.652	0.1118	0.0000			0.1118	0.0000
0	0	2	-4	0	11130.428	0.0004	-0.1440			0.0004	0.1440
0	0	0	1	0	10759.227	-0.0012	-4.1147	0.0000	-3.9000	0.0012	0.2147
0	0	0	1	-2	10734.686	0.0000	-2.0303	0.0000	0.8000	0.0000	2.8303
0	0	0	2	0	5379.614	-0.1135	0.0058			0.1135	0.0058
0	0	0	2	-1	5376.541	-0.0986	0.5286	0.4000	0.9000	0.4986	0.3714
0	0	0	2	-2	5373.471	-12.3258	0.0000	-12.3000	0.0000	0.0258	0.0000
0	0	0	3	-2	3583.678	0.0000	0.6778	0.0000	1.5000	0.0000	0.8222
1	0	0	-3	2	406.709	-0.2431	0.0000			0.2431	0.0000
1	0	0	-1	0	378.092	0.2741	0.0000	0.3000	0.0000	0.0259	0.0000

Tabla 12.30: **Efecto directo de Saturno.** Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_E + i_2 L_{Ma} + i_3 L_{Ju} + i_4 L_{Sa} + i_5 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$h$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_{\sin}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi)_{\cos}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_s$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_c$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _s$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _c$ ( $\mu\text{as}$ )
0	0	0	1	-2	10734.686	-0.8802	0.0000	0.4000	0.0000	1.2802	0.0000
0	0	0	2	-1	5376.541	0.2822	0.0527	0.5000	-0.2000	0.2178	0.2527
0	0	0	2	-2	5373.471	0.0000	5.3439	0.0000	5.3000	0.0000	0.0439
0	0	0	3	-2	3583.678	0.2939	0.0000	0.7000	0.0000	0.4061	0.0000
1	0	0	-3	2	406.709	0.0000	-0.1054			0.0000	0.1054

### 12.3.4 Perturbaciones planetarias indirectas

Finalmente, se comparan los efectos planetarios indirectos obtenidos con los dados en las series REN2000 (Kinoshita y Souchay).

Tabla 12.31: Efecto indirecto en la órbita de la Luna. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{s}$ .

$\Omega$	$l_M$	$F$	$D$	$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_{\sin}$ ( $\mu\text{s}$ )	$(\Delta\psi)_{\cos}$ ( $\mu\text{s}$ )	$(\Delta\psi_K)_s$ ( $\mu\text{s}$ )	$(\Delta\psi_K)_c$ ( $\mu\text{s}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _s$ ( $\mu\text{s}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _c$ ( $\mu\text{s}$ )
1	0	1	-1	0	-1	0	-2	5	311923.319	-306.447	511.226	-308.400	512.300	1.952	1.074
1	-2	0	2	0	2	0	-2	0	100155.423	28.313	0.000	28.400	0.000	0.087	0.000
0	1	0	0	-18	16	0	0	0	-99727.792	-22.297	10.303	-22.600	10.100	0.303	0.203
1	0	1	-1	-8	12	0	0	0	-88082.028	119.391	59.650	120.000	59.800	0.609	0.150
0	0	1	-1	0	0	-2	0	0	-38036.684	-26.775	-7.823	-26.600	-7.800	0.175	0.023
1	0	0	0	0	-1	2	0	0	37883.593	-45.936	-43.315	-46.000	-43.500	0.064	0.185
0	1	0	-1	-3	4	0	0	0	34989.308	0.000	13.307	0.000	13.100	0.000	0.207
0	0	1	-1	0	-1	0	0	-1	18430.955	4.223	2.041	4.200	2.000	0.023	0.041
0	0	2	-2	-5	6	0	0	0	-18185.987	0.000	23.460	1.000	23.300	1.000	0.160
0	2	0	-2	-6	8	0	0	0	17494.654	-7.823	-1.838	-7.800	-1.800	0.023	0.038
1	2	0	-2	0	-2	0	3	0	-13630.813	8.887	0.000	8.900	-1.600	0.013	1.600
0	2	0	-2	0	-2	0	3	0	13562.891	35.118	-6.210	34.900	-6.200	0.218	0.010
0	2	0	-2	0	-6	8	0	0	13286.253	1.519	2.238	1.500	2.200	0.019	0.038
0	1	0	-1	0	-1	0	1	0	-12732.506	5.167	0.000	5.300	0.000	0.133	0.000
0	0	1	-1	0	-1	0	-1	0	-11960.459	2.070	-7.820	2.100	-7.800	0.030	0.020
1	0	0	0	0	0	0	1	0	11945.280	0.000	-7.059	2.000	-7.000	2.000	0.059
1	0	1	-1	0	-1	0	0	-1	-10771.540	17.346	8.389	17.400	8.400	0.054	0.011
1	0	1	-1	0	-1	0	0	1	10746.943	-6.655	0.000	-6.600	-1.200	0.055	1.200
1	0	2	-2	0	-9	13	0	0	-10648.784	0.000	-2.196	1.000	-2.200	1.000	0.004
0	2	0	-2	0	-5	6	0	0	-10180.741	2.371	1.236	2.400	1.200	0.029	0.036
1	1	0	-1	-3	4	0	0	0	-8437.848	0.000	2.883	0.000	2.900	0.000	0.017
1	0	0	0	8	-13	0	0	0	-7372.756	4.616	6.635	4.600	6.600	0.016	0.035
0	0	1	-1	-8	12	0	0	0	7366.985	1.447	0.722	1.400	0.700	0.047	0.022
1	-1	0	0	18	-16	0	0	0	-7295.729	-6.771	-3.376	-6.800	-3.400	0.029	0.024
1	0	0	0	0	0	0	-2	5	-6944.728	7.642	1.749	7.600	1.700	0.042	0.049
1	0	0	0	0	-4	8	-3	0	-6870.085	8.367	29.794	8.400	29.800	0.033	0.006
1	0	0	0	0	4	-8	3	0	-6728.164	-8.194	29.178	-8.200	29.200	0.006	0.022
1	0	0	0	0	0	0	2	-5	-6658.080	-7.327	1.677	-7.300	1.700	0.027	0.023
0	0	1	-1	0	-1	0	-2	5	6653.373	0.948	-1.582	0.900	-1.600	0.048	0.018
0	2	0	-2	0	-2	0	2	0	-6366.253	43.859	0.000	43.900	0.000	0.041	0.000
1	1	0	0	-18	16	0	0	0	-6364.518	5.685	-2.842	5.700	-2.800	0.015	0.042
1	0	0	0	-8	13	0	0	0	-6307.036	-3.951	5.677	-4.000	5.700	0.049	0.023
1	0	1	-1	0	0	-2	0	0	-5767.538	27.300	7.952	27.300	8.000	0.000	0.048
0	0	0	0	0	1	-2	0	0	-5764.006	0.688	-0.666	0.700	-0.700	0.032	0.034
1	0	1	-1	0	-2	2	0	0	5760.479	0.000	-4.749	-0.800	-4.700	0.800	0.049
1	-1	0	1	3	-4	0	0	0	-5692.364	0.000	2.359	0.000	2.300	0.000	0.059
1	0	1	-1	0	-1	0	0	2	5376.541	-4.852	-10.939	-4.800	-11.000	0.052	0.061
1	0	0	0	-3	5	0	0	0	5240.146	-2.057	0.000	-2.100	-0.600	0.043	0.600
1	0	0	0	0	-2	4	0	0	5002.824	-1.145	-2.038	-1.100	-2.100	0.045	0.062
1	0	2	-2	-5	6	0	0	0	-4948.506	-1.757	-43.601	-1.800	-43.600	0.043	0.001
0	0	1	-1	-5	7	0	0	0	-4945.906	-3.531	-0.679	-3.500	-0.700	0.031	0.022
1	-2	0	2	6	-8	0	0	0	-4895.862	1.167	0.000	1.100	-0.300	0.067	0.300
1	-2	0	2	0	2	0	-3	0	-4528.486	-5.274	-0.946	-5.300	-0.900	0.026	0.046
1	0	1	-1	0	-1	0	-1	0	-4334.585	-5.000	19.355	-5.000	19.400	0.000	0.045
1	0	1	-1	0	-1	0	1	0	4330.596	0.000	-4.683	-0.600	-4.700	0.600	0.018
1	0	2	-2	0	-8	11	0	0	-3739.745	0.000	0.768	0.000	0.800	0.000	0.032
0	2	0	-2	0	-4	4	0	0	-3680.325	0.446	0.000	0.400	0.000	0.046	0.000
1	0	1	-1	0	-1	0	0	3	3585.043	-0.749	0.000	-0.800	0.400	0.051	0.400
0	2	0	-2	-3	3	0	0	0	-3561.662	13.868	0.000	13.800	0.000	0.068	0.000
1	0	-1	1	0	1	0	0	0	-3397.965	0.000	1.003	0.000	0.000	0.000	1.003
1	2	0	-2	0	-2	0	2	0	-3287.613	5.386	0.000	5.400	0.000	0.014	0.000
2	0	1	-1	0	-1	0	2	0	3178.335	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000
1	0	0	0	0	1	-2	0	0	-3119.305	-3.710	3.493	-3.700	3.500	0.010	0.007
0	0	1	-1	0	-2	2	0	0	3118.272	0.000	0.375	0.000	0.400	0.000	0.025
0	0	1	-1	0	-1	0	0	2	3002.219	0.396	0.891	0.400	0.900	0.004	0.009
1	0	2	-2	0	-2	0	0	2	3001.262	0.754	0.000	0.800	0.000	0.046	0.000
1	0	1	-1	3	-6	0	0	0	-2960.140	-0.850	-1.414	-0.900	-1.400	0.050	0.014
1	0	1	-1	-3	4	0	0	0	2958.279	-0.961	3.947	-1.000	4.000	0.039	0.053
2	0	2	-2	-3	3	0	0	0	2957.349	-1.161	0.000	-1.200	0.000	0.039	0.000
1	0	1	-1	0	-3	4	0	0	2881.121	0.947	-1.345	0.900	-1.300	0.047	0.045
2	0	2	-2	-5	6	0	0	0	-2863.894	0.000	1.190	0.000	1.200	0.000	0.010
1	0	1	-1	-5	7	0	0	0	-2863.023	13.994	2.648	14.000	2.700	0.006	0.052
1	0	0	0	0	0	0	-1	0	-2646.184	0.000	1.505	0.400	1.500	0.400	0.005
0	0	1	-1	0	-1	0	1	0	2645.440	0.000	0.418	0.000	0.400	0.000	0.018
1	2	0	-2	-3	3	0	0	0	-2337.204	1.607	0.000	1.600	0.000	0.007	0.000
0	2	0	-2	0	-2	0	0	2	-2310.488	0.262	0.000	0.300	0.000	0.038	0.000

Tabla 12.31: Efecto indirecto en la órbita de la Luna. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_e} + i_4 L_{J_{12}} + i_5 L_{S_e} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

1	0	1	-1	0	-1	0	2	0	2165.796	-2.661	-14.340	-2.700	-14.300	0.039	0.040
1	0	0	0	3	-5	0	0	0	-2061.762	-0.783	0.000	-0.800	0.000	0.017	0.000
0	0	1	-1	-3	4	0	0	0	2061.311	0.000	-0.407	0.000	-0.400	0.000	0.007
1	0	2	-2	-3	3	0	0	0	2060.860	11.758	0.000	11.700	0.000	0.058	0.000
1	0	0	0	0	2	-4	0	0	-2023.986	-0.451	0.800	-0.400	0.800	0.051	0.000
1	0	1	-1	0	-4	6	0	0	1920.943	0.407	0.000	0.400	0.000	0.007	0.000
0	0	1	-1	-2	2	0	0	0	-1851.456	-0.330	0.000	-0.300	0.000	0.030	0.000
1	0	0	0	2	-3	0	0	0	1851.091	0.000	-3.166	0.000	-3.200	0.000	0.034
0	0	1	-1	0	-1	0	2	0	1642.528	0.295	1.575	0.300	1.600	0.005	0.025
1	0	2	-2	0	-2	0	2	0	1642.241	4.984	0.000	5.000	0.000	0.016	0.000
1	-2	1	1	0	1	0	0	0	1616.025	0.000	-0.548	0.000	-0.500	0.000	0.048
0	0	2	-2	-3	3	0	0	0	1581.457	-1.218	0.000	-1.300	0.000	0.082	0.000
1	0	1	-1	-2	2	0	0	0	-1455.161	1.754	0.000	1.800	0.000	0.046	0.000
0	0	0	0	2	-3	0	0	0	1454.936	0.000	-0.871	0.000	-0.900	0.000	0.029
1	0	1	-1	0	-1	0	3	0	1443.975	-0.331	-0.870	-0.300	-0.900	0.031	0.030
0	2	0	-2	-4	5	0	0	0	1343.227	0.000	-0.226	0.000	0.000	0.000	0.226
0	0	2	-2	0	-2	0	2	0	1322.720	-0.536	0.000	-0.500	0.000	0.036	0.000
0	2	-1	-1	0	-1	0	0	0	-1305.660	0.000	0.231	0.000	0.000	0.000	0.231
1	0	0	0	-2	3	0	0	0	-1198.452	0.000	1.900	0.000	1.900	0.000	0.000
1	0	2	-2	0	-2	0	3	0	1190.855	0.650	0.000	0.700	0.000	0.050	0.000
1	0	0	0	-1	2	0	0	0	1138.758	0.000	0.270	0.000	0.300	0.000	0.030
0	2	0	-2	-5	6	0	0	0	-1032.969	0.000	-0.136	0.000	0.000	0.000	0.136
0	0	2	-2	0	-2	0	3	0	1013.349	-0.118	0.000	0.000	0.000	0.118	0.000
1	0	1	-1	1	-3	0	0	0	-975.479	-0.392	0.000	-0.400	0.000	0.008	0.000
0	0	0	0	1	-2	0	0	0	-975.378	0.000	0.166	0.000	0.000	0.000	0.166
0	0	2	-2	-4	4	0	0	0	-925.728	-0.446	0.000	-0.400	0.000	0.045	0.000
1	0	0	0	1	-2	0	0	0	-852.997	0.000	-0.172	0.000	0.000	0.000	0.172
1	0	2	-2	-4	4	0	0	0	-814.780	2.688	0.000	2.700	0.000	0.012	0.000
0	0	1	-1	-4	5	0	0	0	-814.710	0.109	-0.450	0.000	-0.400	0.109	0.050
1	0	1	-1	-4	6	0	0	0	733.526	0.276	0.000	0.300	0.000	0.024	0.000
1	0	1	-1	-4	5	0	0	0	-727.524	-0.660	2.751	-0.700	2.800	0.040	0.049
0	2	0	-2	-2	2	0	0	0	698.426	0.495	0.000	0.500	0.000	0.005	0.000
1	0	2	-2	-4	5	0	0	0	662.042	0.000	-0.204	0.000	0.000	0.000	0.204
0	0	1	-1	-1	0	0	0	0	-638.831	-0.081	-0.308	0.000	-0.300	0.081	0.008
1	0	0	0	1	-1	0	0	0	638.788	-2.807	0.000	-2.800	0.000	0.007	0.000
1	0	2	-2	0	-3	0	4	0	-599.786	0.122	0.000	0.000	0.000	0.122	0.000
1	0	1	-1	-1	0	0	0	0	-583.958	0.497	2.097	0.500	2.100	0.003	0.003
0	0	0	0	1	-1	0	0	0	583.921	-2.172	0.000	-2.200	0.000	0.028	0.000
1	0	1	-1	1	-2	0	0	0	583.885	0.120	0.501	0.000	0.500	0.120	0.001
1	0	0	0	-1	1	0	0	0	-537.735	-1.945	0.000	-1.900	0.000	0.045	0.000
1	0	2	-2	0	-3	0	3	0	-526.851	0.388	0.000	0.400	0.000	0.012	0.000
1	0	2	-2	-6	7	0	0	0	-522.291	0.000	-0.141	0.000	0.000	0.000	0.141
0	2	0	-2	-4	4	0	0	0	-501.674	0.262	0.000	0.300	0.000	0.038	0.000
1	0	1	-1	-2	3	0	0	0	487.664	-0.212	0.890	0.000	0.900	0.212	0.010
1	0	1	-1	-6	8	0	0	0	-485.004	0.158	0.000	0.000	0.000	0.158	0.000
1	0	0	0	0	1	0	-2	0	469.684	0.226	-0.376	0.000	-0.400	0.226	0.024
1	1	-1	0	0	1	0	0	0	468.568	0.000	0.517	0.000	0.000	0.000	0.517
0	0	1	-1	-2	3	0	0	0	455.024	0.000	-0.121	0.000	0.000	0.000	0.121
1	0	2	-2	-2	2	0	0	0	455.002	1.124	0.000	1.100	0.000	0.024	0.000
1	0	0	0	0	3	-4	0	0	445.687	0.103	0.000	0.000	0.000	0.103	0.000
1	0	0	0	3	-4	0	0	0	443.896	0.000	-0.434	0.000	-0.400	0.000	0.034
0	0	0	0	0	1	0	-2	0	439.332	0.217	-0.372	0.000	-0.400	0.217	0.028
0	0	2	-2	-2	2	0	0	0	426.460	-0.157	0.000	0.000	0.000	0.157	0.000
1	0	0	0	0	1	0	-1	0	423.747	1.548	0.000	1.500	0.000	0.048	0.000
0	0	0	0	0	3	-4	0	0	418.266	0.108	-0.059	0.000	0.000	0.108	0.059
1	0	1	-1	-3	3	0	0	0	-416.707	0.121	0.000	0.000	0.000	0.121	0.000
0	0	0	0	3	-4	0	0	0	416.688	0.000	-0.451	0.000	-0.400	0.000	0.051
1	0	0	0	0	2	-2	0	0	413.699	0.460	0.000	0.500	0.000	0.040	0.000
1	0	0	0	0	-1	0	2	0	-412.664	0.155	0.258	0.000	0.300	0.155	0.043
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	398.884	1.635	0.000	1.600	0.000	0.035	0.000
1	0	0	0	-3	4	0	0	0	-392.624	0.000	0.295	0.000	0.300	0.000	0.005
0	0	0	0	0	2	-2	0	0	389.968	0.507	0.000	0.500	0.000	0.007	0.000
0	0	0	0	0	1	0	0	-1	378.092	0.101	0.000	0.000	0.000	0.101	0.000
1	0	0	0	0	-1	0	1	0	-376.777	1.051	0.000	1.100	0.000	0.049	0.000
1	0	0	0	0	-2	2	0	0	-368.812	0.308	0.000	0.300	0.000	0.008	0.000
1	0	2	-2	-5	5	0	0	0	-340.149	0.396	0.000	0.400	0.000	0.004	0.000
1	-1	1	0	0	1	0	0	0	328.164	0.000	0.152	0.000	0.000	0.000	0.152
1	0	2	-2	0	-2	2	0	0	326.947	0.153	0.000	0.000	0.000	0.153	0.000
1	0	1	-1	-5	6	0	0	0	-323.930	-0.095	0.394	0.000	0.400	0.095	0.006
1	0	2	-2	0	-1	0	1	0	320.933	0.524	0.000	0.500	0.000	0.024	0.000
1	0	0	0	2	-2	0	0	0	305.062	0.580	0.000	0.600	0.000	0.020	0.000
1	0	1	-1	-2	1	0	0	0	-291.970	0.122	0.518	0.000	0.500	0.122	0.018
0	0	0	0	2	-2	0	0	0	291.961	0.816	0.000	0.800	0.000	0.016	0.000
1	0	0	0	-2	2	0	0	0	-279.939	0.357	0.000	0.400	0.000	0.043	0.000
1	0	1	-1	-1	2	0	0	0	265.735	-0.063	0.264	0.000	0.300	0.063	0.036
1	0	2	-2	-1	1	0	0	0	255.731	-0.216	0.000	0.000	0.000	0.216	0.000
1	0	2	-2	-6	6	0	0	0	-214.941	0.136	0.000	0.000	0.000	0.136	0.000
1	0	1	-1	-6	7	0	0	0	-208.349	0.000	0.129	0.000	0.000	0.000	0.129
1	0	0	0	0	2	0	-2	0	205.470	-0.288	0.000	-0.300	0.000	0.012	0.000
1	0	2	-2	-2	3	0	0	0	202.610	0.000	0.137	0.000	0.000	0.000	0.137

Tabla 12.31: Efecto indirecto en la órbita de la Luna. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Vc} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

0	0	0	0	0	2	0	-2	0	199.442	-0.976	0.000	-1.000	0.000	0.024	0.000
1	0	1	-1	-3	2	0	0	0	-194.644	0.050	0.213			0.050	0.213
0	0	0	0	3	-3	0	0	0	194.640	-0.413	0.000	-0.400	0.000	0.013	0.000
1	0	2	-2	0	0	0	-1	0	185.456	0.159	0.000			0.159	0.000
1	0	1	-1	0	1	0	0	0	182.625	0.082	-0.921	0.000	-0.900	0.082	0.021
1	0	2	-2	-8	13	0	0	0	178.207	-0.064	0.100			0.064	0.100
1	0	2	-2	0	4	-8	3	0	177.892	-0.128	0.425	0.000	0.400	0.128	0.025
0	0	1	-1	0	1	0	0	0	177.847	-0.029	0.317	0.000	0.300	0.029	0.017
1	0	2	-2	0	-4	8	-3	0	177.795	0.128	0.425	0.000	0.400	0.128	0.025
1	0	2	-2	8	-13	0	0	0	177.482	0.064	0.100			0.064	0.100
1	0	2	-2	0	0	0	1	0	170.832	-0.159	0.000			0.159	0.000
1	0	2	-2	2	-3	0	0	0	158.473	0.000	0.163			0.000	0.163
1	0	1	-1	-4	3	0	0	0	-145.983	0.000	0.108			0.000	0.108
0	0	0	0	4	-4	0	0	0	145.980	-0.155	0.000			0.155	0.000
1	0	1	-1	1	0	0	0	0	139.115	-0.032	0.133			0.032	0.133
1	0	2	-2	1	-1	0	0	0	136.324	0.270	0.000	0.300	0.000	0.030	0.000
0	2	0	-2	0	1	0	-1	0	135.798	-0.104	0.000			0.104	0.000
1	0	2	-2	0	1	0	-1	0	123.003	-0.373	0.000	-0.400	0.000	0.027	0.000
1	0	2	-2	0	2	-2	0	0	122.142	-0.103	0.000			0.103	0.000
0	0	0	0	5	-5	0	0	0	116.784	-0.101	0.000			0.101	0.000
1	0	2	-2	2	-2	0	0	0	110.521	-0.242	0.000			0.242	0.000
1	0	2	-2	0	2	0	-2	0	94.012	0.104	0.000			0.104	0.000
0	1	0	-2	0	2	0	-2	0	-37.849	-0.314	-0.005	-0.300	0.000	0.014	0.005
0	1	0	-2	2	-2	0	0	0	-35.702	0.555	0.000	0.600	0.000	0.045	0.000
0	1	0	-2	0	2	-2	0	0	-34.638	0.200	-0.004			0.200	0.004
0	1	0	-2	0	1	0	-1	0	-34.569	0.716	0.022	0.700	0.000	0.016	0.022
0	1	0	-2	3	-4	0	0	0	-34.441	0.000	-0.158			0.000	0.158
0	1	0	-2	0	1	0	-2	0	-34.295	0.091	-0.124			0.091	0.124
0	1	0	-2	1	-1	0	0	0	-33.645	-0.438	0.000	-0.400	0.000	0.038	0.000
0	1	0	-2	2	-3	0	0	0	-32.523	0.006	-0.204			0.006	0.204
0	1	0	0	-3	3	0	0	0	32.099	-0.415	0.000	-0.400	0.000	0.015	0.000
0	1	0	-2	0	0	0	1	0	-32.047	0.188	0.000			0.188	0.000
0	1	0	0	0	-2	0	2	0	31.972	-0.609	0.000	-0.600	0.000	0.009	0.000
0	1	0	-2	8	-13	0	0	0	-31.824	-0.067	-0.107			0.067	0.107
0	0	0	2	-18	16	0	0	0	31.822	-0.487	0.243	-0.500	0.000	0.013	0.243
0	1	0	-2	0	-4	8	-3	0	-31.813	-0.134	-0.435	0.000	-0.400	0.134	0.035
1	-1	1	1	0	-1	0	0	0	31.812	0.013	0.113			0.013	0.113
1	1	1	-3	0	-1	0	0	0	-31.812	-0.012	-0.103			0.012	0.103
0	1	0	-2	0	4	-8	3	0	-31.810	0.134	-0.434	0.000	-0.400	0.134	0.034
0	2	0	-2	-18	16	0	0	0	-31.802	-0.458	0.229	-0.500	0.000	0.042	0.229
0	1	0	-2	-8	13	0	0	0	-31.800	0.066	-0.106			0.066	0.106
0	1	0	0	0	-2	0	3	0	31.738	0.305	-0.055	0.300	0.000	0.005	0.055
0	1	0	-2	0	0	0	-1	0	-31.580	-0.171	-0.012			0.171	0.012
0	1	0	-2	-2	3	0	0	0	-31.131	0.000	-0.111			0.000	0.111
0	1	0	0	-2	2	0	0	0	30.426	-0.171	0.000			0.171	0.000
0	1	0	0	0	-2	2	0	0	29.650	-0.128	0.000			0.128	0.000
0	1	0	0	0	-1	0	1	0	29.599	-0.437	0.010	-0.400	0.000	0.037	0.010
0	1	0	0	-3	4	0	0	0	29.506	0.000	-0.120			0.000	0.120
0	1	0	-2	0	-1	0	1	0	-29.462	-0.161	0.000			0.161	0.000
0	1	0	0	-1	1	0	0	0	28.919	0.464	0.000	0.500	0.000	0.036	0.000
0	1	0	-2	-2	2	0	0	0	-28.686	-0.419	0.000	-0.400	0.000	0.019	0.000
0	1	0	0	-2	3	0	0	0	28.086	0.004	-0.181			0.004	0.181
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	27.731	-0.051	-0.109			0.051	0.109
1	-1	0	2	0	2	0	-3	0	27.723	0.116	0.021			0.116	0.021
0	1	0	0	0	1	-2	0	0	27.687	0.132	-0.139			0.132	0.139
1	2	0	0	-18	16	0	0	0	27.674	-0.183	0.092			0.183	0.092
0	1	-1	1	0	1	0	0	0	27.667	-0.024	0.252	0.000	0.300	0.024	0.048
1	0	0	0	18	-16	0	0	0	27.659	0.172	0.086			0.172	0.086
0	1	0	-2	0	-2	0	3	0	-27.611	-1.317	0.234	-1.300	0.000	0.017	0.234
0	1	0	-2	-6	8	0	0	0	-27.598	0.224	0.051			0.224	0.051
0	0	0	1	3	-4	0	0	0	27.576	0.000	-0.196			0.000	0.196
0	2	0	0	-18	16	0	0	0	27.562	-2.108	1.053	-2.100	1.100	0.008	0.047
0	1	0	0	0	0	0	2	-5	27.557	0.199	-0.048			0.199	0.048
0	1	0	0	0	4	-8	3	0	27.556	0.132	-0.494			0.132	0.494
1	-1	1	-1	0	-1	0	0	0	-27.555	-0.053	-0.453	0.000	-0.500	0.053	0.047
1	1	1	-1	0	-1	0	0	0	27.554	0.054	0.456	0.000	0.500	0.054	0.044
0	1	0	0	0	-4	8	-3	0	27.553	-0.132	-0.494	0.000	-0.500	0.132	0.006
0	1	0	0	0	0	0	-2	5	27.552	-0.199	-0.048			0.199	0.048
1	-1	0	2	0	2	0	-2	0	27.547	-0.290	0.000	-0.300	0.000	0.011	0.000
0	0	0	0	18	-16	0	0	0	27.547	1.977	0.988	2.000	1.000	0.023	0.012
1	1	0	-2	0	-2	0	3	0	-27.499	-0.109	0.019			0.109	0.019
0	0	0	1	0	1	0	-1	0	27.495	-0.201	0.000			0.201	0.000
0	1	0	-2	0	-5	6	0	0	-27.480	0.113	0.061			0.113	0.061
1	-1	0	2	3	-3	0	0	0	27.453	-0.160	0.000			0.160	0.000
1	-2	0	0	18	-16	0	0	0	-27.451	0.176	0.088			0.176	0.088
0	1	1	-1	0	-1	0	0	0	27.443	0.008	0.113			0.008	0.113
0	1	0	-2	0	-2	0	2	0	-27.436	3.423	-0.007	3.400	0.000	0.023	0.007
1	0	0	0	-18	16	0	0	0	-27.436	-0.165	0.082			0.165	0.082
0	1	0	0	0	-1	2	0	0	27.423	-0.129	-0.138			0.129	0.138
0	1	0	0	0	0	0	1	0	27.380	0.048	-0.111			0.048	0.111

Tabla 12.31: Efecto indirecto en la órbita de la Luna. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_a} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{s}$ .

0	1	0	-2	-3	3	0	0	0	-27.343	1.924	0.000	1.900	0.000	0.024	0.000
1	1	0	-2	0	-2	0	2	0	-27.326	0.290	0.000	0.300	0.000	0.010	0.000
2	1	2	-2	-3	3	0	0	0	27.300	-0.328	0.000	-0.300	0.000	0.028	0.000
1	1	0	-2	-3	3	0	0	0	-27.233	0.163	0.000			0.163	0.000
2	1	2	-2	0	-2	0	2	0	27.208	-0.588	0.000	-0.600	0.000	0.012	0.000
2	0	2	0	-18	16	0	0	0	27.100	-0.373	0.186	-0.400	0.000	0.027	0.186
1	-1	1	1	0	1	0	0	0	27.093	0.019	-0.168			0.019	0.168
2	-2	2	0	18	-16	0	0	0	27.085	0.351	0.175	0.400	0.000	0.049	0.175
0	1	0	0	2	-3	0	0	0	27.042	-0.004	-0.165			0.004	0.165
2	1	2	-2	0	-2	0	3	0	27.039	0.208	-0.037			0.208	0.037
0	1	0	0	1	-1	0	0	0	26.313	-0.378	0.000	-0.400	0.000	0.022	0.000
0	1	0	-2	-4	4	0	0	0	-26.120	0.239	0.000			0.239	0.000
0	1	0	0	0	1	0	-1	0	25.774	0.324	0.006	0.300	0.000	0.024	0.006
0	1	0	0	2	-2	0	0	0	25.178	0.150	0.000			0.150	0.000
0	1	0	-2	-5	5	0	0	0	-25.002	0.106	0.000			0.106	0.000
0	1	0	0	0	2	0	-2	0	24.210	-0.103	0.000			0.103	0.000
2	-1	2	0	0	2	0	-2	0	23.852	-0.113	0.000			0.113	0.000
2	-1	2	-2	0	1	0	-1	0	22.586	-0.122	0.000			0.122	0.000
0	0	0	2	0	-2	0	2	0	15.946	0.206	-0.003			0.206	0.003
0	0	0	2	-2	2	0	0	0	15.552	-0.336	0.002	-0.300	0.000	0.036	0.002
0	0	0	2	0	-2	2	0	0	15.346	-0.116	-0.003			0.116	0.003
0	0	0	2	0	-1	0	1	0	15.333	-0.413	0.013	-0.400	0.000	0.013	0.013
0	0	0	2	-1	1	0	0	0	15.148	0.250	0.000			0.250	0.000
0	0	0	2	-2	3	0	0	0	14.917	-0.003	-0.106			0.003	0.106
0	1	0	2	-18	16	0	0	0	14.767	-0.374	0.187	-0.400	0.000	0.026	0.187
0	0	0	2	0	4	-8	3	0	14.766	0.066	-0.219			0.066	0.219
0	0	0	2	0	-4	8	-3	0	14.765	-0.066	-0.219			0.066	0.219
0	1	0	-2	-18	16	0	0	0	-14.763	-0.370	0.185	-0.400	0.000	0.030	0.185
2	0	2	0	0	-2	0	2	0	14.665	-0.208	0.000			0.208	0.000
2	0	2	0	-2	2	0	0	0	14.331	0.291	0.000	0.300	0.000	0.009	0.000
2	0	2	0	0	-2	2	0	0	14.157	0.188	0.000			0.188	0.000
2	0	2	0	0	-1	0	1	0	14.145	0.617	-0.013	0.600	0.000	0.017	0.013
2	0	2	0	-3	4	0	0	0	14.124	0.000	0.169			0.000	0.169
2	0	2	0	0	-1	0	2	0	14.099	0.082	0.136			0.082	0.136
0	0	0	2	2	-2	0	0	0	14.055	0.100	0.000			0.100	0.000
2	0	2	0	-1	1	0	0	0	13.988	-0.800	0.000	-0.800	0.000	0.000	0.000
0	0	0	2	0	2	0	-3	0	13.791	0.111	0.020			0.111	0.020
2	0	2	0	-2	3	0	0	0	13.790	0.000	0.338	0.000	0.300	0.000	0.038
0	3	0	0	-18	16	0	0	0	13.779	-0.173	0.086			0.173	0.086
0	1	0	0	18	-16	0	0	0	13.775	0.162	0.081			0.162	0.081
0	0	0	2	0	2	0	-2	0	13.748	-0.253	0.000	-0.300	0.000	0.047	0.000
0	0	0	2	3	-3	0	0	0	13.724	-0.113	0.000			0.113	0.000
2	0	2	0	0	1	-2	0	0	13.693	-0.239	0.214			0.239	0.214
2	2	2	-2	0	-2	0	2	0	13.690	0.161	0.000			0.161	0.000
2	0	1	1	0	1	0	0	0	13.688	0.031	-0.348	0.000	-0.300	0.031	0.048
2	-2	2	2	0	2	0	-3	0	13.675	-0.244	-0.043			0.244	0.043
2	-1	2	2	-20	21	0	0	0	13.675	0.000	0.106			0.000	0.106
2	1	2	0	-26	29	0	0	0	13.665	0.027	-0.100			0.027	0.100
2	1	2	0	-18	16	0	0	0	13.663	12.612	-6.300	12.600	-6.300	0.012	0.000
2	0	2	0	-8	13	0	0	0	13.663	-0.126	0.186			0.126	0.186
1	0	1	1	0	1	0	0	0	13.661	-0.326	2.777	-0.300	2.800	0.026	0.023
2	0	2	0	0	-4	8	-3	0	13.661	0.246	0.857	0.000	0.900	0.246	0.043
2	0	2	0	0	4	-8	3	0	13.661	-0.246	0.858	0.000	0.900	0.246	0.042
2	1	2	0	-10	3	0	0	0	13.661	0.498	0.251	0.500	0.000	0.002	0.251
2	-1	2	0	10	-3	0	0	0	13.661	-0.498	0.251	-0.500	0.000	0.002	0.251
2	0	2	0	0	0	0	2	-5	13.661	-0.158	0.034			0.158	0.034
2	0	2	0	0	0	0	-2	5	13.660	0.158	0.034			0.158	0.034
2	-1	2	0	18	-16	0	0	0	13.659	-12.622	-6.305	-12.600	-6.300	0.022	0.005
2	0	2	0	8	-13	0	0	0	13.659	0.126	0.185			0.126	0.185
2	-1	2	0	26	-29	0	0	0	13.657	-0.027	-0.100			0.027	0.100
2	1	2	-1	-3	4	0	0	0	13.655	0.000	0.107			0.000	0.107
2	2	2	-2	0	-2	0	3	0	13.647	0.308	-0.055	0.300	0.000	0.007	0.055
2	1	2	-2	20	-21	0	0	0	13.646	0.000	0.105			0.000	0.105
1	1	2	0	-18	16	0	0	0	13.635	2.106	-1.052	2.100	-1.100	0.006	0.048
0	0	1	1	0	1	0	0	0	13.633	0.047	-0.399	0.000	-0.400	0.047	0.001
2	0	3	-1	0	-1	0	0	0	13.633	-0.016	-0.215			0.016	0.215
1	-1	2	0	18	-16	0	0	0	13.632	-2.107	-1.053	-0.300	0.000	1.807	1.053
2	-2	2	2	0	2	0	-2	0	13.632	-0.325	0.000	-2.100	-1.100	1.775	1.100
2	0	2	0	0	-1	2	0	0	13.628	0.240	0.215			0.240	0.215
1	0	0	2	5	-6	0	0	0	13.623	-0.005	0.128			0.005	0.128
2	-2	2	2	3	-3	0	0	0	13.609	-0.118	0.000			0.118	0.000
0	1	2	0	-18	16	0	0	0	13.608	-0.149	0.075			0.149	0.075
0	1	-2	0	-18	16	0	0	0	-13.604	-0.150	0.075			0.150	0.075
2	0	2	0	2	-3	0	0	0	13.534	0.000	0.342	0.000	0.300	0.000	0.042
2	0	2	0	1	-1	0	0	0	13.349	0.826	0.000	0.800	0.000	0.026	0.000
2	0	2	0	0	1	0	-2	0	13.249	-0.086	0.142			0.086	0.142
2	0	2	0	3	-4	0	0	0	13.227	0.000	0.178			0.000	0.178
2	0	2	0	0	1	0	-1	0	13.208	-0.647	-0.014	-0.600	0.000	0.047	0.014
2	0	2	0	0	2	-2	0	0	13.198	-0.197	0.000			0.197	0.000
2	0	2	0	2	-2	0	0	0	13.050	-0.306	0.000	-0.300	0.000	0.006	0.000



Tabla 12.31: Efecto indirecto en la órbita de la Luna. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

2	0	2	0	0	2	0	-2	0	12.785	0.155	0.000			0.155	0.000
2	-1	2	2	0	-2	0	2	0	10.038	-0.104	0.000			0.104	0.000
2	-1	2	2	-2	2	0	0	0	9.880	0.187	0.000			0.187	0.000
2	-1	2	2	0	-1	0	1	0	9.791	0.252	-0.008	0.300	0.000	0.048	0.008
2	-1	2	2	-1	1	0	0	0	9.716	-0.168	0.000			0.168	0.000
2	1	2	0	-3	3	0	0	0	9.583	0.135	0.000			0.135	0.000
2	1	2	0	0	-2	0	2	0	9.571	0.186	0.000			0.186	0.000
2	0	2	2	-18	16	0	0	0	9.558	0.490	-0.245	0.500	0.000	0.010	0.245
2	-1	2	2	0	-4	8	-3	0	9.557	0.053	0.173			0.053	0.173
2	-1	2	2	0	4	-8	3	0	9.557	-0.053	0.173			0.053	0.173
2	-2	2	2	18	-16	0	0	0	9.556	-0.480	-0.240	-0.500	0.000	0.020	0.240
2	1	2	0	0	-2	0	3	0	9.550	-0.103	0.019			0.103	0.019
2	1	2	0	-2	2	0	0	0	9.428	0.101	0.000			0.101	0.000
2	1	2	0	0	-1	0	1	0	9.347	0.243	-0.005			0.243	0.005
2	1	2	0	-1	1	0	0	0	9.278	-0.279	0.000	-0.300	0.000	0.022	0.000
2	-1	2	2	2	-2	0	0	0	9.254	-0.164	0.000			0.164	0.000
2	-1	2	0	-2	3	0	0	0	9.191	0.000	0.113			0.000	0.113
2	1	1	1	0	1	0	0	0	9.145	0.010	-0.115			0.010	0.115
2	-1	2	2	0	2	0	-3	0	9.139	-0.536	-0.095	-0.500	0.000	0.036	0.095
2	2	2	0	-18	16	0	0	0	9.134	2.428	-1.213	2.400	-1.200	0.028	0.013
1	1	1	1	0	1	0	0	0	9.133	-0.041	0.352	0.000	0.300	0.041	0.052
2	1	2	0	0	-4	8	-3	0	9.133	0.082	0.300	0.000	0.300	0.082	0.000
2	1	2	0	0	4	-8	3	0	9.133	-0.082	0.300	0.000	0.300	0.082	0.000
2	0	2	0	18	-16	0	0	0	9.132	-2.379	-1.188	-2.400	-1.200	0.021	0.012
1	2	2	0	-18	16	0	0	0	9.122	0.406	-0.203	0.400	0.000	0.006	0.203
2	-1	2	2	0	2	0	-2	0	9.120	1.285	0.000	1.300	0.000	0.015	0.000
1	0	2	0	18	-16	0	0	0	9.120	-0.398	-0.199	-0.400	0.000	0.002	0.199
2	-1	2	2	3	-3	0	0	0	9.110	0.731	0.000	0.700	0.000	0.031	0.000
1	-1	2	2	0	2	0	-2	0	9.108	0.217	0.000			0.217	0.000
1	-1	2	2	3	-3	0	0	0	9.097	0.123	0.000			0.123	0.000
2	1	2	0	2	-3	0	0	0	9.076	0.000	0.108			0.000	0.108
2	1	2	0	1	-1	0	0	0	8.992	0.254	0.000	0.300	0.000	0.047	0.000
2	1	2	0	0	1	0	-1	0	8.929	-0.211	-0.004			0.211	0.004
2	0	2	2	0	-2	0	2	0	7.358	-0.102	0.000			0.102	0.000
2	0	2	2	-2	2	0	0	0	7.273	0.175	0.000			0.175	0.000
2	0	2	2	0	-1	0	1	0	7.224	0.223	-0.007			0.223	0.007
2	0	2	2	-1	1	0	0	0	7.183	-0.144	0.000			0.144	0.000
2	1	2	2	-18	16	0	0	0	7.096	0.403	-0.201	0.400	0.000	0.003	0.201
2	0	2	2	0	4	-8	3	0	7.096	-0.039	0.132			0.039	0.132
2	0	2	2	0	-4	8	-3	0	7.096	0.039	0.131			0.039	0.131
2	-1	2	2	18	-16	0	0	0	7.095	-0.399	-0.199	-0.400	0.000	0.001	0.199
2	0	2	2	0	2	0	-3	0	6.863	-0.104	-0.019			0.104	0.019
2	3	2	0	-18	16	0	0	0	6.860	0.322	-0.161	0.300	0.000	0.022	0.161
2	1	2	0	18	-16	0	0	0	6.859	-0.312	-0.156	-0.300	0.000	0.012	0.156
2	0	2	2	0	2	0	-2	0	6.852	0.252	0.000	0.300	0.000	0.048	0.000
2	0	2	2	3	-3	0	0	0	6.846	0.131	0.000			0.131	0.000

Tabla 12.32: Efecto indirecto en la órbita de la Luna. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$\Omega$	$l_M$	$F$	$D$	$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_{\sin}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi)_{\cos}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_s$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_c$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _s$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _c$ ( $\mu\text{as}$ )
1	0	1	-1	0	-1	0	-2	5	311923.735	272.950	163.616	273.500	164.700	0.550	1.084
1	-2	0	2	0	2	0	-2	0	100155.423	0.000	-15.117	0.000	-15.100	0.000	0.017
1	0	1	-1	-8	12	0	0	0	-88081.966	31.848	-63.744	31.900	-64.100	0.052	0.356
1	0	0	0	0	-1	2	0	0	37883.593	-23.126	24.526	-23.200	24.600	0.074	0.074
1	2	0	-2	0	-2	0	3	0	-13630.813	0.000	-4.745	-0.900	-4.800	0.900	0.055
1	0	0	0	0	0	0	1	0	11945.280	-3.769	0.000	-3.700	-1.100	0.069	1.100
1	0	1	-1	0	-1	0	0	-1	-10771.540	4.479	-9.261	4.500	-9.300	0.021	0.039
1	0	1	-1	0	-1	0	0	1	10746.943	0.000	3.553	-0.600	3.500	0.600	0.053
1	0	2	-2	0	-9	13	0	0	-10648.784	-1.173	0.000	-1.200	-0.500	0.027	0.500
1	1	0	-1	-3	4	0	0	0	-8437.848	1.539	0.000	1.500	0.000	0.039	0.000
1	0	0	0	8	-13	0	0	0	-7372.756	3.543	-2.464	3.500	-2.500	0.043	0.036
1	-1	0	0	18	-16	0	0	0	-7295.729	-1.803	3.615	-1.800	3.600	0.002	0.015
1	0	0	0	0	0	0	-2	5	-6944.728	0.934	-4.080	0.900	-4.100	0.034	0.020
1	0	0	0	0	-4	8	-3	0	-6870.085	15.907	-4.467	15.900	-4.500	0.007	0.033
2	0	1	-1	0	-1	0	0	0	-6803.298	29.557	-3.427			29.557	3.427
1	0	0	0	0	4	-8	3	0	-6728.164	15.579	4.375	15.600	4.400	0.021	0.025
1	0	0	0	0	0	0	2	-5	-6658.080	0.895	3.912	0.900	3.900	0.005	0.012
1	1	0	0	-18	16	0	0	0	-6364.518	-1.517	-3.035	-1.500	-3.000	0.017	0.035
1	0	0	0	-8	13	0	0	0	-6307.036	3.031	2.110	3.000	2.100	0.031	0.010
1	0	1	-1	0	0	-2	0	0	-5767.538	4.246	-14.576	4.300	-14.600	0.054	0.024
1	0	1	-1	0	-2	2	0	0	5760.479	-2.535	0.000	-2.500	0.400	0.035	0.400
1	-1	0	1	3	-4	0	0	0	-5692.364	1.259	0.000	1.300	0.000	0.041	0.000

Tabla 12.32: Efecto indirecto en la órbita de la Luna. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_a} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

1	0	1	-1	0	-1	0	0	2	5376.541	-5.840	2.591	-5.900	2.600	0.060	0.009
1	0	0	0	-3	5	0	0	0	5240.146	0.000	1.098	-0.300	1.100	0.300	0.002
1	0	0	0	0	-2	4	0	0	5002.824	-1.088	0.611	-1.100	0.600	0.012	0.011
1	0	2	-2	-5	6	0	0	0	-4948.506	-23.279	0.938	-23.300	0.900	0.021	0.038
1	-2	0	2	6	-8	0	0	0	-4895.862	0.000	-0.623	-0.100	-0.600	0.100	0.023
1	-2	0	2	0	2	0	-3	0	-4528.486	-0.505	2.816	-0.500	2.800	0.005	0.016
1	0	1	-1	0	-1	0	-1	0	-4334.585	10.334	2.670	10.300	2.700	0.034	0.030
1	0	1	-1	0	-1	0	1	0	4330.596	-2.500	0.000	-2.500	0.300	0.000	0.300
1	0	2	-2	0	-8	11	0	0	-3739.745	0.410	0.000	0.400	0.000	0.010	0.000
1	0	2	-2	0	2	0	0	0	-3716.241	0.420	0.000	0.400	0.000	0.010	0.000
1	0	1	-1	0	-1	0	0	3	3585.043	0.000	0.400	0.200	0.400	0.200	0.000
1	0	-1	1	0	1	0	0	0	-3397.965	0.535	0.000	0.000	0.000	0.535	0.000
1	2	0	-2	0	-2	0	2	0	-3287.613	0.000	-2.876	0.000	-2.900	0.000	0.024
2	0	1	-1	0	-1	0	2	0	3178.335	0.434	0.000	0.400	0.000	0.034	0.000
1	0	0	0	0	1	-2	0	0	-3119.305	1.865	1.981	1.900	2.000	0.035	0.019
1	0	2	-2	0	-2	0	0	2	3001.262	0.000	-0.403	0.000	-0.400	0.000	0.003
1	0	1	-1	3	-6	0	0	0	-2960.140	-0.755	0.454	-0.800	0.500	0.045	0.046
1	0	1	-1	-3	4	0	0	0	2958.279	2.108	0.513	2.100	0.500	0.008	0.013
2	0	2	-2	-3	3	0	0	0	2957.349	0.000	0.503	0.000	0.500	0.000	0.003
1	0	1	-1	0	-3	4	0	0	2881.121	-0.718	-0.506	-0.700	-0.500	0.018	0.006
2	0	2	-2	-5	6	0	0	0	-2863.894	0.516	0.000	0.500	0.000	0.016	0.000
1	0	1	-1	-5	7	0	0	0	-2863.023	1.414	-7.471	1.400	-7.500	0.014	0.029
1	0	0	0	0	0	0	-1	0	-2646.184	0.803	0.000	0.800	-0.200	0.003	0.200
1	2	0	-2	-3	3	0	0	0	-2337.204	0.000	-0.858	0.000	-0.900	0.000	0.042
1	0	1	-1	0	-1	0	2	0	2165.796	-7.656	1.421	-7.700	1.400	0.044	0.021
1	0	0	0	3	-5	0	0	0	-2061.762	0.000	0.418	0.100	0.400	0.100	0.018
1	0	2	-2	-3	3	0	0	0	2060.860	0.000	-6.278	0.000	-6.300	0.000	0.022
1	0	0	0	0	2	-4	0	0	-2023.986	0.427	0.241	0.400	0.200	0.027	0.041
1	0	1	-1	0	-4	6	0	0	1920.943	0.000	-0.217	0.000	-0.200	0.000	0.017
1	0	0	0	2	-3	0	0	0	1851.091	-1.691	0.000	-1.700	0.000	0.009	0.000
1	0	2	-2	0	-2	0	2	0	1642.241	0.000	-2.661	0.000	-2.700	0.000	0.039
1	-2	1	1	0	1	0	0	0	1616.025	-0.293	0.000	-0.300	0.000	0.007	0.000
1	0	1	-1	-2	2	0	0	0	-1455.161	0.000	-0.937	0.000	-0.900	0.000	0.037
1	0	1	-1	0	-1	0	3	0	1443.975	-0.465	0.177	-0.500	0.200	0.035	0.023
1	0	0	0	-2	3	0	0	0	-1198.452	1.015	0.000	1.000	0.000	0.015	0.000
1	0	2	-2	0	-2	0	3	0	1190.855	0.000	-0.347	0.000	-0.400	0.000	0.053
1	0	0	0	-1	2	0	0	0	1138.758	0.144	0.000	0.100	0.000	0.044	0.000
1	0	1	-1	1	-3	0	0	0	-975.479	0.000	0.209	0.000	0.200	0.000	0.009
1	0	2	-2	-4	4	0	0	0	-814.780	0.000	-1.435	0.000	-1.400	0.000	0.035
1	0	1	-1	-4	6	0	0	0	733.526	0.000	-0.147	0.000	-0.100	0.000	0.047
1	0	1	-1	-4	5	0	0	0	-727.524	1.469	0.352	1.500	0.400	0.031	0.048
1	0	2	-2	-4	5	0	0	0	662.042	-0.109	0.000	0.000	0.100	0.009	0.000
1	0	0	0	1	-1	0	0	0	638.788	0.000	1.499	0.000	1.500	0.000	0.001
1	0	1	-1	-1	0	0	0	0	-583.958	1.120	-0.265	1.100	-0.300	0.020	0.035
1	0	1	-1	1	-2	0	0	0	583.885	0.268	-0.064	0.300	0.000	0.032	0.064
1	0	0	0	-1	1	0	0	0	-537.735	0.000	1.038	0.000	1.000	0.000	0.038
1	0	2	-2	0	-3	0	3	0	-526.851	0.000	-0.207	0.000	-0.200	0.000	0.007
1	0	1	-1	-2	3	0	0	0	487.664	0.475	0.113	0.500	0.100	0.025	0.013
1	0	0	0	0	1	0	-2	0	469.684	-0.201	-0.121	-0.200	-0.100	0.001	0.021
1	1	-1	0	0	1	0	0	0	468.568	0.276	0.000	0.000	0.276	0.000	0.000
1	0	2	-2	-2	2	0	0	0	455.002	0.000	-0.600	0.000	-0.600	0.000	0.000
1	0	0	0	3	-4	0	0	0	443.896	-0.232	0.000	-0.200	0.000	0.032	0.000
1	0	0	0	0	1	0	-1	0	423.747	0.000	-0.827	0.000	-0.800	0.000	0.026
1	0	0	0	0	2	-2	0	0	413.699	0.000	-0.246	0.000	-0.200	0.000	0.046
1	0	0	0	0	-1	0	2	0	-412.664	0.138	-0.083	0.100	0.000	0.038	0.083
1	0	0	0	-3	4	0	0	0	-392.624	0.158	0.000	0.200	0.000	0.042	0.000
1	0	0	0	0	-1	0	1	0	-376.777	0.000	-0.561	0.000	-0.600	0.000	0.039
1	0	0	0	0	-2	2	0	0	-368.812	0.000	-0.164	0.000	-0.200	0.000	0.036
1	0	2	-2	-5	5	0	0	0	-340.149	0.000	-0.211	0.000	-0.200	0.000	0.011
1	0	1	-1	-5	6	0	0	0	-323.930	0.210	0.051	0.200	0.000	0.010	0.051
1	0	2	-2	0	-1	0	1	0	320.933	0.000	-0.280	0.000	-0.300	0.000	0.021
1	0	0	0	2	-2	0	0	0	305.062	0.000	-0.310	0.000	-0.300	0.000	0.010
1	0	1	-1	-2	1	0	0	0	-291.970	0.277	-0.065	0.300	0.000	0.024	0.065
1	0	0	0	-2	2	0	0	0	-279.939	0.000	-0.191	0.000	-0.200	0.000	0.010
1	0	1	-1	-1	2	0	0	0	265.735	0.141	0.034	0.100	0.000	0.041	0.034
1	0	2	-2	-1	1	0	0	0	255.731	0.000	0.115	0.000	0.000	0.000	0.115
1	0	0	0	0	2	0	-2	0	205.470	0.000	0.154	0.000	0.200	0.000	0.046
1	0	1	-1	-3	2	0	0	0	-194.644	0.114	-0.027	0.000	0.114	0.000	0.027
1	0	1	-1	0	1	0	0	0	182.625	-0.492	-0.044	-0.500	0.000	0.008	0.444
1	0	2	-2	0	4	-8	3	0	177.892	0.227	0.068	0.200	0.000	0.027	0.068
1	0	2	-2	0	-4	8	-3	0	177.795	0.227	-0.068	0.200	0.000	0.027	0.068
1	0	2	-2	1	-1	0	0	0	136.324	0.000	-0.144	0.000	-0.100	0.000	0.044
1	0	2	-2	0	1	0	-1	0	123.003	0.000	0.199	0.000	0.200	0.000	0.001
1	0	2	-2	2	-2	0	0	0	110.521	0.000	0.129	0.000	0.000	0.000	0.129
1	-1	1	-1	0	-1	0	0	0	-27.555	-0.242	0.029	-0.200	0.000	0.042	0.029
1	1	1	-1	0	-1	0	0	0	27.554	0.244	-0.029	0.300	0.000	0.057	0.029
1	-1	0	2	0	2	0	-2	0	27.547	0.000	0.155	0.000	0.200	0.000	0.045
1	1	0	-2	0	-2	0	2	0	-27.326	0.000	-0.155	0.000	-0.200	0.000	0.045
2	1	2	-2	-3	3	0	0	0	27.300	0.000	0.142	0.000	0.100	0.000	0.042
2	1	2	-2	0	-2	0	2	0	27.208	0.000	0.255	0.000	0.000	0.000	0.255

Tabla 12.32: Efecto indirecto en la órbita de la Luna. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

2	0	2	0	-18	16	0	0	0	27.100	0.081	0.162	0.000	0.200	0.081	0.038	
2	-2	2	0	18	-16	0	0	0	27.085	0.076	-0.152	0.000	-0.200	0.076	0.048	
2	0	2	0	-2	2	0	0	0	14.331	0.000	-0.126	0.000	-0.100	0.000	0.026	
2	0	2	0	0	-1	0	1	0	14.145	-0.006	-0.267	0.000	-0.300	0.006	0.033	
2	0	2	0	-1	1	0	0	0	13.988	0.000	0.347	0.000	0.300	0.000	0.047	
2	0	2	0	-2	3	0	0	0	13.790	0.146	0.000	0.100	0.000	0.046	0.000	
2	0	2	0	0	1	-2	0	0	13.693	0.093	0.104			0.093	0.104	
2	0	1	1	0	1	0	0	0	13.688	-0.151	-0.014	-0.200	0.000	0.049	0.014	
2	-2	2	2	0	2	0	-3	0	13.675	-0.019	0.106			0.019	0.106	
2	1	2	0	-18	16	0	0	0	13.663	-2.731	-5.468	-2.700	-5.500	0.031	0.032	
1	0	1	1	0	1	0	0	0	13.661	1.483	0.174	1.500	0.200	0.017	0.026	
2	0	2	0	0	4	-8	3	0	13.661	0.372	0.107	0.400	0.100	0.028	0.007	
2	0	2	0	0	-4	8	-3	0	13.661	0.372	-0.107	0.400	-0.100	0.028	0.007	
2	-1	2	0	10	-3	0	0	0	13.661	0.109	0.216	0.100	0.200	0.009	0.016	
2	1	2	0	-10	3	0	0	0	13.661	0.109	-0.216			0.009	0.016	
2	-1	2	0	18	-16	0	0	0	13.659	-2.733	5.472	-2.700	5.500	0.033	0.028	
2	2	2	0	-2	0	-2	0	3	0	13.647	-0.024	-0.133	0.000	-0.100	0.024	0.033
1	1	2	0	-18	16	0	0	0	13.635	-0.562	-1.124	-0.600	-1.100	0.038	0.024	
1	-1	2	0	18	-16	0	0	0	13.632	-0.562	1.125	-0.600	1.100	0.038	0.025	
2	-2	2	2	0	2	0	-2	0	13.632	0.000	0.141	0.000	0.100	0.000	0.041	
2	0	2	0	0	-1	2	0	0	13.628	0.093	-0.104			0.093	0.104	
2	0	2	0	2	-3	0	0	0	13.534	0.148	0.000	0.100	0.000	0.048	0.000	
2	0	2	0	1	-1	0	0	0	13.349	0.000	-0.358	0.000	-0.400	0.000	0.042	
2	0	2	0	0	1	0	-1	0	13.208	-0.006	0.281	0.000	0.300	0.006	0.019	
2	0	2	0	2	-2	0	0	0	13.050	0.000	0.133	0.000	0.100	0.000	0.033	
2	-1	2	2	0	-1	0	1	0	9.791	-0.003	-0.109	0.000	-0.100	0.003	0.009	
2	0	2	2	-18	16	0	0	0	9.558	-0.106	-0.213	-0.100	-0.200	0.006	0.013	
2	-2	2	2	18	-16	0	0	0	9.556	-0.104	0.208	-0.100	0.200	0.004	0.008	
2	1	2	0	0	-1	0	1	0	9.347	-0.002	-0.105			0.002	0.105	
2	1	2	0	-1	1	0	0	0	9.278	0.000	0.121	0.000	0.100	0.000	0.021	
2	-1	2	2	0	2	0	-3	0	9.139	-0.041	0.233	0.000	0.200	0.041	0.033	
2	2	2	0	-18	16	0	0	0	9.134	-0.526	-1.053	-0.500	-1.100	0.026	0.047	
1	1	1	1	0	1	0	0	0	9.133	0.188	0.022	0.100	0.000	0.088	0.022	
2	1	2	0	0	4	-8	3	0	9.133	0.130	0.036	0.100	0.000	0.030	0.036	
2	1	2	0	0	-4	8	-3	0	9.133	0.130	-0.036	0.200	0.000	0.070	0.036	
2	0	2	0	18	-16	0	0	0	9.132	-0.515	1.031	-0.500	1.000	0.015	0.031	
1	2	2	0	-18	16	0	0	0	9.122	-0.108	-0.217	-0.100	-0.200	0.008	0.017	
2	-1	2	2	0	2	0	-2	0	9.120	0.000	-0.557	-0.100	0.200	0.100	0.757	
1	0	2	0	18	-16	0	0	0	9.120	-0.106	0.213	0.000	-0.600	0.106	0.813	
2	-1	2	2	3	-3	0	0	0	9.110	0.000	-0.317			0.000	0.317	
1	-1	2	2	0	2	0	-2	0	9.108	0.000	-0.116			0.000	0.116	
2	1	2	0	1	-1	0	0	0	8.992	0.000	-0.110	0.000	-0.100	0.000	0.010	
2	1	2	2	-18	16	0	0	0	7.096	-0.087	-0.175	0.000	-0.200	0.087	0.025	
2	-1	2	2	18	-16	0	0	0	7.095	-0.086	0.173	0.000	0.200	0.086	0.027	
2	3	2	0	-18	16	0	0	0	6.860	-0.070	-0.140	0.000	-0.100	0.070	0.040	
2	1	2	0	18	-16	0	0	0	6.859	-0.068	0.135	0.000	0.100	0.068	0.035	
2	0	2	2	0	2	0	-2	0	6.852	0.000	-0.109	0.000	-0.100	0.000	0.009	

En las tablas que siguen, por facilitar la lectura, se ha prescindido de los términos dependientes de la longitud de Urano, dado que únicamente dos de ellos superaban en valor absoluto la amplitud de  $0.1 \mu\text{as}$  (ningún término en las series de Souchay y Kinoshita).

Tabla 12.33: Efecto indirecto en la órbita de la Tierra. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$L_{Me}$	$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$h$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_{\sin}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi)_{\cos}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_s$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_K)_c$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _s$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _c$ ( $\mu\text{as}$ )
0	0	4	-8	3	0	0	-651392.660	-50.6422	158.7290	-46.2000	160.4000	4.4422	1.6710
0	0	0	0	2	-5	0	-322614.503	-45.7978	0.0000	-48.7000	11.3000	2.9022	11.3000
0	8	-13	0	0	0	0	87265.401	23.3264	33.4941	23.5000	33.4000	0.1736	0.0941
0	0	8	-15	0	0	0	14765.973	4.4704	-2.0681	4.5000	-2.2000	0.0296	0.1319
0	0	0	0	0	1	0	10759.227	1.1027	9.5320	1.1000	9.5000	0.0027	0.0320
0	0	0	0	0	1	-2	10734.686	0.0000	4.1036			0.0000	4.1036
0	0	9	-17	0	0	0	-9454.730	0.0000	-0.6043	0.5000	-0.6000	0.5000	0.0043
0	3	-5	0	2	0	0	8084.756	1.1088	0.0000	1.0000	0.0000	0.1088	0.0000
0	0	1	-2	0	0	0	-5764.006	-36.7643	38.7709	-36.8000	38.7000	0.0357	0.0709
0	0	1	-2	0	0	2	-5756.956	1.4475	7.9582			1.4475	7.9582
0	0	0	0	3	-5	0	4391.566	0.0000	-0.3719	0.0000	-0.4000	0.0000	0.0281
0	0	0	0	1	0	0	4332.589	-42.4471	29.9057	-42.5000	29.9000	0.0529	0.0057
0	0	0	0	1	0	-2	4328.604	3.0492	0.0000	0.5000	0.3000	2.5492	0.3000

Tabla 12.33: Efecto indirecto en la órbita de la Tierra. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_a} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

0	0	7	-13	0	0	0	4145.701	1.0975	0.0000	1.0000	0.0000	0.0975	0.0000
0	0	0	0	2	-2	0	3626.726	-0.4339	0.0000	-0.4000	0.0000	0.0339	0.0000
0	0	0	0	0	3	-2	3583.678	0.0000	2.7360			0.0000	2.7360
0	0	3	-5	0	0	0	-2959.209	-21.7197	7.3809	-21.7000	7.4000	0.0197	0.0191
0	0	3	-5	0	0	2	-2957.349	-8.5180	-0.7902	-8.5000	0.0000	0.0180	0.7902
0	0	0	2	-4	0	0	-2882.003	-7.5731	13.7077	-7.6000	13.7000	0.0269	0.0077
0	0	0	2	-4	0	2	-2880.239	2.6208	0.8337			2.6208	0.8337
0	5	-8	0	0	0	2	2863.894	0.0000	4.0505	0.0000	0.7000	0.0000	3.3505
0	5	-8	0	0	0	0	2862.152	-1.1186	-3.0872	-1.1000	-3.1000	0.0186	0.0128
0	0	0	6	-11	0	0	2411.358	0.8706	0.5793	0.9000	0.6000	0.0294	0.0207
1	0	-4	0	0	0	0	2401.563	0.5199	0.3067	0.5000	0.3000	0.0199	0.0067
0	0	0	0	0	4	-5	2179.929	1.1489	0.0000			1.1489	0.0000
0	0	0	0	2	0	0	2166.295	-3.1526	2.1912	-3.1000	2.2000	0.0526	0.0088
0	0	0	0	2	0	-2	2165.298	-9.9108	1.5309	-10.4000	0.0000	0.4892	1.5309
0	0	0	0	0	5	-2	2150.862	-1.1783	0.0000			1.1783	0.0000
0	0	0	3	-6	0	0	-1921.335	0.0000	2.7363	0.0000	2.7000	0.0000	0.0363
0	0	0	3	-6	0	2	-1920.551	1.0644	-0.6504			1.0644	0.6504
0	0	0	5	-9	0	0	1700.118	0.6719	1.3061	0.7000	1.3000	0.0281	0.0061
0	6	-10	0	0	0	2	-1479.139	0.5056	0.0000			0.5056	0.0000
0	2	-3	0	0	0	2	1455.386	-1.3000	0.0000			1.3000	0.0000
0	2	-3	0	0	0	0	1454.936	0.8312	48.5226	0.8000	48.5000	0.0312	0.0226
0	0	0	0	0	3	0	1444.196	-0.1778	0.1648			0.1778	0.1648
0	0	0	0	0	3	0	1443.753	-0.6865	4.9095	-0.8000	0.0000	0.1135	4.9095
0	0	0	4	-8	0	0	-1441.002	0.2797	0.5090	0.3000	0.5000	0.0203	0.0090
0	0	0	4	-8	0	2	-1440.561	0.0000	-0.4310			0.0000	0.4310
0	0	0	0	0	4	-2	1355.820	-0.3035	0.0000			0.3035	0.0000
0	0	0	4	-7	0	2	1313.245	-0.3121	0.0000			0.3121	0.0000
0	0	0	4	-7	0	0	1312.879	0.0000	2.4789	0.0000	2.5000	0.0000	0.0211
0	0	0	5	-10	0	0	-1152.801	0.1106	0.0000			0.1106	0.0000
0	0	0	0	0	4	0	1082.898	-2.7775	1.0461			2.7775	1.0461
0	0	0	3	-5	0	2	1069.561	-0.3768	0.0000			0.3768	0.0000
0	0	3	-5	0	0	0	1069.318	-2.3852	4.0061	-2.4000	4.0000	0.0148	0.0061
0	1	-2	0	0	0	0	-975.378	2.1582	0.1631	2.2000	0.0000	0.0418	0.1631
0	1	-2	0	0	0	2	-975.176	-0.8354	-2.9508	0.0000	-0.6000	0.8354	2.3508
0	0	0	2	-3	0	0	901.985	-8.1999	4.6930	-8.2000	4.7000	0.0001	0.0070
0	0	0	0	0	5	0	866.358	-0.2541	0.0000			0.2541	0.0000
0	0	1	-1	0	0	0	779.936	-5.5981	0.0000	-5.6000	0.0000	0.0019	0.0000
0	4	-7	0	0	0	0	-733.583	0.0000	-0.1498			0.0000	0.1498
0	4	-6	0	0	0	2	727.580	1.3025	0.0000	1.4000	0.0000	0.0975	0.0000
0	4	-6	0	0	0	0	727.468	-3.0236	0.8357	-3.0000	0.8000	0.0236	0.0357
0	0	0	1	0	0	0	686.980	-0.7378	-0.4178	-0.7000	-0.4000	0.0378	0.0178
0	0	1	0	-5	0	2	631.494	-0.1816	0.0000			0.1816	0.0000
0	0	1	-3	0	0	2	-613.742	-0.2430	0.0000			0.2430	0.0000
0	0	7	-12	0	0	0	589.324	0.1256	0.0000			0.1256	0.0000
0	1	-1	0	0	0	0	583.921	66.0696	0.0000	66.1000	0.0000	0.0304	0.0000
0	1	-1	0	0	0	-2	583.849	-0.1585	0.0000			0.1585	0.0000
0	0	2	-5	0	0	2	-554.680	1.2541	-0.6636			1.2541	0.6636
0	0	1	0	-4	0	2	551.160	-0.9762	-0.2059			0.9762	0.2059
0	0	1	0	-4	0	0	551.095	-0.3797	0.3750	-0.4000	0.4000	0.0203	0.0250
0	0	6	-10	0	0	0	534.659	0.1756	0.3448	0.0000	0.3000	0.1756	0.0448
0	0	3	-7	0	0	2	-505.988	0.3963	-0.6129			0.3963	0.6129
0	0	5	-8	0	0	0	489.275	0.0000	1.0489	0.0000	1.1000	0.0000	0.0511
0	0	1	0	-3	0	2	488.958	-0.5967	0.2212	-0.6000	0.0000	0.0033	0.2212
0	0	1	0	-3	0	0	488.908	-2.7892	3.6350	-2.8000	3.6000	0.0108	0.0350
0	2	-4	0	0	0	0	-487.689	-0.8255	0.0000	-0.8000	0.0000	0.0255	0.0000
0	2	-4	0	0	0	2	-487.638	11.0626	-0.1109	10.9000	0.0000	0.1626	0.1109
0	6	-9	0	0	0	2	485.029	0.0000	0.3086			0.0000	0.3086
0	6	-9	0	0	0	0	484.979	-0.1006	-0.3125	0.0000	-0.3000	0.1006	0.0125
0	0	4	-9	0	0	2	-465.155	0.0000	-0.3723			0.0000	0.3723
0	0	4	-6	0	0	0	450.992	-1.5729	2.5893	-1.6000	2.6000	0.0271	0.0107
0	0	1	0	-3	2	0	448.177	-0.1308	0.0000			0.1308	0.0000
0	0	1	0	0	-5	0	439.931	-0.1236	0.1380			0.1236	0.1380
0	0	1	0	-2	0	2	439.373	0.3766	0.9922			0.3766	0.9922
0	0	1	0	-2	0	0	439.332	-18.4582	27.0435	-18.5000	27.0000	0.0418	0.0435
1	0	-5	0	0	0	2	-430.734	0.1414	-0.1257			0.1414	0.1257
0	0	5	-11	0	0	2	-430.420	0.0000	-0.1872			0.0000	0.1872
0	5	-9	0	0	0	2	-418.650	-0.3173	-0.3130	-0.3000	0.0000	0.0173	0.3130
0	3	-4	0	0	0	0	418.266	-8.3707	4.7979	-8.4000	4.8000	0.0293	0.0021
0	3	-4	0	0	0	2	416.725	0.0000	-0.2092			0.0000	0.2092
0	3	-4	0	0	0	0	416.688	-0.4934	29.2521	-0.5000	29.3000	0.0066	0.0479
0	3	-4	0	0	0	-2	416.651	0.0000	-0.2427			0.0000	0.2427
0	0	1	0	0	-3	0	406.674	-0.3122	0.0000	-0.3000	0.0000	0.0122	0.0000
0	0	6	-13	0	0	2	-400.512	-0.1114	0.0000			0.1114	0.0000
0	0	1	0	1	-5	0	399.378	-0.3736	0.0000	-0.3000	0.0000	0.0736	0.0000
0	0	1	0	-1	0	0	398.884	-135.4599	-2.6054	-135.5000	-2.6000	0.0401	0.0054
0	0	1	0	-1	0	-2	398.850	-0.4681	0.8392			0.4681	0.8392
0	0	1	0	-3	5	0	398.391	0.3498	0.0000	0.3000	0.0000	0.0498	0.0000
0	0	1	0	0	-2	0	391.862	-0.5593	1.9771	-0.6000	2.0000	0.0407	0.0229
0	0	2	-2	0	0	0	389.968	-38.4842	0.1431	-38.5000	0.0000	0.0158	0.1431
0	0	2	-2	0	0	-2	389.936	-0.3384	-0.1261			0.3384	0.1261

Tabla 12.33: Efecto indirecto en la órbita de la Tierra. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_{E} + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{So} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

0	0	1	0	0	-1	0	378.092	-7.7630	0.0000	-7.8000	0.0000	0.0370	0.0000
0	0	7	-15	0	0	2	-374.491	-0.2036	0.0000			0.2036	0.0000
0	0	1	0	-1	2	-2	371.320	-0.1770	0.0000			0.1770	0.0000
0	8	-14	0	0	0	0	-366.792	-0.5389	0.1932	-0.5000	0.0000	0.0389	0.1932
0	8	-14	0	0	0	2	-366.763	-0.2404	0.0000	0.3000	0.0000	0.5404	0.0000
0	0	1	0	2	-5	0	365.670	-1.3384	-2.9541	-1.3000	-3.0000	0.0384	0.0459
0	0	5	-8	3	0	0	365.461	2.0994	0.2544	2.1000	0.3000	0.0006	0.0456
0	0	5	-8	3	0	-2	365.433	-1.5757	-0.8902	-0.3000	0.0000	1.2757	0.8902
0	0	1	0	0	0	2	365.285	-0.1313	-0.1623			0.1313	0.1623
0	0	7	-16	4	5	0	-365.260	-0.2263	0.0000			0.2263	0.0000
0	0	9	-16	4	5	0	365.252	0.1958	-0.1142			0.1958	0.1142
0	0	7	-16	4	5	2	-365.232	0.1633	0.0000			0.1633	0.0000
0	0	9	-16	4	5	-2	365.224	-0.1885	0.0000			0.1885	0.0000
0	0	3	-8	3	0	0	-365.052	-1.8888	-1.0681	-1.9000	-1.1000	0.0112	0.0319
0	0	3	-8	3	0	2	-365.023	0.3709	0.1715	0.4000	0.0000	0.0291	0.1715
0	0	1	0	-2	5	0	364.843	0.1248	0.0000			0.1248	0.0000
0	0	1	0	-2	5	-2	364.815	0.6698	0.4790	0.0000	0.5000	0.6698	0.0210
0	8	-12	0	0	0	0	363.734	-0.7429	0.1210	-0.8000	0.0000	0.0571	0.1210
0	8	-12	0	0	0	-2	363.706	-0.4494	0.1610			0.4494	0.1610
0	0	1	0	1	-2	0	359.360	0.3434	0.0000	0.3000	0.0000	0.0434	0.0000
0	0	9	-15	0	0	0	356.439	-0.3822	0.0000	-0.4000	0.0000	0.0178	0.0000
0	0	1	0	0	1	0	353.264	0.1273	0.0000			0.1273	0.0000
0	0	1	0	0	1	-2	353.237	-1.3785	0.0000	-1.4000	0.0000	0.0215	0.0000
0	0	0	2	0	0	0	343.490	0.5499	-0.1155	0.6000	0.0000	0.0501	0.1155
0	0	0	2	0	0	-2	343.465	-6.9009	0.2189	-6.9000	0.0000	0.0009	0.2189
0	0	1	0	0	2	-2	342.009	0.2274	0.7910	0.0000	-0.3000	0.2274	1.0910
0	0	1	0	3	-5	-2	337.186	-0.1472	0.0000			0.1472	0.0000
0	0	1	0	1	0	0	336.858	0.7809	1.1497	0.8000	1.1000	0.0191	0.0497
0	0	1	0	1	0	-2	336.834	-24.7175	0.1381	-24.6000	0.0000	0.1175	0.1381
0	0	1	0	-1	5	-2	336.482	0.1571	0.0000			0.1571	0.0000
0	0	8	-13	0	0	0	335.681	-0.1869	-0.1427			0.1869	0.1427
0	0	1	0	0	3	-2	331.472	0.1271	0.0000			0.1271	0.0000
0	3	-6	0	0	0	0	-325.126	0.0000	-0.3681	0.0000	-0.4000	0.0000	0.0319
0	3	-6	0	0	0	2	-325.103	-0.2021	-5.2917	0.0000	-5.3000	0.2021	0.0083
0	0	1	-4	0	0	0	-324.172	-0.1607	-0.1051			0.1607	0.1051
0	0	5	-7	0	0	2	-324.149	1.6071	-0.8375	1.6000	-0.8000	0.0071	0.0375
0	0	5	-7	0	0	2	323.941	1.2488	0.0000	0.3000	0.0000	0.9488	0.0000
0	0	5	-7	0	0	0	323.919	2.2061	-0.4769	2.2000	-0.5000	0.0061	0.0231
0	0	7	-11	0	0	0	317.208	-0.1250	-0.2803	0.0000	-0.3000	0.1250	0.0197
1	0	-3	0	0	0	2	317.059	0.2136	0.0000	0.3000	0.0000	0.0864	0.0000
1	0	-3	0	0	0	0	317.038	0.2062	-0.1876			0.2062	0.1876
0	0	1	0	2	0	-2	312.536	-3.4839	-4.7829	-3.5000	-4.8000	0.0161	0.0171
0	0	2	-6	0	0	2	-306.891	-0.5225	-0.4832	0.3000	-0.5000	0.8225	0.0168
0	0	6	-9	0	0	0	300.662	0.0000	-0.4858	0.0000	-0.5000	0.0000	0.0142
0	2	-2	0	0	0	0	291.961	-95.5752	-0.2223	-95.6000	0.0000	0.0248	0.2223
0	2	-2	0	0	0	-2	291.943	-0.5656	-0.1351			0.5656	0.1351
0	0	1	0	3	0	-2	291.508	-0.5522	-0.6624	-0.5000	-0.7000	0.0522	0.0376
0	0	3	-8	0	0	2	-291.377	0.0000	0.3080			0.0000	0.3080
0	0	5	-7	0	0	0	285.756	0.4677	-0.6887	0.5000	-0.7000	0.0323	0.0113
0	0	4	-5	0	0	0	272.259	1.2719	-0.6320	1.3000	-0.6000	0.0281	0.0320
0	1	-3	0	0	0	0	-265.742	-0.1504	0.0000			0.1504	0.0000
0	1	-3	0	0	0	2	-265.727	-28.1907	0.0000	-28.2000	0.0000	0.0093	0.0000
0	0	3	-3	0	0	0	259.979	2.1338	0.1380	2.1000	0.0000	0.0338	0.1380
0	0	3	-3	0	0	-2	259.964	0.0000	-0.1227			0.0000	0.1227
0	0	2	-1	0	0	0	248.759	0.0000	0.1284			0.0000	0.1284
0	0	2	-1	0	0	-2	248.746	0.1507	-0.1523			0.1507	0.1523
0	4	-8	0	0	0	2	-243.832	0.6359	0.1229	0.7000	0.0000	0.0641	0.1229
0	4	-8	0	0	0	0	243.165	0.1154	-2.3740	0.0000	-2.4000	0.1154	0.0260
0	0	1	1	0	0	-2	238.455	-1.3295	0.0000	-1.3000	0.0000	0.0295	0.0000
0	0	2	0	-5	0	0	231.398	0.1338	0.0000			0.1338	0.0000
0	0	0	3	0	0	-2	228.982	-1.8355	-1.0625	-1.8000	-1.0000	0.0355	0.0625
0	1	0	0	0	0	0	224.701	-0.4390	-1.5922	-0.4000	-1.6000	0.0390	0.0078
0	1	0	0	0	0	-2	224.690	0.0000	0.7289	-0.5000	0.6000	0.5000	0.1289
0	0	1	-5	0	0	2	-220.233	0.5503	-0.8837	0.5000	-0.9000	0.0503	0.0163
0	0	2	0	-4	0	2	219.676	-0.1583	0.0000			0.1583	0.0000
0	0	2	0	-4	0	0	219.666	1.1303	0.4277	1.1000	0.4000	0.0303	0.0277
0	0	2	-7	0	0	2	-212.128	0.0000	-0.5621	0.0000	-0.6000	0.0000	0.0379
0	0	6	-8	0	0	0	209.133	0.1005	-0.1266			0.1005	0.1266
0	0	2	0	-3	0	0	209.066	8.0143	1.5054	8.0000	1.5000	0.0143	0.0054
0	2	-5	0	0	0	2	-208.834	-0.1950	-12.7916	0.0000	-12.8000	0.1950	0.0084
0	6	-8	0	0	0	2	208.353	0.3934	0.0000			0.3934	0.0000
0	6	-8	0	0	0	0	208.344	0.1392	0.0000			0.1392	0.0000
0	0	5	-6	0	0	0	201.811	0.2947	-0.1036	0.3000	0.0000	0.0053	0.1036
0	0	5	-6	0	0	-2	201.802	0.0000	0.1102	0.0000	-0.6000	0.0000	0.7102
0	0	2	0	0	-5	0	199.565	0.2214	0.0000			0.2214	0.0000
0	0	2	0	-2	0	0	199.442	38.9150	0.3110	38.9000	0.3000	0.0150	0.0110
0	0	2	0	-2	0	-2	199.434	0.0000	-0.1962	-0.6000	0.0000	0.0000	0.1962
0	0	2	0	-4	5	0	199.319	-0.2117	0.0000			0.2117	0.0000
0	5	-10	0	0	0	2	-195.067	0.0000	0.7943	0.3000	0.8000	0.3000	0.0057
0	0	4	-4	0	0	0	194.984	0.5215	0.1697	0.5000	0.0000	0.0215	0.1697

Tabla 12.33: Efecto indirecto en la órbita de la Tierra. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_a} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

0	0	4	-4	0	0	-2	194.976	1.7345	-2.9087	1.8000	-2.9000	0.0655	0.0087
0	3	-3	0	0	0	0	194.640	-9.4193	-0.1487	-9.4000	0.0000	0.0193	0.1487
0	3	-3	0	0	0	-2	194.632	5.4275	-1.5062	5.4000	-1.5000	0.0275	0.0062
0	0	2	0	0	-3	0	192.427	0.0000	0.3058	0.0000	0.3000	0.0000	0.0058
0	0	2	0	-1	0	0	190.665	0.0000	0.0000	0.0000	3.5000	0.0000	0.0447
0	0	2	0	-1	0	-2	190.657	-15.3946	-3.0032	-15.4000	-3.0000	0.0054	0.0032
0	0	2	0	0	-2	0	189.046	1.4895	0.0000	1.5000	0.0000	0.0105	0.0000
0	0	3	-2	0	0	0	188.604	0.1949	0.9068	0.0000	0.9000	0.1949	0.0068
0	0	3	-2	0	0	-2	188.596	8.0088	-7.0862	8.0000	-7.1000	0.0088	0.0138
0	0	2	0	0	-1	0	185.782	0.0000	0.2259	0.0000	0.2259	0.0000	0.2259
0	0	2	0	0	-1	-2	185.774	0.0000	-2.0278	0.0000	-2.0000	0.0000	0.0278
0	0	6	-15	0	0	2	-184.908	-1.1259	0.0000	-1.1000	0.5000	0.0259	0.5000
0	8	-15	0	0	0	2	-183.004	-6.1432	-9.6106	-6.1000	-9.6000	0.0432	0.0106
0	3	-9	4	0	0	2	-182.924	-1.3550	0.8588	-1.4000	0.9000	0.0450	0.0412
0	0	2	0	2	-5	-2	-182.725	-1.1152	0.0000	-1.1000	-0.6000	0.0152	0.6000
0	0	6	-8	3	0	-2	182.672	12.2710	-41.5042	12.3000	-41.5000	0.0290	0.0042
0	0	12	-19	0	3	-2	182.635	0.0000	1.3846	0.0000	0.0000	0.0000	1.3846
0	0	2	0	0	0	2	182.635	-0.1343	0.0000	0.0000	0.0000	0.1343	0.0000
0	0	6	-16	4	5	2	-182.622	-1.3469	-4.3175	-1.3000	-4.3000	0.0469	0.0175
0	0	10	-16	4	5	-2	182.620	-1.3468	-4.3165	-1.3000	-4.3000	0.0468	0.0165
0	0	8	-19	0	3	2	-182.607	0.0000	1.3844	0.0000	0.0000	0.0000	1.3844
0	0	2	-8	3	0	2	-182.570	12.2746	-41.5685	12.3000	-41.6000	0.0254	0.0315
0	0	2	0	-2	5	-2	182.518	1.1762	0.0000	1.2000	-0.6000	0.0238	0.6000
0	3	-5	4	0	0	-2	182.320	-1.3505	0.8560	-1.3000	0.9000	0.0505	0.0440
0	8	-11	0	0	0	-2	182.240	-6.1775	-9.6564	-6.2000	-9.7000	0.0225	0.0436
0	0	10	-15	0	0	-2	180.390	-1.1509	0.0000	-1.1000	0.5000	0.0509	0.5000
0	0	2	0	0	1	-2	179.573	0.0000	-1.9121	0.0000	-1.9000	0.0000	0.0121
0	0	1	2	0	0	-2	177.013	-8.4669	-7.0295	-8.5000	-7.0000	0.0331	0.0295
0	0	2	0	1	0	-2	175.235	16.5713	-1.2024	16.6000	-1.2000	0.0287	0.0024
0	3	-7	0	0	0	2	-172.006	6.6243	-1.6221	6.6000	-1.6000	0.0243	0.0221
0	0	0	4	0	0	-2	171.739	-2.0697	-3.1695	-2.1000	-3.2000	0.0303	0.0305
0	5	-6	0	0	0	0	171.674	0.0000	-0.5504	0.0000	-0.5000	0.0000	0.0504
0	5	-6	0	0	0	-2	171.668	0.0000	0.9723	0.3000	1.0000	0.3000	0.0277
0	0	2	0	2	0	-2	168.423	0.0000	0.2112	0.3000	0.0000	0.3000	0.2112
0	0	1	-6	0	0	2	-166.770	0.0000	-0.1086	0.0000	-0.7000	0.0000	0.5914
0	2	-1	0	0	0	0	162.261	0.5654	2.5006	0.6000	2.5000	0.0346	0.0006
0	2	-1	0	0	0	-2	162.255	0.2094	-17.3182	0.5000	-17.3000	0.2906	0.0182
0	0	6	-7	0	0	-2	160.321	0.0000	-0.7159	0.0000	-0.7000	0.0000	0.0159
0	0	5	-5	0	0	-2	155.982	0.7431	-1.1837	0.7000	-1.2000	0.0431	0.0163
0	1	-4	0	0	0	2	-153.821	0.0000	-1.1553	-0.3000	-1.2000	0.3000	0.0447
0	7	-9	0	0	0	2	153.560	0.1542	0.0000	0.0000	0.0000	0.1542	0.0000
0	0	4	-3	0	0	-2	151.872	2.5768	-1.4138	2.6000	-1.4000	0.0232	0.0138
0	0	3	-1	0	0	-2	147.973	1.8883	0.0000	1.9000	0.0000	0.0117	0.0000
0	4	-4	0	0	0	0	145.980	-2.6780	0.0000	-2.7000	0.0000	0.0220	0.0000
0	4	-4	0	0	0	-2	145.976	1.0824	0.0000	1.1000	-0.3000	0.0176	0.3000
0	0	2	1	0	0	-2	144.270	0.0000	0.1193	0.3000	0.0000	0.3000	0.1193
0	0	1	3	0	0	-2	140.747	0.0000	0.1169	0.0000	0.0000	0.0000	0.1169
0	1	1	0	0	0	-2	139.113	-30.4590	0.0000	-30.5000	0.0000	0.0410	0.0000
0	0	3	0	-4	0	0	137.171	0.4914	0.0000	0.5000	0.0000	0.0086	0.0000
0	0	7	-8	0	0	-2	132.985	0.0000	-0.1406	0.0000	-0.4000	0.0000	0.2594
0	0	3	0	-3	0	0	132.961	1.7896	-0.2592	1.8000	-0.3000	0.0104	0.0408
0	0	3	0	-3	0	-2	132.958	0.9043	-1.1369	0.9000	-1.1000	0.0043	0.0369
0	2	-6	0	0	0	2	-132.867	0.6141	0.1334	0.8000	0.0000	0.1859	0.1334
0	6	-7	0	0	0	0	132.669	0.0000	-0.1718	0.0000	0.0000	0.0000	0.1718
0	0	6	-6	0	0	-2	129.986	0.2267	-0.9427	0.6000	-0.9000	0.3733	0.0427
0	0	3	0	-2	0	0	129.002	-0.3517	-1.2209	-0.4000	-1.2000	0.0483	0.0209
0	0	3	0	-2	0	-2	128.999	6.6649	-9.1261	6.7000	-9.1000	0.0351	0.0261
0	0	5	-4	0	0	-2	127.119	2.9836	-1.8353	3.0000	-1.8000	0.0164	0.0353
0	3	-2	0	0	0	0	126.976	0.0000	0.2710	0.0000	0.3000	0.0000	0.0290
0	3	-2	0	0	0	-2	126.973	0.0000	-11.4351	0.0000	-11.4000	0.0000	0.0351
0	0	3	0	-1	0	-2	125.269	51.6500	1.6256	51.7000	1.6000	0.0500	0.0256
0	0	3	0	0	-2	-2	124.568	0.0000	-0.2789	0.0000	-0.7000	0.0000	0.4211
0	0	4	-2	0	0	-2	124.376	14.3170	-0.2804	14.3000	-0.3000	0.0170	0.0196
0	0	3	0	0	-1	-2	123.142	2.9101	0.0000	2.9000	0.0000	0.0101	0.0000
0	8	-16	0	0	0	2	-121.919	0.5109	-0.1827	0.6000	0.0000	0.0891	0.1827
0	0	3	0	2	-5	-2	121.795	0.2322	1.1902	0.5000	1.2000	0.2678	0.0098
0	0	7	-8	3	0	-2	121.772	-2.5029	-0.1462	-2.5000	0.0000	0.0029	0.1462
0	0	3	0	0	0	0	121.752	16.3866	20.3679	0.0000	16.3866	20.3679	0.0000
0	0	5	-16	4	5	2	-121.749	0.2135	0.0000	0.3000	0.0000	0.0865	0.0000
0	0	11	-16	4	5	-2	121.749	-0.1849	0.1079	0.0000	0.0000	0.1849	0.1079
0	0	1	-8	3	0	2	-121.726	1.7860	1.0071	2.2000	1.2000	0.4140	0.1929
0	8	-10	0	0	0	-2	121.579	-0.1875	0.2970	0.0000	0.3000	0.1875	0.0030
0	0	2	2	0	0	-2	119.231	-0.2758	0.3780	-0.4000	0.4000	0.1242	0.0220
0	0	3	0	1	0	-2	118.421	-0.3100	-0.7964	-0.5000	-1.1000	0.1900	0.3036
0	3	-8	0	0	0	2	-116.938	0.0000	0.3059	0.0000	0.4000	0.0000	0.0941
0	0	1	4	0	0	-2	116.814	-0.1231	0.1028	0.0000	0.0000	0.1231	0.1028
0	5	-5	0	0	0	0	116.784	-0.9242	0.0000	-0.9000	0.0000	0.0242	0.0000
0	5	-5	0	0	0	-2	116.781	-0.8376	0.0000	-0.8000	0.0000	0.0376	0.0000
1	0	-1	0	0	0	0	115.877	-0.1554	0.0000	0.0000	0.0000	0.1554	0.0000
0	2	0	0	0	0	-2	112.348	38.5797	0.1633	38.6000	0.0000	0.0203	0.1633

Tabla 12.33: Efecto indirecto en la órbita de la Tierra. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en longitud  $\Delta\psi$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\psi = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

0	0	7	-7	0	0	-2	111.417	-0.1133	0.1394	0.0000	0.3000	0.1133	0.1606
0	0	6	-5	0	0	-2	109.304	-0.2957	0.1135	-0.6000	0.3000	0.3043	0.1865
0	0	5	-3	0	0	-2	107.270	-0.9638	0.0000	-1.0000	0.0000	0.0362	0.0000
0	4	-3	0	0	0	-2	104.294	0.0000	0.9455	0.0000	0.9000	0.0000	0.0455
0	1	2	0	0	0	-2	100.744	0.3553	1.4757	0.4000	1.7000	0.0447	0.2243
0	0	4	0	-4	0	0	99.721	0.1402	0.0000			0.1402	0.0000
0	0	4	0	-4	0	-2	99.719	-0.2584	0.0000	-0.5000	0.0000	0.2416	0.0000
0	0	4	0	-3	0	-2	97.475	-3.7149	-0.3412	-3.7000	-0.7000	0.0149	0.3588
0	6	-6	0	0	0	0	97.320	-0.3757	0.0000	-0.4000	0.0000	0.0243	0.0000
0	0	4	0	-2	0	-2	95.331	-18.3954	-0.2561	-18.4000	-0.3000	0.0046	0.0439
0	0	6	-4	0	0	-2	94.300	-0.1891	-0.1372	-0.3000	0.0000	0.1109	0.1372
0	3	-1	0	0	0	-2	94.220	3.9494	0.1272	4.0000	0.0000	0.0506	0.1272
0	0	4	0	-1	0	-2	93.278	-0.3650	-3.1661	-0.3000	-3.2000	0.0650	0.0339
0	0	4	0	0	-2	-2	92.889	-0.7000	0.0000	-0.7000	0.0000	0.0000	0.0000
0	0	5	-2	0	0	-2	92.782	-0.1703	-0.7248	0.0000	-0.8000	0.1703	0.0752
0	0	4	0	0	-1	-2	92.094	0.0000	-0.1591			0.0000	0.1591
0	0	4	0	0	0	0	91.314	0.2943	-0.3740			0.2943	0.3740
0	5	-4	0	0	0	-2	88.489	0.0000	0.1400	0.0000	0.3000	0.0000	0.1600
0	2	1	0	0	0	-2	85.920	-0.4584	-2.3386	-0.5000	-2.3000	0.0416	0.0386
0	7	-7	0	0	0	0	83.417	-0.1696	0.0000			0.1696	0.0000
0	4	-2	0	0	0	-2	81.129	1.3389	0.0000	1.3000	0.0000	0.0389	0.0000
0	0	5	0	-4	0	-2	78.333	-0.1404	0.0000	-0.3000	0.0000	0.1596	0.0000
0	0	5	0	-3	0	-2	76.942	-0.9224	0.2040	-0.9000	0.0000	0.0224	0.2040
0	0	5	0	-2	0	-2	75.599	0.2449	0.9982	0.3000	1.2000	0.0551	0.2018
0	3	0	0	0	0	-2	74.899	0.0000	-0.2252	0.0000	-0.3000	0.0000	0.0748
0	5	-3	0	0	0	-2	71.232	0.2810	0.0000	0.5000	0.0000	0.2190	0.0000
0	6	-4	0	0	0	-2	63.487	0.1223	0.0000			0.1223	0.0000
0	0	6	0	0	0	-2	60.875	-0.6786	0.7890			0.6786	0.7890

Tabla 12.34: Efecto indirecto en la órbita de la Tierra. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{Ve} + i_2 L_E + i_3 L_{Ma} + i_4 L_{Ju} + i_5 L_{Sa} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

$L_{Me}$	$L_{Ve}$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$h$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_{\sin}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi)_{\cos}$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_{\kappa})_s$ ( $\mu\text{as}$ )	$(\Delta\psi_{\kappa})_c$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _s$ ( $\mu\text{as}$ )	$ \delta(\Delta\psi) _c$ ( $\mu\text{as}$ )
0	0	0	0	0	1	-2	10734.686	1.7791	0.0000			1.7791	0.0000
0	0	1	-2	0	0	2	-5756.956	-3.4503	0.6276			3.4503	0.6276
0	0	0	0	1	0	-2	4328.604	0.0000	-1.3220	0.1000	-0.2000	0.1000	1.1220
0	0	0	0	0	3	-2	3583.678	1.1862	0.0000			1.1862	0.0000
0	3	-5	0	0	0	2	-2957.349	0.3426	-3.6930	0.0000	-3.7000	0.3426	0.0070
0	0	2	-4	0	0	2	-2880.239	-0.3615	1.1363			0.3615	1.1363
0	5	-8	0	0	0	2	2863.894	-1.7561	0.0000	-0.3000	0.0000	1.4561	0.0000
0	0	0	0	4	-5	-2	2179.929	0.0000	-0.4981			0.0000	0.4981
0	0	0	0	2	0	-2	2165.298	0.6637	4.2968	0.0000	4.5000	0.6637	0.2032
0	0	0	0	0	5	-2	2150.862	0.0000	0.5109			0.0000	0.5109
0	0	3	-6	0	0	2	-1920.551	0.2820	0.4615			0.2820	0.4615
0	6	-10	0	0	0	2	-1479.139	0.0000	0.2192			0.0000	0.2192
0	2	-3	0	0	0	2	1455.386	0.0000	-0.5636			0.0000	0.5636
0	0	0	0	3	0	-2	1443.753	2.1285	0.2976	0.0000	0.3000	2.1285	0.0024
0	0	4	-8	0	0	2	-1440.561	0.1869	0.0000			0.1869	0.0000
0	0	0	0	4	-2	-2	1355.820	0.0000	0.1316			0.0000	0.1316
0	0	4	-7	0	0	2	1313.245	0.0000	-0.1353			0.0000	0.1353
0	0	0	0	4	0	-2	1082.898	0.4535	1.2042			0.4535	1.2042
0	0	3	-5	0	0	2	1069.561	0.0000	-0.1634			0.0000	0.1634
0	1	-2	0	0	0	2	-975.176	1.2793	-0.3622	0.2000	0.0000	1.0793	0.3622
0	0	0	0	5	0	-2	866.358	0.0000	0.1102			0.0000	0.1102
0	4	-6	0	0	0	2	727.580	0.0000	0.5647	0.0000	0.6000	0.0000	0.0353
0	0	1	-3	0	0	2	-613.742	0.0000	-0.1054			0.0000	0.1054
0	0	2	-5	0	0	2	-554.680	0.2877	0.5437			0.2877	0.5437
0	0	1	0	-4	0	2	551.160	0.0000	-0.4233			0.0000	0.4233
0	0	3	-7	0	0	2	-505.988	0.2657	0.1718			0.2657	0.1718
0	0	1	0	-3	0	2	488.958	0.0000	-0.2587	0.0000	-0.3000	0.0000	0.0413
0	2	-4	0	0	0	2	-487.638	0.0000	4.7962	0.0000	4.7000	0.0000	0.0962
0	6	-9	0	0	0	2	485.029	-0.1338	0.0000			0.1338	0.0000
0	0	4	-9	0	0	2	-465.155	0.1614	0.0000			0.1614	0.0000
0	0	1	0	-2	0	2	439.373	-0.4302	0.1633			0.4302	0.1633
0	5	-9	0	0	0	2	-418.650	0.1357	-0.1376	0.0000	-0.1000	0.1357	0.0376
0	3	-4	0	0	0	-2	416.651	-0.1052	0.0000			0.1052	0.0000
0	0	1	0	-1	0	-2	398.850	0.3638	0.2029			0.3638	0.2029
0	0	2	-2	0	0	-2	389.936	0.0000	0.1467			0.0000	0.1467
0	8	-14	0	0	0	2	-366.763	0.0000	-0.1042	0.0000	0.1000	0.0000	0.2042
0	0	5	-8	3	0	-2	365.433	-0.3859	0.6832	0.0000	0.1000	0.3859	0.5832
0	0	3	-8	3	0	2	-365.023	0.0000	0.1608	0.0000	0.2000	0.0000	0.0392
0	0	1	0	-2	5	-2	364.815	0.2077	-0.2904	0.2000	0.0000	0.0077	0.2904
0	8	-12	0	0	0	-2	363.706	0.0000	0.1948			0.0000	0.1948

Tabla 12.34: Efecto indirecto en la órbita de la Tierra. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_a} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{s}$ .

0	0	1	0	0	1	-2	353.237	0.0000	0.5977	0.0000	0.6000	0.0000	0.0023
0	0	0	2	0	0	-2	343.465	0.0000	2.9919	0.0000	3.0000	0.0000	0.0081
0	0	1	0	0	2	-2	342.009	0.3429	0.0000	-0.1000	0.0000	0.4429	0.0000
0	0	1	0	1	0	-2	336.834	0.0000	10.7163	0.0000	10.7000	0.0000	0.0163
0	3	-6	0	0	0	2	-325.103	2.2942	0.0000	2.3000	0.0000	0.0058	0.0000
0	0	1	-4	0	0	2	-324.149	0.3631	0.6968	0.4000	0.7000	0.0369	0.0032
0	5	-7	0	0	0	2	323.941	0.0000	0.5414	0.0000	0.2000	0.0000	0.3414
0	0	1	0	2	0	-2	312.536	-2.0736	1.5105	-2.1000	1.5000	0.0264	0.0105
0	0	2	-6	0	0	2	-306.891	0.2095	-0.2265	0.2000	0.1000	0.0095	0.3265
0	2	-2	0	0	0	-2	291.943	0.0000	0.2452	0.0000	0.0000	0.0000	0.2452
0	0	1	0	3	0	-2	291.508	-0.2872	0.2394	-0.3000	0.2000	0.0128	0.0394
0	0	3	-8	0	0	2	-291.377	-0.1335	0.0000	0.0000	0.1335	0.0000	0.0000
0	1	-3	0	0	0	2	-265.727	0.0000	-12.2222	0.0000	-12.2000	0.0000	0.0222
0	4	-8	0	0	0	2	-243.832	0.0000	0.2757	0.0000	0.3000	0.0000	0.0243
0	0	1	1	0	0	-2	238.455	0.0000	0.5764	0.0000	0.6000	0.0000	0.0236
0	0	0	3	0	0	-2	228.982	-0.4606	0.7958	-0.4000	0.8000	0.0606	0.0042
0	1	0	0	0	0	-2	224.690	0.3160	0.0000	0.3000	0.2000	0.0160	0.2000
0	0	1	-5	0	0	2	-220.233	0.3831	0.2386	0.4000	0.2000	0.0169	0.0386
0	0	2	-7	0	0	2	-212.128	0.2437	0.0000	0.2000	0.0000	0.0437	0.0000
0	2	-5	0	0	0	2	-208.834	5.5458	0.0000	5.5000	0.0000	0.0458	0.0000
0	6	-8	0	0	0	2	208.353	0.0000	0.1706	0.0000	0.0000	0.0000	0.1706
0	5	-10	0	0	0	2	-195.067	-0.3444	0.0000	-0.4000	0.1000	0.0556	0.1000
0	0	4	-4	0	0	-2	194.976	-1.2611	-0.7520	-1.3000	-0.8000	0.0389	0.0480
0	3	-3	0	0	0	-2	194.632	-0.6530	-2.3531	-0.7000	-2.4000	0.0470	0.0469
0	0	2	0	-1	0	-2	190.657	-1.3020	6.6744	-1.3000	6.7000	0.0020	0.0256
0	0	3	-2	0	0	-2	188.596	-3.0722	-3.4722	-3.1000	-3.5000	0.0278	0.0278
0	0	2	0	0	-1	-2	185.774	-0.8792	0.0000	-0.9000	0.0000	0.0208	0.0000
0	0	6	-15	0	0	2	-184.908	0.0000	-0.4881	-0.2000	-0.5000	0.2000	0.0119
0	8	-15	0	0	0	2	-183.004	4.1667	-2.6634	4.2000	-2.7000	0.0333	0.0366
0	3	-9	4	0	0	2	-182.924	-0.3724	-0.5875	-0.4000	-0.6000	0.0276	0.0125
0	0	2	0	2	-5	-2	182.725	0.0000	0.4835	-0.3000	0.5000	0.3000	0.0165
0	0	6	-8	3	0	-2	182.672	-17.9943	-5.3201	-18.0000	-5.3000	0.0057	0.0201
0	0	12	-19	0	3	-2	182.635	0.6003	0.0000	0.0000	0.6003	0.0000	0.0000
0	0	6	-16	4	5	2	-182.622	1.8719	-0.5839	1.9000	-0.6000	0.0281	0.0161
0	0	10	-16	4	5	-2	182.620	-1.8714	0.5839	-1.9000	0.6000	0.0286	0.0161
0	0	8	-19	0	3	2	-182.607	-0.6002	0.0000	0.0000	0.6002	0.0000	0.0000
0	0	2	-8	3	0	2	-182.570	18.0221	5.3217	18.0000	5.3000	0.0221	0.0217
0	0	2	0	-2	5	-2	182.518	0.0000	-0.5100	-0.3000	-0.5000	0.3000	0.0100
0	3	-5	4	0	0	-2	182.320	0.3711	0.5855	0.4000	0.6000	0.0289	0.0145
0	8	-11	0	0	0	-2	182.240	-4.1866	2.6783	-4.2000	2.7000	0.0134	0.0217
0	0	10	-15	0	0	-2	180.390	0.0000	0.4990	0.2000	0.5000	0.2000	0.0010
0	0	2	0	0	1	-2	179.573	-0.8290	0.0000	-0.8000	0.0000	0.0290	0.0000
0	0	1	2	0	0	-2	177.013	-3.0477	3.6709	-3.1000	3.7000	0.0523	0.0291
0	0	2	0	1	0	-2	175.235	-0.5213	-7.1845	-0.5000	-7.2000	0.0213	0.0155
0	3	-7	0	0	0	2	-172.006	0.7033	2.8720	0.7000	2.9000	0.0033	0.0280
0	0	0	4	0	0	-2	171.739	-1.3741	0.8973	-1.4000	0.9000	0.0259	0.0027
0	5	-6	0	0	0	-2	171.668	0.4216	0.0000	0.4000	-0.1000	0.0216	0.1000
0	2	-1	0	0	0	-2	162.255	-7.5084	0.0000	-7.5000	-0.2000	0.0084	0.2000
0	0	6	-7	0	0	-2	160.321	-0.3104	0.0000	-0.3000	0.0000	0.0104	0.0000
0	0	5	-5	0	0	-2	155.982	-0.5132	-0.3222	-0.5000	-0.3000	0.0132	0.0222
0	1	-4	0	0	0	2	-153.821	0.5009	0.0000	0.5000	-0.1000	0.0009	0.1000
0	0	4	-3	0	0	-2	151.872	-0.6129	-1.1172	-0.6000	-1.1000	0.0129	0.0172
0	0	3	-1	0	0	-2	147.973	0.0000	-0.8187	0.0000	-0.8000	0.0000	0.0187
0	4	-4	0	0	0	-2	145.976	0.0000	-0.4693	-0.1000	-0.5000	0.1000	0.0307
0	1	1	0	0	0	-2	139.113	0.0000	13.2056	0.0000	13.2000	0.0000	0.0056
0	0	3	0	-3	0	-2	132.958	-0.4929	-0.3920	-0.5000	-0.4000	0.0071	0.0080
0	2	-6	0	0	0	2	-132.867	0.0000	0.2662	0.0000	0.4000	0.0000	0.1338
0	0	6	-6	0	0	-2	129.986	-0.4087	0.0000	-0.4000	-0.2000	0.0087	0.2000
0	0	3	0	-2	0	-2	128.999	-3.9567	-2.8896	-3.9000	-2.9000	0.0567	0.0104
0	0	5	-4	0	0	-2	127.119	-0.7957	-1.2935	-0.8000	-1.3000	0.0043	0.0065
0	3	-2	0	0	0	-2	126.973	-4.9577	0.0000	-5.0000	0.0000	0.0423	0.0000
0	0	3	0	-1	0	-2	125.269	0.7048	-22.3930	0.7000	-22.4000	0.0048	0.0070
0	0	3	0	0	-2	-2	124.568	-0.1209	0.0000	-0.3000	0.0000	0.1791	0.0000
0	0	4	-2	0	0	-2	124.376	-0.1216	-6.2072	-0.1000	-6.2000	0.0216	0.0072
0	0	3	0	0	-1	-2	123.142	0.0000	-1.2617	0.0000	-1.3000	0.0000	0.0383
0	8	-16	0	0	0	2	-121.919	0.0000	0.2215	0.0000	0.3000	0.0000	0.0785
0	0	3	0	2	-5	-2	121.795	0.5160	-0.1007	0.5000	-0.2000	0.0160	0.0993
0	0	7	-8	3	0	-2	121.772	0.0000	1.0852	0.0000	1.1000	0.0000	0.0148
0	0	1	-8	3	0	2	-121.726	-0.4366	0.7743	-0.5000	1.0000	0.0634	0.2257
0	8	-10	0	0	0	-2	121.579	0.1288	0.0000	0.1000	0.0000	0.0288	0.0000
0	0	2	2	0	0	-2	119.231	0.1639	0.1196	0.2000	0.2000	0.0361	0.0804
0	0	3	0	1	0	-2	118.421	-0.3453	0.1344	-0.5000	0.2000	0.1547	0.0656
0	3	-8	0	0	0	2	-116.938	-0.1326	0.0000	-0.2000	0.0000	0.0674	0.0000
0	5	-5	0	0	0	-2	116.781	0.0000	0.3632	0.0000	0.4000	0.0000	0.0368
0	2	0	0	0	0	-2	112.348	0.0000	-16.7263	0.0000	-16.7000	0.0000	0.0263
0	0	6	-5	0	0	-2	109.304	0.0000	0.1282	0.1000	0.3000	0.1000	0.1718
0	0	5	-3	0	0	-2	107.270	0.0000	0.4178	0.0000	0.4000	0.0000	0.0178
0	4	-3	0	0	0	-2	104.294	0.4099	0.0000	0.4000	0.0000	0.0099	0.0000
0	1	2	0	0	0	-2	100.744	0.6398	-0.1540	0.7000	-0.2000	0.0602	0.0460
0	0	4	0	-4	0	-2	99.719	0.0000	0.1120	0.0000	0.2000	0.0000	0.0880



Tabla 12.34: Efecto indirecto en la órbita de la Tierra. Comparación de los principales términos de la serie de nutación en oblicuidad  $\Delta\epsilon$  con los resultados de Souchay y Kinoshita (2000).  $\Delta\epsilon = \sum_i (A_{si} \sin \Theta_i + A_{ci} \cos \Theta_i)$ , con  $\Theta_i = i_1 L_{V_e} + i_2 L_E + i_3 L_{M_e} + i_4 L_{J_u} + i_5 L_{S_a} + i_6 h$ . Solo se muestran términos para los que  $\max\{|A_{si}|, |A_{ci}|\} \geq 0.1 \mu\text{as}$ .

0	0	4	0	-3	0	-2	97.475	-0.1479	1.6106	-0.3000	1.6000	0.1521	0.0106
0	0	4	0	-2	0	-2	95.331	-0.1110	7.9754	-0.1000	8.0000	0.0110	0.0246
0	3	-1	0	0	0	-2	94.220	0.0000	-1.7123	0.0000	-1.7000	0.0000	0.0123
0	0	4	0	-1	0	-2	93.278	-1.3727	0.1583	-1.4000	0.1000	0.0273	0.0583
0	0	4	0	0	-2	-2	92.889	0.0000	0.3035	0.0000	0.3000	0.0000	0.0035
0	0	5	-2	0	0	-2	92.782	-0.3142	0.0000	-0.4000	0.0000	0.0858	0.0000
0	2	1	0	0	0	-2	85.920	-1.0139	0.1987	-1.0000	0.2000	0.0139	0.0013
0	4	-2	0	0	0	-2	81.129	0.0000	-0.5805	0.0000	-0.6000	0.0000	0.0195
0	0	5	0	-3	0	-2	76.942	0.0000	0.3999	0.1000	0.4000	0.1000	0.0001
0	0	5	0	-2	0	-2	75.599	0.4328	-0.1062	0.5000	-0.1000	0.0672	0.0062
0	0	5	0	0	0	-2	73.050	-14.0659	11.3163			14.0659	11.3163
0	5	-3	0	0	0	-2	71.232	0.0000	-0.1218	0.0000	-0.2000	0.0000	0.0782
0	0	6	0	0	0	-2	60.875	0.3421	0.2942			0.3421	0.2942



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 13

### Efecto no rígido

La perturbación que los planetas originan en la rotación de la Tierra, como hemos visto, puede separarse en dos partes: un efecto directo debido al momento ejercido sobre la Tierra por los planetas, y un efecto indirecto debido a la perturbación planetaria en las órbitas de la Luna y la Tierra. Ya comentamos en el capítulo 11 que ambos efectos han sido tratados por Vondrak (1983a, 1983b and 1983c) y Kinoshita y Souchay (1990), así como Williams (1995), Hartman y Soffel (1994) y Roosbeek y Dehant (1998).

Pero hasta el momento, todas las derivaciones de las nutaciones con origen planetario han sido realizadas asumiendo un modelo de Tierra rígida. En este capítulo incluimos resultados relativos a las primeras series de nutación para un modelo de Tierra no rígida. Estas series no tienen únicamente relevancia teórica, dado que las diferencias entre las amplitudes de las soluciones rígidas y no rígidas llegan a  $50\mu\text{as}$ . Estas grandes discrepancias aparecen en un entorno de la frecuencia RFCN, mientras que lejos de ese valor, las diferencias son despreciables. Esto apunta claramente al origen físico de las diferencias, cuya existencia fue señalada por Ferrándiz y Getino en (Ferrándiz y Getino, 2000b).

#### 13.1 Descripción de la solución

La solución descrita ha sido calculada a partir del modelo hamiltoniano de Getino y Ferrándiz (véase apéndice) correspondiente a un modelo de dos capas compuesto de un manto inelástico y un núcleo líquido externo (FOC) con disipación en la frontera. La derivación de las fórmulas analíticas para las contribuciones planetarias a las nutaciones no requiere cambiar la estructura conceptual de la teoría. Como ya hemos visto, basta con sumar el efecto de la contribución de los planetas al potencial.

El cálculo de la función generatriz del método de perturbaciones es similar al presentado en el apéndice. La única salvedad es que en este caso encontramos varios periodos muy cerca del RFCN, del orden de 433 msd (mean solar days). Utilizamos la expresión

exacta de los factores de la ecuación de perturbación incluyendo la frecuencia RFCN en el denominador, llamados  $F_1^a, F_1^b, G_1^a, G_1^b$  en el apéndice. De otro modo la amplitud resulta ser inexacta. Los valores exactos de las expresiones pueden encontrarse en (Getino y Ferrándiz, 1999a y 2000b). Los valores de los parámetros usados en la evaluación de las perturbaciones planetarias difieren de los usados en (Getino y Ferrándiz, 1999b). Estos han sido obtenidos mediante un cuidadoso ajuste a las observaciones de un modelo de nutación incluyendo las series planetarias y la parte lunisolar del modelo de tres capas de Getino y Ferrándiz (Getino y Ferrándiz, 1999b, 1999c) completado con las correcciones oceánicas de Huang *et al.* (1999) y los efectos de los armónicos de tercer orden calculados en el capítulo 9. Este método de ajuste viene descrito en Ferrándiz *et al.* (2000b). En la tabla 13.1 mostramos los parámetros utilizados, usando la notación que se expone en el apéndice, y que es la utilizada en (Getino y Ferrándiz, 1999b). Los periodos de las frecuencias libres vienen dadas en días sidéreos, mientras que las diferentes constantes  $k$  están expresadas en  $''/cy$ .

Tabla 13.1: Valores de los parámetros.

Parámetro	Valor
$CW$	433.7576166
$R_{FCN}$	431.82303867
$A_f/A_m$	0.129166
$k_M$	7567.07337427
$k_t^m)_M$	2194.96145436
$k_t^f)_M$	4589.14122952
$k_M/k_S$	0.459266103
$G_f$	$-0.232704722421 \times 10^{-4}$
$r_t$	$-0.207702156789 \times 10^{-7}$

En la tabla 13.2 mostramos el efecto de la influencia planetaria en los ángulos de nutación, indicando en la última columna el origen de la perturbación (0 para la Luna, 1 para el Sol, 2 para Venus, 5 para Júpiter y 6 para Saturno). Hemos decidido emplear los cinco argumentos de Delaunay ( $l_S$  no aparece en los términos que se muestran) y mantener asimismo la longitud de la Tierra  $L_E$  porque resulta más sencilla la comparación con otras teorías rígidas de esta forma. Los subíndices in y out se refieren a las amplitudes en fase y fuera de fase.

La tabla ha sido truncada de modo que los términos para los que se verifica que  $\max\{ |(\Delta\psi)_{in}|, |(\Delta\psi)_{out}|, |(\Delta\epsilon)_{in}|, |(\Delta\epsilon)_{out}| \}$  es menor que  $10 \mu\text{as}$  han sido eliminados para hacer más fácil su lectura. Las series originales, a las que nos referimos por FNG00, están truncadas en  $1 \mu\text{as}$  e incluyen 292 términos.

En la tabla 13.3 mostramos las diferencias entre las soluciones rígida y no rígida que excenden  $1 \mu\text{as}$ . Los principales valores se dan en las cercanías de la frecuencia RFCN,

lo que revela el origen de las correcciones. Cabe señalar que al contrario que ocurre con los términos no rígidos, la contribución de los términos de Oppolzer rígidos no influyen de forma significativa (Kinoshita y Souchay, 1990).

Tabla 13.2: Series de nutación truncadas en  $10\mu\text{as}$  (en  $\mu\text{as}$ ).

$\Omega$	$l_M$	$F$	$D$	$L_{V_e}$	$L_E$	$L_{M_a}$	$L_{J_u}$	$L_{S_a}$	$p_A$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_{in}$	$(\Delta\psi)_{out}$	$(\Delta\epsilon)_{in}$	$(\Delta\epsilon)_{out}$	Or.
0	0	0	0	0	4	-8	3	0	0	-651392.660	-51	159	0	0	1
0	0	0	0	0	4	-8	3	0	2	-572195.105	20	42	9	-18	1
0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	-322614.503	-46	11	0	0	1
1	0	1	-1	0	-1	0	-2	5	0	311923.319	-308	514	164	274	0
0	0	0	0	0	0	0	2	-5	2	-301917.969	21	-24	9	10	1
1	-2	0	2	0	2	0	-2	0	0	100155.423	28	0	-15	0	0
0	1	0	0	-18	16	0	0	0	0	-99727.792	-22	10	0	0	0
1	0	1	-1	-8	12	0	0	0	0	-88082.028	120	60	-64	32	0
0	0	0	0	8	-13	0	0	0	0	87265.401	23	34	0	0	1
0	0	1	-1	0	0	-2	0	0	0	-38036.684	-27	-8	0	0	0
1	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	37883.593	-46	-44	25	-23	0
0	1	0	-1	-3	4	0	0	0	0	34989.308	0	13	0	0	0
0	0	2	-2	-5	6	0	0	0	0	-18185.987	0	24	0	0	0
0	2	0	-2	0	-2	0	3	0	0	13562.891	35	-6	0	0	0
1	0	1	-1	0	-1	0	0	-1	0	-10771.540	17	8	-9	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	10759.227	1	10	0	0	1
1	0	0	0	0	-4	8	-3	0	0	-6870.085	8	30	-4	16	0
1	0	0	0	0	4	-8	3	0	0	-6728.164	-8	29	4	16	0
0	2	0	-2	0	-2	0	2	0	0	-6366.253	44	0	0	0	0
1	0	1	-1	0	0	-2	0	0	0	-5767.538	27	8	-15	4	0
0	0	0	0	0	1	-2	0	0	0	-5764.006	-37	39	0	0	1
1	0	1	-1	0	-1	0	0	2	0	5376.541	-5	-11	3	-6	0
0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	5373.471	-12	0	5	0	6
1	0	2	-2	-5	6	0	0	0	0	-4948.506	-2	-44	1	-23	0
1	0	1	-1	0	-1	0	-1	0	0	-4334.585	-5	19	3	10	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4332.589	32	-8	0	0	5
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4332.589	-42	30	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	-2	4328.604	-15	-4	7	-2	5
0	2	0	-2	-3	3	0	0	0	0	-3561.662	14	0	0	0	0
0	0	0	0	3	-5	0	0	0	0	-2959.209	-22	7	0	0	1
0	0	0	0	3	-5	0	0	0	1	-2958.279	-11	-45	-6	24	2
0	0	0	0	3	-5	0	0	0	2	-2957.349	217	0	96	0	2
0	0	0	0	0	2	-4	0	0	0	-2882.003	-8	14	0	0	1
1	0	1	-1	-5	7	0	0	0	0	-2863.023	14	3	-7	1	0
1	0	1	-1	0	-1	0	2	0	0	2165.796	-3	-15	1	-8	0
0	0	0	0	0	0	0	2	0	-2	2165.298	-109	0	47	0	5
0	0	0	0	0	0	0	2	0	-2	2165.298	-10	2	4	1	1
1	0	2	-2	-3	3	0	0	0	0	2060.860	12	0	-6	0	0
0	0	0	0	2	-3	0	0	0	0	1454.936	1	48	0	0	1
0	0	0	0	4	-6	0	0	0	2	727.580	-53	0	-22	0	2
0	0	0	0	4	-6	0	0	0	1	727.524	2	10	1	-5	2
0	0	0	0	1	-1	0	0	0	1	583.958	-2	10	-1	-5	2
0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	583.921	81	0	-3	0	2
0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	583.921	61	0	-2	0	1
0	0	0	0	0	1	0	-3	0	2	488.958	-12	0	-5	0	5
0	0	0	0	2	-4	0	0	0	2	-487.638	21	-1	21	-1	2
0	0	0	0	0	1	0	-2	0	0	439.332	-16	-8	1	14	1
0	0	0	0	0	3	-4	0	0	0	418.266	-16	6	-3	0	1
0	0	0	0	3	-4	0	0	0	0	416.688	-8	50	-3	-8	1
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	398.884	16	1	1	0	5
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	398.884	-183	-10	-17	3	1
0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	389.968	-49	-1	-4	0	1

Tabla 13.2: Series de nutación truncadas en  $10\mu\text{s}$  (en  $\mu\text{s}$ ).

0	0	0	0	0	1	0	1	0	-2	336.834	-25	0	11	0	1
0	0	0	0	5	-7	0	0	0	2	323.941	-22	0	-9	0	2
0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	291.961	40	0	1	0	2
0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	291.961	-105	0	-2	0	1
0	0	0	0	1	-3	0	0	0	2	-265.727	19	0	7	0	2
0	0	0	0	1	-3	0	0	0	2	-265.727	-32	0	-11	0	1
0	0	0	0	2	-5	0	0	0	2	-208.834	0	-14	0	5	1
0	0	0	0	6	-8	0	0	0	2	208.353	-12	0	-5	0	2
0	0	0	0	0	2	0	-2	0	0	199.442	41	0	0	0	1
0	0	0	0	3	-3	0	0	0	0	194.640	21	0	0	0	2
0	0	0	0	3	-3	0	0	0	0	194.640	-10	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2	0	-1	0	-2	190.657	-16	-3	7	-1	1
0	0	0	0	8	-15	0	0	0	2	-183.004	-7	-10	-2	4	1
0	0	0	0	0	6	-8	3	0	-2	182.672	13	-43	-6	-19	1
0	0	0	0	0	2	-8	3	0	2	-182.570	13	-45	5	17	1
0	0	0	0	8	-11	0	0	0	-2	182.240	-6	-10	3	-4	1
0	0	0	0	0	1	2	0	0	-2	177.013	-9	-7	4	-3	1
0	0	0	0	0	2	0	1	0	-2	175.235	17	-1	-7	-1	1
0	0	0	0	2	-1	0	0	0	-2	162.255	0	-18	0	-8	1
0	0	0	0	4	-4	0	0	0	0	145.980	12	0	0	0	2
0	0	0	0	1	1	0	0	0	-2	139.113	-32	0	14	0	1
0	0	0	0	0	3	0	-2	0	-2	128.999	7	-10	-3	-4	1
0	0	0	0	3	-2	0	0	0	-2	126.973	0	-12	0	-5	1
0	0	0	0	0	3	0	-1	0	-2	125.269	54	2	-23	1	1
0	0	0	0	0	4	-2	0	0	-2	124.376	15	0	-7	0	1
0	0	0	0	2	0	0	0	0	-2	112.348	40	0	-18	0	1
0	0	0	0	0	4	0	-2	0	-2	95.331	-19	0	8	0	1
2	1	2	0	-18	16	0	0	0	0	13.663	14	-7	-6	-3	0
2	-1	2	0	18	-16	0	0	0	0	13.659	-14	-7	6	-3	0

Tabla 13.3: Diferencia entre las soluciones rígidas y no rígidas (en  $\mu\text{s}$ ).

$\Omega$	$l_M$	$F$	$D$	$LV_e$	$L_E$	$L_{Ma}$	$L_{Ju}$	$L_{Sa}$	$p_A$	$P$ (días)	$(\Delta\psi)_s$	$(\Delta\psi)_c$	$(\Delta\epsilon)_c$	$(\Delta\epsilon)_s$	Or.
0	0	0	0	3	-5	0	0	0	2	-2957.349	-2	0	1	0	2
0	0	0	0	0	0	0	2	0	-2	2165.298	-1	0	0	0	5
0	0	0	0	4	-6	0	0	0	2	727.580	-1	0	0	0	2
0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	583.921	-7	1	-2	0	2
0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	583.921	-5	0	-2	0	1
0	0	0	0	2	-4	0	0	0	1	-487.664	1	4	0	1	2
0	0	0	0	2	-4	0	0	0	2	-487.638	-14	-1	6	-1	2
0	0	0	0	2	-4	0	0	0	2	-487.638	-4	0	2	0	1
0	0	0	0	0	4	-6	0	0	0	450.992	0	-1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	-2	0	0	439.332	3	-35	1	14	1
0	0	0	0	0	3	-4	0	0	0	418.266	-8	1	-3	0	1
0	0	0	0	3	-4	0	0	0	0	416.688	-7	21	-3	-8	1
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	398.884	4	1	1	0	5
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	398.884	-47	-8	-17	3	1
0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	389.968	-11	-1	-4	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	378.092	-2	0	-1	0	1
0	0	0	0	3	-6	0	0	0	2	-325.103	0	-1	0	0	1
0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	291.961	3	0	1	0	2
0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	291.961	-9	0	-2	0	1
0	0	0	0	1	-3	0	0	0	2	-265.727	2	0	-1	0	2
0	0	0	0	1	-3	0	0	0	2	-265.727	-4	0	2	0	1
0	0	0	0	2	-5	0	0	0	2	-208.834	0	-1	0	-1	1
0	0	0	0	0	2	0	-2	0	0	199.442	3	0	0	0	1
0	0	0	0	3	-3	0	0	0	0	194.640	1	0	0	0	2
0	0	0	0	0	6	-8	3	0	-2	182.672	0	-2	0	-1	1

Tabla 13.3: Diferencia entre las soluciones rígidas y no rígidas (en  $\mu\text{s}$ ).

0	0	0	0	0	2	-8	3	0	2	-182.570	1	-4	0	-1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	0	-2	139.113	-1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	3	0	-1	0	-2	125.269	2	0	-1	0	1
0	0	0	0	2	0	0	0	0	-2	112.348	2	0	-1	0	1
2	1	2	0	-18	16	0	0	0	0	13.663	1	-1	-1	0	0
2	-1	2	0	18	-16	0	0	0	0	13.659	-1	-1	1	0	0



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Apéndice A

### Modelo de Tierra no rígida de dos capas

En este apéndice vamos a describir de forma sucinta la teoría de la rotación de la Tierra para un modelo compuesto de un manto inelástico y un núcleo líquido (Getino y Ferrándiz, 2000b), incluyendo la disipación en la frontera manto-núcleo (CMB). Las principales características de esta teoría (Getino y Ferrándiz, 2000b) son: se trata de una teoría hamiltoniana, es autoconsistente y no dependen de un modelo previo de Tierra, de modo que no es necesario el uso de funciones de transferencia, y es analítica.

Consideramos un modelo de Tierra formado por dos capas, cuyo movimiento relativo origina disipación en la frontera común. Suponemos que el manto se deforma al menos de forma elástica, la solución del vector desplazamiento viene dada por expresiones como las de Takeuchi (1951).

Se considera una inelasticidad débil que se trata como un retraso temporal en la respuesta a los momentos perturbadores externos. El núcleo se considera líquido y su movimiento referido a un sistema de Tisserand. La disipación en la frontera se modela como si fuera producida por un momento proporcional a la velocidad angular diferencial entre las dos capas, tratando juntos el acoplamiento viscoso y electromagnético, como en Sasao *et al.* (1980). En este sistema, se define un conjunto adecuado de variables canónicas generalización de las variables de Andoyer descritas en el capítulo 1 y usadas por Kinoshita (1977), y entonces se aplica el método de perturbaciones de Hori (1966) después de incluir los momentos de disipación en la solución no perturbada. El proceso conduce a series de nutación analíticas dependientes de varios coeficientes constantes. Los valores numéricos de dichos coeficientes no pueden calcularse a partir de ninguna teoría geofísica bien establecida con la suficiente precisión como para dar valores adecuados para la nutación. Estos valores son entonces obtenidos a partir de un método generalizado de ajuste de mínimos cuadrados (Getino *et al.*, 1999c) tomando las series IERS 96 como referencia básica, para evitar extensos cálculos computacionales.

Este modelo de Tierra emplea muchos de los conceptos del extenso trabajo previo de Getino y Ferrándiz (1990, 1991a, 1991b, 1994, 1995c) y Getino (1993), con un tratamiento



hamiltoniano; un modelo de Poincaré con manto rígido se considera en Getino (1995d, 1995e) sin disipación, y con disipación en Getino y Ferrándiz (1997, 1999c).

## A.1 Modelo de Tierra de dos capas: energía cinética

La forma de fijar el modelo es similar al caso de manto rígido-núcleo líquido estudiado por Getino (1995d, 1995e) y en (Getino y Ferrándiz, 1997), con una diferencia fundamental: el manto es elástico. Sea  $OXYZ$  una referencia inercial no rotatoria, y  $Oxyz$  el sistema de ejes principales de la Tierra, rotando con una velocidad angular  $\vec{\omega}$  respecto de la referencia inercial. Para el núcleo tomamos el sistema de referencia  $Ox_c y_c z_c$  rotando con velocidad angular  $\vec{\omega}_c$  respecto de  $OXYZ$ . Podemos escribir entonces  $\vec{\omega}_c = \vec{\omega} + \delta\vec{\omega}$ , donde  $\delta\vec{\omega}$  es la velocidad angular del núcleo respecto del manto. Los tensores de inercia correspondientes son  $\Pi_m$  para el manto,  $\Pi_c$  para el núcleo y  $\Pi = \Pi_m + \Pi_c$  para la Tierra total. Como es usual, el campo de velocidades del núcleo líquido se supone compuesto de una rotación uniforme dominante y una velocidad pequeña y residual debida a la no esfericidad (Sasao *et al.*, 1980). Con esto, si  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L}_m$  y  $\mathbf{L}_c$  son respectivamente los momentos angulares de la totalidad de la Tierra, el manto y el núcleo, entonces:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_m + \mathbf{L}_c = \Pi_m \vec{\omega} + \Pi_c (\vec{\omega} + \delta\vec{\omega}) = \Pi \vec{\omega} + \Pi_c \delta\vec{\omega}. \quad (\text{A.1})$$

Así, se tiene que el momento angular relativo de la velocidad residual debida a los efectos de la no esfericidad puede hacerse cero con una apropiada definición de la rotación del núcleo (Moritz, 1982), o tomando los ejes de Tisserand como ejes fijos del núcleo (Moritz, 1984), como se detalla en (Getino, 1995a). Con estas consideraciones, la energía cinética se escribe como

$$T = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}_c)^t \Pi_m^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{L}_c) + \frac{1}{2} \mathbf{L}_c^t \Pi_c^{-1} \mathbf{L}_c. \quad (\text{A.2})$$

Esta expresión se formula canónicamente mediante un conjunto de variables canónicas,  $h, g, l, H, G, L$  para la Tierra, y  $h_c, g_c, l_c, H_c, G_c, L_c$  para el núcleo, con la ayuda de los ángulos auxiliares  $J, I, J_c, I_c$ , como se describe en (Getino, 1995e). En concreto, los momentos angulares  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{L}_c$  se expresan en la forma

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} K \sin l \\ K \cos l \\ L = G \cos J \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_c = \begin{pmatrix} K_c \sin l_c \\ -K_c \cos l_c \\ L_c = G_c \cos J_c \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

en donde

$$K = G \sin J, \quad K_c = G_c \sin J_c. \quad (\text{A.4})$$

Nótese que  $J$  y  $J_c$  son cantidades pequeñas, del orden de  $10^{-6}$  rad, de modo que en una primera aproximación podemos despreciar los términos de segundo orden en estas variables.

### A.1.1 Deformación de marea y tensores de inercia

El efecto de la elasticidad del manto en la rotación de la Tierra fue estudiado por Getino y Ferrándiz (1995c). En dicho trabajo, la deformación correspondiente de la Tierra es producida por dos tipos de perturbaciones: *deformación de marea*, debida a la atracción gravitatoria de los cuerpos externos (Luna y Sol) y *deformación rotacional*, debida a la rotación del cuerpo elástico mismo. La deformación rotacional tiene únicamente efecto secular, de modo que como estamos interesados principalmente en las nutaciones, nos limitaremos al estudio de la deformación de marea, que está producida por el potencial de perturbación de marea (por unidad de masa)

$$W_t = \frac{\mathcal{G} m^*}{r^{*3}} r^2 P_2(\cos S), \quad \text{with } \cos S = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^*}{r r^*}, \quad (\text{A.5})$$

en donde  $\mathcal{G}$  es la constante de gravitación,  $\mathbf{r}$  e vector desde el origen al punto dde la Tierra en donde se evalúa el potencial,  $r$  es su módulo, y  $m^*$ ,  $\mathbf{r}^*$  y  $r^*$  son la masa, el vector desde el origen (centro de la Tierra) al cuerpo perturbador exterior (Luna, Sol), y su módulo.  $P_2$  es el polinomio de Legendre de segundo grado.

Debido al potencial de perturbación el manto elástico, y entonces el núcleo líquido, por la hipótesis de continuidad, se deforma, y los correspondientes tensores de inercia no son constantes como ocurría en el caso rígido, sino funciones del tiempo. Como se muestra en (Getino y Ferrándiz, 1995c), el tensor de inercia del manto y el núcleo puede descomponerse como sigue

$$\Pi_m = \Pi_m^0 + \Pi_m^t, \quad \Pi_c = \Pi_c^0 + \Pi_c^t, \quad (\text{A.6})$$

donde  $\Pi_m^0$ ,  $\Pi_c^0$  son los tensores constantes correspondientes al caso rígido (en ausencia de deformación), que en el sistema del manto se expresan como (Getino, 1995e)

$$\begin{aligned} \Pi_m^0 &= \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ 0 & 0 & C_m \end{pmatrix}, \\ \Pi_c^0 &= \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & A_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

y  $\Pi_m^t$ ,  $\Pi_c^t$  son los incrementos debido a la deformación de marea. Los elementos  $t_{ij}$  de estos tensores son funciones del tiempo por medio de las coordenadas de posición de los cuerpos perturbadores (Luna, Sol), y sus expresiones explícitas se encuentran en (Getino y Ferrándiz, 1995). Aquí únicamente se muestran los elementos que tienen influencia en la nutación, que son  $t_{13}$  y  $t_{23}$ , como queda establecido en (Moritz, 1982) y (Sasao *et al.*,

1980). Estos tensores pueden escribirse según

$$\begin{aligned}\Pi_m^t &= D_m^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & 0 \end{pmatrix}, \\ \Pi_c^t &= D_c^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

donde los términos  $t_{13}$  y  $t_{23}$ , que dependen de la posición del cuerpo perturbador, vienen dados por

$$\begin{aligned}t_{13} &= -2 \left( \frac{a^*}{r^*} \right)^3 P_2^1(\sin \delta) \cos \alpha, \\ t_{23} &= -2 \left( \frac{a^*}{r^*} \right)^3 P_2^1(\sin \delta) \sin \alpha,\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

siendo  $\alpha$  y  $\delta$  la longitud y latitud del cuerpo perturbador referido al sistema del manto,  $a^*$  es el semieje mayor de su órbita, y  $P_2^1$  es el polinomio asociado de Legendre. Por otro lado, tenemos los coeficientes constantes

$$D_m^t = \frac{\mathcal{G} m^*}{a^{*3}} \frac{2\pi}{15} I_m, \quad D_c^t = \frac{\mathcal{G} m^*}{a^{*3}} \frac{2\pi}{15} I_c, \quad (\text{A.10})$$

en donde  $I_m$  y  $I_c$  dependen respectivamente de la estructura interna del manto y el núcleo (Getino y Ferrándiz, 1995a; Martín y Getino, 1998). De acuerdo con estos trabajos, los coeficientes son del orden de magnitud de  $10^{36}$  (en unidades c.g.s.).

### A.1.2 Energía cinética

A partir de las ecuaciones (A.2), (A.3), (A.6), (A.7) y (A.8) obtenemos la expresión canónica de la energía cinética. Lo único que hay que hacer es calcular la inversa de los tensores de inercia. Como el orden de magnitud de la razón  $D^t/C$  es  $\simeq 10^{-8}$ , podemos llevar a cabo el desarrollo (Getino y Ferrándiz, 1995c)

$$(\Pi_{m,c})^{-1} \simeq (\Pi_{m,c}^0)^{-1} - (\Pi_{m,c}^0)^{-1} \Pi_{m,c}^t (\Pi_{m,c}^0)^{-1}. \quad (\text{A.11})$$

Entonces, la expresión final de la energía cinética puede ponerse en la forma

$$T = T_0 + T_t, \quad (\text{A.12})$$

en donde el primer término es la energía cinética correspondiente al caso rígido

$$\begin{aligned}T_0 &= \frac{1}{2A_m} \left[ K^2 + \frac{A}{A_c} K_c^2 \right] + \frac{K K_c}{A_m} \cos(l + l_c) + \\ &+ \frac{1}{2C_m} \left[ L^2 - 2L L_c + \frac{C}{C_c} L_c^2 \right],\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

siendo  $A = A_m + A_c$ ,  $C = C_m + C_c$  los momentos principales totales de la Tierra. Obviamente,  $T_0$  es la misma expresión obtenida en Getino (1995e) para el modelo de manto rígido y núcleo líquido. Por otro lado, el término  $T_t$  representa el incremento de la energía cinética debido a la deformación de marea, y se expresa como

$$T_t = \frac{L - L_c}{A_m C_m} D_m^t [K_c (t_{13} \sin l_c - t_{23} \cos l_c) - K (t_{13} \sin l + t_{23} \cos l)] - \frac{L_c}{A_c C_c} D_c^t K_c (t_{13} \sin l_c - t_{23} \cos l_c). \quad (\text{A.14})$$

## A.2 Energía potencial y funciones esféricas

Siguiendo (Getino y Ferrándiz, 1995c), la energía potencial puede separarse igualmente en dos términos

$$U = U_0 + U_t, \quad (\text{A.15})$$

en donde el término  $U_0$  corresponde al caso rígido (para un modelo de Tierra con simetría axial), y  $U_t$  es el potencial adicional debido a la redistribución de la masa causada por la deformación de marea. Como los órdenes de magnitud de estos términos son

$$\frac{U_0}{T_0} \simeq 10^{-8}, \quad \frac{U_t}{T_0} \simeq 10^{-13}, \quad (\text{A.16})$$

el término  $U_t$  puede despreciarse. Entonces la energía potencial se puede poner como

$$U \simeq U_0 = \frac{\mathcal{G} m^*}{a^{*3}} (C - A) \left( \frac{a^*}{r^*} \right)^3 P_2(\sin \delta). \quad (\text{A.17})$$

### A.2.1 Desarrollo de las funciones armónicas

Como en el modelo rígido, las funciones esféricas que aparecen en el geopotencial han de transformarse a las funciones esféricas en las variables adecuadas. De acuerdo con (Getino y Ferrándiz, 1995c) y despreciando los términos de segundo orden, estas funciones, en términos de las variables canónicas se escriben en la forma

$$\begin{aligned} \left( \frac{a^*}{r^*} \right)^3 P_2(\sin \delta) &\simeq 3 \sum_i B_i \cos \Theta_i - 3 \sin \sigma \sum_{\tau=\pm 1} \sum_i C_i(\tau) \cos(g - \tau \Theta_i), \\ \left( \frac{a^*}{r^*} \right)^3 P_2^1(\sin \delta) \cos \alpha &\simeq 3 \sum_{\tau=\pm 1} \sum_i C_i(\tau) \sin(g + l - \tau \Theta_i), \\ \left( \frac{a^*}{r^*} \right)^3 P_2^1(\sin \delta) \sin \alpha &\simeq 3 \sum_{\tau=\pm 1} \sum_i C_i(\tau) \cos(g + l - \tau \Theta_i), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

en donde las funciones  $B_i$  y  $C_i(\tau)$  son, tal y como conocemos del capítulo primero introductorio:

$$\begin{aligned} B_i &= -\frac{1}{6}(3 \cos^2 I - 1) A_i^{(0)} - \frac{1}{2} \sin 2I A_i^{(1)} - \frac{1}{4} \sin^2 I A_i^{(2)}, \\ C_i(\tau) &= -\frac{1}{4} \sin 2I A_i^{(0)} + \frac{\tau}{4} \sin I (1 + \tau \cos I) A_i^{(2)} + \frac{1}{2} (1 + \tau \cos I) (-1 + 2\tau \cos I) A_i^{(1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Los valores numéricos de los coeficientes  $A_i^{(j)}$  han sido calculados en el capítulo 6. Como conocemos,

$$\begin{aligned} \Theta_i &= m_1 l_M + m_2 l_S + m_3 F + m_4 D + m_5 \Omega, \\ F &= l_M + g_S, \\ D &= l_M + g_S + h_M - l_S - g_S - h_S, \\ \Omega &= h_M - h, \end{aligned}$$

con  $i = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ , y siendo  $l$ ,  $g$  y  $h$  las variables de Delaunay para la Luna (subíndice  $M$ ) y para el Sol (subíndice  $S$ ).

### A.3 Disipación en la frontera Núcleo-Manto (CMB)

La disipación en la frontera manto-núcleo (CMB) se incluye en este modelo. El problema ha sido tratado en (Getino y Ferrándiz, 1995e y 1997), donde se estudia el efecto de la disipación en las nutaciones libres. Tal y como se describe en dicho trabajo, y según Sasao *et al.* (1980), el momento de las fuerzas disipativas, incluyendo el acoplamiento electromagnético y los efectos de la viscosidad, se expresa como

$$\mathbf{t}_c = -\mathbf{t}_m = \begin{pmatrix} R \delta\omega_1 - R' \delta\omega_2 \\ R \delta\omega_2 + R' \delta\omega_1 \\ -R^* \delta\omega_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

donde  $R$ ,  $R'$  y  $R^*$  son constantes de acoplamiento.

El momento disipativo se formula canónicamente mediante fuerzas generalizadas, cuya construcción se encuentra en detalle en (Getino y Ferrándiz, 1997). Estas fuerzas genera-

lizadas son

$$\begin{aligned}
 Q_{g_c} &= \frac{R}{A_m} \sin J_c \left[ K \cos(l + l_c) + \frac{A}{A_c} K_c \right] + \frac{R^*}{C_m} \cos J_c \left[ L - \frac{C}{C_c} L_c \right] + \\
 &+ \frac{R'}{A_m} \sin J_c K \sin(l + l_c), \\
 Q_{l_c} &= \frac{R^*}{C_m} \left[ L - \frac{C}{C_c} L_c \right], \\
 Q_{N_c} &= \frac{R}{A_m} \frac{K}{K_c} \sin(l + l_c) - \frac{R'}{A_m} \left[ \frac{K}{K_c} \cos(l + l_c) - \frac{A}{A_c} \right].
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

#### A.4 Hamiltoniano e integración de primer orden

De acuerdo con las secciones previas, el hamiltoniano del sistema (en primer orden) se escribe como

$$\mathcal{H} = T_0 + T_t + U_0, \tag{A.22}$$

donde los términos  $T_0$ ,  $T_t$  y  $U_0$  vienen dados respectivamente por las ecuaciones (A.13), (A.14) y (A.17), con la ayuda de las ecuaciones (A.18). En este hamiltoniano debemos incluir el efecto de la disipación, como describiremos ahora. Seguidamente se lleva a cabo la integración del hamiltoniano mediante el método de perturbación de Hori (1966), como en el caso rígido descrito en el capítulo 1. El hamiltoniano (A.22) se separa en la parte no perturbada  $\mathcal{H}_0$  correspondiente al movimiento libre, y en la perturbada  $\mathcal{H}_1$ , para las perturbaciones forzadas, en la forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \rightarrow \begin{cases} \mathcal{H}_0 = T_0 \\ \mathcal{H}_1 = T_t + U_0 \end{cases}. \tag{A.23}$$

Entonces efectuamos una transformación canónica del hamiltoniano inicial  $\mathcal{H}$  para obtener  $\mathcal{H}^*$  más fácilmente integrable

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1^*, \tag{A.24}$$

mediante la función generatriz  $\mathcal{W}$ . En el nuevo hamiltoniano, la parte no perturbada es la misma que la antigua,  $\mathcal{H}_0^* = \mathcal{H}_0$ , incluyendo el efecto de la disipación, y para el nuevo término perturbador, tomamos la parte secular de  $\mathcal{H}_1$ , es decir,  $\mathcal{H}_1^* = \mathcal{H}_{1\text{sec}}$ . Como se muestra en (Getino y Ferrándiz, 1995c), tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_0^* &= \frac{1}{2A_m} \left[ K^{*2} + \frac{A}{A_c} K_c^{*2} \right] + \frac{K^* K_c^*}{A_m} \cos(l^* + l_c^*) + \\
 &+ \frac{1}{2C_m} \left[ L^{*2} - 2L^* L_c^* + \frac{C}{C_c} L_c^{*2} \right], \\
 \mathcal{H}_1^* &= U_{0\text{sec}} = k'_0 B_0, \quad \text{with } k'_0 = 3 \frac{\mathcal{G} m^*}{a^{*3}} (C - A),
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

en donde el coeficiente  $B_0 = B_{(00000)}$  corresponde a la contribución secular del desarrollo de  $P_2(\sin \delta)$ . Nótese que los asteriscos indican las nuevas variables introducidas en la transformación canónica. En lo que sigue prescindiremos de los mismos.

Finalmente, la función generatriz de la transformación es

$$\mathcal{W} = \int (\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_1^*) dt = \int \mathcal{H}_{1\text{per}} dt, \quad (\text{A.26})$$

en donde esta integral se calcula a lo largo de la solución de la parte no perturbada. Esta solución, correspondiente al problema libre, se describe en la siguiente sección.

#### A.4.1 Solución no perturbada

El movimiento libre se resuelve mediante las ecuaciones del movimiento correspondientes. En presencia de las fuerzas generalizadas debidas a los efectos disipativo, estas ecuaciones toman la forma

$$\dot{q} = \frac{\partial T_0}{\partial p} - Q_p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial T_0}{\partial q} + Q_q. \quad (\text{A.27})$$

El problema se resuelve de forma completa en (Getino y Ferrándiz, 1997).

La tercera componente de las velocidades angulares tenemos que  $\omega_3 = \text{constante} = \Omega$ , y  $\delta\omega_3 = 0$ . Entonces, de las ecuaciones (A.1) y (A.3) se deduce

$$L = C\Omega, \quad L_c = C_c\Omega. \quad (\text{A.28})$$

Con estas consideraciones, las frecuencias libres  $\sigma_1$  (CW) y  $\sigma_2$  (FCN), que caracterizan el movimiento libre, son de la forma

$$\sigma_1 = m_1, \quad \sigma_2 = m_2 + id, \quad (\text{A.29})$$

con

$$\begin{aligned} m_1 &= \Omega \frac{C - A}{A_m}, \\ m_2 &= -\Omega \left[ 1 + \frac{A}{A_m} \frac{C_c - A_c}{A_c} - \frac{A}{A_c} \Gamma' \right], \\ d &= \Omega \frac{A}{A_c} \Gamma, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

donde hemos introducidos las constantes de disipación adimensionales

$$\Gamma = \frac{R}{\Omega A_m}, \quad \Gamma' = \frac{R'}{\Omega A_m}. \quad (\text{A.31})$$

Estas frecuencias libres vienen dadas por el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = i \mathbf{R} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

En este sistema hemos definido las variables

$$u = K (\sin l + i \cos l), \quad v = K_c (\sin l_c - i \cos l_c), \quad (\text{A.33})$$

y la matriz  $\mathbf{R}$  es

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 + i \Omega \Gamma & r_4 - i \Omega \Gamma \frac{A}{A_c} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.34})$$

cuyos coeficientes son

$$\begin{aligned} r_1 &= \Omega \left( \frac{A_c}{A_m} + e \frac{A}{A_m} \right), \\ r_2 &= -\Omega \frac{A}{A_m} (1 + e), \\ r_3 &= \Omega \left[ \frac{A_c}{A_m} (1 + e_c) - \Gamma' \right], \\ r_4 &= -\Omega \left[ \frac{A}{A_m} (1 + e_c) - \frac{A}{A_c} \Gamma' \right], \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

en donde se han introducido las elipticidades

$$e = \frac{C - A}{A}, \quad e_c = \frac{C_c - A_c}{A_c}. \quad (\text{A.36})$$

Una vez hemos obtenido la solución del problema no perturbado, podemos construir la función generatriz de acuerdo con (A.26). Sin embargo, en Getino (1995e) se apunta que la presencia del núcleo líquido complica mucho la obtención de  $\mathcal{W}$  en comparación con el caso rígido.

## A.5 Expresión de la función generatriz

El cálculo de la función generatriz en el primer orden no es sencillo. Getino (1995e) realizó su cálculo por medio de un método bastante laborioso que requería el cálculo de integraciones por partes sucesivas. Después, Getino y Ferrándiz (1999c) introdujeron una técnica más sofisticada basada en la formulación compleja del problema. Aquí se presenta un nuevo método de Getino y Ferrándiz (2000b), más sencillo, y que viene a ser una mezcla de los dos anteriores.



### A.5.1 Integrales auxiliares

Comenzamos calculando dos integrales que serán de gran utilidad en el desarrollo de este método. Estas integrales se escriben como

$$\begin{aligned} I_1 &= \int G \sin J \cos(g - \tau \Theta_i) dt, \\ I_2 &= \int G_c \sin J_c \cos(g + l + l_c - \tau \Theta_i) dt \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Sean  $P$  y  $Q$  nuevas integrales cuyas partes imaginarias son respectivamente  $I_1$  y  $I_2$ , esto es,  $I_1 = \text{Im}\{P\}$ ,  $I_2 = \text{Im}\{Q\}$ , de modo que

$$\begin{aligned} P &= \int i G \sin J e^{-il} e^{i(g+l-\tau \Theta_i)} dt, \\ Q &= \int i G_c \sin J_c e^{il_c} e^{i(g+l-\tau \Theta_i)} dt. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Por otro lado, con la ayuda de (A.4), las variables  $u$ ,  $v$  en Eq.(A.33) pueden expresarse como

$$u = i G \sin J e^{-il}, \quad v = -i G_c \sin J_c e^{il_c}. \quad (\text{A.39})$$

De las ecuaciones (A.38) y (A.39), se tiene que las nuevas integrales se escriben como

$$P = \int u e^{i(g+l-\tau \Theta_i)} dt, \quad Q = - \int v e^{i(g+l-\tau \Theta_i)} dt. \quad (\text{A.40})$$

Las integrales  $P$  y  $Q$  (Getino y Ferrándiz, 2000b) vienen dadas por

$$\begin{aligned} P &= G \sin J e^{i(g-\tau \Theta_i)} \frac{a_{11}}{f_1(f_2 + i d)} + G_c \sin J_c e^{i(g+l-\tau \Theta_i+l_c)} \frac{-a_{12}}{f_1(f_2 + i d)}, \\ Q &= G \sin J e^{i(g-\tau \Theta_i)} \frac{-a_{21}}{f_1(f_2 + i d)} + G_c \sin J_c e^{i(g+l-\tau \Theta_i+l_c)} \frac{a_{22}}{f_1(f_2 + i d)}, \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

con

$$\begin{aligned} f_1 &= n_{g+l-\tau \Theta_i} + m_1 = m_1 + \Omega - \tau n_i, \\ f_2 &= n_{g+l-\tau \Theta_i} + m_2 = m_2 + \Omega - \tau n_i. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Finalmente, tomando la parte imaginaria en la ecuación (A.41), las expresiones de las integrales  $I_1$  y  $I_2$  se obtienen en la forma

$$\begin{aligned} I_1 &= G \sin J \left[ F_1^a \sin(g - \tau \Theta_i) + F_1^b \cos(g - \tau \Theta_i) \right] + \\ &+ G_c \sin J_c \left[ F_2^a \sin(g + l - \tau \Theta_i + l_c) + F_2^b \cos(g + l - \tau \Theta_i + l_c) \right], \\ I_2 &= G \sin J \left[ G_1^a \sin(g - \tau \Theta_i) + G_1^b \cos(g - \tau \Theta_i) \right] + \\ &+ G_c \sin J_c \left[ G_2^a \sin(g + l - \tau \Theta_i + l_c) + G_2^b \cos(g + l - \tau \Theta_i + l_c) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

en donde se han definido las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
 F_1^a &= \frac{(r_4 + n_{g+l-\tau\Theta_i}) f_2}{f_1 (f_2^2 + d^2)}, \\
 F_1^b &= -\Omega\Gamma \frac{A}{A_c} \frac{f_2 - r_4 - n_{g+l-\tau\Theta_i}}{f_1 (f_2^2 + d^2)}, \\
 G_1^a &= \frac{r_3 f_2}{f_1 (f_2^2 + d^2)}, \\
 G_1^b &= \Omega\Gamma \frac{f_2 + \frac{A}{A_c} r_3}{f_1 (f_2^2 + d^2)}, \\
 F_2^a &= \frac{r_2 f_2}{f_1 (f_2^2 + d^2)}, \\
 F_2^b &= \Omega\Gamma \frac{A}{A_c} \frac{r_2}{f_1 (f_2^2 + d^2)}, \\
 G_2^a &= \frac{(r_1 + n_{g+l-\tau\Theta_i}) f_2}{f_1 (f_2^2 + d^2)}, \\
 G_2^b &= \Omega\Gamma \frac{A}{A_c} \frac{r_1 + n_{g+l-\tau\Theta_i}}{f_1 (f_2^2 + d^2)},
 \end{aligned} \tag{A.44}$$

siendo  $n_{g+l-\tau\Theta_i} = \Omega - \tau n_i$ . Como  $d$  es distinto de cero, no puede darse resonancia en estos coeficientes, como se explica en detalle en (Getino y Ferrándiz, 1999c). Además, el pequeño valor del parámetro  $d$  para la Tierra en comparación con el valor de  $f_2$  para cualquiera de las frecuencias perturbadoras  $n_i$  nos permite desprestigiar  $d^2$ , lo que conduce a las siguientes expresiones simplificadas

$$\begin{aligned}
 F_1^a &= \frac{r_4 + n_{g+l-\tau\Theta_i}}{f_1 f_2}, \\
 F_1^b &= -\Omega\Gamma \frac{A}{A_c} \frac{f_2 - r_4 - n_{g+l-\tau\Theta_i}}{f_1 f_2^2}, \\
 G_1^a &= \frac{r_3}{f_1 f_2}, \\
 G_1^b &= \Omega\Gamma \frac{f_2 + \frac{A}{A_c} r_3}{f_1 f_2^2}, \\
 F_2^a &= \frac{r_2}{f_1 f_2}, \\
 F_2^b &= \Omega\Gamma \frac{A}{A_c} \frac{r_2}{f_1 f_2^2}, \\
 G_2^a &= \frac{r_1 + n_{g+l-\tau\Theta_i}}{f_1 f_2}, \\
 G_2^b &= \Omega\Gamma \frac{A}{A_c} \frac{r_1 + n_{g+l-\tau\Theta_i}}{f_1 f_2^2},
 \end{aligned} \tag{A.45}$$

que se usan en lugar de (A.44) para calcular las nutaciones forzadas.

### A.5.2 Función generatriz

Como en la sección A.4, la función generatriz se obtiene integrando la parte periódica de  $\mathcal{H}_1$ , esto es

$$\mathcal{H}_{1\text{per}} = \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_{1\text{sec}} = U_{0\text{per}} + T_t . \quad (\text{A.46})$$

Así, la función generatriz puede dividirse en dos partes

$$\mathcal{W} = \int \mathcal{H}_{1\text{per}} dt = \int (U_{0\text{per}} + T_t) dt = \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_t , \quad (\text{A.47})$$

donde  $\mathcal{W}_0$  es la contribución de la parte rígida y  $\mathcal{W}_t$  es debida a la deformación de marea. Seguidamente se calculan estas partes.

#### Expresión de $\mathcal{W}_0 = \int U_{0\text{per}} dt$

De las ecuaciones (A.17) y (A.18), la parte periódica de  $U_0$  viene dada por

$$U_{0\text{per}} = k'_0 \sum_{i \neq 0} B_i \cos \Theta_i - \frac{k'_0}{G} \sum_{\tau = \pm 1} C_i(\tau) [G \sin J \cos(g - \tau \Theta_i)] , \quad (\text{A.48})$$

en donde la contribución secular correspondiente a  $i = 0$  (véase ecuación (A.25)) ha sido excluida. Mediante la integral  $I_1$  (ecuaciones (A.37) y (A.43)),  $\mathcal{W}_0$  puede expresarse fácilmente como

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_{00} + \mathcal{W}_{01} + \mathcal{W}_{02} , \quad (\text{A.49})$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{00} &= k'_0 \sum_{i \neq 0} \frac{B_i}{n_i} \sin \Theta_i , \quad \left( n_i = \frac{d\Theta_i}{dt} \right) \\ \mathcal{W}_{01} &= -k'_0 \sin J \sum_{i \neq 0} \sum_{\tau = \pm 1} C_i(\tau) \times \left[ F_1^a \sin(g - \tau \Theta_i) + F_1^b \cos(g - \tau \Theta_i) \right] , \\ \mathcal{W}_{02} &= -k'_0 \frac{G_c}{G} \sin J_c \sum_{i \neq 0} \sum_{\tau = \pm 1} C_i(\tau) \times \left[ F_2^a \sin(g + l - \tau \Theta_i + l_c) + F_2^b \cos(g + l - \tau \Theta_i + l_c) \right] . \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

**Expresión de  $\mathcal{W}_t = \int T_t dt$** 

Antes de nada, desarrollamos la expresión de  $T_t$  dada en la ecuación (A.14). De las ecuaciones (A.9) y (A.18), tenemos

$$\begin{aligned} t_{13} \sin l_c - t_{23} \cos l_c &= 6 \sum_{i,\tau} C_i(\tau) \cos(\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i + l_c), \\ t_{13} \sin l + t_{23} \cos l &= -6 \sum_{i,\tau} C_i(\tau) \cos(\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i - l), \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

donde  $\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i$  es el argumento de las funciones esféricas en (A.18). El símbolo  $\sim$  se usa para señalar que este argumento corresponde a las coordenadas del cuerpo perturbador. Las derivaciones conducentes a las ecuaciones canónicas han de llevarse a cabo respecto de las coordenadas del cuerpo perturbado.

A partir de (A.28) y (A.51), la energía cinética de marea puede expresarse finalmente como

$$T_t = \sum_{i,\tau} C_i(\tau) \left[ k_t^m G \sin J \cos(\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i - l) + (k_t^m - k_t^c) G_c \sin J_c \cos(\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i + l_c) \right], \quad (\text{A.52})$$

en donde los coeficientes adimensionales  $k_t^m$  que tienen en cuenta la deformación del manto, y  $k_t^c$  para la deformación del núcleo, vienen dados por

$$k_t^m = \frac{6 D_m^t \Omega}{A_m}, \quad k_t^c = \frac{6 D_c^t \Omega}{A_c}. \quad (\text{A.53})$$

Ahora podemos integrar la expresión (A.52) de  $T_t$  con ayuda de  $I_1$ ,  $I_2$ , y la función generatriz se puede escribir finalmente como

$$\mathcal{W}_t = \mathcal{W}_{t1} + \mathcal{W}_{t2}, \quad (\text{A.54})$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{t1} &= G \sin J \sum_{i,\tau} C_i(\tau) \times \left[ D_1^a \sin(\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i - l) + D_1^b \cos(\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i - l) \right], \\ \mathcal{W}_{t2} &= G_c \sin J_c \sum_{i,\tau} C_i(\tau) \times \left[ D_2^a \sin(\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i + l_c) + D_2^b \cos(\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i + l_c) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

donde las funciones  $D_i^p$  son de la forma

$$D_i^p = k_t^m (F_i^p + G_i^p) - k_t^c G_i^p, \quad i = 1, 2, \quad p = a, b. \quad (\text{A.56})$$

## A.6 Nutaciones forzadas

Las perturbaciones periódicas, nutaciones forzadas, se obtienen a partir de la función generatriz mediante las relaciones

$$\Delta(g, l, h) = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial(G, L, H)}, \quad \Delta(G, L, H) = \frac{-\partial \mathcal{W}}{\partial(g, l, h)}. \quad (\text{A.57})$$

Seguidamente, calculamos las perturbaciones periódicas de los planos fundamentales, el plano perpendicular al momento angular (plano de Andoyer) y el plano perpendicular al eje de figura de la Tierra (plano de figura o ecuatorial).

### A.6.1 Nutaciones del plano de Andoyer

La longitud del nodo y la inclinación de este plano vienen dadas respectivamente por  $h$  y  $I = \cos^{-1}(H/G)$ . Las nutaciones correspondientes a estas variables, conocidas como términos de Poisson, vienen dadas por (Kinoshita, 1977)

$$\Delta h = \frac{-1}{G \sin I} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial I}, \quad \Delta I = \frac{1}{G \sin I} \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial h} - \cos I \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} \right). \quad (\text{A.58})$$

Despreciando los términos de segundo orden en los parámetros pequeños, la contribución de estas nutaciones viene dada por el término  $\mathcal{W}_{00}$  de la función generatriz, que se corresponde con la perturbación rígida. Usando los ángulos  $\psi = -h$ ,  $\epsilon = -I$  (Kinoshita, 1977), los términos de Poisson en primer orden vienen dados por (Getino, 1995e)

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= k_0 \sum_{i \neq 0} \frac{1}{\sin I} \frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{B_i}{n_i} \right) \sin \Theta_i, \\ \Delta \epsilon &= k_0 \sum_{i \neq 0} \frac{(m_5) B_i}{\sin I n_i} \cos \Theta_i, \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

con el coeficiente

$$k_0 = \frac{k'_0}{M} \simeq \frac{3 \mathcal{G} m^* C - A}{a^{*3} \Omega A}. \quad (\text{A.60})$$

Las expresiones (A.59) son las mismas que las de Kinoshita (1977) para Tierra rígida (con la simplificación  $A = B$ ). Esto es, la presencia del núcleo líquido y los efectos de la inelasticidad y disipación no tienen influencia en las nutaciones del plano de Andoyer, lo que está de acuerdo con el hecho de que el movimiento del eje del momento angular no depende de la constitución interna de la Tierra (Moritz and Mueller, 1987).

### A.6.2 Nutación del plano de figura

La longitud del nodo,  $\psi_f = -h_f$ , y la inclinación  $\epsilon_f = -I_f$ , de este plano vienen dadas en primer orden por (Kinoshita, 1977)

$$h_f = h + \frac{J}{\sin I} \sin g, \quad I_f = I + J \cos g. \quad (\text{A.61})$$

Siguiendo a Kinoshita, las perturbaciones periódicas de los incrementos  $h_f - h$ ,  $I_f - I$ , llamados términos de Opolzer, vienen dados en primer orden por

$$\begin{aligned} \Delta(h_f - h) &= \frac{1}{\sin I} \frac{1}{G \sin J} \times \left[ \sin g \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial l} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} \right) + J \cos g \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J} \right], \\ \Delta(I_f - I) &= \frac{1}{G \sin J} \times \left[ \cos g \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial l} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} \right) - J \sin g \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial J} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Ahora mostramos la contribución a los términos de Opolzer de cada parte de la función generatriz.

#### Contribución de $\mathcal{W}_0$

Despreciando los términos de segundo orden, la contribución de  $\mathcal{W}_0$  viene dada por (Getino y Ferrándiz, 2000b)

$$\begin{aligned} \Delta_0(\psi_f - \psi) &= \frac{-k_0}{\sin I} \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(\tau) \times \left[ F_1^a \tau \sin \Theta_i - F_1^b \cos \Theta_i \right], \\ \Delta_0(\epsilon_f - \epsilon) &= -k_0 \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(\tau) \times \left[ F_1^a \cos \Theta_i + F_1^b \tau \sin \Theta_i \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Estas expresiones difieren sustancialmente de las dadas por Kinoshita (1977) para el caso rígido: por un lado en (A.63) aparecen términos en seno y coseno. Los términos fuera de fase vienen de la función  $F_1^b$ , que según la ecuación (A.44), es producida por la disipación en la frontera manto-núcleo. Por otro lado, las amplitudes en fase, dadas por  $F_1^a$ , no son las mismas que en el caso rígido.

#### Contribución de $\mathcal{W}_i$

Este término es debido a la deformación de marea. Si obviamos los términos de segundo orden, de las ecuaciones (A.55) y (A.62) obtenemos que la contribución viene dada por el

término  $W_{t1}$  en la forma

$$\begin{aligned}\Delta_t(\psi_f - \psi) &= \frac{-1}{\sin I} \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(\tau) \left[ D_1^a \sin(\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i - g - l) + D_1^b \cos(\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i - g - l) \right], \\ \Delta_t(\epsilon_f - \epsilon) &= - \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(\tau) \left[ -D_1^a \cos(\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i - g - l) + D_1^b \sin(\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i - g - l) \right].\end{aligned}\tag{A.64}$$

Una vez las derivadas de las ecuaciones de perturbación han sido calculadas, podemos identificar

$$\tilde{g} + \tilde{l} - \tau \tilde{\Theta}_i = g + l - \tau \Theta_i,\tag{A.65}$$

pero este es el momento de considerar el efecto de la no elasticidad.

### Efecto de la no elasticidad

La no elasticidad del manto da origen a un ángulo de desfase  $e$  en los argumentos de la nutación, relacionado con el retardo temporal  $\Delta t$  (Lambeck, 1974, Mignard, 1978). Para tener en cuenta este efecto se reemplaza  $g + l - \tau \Theta_i$  por  $(g + l - \tau \Theta_i)_{in}$ , donde

$$(g + l - \tau \Theta_i)_{in} = g + l - \tau \Theta_i + e.\tag{A.66}$$

Aquí consideramos una dependencia de la frecuencia del ángulo de desfase de la forma

$$e_i = (\Omega - \tau n_i) \Delta t,\tag{A.67}$$

siendo  $\Delta t$  el retardo temporal. Introduciendo la ecuación (A.67) en las fórmulas (A.64), la contribución de la inelasticidad en los términos de Oppolzer viene dada por

$$\begin{aligned}\Delta_t(\psi_f - \psi) &= \frac{-1}{\sin I} \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(\tau) \times [E_1 \tau \sin \Theta_i - E_2 \cos \Theta_i], \\ \Delta_t(\epsilon_f - \epsilon) &= - \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(\tau) \times [E_1 \cos \Theta_i + E_2 \tau \sin \Theta_i],\end{aligned}\tag{A.68}$$

en donde, teniendo en cuenta la ecuación (A.56), las funciones  $E_1$  y  $E_2$  se escriben como

$$\begin{aligned}E_1 &= k_t^m \left[ -\cos e_i (F_1^a + G_1^a) + \sin e_i (F_1^b + G_1^b) \right] + k_t^c \left[ \cos e_i G_1^a - \sin e_i G_1^b \right], \\ E_2 &= k_t^m \left[ -\cos e_i (F_1^b + G_1^b) - \sin e_i (F_1^a + G_1^a) \right] + k_t^c \left[ \cos e_i G_1^b + \sin e_i G_1^a \right].\end{aligned}\tag{A.69}$$

### A.6.3 Expresiones finales

De las ecuaciones (A.59), (A.63) y (A.68), las series de nutación en longitud  $\Delta\psi_f$ , y oblicuidad  $\Delta\epsilon_f$ , del plano de figura se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned}\Delta\psi_f &= \sum_{i \neq 0} [L_i^{in} \sin \Theta_i + L_i^{out} \cos \Theta_i] , \\ \Delta\epsilon_f &= \sum_{i \neq 0} [O_i^{in} \cos \Theta_i + O_i^{out} \sin \Theta_i] ,\end{aligned}\tag{A.70}$$

en donde las amplitudes para la longitud,  $L_i^{in}$ , y oblicuidad,  $O_i^{in}$ , vienen dadas por

$$\begin{aligned}L_i^{in} &= \frac{k_0}{\sin I} \frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{B_i}{n_i} \right) - \sum_{\tau=\pm 1} \frac{\tau C_i(\tau)}{\sin I} [k_0 F_1^a + E_1]_{i,\tau} , \\ O_i^{in} &= k_0 \frac{(m_5) B_i}{\sin I n_i} - \sum_{\tau=\pm 1} C_i(\tau) [k_0 F_1^a + E_1]_{i,\tau} ,\end{aligned}\tag{A.71}$$

y las correspondientes amplitudes  $L_i^{out}$  y  $O_i^{out}$  para los términos fuera de fase son

$$\begin{aligned}L_i^{out} &= \sum_{\tau=\pm 1} \frac{C_i(\tau)}{\sin I} [k_0 F_1^b + E_2]_{i,\tau} , \\ O_i^{out} &= - \sum_{\tau=\pm 1} \tau C_i(\tau) [k_0 F_1^b + E_2]_{i,\tau} .\end{aligned}\tag{A.72}$$





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Bibliografía

- [1] Abad, A. and Sein-Echaluce, M.: 1988, Manipuladores algebraicos en Mecánica Celeste, *Rev. Acad. Ciencias Zaragoza*, **43**, 117-127.
- [2] Andoyer, H.: 1923, Cours de Mécanique Celeste, vol. 1, *Gauthier-Villars, Paris*.
- [3] Barton, D.: 1966, Lunar disturbing function, *The Astronomical Journal*, **71**, 6, 438-443.
- [4] Bourne, S. R. and Harton, J. R.: 1971, The design of the Cambridge Algebra System, *Proc. SYMSAM II*.
- [5] Bretagnon, P.: 1974, Termes à longues périodes dans le système solaire, *Astron. Astrophys.*, **30**, 141-154.
- [6] Bretagnon, P.: 1982, VSOP82, *Astron. Astrophys.*, **114**, 278.
- [7] Bretagnon, P.: 1988, Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solution, *Astron. Astrophys.*, **202**, 304-315.
- [8] Bretagnon, P.: 1997, On the use of analytical theories in the calculation of precession-nutation, *Celestial Mechanics*, **65**, 95-106.
- [9] Bretagnon, P., Rocher, P. and Simon, J. L.: 1997, *Astron. Astrophys.*, **319**, 305-317.
- [10] Broucke, R. and Garthwaite, K.: 1969, A programming system for analytical series expansions on a computer, *Celestial Mechanics*, **1**, 271.
- [11] Broucke, R.: 1970, How to assemble a Keplerian processor, *Celestial Mechanics*, **2**, 9-20.
- [12] Broucke, R.: 1971, Construction of rational and negative powers of a series, *Comm. Assoc. Comp. Mach.*, **14**, 32-35.
- [13] Broucke, R. A.: 1980, A FORTRAN-4 system for the manipulation of symbolic Poisson series with applications to Celestial Mechanics, IASOM TR 80-3.
- [14] Brouwer, D. and Clemence, G. M.: 1967, *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press.

- [15] Brown, E. W. and Shook, C. A.: 1933, Planetary Theory, Cambridge University Press, London and New York.
- [16] Brumberg, Victor A.: 1995, Analytical techniques of of Celestial Mechanics, Springer.
- [17] Chapront, J. and Mangeney, L.: 1968, Applications of literal series to the main problem of lunar theory, *The Astronomical Journal*, **73**, 214-216.
- [18] Chapront, J.: 1970, Construction d'une théorie littéraire planétaire jusqu'au second ordre des Masses, *Astron. Astrophys.*, **7**, 175-203.
- [19] Chapront-Touzé, M.: 1980, La solution ELP du problème central de la Lune, *Astron. Astrophys.*, **83**, 86.
- [20] Chapront-Touzé, M.: 1982, Progress in the analytical theories for the orbital motion of the Moon, *Celestial Mechanics*, **26**, 53-62.
- [21] Chapront-Touzé, M. and Chapront, J.: 1988, ELP2000-85. A semi analytical lunar ephemeris adequate for historical times, *Astron. Astrophys.*
- [22] Cherniack, J. R.: 1973, A more general system for Poisson series manipulation, *Celestial Mechanics*, **7**, 107-121.
- [23] Danby, J. M. A., Deprit, A. and Rom, A. R. M.: 1965, The symbolic manipulation of Poisson's series, *BSRL note 423*.
- [24] Davis, M. S.: 1973, Review of non-numerical uses of computers, *Recent Advances in Dynamical Astronomy*, 351-391, Tapley, B. D. and Szebehely, V. (eds.).
- [25] Defraigne, P., Dehant, V. and Hinderer, J.: 1995, *J. Geophys. Res.*, **100**, 2041-2042.
- [26] Dehant V. and Defraigne P.: 1997a, *J. Geophys. Res.*, **102**, pp. 27, 659-27, 688.
- [27] Dehant V. and Capitaine, N.: 1997b, *Celestial Mechanics*, **65**, 439-458.
- [28] Dehant, V. and Capitaine, N.: 1998, On the luni-solar precession, the tilt-over-mode, and the Oppolzer terms, *Celestial Mechanics*, **65**, 439-458.
- [29] Dehant V. et al.: 1999, *Celestial Mechanics*, **72**, 245-310.
- [30] Deprit, A.: 1969, Canonical transformations depending on a small parameter, *Celestial Mechanics*, **1**, 12-30.
- [31] Deprit, A., Henrard, J. and Rom, A.: 1970, Analytical lunar ephemeris: Brouwer's suggestion, *The Astronomical Journal*, **75**, 6, 747-750.
- [32] Deprit, A., Henrard, J. and Rom, A.: 1970, La théorie de la Lune de Delaunay et son prolongement, *C.R. Acad. Sc. Paris*, **271**, 519-520.
- [33] Deprit, A., Henrard, J. and Rom, A.: 1971, Analytical lunar ephemeris: Delaunay's theory, *The Astronomical Journal*, **76**, 269-272.

- [34] Dziewonski, A. M. and Anderson, D. L.: 1981, *Physics Earth and Planet. Int.*, **25**, 297-356.
- [35] Eckert, W. J., Walker, M. J., and Eckert, D.: 1966, *The Astronomical Journal*, **71**, 314.
- [36] Escapa, L. A.: 1997, Desarrollos complementarios en la teoría hamiltoniana de la rotación de una Tierra no rígida y verificación de términos de segundo orden, Universidad de Valladolid, Facultad de Ciencias.
- [37] Escapa, L. A., Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 1999, Canonical approach to the free nutations of a three-layers Earth model, *J. Geophys. Res.* (submitted).
- [38] Fateman, R. J.: 1974, On the multiplication of Poisson series, *Celestial Mechanics*, **10**, 243-247.
- [39] Ferrándiz, J. M.: 1981, Expresión del potencial de dos sólidos, *Actas VIII Jornadas Luso Espanholas Matemática*, vol. III, Universidad Coimbra, 233-240.
- [40] Ferrándiz, J. M., Getino, J., García, M. and Vigo-Aguiar, M. I.: 1999, Analytical predictions of high-frequency corrections to nutation series derived from the Hamiltonian non-rigid Earth theory, *XXIV General Assembly of EGS*, Holland.
- [41] Ferrándiz, J. M., Navarro, J. F. *et al.*: 2000, First planetary nutation series for a non-rigid Earth, *MNARS-Letters*, submitted.
- [42] Ferrándiz, J. M., Getino, J., Navarro, J. F., Vigo-Aguiar, M. I.: 2001, Consistency and accuracy of precession-nutation models. *Comm. in EGS 2001*, G6.
- [43] Folgueira, M., Souchay, J. and Kinoshita, H.: 1998, Effects on the nutation of the non-zonal harmonics of third degree, *Celestial Mechanics*, **69**, 373-402.
- [44] Fukushima, T.: 1991, *Astro. Astrophys.*, **244**, L11-L12.
- [45] Furuya, M. and Chao, B. F.: 1996, *Geophys. J. Int.*, **127**, 693-702.
- [46] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 1990, A Hamiltonian theory for elastic Earth: canonical variables and kinetic energy, *Celestial Mechanics*, **49**, 303-326.
- [47] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 1991, A Hamiltonian theory for elastic Earth: elastic energy of deformation, *Celestial Mechanics*, **51**, 17-34.
- [48] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 1991, A Hamiltonian theory for elastic Earth: first order analytical integration, *Celestial Mechanics*, **51**, 35-65.
- [49] Getino, J.: 1993, *ZAMP*, **44**, 998-1021.
- [50] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 1994, A rigorous Hamiltonian approach to the rotation of elastic bodies, *Celestial Mechanics*, **58**, 277-295.

- [51] Getino, J.: 1995a, Kinetic energy of a non-spherical elastic Earth mantle with Andoyer variables, *Celestial Mechanics*, **61**, 21-49.
- [52] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 1995b, On the effect of the mantle elasticity on the Earth's rotation, *Celestial Mechanics*, **61**, 117-180.
- [53] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 1995c, in *Dynamics, Ephemerides and Astrometry of the Solar System*, S. Ferraz-Mello et al. (eds.), proc. *I.A.U. Symposium No. 172 (Paris)*, pp. 233-238.
- [54] Getino, J.: 1995d, *Geophys. J. Int.*, **120**, 693-705.
- [55] Getino, J.: 1995e, *Geophys. J. Int.*, **122**, 803-814.
- [56] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 1997, Nutations of the non-rigid Earth, *Proceedings of the Journées 97*, Praga (in press 97).
- [57] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 1997a, *Geophys. J. Int.*, **130**, 326-334.
- [58] Getino, J., Farto, J. M. and Ferrándiz, J. M.: 1998, Obtaining the free frequencies of the non-rigid Earth, *Celestial Mechanics*, **66**, 95-108.
- [59] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 1999a, New nutation series derived from the Hamiltonian theory, *Proceedings of the Journées 98*, Paris.
- [60] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 1999b, *Geophys. J. Int.* (accepted).
- [61] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 1999c, *Mon. Not. R. Astr. Soc.-Letters*, **306 (4)**, L45-L49, 1999.
- [62] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 2000a, IAU Coll. 180.
- [63] Getino, J. and Ferrándiz, J. M.: 2000b, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, (submitted).
- [64] Gilbert, F. and Dziewonski, A.M.: 1975, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A.*, **278**, 187-269.
- [65] Goldstein, H.: 1994, *Mecánica clásica*, Ed. Reverté.
- [66] Gustavson, F. G.: 1966, On constructiong formal integrals of an Hamiltonian system near an equilibrium point, *The Astronomical Journal*, **71**, 670-686.
- [67] Hartman, T. and Soffel, M.: 1994, *The Astronomical Journal*, **108**, 1115-1120.
- [68] Henrard, J.: 1965, Solution générale au voisinage des equilibres colinéaires du problème restreint, Dissertation Doctorale, Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences.
- [69] Henrard, J.: 1976, Poisson Series Processor, *Publication du Departement de Mathématique*, Facultés Universitaires de Namur.

- [70] Henrard, J.: 1979, A new solution to the main problem of the lunar theory, *Celestial Mechanics*, **19**, 337.
- [71] Henrard, J.: 1989, A survey of Poisson series processors, *Celestial Mechanics*, **45**, 245-253.
- [72] Herget, P. and Musen, P.: 1959, The calculation of literal expansions, *The Astronomical Journal*, **64**, 11-20.
- [73] Hirayama, T.: 1969, *it Tokyo Astron. Obs. Rept.*, **15**, 531.
- [74] Hobson, E. W.: 1931, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, *Cambridge*.
- [75] Hopcroft, J. E. and Ullman, J. E.: 1979, Introduction to automata theory, languages and computation, *Addison-Wesley*.
- [76] Hori, G.: 1966, Theory of general perturbations with unspecified canonical variables, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, **18**, 4, 287-296.
- [77] Hori, G.: 1971, *Extra Collection of Papers Contributed to the IAU Symposium No. 48, Rotation of the Earth*, ed. S. Yumi (Sasaki Printing and Publishing Co.), p. 141.
- [78] Howland, R.: 1977, *Celestial Mechanics*, **15**, 327-352.
- [79] Iszak, I.: 1964, *Smithsonian Astrophys. Obs. Special Rep.*, **140**.
- [80] Jefferys, W. H.: 1965, *Geophys. J.*, **10**, 141.
- [81] Jefferys, W. H.: 1970, A FORTRAN-based list processor for Poisson series, *Celestial Mechanics*, **2**, 474-480.
- [82] Jefferys, W. H.: 1971, Automated algebraic manipulation in Celestial Mechanics, *Comm. A. C. M.*, **14**, 538-541.
- [83] Jefferys, W. H.: 1972, A precompiler for the formula manipulation system TRIGMAN, *Celestial Mechanics*, **6**, 117-124.
- [84] Kalua, W. M.: 1961, *Geophys. J.*, **9**, 104.
- [85] Kalua, W. M.: 1962, *The Astronomical Journal*, **67**, 300.
- [86] Kalua, W. M.: 1966, Theory of satellite geodesy, *Blaisdell Publishing Co.*
- [87] Kinoshita, H.: 1972, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **24**, 423.
- [88] Kinoshita, H., Hori, G. I. and Nakai, H.: 1974, Modified Jacobi polynomial and its applications to expansions of disturbing functions, *Annals Tokyo Astron. Obs.*, **14**, 314-356.
- [89] Kinoshita, H.: 1977, Theory of the rotation of the rigid Earth, *Celestial Mechanics*, **15**, 277-326.

- [90] Kinoshita, H. and Souchay, J.: 1990, The theory of the nutation for the rigid Earth model at the second order, *Celestial Mechanics*, **48**, 187-265.
- [91] Kozai, Y.: 1959, *Smithonian Astrophys. Obs. Spec. Rept. No. 22*.
- [92] Kozai, Y.: 1966, *Smithonian Astrophys. Obs. Spec. Rept. No. 235*.
- [93] Kubo, Y.: 1982, *Celestial Mechanics*, **26**, 96.
- [94] Lambeck, K.: 1974, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **12** (3), 421.
- [95] Landau, L. y Lifshitz: 1988, Física teórica. Mecánica, Volumen I, Editorial Reverté.
- [96] Laskar, J.: 1985, Accurate methods in general planetary theory, *Astron. Astrophys.*, **144**, 133-146.
- [97] Lieske, J. H., Lederle, T., Fricke, W. and Morando, B.: 1977, Expressions or the precession quantities based upon the IAU (1976) system of astronomical constants, *Astron. Astrophys.*, **58**, 1-16.
- [98] Mathews, P. M., Buffet, B. A., Herring, T. A. and Shapiro, I. I.: 1991, *J. Geophys. Res.*, **96**, 8219-8242.
- [99] Mathews, P. M., Buffet, B. A., Herring, T. A. and Shapiro, I. I.: 1991, *J. Geophys. Res.*, **96**, 8243-8257.
- [100] Mathews, P. M. and Shapiro, I. I.: 1995, *Proceedings of the Journées 95*, Warsaw, Poland, 61-66.
- [101] Mathews, P. M., Buffet, B. A., Herring, T. A.: 1998a, EGS Session G12: 03 Effects of the core, Nice, France.
- [102] Mathews, P. M., Buffet, B. A., Herring, T. A.: 1998b, *Proc. Journées Systèmes de Référence 1998*, Paris, France (in press).
- [103] McCarthy, D. D.: 1996, IERS Technical Note 21, U.S. Naval Observatory.
- [104] Mignard, F.: 1978, *Moon and Planets*, **20**, 301-315.
- [105] Morando, Bruno: 1995, Dynamique du systeme solaire. Techniques mathématiques, *Publication du Bureau des longitudes, Observatoire de Paris*.
- [106] Moritz, H.: 1980, Theories of nutation and polar motion I, *Reports of the Department of Geodetic Science*.
- [107] Moritz, H.: 1982, *Bull. Géod.* **56**, 381-400.
- [108] Moritz, H.: 1984, *Cursillos de Geodesia Superior*, No. 1, IGN-IAG, Madrid (Spain).
- [109] Moritz, H. and Mueller, I.: 1987, *Earth Rotation*, Ungar, New York.

- [110] Murray, C. A.: 1978, On the precession and nutation of the Earth's axis of figure, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **183**, 677-685.
- [111] Navarro, J. F. and Ferrándiz, J. M.: 1998, Symbolic processing in the analytical modeling of the Earth rotation, *Proceedings of IMACS 98*, 111-117.
- [112] Navarro, J. F., Ferrándiz, J. M. and Getino, J.: 2000, Computing the nutations of a rigid Earth through symbolic processing, *Comm. in EGS 2000*, G10.02.
- [113] Navarro, J. F. and Ferrándiz, J. M.: 2001a, A new symbolic processor for the Earth rotation theory, *Celestial Mechanics*, to appear.
- [114] Navarro, J. F. and Ferrándiz, J. M.: 2001b, Computing the effect of third order harmonics in the nutation of a rigid Earth through symbolic processing, *Journal of Geodynamics*, to appear.
- [115] Navarro, J. F., Ferrándiz, J. M. and Getino, J.: 2001c, Effect of high order harmonics on nutation, revisited. *Comm. in EGS 2001*, G3.
- [116] Newcomb, S.: 1895, *Astron. Papers Amer. Ephemeris*, **6**, pt. 1.
- [117] Newcomb, S.: 1906, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Macmillan, New York, Chap. 10.
- [118] Richardson, D. L.: 1989, PARSEC: An interactive Poisson series processor for personal computing systems, *Celestial Mechanics*, **45**, 267-274.
- [119] Ricklefs, E. L., Jefferys, W. H. and Broucke, R. A.: 1983, A general precompiler for algebraic manipulation, *Celestial Mechanics*, **29**, 179-190.
- [120] Rom, A.: 1969, Mechanized algebraic operations (MAO), *Celestial Mechanics*, **1**, 301-319.
- [121] Rom, A.: 1970, Echeloned series processor (ESP), *Celestial Mechanics*, **3**, 331-345.
- [122] Roosbeek, F. and Dehant, V.: 1998, RDAN 97: An analytical development of rigid Earth nutation series using the torque approach, *Celestial Mechanics*, **70**, 215-253.
- [123] Sasao, T., Okubo, S. and Saito, M.: 1980, *Proc. IAU Symp. No. 78*, p. 165.
- [124] Schastok, J.: 1997, *Geophys. J. Int.*, **130**, 137-150.
- [125] Seidelmann, P. K.: 1970, An iterative method of general perturbations programmed for a computer, *Celestial Mechanics*, **2**, 134-146.
- [126] Seidelmann, P. K.: 1982, *Celestial Mechanics*, **27**, 79.
- [127] Shirai, T. and Fukushima, T.: 2001, Construction of a new forced nutation theory of the nonrigid Earth, *The Astronomical Journal*, **121**, 3270-3283.



- [128] Souchay, J.: 1993, Comparison between theories of nutation for a rigid-Earth model, *Astron. Astrophys.*, **276**, 266-277.
- [129] Souchay, J. and Kinoshita, H.: 1996, *Astron. Astrophys.*, **312**, 1017-1030.
- [130] Souchay, J.: 1998, Comparisons of the REN-2000 tables with numerical integration and other recent analytic tables, *The Astronomical Journal*, **116**, 503-515.
- [131] Souchay, J., Losley, B., Kinoshita, H. and Folgueira, M.: 1999, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **135**, 111-131.
- [132] Stiefel, E.: 1965, *Mathematische Methoden der Himmelsmechanik und Astronautik*, *Bibliographisches Institut, Mannheim*, p. 341.
- [133] Takeuchi, H.: 1951, *Trans. Am. Geophys. Union*, **31** (5), 651-689.
- [134] Timoschkova, E. I.: 1972, *Astron. Zh*, **49**, 879.
- [135] Tisserand, F.: 1889, *Traité de Mécanique Celeste*, Vol. 1: *Perturbation des Planetes*, *Paris: Gauthier-Villars et Fils*, republished, 1960.
- [136] Váradi, F.: 1989, Symbolic algebra software for planetary theories, *Celestial Mechanics*, **45**, 69-72.
- [137] Vicente, R. O. and Wilson, C.: 1997, *JGR* 102B, 20439-20450.
- [138] Vondrak, J.: 1983a, *Bull. Astr. Inst. Czechosl.*, **33**, 26.
- [139] Vondrak, J.: 1983b, *Bull. Astr. Inst. Czechosl.*, **34**, 184.
- [140] Vondrak, J.: 1983c, *Bull. Astr. Inst. Czechosl.*, **34**, 311.
- [141] Wahr, J. M.: 1988a, The Earth's rotation, *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, **16**, 231-249.
- [142] Wahr, J. M.: 1988b, The theory of the Earth's orientation, with some new results for nutation, *M. J. Reid and J. M. Moran (eds)*, *The Impact of VLBI on Astrophysics and Geophysics*, 381-390.
- [143] Wigner, E. P.: 1959, *Group theory*, *Academic Press, New York*, chap. 15.
- [144] Williams, J. G.: 1995, *The Astronomical Journal*, **110**, 1420-1426.
- [145] Wittaker, E. T. and Watson, G. N.: 1952, *A course of modern analysis*, *Cambridge University Press, Cambridge, UK*.
- [146] Woolard, E. W.: 1953, *Theory of the rotation of the Earth around its center of mass*, *Goddard Space Flight Center*.