



# Universitat d'Alacant Universidad de Alicante

**Esta tesis doctoral contiene un índice que enlaza a cada uno de los capítulos de la misma.**

**Existen asimismo botones de retorno al índice al principio y final de cada uno de los capítulos.**

**[Ir directamente al índice](#)**

**Para una correcta visualización del texto es necesaria la versión de [Adobe Acrobat Reader 7.0](#) o posteriores**

**Aquesta tesi doctoral conté un índex que enllaça a cadascun dels capítols. Existeixen així mateix botons de retorn a l'índex al principi i final de cadascun dels capítols .**

**[Anar directament a l'índex](#)**

**Per a una correcta visualització del text és necessària la versió d' [Adobe Acrobat Reader 7.0](#) o posteriors.**



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

TESIS DOCTORAL

**MODELADO TOPOLÓGICO  
DEL PROCESO DE  
FABRICACIÓN  
APLICACIÓN AL COMPENSADO  
DE HERRAMIENTA**



**UNIVERSIDAD DE ALICANTE**

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

TESIS DOCTORAL

**MODELADO TOPOLÓGICO DEL  
PROCESO DE FABRICACIÓN**

**APLICACIÓN AL COMPENSADO DE  
HERRAMIENTA**

Presentada por  
**ANTONIO MANUEL JIMENO MORENILLA**

Dirigida por  
**DR. JUAN MANUEL GARCÍA CHAMIZO**  
**DR. FRANCISCO MACIÁ PÉREZ**

**DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍA INFORMÁTICA Y  
COMPUTACIÓN**  
JUNIO 2003





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

*A Marisa con cariño*



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

*"No fracasamos por culpa de nuestros sueños  
sino por no soñarlos con suficiente intensidad"*

**Ernst Jünger**



## Agradecimientos

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

Quiero, llegado este momento, reflexionar sobre la cita de Ernst Jünger que encabeza este libro “no fracasamos por culpa de nuestros sueños sino por no soñarlos con suficiente intensidad”. La he escogido porque pienso, como Jünger, que todo objetivo que nos marquemos, por muy racional que éste sea, tiene su origen en una ilusión, en un sueño. Aún más, la consecución del mismo está estrechamente ligada a la fuerza con la que ese sueño se mantenga vivo. Es curioso observar cómo la investigación científica, que es en sí rigurosa, metódica y racional, es llevada a cabo por personas que se alimentan de ilusión, emociones y vivencias.

Cuando echo la mirada hacia atrás y contemplo todo el camino recorrido hasta llegar a la culminación de este trabajo, me abordan multitud de emociones que el proceso mecánico de la escritura me obliga a ordenar sobre un trozo de papel. Es por ello que pido al lector que no intente realizar una clasificación lógica que parta de este hecho, sino que sea visto como un conjunto de emociones que surgen espontánea y caóticamente.

He hablado de ilusión y de sueños, mi mujer, Marisa, es un sueño del que tengo el privilegio de disfrutar en la vigilia. Gracias por obviar mis defectos y ensalzar mis virtudes, gracias por mantener vivos mis sueños.

Mi familia ha contribuido, sin duda, a que este esfuerzo me haya parecido liviano, a levantarme el ánimo en horas bajas, a incluir píldoras de humor en las comidas. Gracias papá, mamá, José, Maite (cuyo talento es posible observar en la portada de este libro), Estrella y Miguel.

Si ha habido alguien que ha sabido combinar con sabiduría y destreza lo emotivo y lo racional éstos han sido mis directores de tesis. De ellos he aprendido muchísimo, tanto de lo material como de lo intangible, pero lo más importante ha sido descubrir que la amistad forma parte indivisa del método de investigación. Gracias Juanma, gracias Paco.

## 10 Agradecimientos

---

Todos mis compañeros y, sin embargo, amigos, han aportado grandes dosis de buenos consejos, de paciencia, de apoyo moral, científico y material. Gracias José Luis, Mora, Javi, Joan Carles, Andrés, Antonio, Paco, José, Higinio, Ana, María Teresa, Pilar, Jero, Juan Antonio, Zubi, Dani, Jorge, Goyo, Pablo, Sergio, Antonio Hernández. No me quiero olvidar tampoco de la ayuda recibida de Andrés y Anabel.

Esta investigación nunca se hubiera realizado de no ser por la gente de INESCOP. Quiero dar las gracias a todo el colectivo de personas con las que trabajé codo con codo compartiendo alegrías y sinsabores, especialmente a Faustino, Vicente, Juan Carlos, Juan, José Ramón, Rafa, Cristina, Godo y José. Vuestro apoyo e ideas han sido imprescindibles.

Tras tantas emociones me queda un sabor amargo, el sentimiento de culpa por los que no han sido expresamente citados a causa de mi torpe memoria. A todos vosotros mis más sentidas disculpas y mi sincero agradecimiento.

Orihuela, 25 de Mayo de 2003.

**Antonio Jimeno**



# Prólogo

## Universitat d'Alacant Universidad de Alicante

La confluencia de diversas experiencias profesionales me han llevado a desarrollar, cada vez más, una idea que nació como consecuencia de la observación de una situación curiosa que se ha dado en un sector tradicional de gran implantación en la Comunidad Valenciana: el sector calzado.

La horma constituye la base geométrica sobre la que se construye el calzado. Dentro de este sector, el proceso de diseño y fabricación de hormas ha permanecido inalterable desde hace muchos años. Mientras que las nuevas tecnologías irrumpían en otros procesos como el diseño y la fabricación por ordenador de moldes, patrones, plantillas, etc., los fabricantes de hormas han mantenido su forma de trabajar ajenos a esta “revolución”. Se hace entonces inevitable la pregunta: “¿por qué?”; y la respuesta es tan simple como paradójica: las nuevas tecnologías no aportaban, en su estado actual, ninguna ventaja al proceso tradicional.

Hay que distinguir dos fases fundamentales en la creación de una horma: la fase de diseño y la fase de fabricación. En ambas etapas es posible la introducción de nuevas tecnologías. A continuación se va a describir en qué consisten esas etapas y cuáles han sido los principales escollos que han impedido introducir avances informáticos en el sector.

### **Fase de diseño**

Cuando aparecieron los primeros sistemas de diseño asistido por computador – CAD – sobre los años setenta, causaron una verdadera revolución en todo el tejido industrial. La mayoría de sectores acogieron estos sistemas con los brazos abiertos porque facilitaban enormemente la labor de diseño y garantizaban una exactitud y unos resultados hasta entonces impensables. Los ingenieros industriales de la mayoría de sectores vieron como podían plasmar sus ideas con tan sólo pulsar unas cuantas teclas. Estos sistemas CAD podían diseñar objetos sólidos bien definidos (esferas, cilindros, poliedros, etc.), así como combinaciones entre ellos. También se desarrollaron modelos matemáticos que permitían representar superficies suaves sin

## 12 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

geometría claramente definida; se llamaron superficies libres (NURBS), y a ellas debemos los diseños aerodinámicos y vanguardistas de los coches y aviones de hoy en día.

Cuando estos sistemas llegaron al sector calzado, se produjeron las naturales reticencias de quienes no conocían sus verdaderas posibilidades. Sin embargo, se fue imponiendo en aquellos procesos de diseño cuyos objetos estaban bien definidos (tacones, patrones, etc.), causando una buena aceptación.

A los primeros sistemas CAD que llegaron al mundo de las hormas en los años ochenta se les pidió, lógicamente, que fabricaran hormas. La horma, como objeto geométrico tridimensional, es muy difícil de parametrizar; ni siquiera utilizando la tecnología de las superficies libres es posible el definir una serie de puntos clave que garanticen un perfecto ajuste al pie del consumidor medio. Se hicieron intentos por parte de ingenieros CAD y expertos en biomecánica por definir esa serie de medidas clave pero fueron en vano. En cualquier caso, y existiendo esa serie de parámetros, el coste de introducir todo este nuevo proceso sería demasiado alto: habría que cambiar de forma de trabajar (diseñar partiendo de cero) y de personal (los diseñadores de hormas serían ahora expertos en CAD). Y todo ¿a cambio de qué?, probablemente, a cambio de malos resultados. Tras unos primeros intentos, los fabricantes de hormas optaron por continuar con la forma de trabajar que siempre les había funcionado.

### **Fase de producción**

En esta fase, el fabricante de hormas se encarga de reproducir un prototipo que ha sido validado en la fase de diseño. Hoy en día las máquinas que realizan esta labor son mecánicamente iguales a las que se usaban hace varias décadas. El “responsable” de este hecho se llama Donzelli, un prestigioso ingeniero italiano que desarrolló este tipo de máquinas cuya precisión, rapidez y fiabilidad no ha tenido rival hasta hace poco tiempo. El principio mecánico de estas máquinas es muy simple: se trata de tornos copiadores dotados de un brazo lector y varios brazos con cuchillas. Sobre el brazo lector se sitúa el prototipo que va girando. Este brazo, que porta un disco en su extremo, va avanzando sobre el prototipo de forma que va describiendo una trayectoria helicoidal alrededor del modelo. Un juego de ruedas dentadas transmite ese mismo movimiento a los brazos dotados de cuchillas. Debido a la naturaleza giratoria de estos tornos, el

prototipo debe estar sujeto a la máquina por sus extremos (la punta y el talón), lo cual impide que las cuchillas cortadoras puedan fabricar estas dos partes en su totalidad. Será un operario el que finalice esta tarea de forma manual.

### **La caída de un monopolio**

Medio siglo después de que se pusiera en marcha el primer torno Donzelli, se empezaron a construir máquinas para fabricar hormas que incorporaban alguno de los avances tecnológicos que ya se habían implantado con éxito en otros sectores. Es el caso del proyecto *Compulast*, llevado a cabo por la empresa italiana *Grupo San Rocco* (presidida por Donzelli) a mediados de los años 80. Las nuevas máquinas mantenían la estructura de los tornos tradicionales aunque se eliminó el brazo lector. Los accionadores hidráulicos fueron sustituidos por motores eléctricos controlados por computador mientras que se conservó el pesado sistema de ruedas dentadas. Simultáneamente, se desarrolló un digitalizador mecánico para hormas que era réplica del brazo lector de los tornos tradicionales al que se le añadió un control electrónico y sensores de posición. El sistema completo, compuesto de torno más digitalizador, supuso un intento fallido de sustituir en aquel momento a los tornos convencionales: el pesado juego de engranajes impedía desarrollar trayectorias diferentes a las de los tornos hidráulicos debido a la gran inercia del sistema, por lo que no solo no se mejoró la calidad del producto final, sino que el efecto discretizador que introducía el digitalizador incidió negativamente en el acabado de las hormas.

El sistema *Compulast* se ofrecía sin ningún software de diseño y ese fue otro de los aspectos negativos del proyecto ya que su utilidad se limitaba a la reproducción de modelos originales. No se trataba de un error comercial; en ese momento, aunque existían programas genéricos de diseño por computador, el estado de la tecnología no permitía generar trayectorias útiles para los tornos electrónicos de hormas. Aún, hoy en día, existen serias dificultades para generar trayectorias en máquinas que no cumplen con los estándares de fabricación, dado que los cálculos son lentos y poco robustos.

La solución que adoptó el ya extinto *Grupo San Rocco* fue desarrollar máquinas para hormas que cumplieran con los estándares de fabricación con el fin de poder aprovechar el CAD/CAM existente. Dicha solución se denominó proyecto *Arco* y

## 14 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

consistía en el desarrollo de una máquina de ejes cartesianos similar a un centro de mecanizado. El sistema *Arco* no prosperó, la gran inversión obligó a encarecer una máquina que tan sólo podía fabricar una horma en el tiempo en el que los tornos convencionales fabricaban seis pares.

Pude vivir de cerca los últimos seis meses de esta gran empresa, la cual monopolizaba más del 60% del mercado de las máquinas de hormas en todo el mundo. Fui testigo del desarrollo del proyecto *Arco* y de otros que ni tan siquiera llegaron a tomar nombre comercial. Más de 100 trabajadores se vieron sin empleo y sueldo en menos de un mes. En 1997 me preguntaba el por qué del fracaso: ¿error comercial o error tecnológico? Sin duda la empresa disponía de las mejores máquinas del mercado, las más eficientes... pero no las más modernas ¿estuvo la tecnología a la altura del problema? Probablemente no. La caída de este "coloso" me incitó a estudiar el proceso del mecanizado en sí, tratando de separar aquello que es puramente proceso físico de corte, de lo que es dependiente de la máquina que lo efectúa.

### Primeros pasos

En 1995 me incorporé al Instituto Tecnológico Español del Calzado y Conexas (INESCOP) dentro del departamento de CAD/CAM, como analista-programador. Una de las primeras tareas que se me encomendaron fue el estudio de la problemática del diseño y fabricación de hormas de calzado. Tras unos meses de análisis, pude llegar a la conclusión de que el sector hormas no aceptaba la utilización de controles numéricos en su proceso de fabricación debido a que sus viejos tornos copiadores eran eficaces, robustos y precisos. En este punto fue madurando la idea de incorporar desde el CAM los puntos positivos que ofrecían estas máquinas en su forma de trabajar. La idea de que las máquinas herramienta definen objetos a partir de formas preestablecidas fue el germen de este trabajo; de hecho, observaba una cierta carencia de marco conceptual genérico acerca del fenómeno de la fabricación mediante máquinas herramienta (definición de una geometría mediante el uso de otras preestablecidas).

Gran parte de la experimentación realizada en este trabajo ha sido desarrollada dentro de INESCOP en el marco de un proyecto europeo RTT "Footwear" del que fui responsable principal del diseño y desarrollo del software, proyecto que concluyó en 2000 y

que ha dado como fruto un producto informático CAD/CAM que actualmente es líder mundial en el mercado de las hormas (ver figura 1.1).

En 1997 comencé mi programa de doctorado dentro del Departamento de Tecnología Informática y Computación de la Universidad de Alicante. Entre otras materias, llamó mi atención el estudio de la Morfología Matemática, una herramienta que mostraba una gran utilidad dentro del campo de la Visión Artificial. La morfología se fundamenta en la descripción de formas geométricas a partir de otras más simples, este hecho me hizo reflexionar acerca de su posible utilidad dentro de la fabricación asistida por computador. En primer lugar, pude comprobar que el CAM no era un campo en el que se hubieran aplicado estas técnicas con anterioridad, lo cual fue motivador, aunque la dificultad de investigar en un campo todavía sin explorar era evidente.

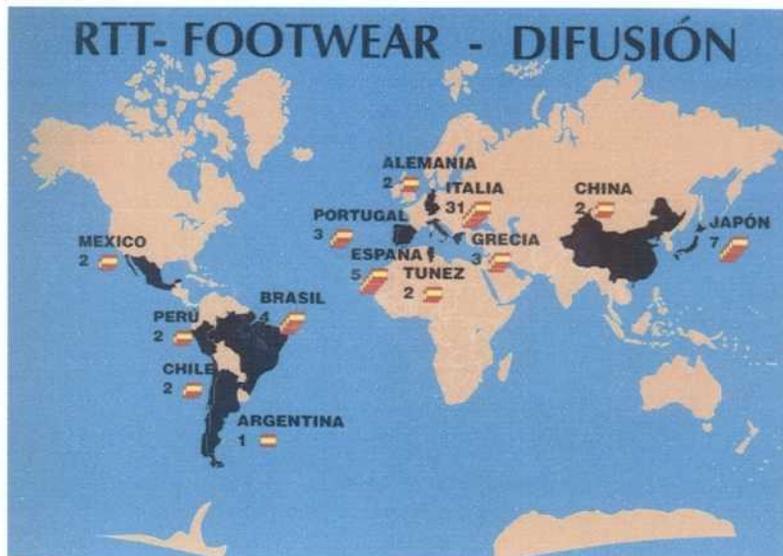


Figura P.1: Expansión del software Forma3D®.

En la actualidad, mi actividad profesional, docente e investigadora la desarrollo en el Departamento de Tecnología Informática y Computación, dentro del área de conocimiento de Arquitectura y Tecnología de Computadores. Desde este departamento he dirigido y dirijo convenios de investigación entre

## 16 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

la Universidad de Alicante e INESCOP, a través del cual mantengo mi relación investigadora dentro del sector calzado. El hecho de estar ejerciendo mi labor docente e investigadora dentro del Área de Arquitectura y Tecnología de Computadores siempre me ha llevado a buscar en la arquitectura soluciones eficientes a problemas complejos de elevado coste computacional. Es por ello que en este trabajo se pretende, además de aportar soluciones, proponer arquitecturas de computadores que las lleven a cabo con eficacia.

Antonio Jimeno



# Resumen

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

En esta memoria se realiza un estudio detallado de los problemas inherentes a la generación de trayectorias mediante el uso de máquinas herramienta, haciendo especial hincapié en el problema del compensado de herramienta. Se trata de proponer un modelo que independice los aspectos geométricos del proceso de fabricación de los puramente físicos derivados de la utilización de una determinada tecnología; todo ello mediante el desarrollo de un sistema topológico — que se ha convenido en llamar MTF— que se nutre de los conceptos y metodología que aporta el paradigma de la morfología matemática. De esta manera, se pretende conseguir que la abstracción de lo geométrico facilite la obtención de soluciones a problemas tradicionalmente complejos y, además, que dicha solución sea fácilmente extrapolable a cualquier entorno de mecanización con independencia de su tecnología.

Se ha dividido el trabajo en seis capítulos:

- En el **capítulo primero** se realiza una revisión del *estado del arte* sobre aspectos referentes a la fabricación de piezas mediante procesos de mecanizado.
- A lo largo del **capítulo segundo** se desarrolla un sistema topológico que surge como especialización del modelo morfológico convencional, con la característica añadida de poseer mecanismos para establecer un orden o recorrido sobre las primitivas morfológicas.
- Durante el **capítulo tercero** se extiende el modelo presentado en el capítulo anterior para adecuarlo a la problemática que presentan los entornos de fabricación mediante máquinas herramienta.
- Las primitivas morfológicas se traducen en operaciones de mecanización y, en el **capítulo cuarto**, se materializan en experimentos llevados a cabo sobre entornos de fabricación reales que prueban la bondad del modelo.

## 18 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

- En el **capítulo quinto** se pretende, por una parte, demostrar la adecuación del modelo a distintas plataformas, ya existentes, de alto rendimiento y, por otra, plantear nuevas organizaciones que aumenten la eficiencia del mismo.
- Un resumen de las principales conclusiones de este trabajo así como de las aportaciones y líneas de investigación futura, se presenta en el **capítulo sexto**.

La sección de apéndices se organiza en cinco bloques que tratan aspectos que, por su relevancia o extensión, se ha preferido dejar al margen del documento principal:

- En los **apéndices A** y **B** se detalla la estructura y funcionalidad de algunas de las arquitecturas vistas en el capítulo quinto para aumentar la eficiencia del modelo.
- Como complemento al capítulo segundo, el **apéndice C** incluye formulación básica para calcular distancias entre objetos geométricos en la dirección marcada por un vector.
- Con el objetivo de facilitar la tarea de implementación del modelo, a lo largo del **apéndice D** se presenta una plataforma que posibilita la introducción de un lenguaje declarativo, dejando de lado aspectos imperativos de la implementación.
- El **apéndice E** recoge las referencias bibliográficas citadas en el documento.



# Universitat d'Alacant

## Resum

### Universidad de Alicante

Aquesta memòria presenta un estudi detallat dels problemes inherents a la generació de trajectòries mitjançant la utilització de màquines eina i destaca el problema de la compensació de l'eina. Tracta de proposar un model que independitze, dins del procés de fabricació, els aspectes geomètrics i els aspectes que són exclusivament físics derivats de la utilització d'una tecnologia determinada. Tot això mitjançant el desenvolupament d'un sistema topològic - anomenat MTF - , que els nodreix dels conceptes i metodologia que aporta el paradigma de la morfologia matemàtica. D'aquesta manera es pretén aconseguir que l'abstracció de l'element geomètric facilite l'obtenció de solucions als problemes tradicionalment complexos i, a més, que aquestes solucions siguin fàcilment extrapolables a qualsevol entorn de mecanització independentment de la seua tecnologia.

El treball ha quedat dividit en sis capítols:

- En el **capítol primer** es realitza una revisió de l'estat de l'art sobre aspectes referits a la fabricació de peces mitjançant processos de mecanitzat.
- El **capítol segon** desenvolupa un sistema topològic que sorgeix com especialització del model morfològic convencional, amb la característica afegida de posseir mecanismes per a establir un ordre o recorregut sobre les primitives morfològiques.
- Al llarg del **capítol tercer** es desenvolupa el model presentat en el capítol anterior per adequar-lo a la problemàtica que presenten els entorns de fabricació mitjançant màquines eina.
- Les primitives morfològiques es tradueixen en operacions de mecanització i, en el **capítol quatre**, es materialitzen experiments portats a terme sobre entorns de fabricació real que proven la validesa del model.
- El **capítol cinc** pretén, per una banda, demostrar l'adequació del model a distintes plataformes d'alt rendiment ja existents i, per altra banda, plantejar noves organitzacions que augmenten l'eficiència del model.

## 20 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

■ El **capítol sis** presenta un resum de les principals conclusions d'aquest treball, així com de les aportacions i línies d'investigació futura.

La secció d'apèndixs està organitzada en cinc blocs que tracten aspectes que, per la seua rellevància o extensió, ha sigut preferible deixar al marge del document principal:

■ En els **apèndixs A i B** es detalla l'estructura i funcionalitat d'algunes de les architectures vistes en el capítol cinquè per augmentar l'eficiència del model.

■ Com a complement del capítol segon, l'**apèndix C** inclou formulació bàsica per a calcular distàncies entre objectes geomètrics en la direcció marcada per un vector.

■ Amb l'objectiu de facilitar la tasca d'implementació del model, l'**apèndix D** presenta una plataforma que possibilita la introducció d'un llenguatge declaratiu, deixant de banda aspectes imperatius de la implementació.

■ L'**apèndix E** recull les referències bibliogràfiques esmentades en el document.



# Abstract

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

In this piece of work, we carry out a detailed analysis of the inherent problems posed by tool path generation, making special considerations for tool compensation of numeric control machines.

Our aim is to propose a model that will set apart the geometric issues involved in the manufacturing process from the purely technology-dependent physical issues by means of a topological system. This system, also called MTF, applies methods and concepts used in mathematical morphology paradigm. Thus, we will obtain a geometry abstraction which will provide not only solutions of typically complex problems but also the possibility of applying those solutions to any machining environment whichever its technology may be.

This piece of work has been divided into six chapters. They are as follows:

- **Chapter one** previews the present state of existing machining processes and related problems.
- **Chapter two** develops the topological system resulting from applying the conventional morphological model to which the feature of primitives ordering has been added.
- **Chapter three:** The proposed model is expanded to account for the problems present in the manufacturing processes derived from the tool machining.
- **Chapter four** deals with experimentation. The implementation of the morphological primitives, now machining operations, performed in the actual manufacturing process for validation.
- **Chapter five** is concerned with testing the model in the existing high-performance architectures and projecting new configurations (layouts) to enhance their performance.
- **Chapter six** presents the conclusions reached in the study and specifies the further lines of research needed in the area.

## 22 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

The work also includes an appendix divided into five sections. The information contained in the sections was considered lengthy to be included in the main work.

■ **Appendixes A and B** detail the structure and functionality of some architectures discussed in chapter five. They are intended to enhance the model's performance.

■ **Appendix C** comes as a complement to chapter two. It includes basic formulae to calculate distance between basic geometric objects taking into account vector direction.

■ **Appendix D** shows a platform that reacts to declarative language and ignores the imperative language involved in implementation. This will simplify the task of implementing the model.

■ **Appendix E** refers to bibliography.



Universitat d'Alacant  
**Contenidos**  
 Universidad de Alicante

<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>9</b>
<b>PRÓLOGO</b>	<b>11</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>17</b>
<b>RESUM</b>	<b>19</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>21</b>
<b>CONTENIDOS</b>	<b>23</b>
<b>LISTADO DE FIGURAS</b>	<b>27</b>
<b>LISTADO DE TABLAS</b>	<b>33</b>
<b><u>CAPÍTULO PRIMERO</u></b>	<b><u>35</u></b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>35</b>
MOTIVACIÓN	35
OBJETIVOS	40
ESTADO DEL ARTE	43
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	77
<b><u>CAPÍTULO SEGUNDO</u></b>	<b><u>87</u></b>
<b>MODELO TOPOLÓGICO DETERMINISTA</b>	<b>87</b>
ESTRUCTURA GENERAL	88
MARCO MORFOLÓGICO	89
OPERACIONES CON TRAYECTORIA	92
MODELO COMPUTACIONAL PARA EL MTD	108
CONCLUSIONES	132

## 24 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

**CAPÍTULO TERCERO** **135**

<b>MODELO TOPOLÓGICO DE FABRICACIÓN</b>	<b>135</b>
ESTRUCTURA GENERAL	136
EL DOMINIO DE FABRICACIÓN	137
CONCLUSIONES	164

**CAPÍTULO CUARTO** **165**

<b>APLICACIONES DEL MTF</b>	<b>165</b>
COMPENSADO DE TRAYECTORIAS DE MECANIZADO	166
DIGITALIZACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES	178
EJEMPLO: FABRICACIÓN DE FORMAS DE CALZADO	181
CONCLUSIONES	197

**CAPÍTULO QUINTO** **199**

<b>ARQUITECTURAS PARA EL MTF</b>	<b>199</b>
ARQUITECTURAS ESPECÍFICAS PARA MECANIZADO	200
ARQUITECTURAS MULTIPROCESADOR PARA EL MTF	224
CONCLUSIONES	235

**CAPÍTULO SEXTO** **237**

<b>CONCLUSIONES</b>	<b>237</b>
APORTACIONES	238
LÍNEAS ABIERTAS DE INVESTIGACIÓN	241

**APÉNDICE A** **243**

<b>EL MULTIRROTADOR</b>	<b>243</b>
-------------------------	------------

**APÉNDICE B** **249**

<b>PARALELIZACIÓN DEL MTF SOBRE RED DE PCS</b>	<b>249</b>
ESQUEMA BÁSICO DE FUNCIONAMIENTO	250
PROTOCOLO CLIENTE-SERVIDOR	251

	Contenidos	25
<hr/>		
<b>APÉNDICE C</b>		<b>259</b>
<hr/>		
<b>CÁLCULOS BÁSICOS DE DISTANCIAS MÍNIMAS</b>		<b>259</b>
DISTANCIA SEGMENTO – SEGMENTO		259
DISTANCIA SEGMENTO – CÍRCULO		261
<b>APÉNDICE D</b>		<b>265</b>
<hr/>		
<b>EL MARCO MTF</b>		<b>265</b>
VISIÓN GENERAL		266
EL ENTORNO MORFOLÓGICO		268
EL ENTORNO TOPOLÓGICO DETERMINISTA		270
EL ENTORNO TOPOLÓGICO DE FABRICACIÓN		273
<b>APÉNDICE E</b>		<b>279</b>
<hr/>		
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>		<b>279</b>



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Listado de Figuras

<b>Figura P.1:</b>	Expansión del software Forma3D® .....	15
<b>Figura 1.1:</b>	Relación entre información geométrica y tecnológica en el proceso de mecanizado .....	36
<b>Figura 1.2:</b>	Distintos tipos de posicionamiento para controles numéricos.....	45
<b>Figura 1.3:</b>	Distintos tipos de fresa .....	46
<b>Figura 1.4:</b>	Factores que intervienen en el mecanizado .....	50
<b>Figura 1.5:</b>	Distintos tipos de mecanizado a altura constante .....	55
<b>Figura 1.6:</b>	Distintos tipos de mecanizado a altura variable.....	56
<b>Figura 1.7:</b>	Distintas estrategias de refinado de objetos.....	57
<b>Figura 1.8:</b>	Error producido por la interpolación lineal y una distancia excesiva entre puntos consecutivos. ....	59
<b>Figura 1.9:</b>	Montes y valles producidos por una distancia excesiva .....	59
<b>Figura 1.10:</b>	Interferencias producidas por una herramienta inconsistente.....	60
<b>Figura 1.11:</b>	Problema del compensado .....	60
<b>Figura 1.12:</b>	Problemas de un mecanizado isoparamétrico .....	64
<b>Figura 1.13:</b>	Proceso de fabricación de un objeto rectangular .....	77
<b>Figura 1.14:</b>	Elementos que componen el Modelo Topológico de Fabricación .....	79
<b>Figura 1.15:</b>	El Modelo Topológico Determinista. ....	81
<b>Figura 1.16:</b>	Elementos que integran el Dominio de Fabricación.....	83
<b>Figura 1.17:</b>	Instanciación del MTF para la generación de trayectorias. ....	85
<b>Figura 2.1:</b>	Componentes principales del Modelo Topológico Determinista.	89
<b>Figura 2.2:</b>	Trasformación de un objeto frontera al aplicarse ordenadamente una secuencia de operaciones elementales .....	95
<b>Figura 2.3:</b>	Descripción geométrica de la operación básica instantánea .....	97
<b>Figura 2.4:</b>	Calculo de la función $dist_i$ .....	99
<b>Figura 2.5:</b>	La operación básica instantánea en el MTD.....	99
<b>Figura 2.6:</b>	Comparativa de dilatación morfológica y con trayectoria.....	102
<b>Figura 2.7:</b>	Comparativa de erosión morfológica con trayectoria.....	104
<b>Figura 2.8:</b>	Distintas operaciones morfológicas en el MTD con orientación variable del elemento estructurante .....	106
<b>Figura 2.9:</b>	Modelo computacional genérico basado en el MTD .....	109
<b>Figura 2.10:</b>	Función distancia mínima entre un polígono y un círculo.....	112
<b>Figura 2.11:</b>	Modelo computacional del MTD para conjuntos de puntos.....	113
<b>Figura 2.12:</b>	Cálculo de la función distancia mínima entre dos polígonos discretizados.....	114
<b>Figura 2.13:</b>	Calculo de la función $dist_i$ en el modelo mixto del MTD .....	116
<b>Figura 2.14:</b>	Modelo computacional del MTD de cálculo mixto .....	116

## 28 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

<b>Figura 2.15:</b> Cálculo del error producido por la discretización de un polígono bajo un elemento estructurante circular.....	118
<b>Figura 2.16:</b> Algoritmo secuencial de cálculo de la dilatación/erosión de una imagen.....	119
<b>Figura 2.17:</b> Diferencias en la interpretación del elemento estructurante entre el MTD y los algoritmos MM1 y MM2.....	122
<b>Figura 2.18:</b> Pruebas de dilatación morfológica.....	124
<b>Figura 2.19:</b> Comparativa cruzada entre tamaño del EE y del Objeto. ....	125
<b>Figura 2.20:</b> Análisis del punto de cruce entre el MM2 y el MTD. ....	127
<b>Figura 2.21:</b> Resultados de distintas operaciones morfológicas que han servido como base de los experimentos.....	127
<b>Figura 2.22:</b> Optimización del MTD.....	130
<b>Figura 2.23:</b> Refinamiento del MTD bajo el criterio de vecindad. ....	131
<b>Figura 2.24:</b> Modelo computacional paralelo del MTD.....	132
<b>Figura 3.1:</b> Componentes del MTF. ....	136
<b>Figura 3.2:</b> Detalle del bloque correspondiente al dominio de fabricación..	138
<b>Figura 3.3:</b> Objeto cerrado formado por varias superficies libres junto con sus espacios paramétricos .....	142
<b>Figura 3.4:</b> El sistema de conversión superficie-contorno y su utilización como elemento integrador de la geometría de la pieza en el MTF.....	143
<b>Figura 3.5:</b> Utilización del conjunto de herramientas HZ en el MTF .....	146
<b>Figura 3.6:</b> Modelos geométricos de herramientas de mecanizado.....	147
<b>Figura 3.7:</b> Proceso de perfilado en 5 ejes mediante herramienta cónica. ...	149
<b>Figura 3.8:</b> Modelado de una herramienta tórica en el MTD .....	150
<b>Figura 3.9:</b> Relación del conjunto de estrategias EST del MTF .....	153
<b>Figura 3.10:</b> Mecanización de un objeto cuadrado mediante estrategia circular y herramienta esférica.....	154
<b>Figura 3.11:</b> Distintos tipos de mecanizado en tres ejes.....	155
<b>Figura 3.12:</b> Esquemas de mecanizado en 3 ejes .....	156
<b>Figura 3.13:</b> Mecanizado con 5 ejes y estrategia de altura variable con dirección normal a la superficie.....	156
<b>Figura 3.14:</b> Relación del conjunto de operaciones de fabricación OPF con el MTD del Modelo Topológico de Fabricación .....	159
<b>Figura 3.15:</b> Operaciones compuestas en el MTF.....	162
<b>Figura 3.16:</b> El conjunto de trayectorias de mecanizado TF.....	163
<b>Figura 4.1:</b> Offset sobre la sección de una superficie .....	166
<b>Figura 4.2:</b> Modelo computacional de la operación de digitalización virtual.....	169
<b>Figura 4.3:</b> Principio de alcanzabilidad.....	173
<b>Figura 4.4:</b> Modelo computacional de la digitalización virtual en el MTF optimizado bajo el criterio de rango de vecindad.....	175
<b>Figura 4.5:</b> Modelo paralelo de digitalización virtual del MTF .....	176

<b>Figura 4.6:</b>	Distribución del tiempo de ejecución del bucle más interno del algoritmo de digitalización virtual.....	178
<b>Figura 4.7:</b>	Componentes del Modelo Topológico de Fabricación instanciado para el proceso de fabricación de hormas mediante torno.....	182
<b>Figura 4.8:</b>	Ejes de fabricación en un torno copiador de hormas.....	185
<b>Figura 4.9:</b>	Vista superior de la geometría de una cuchilla para hormas.....	186
<b>Figura 4.10:</b>	Adición de agarres delantero y trasero al modelo geométrico de una horma de calzado previo al cálculo de trayectoria.....	188
<b>Figura 4.11:</b>	Medidas fundamentales utilizadas en los experimentos de fabricación.....	189
<b>Figura 4.12:</b>	Modelos utilizados en las pruebas.....	190
<b>Figura 4.13:</b>	Gráfica de tiempos de cálculo de trayectoria compensada para una trayectoria helicoidal.....	191
<b>Figura 4.14:</b>	Trayectoria helicoidal compensada para la fabricación de una horma de calzado.....	192
<b>Figura 4.15:</b>	Simulación del proceso de fabricación de una horma de calzado mediante el uso del MTF.....	193
<b>Figura 4.16:</b>	Trayectorias compensadas generadas por el MTF para moldes de tacones.....	194
<b>Figura 4.17:</b>	Superficie externa generada por un palpador mecánico de hormas.....	196
<b>Figura 4.18:</b>	Horma resultante tras la aplicación de la operación de mecanizado virtual sobre la superficie de la figura 4.17.....	197
<b>Figura 5.1:</b>	Arquitectura específica para el cálculo de trayectorias.....	201
<b>Figura 5.2:</b>	Modelo computacional del MTF (versión secuencial).....	201
<b>Figura 5.3:</b>	Distribución del tiempo de computación entre las funciones más internas del modelo computacional del MTF.....	203
<b>Figura 5.4:</b>	Arquitectura específica para un sistema de digitalización virtual compuesta por 3 FPGAs.....	204
<b>Figura 5.5:</b>	Digitalización virtual utilizando un esquema estático FPGA para la transformación del punto.....	206
<b>Figura 5.6:</b>	Digitalización virtual utilizando un esquema dinámico FPGA para la transformación del punto.....	206
<b>Figura 5.7:</b>	Algoritmo de digitalización virtual utilizando 2 FPGAs.....	208
<b>Figura 5.8:</b>	Algoritmo de digitalización virtual utilizando 3 FPGAs.....	209
<b>Figura 5.9:</b>	Algoritmo secuencial para el modelo de simulación propuesto.....	210
<b>Figura 5.10:</b>	Simulación software del MTF usando FPGAs para la transformación de puntos de la superficie.....	211
<b>Figura 5.11:</b>	Algoritmo de digitalización virtual de cálculo de trayectoria helicoidal con herramienta tórica basado en FPGAs.....	212

## 30 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

<b>Figura 5.12:</b>	Simulación software de la arquitectura basada en FPGAs .....	213
<b>Figura 5.13:</b>	Error relativo del MR de 32 bits frente a una cantidad total de grados realizada bajo distintos incrementos angulares. ....	216
<b>Figura 5.14:</b>	Error relativo de un MR de 32 bits en función del número de rotaciones elementales de distinto incremento angular. ....	217
<b>Figura 5.15:</b>	Comparativa de tiempos de digitalización virtual para una trayectoria helicoidal de precisión variable y herramienta tórica. ....	218
<b>Figura 5.16:</b>	Tiempo de cálculo de trayectoria en función de la frecuencia de funcionamiento de la FPGA que implementa un MR de 32 bits. ....	219
<b>Figura 5.17:</b>	Comparativa de la precisión. CORDIC vs. MultiRotador .....	221
<b>Figura 5.18:</b>	CORDIC vs. MultiRotador:Error máximo obtenido para una rotación. ....	221
<b>Figura 5.19:</b>	CORDIC vs MR:dispersión del error. ....	222
<b>Figura 5.20:</b>	Partición de la superficie de una horma para cuatro procesadores. ....	226
<b>Figura 5.21:</b>	Arquitectura multiprocesador con solapamiento. ....	227
<b>Figura 5.22:</b>	Arquitectura multiprocesador sin solapamiento .....	228
<b>Figura 5.23:</b>	Paralelización del MTF sobre red de PCs. Resultados en función de la precisión del mecanizado en puntos por milímetro de trayectoria. ....	229
<b>Figura 5.24:</b>	Paralelización del MTF sobre red de PC's. Resultados en función de la densidad del paso del helicoide .....	231
<b>Figura 5.25:</b>	Paralelización del MTF sobre red de PC's. Resultados en función de la densidad de puntos del helicoide .....	232
<b>Figura 5.26:</b>	Paralelización del MTF sobre el sistema escalable SP2. Versión PVM. ....	233
<b>Figura 5.27:</b>	Paralelización del MTF sobre el sistema escalable SP2. Versión MPI. ....	233
<b>Figura 5.28:</b>	Comparativa entre arquitectura con solapamiento y sin solapamiento .....	234
<b>Figura A.1:</b>	Arquitectura del MR basada en SDA .....	247
<b>Figura A.2:</b>	Estructura de los 1-C MAC basados en SDA .....	247
<b>Figura B.1:</b>	Grafo de funcionamiento del Cliente para la acción mecanizar. ....	254
<b>Figura B.2:</b>	Grafo de funcionamiento del servidor de trayectoria .....	256
<b>Figura B.3:</b>	Interfaz del prototipo del cliente de mecanizado del MTF .....	257
<b>Figura C.1:</b>	Diversas situaciones en el cálculo de la función distancia mínima entre segmentos de recta .....	261
<b>Figura C.2:</b>	Dos situaciones en el cálculo de la función de distancia mínima entre un segmento y un círculo .....	262
<b>Figura D.1:</b>	Visión global del marco MTF en formato UML. ....	266
<b>Figura D.2:</b>	Estructura global de un entorno de fabricación según el Modelo Topológico de Fabricación y utilizando UML. ....	267

<b>Figura D.3:</b> Estructura del Entorno Morfológico en formato UML.....	269
<b>Figura D.4:</b> Estructura general de un entorno topológico determinista en formato UML.....	272
<b>Figura D.5:</b> Estructura general de un entorno topológico de fabricación en formato UML.....	276

### Relación de Fotografías

<b>Fotografía 1.1:</b> Mecanizado con herramienta esférica sobre aluminio. ....	47
<b>Fotografía 4.1:</b> Hormas de calzado. A la izquierda, modelo artesanal en madera. A la derecha, modelo copiado por torno sobre polietileno de alta densidad. ....	181
<b>Fotografía 4.2:</b> Torno tradicional para el mecanizado de hormas de calzado.....	184
<b>Fotografía 4.3:</b> Torno de mecanización de hormas de dos pares controlado por computador. Puede apreciarse, como principal diferencia con el torno tradicional, la ausencia en su parte inferior del elemento copiator. ....	187
<b>Fotografía 4.4:</b> Digitalizador mecánico de hormas de calzado.....	195



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



# Universitat d'Alacant

## Listado de Tablas

### Universidad de Alicante

<b>Tabla 2.1:</b>	Descripción de los componentes del Modelo Topológico Determinista.....	88
<b>Tabla 2.2:</b>	Descripción de los componentes del Marco Morfológico .....	90
<b>Tabla 2.3:</b>	Descripción de los componentes del onjunto de operaciones con trayectoria. ....	93
<b>Tabla 2.4:</b>	Características de los métodos de cálculo de distancia mínima. ....	118
<b>Tabla 2.5:</b>	Características de los algoritmos basados en morfología matemática clásica y el MTD de cómputo morfológico. ....	120
<b>Tabla 2.6:</b>	Distintos algoritmos morfológicos que realizan una operación de dilatación. ....	123
<b>Tabla 3.1:</b>	Descripción de los componentes del Modelo Topológico de Fabricación. ....	136
<b>Tabla 3.2:</b>	Descripción de los componentes del Dominio de Fabricación. ....	137
<b>Tabla 4.1:</b>	Calidad de reproducción en hormas mediante el MTF, diferencias máximas respecto al modelo original. ....	190
<b>Tabla 4.2:</b>	Calidad de reconstrucción de hormas mediante el MTF, diferencias máximas respecto al modelo original. ....	196
<b>Tabla 5.1:</b>	Comparativa de algoritmos de rotación. ....	224
<b>Tabla B.1:</b>	Funciones del Cliente de mecanizado. ....	255
<b>Tabla B.2:</b>	Funciones del Servidor de mecanizado. ....	256



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo Primero

### Introducción

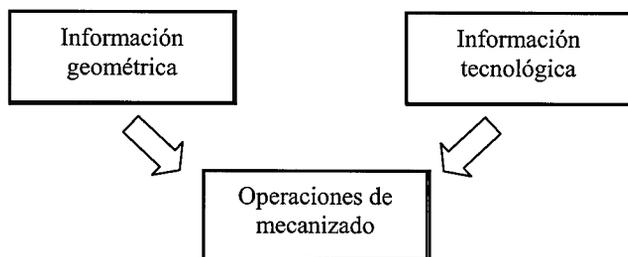
#### Motivación

El esfuerzo investigador que se recoge en este documento ha estado motivado por la observación de hechos tanto en el campo de la ciencia como en el de la tecnología; todos ellos relacionados con la fabricación de objetos mediante máquinas que utilizan herramientas.

En la actualidad, se observa una carencia de un marco conceptual genérico acerca del proceso de la fabricación mediante máquinas herramienta. Este proceso, también denominado mecanización, consiste, básicamente, en la definición de geometrías mediante el uso de otras preestablecidas. Sin embargo, la mayor parte de la investigación actual se centra en sus aspectos tecnológicos, aportando soluciones a problemas concretos del proceso de la generación de trayectorias. La motivación de este trabajo viene originada por la búsqueda de un formalismo que explique el proceso de este tipo de fabricación desde un punto de vista general. En este sentido, la morfología matemática constituye un marco formal que permite la descripción de formas geométricas a partir de otras aunque, hasta la actualidad, dicho marco no ha sido llevado al campo de la fabricación. Esta investigación se dirige hacia el estudio de este formalismo y a su aplicación como marco conceptual que dé soporte a los procesos de mecanización.

## 36 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

En el problema de la fabricación intervienen principalmente factores de dos tipos: geométricos y tecnológicos. Los factores geométricos vienen establecidos por las piezas que se quieren fabricar, la forma de la herramienta que efectúa el corte y los ejes mecánicos que la soportan y la dotan de cierto grado de libertad. Los factores geométricos determinan en gran medida el proceso completo de generación de trayectorias de mecanizado. No obstante, no hay que olvidar que las trayectorias deben ser llevadas a cabo por máquinas de una determinada tecnología (sujeta a restricciones dinámicas); de hecho, para fabricar un determinado objeto, las trayectorias geoméricamente posibles que lo pueden mecanizar son prácticamente infinitas, aunque solamente unas pocas darán como resultado un objeto de calidad cuando se utiliza una máquina concreta. En los sistemas actuales de fabricación asistida por computador, las soluciones se orientan principalmente a la geometría, por lo que existen dificultades a la hora de generar trayectorias para máquinas que operan bajo fuertes restricciones dinámicas. Estas dificultades se hacen patentes sobre todo en máquinas que no fueron concebidas para su uso mediante control numérico.



**Figura 1.1:** Relación entre información geométrica y tecnológica en el proceso de mecanizado.

Uno de los aspectos que ha motivado esta investigación parte de la búsqueda de un modelo flexible que permita especificar estrategias de fabricación para que éstas puedan estar orientadas tanto a la geometría como a la tecnología del sistema de fabricación.

En el tejido industrial, los sectores tradicionales están compuestos por aquéllos que, originariamente, estaban formados por pequeños grupos de artesanos y que, con la llegada de los avances en los procesos de fabricación, adaptaron su forma de trabajar incorporando nueva maquinaria, pero no su estructura organizativa. En la actualidad, este tipo de industria está formada por pequeñas y medianas empresas de origen familiar. Sectores que atienden a este tipo de industrias son, por ejemplo, el calzado y el juguete; dos sectores de importante presencia en la Comunidad Valenciana.

La automatización de procesos en este tipo de sector tiene unas connotaciones ligeramente diferentes a otros sectores más desarrollados tecnológicamente. Algunas de ellas son:

■ *La modernización de equipos y maquinaria se hace de forma paulatina.* Se prefiere la reconversión de maquinaria antes que la compra de nueva maquinaria. Es un aspecto lógico, ya que el margen de beneficios que tienen estas empresas no permite grandes inversiones.

■ *La idea de que la tecnología acaba con el arte. Existe reticencia ante las nuevas tecnologías.* Esto se debe principalmente al desconocimiento de las ventajas que aportan y a que, en muchos casos, la elaboración artesanal de algunos procesos está todavía presente. También ha fomentado esta idea los numerosos intentos, realizados desde las nuevas tecnologías, encaminados a sustituir toda labor artesanal que, en muchos casos, han resultado poco afortunados.

■ *La inclusión de computadores de bajo coste.* Muchos sistemas comerciales CAD/CAM están desarrollados para operar sobre plataformas de alto rendimiento. Estos sistemas utilizan costosas *workstations* que los empresarios no pueden comprar o mantener. Por esta razón, este sector impone como restricción el uso de sistemas informáticos de bajo coste, fundamentalmente interconectados por pequeñas redes locales de ordenadores personales.

Las características antes señaladas están presentes, por ejemplo, en el sector de las hormas de calzado. No se acepta la utilización de controles numéricos en el proceso de fabricación debido a que las máquinas tradicionales (tornos copiadores) son eficaces, robustas y precisas. No es del agrado de los empresarios sustituir su maquinaria por nuevas máquinas y computadores ya que,

aparte de la gran inversión que sería necesaria en maquinaria y formación del personal, no se asegura un aumento de la producción. Este hecho impide que se puedan incorporar los avances que la tecnología CAD/CAM ofrece para el diseño y fabricación de productos; sobre todo los relacionados con la precisión en el diseño y la estandarización de procedimientos.

Una posible solución a este problema sería el de la reconversión de maquinaria, a un coste muy inferior, sustituyendo algunas partes mecánicas por otras que pueden ser controladas de forma automática. Sin embargo, el CAM no ofrece soluciones genéricas a la generación de trayectorias para máquinas reconvertidas. Por lo tanto, otro de los aspectos que ha motivado esta investigación es la búsqueda de soluciones para la generación de trayectorias que puedan ser independientes de la tecnología de fabricación y que logren ser aplicadas tanto a los sistemas actuales de fabricación como a máquinas reconvertidas. Todo ello sin descuidar la eficiencia de los métodos empleados que, finalmente, deberán ser llevados a cabo por computadores convencionales de propósito general.

### Contexto de la investigación

Gran parte de la experimentación realizada en este trabajo ha sido desarrollada en el Instituto Tecnológico del Calzado y Conexas (INESCOP), dentro del marco de un proyecto europeo de transferencia tecnológica: RTT "Footwear-Forma3D system". En este proyecto han colaborado, además de la Universidad de Alicante, los Institutos Tecnológicos del Calzado de Portugal y Grecia, junto con empresas del sector. Los trabajos de investigación han dado como fruto un producto informático CAD/CAM que incorpora la tecnología de mecanización que se presenta en este documento. Este producto está orientado al diseño y fabricación de hormas por computador y está presente en países como China, Japón, Argentina, Italia, Grecia, Portugal y España. Con más de 100 instalaciones es, en la actualidad, el software CAD/CAM líder mundial en el sector de las hormas. Bajo estas líneas se muestran los datos técnicos del proyecto:

**Título:** "Diseño y fabricación de hormas de calzado por ordenador FORMA3D".

**Subvencionado por:**

- Ministerio de Industria y Energía (MINER), 1996
- Instituto de la Pequeña y Mediana Industria Valenciana (IMPIVA), plan tecnológico de la comunidad valenciana 1996.
- Programa Europeo PETRI, 1997
- Programa Europeo CRAFT, 1997
- Acciones pluri - regionales de transferencia tecnológica (RTT), Comisión Europea, "Footwear - FORMA3D system" n° 33, 1996, 1997, 1998, 1999. Países Colaboradores: España, Grecia y Portugal.

Dentro de este contexto, el trabajo desarrollado ha consistido en el estudio de las técnicas existentes para la generación de trayectorias sobre entornos no estándar de fabricación; el desarrollo de modelos que integran la diversidad de los procesos de mecanizado que utilizan en máquinas herramienta; la investigación en nuevas técnicas y algoritmos de generación de trayectorias que fueran robustos y eficientes; y el diseño e implementación de arquitecturas específicas para el mecanizado. El proyecto ha constituido una excelente plataforma para la validación de los resultados de la experimentación, ya que se realizaron numerosos prototipos que pudieron ser validados o refutados por investigadores y expertos horneros de la Unión Europea.

## Objetivos

El objetivo central del presente trabajo de investigación es el de definir un marco conceptual y computacional que aporte un nuevo enfoque al problema de la generación de trayectorias en la fabricación de objetos mediante el uso de máquinas herramienta.

Es necesario un planteamiento global y flexible del problema de la generación de trayectorias. La búsqueda de un marco formal lleva consigo el planteamiento de objetivos teóricos. La necesidad de implantar los formalismos sobre elementos computacionales hace necesario el uso de modelos. Finalmente, un sistema informático es el encargado de generar las trayectorias y un sistema industrial fabricará la pieza. Desde el formalismo matemático hasta la concepción de ingeniería del diseño se plantean diversos objetivos.

### *Objetivos conceptuales*

El enfoque que propone esta investigación toma como base formal la Morfología Matemática (MM), de forma que los problemas derivados de la fabricación se asocian a operaciones morfológicas a las que se les añaden nuevas propiedades. Para adaptar conceptos morfológicos a procesos de fabricación, se deberán alcanzar los siguientes objetivos:

- Establecer un paralelismo entre operaciones básicas de la MM y operaciones geométricas de cálculo de trayectorias, evidenciando una relación entre ellas. La MM permite la descripción de formas a partir de una serie de elementos básicos o elementos estructurantes. Será condición necesaria relacionar este hecho con la descripción física que efectúa una máquina cuando fabrica una pieza mediante un elemento básico como es la herramienta de corte.
- Una vez establecida la relación, hay que proponer operaciones concretas de la MM que permitan definir y resolver problemas clásicos de cálculo de trayectorias para procesos de fabricación mecánica.
- Finalmente, realizar un estudio preliminar sobre el significado que en el campo de la mecanización poseen las operaciones más empleadas en MM para su futura aplicación.

### *Objetivos computacionales*

El formalismo expresado deberá ir acompañado de un modelo computacional que lo convierta en operativo y le permita rivalizar en eficiencia, robustez y calidad con otros métodos existentes. Por esta razón, esta investigación se plantea los siguientes objetivos relacionados con la abstracción de los modelos computacionales:

- Crear un modelo que permita realizar operaciones morfológicas en dos y tres dimensiones, en espacio continuo y discreto, dentro del ámbito definido.
- Analizar el modelo computacional mediante el cálculo de costes temporales y espaciales. Aunque este modelo se aplique finalmente a procesos de fabricación mecánica, se propondrá como base para realizar operaciones, dentro de las restricciones que el modelo imponga, en otros campos clásicos de la MM, como el análisis o el filtrado de imágenes.
- Proponer refinamientos del modelo para incrementar su eficiencia. Estos refinamientos irán encaminadas a la reducción de cotas temporales, analizando el paralelismo espacial y temporal inherente al modelo.

### *Objetivos tecnológicos*

El contexto en el que se ha llevado a cabo la investigación favorece la implementación de prototipos que realicen mecanizados de piezas reales. Se trata de un mecanismo que permite validar la bondad de los modelos y el cumplimiento de los objetivos y requerimientos impuestos. Para que dicha validación tenga lugar, se plantean los siguientes objetivos relacionados con la tecnología de la fabricación:

- Analizar en profundidad cuál es la problemática del cálculo de trayectorias poniendo especial hincapié en el espacio tridimensional.
- Proponer ejemplos de fabricación de objetos reales mediante sistemas de fabricación estándar y específicos. Los ejemplos deberán poseer características que prueben la bondad del modelo en casos límite que usualmente llevan asociada una falta de robustez en las soluciones (concavidades acusadas, cambios bruscos de pendiente, etc.). Las máquinas sobre las que se

## 42 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

realizarán las pruebas variarán: algunas de ellas estarán normalizadas pero otras, menos versátiles, condicionarán el proceso de mecanizado.

■ Aplicar el modelo utilizando arquitecturas de computadores convencionales y verificar resultados mediante la fabricación física de objetos o la digitalización mecánica. Los objetos serán fabricados sobre distintos materiales: polietileno, resina o aluminio.

■ Analizar las calidades de fabricación y, lo más importante, verificar el proceso mediante la toma de medidas para comprobar la bondad del procedimiento.

■ Mejorar la eficiencia del modelo computacional utilizando arquitecturas de computadores de alto rendimiento. En concreto, se realizarán pruebas del modelo operando sobre arquitecturas paralelas convencionales y se propondrán nuevas organizaciones específicas para mecanizado. Se compararán los tiempos de cálculo de trayectorias con los anteriores, obtenidos mediante arquitecturas monoprocesador y, también, con los tiempos que ofrecen otros sistemas disponibles en el mercado del CAM.

## Estado del arte

### La fabricación por computador

El primer intento para dotar a una máquina de un control automático de su trabajo fue desarrollado por Jacquard Loom, cuando en 1801 ideó una máquina textil que podía realizar distintos tipos de tejidos variando los programas de fabricación, que se introducían en la unidad de control, en tarjetas perforadas. Este tipo de control de trabajo, que utiliza coordenadas programadas (del inglés: *mando mediante números*) recibió el nombre de Control Numérico [Lasheras, 1989].

Pero la iniciación del desarrollo del Control Numérico, tal como ahora se conoce, se debe a la compañía Parsons que en 1947, y por primera vez, utilizó un ordenador para gobernar una fresadora en la mecanización de hélices para helicópteros de diferentes configuraciones. La experiencia resultó prometedora y la Fuerza Aérea de los EEUU adjudicó al Instituto de Tecnología de Massachusetts un contrato de investigación que dio como resultado, en 1953, el primer prototipo de fresadoras con control numérico que gobernaba los desplazamientos sobre tres ejes [IMT, 1992].

Con este sistema se consigue que las máquinas realicen su trabajo automáticamente, mediante la introducción, en la memoria de éste, de un programa de trabajo en el que se define perfectamente las operaciones a realizar por medio de una secuencia de instrucciones de distinta índole.

La denominación de control numérico se aplicaba originalmente a las máquinas programables que no iban equipadas con un computador. Posteriormente, con el abaratamiento y miniaturización de los microprocesadores, se ha generalizado su instalación en las máquinas de control numérico para realizar los cálculos y ajustes necesarios para obtener interpolaciones, roscados, etc.; estas máquinas se empezaron a llamar CNC (Computer Numerally Controlled) para diferenciarlas de las NC (Numerally Controlled) que no iban equipadas con un computador. Actualmente se suele utilizar la denominación de NC o CN para denominar todas las máquinas de control numérico tengan o no computador [Lasheras, 1989].

#### 44 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

El Control Numérico aporta las siguientes ventajas respecto a otros procesos automatizados de fabricación [IMT, 1992]:

- Mayor productividad de las máquinas herramienta porque todas las operaciones se realizan en las condiciones óptimas, sin tiempos muertos y con gran rapidez en los posicionamientos.
- Gran flexibilidad en la programación de la fábrica, pues basta con cambiar el programa de una serie ya terminada por el programa preparado para el trabajo siguiente para que la máquina empiece a trabajar sin más demora.
- Reducción de controles y piezas de deshecho, debido al automatismo con que se repiten las operaciones, con resultados idénticos.
- Posibilidad de fabricar piezas muy complejas con superficies tridimensionales.
- Se minimizan las desviaciones de la pieza fabricada con respecto a la diseñada con lo que se alcanza una gran precisión.

Sin embargo, los procesos automáticos tradicionales de fabricación tienen los siguientes inconvenientes:

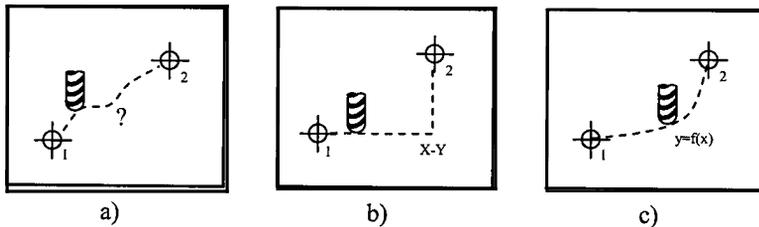
- La inversión por puesto de trabajo es más elevada.
- La planificación del trabajo debe ser más detallada y cuidadosa.
- Al valorar el coste de fabricación de cada pieza debe incluirse, no sólo el tiempo de preparación del programa, sino también el de su introducción en la máquina.

##### *Tipos de Control Numérico*

Las máquinas de Control Numérico pueden clasificarse atendiendo al trabajo que realizan en tres clases (ver figura 1.2) [Lasheras, 1989]:

- Máquinas de control *punto a punto*.
- Máquinas de control paraxial.
- Máquinas de contornoado.

En las máquinas de control *punto a punto* sólo se pueden programar los puntos finales de cada desplazamiento, pero no sus trayectorias, cuyo trazado y velocidad no se controlan. Las herramientas no realizan ningún trabajo en los desplazamientos que no sea en los puntos programados. Ejemplos de estas máquinas son: las taladradoras, las punteadoras y las soldadoras por puntos.



**Figura 1.2:** Distintos tipos de posicionamiento en CN: a) punto a punto, b) paraxial, c) contorneado.

En las máquinas de control *paraxial* pueden programarse los desplazamientos a puntos determinados y además pueden programarse para mecanizar en desplazamientos controlados pero sólo en los paralelos a los ejes. Ejemplo de este tipo de máquinas lo constituyen los tornos de fabricación.

En las máquinas de *contorneado* de control continuo, además de las operaciones que realizan las máquinas anteriores, pueden programarse para mecanizar en desplazamientos rectos y curvos sin limitación. Esta característica hace que el control de los motores deba cuidarse más que en los casos anteriores, ya que una desincronización en alguno de los motores que mueven los ejes de la máquina provocaría un error en el fresado de la pieza.

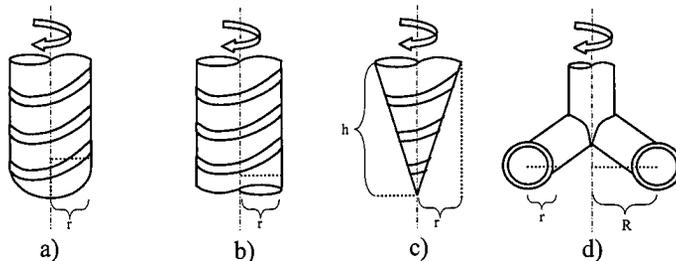
Este documento irá dirigido a resolver el problema de cómo calcular trayectorias para máquinas de control numérico que realizan contorneado de piezas, en las cuales el movimiento de los ejes no es sólo importante para posicionar la herramienta, sino también para fabricarla.

### Proceso de mecanización

Hay que hacer notar que el resultado final que se produce en un objeto que ha sido mecanizado por determinada máquina herramienta depende de la herramienta que se haya empleado. Es decir, una misma máquina puede producir diferentes resultados empleando diversos procesos en la mecanización.

De entre los distintos procesos que existen para realizar mecanizados (mandrinado, punteado, taladrado, roscado, amolado, fresado, etc.), este trabajo se centrará en el de fresado, ya que se trata de un proceso común en centros de mecanizado que se adapta al contexto en el que se ha llevado a cabo esta investigación.

El fresado consiste en un proceso de arranque progresivo de material mediante un tipo de herramienta llamada fresa que está provista de elementos o aristas cortantes [Lasheras, 2000]. Cuando el proceso de fresado está en marcha, la fresa avanza lentamente sobre la materia prima arrancando el material sobrante en su movimiento. Para conseguir eliminar este material la fresa debe girar a gran velocidad (valores típicos son de 3.000 a 10.000 rpm dependiendo del tipo de material y masa de la fresa).



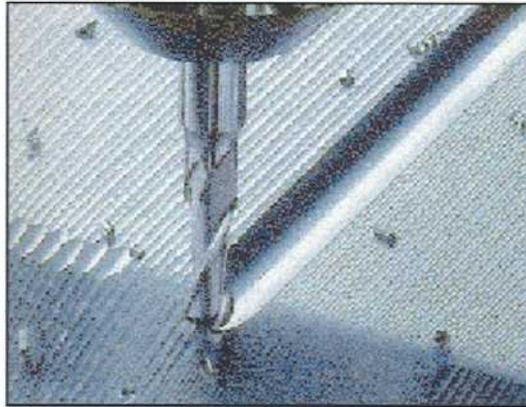
**Figura 1.3:** Distintos tipos de fresa: a) esférica, b) cilíndrica, c) cónica, d) tórica.

La geometría de la fresa se convierte en un factor determinante a la hora de conseguir una calidad de acabado en la pieza. La máquina que porta la herramienta sólo puede controlar un punto fijo de dicha herramienta, normalmente colocado sobre su eje de rotación. Este hecho provoca uno de los problemas más importantes a la hora de controlar la fabricación de este tipo de

máquinas; se denomina *compensado* de herramienta y consiste en saber dónde colocar el centro de la misma para poder mecanizar cierto punto del objeto, teniendo en cuenta, además, que para ello no debe colisionar contra una superficie ya mecanizada [Faux, 1979].

Un objetivo importante de este trabajo será encontrar un método eficiente y robusto de calcular compensaciones de herramienta libres de colisiones.

Los tipos de geometría de herramienta que podemos encontrar en la industria son muy variados: fresas cónicas, cilíndricas, esféricas, tónicas, etc. Cada una de ellas presenta una problemática diferente en cuanto a la generación de la trayectoria, ya que la máquina únicamente puede controlar un solo punto de esta geometría.



**Fotografía 1.1:** Proceso de mecanizado con herramienta esférica sobre aluminio.

Hay que mencionar que existen otros procesos para mecanizar piezas que no necesitan de extraer mecánicamente material sobrante como, por ejemplo, la fabricación por estereolitografía [Yan, 1996], consistente en la solidificación de un polímero por acción de una corriente. Este tipo de fabricación, en donde no existe proceso de arranque, queda fuera de los objetivos del presente trabajo.

### **Máquinas herramienta**

La naturaleza estática y dinámica de la máquina que porta la herramienta cortante es fundamental a la hora de considerar un proceso de fabricación. Los tipos de eje, las características de los motores, la inercia de los elementos mecánicos, etc., constituyen un abanico de características que finalmente determinan la calidad del acabado de la pieza a ser fabricada. A continuación se introducen los tipos de máquina más utilizados en la industria [Lasheras, 2000], [Krar, 2002].

#### *Fresadoras*

Este tipo de máquinas es muy versátil y puede realizar otros procesos de mecanizado típicos como el mandrinado, taladrados, etc. En la mayoría de fresadoras la herramienta cortante (la fresa), que gira a gran velocidad, permanece fija mientras que el movimiento sobre los distintos ejes lo realiza el objeto. Sin embargo, también son numerosas las fresadoras donde los movimientos de traslación los realiza el brazo que porta la fresa.

Existen fresadoras de 2 a 5 ejes, la mayoría incorporan ejes de traslación longitudinal sobre los ejes cartesianos X, Y y Z. El resto de ejes suelen estar asociados a movimientos de rotación sobre alguno de los ejes principales citados. La adición de ejes otorga versatilidad pero dificulta la generación de la trayectoria de la fresa. Hoy en día existe un gran esfuerzo investigador en este sentido, y numerosos autores presentan trabajos sobre generación automática de trayectorias sobre máquinas de 5 ejes [Jerard, 1989b], [Li, 1994].

#### *Tornos*

Son máquinas que permiten trabajar una pieza haciéndola girar sobre un eje y arrancándole el material periféricamente hasta transformarla en la pieza deseada. Esta operación recibe el nombre de torneado.

La materia a transformar es colocada sobre la parte giratoria llamada plato (eje Y). La herramienta cortadora (habitualmente de tipo tórico) está fija a un eje roscado (husillo) que provoca un desplazamiento transversal del brazo que sujeta la fresa. Además, este brazo puede desplazarse bien longitudinal o angularmente a través de un tercer eje. Todos ellos en

movimiento definen una trayectoria helicoidal sobre el objeto que va a ser mecanizado.

Tradicionalmente, este tipo de máquinas no operaban mediante un control electrónico, sino que funcionaban como copiadoras. Un brazo que portaba una superficie no cortante, pero de iguales dimensiones a la fresas en su movimiento, recorría la superficie del objeto a copiar tocando el material. Este brazo transmitía su movimiento a los brazos cortantes que reproducían la misma trayectoria generando uno o varios modelos copiados. El método es sencillo y robusto por lo que, para algunos sectores tradicionales como la fabricación de hormas de calzado, estas máquinas continúan utilizándose, no siendo superadas en calidad ni en velocidad por muchas de las que se controlan por computador.

Con la aparición de los programas de CAD/CAM y su versatilidad para diseñar y fabricar todo tipo de objetos surge la necesidad de poder reconvertir los tornos tradicionales copiadores en tornos cuyos motores son controlados por ordenador y donde desaparece el elemento copiadore. De esta manera, la calidad del proceso se mantiene y se añade la potencia de las herramientas de diseño.

El proceso de reconversión de una máquina se denomina *retrofitting*. El principal problema que se encuentra hoy en día a la hora de poder generar trayectorias para máquinas no estándar que han sido reconvertidas es que la mayoría del software de CAM sólo genera trayectorias para máquinas estándar como las fresadoras de 3 a 5 ejes citadas anteriormente. La investigación en generación de trayectorias para este tipo de máquinas de *retrofitting* es prácticamente inexistente o enmarcada dentro del ámbito privado y cerrado de algunas empresas de sectores específicos [Gürbüz, 2001].

#### Centros de mecanizado

Como se ha mencionado anteriormente, consisten en máquinas fresadoras a las que se ha dotado de características adicionales que aumentan su productividad y versatilidad. Alguno de estos elementos pueden ser [Krar, 2002]:

- Colocación automática de piezas para poder mecanizarlas.

## 50 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

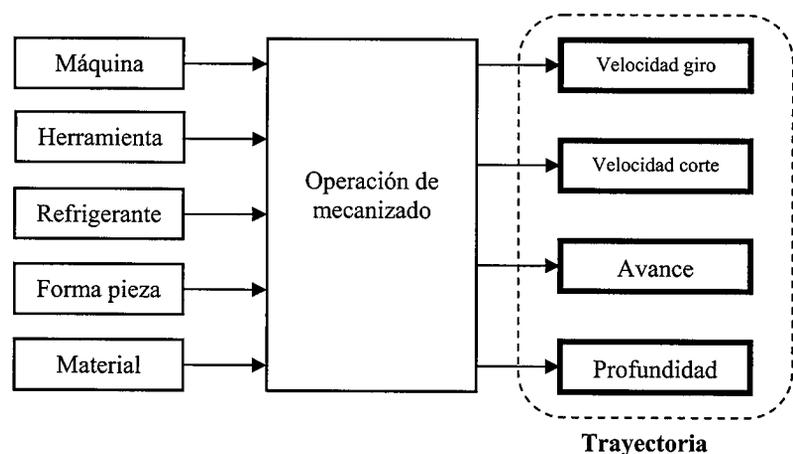
- Cambiador automático de herramientas para conseguir distintos acabados.
- Mecanismos de sustitución e intercambio de piezas mientras continúa el mecanizado de otras piezas.

La adición de estas nuevas características se traduce en un control sofisticado que permite la realización completa de la pieza en diversas fases.

Hoy en día los centros de mecanizado están presentes en casi todos los procesos de fabricación desde los sectores más avanzados (automóvil, aeronáutico, etc.) hasta los más tradicionales (calzado, marroquinería, piel, etc.).

### Problemática general en el mecanizado de objetos

El problema de generar un objeto tridimensional (objeto a mecanizar) mediante el uso de diversas geometrías preestablecidas (herramientas) recibe el nombre de cálculo de trayectoria de mecanizado. Dada una geometría a mecanizar, las formas de hacerlo mediante el uso de diversas herramientas son prácticamente infinitas [Faux, 1979].



**Figura 1.4:** Factores que intervienen en el mecanizado con máquinas herramienta.

Los primeros sistemas de control numérico funcionaban mediante una secuencia de órdenes que el operario iba introduciendo directamente. Estas órdenes constituían la trayectoria que debía seguir la herramienta. El lenguaje utilizado para ello era complejo estando más cerca de la máquina que del operario. Hoy en día los sistemas de fabricación asistidos por computador son los encargados de generar estas trayectorias y de producir las secuencias que manejan los controles numéricos.

Debido a que el proceso se lleva a cabo de manera automatizada, los programas generados contienen menos errores y el tiempo de generación de los mismos se reduce. Los sistemas actuales no sólo proporcionan al usuario una ayuda en el diseño, sino también en la fabricación del objeto [Chu, 1998]. No obstante, la generación de las trayectorias de las herramientas a partir de una geometría dada por el diseñador no es una tarea fácil y comprende una ingente cantidad de conceptos y métodos matemáticos, ingenieriles, geométricos, de computación, técnicas fundamentadas en inteligencia artificial [Preiss, 1985] y de práctica manual que no siempre es posible realizar [Jerard, 1989a] (ver figura 1.4).

De todo lo dicho anteriormente, se puede concluir que uno de los problemas más importantes del CAD/CAM es la generación automática de trayectorias de mecanizado, que deben dar como resultado la obtención de una pieza lo más parecida posible al modelo geométrico diseñado [Farin, 1993]. Otras consideraciones derivadas del proceso ingenieril llevan a que esa obtención no sólo sea precisa sino también rápida y eficiente. En general, las características que debe cumplir este proceso de generación de trayectorias son [Li, 1994]:

■ **Validez:** Una vez que termine el proceso de mecanizado de la pieza, ésta debe coincidir con el objeto diseñado, de manera que no existan zonas de material sobrante ni falta de material en ninguna zona.

■ **Precisión:** Cuando se utilizan controles numéricos para fabricar piezas, se busca no sólo la rapidez sino la exactitud en su reproducción. Uno de los aspectos más importantes a considerar será la limitación en el número de errores que se puedan producir así como su magnitud máxima. Se han realizado trabajos que permiten conocer los errores que son cometidos mediante el uso de determinadas herramientas y superficies. En [Arkin, 2000] se propone un algoritmo para

minimizar el material sobrante en un proceso de vaciado. La generación de superficies de barrido aporta una solución analítica a este problema aunque el coste computacional es elevado [Abdel-Malek, 2000]; en [Roth, 2001] se propone una discretización del problema aunque se limita el tipo de superficie. En [Molina, 2002] se realiza un estudio del error cometido condicionado al uso de herramientas esféricas sobre superficies planas y esféricas. En general, el problema se resuelve parcialmente una vez establecido el modelo de representación de los objetos. Sería deseable disponer de un modelo que permitiera conocer la diferencia existente entre la pieza original y la resultante antes de su fabricación independientemente de las geometrías implicadas.

■ **Eficiencia:** El proceso automático de fabricación debe conducir a un incremento en la productividad, ya que se acelera tanto el proceso de diseño como el de mecanizado de las piezas. En los tiempos de mecanizado no sólo se debe incluir el tiempo físico que lleva la ejecución del programa de mecanizado en una máquina, sino el tiempo de generación de este programa, así como el espacio de almacenamiento requerido. Algunos requerimientos que deben cumplirse a la hora de generar trayectorias son [Arkin, 2000]:

- No se debe mecanizar ninguna región más de una vez ya que, además del incremento del tiempo de mecanizado, se pueden producir mermas en la calidad de la pieza final.
- Debe evitarse un excesivo número de retracciones de la herramienta, que producen evidentemente un aumento del tiempo de mecanizado así como problemas en la entrada de la herramienta en el material, pudiendo dejar marcas.

Los trabajos realizados para aumentar la eficiencia de las trayectorias generadas resuelven parcialmente este problema. En [Arkin, 2000] se propone un algoritmo que garantiza que no se vuelvan a mecanizar partes de una pieza en procesos de vaciado con trayectorias paralelas. En [Barkoczy, 1984] y [Wang, 1987] se desarrollan sistemas que utilizan heurísticas para generar trayectorias eficientes válidos para mecanizados que utilizan tres ejes.

Es necesario profundizar en la definición de operaciones que proporcionen trayectorias mínimas de mecanizado y métodos

para la optimización de trayectorias que no estén sujetos a determinados tipos de trayectoria o máquinas específicas.

■ **Versatilidad:** Un sistema de generación de trayectorias debe permitir variar la forma en que se puede mecanizar un objeto ya que, atendiendo a la variabilidad en las formas del mismo, diferentes mecanizados de la misma geometría conducen a distintos acabados y calidades de la pieza fabricada, alguna de las cuales puede incluso ser no válida.

En el proceso de mecanizado de piezas se dan dos tipos de problemas que no se han resuelto completamente: la elección del tipo de trayectoria a realizar (denominado planificación de la estrategia) y el cálculo de la misma una vez que la estrategia ha sido elegida. Debido a la diversidad de estrategias y a la complejidad geométrica de algunas piezas, la tarea de seleccionar las estrategias adecuadas y óptimas para mecanizar una determinada pieza no es trivial. El problema es complejo y aún no está resuelto completamente. En [Pottmann, 1999] se realiza una aportación en este sentido proponiendo un conjunto de tests que se encargan de decidir si una superficie puede ser mecanizada mediante una determinada herramienta atendiendo a criterios de máxima curvatura. Queda fuera de los objetivos de este trabajo profundizar en las técnicas que resuelven total o parcialmente, automática o manualmente la selección de un tipo de estrategia. En el segundo problema se asume que la estrategia ya ha sido seleccionada mediante algún mecanismo manual o automático. A continuación, se mostrará la problemática general asociada al cálculo de trayectorias partiendo del análisis de los distintos tipos de estrategias.

### **Estrategias de mecanizado**

Por estrategia de mecanizado se puede entender el conjunto de decisiones que han de tomarse para abordar el mecanizado de una pieza. Tales decisiones se tomarán bajo criterios de eficiencia y calidad, e influirán decisivamente en la geometría de la trayectoria de la herramienta [Lasheras, 1989].

Existen dos formas diferentes de conformar la estrategia de mecanizado en los sistemas de fabricación de computador:

■ *Automáticamente.* El sistema ofrece la posibilidad de elegir la estrategia de mecanizado atendiendo a características geométricas de la pieza. Este sistema, poco desarrollado en la

## 54 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

actualidad, está encaminado al usuario poco experimentado y ofrece soluciones que generan objetos de baja calidad.

■ *Manualmente.* Un usuario experimentado selecciona la mayoría de parámetros que controlan la trayectoria de la herramienta. Finalmente, el sistema generador puede generar la trayectoria de manera automática siguiendo las indicaciones anteriores, o bien ser el experto quien establezca cada punto del espacio para mecanizar una pieza determinada, lo cual requiere de un conocimiento amplio de la máquina y de un profundo estudio de la geometría de la pieza. La opción más común es la semiautomática, en la cual usuario controla los parámetros generales de la trayectoria pero es finalmente el sistema quien genera los puntos que la herramienta debe seguir en su camino.

### *Factores a considerar en la elección de estrategias*

Los factores a tener en cuenta antes de decidir qué estrategia utilizar en el mecanizado de una pieza son:

- La geometría de la pieza.
- La geometría de la herramienta.
- El número de ejes de la máquina y su naturaleza (angular o lineal).
- El tipo de mecanizado a realizar:

-*De vaciado o desbastado:* mecanizado rápido y de baja precisión encaminado a eliminar la mayor parte de material antes de acabar definitivamente la pieza.

-*Acabado:* mecanizado lento de alta precisión que termina la mayor parte de la superficie final de la pieza.

-*Refinado o perfilado:* Mecanizado lento, usualmente realizado con herramientas de geometría muy pequeña utilizado para marcar zonas convexas, perfiles, etc. que la herramienta de acabado no ha podido mecanizar.

### *Tipos de estrategia de mecanizado*

Atendiendo a diferentes criterios es posible agrupar los distintos tipos de estrategias. Éstos son los siguientes [Lasheras, 2000], [Molina, 2002]:

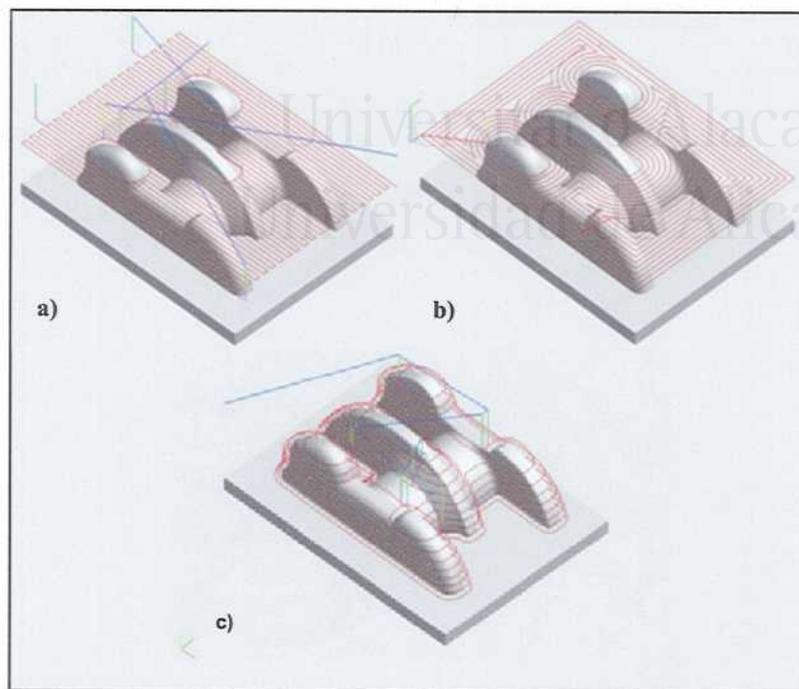


Figura 1.5: Distintos tipos de mecanizado a altura constante: a) zig-zag, b) espiral guiada, c) progresivo en Z-constante.

■ **Profundidad en el mecanizado:** se especifica cómo se produce el acercamiento desde la herramienta al material base. Según este criterio se tiene:

-*Mecanizado a altura constante:* La herramienta va acercándose al material recorriendo distintos planos situados a una altura fija del material base. Este tipo de mecanizados son utilizados para procesos de desbastado de material (ver figura 1.5).

-*Mecanizado a altura variable:* la herramienta se sitúa exactamente tocando la superficie del objeto a fabricar. Este tipo de mecanizado se utiliza en procesos de acabado y perfilado (ver figura 1.6).

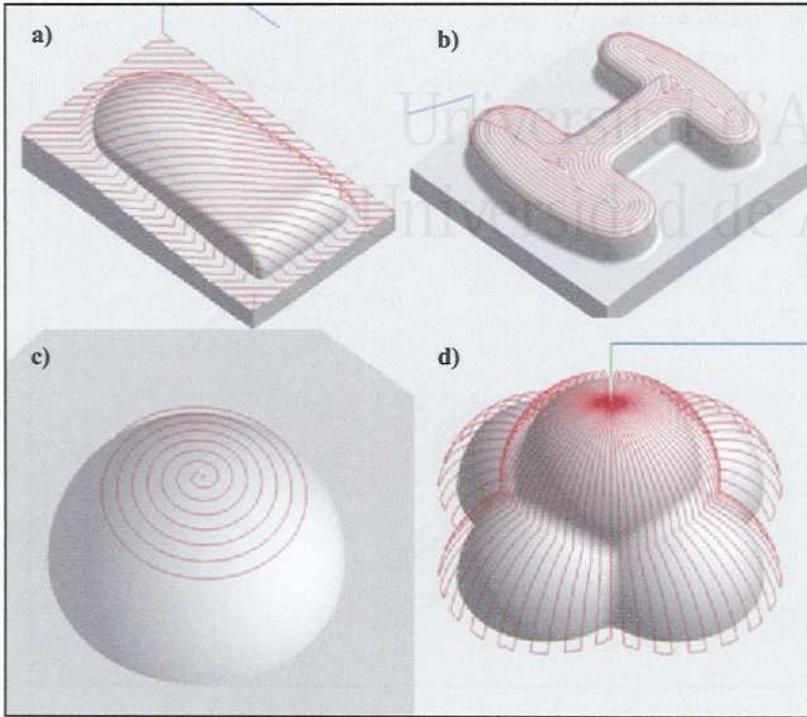


Figura 1.6: Distintos tipos de mecanizado a altura variable: a) paralelo, b) de contorno, c) espiral verdadera, d) radial.

■ **Disposición de la trayectoria:** se especifica la geometría que debe poseer la trayectoria respecto de la pieza a fabricar. Los tipos de estrategias son:

-*Paralela o zig-zag:* La herramienta recorre la pieza siguiendo sucesivos planos perpendiculares a ésta, por lo que el recorrido final traza líneas paralelas sobre la pieza. El salto de plano provoca una inversión del sentido de movimiento de la herramienta, de ahí el nombre de zig-zag.

-*Espiral o de contorno:* La herramienta parte siempre desde el borde exterior de la pieza, recorriendo su contorno y efectuando saltos concéntricos en el mismo que lo van acercando al centro de la pieza.

-*Radial*: La herramienta parte siempre del centro del objeto y se dirige al exterior. En cada paso de mecanizado la dirección efectúa un cambio de orientación constante de manera que se van describiendo distintos radios respecto del centro de la pieza.

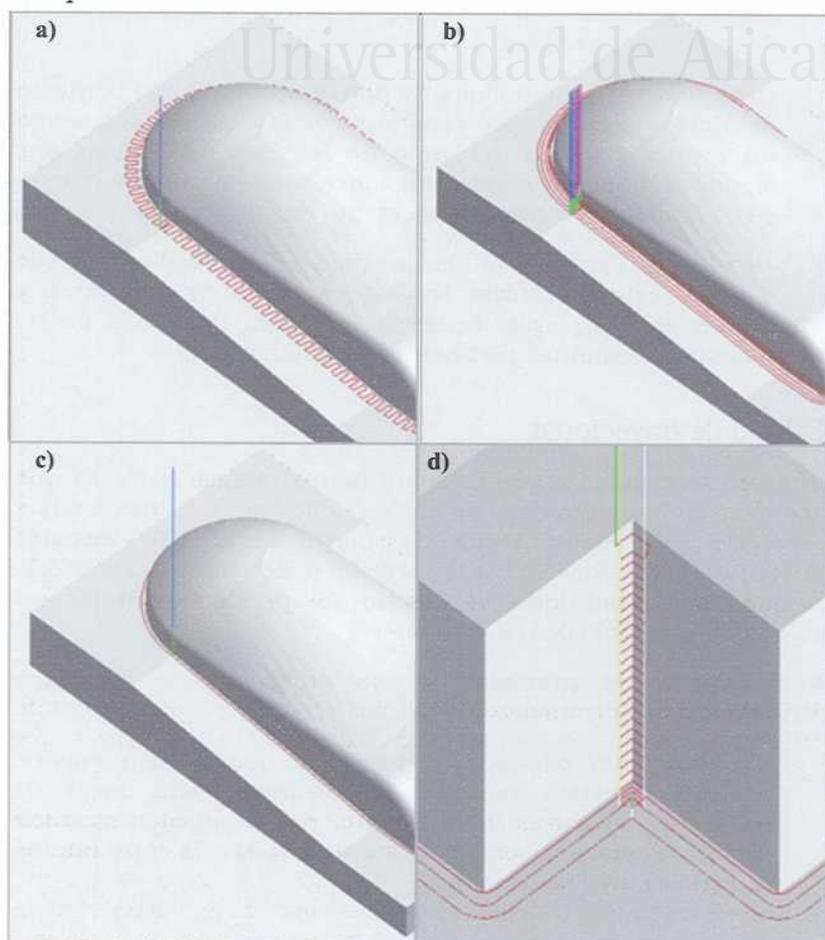


Figura 1.7: Distintas estrategias de refinado de objetos: a) ortogonal, b) contorneado, c) perfilado; d) combinación de afinado ortogonal y contorneado.

-*Isoparamétrico*: La herramienta sigue la dirección de curvas que en la superficie de la pieza tienen un mismo valor

## 58 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

paramétrico en una de las dos direcciones posibles ( $u$  o  $v$ ). Las curvas que son paralelas en el espacio paramétrico no lo serán generalmente en el espacio cartesiano.

-*Contorneado*: esta estrategia se utiliza para el perfilado de objetos y consiste simplemente en un recorrido por el borde de la misma (ver figura 1.7).

-*Ortogonal*: Al igual que el anterior se utiliza para el perfilado de objetos pero en este caso el recorrido se hace siguiendo un avance paralelo a alguno de los ejes cartesianos por alguna zona donde exista una concavidad en la pieza que no se ha podido mecanizar previamente (ver figura 1.7).

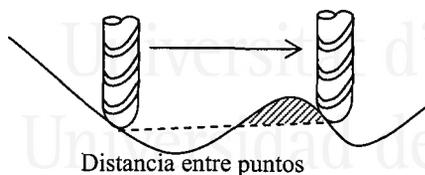
-*Perfilado*: También utilizada para el acabado final de objetos, esta estrategia consiste en recorrer entrantes y bordes en las piezas mediante un único trazado a fin de marcar las esquinas pertinentes (ver figura 1.7).

### Cálculo de trayectorias

Una vez tomada la decisión sobre las estrategias con las que abordar el mecanizado, se deben obtener las trayectorias concretas que debe seguir la herramienta. Los métodos existentes para estos cálculos dependen del tipo de estrategia elegida. Bajo estas líneas se ilustran los principales problemas asociados al cálculo de trayectorias:

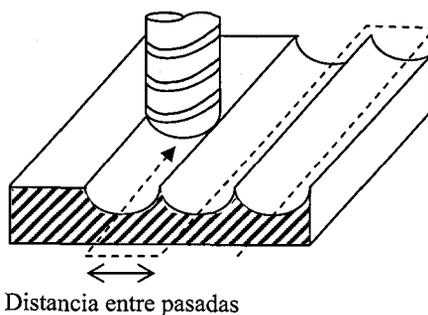
■ **Problemas de precisión**: Estos problemas se resuelven controlando dos distancias:

-*Distancia entre puntos sucesivos*: Dado que las máquinas de control numérico realizan una interpolación lineal de posiciones sucesivas de la herramienta, se pueden producir problemas entre pasos contiguos si la distancia entre puntos es excesiva (ver figura 1.8).



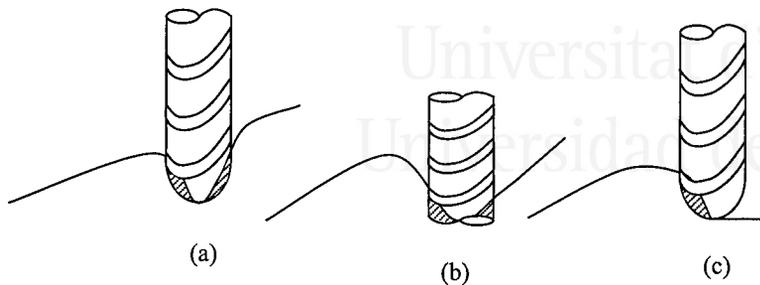
**Figura 1.8:** Error producido por la interpolación lineal y una distancia excesiva entre puntos consecutivos.

-*Distancia entre pasadas:* La distancia entre pasadas sucesivas puede producir montes y valles, especialmente cuando se utilizan herramientas no cilíndricas o la geometría del objeto es muy compleja. Se debe llegar a un compromiso entre el error producido y la velocidad de mecanizado (ver figura 1.9).



**Figura 1.9:** Montes y valles producidos por una distancia excesiva entre pasadas.

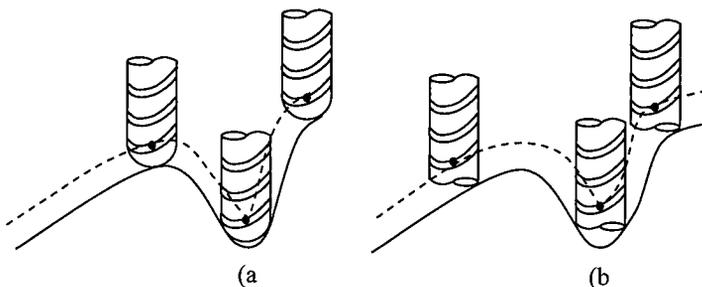
■ **Problemas por tamaño o tipo inadecuado de la herramienta:** Puede producirse una interferencia y un arranque de material no deseado debido a que la curvatura de la superficie sea menor que el radio de la herramienta, el tipo de la herramienta sea inadecuado o existan superficies múltiples (ver figura 1.10).



**Figura 1.10:** Interferencias producidas por una herramienta demasiado grande (a), por una herramienta de tipo inadecuado (b) y por la existencia de superficies múltiples (c).

■ **Problemas de inconsistencia topológica en el objeto:** Pueden producirse errores cuando los objetos no son consistentes topológicamente: objetos no cerrados, autointersecciones, superficies superpuestas, etc. El modelo geométrico a utilizar debe evitar la existencia de inconsistencias.

■ **Problema del compensado.** Este es, quizás, el problema más importante en la generación de trayectorias. Dado que en los programas de control numérico la posición que se indica es la del centro de la herramienta, es necesario calcular donde debe encontrarse ese centro para que la herramienta sea normal a la superficie. Este problema no está totalmente resuelto y depende del tipo de herramienta que se utilice (ver figura 1.11).



**Figura 1.11:** Problema del compensado con una herramienta esférica (a) y con una herramienta cilíndrica (b).

■ **Problema de la planificación de las trayectorias.** Consiste en la programación del orden en el que deben recorrerse las trayectorias para que no se produzcan errores y para que el tiempo de mecanizado sea el menor posible.

### **Soluciones para mecanizados de altura constante**

Aunque se utiliza para mecanizar objetos tridimensionales, la problemática que presenta este mecanizado es bidimensional puesto que la trayectoria generada constituye un apilamiento de planos con un valor de Z constante. Para cada uno de los planos el proceso se divide en dos fases. En la primera se efectúa un cálculo del contorno de la pieza y, en la segunda, se obtienen las trayectorias dentro de cada plano. Cuando se ha calculado el contorno de la pieza para un determinado plano, el cálculo de las trayectorias va a depender de la estrategia adoptada, ya sea para un mecanizado en paralelo o en espiral [Mahadevan, 1997].

#### *Mecanizados en paralelo*

Este tipo de mecanizados utilizan métodos de *scanline*: trazan rectas paralelas que intersectan con el contorno. En ocasiones aparecen islas, es decir, zonas interiores al contorno que no deben mecanizarse, por lo que deben tratarse también los contornos interiores evitándolos y determinando cómo acceder de unas áreas a otras. Una vez calculados los tramos rectos de trayectoria, hay que establecer el orden en que deben recorrerse para minimizar el trayecto de la herramienta y el número de retracciones de la misma. En la literatura pueden encontrarse diferentes métodos [Arkin, 2000]:

- Utilización de heurísticas para determinar la trayectoria. Estos métodos son válidos sólo para determinados tipos de piezas.
- Uso de grafos de mecanizado para representar las posibles conexiones entre diferentes tramos de mecanizado, de manera que el problema se convierte en el clásico del Viajante de Comercio.

#### *Mecanizados en espiral*

Este tipo de mecanizado parte del contorno de la pieza a mecanizar, a partir de ahí se realiza un cálculo de curvas paralelas sucesivas y concéntricas respecto del contorno inicial.

## 62 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

El cálculo de estas curvas es un problema complejo que se puede abordar con diversos métodos:

- Mediante la discretización del contorno, transformando el problema en el cálculo de paralelas a rectas y controlando en cada paso los bucles o autointersecciones que puedan producirse [Molina, 2002]. En [Elber, 1997a] y [Li, 1998], se generaliza el problema para curvas continuas y se proponen métodos de obtención de paralelas limitados al uso de herramientas esféricas y cilíndricas, aumentándose su eficiencia en [Wallner, 2001a].
- Uso de mapas de proximidad, entre los que destaca el diagrama de Voronoi, sobre el que existe numerosa bibliografía y cuyo cálculo puede abordarse mediante algoritmos tales como Divide y Vencerás [O'Rourke, 1993], de Propagación (Wavefront Propagation) [Held, 1998] o división y unión (*split-and-merge*) [Lambregts, 1996].

### Soluciones para mecanizados de altura variable

Mientras que el mecanizado a altura constante se limita a eliminar gran parte del material sobrante cuando se mecaniza una pieza, este tipo de mecanizado es el que realmente reproduce la pieza original acabando su superficie. Este problema tridimensional puede abordarse mediante dos enfoques:

- A partir del conjunto de puntos de la pieza que se quieren mecanizar, calculando la posición del centro de la herramienta que mecaniza tal conjunto de puntos.
- A partir de una superficie paralela a la original. Las trayectorias se sitúan a una cierta altura sobre la superficie original y, a partir de ella, se determinan los puntos de contacto de la superficie original que serán mecanizados.

Ambos enfoques presentan un problema adicional: no solamente hay que calcular la posición del centro de la herramienta que mecanice un determinado punto de la pieza, sino que es necesario evitar que toda posición de herramienta colisione con la superficie original. Este problema, que se denomina *compensado*, es complejo y no está resuelto completamente [Choi, 1991]. Uno de los objetivos de este trabajo de investigación será el ofrecer un método genérico de obtención de trayectorias libres de colisiones, es decir, donde no se presente el problema del compensado.

### *Mecanizado paralelo y en espiral*

Los métodos de mecanizado en paralelo y en espiral no incrementan la dificultad del mecanizado puesto que pueden generalizarse para el caso de mecanizados a altura variable. En estos casos se deben obtener las trayectorias, no sobre un conjunto de planos de  $Z$  constante, sino sobre un conjunto de superficies paralelas a la superficie a mecanizar. De nuevo es posible enfocar el problema de dos maneras: calculando las trayectorias sobre la superficie original y obteniendo posteriormente curvas paralelas que se van alejando progresivamente de ésta o bien, calculando superficies paralelas a la original y posteriormente proyectando trayectorias bidimensionales sobre cada superficie paralela.

### *Mecanizado isoparamétrico*

Es una opción común cuando se trata de mecanizar superficies libres. Consiste en recorrer la superficie utilizando líneas isoparamétricas. En cada trazado, uno de los parámetros permanece constante, mientras el otro va incrementándose en pasos constantes [Li, 1994]. Para cada valor de los parámetros ( $u$ ,  $v$ ) se obtiene la posición sobre la superficie en coordenadas cartesianas. El problema que presenta este método es que dos rectas paralelas en el espacio paramétrico no lo son, en general, en el espacio cartesiano (ver figura 1.12). Este inconveniente hace que no sea un método utilizado en la práctica. Se han realizado modificaciones al método anterior que permiten utilizar curvas isoparamétricas bajo un criterio de localidad, de modo que es posible adaptar el número de isocurvas fijando un parámetro de máxima distorsión en el espacio cartesiano [Elber, 1994] aunque el método que se aporta sólo es válido para herramientas de un único radio.

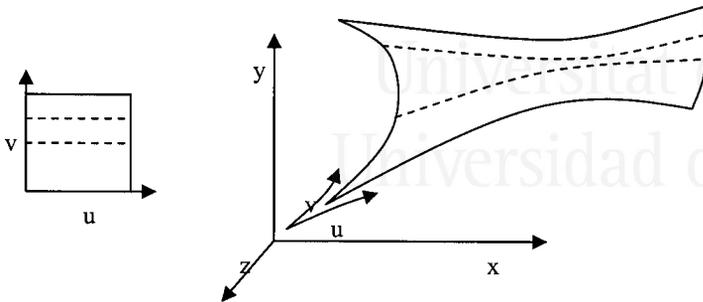


Figura 1.12: Problemas de un mecanizado isoparamétrico.

### Soluciones al problema del compensado

Como se ha citado anteriormente, se trata de un problema crucial en el cálculo de trayectorias que consiste en la obtención de un recorrido de herramienta capaz de mecanizar un máximo de zonas de ésta sin que, en ningún caso, puedan colisionar con la superficie original [Choi, 1991]. Este problema suele abordarse como fase final en el cálculo de trayectorias resultando en una corrección de las trayectorias previas generadas, por ejemplo, mediante los métodos comentados anteriormente para realizar mecanizados paralelos, en espiral o isoparamétricos.

En [Faux, 1979], [Farin, 1993] y [Wang, 1996a] se formaliza este problema para herramientas de un solo radio. En la mayoría de casos se presentan problemas de autointersecciones que deben ser detectadas y eliminadas. Algunas aproximaciones válidas son:

**Offset de la superficie:** consiste en calcular un desplazamiento de la superficie original en dirección normal a la misma. La superficie resultante puede contener bucles en zonas de pronunciada concavidad, de hecho, es posible determinar a priori cuál es el máximo offset que puede aplicarse a una superficie sin que se produzcan intersecciones [Wallner, 2001a]. Si finalmente se aplicara un desplazamiento mayor que el admitido por la superficie, sería necesario aplicar técnicas de detección y eliminación de autointersecciones para prevenir que la herramienta pueda introducirse en el objeto a mecanizar. Este problema es definido formalmente en [Wang, 1996a]. Al obtenerse una superficie como resultado, se consigue todo el espacio de

representación de las trayectorias posibles con dicha herramienta. Este procedimiento es válido para herramientas cuyas superficies se desarrollan en una sola dirección volumétrica (herramientas esféricas y cilíndricas) pero su extensión a herramientas de forma general es compleja.

Las aproximaciones al cálculo de superficies offset pasan en algunos casos por la discretización poligonal o la utilización de mapas de proximidad mediante el uso de diagramas de Voronoi [Held, 1998]. Cuando se pretende un cálculo exacto para la representación algebraica de superficies, los métodos utilizados son iterativos presentándose problemas de ineficiencia e inestabilidad numérica. Alguno de estos últimos utilizan el algoritmo aproximativo de Newton para el cálculo de soluciones con lo que se introducen importantes restricciones como que la solución inicial este muy próxima a la correcta o que no existan interferencias entre superficies adyacentes. Otros métodos aproximan una superficie reglada para finalmente realizar un mecanizado isoparamétrico restringido a una herramienta de tipo cilíndrico o esférico y aplicación en centros de mecanizado de tres ejes [Elber, 1997b].

En resumen, la investigación sobre la generación de superficies offset está muy desarrollada y continúa dando sus frutos. Los métodos definidos anteriormente permiten su cálculo eficiente y la detección y eliminación de autointersecciones. Como principal escollo se presenta su validez exclusiva para mecanizados en tres ejes y herramientas de un solo radio.

**Compensación del vector normal:** versión discreta del método anterior que consiste en desplazar cada punto a mecanizar en su dirección normal. Con este método se deben conocer a priori los puntos que van a ser mecanizados sobre la superficie, por lo que suele utilizarse en mecanizados isoparamétricos [Elber, 1994]. Al ser una discretización del proceso anterior, tiene sus mismos inconvenientes (principalmente problemas de autointersecciones y uso exclusivo de herramientas esféricas) añadiendo el que supone el obtener una trayectoria única en vez de una superficie de mecanización.

**Z-maps:** los objetos se representan como un conjunto de valores de altura, de manera que una superficie viene dada por la ecuación  $z=f(x,y)$ . La determinación del punto compensado de mecanización viene dada por la distancia existente entre la herramienta y el valor en el eje Z de un punto determinado. La

superficie de mecanizado es calculada como un conjunto de valores máximos de posiciones de herramienta tales que no interfieren con la superficie original. Esta técnica es adecuada sólo para superficies que puedan definirse mediante la ecuación anterior (modelo geométrico de representación 2D y 1/2) y para mecanizados de 3 ejes. Por problemas de complejidad temporal su uso quedó restringido a mecanizados con herramientas esféricas [Choi, 1991].

**Digitalización virtual:** consiste en ir reproduciendo un proceso de recorrido virtual sobre la pieza a mecanizar mediante una determinada herramienta como si se tratara de un proceso mecánico de digitalización de la pieza. El recorrido virtual ya fue utilizado en [Jung, 1991] para generar trayectorias de perfilado sobre z-maps. En [Wallner, 2001b] se estudia geoméricamente el movimiento de un objeto sobre otro de manera que nunca se abandone la superficie de contacto con el fin de que un punto interior del objeto móvil defina superficies offset aptas para el mecanizado en tres ejes mediante herramientas esféricas. En este documento se profundiza y generaliza el concepto de recorrido virtual.

**Visualización y verificación de trayectorias:** Uno de los métodos más extendidos en el CAD/CAM para verificar las trayectorias de mecanizado es la observación tridimensional de las mismas. La visualización de las trayectorias puede comprender desde la representación de los centros de herramienta hasta la simulación completa del proceso utilizando técnicas de realidad virtual. Su uso está indicado en entornos de simulación para detectar posibles colisiones o fallos en trayectorias previamente calculadas.

El sistema de representación de geometría sólida constructiva (CSG) [Hearn, 1995] es adecuado para obtener simulaciones de mecanizados ya que, dada una trayectoria y un material base, una resta booleana entre el modelo de herramienta y el del material dará como resultado una aproximación al proceso real de arranque de material. En [Requicha, 1985] se introduce el uso de esta técnica que es objeto de sucesivas mejoras en [Rappoport, 1997] y [Stewart, 1998]. La complejidad del cálculo de las reiteradas restas booleanas,  $O(n^2)$ , es uno de los principales inconvenientes del uso de modelos CSG. En [Stewart, 2002] se propone una optimización de dicho cálculo reduciéndolo a una complejidad lineal. La idoneidad del modelo CSG para simulación

contrasta con su escaso uso para cálculo de trayectorias por lo que el uso de estas técnicas implica la conversión previa de los modelos de superficie en modelos CSG.

La simulación del mecanizado sobre modelos geométricos que utilizan superficies pasa por aplicar técnicas de barrido (también denominadas huellas) que se fundamenta en el análisis del movimiento de la superficie cortante de una herramienta. En [Abdel-Malek, 2000] se propone un método analítico de compleja formulación que es simplificado mediante el uso de la discretización en [Roth, 2001]. Una vez obtenido el resultado es necesario aplicar técnicas de conversión poligonal para que la visualización se haga de forma eficiente. Existe una gran cantidad de literatura sobre algoritmos robustos de poligonalización que permiten discretizar la superficie continua con una tolerancia máxima [Li, 1993] utilizando un conjunto de triángulos mínimo [Sáez, 2000]. Una característica deseable en un sistema generador de trayectorias es que el modelo secundario de visualización esté implícito, de manera que los cálculos de trayectorias (tanto parciales como finales) estén disponibles gráficamente a fin de ser verificados.

## Digitalización de objetos

La adquisición de datos tridimensionales es uno de los pasos fundamentales en el diseño y fabricación de elementos complejos. Cuando el modelo o pieza con la que se quiere trabajar no están completamente parametrizados, se hace muy difícil su creación a partir de cero en un entorno CAD/CAM. La forma más sencilla de llevar estos modelos geométricos a un computador es mediante la digitalización o captación de datos geométricos tridimensionales de la superficie del modelo. Uno de los procesos donde el digitalizador 3D es utilizado frecuentemente es en el esquema de prototipado rápido: el diseñador parte de un modelo real, habitualmente realizado en algún material blando, fácilmente moldeable (como yeso, madera o resina) y lo digitaliza para poder realizar nuevos prototipos mediante el uso de un software CAD/CAM. El proceso de adquisición o digitalización de los datos debe ser rápido para que la técnica sea viable.

En el sector CAD/CAM, se pueden distinguir varias técnicas de adquisición de datos tridimensionales como la visión estéreo, el láser, los ultrasonidos y la captación mecánica. Todos ellos coexisten hoy en día presentando diferentes características de

precisión y velocidad. En los métodos que utilizan captación óptica y por ultrasonidos no existen elementos de contacto entre el modelo a copiar y el dispositivo captador, por lo que la problemática que presentan, centrada en aspectos de visión y propiedades físicas de la luz y el sonido, se aleja del propósito de este trabajo de investigación. Sin embargo, los dispositivos que utilizan medios de captación mecánica se fundamentan en el recorrido de un elemento geométrico conocido (sensor mecánico o palpador) a través de una superficie no conocida. Estos dispositivos presentan una problemática similar a la fabricación mediante máquinas herramienta por lo que, a continuación, serán analizados en profundidad.

### **Digitalización Mecánica**

Los dispositivos de captación mecánica habitualmente están formados por un brazo que tiene una rueda giratoria montada en el extremo inferior; la tensión de un resorte mantiene la rueda presionada contra uno de los lados del objeto que se quiere copiar. El digitalizador da vueltas al objeto y lentamente alza el brazo mientras que la rueda giratoria se mantiene en contacto con la superficie interior del modelo. Al captar el movimiento del brazo, mientras la mesa giratoria da vueltas, el digitalizador va determinando la forma del objeto a copiar. La mayoría de los digitalizadores mecánicos son razonablemente robustos y fáciles de usar de forma precisa. Cuando se calibran correctamente, su única imprecisión proviene de la vibración del brazo sobre el material a copiar. Este problema puede ser reducido o eliminado al disminuir la velocidad del digitalizador.

Los digitalizadores mecánicos no se emplean exclusivamente en el sector CAD/CAM. Su precisión y robustez ante interferencias los hace adecuados para su aplicación en medicina. Una importante muestra la constituyen los brazos mecánicos que sirven de apoyo a la definición de zonas del cerebro humano y que se utilizan para la intervención quirúrgica asistida por computador. Un interesante estado de la tecnología en esta materia puede encontrarse en [McInerney, 2000].

Dado que el digitalizador mecánico obtiene información sobre la una posición conocida del elemento palpador (habitualmente su centro geométrico) y no del punto de contacto entre la superficie y dicho elemento, la trayectoria que se genera se sitúa en el exterior de la superficie digitalizada. Este problema es de

naturaleza similar al problema del compensado en el mecanizado. La diferencia estriba en que, ahora, se tiene una trayectoria de hecho compensada, teniendo que obtener la superficie interna que ha dado lugar a esa trayectoria. Al igual que el problema del compensado, este problema no está resuelto completamente. Los métodos existentes para solucionarlos en la actualidad pasan por la generación de superficies offset inversas que presentan problemas de autointersecciones y restricciones en cuanto al tipo de máquina y herramienta [Choi, 1991]. Existen pocas referencias a técnicas específicas aplicables a la problemática que presentan los captadores mecánicos. La especificidad de este tipo de máquinas y la opacidad de las empresas que los fabrican dificultan la publicación de éstas. Sería necesario realizar una aproximación desde la generalidad a este problema, aprovechando su similitud con el proceso de mecanizado.

### **Interpolación de nubes de puntos**

Una gran cantidad de dispositivos de captación tridimensional, tanto de naturaleza mecánica como óptica, obtienen como resultado un conjunto de puntos en el espacio tridimensional. Estos puntos, no ordenados, conforman una nube tridimensional no conectada. El desorden de este conjunto impide que se pueda extraer un modelo geométrico superficial de los mismos, por lo que es necesario recurrir a métodos de organización de nubes de puntos. El problema es complejo y puede abordarse por técnicas que utilizan la triangularización e interpolación [Choi, 1991], [O'Rourke, 1993]. Una trayectoria puede constituir un método de ordenación en el espacio al establecer un movimiento ordenado en el espacio. Profundizar en el uso de las trayectorias como técnica de ordenación de puntos se presenta como una alternativa interesante a los métodos convencionales.

### **Morfología matemática**

El marco conceptual que representa la morfología matemática podría ser aplicado al campo de la mecanización industrial. A continuación, se muestra una breve introducción a este paradigma así como sus principales campos de aplicación en la actualidad.

La morfología matemática nace en 1964 cuando a George Matheron se le pidió que investigara las relaciones entre la

geometría de un medio poroso y su permeabilidad [Matheron, 1975], y cuando, al mismo tiempo, Jean Serra cuantificó la petrografía del mineral de hierro para poder predecir así sus propiedades ante la extracción mecánica [Klein, 1973], [Serra, 1982].

La morfología matemática proporciona una herramienta mediante la cual es posible la extracción de características geométricas de un objeto. Esta información es útil en la descripción y representación de regiones, tales como contornos, esqueletos y formas convexas [Serra, 1992a].

La base de la morfología matemática es la teoría de conjuntos. Los conjuntos representan formas de objetos en un espacio  $n$ -dimensional. Las operaciones morfológicas se basan, por tanto, en relaciones geométricas entre los puntos de dichos conjuntos.

Existen distintas definiciones de Morfología Matemática atendiendo a diferentes puntos de vista que se corresponden con los distintos campos a los que se aplica este paradigma. El enfoque matemático la relaciona con el análisis funcional sobre los retículos completos<sup>1</sup>. El punto de vista de la física que la considera como un conjunto de métodos de análisis de imágenes basado en teoría de conjuntos que relaciona propiedades físicas y estructuras. El campo de teoría de la señal lo relaciona con un conjunto de técnicas no lineales de procesamiento de señales en las que se definen operaciones de máximo y mínimo. Finalmente, desde el punto de vista de la disciplina informática, se define como un conjunto de algoritmos que permiten realizar de manera sistemática una transformación o procesamiento de la imagen.

Esta disciplina ha sido tradicionalmente utilizada en el procesamiento de imágenes bidimensionales: [Dougherty, 1992], [Giardina, 1988], [Maragos, 1989], [Gonzalez, 1993], [Haralick, 1987], [Vincent, 1993], [Heijmans, 1994], [Roerdink, 1996], [Soille, 1999]. Su estudio se centra en las transformaciones de dicha imagen: erosión, dilatación y sus combinaciones, bajo la aplicación de operadores locales, denominados elementos estructurantes, que actúan como un parámetro de las transformaciones morfológicas. Se trata de una herramienta

---

<sup>1</sup> Un retículo completo es un conjunto no vacío construido mediante una relación de orden parcial tal que cada subconjunto de éste tiene una mínima cota superior (supremo) y una máxima cota inferior (ínfimo).

potente de análisis que ha demostrado su utilidad en varios campos desde hace décadas.

### **Campos de aplicación actuales**

Las técnicas basadas en morfología matemática tienen, hoy en día, un amplio campo de aplicación. Las últimas investigaciones están dando sus frutos en:

■ **Compresión y codificación de información:** Relacionados con la morfología combinada con la teoría de grafos [Meyer, 1999], se han desarrollado algoritmos automáticos e interactivos para realizar la segmentación de imágenes y video en [Salembier, 1995] y [Demarty, 1999], dando lugar a algunos productos comerciales como [VOGUE, 1999].

■ **Multimedia:** Se está investigando en técnicas para estimar, modelar y analizar el movimiento en secuencias de imágenes [Gomila, 2000]. La aplicación de la morfología al procesamiento de imágenes en color no es trivial [Goutsias, 1995]. En la actualidad, se intentan salvar los problemas que plantea el uso de información vectorial en la morfología tanto para su análisis [Hanbury, 2001] como en su aplicación a la clasificación de imágenes [Angulo, 2002]. Se están realizando trabajos para facilitar el análisis de texturas a partir del muestreo de imágenes [Decencièere, 2001].

■ **Control industrial, detección y reconocimiento de patrones.** Las herramientas morfológicas han probado su utilidad para detectar características geométricas en imágenes [Meyer, 2001]. Estas técnicas han servido para analizar escenas en carreteras con el fin de detectar obstáculos [Beucher, 1995]; planificar trayectorias de robots en tiempo real [Roerdink, 1993], [Pujol, 2002]; controlar visualmente la calidad de productos industriales [Hanbury, 2001] y reconocer caracteres dentro de documentos [Montolío, 1993].

■ **Medicina y biología:** El esfuerzo investigador de la mayoría de científicos que utilizan hoy en día técnicas morfológicas recae sobre estos campos. De una parte, se están realizando sistemas de procesamiento de imágenes en tiempo real para monitorizar procesos biológicos; este es el caso de la monitorización de la sangre para la detección de la hipoglucemia, desarrollada en [Choleau, 2002]. Por otro lado, se están utilizando las técnicas morfológicas para la reconstrucción de imágenes 3D a partir de

muestras bidimensionales correlacionadas. Las aplicaciones más recientes incluyen el análisis del crecimiento del riñón en [Moresco, 1994] y [Cullen, 2002], el estudio de la estructura del hueso [Oka, 2002] y la reconstrucción de la estructura cerebral [Ferrant, 1999]. Otras aplicaciones se centran en el análisis de imágenes de secuencias de genomas [Serra, 2002] y el desarrollo de herramientas de diagnóstico en oftalmología [Walter, 2002].

■ **Física de medios heterogéneos.** En este campo se está investigando en la predicción teórica de las propiedades físicas globales de materiales heterogéneos desde su micro estructura (tales como la probabilidad de fractura de algunos materiales, la constante dieléctrica [Paciornik, 2003] o la permeabilidad de un medio poroso [Delisé, 2001]). También se está investigado en modelos y simulaciones de estructuras heterogéneas como en [Jeulin, 2001].

■ **Tierra y espacio:** Las técnicas morfológicas de análisis de imagen se utilizan para filtrar y segmentar imágenes topográficas o del espacio. En [Beucher, 1999] se hace una revisión de sus principales aplicaciones. Las últimas investigaciones realizan la segmentación de imágenes aéreas tomadas en color [Ortiz, 2002].

### Aplicaciones sobre tres dimensiones

La morfología matemática se basa en la teoría de conjuntos y, por lo tanto, no está restringida a las dos dimensiones. La mayoría de aportaciones científicas en el campo de la morfología matemática que trabajan con información tridimensional se centran en análisis de imágenes 2D con una tercera dimensión de interpretación no geométrica (como el color o el tiempo). En estos casos la tercera componente, que no se encuentra relacionada geoméricamente con las anteriores, plantea problemas al constituir el retículo un conjunto tan solo parcialmente ordenado; estos problemas y otros relacionados se comentan en [Goutsias, 1995].

El problema que surge en morfología matemática cuando se aplica al mundo tridimensional es el elevado coste computacional de las transformaciones básicas como la erosión y la dilatación. Este problema ha supuesto un freno en la aplicación de este paradigma al procesamiento de información tridimensional y su análisis. A medida que las técnicas morfológicas han evolucionado hacia formas más eficientes, ya sea por la vía de la reestructuración de las operaciones o por el uso de arquitecturas

específicas, la morfología ha sido aplicada a las tres dimensiones geométricas. Un ejemplo de ello lo constituye la reconstrucción de cuerpos tridimensionales a partir de imágenes 2D correlacionadas; es el caso de la experimentación con TACs para el análisis de estructuras biológicas como el riñón [Cullen, 2002] y el cerebro [Ferrant, 1999]. El uso de las técnicas morfológicas en este campo está limitado por la precisión y el número de las imágenes.

Se han propuesto diferentes técnicas para implementar operaciones morfológicas de una manera más eficiente que la que se propone en su definición. La mayoría de ellas utilizan la especialización del hardware o el uso de arquitecturas paralelas [Jonker, 1992] o segmentadas [Pujol, 2000] que utilizan las propiedades de descomposición de los elementos estructurantes analizadas para tonos de grises en [Richardson, 1991] y mejoradas mediante algoritmos genéticos en [Anelli, 1998]. Otras técnicas se han restringido exclusivamente a las dos dimensiones [Vincent, 1991], [Piper, 1989]. Además, la mayoría de las técnicas son sólo aplicables a elementos estructurantes de tamaño o forma específicas, aunque el uso de determinados tipos de elementos estructurantes sea muy interesante en muchas aplicaciones [Vincent, 1991]. Para grandes tamaños de elementos estructurantes, la descomposición en pequeños elementos básicos se aplica en [Pitas, 1990] y [Park, 1995], pero da como resultado un cálculo computacional intensivo.

Uno de los métodos más eficientes de cálculo para dos dimensiones se describe en [Vincent, 1991] y es extendido a las tres dimensiones en [Nikopoulos, 1997], este método no está restringido en la forma o tamaño de los elementos estructurantes y se basa en una codificación de la conectividad superficial de objetos y elementos estructurantes. En cualquier caso, la principal reducción viene dada por el hecho de utilizar superficies y no volúmenes estando limitado el tamaño del elemento estructurante.

En [Jonker, 2000] se propone un método interesante para el cálculo de primitivas morfológicas de cualquier dimensión, este cálculo es extendido para realizar operaciones más complejas como la esqueletización de imágenes 3D. El método se fundamenta en la construcción de primitivas que pueden detectar ciertas propiedades en una imagen n-dimensional, lo

## 74 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

que lo hace muy apropiado para segmentación, sin embargo en este trabajo no se dan medidas sobre los tiempos de cálculo.

Todos los métodos estudiados se centran en el campo de la imagen discreta (imágenes formadas por elementos básicos llamados *voxels*), no siendo posible, por la naturaleza de los algoritmos, su aplicación a los campos continuos.

Aunque la eficiencia de los algoritmos 3D se ha mejorado sensiblemente respecto a los primeros que utilizaban la definición de las operaciones morfológicas, todos ellos siguen utilizando el concepto original de traslación de un conjunto a otro de puntos (aunque los conjuntos se hayan reducido por las optimizaciones), lo que provoca siempre una dependencia tanto del número de puntos de las imágenes como el tamaño de los elementos estructurantes. La consecuencia es que las tres dimensiones siguen siendo hoy en día un campo en donde la morfología tiene dificultades en imponerse, por lo que se prefieren otros formalismos y técnicas. Profundizar en el estudio de nuevas técnicas que permitan realizar eficientemente operaciones morfológicas sobre conjuntos tridimensionales podría abrir el campo de la fabricación industrial al paradigma morfológico.

### **La morfología matemática y la fabricación industrial**

La morfología nace gracias a los requerimientos de un proceso industrial como era el estudio de las características de ciertos minerales, a fin de conocer sus propiedades ante la abrasión, erosión y extracción por medios mecánicos [Serra, 1982]. A pesar de que la relación que existe entre la mecanización de un objeto (pieza) mediante la traslación de otro (herramienta), pueda estar ligada al concepto de erosión morfológica, paradójicamente, no existen referencias en este sentido. Es objetivo primordial de este trabajo el poder establecer un vínculo entre el marco morfológico y la descripción de procesos mecánicos de extracción de material.

En [Márquez, 1999] se constata que la morfología matemática, aunque es una herramienta de análisis muy útil para su uso sobre escenas, constituye un marco pobre e ineficiente cuando se intenta aplicar a las representaciones que se utilizan en el CAD / CAM (splines, mallas triangulares, etc.). Sería interesante definir operaciones morfológicas que tengan utilidad en campo de la fabricación asistida por computador.

## Conclusiones

La problemática asociada al mecanizado de objetos presenta, en la actualidad, numerosos aspectos que no han sido resueltos completamente. La planificación y generación de trayectorias de herramienta libres de colisiones constituyen unos de los más importantes. Del estudio realizado se deriva que las técnicas empleadas se asocian a un tipo de máquina y herramienta: las más genéricas son propuestas para centros de mecanizado estándar de 3 ó 5 ejes con herramientas de un solo radio [Choi, 1991], [Farin, 1993], [Elber, 1994], [Wang, 1996a], [Elber, 1997b], no haciéndose mención de su uso en otro tipo de máquinas o herramientas. Por otra parte, los métodos desarrollados expresamente para un solo tipo de máquina o herramienta no hacen referencia a su posible uso genérico en centros de mecanizado [Arkin, 2000], [Abdel-Malek, 2000], [Roth, 2001].

De todo lo anterior se deduce que los métodos analizados no se abstraen completamente de las limitaciones que supone la utilización de un determinado tipo de máquina y de herramienta, por lo que el problema del mecanizado no se define por sí mismo, sino asociado a un tipo de fabricación. En este trabajo se pretende aportar un marco de definición de mecanizado independiente del tipo de máquina que lo efectúe proponiendo soluciones que, aunque no estén exentas de restricciones, sean aplicables a cualquier modelo de fabricación que utilice trayectorias.

La mayoría de los métodos descritos se utilizan o han sido utilizados en software comercial CAD/CAM de propósito general. Sin embargo, el tiempo de generación de la trayectoria constituye el principal cuello de botella a la hora de generar un prototipo, con tiempos que, en algunos casos, superan a los tiempos que utilizan las máquinas en fabricarlo. Los controles numéricos de las máquinas herramienta que integran cálculo de trayectorias suelen ir equipados con procesadores convencionales de propósito general. Aunque las arquitecturas utilizadas han evolucionado en cuanto al proceso de control de motores, este avance no ha seguido la misma tendencia en cuanto a cálculo de trayectorias se refiere. Como consecuencia, el desarrollo de arquitecturas de computadores específicas para cómputo de trayectorias ha sido prácticamente nulo. Sería necesario realizar un esfuerzo en este sentido, proponiendo arquitecturas de

## 76 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

computadores que eleven el grado de eficiencia de los métodos actuales de generación de trayectorias.

Otro problema conceptualmente ligado al mecanizado es la reconstrucción de piezas digitalizadas mediante captadores mecánicos. En este aspecto las aproximaciones realizadas al problema distan mucho más de la generalidad que las anteriores y se resuelve mediante tímidas aproximaciones fundamentalmente empíricas.

La morfología matemática constituye en la actualidad una potente herramienta de análisis de imágenes. El paradigma permite su adecuación a los problemas que plantea la generación de trayectorias cuando el modelo de imágenes se extiende a las tres dimensiones. Sin embargo, el estudio realizado no constata evidencia del uso de este marco formal para resolver problemas de este tipo por lo que será necesario realizar un esfuerzo en este sentido.

## Planteamiento del problema

El problema de la fabricación de objetos, mediante mecanizado en general o el del compensado de trayectorias en particular, presenta una componente común: la geometría de un objeto (pieza) es descrita mediante la geometría de otro objeto (herramienta).

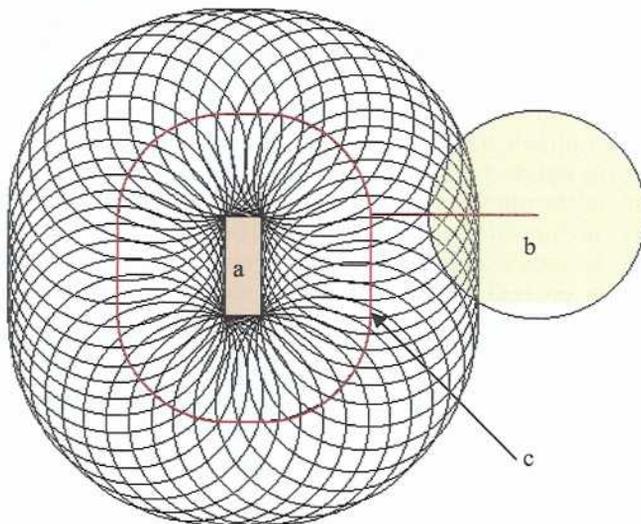


Figura 1.13: Proceso de fabricación de un objeto rectangular *a* mediante una herramienta circular *b* siguiendo la trayectoria *c*.

La resolución de este problema pasará por la utilización de un modelo matemático topológico que permita describir formas a partir de geometrías básicas. Además, la solución deberá especificar la manera de obtenerlas, es decir, la trayectoria que debe seguir la herramienta para poder obtener la pieza, ya que, en definitiva, es la trayectoria lo que finalmente permitirá a la máquina efectuar el proceso de mecanizado.

Tras la definición del marco topológico, en el que aparecerán operaciones concretas que utilicen y generen trayectorias, será necesario asociar un método de cálculo eficiente que permita la utilización del modelo sobre entornos industriales de fabricación y de diseño mediante técnicas de prototipado rápido.

## 78 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

El problema del mecanizado se extiende sobre numerosos procesos industriales, en general, sobre todo aquel que utilice una máquina con capacidad para seguir una trayectoria previamente descrita y que tenga como objetivo producir cambios sobre un sustrato material. Intuitivamente, el problema del mecanizado se asocia a procesos de fabricación en los que se esculpe automáticamente una pieza; los tornos industriales, tales como los que fabrican las hormas de calzado o los que se utilizan en el sector del mueble, son un claro ejemplo de ello. En ocasiones, la pieza a fabricar no constituye el objeto final de la producción, sino que es parte intermedia del proceso. Esto sucede en la mecanización de moldes, muy utilizada en sectores como el automóvil o el juguete. Otras veces, el proceso no busca generar una entidad completa (molde o pieza), sino que sirve para delimitar determinadas zonas del sustrato material, bien sea mediante la unión de las mismas (proceso de soldadura en cascos de barcos o chapas de automóviles), su separación (corte de patrones en textil) o la reparación de zonas dañadas (cirugía en zonas tumorosas).

La diversidad de instancias que admite este problema ha provocado la aparición de soluciones a medida, optimizadas en función de la sencillez de un problema concreto. En aquellos casos en los que el proceso es complicado por la naturaleza de los elementos que intervienen, las soluciones se muestran parciales y están sujetas a imprecisiones. Conviene plantearse la solución al problema del mecanizado en términos de modelo, en vez de solución a medida. El modelo permitirá abstraerse de toda aquella información que es propia de un determinado campo y centrarse en el mismo proceso de fabricación, estableciendo una visión del mundo centrada en la máquina herramienta como elemento transformador del mismo.

Este trabajo se acompañará de los experimentos que demuestren la bondad y viabilidad del modelo, aunque éste, por la dispersión que el problema provoca y el entorno donde se ha realizado, se centrará fundamentalmente en el mecanizado de objetos geométricos propios del sector calzado.

## Formalización del problema

Formalmente, se define el proceso de generación de trayectorias mediante un *Modelo Topológico de Fabricación (MTF)* que se expresa con la siguiente tupla:

$$MTF = \langle MTD, D_F \rangle$$

(Exp. 1.1)

donde:

$MTD$  Estructura que representa un sistema topológico con propiedades deterministas.

$D_F$  Dominio de fabricación. Representa la relación que presenta el  $MTD$  con el exterior (entorno de fabricación).

El proceso de fabricación con máquinas herramienta se basa en la transformación de una materia prima. En el Modelo Topológico de Fabricación todo objeto (pieza o herramienta) es considerado como un conjunto de puntos de un espacio euclídeo tridimensional de manera que dicha transformación se realizará dentro de un marco topológico. Dentro de este marco, se pretende aislar el proceso geométrico de corte de un material de la componente tecnológica, cuyas características se recogerán en el dominio de fabricación (ver figura 1.14).

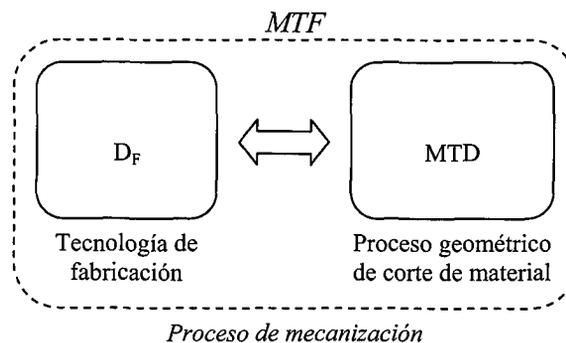


Figura 1.14: Elementos que componen el MTF.

## 80 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

El sistema topológico MTD, se inspira en el modelo que plantea la morfología matemática, especificando operaciones morfológicas heredadas que están restringidas en su obtención. Este sistema se descompone en los siguientes elementos:

$$MTD = \langle MM, OP_{TP} \rangle$$

(Exp. 1.2)

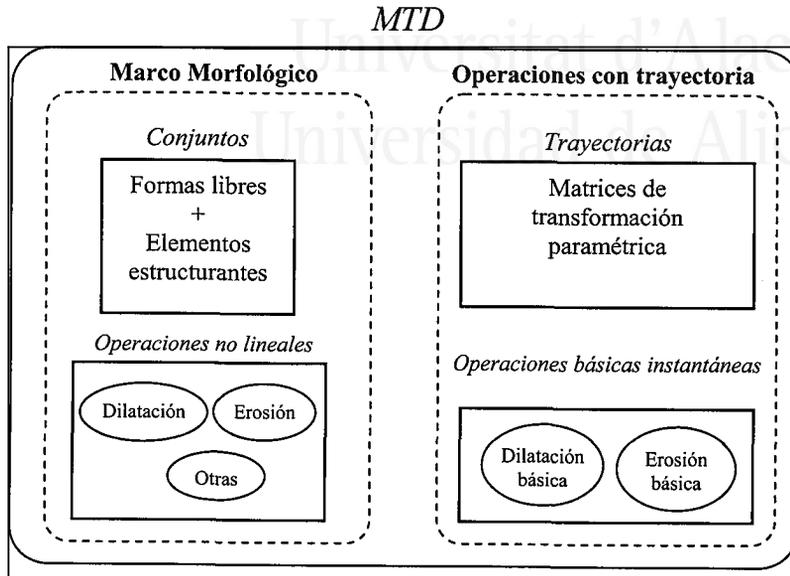
en el cual:

- MM* Representa el marco de la morfología matemática convencional. En él se definen objetos y operaciones que los transforman.
- OP<sub>TP</sub>* Representa una especialización de un subconjunto de operaciones morfológicas a la que se le asocia una trayectoria.

En el MTD, las piezas y herramientas serán representadas mediante conjuntos de puntos que podrán ser considerados probabilísticamente o bien como resultado de la aplicación de alguna función de variable real. Esta forma de representación permitirá que sean utilizadas por las operaciones que define la morfología matemática convencional.

Un aspecto de suma relevancia en el problema que aquí se trata es la utilización del movimiento como método para especificar trayectorias de herramienta. La naturaleza no determinista de la morfología matemática requiere incorporar de forma explícita el concepto de trayectoria. Por esta razón, se propone un nuevo modelo que, basado en operaciones morfológicas, las encadene a una secuencia y establezca un determinismo que será el encargado de dotarlas de un movimiento ordenado en el espacio.

A fin de asociar a una operación morfológica una trayectoria, se establece una especialización de las operaciones de la morfología matemática. Dicha especialización consiste en definir operadores instantáneos que, en vez de obtener un nuevo conjunto, tan sólo calculen un punto del conjunto que se obtendría tras la aplicación de las operaciones morfológicas convencionales. De esta manera, una secuencia de operaciones morfológicas instantáneas determinará un subconjunto o el conjunto completo de la operación morfológica asociada (ver figura 1.15).



**Figura 1.15:** El Modelo Topológico Determinista asocia a cada operación morfológica una operación equivalente restringida a un movimiento dado por una matriz de transformación paramétrica.

Para definir una secuencia ordenada de operaciones instantáneas se utiliza una matriz de transformación paramétrica. Estas matrices son las encargadas de dotar de movimiento a las operaciones instantáneas, ya que van transformando el conjunto origen de manera ordenada, a medida que un parámetro real va tomando valores consecutivos.

El dominio del sistema de fabricación representa la visión del mundo que posee una máquina con capacidad para transformarlo y se define mediante la siguiente estructura:

$$D_F = \langle OPF, HR, PZ, EST, TF \rangle$$

(Exp. 1.3)

## 82 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

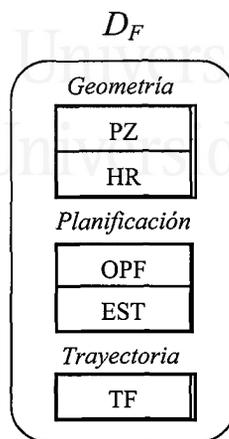
donde:

- OPF* Conjunto de operaciones posibles de fabricación con herramienta.
- HR* Conjunto de herramientas disponibles para realizar una operación.
- PZ* Conjunto de piezas sobre las que se realiza una operación.
- EST* Conjunto de estrategias de fabricación. Representa diversos recorridos que se pueden realizar mediante las herramientas sobre la pieza.
- TF* Conjunto de trayectorias de fabricación. Representa la posición espacial de los centros de herramienta que realizan una determinada operación sobre la pieza.

Bajo estas definiciones se encuentra un entorno de fabricación compuesto por tres grandes bloques (ver figura 1.16):

- La parte geométrica determina el proceso de transformación del material base y está formada por los elementos que se quieren fabricar (piezas) y aquellos que se utilizan para fabricarlos (herramientas).
- La planificación constituye el bloque que consiste en el conjunto de decisiones afectan a la forma de fabricar una pieza.
- El tercer y último bloque del dominio de fabricación estaría constituido por el conjunto de trayectorias que son finalmente ejecutadas por un sistema de mecanización.

Aunque se podría haber limitado el trabajo, por el fin ingenieril que se persigue, al mundo de las 2 ó 3 dimensiones, se ha optado por proponer un modelo genérico donde la dimensión es un parámetro más. La razón es de tipo actitudinal, relacionada con planteamientos de sistematización metodológica.



**Figura 1.16:** Elementos que integran el dominio de fabricación.

En este modelo sólo se considerarán objetos sólidos, es decir, que no contengan huecos en su interior. Esta restricción se hace patente principalmente en mecanizados sobre el espacio bidimensional (p. ej., corte de patrones donde existan agujeros o islas) en el que es posible el acceso a zonas internas debido a que el proceso de fabricación es tridimensional. Para objetos de tres dimensiones esta restricción se limita a un reducido grupo de procesos de fabricación como la estereolitografía<sup>1</sup>.

### Organización de tareas

En primer lugar, se definirán los objetos sobre los que se realizarán las operaciones en el MTD. A continuación, se definirá un conjunto de transformaciones paramétricas que permitan la especificación de un movimiento en el espacio euclídeo. El siguiente paso tendrá como objetivo definir una especialización de las operaciones morfológicas convencionales que permita incluir el concepto de trayectoria. Partiendo de una operación elemental, se definirán nuevas operaciones morfológicas (como la

<sup>1</sup> El proceso de fabricación por estereolitografía permite crear objetos tridimensionales que contengan huecos en su interior, ya que se basa en la solidificación por capas de un polímero en estado líquido; en realidad, se trata de un proceso secuencial de fabricación en dos dimensiones.

dilatación y la erosión) a las que se les asocia un recorrido espacial, estableciéndose así el grupo de las operaciones morfológicas con trayectoria.

Una vez definido el modelo topológico MTD, es necesario asociarle un modelo computacional eficiente que haga útil la aplicación del mismo a problemas concretos. La existencia del modelo permitirá verificar la bondad del MTD mediante experimentos. Para ello, se realizarán pruebas sobre imágenes bidimensionales discretas y se comparará con los resultados obtenidos con las operaciones clásicas de la morfología. En este punto se planteará el modelo como alternativa computacional para realizar operaciones con imágenes. Esta alternativa será extendida a las imágenes tridimensionales y se comparará con las técnicas que utilizan la morfología convencional. Para evaluar la eficiencia del modelo, se analizará el coste computacional de las operaciones y se pondrán refinamientos que mejoren dicho coste.

La figura 1.13, que representa el proceso de mecanización mediante una herramienta circular de un rectángulo, puede ser interpretada, a efectos de la trayectoria utilizada, como el resultado de una operación morfológica (en este caso una dilatación). En dicha operación interviene tanto la geometría de la pieza como objeto, y la de la herramienta como elemento estructurante. En general, el proceso de mecanizado de piezas mediante herramientas puede interpretarse, en términos de la morfología matemática, como una operación morfológica. La componente determinista de resolución del problema añade un elemento muy importante para la fabricación por mecanización: la definición de la trayectoria de la herramienta.

El modelo MTD permite la realización de operaciones morfológicas con trayectoria, por lo que su aplicación al problema del mecanizado de piezas es inmediata. Este hecho permitirá la definición del Modelo Topológico de Fabricación (MTF), una especialización del MTD que tiene en cuenta las características propias del proceso de mecanización. En el MTF se instancian los conceptos morfológicos del MTD y se aplican a los problemas que plantea el proceso de mecanizado (ver figura 1.17). En este modelo se pretende que cada operación con trayectoria resuelva un problema concreto.

Una vez hecha patente la utilidad del modelo teórico para su aplicación a problemas asociados a la fabricación, será necesario demostrar su utilidad práctica. Para ello, se diseñará un plan de

experimentos que irá encaminado a probar tanto la calidad del modelo computacional como la eficiencia en su implementación. Dicho plan abordará los principales problemas que se presentan en los procesos más usuales de la fabricación.

### MTF de mecanizado

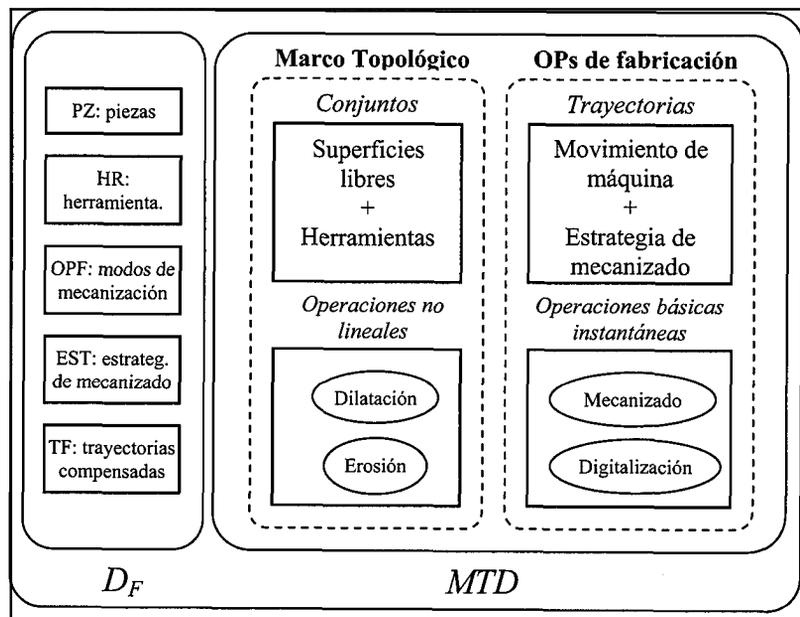


Figura 1.17. Instanciación del MTF como modelo para la generación de trayectorias.

Los experimentos a realizar serán de dos tipos: obtención de trayectorias compensadas de mecanizado y obtención de superficies de modelos digitalizados mediante técnicas de captación mecánica. El contexto en el que se ha realizado esta investigación conducirá a realizar pruebas de mecanizado relacionadas con la fabricación de calzado. De entre ellas, la obtención de trayectorias para tacones sobre máquinas estándar de fabricación (centros de mecanizado de 3 ejes) y trayectorias para máquinas específicas o de *retrofitting*, como es el caso de los tornos copiadore de hormas adaptados al control numérico. Una vez obtenidas estas trayectorias, se comprobará su bondad mediante la fabricación real de las piezas y la comprobación de

## 86 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

sus principales parámetros geométricos que deberán coincidir, dentro de los límites establecidos de precisión, con las medidas del modelo original. De manera similar se trabajará con las pruebas de digitalización. Se utilizarán como punto de partida, trayectorias externas generadas por digitalizadores mecánicos. Sobre éstas, se obtendrá el modelo digitalizado, cuyas medidas geométricas serán comparadas de manera experimental con las del modelo original.

La definición del modelo presentado debe llevarse a cabo cumpliendo unos ciertos requerimientos de eficiencia y robustez. Los distintos niveles de abstracción que incluye el modelo recomendarán el uso de distintas arquitecturas que puedan resolver el problema con la mayor eficiencia en cada nivel de definición. Para finalizar, y aprovechando los refinamientos descritos con anterioridad sobre el modelo computacional, se realizarán pruebas similares utilizando arquitecturas de computadores específicas para el mecanizado que explotan el paralelismo temporal y espacial del MTF. Los resultados se compararán con otros métodos conocidos de obtención de trayectorias.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo Segundo

### Modelo Topológico Determinista

Para modelar el proceso de fabricación por mecanización, se hace necesario disponer de un marco conceptual que permita la definición tanto de piezas como de herramientas y que disponga de operaciones que efectúen el proceso de corte que realiza la herramienta cuando se desplaza sobre un sustrato base siguiendo un determinado recorrido.

El modelo que se presenta en este capítulo toma como punto de partida las definiciones y operaciones propias que establece el paradigma de la Morfología Matemática [Matheron, 1974] ya que muestra propiedades que pueden asimilarse al proceso de mecanizado. En concreto, permite la especificación de piezas y herramientas mediante el uso de conjuntos de puntos y también cuenta con operaciones que describen procesos geométricos de corte y reconstrucción como la erosión y la dilatación respectivamente.

Se está interesado en que los objetos se describan como superficies y se propongan criterios de barrido, porque ése es el modelo conceptual intuitivo del mecanizado y con ese propósito se modelará tanto piezas como herramientas.

La operatoria morfológica no está sujeta a ordenaciones temporales ya que sus primitivas actúan sobre conjuntos y producen como resultado nuevos conjuntos, sin que se establezca un orden de recorrido sobre sus elementos. Estas ordenaciones son necesarias cuando la operatoria se traslada a procesos físicos como el mecanizado, debido a que la

## 88 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

secuenciación permite la definición de trayectoria. Por este motivo, se establece un refinamiento que permitirá asociar un orden a cada primitiva morfológica. La secuenciación de las primitivas añadirá al modelo una componente determinista que será aprovechada para describir el comportamiento de las herramientas en movimiento.

El Modelo Topológico Determinista nace como consecuencia de la adecuación del paradigma morfológico a la descripción de procesos de mecanización pero su uso no se restringe a este campo.

### Estructura general

El sistema morfológico MTD se apoya en el modelo que plantea la morfología matemática, especificando operaciones morfológicas, heredadas de ésta, que están condicionadas por las imposiciones deterministas de optimización de recorridos. Este sistema se puede definir mediante la siguiente tupla:

$$MTD = \langle MM, OP_{TP} \rangle$$

(Exp. 2.1)

en la cual:

- MM* Representa el marco de la morfología matemática convencional. En él se definen objetos y operaciones que los transforman.
- OP<sub>TP</sub>* Representa una especialización de un subconjunto de operaciones morfológicas al que se le asocia una trayectoria.

**Tabla 2.1:** Descripción de los componentes del Modelo Topológico Determinista.

En la figura 2.1 pueden observarse los principales elementos que componen el modelo propuesto.

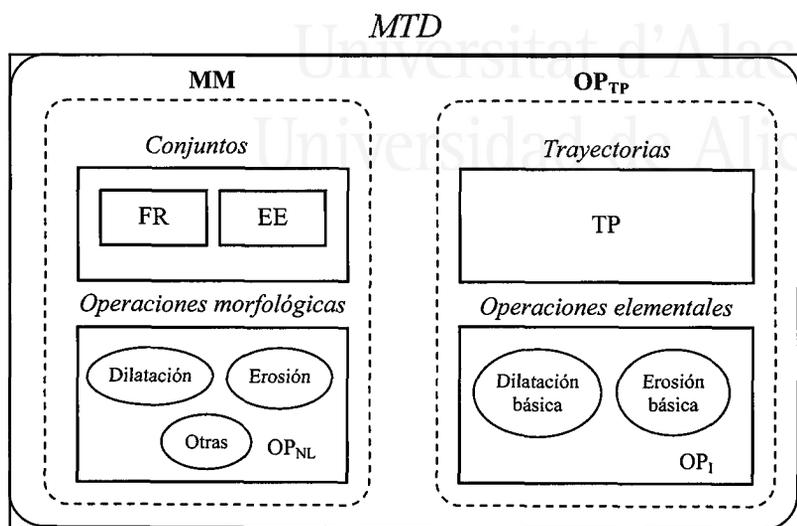


Figura 2.1: Componentes principales del Modelo Topológico Determinista.

## Marco Morfológico

De manera análoga a la morfología matemática, se define un retículo completo que estará formado por los subconjuntos de  $E$ , es decir, las partes de  $E$  ( $P(E)$ ), con la relación de orden parcial  $\subseteq$ , siendo  $E$  el espacio euclídeo  $n$ -dimensional,  $E = \mathbb{R}^n$ , el mismo que se emplea para la representación de imágenes en el dominio continuo, si bien, en este caso se considera el homomorfismo  $(E, \{0, 1\}^n)$  para imágenes binarias o  $(E, N^n)$  para imágenes en tonalidades de gris.

El marco morfológico del Modelo Topológico Determinista se modela con la tupla que aparece en la expresión (Exp. 2.2).

$$MM = \langle EE, FR, OP_{NL} \rangle$$

(Exp. 2.2)

## 90 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

en la que:

- EE* Representa la familia de elementos estructurantes mediante los cuales se realizan las operaciones morfológicas.
- FR* Representa el conjunto de objetos frontera sobre los que se realiza una operación morfológica.
- OP<sub>NL</sub>* Conjunto de operaciones morfológicas que modifican el conjunto de objetos frontera mediante el uso de los elementos estructurantes.

**Tabla 2.2:** Descripción de los componentes del Marco Morfológico

Las definiciones anteriores se toman del paradigma de la morfología matemática clásica<sup>1</sup>. Sin embargo, en el MTD hay que realizar algunas matizaciones respecto a la naturaleza de los conjuntos que forman el modelo topológico.

Los elementos a considerar en  $E$  serán, sencillamente, puntos geométricos  $p \in R^n$ , de coordenadas  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Los conjuntos de  $P(E)$  podrán tener, de esta manera, naturaleza no determinista, considerándolos simplemente como colección de puntos, o bien determinista, cuando puedan ser obtenidos mediante una función geométrica parametrizada del tipo que se expresa en (Exp. 2.3).

$$\begin{aligned} f_i: R &\rightarrow R \\ f(R^n): R^n &\rightarrow R^n \\ f(r_1, r_2, \dots, r_n) &= (f_1(r_1), f_2(r_2), \dots, f_n(r_n)) \end{aligned}$$

(Exp. 2.3)

La definición que aparece en la ecuación (Exp. 2.4) se toma directamente del paradigma morfológico y determina un conjunto de puntos en torno a un centro  $x$ .

$$B_x = \{b + x : b \in B\}$$

(Exp. 2.4)

<sup>1</sup> Las definiciones convencionales de la morfología matemática pueden encontrarse en [Serra, 1982].

Sobre el modelo definido se tratarán dos tipos de conjuntos, atendiendo a su función topológica.

Por una parte, se establecerá el tipo conjunto estructurante como aquel que conforma la topología de un objeto.

La familia de elementos estructurantes  $EE$ , está determinada por aquellos objetos que tienen como centro el origen de coordenadas del espacio euclídeo, es decir:

$$EE = \{B_x : x = o\}$$

(Exp. 2.5)

Por otro lado, se considerará la familia de objetos frontera  $FR$ . Estos objetos son los sujetos sobre los que se realizan las operaciones morfológicas.

Un objeto  $X$  de centro  $c$  también estará constituido por un conjunto de puntos que se definen como:

$$X_c = \{o + c : o \in X\}$$

(Exp. 2.6)

En este modelo, se considerarán objetos y elementos estructurantes cerrados y compactos, es decir, no se considerarán posibles huecos o islas en los mismos. Como consecuencia de la restricción anterior, la información topológica de estos objetos se encuentra en su contorno. En lo sucesivo se considerará la frontera (o contorno), que caracteriza el objeto, en vez de la totalidad del mismo lo que, según este modelo, no supondrá pérdida de generalidad.

Se define la función  $Fr$  que relaciona un conjunto con su frontera, de manera que se obtienen todos los puntos del objeto que pertenecen a su contorno (en [Nikopoulos, 1997] ya se establece el uso de las superficies para representar conjuntos de puntos para la morfología matemática).

$$Fr(X) : X \rightarrow X$$

(Exp. 2.7)

En el Modelo Topológico Determinista las funciones de frontera establecerán una relación sobre los elementos del conjunto que

## 92 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

se considera. Por ejemplo, el contorno bidimensional de una figura podrá ser representado mediante la función de la curva que constituye su contorno, siendo su dominio el que se expresa en (Exp. 2.3).

De esta manera queda definida la familia de conjuntos frontera FR del espacio euclídeo como el conjunto de todas las fronteras de los conjuntos que pertenecen a dicho espacio.

$$FR = \{Fr(X), X \in P(R^n)\}$$

(Exp. 2.8)

La función que permite recuperar los puntos de un conjunto del cual se ha extraído su contorno se denominará  $In(C)$  y estará formada por el conjunto de todos los puntos situados en el interior del contorno:

$$In(C) = \{p \in X, C = Fr(X)\}$$

(Exp. 2.9)

La familia de operaciones que actúan sobre los conjuntos es muy extensa dentro de la morfología matemática. En el MTD, todas ellas se han agrupado bajo el nombre de operaciones no lineales ( $OP_{NL}$ ). En este trabajo se hará especial hincapié en dos de ellas: la erosión y la dilatación.

### Operaciones con trayectoria

Se definirá una extensión de algunas operaciones morfológicas comunes, tales como la erosión y la dilatación, a la que se añade el orden de obtención de los puntos del conjunto final. En concreto, las dos operaciones mencionadas constituyen el fundamento del resto de las operaciones de filtrado en la morfología matemática, por lo que la extensión de su definición cubrirá la totalidad de las operaciones morfológicas en el Modelo Topológico Determinista.

En el MTD, el conjunto de operaciones con trayectoria se define según la expresión (Exp. 2.10).

$$OP_{TP} = \langle TP, OP_I \rangle$$

(Exp. 2.10)

donde:

$TP$  Representa un conjunto de transformaciones homogéneas paramétricas.

$OP_I$  Conjunto de operaciones morfológicas elementales instantáneas.

**Tabla 2.3:** Descripción de los componentes del conjunto de operaciones con trayectoria.

El planteamiento consiste en descomponer cada operación morfológica en una sucesión de pasos u operaciones elementales. La nueva operación en el Modelo Topológico Determinista estará formada por la aplicación sucesiva de estas operaciones a las cuales se les asociará una transformación distinta del objeto frontera dependiente de valores consecutivos de una variable real, lo que representa una secuenciación ordenada de posiciones del objeto en el espacio.

Las transformaciones van a establecer una secuenciación en la realización o aplicación de primitivas morfológicas.

### Transformaciones homogéneas paramétricas

En este apartado se establece un mecanismo para definir recorridos sobre los objetos en el Modelo Topológico Determinista. A partir de los fundamentos de la morfología matemática, se establece una extensión basada en una familia de funciones de variable real utilizando un conjunto de transformaciones homogéneas. En el modelo se utilizarán únicamente matrices de transformación resultantes de composiciones de matrices que realizan giros y traslaciones.

## 94 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

$$T^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)n} & 1 \end{bmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

(Exp. 2.11)

Sea  $T^n$  el conjunto de matrices de transformación homogénea de dimensión  $n+1$ . Tomando la forma de  $T^n$  se define la función de variable real  $\Gamma_n(r)$  que representa una parametrización sobre los elementos de  $T^n$ .

$$\Gamma_n : \mathbb{R} \rightarrow T^n$$

$$\Gamma_n(r) \equiv \begin{bmatrix} f_{11}(r) & f_{12}(r) & \cdots & f_{1n}(r) & 0 \\ f_{21}(r) & f_{22}(r) & \cdots & f_{2n}(r) & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n1}(r) & f_{n2}(r) & \cdots & f_{nn}(r) & 0 \\ f_{(n+1)1}(r) & f_{(n+1)2}(r) & \cdots & f_{(n+1)n}(r) & 1 \end{bmatrix}$$

(Exp. 2.12)

Un punto  $p$  de coordenadas  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  del espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  será extendido al espacio vectorial  $\mathbb{R}^{n+1}$  utilizando como coordenadas  $(p_1, p_2, \dots, p_n, 1)$ . Multiplicando ese punto  $p$  por una matriz de transformación de  $T^n$ , se obtendrá un nuevo punto  $p'$  sobre el espacio vectorial  $\mathbb{R}^{n+1}$  con coordenadas  $(p'_1, p'_2, \dots, p'_n, 1)$  al que se hará corresponder un punto  $p''=(p''_1, p''_2, \dots, p''_n)$  del espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ .

$$p' = p \cdot \Gamma_n(r) = \begin{pmatrix} p_1 f_{11}(r) + p_2 f_{21}(r) + \dots + p_n f_{n1}(r) + f_{(n+1)1}(r) \\ p_1 f_{12}(r) + p_2 f_{22}(r) + \dots + p_n f_{n2}(r) + f_{(n+1)2}(r) \\ \vdots \\ p_1 f_{1n}(r) + p_2 f_{2n}(r) + \dots + p_n f_{nn}(r) + f_{(n+1)n}(r) \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

(Exp. 2.13)

Se extiende la función de multiplicación vector-matriz a los elementos de un conjunto  $O$ . Para ello se define la función  $\bullet$  que

obtiene el conjunto de las transformaciones de los elementos del conjunto original.

$$\bullet: FR \times T^n \rightarrow FR$$

$$O' = O \bullet \Gamma_n(r) = \{p \cdot \Gamma_n(r), p \in O, r \in [0 \dots 1]\}$$

(Exp. 2.14)

Debido a que dichas transformaciones sólo efectúan rotaciones y traslaciones, el conjunto resultante no sufrirá transformaciones de escalado ni deformaciones. Como resultado, la operación mantiene la forma del conjunto aunque cambia la posición del mismo en el espacio de representación. Los valores paramétricos  $r$  se encuentran normalizados, por lo que el conjunto de posiciones posible que define una transformación paramétrica homogénea se encuentra ordenada en función de dicho parámetro con posición inicial  $\Gamma_n(0)$  y final  $\Gamma_n(1)$ .

La figura 2.2 muestra la relación del conjunto de transformaciones  $TP$  dentro del marco general del Modelo Topológico Determinista. Las transformaciones paramétricas  $\Gamma^n$  se utilizan para la conversión previa de los elementos frontera  $FR$  mediante el uso de la función  $\bullet$ . El conjunto resultante se utilizará para realizar operaciones morfológicas deterministas a través de la aplicación reiterada de operaciones elementales.

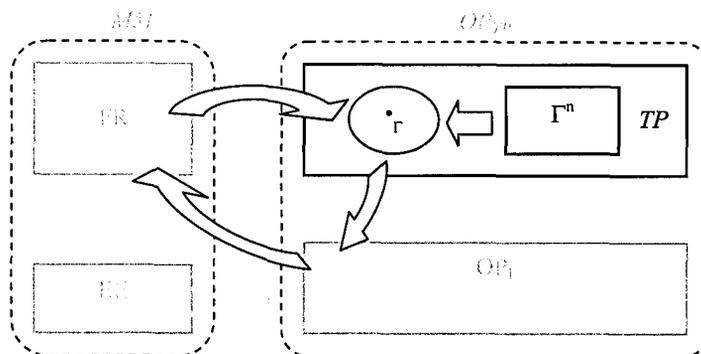


Figura 2.2: Un objeto frontera es transformado sucesivamente al aplicarse ordenadamente una secuencia de operaciones elementales.

### Operación básica instantánea

En la morfología matemática convencional las operaciones de transformación de los objetos se definen como una sucesión de operaciones que actúan sobre los elementos que los componen [Serra, 1982]. Sobre estas operaciones elementales o básicas no se establece orden de aplicación alguno. A continuación, se define una operación básica morfológica que se deriva de las operaciones elementales que realizan la erosión y dilatación morfológicas, pero que se diferencia de éstas en que incluye un parámetro que indica su posición dentro del conjunto completo de operaciones elementales. La operación se ha denominado *instantánea* por el hecho de estar vinculada a un valor concreto del espacio paramétrico en el que se encuentran definidas las transformaciones de  $\Gamma_n$  y tan sólo obtiene un punto del mismo como resultado.

La operación básica instantánea tiene el siguiente dominio:

$$OP_{\Gamma(k)} : T^n \times EE \times FR \times R^n \rightarrow R^n$$

(Exp. 2.15)

Donde  $\Gamma(k)$  es una transformación homogénea obtenida mediante la aplicación del valor paramétrico normalizado  $k$  sobre la función  $\Gamma_n$ .  $EE$  representa la familia de elementos estructurantes del espacio  $R^n$  con centro en el origen de coordenadas;  $FR$ , la familia de objetos frontera; y  $R^n$ , una familia de vectores de dimensión  $n$ .

En términos descriptivos, esta operación obtiene el centro del elemento estructurante cuando este toca, siguiendo la dirección que marca un vector  $\vec{v}$ , a un objeto frontera que ha sido previamente transformado.

Formalmente:

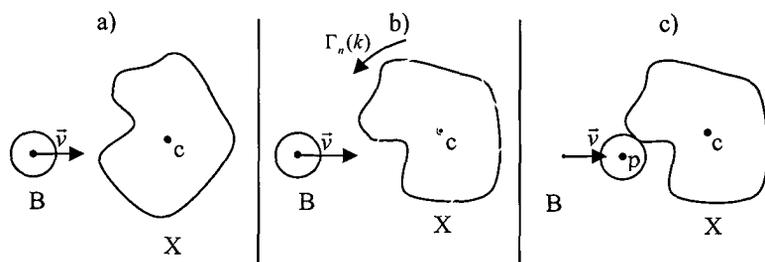
$$X \text{ OP}_{\Gamma_n(k)} B = p \in R^n : p = \text{dist}_{\vec{v}}(B, X \bullet \Gamma_n(k)) \cdot \vec{v} \wedge B_p \cap X \neq \emptyset$$

$$B \in EE, X \in FR, \Gamma_n(k) \in T^n, \vec{v} \in R^n$$

(Exp. 2.16)

donde  $dist_v$  es una función que será definida posteriormente para determinar la distancia mínima entre el conjunto  $X$  y el  $B$  en la dirección que determina un vector  $\vec{v}$ . Por este motivo, la traslación  $B_p$  llevará al elemento estructurante a tocar el objeto  $X$ , de ahí que  $B_p \cap X \neq \emptyset$ .

Gráficamente:



**Figura 2.3:** Descripción geométrica de la operación básica instantánea. a) Situación inicial. b) Transformación del objeto  $X$ . c) Aplicación de la función distancia.

A modo de ejemplo, la figura 2.3 muestra la aplicación de la operación básica instantánea sobre un objeto  $X$  como una sucesión de tres fases:

- a) Representa la situación inicial de los elementos implicados. El elemento estructurante  $B$  se encuentra centrado en el origen de coordenadas y el objeto  $X$ , con centro situado en  $c$ .
- b) En esta situación se aplica una transformación homogénea sobre los elementos de  $X$ . En esta ocasión dicha transformación se corresponde con un giro alrededor del punto  $c$ .
- c) Una vez transformado el objeto se calcula la distancia que existe entre éste y el elemento estructurante en la dirección indicada por el vector  $\vec{v}$ . El resultado de la operación viene representado por el punto  $p$ .

**Definición de la función  $dist_{\vec{v}}$** 

Como se ha indicado anteriormente, esta función expresa la distancia que existe entre dos conjuntos del espacio euclídeo en la dirección que determina un vector dado.

En términos formales:

$$\begin{aligned} dist_{\vec{v}} : EE \times FR &\rightarrow R \\ dist_{\vec{v}}(B, X) &= \min(d_{\vec{v}}(b, X)), \forall b \in B \end{aligned}$$

(Exp. 2.17)

Donde la función  $d_{\vec{v}}$  determina la distancia existente entre un punto cualquiera  $p$  del espacio y un determinado objeto  $X$  en la dirección que indica el vector  $\vec{v}$ . Geométricamente viene definida por la distancia euclídea existente entre  $p$  y el punto más cercano obtenido como la intersección de la línea que define el vector y que pasa por dicho punto y el objeto  $X$ . Esta función se puede expresar de la siguiente manera:

$$d_{\vec{v}}(p, X) = \begin{cases} \overline{pp'}, & Int(r_{p\vec{v}}, X) \neq \emptyset, \forall q \neq p' \in Int(r_{\vec{v}}, X), \overline{pp'} \leq \overline{pq} \\ +\infty, & Int(r_{p\vec{v}}, X) = \emptyset \end{cases}$$

(Exp. 2.18)

Donde  $Int(r_{p\vec{v}}, X)$  representa el conjunto de los puntos de intersección entre la recta que pasa por  $p$  con dirección  $\vec{v}$  (representada como  $r_{p\vec{v}}$ ) y el conjunto  $X$ . La figura 2.4 muestra un ejemplo de aplicación de estas funciones.

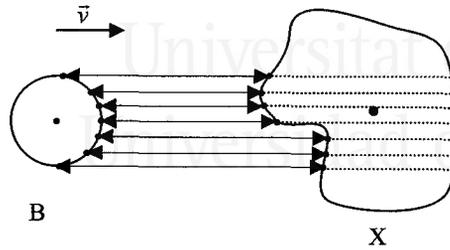


Figura 2.4: Cálculo de la función  $dist_v$  entre los objetos B y X. En trazo negro aparece el cálculo de sucesivas  $d_v$ , en trazo rojo, el resultado de la función distancia.

Se define la familia  $DIS_v$  como el conjunto de todas las posibles funciones de distancia mínima:

$$DIS_v = \{dist_v(B, X), \forall B \in EE, \forall X \in FR\}$$

(Exp. 2.19)

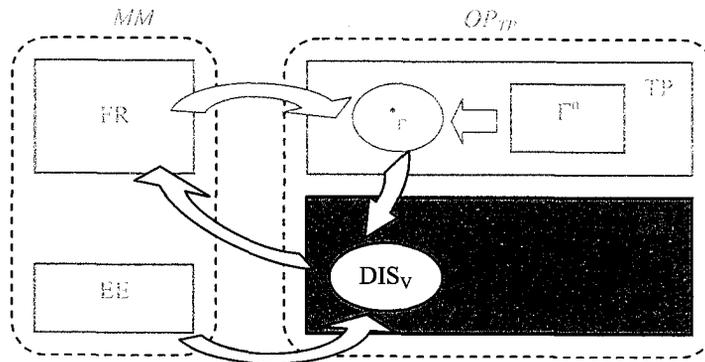


Figura 2.5: La aplicación de la función de distancia mínima sobre una transformación de un objeto frontera y un elemento estructurante constituye la base de la operación básica instantánea en el MTD.

En la figura 2.5 se muestra cómo  $DIS_v$  constituye el elemento fundamental para la realización de la operación básica

## 100 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

instantánea. La aplicación reiterada de ésta sobre el conjunto de todos los valores paramétricos posibles dará lugar a la operación morfológica completa. Dicha operación está asociada a una relación de orden establecida por la transformación  $\Gamma$ , obteniéndose como resultado un nuevo conjunto frontera de  $FR$ . En el apartado siguiente se detallará este tipo de operaciones completas.

### DILATACIÓN con trayectoria

La operación dilatación en morfología matemática viene definida por la expresión:

$$X \oplus B = \{x \in R^n, B_x \cap X \neq \emptyset\}$$

(Exp. 2.20)

En términos descriptivos, esta operación puede definirse como el lugar de las posiciones del centro del elemento estructurante  $B$  cuando toca al conjunto  $X$  [Serra, 1982]. En el contexto de este modelo, en el que los objetos se representan mediante su frontera, es interesante definir la frontera de la operación dilatación como aquellos lugares que ocupa el centro de un elemento estructurante que toca exclusivamente la frontera de un conjunto  $X$ , es decir, sin invadir su interior (Exp. 2.21).

$$Fr(X \oplus B) = \{x \in R^n, B_x \cap X \neq \emptyset \wedge B_x \cap In(X) = \emptyset\}$$

(Exp. 2.21)

Es precisamente la definición anterior la que permitirá la utilización de la operación básica instantánea para poder realizar la operación dilatación. El resultado es un conjunto de puntos, cada uno de ellos, obtenido mediante la aplicación repetida de operaciones básicas instantáneas de parámetro real variable.

Se define la operación *dilatación instantánea*  $\oplus_{\Gamma(k)}$  como un paso de la dilatación morfológica:

$$X \oplus_{\Gamma(k)} B = X \cap OP_{\Gamma(k)} B = \{p \in R^n : B_p \cap X \neq \emptyset \wedge B_p \cap In(X) = \emptyset\}$$

(Exp. 2.22)

Tomando como punto de partida la operación básica instantánea (Exp. 2.16), se define una nueva operación condicionada a que el elemento estructurante no interseque el interior del conjunto  $X$ . Dicha condición es necesaria ya que el cálculo de la función distancia asociada debe determinarse de manera que el elemento estructurante se sitúe en el borde exterior del objeto  $X$ .

Se define la *dilatación con trayectoria* como el conjunto de puntos obtenidos por aplicación repetida de la dilatación instantánea  $\oplus_{\Gamma(k)}$  para el dominio real  $[0..1]$ . El recorrido debe asegurar que se obtiene el lugar geométrico de todos los centros del elemento estructurante que tocan desde el exterior a  $X$ . La operación se define como la unión de todas las posibles operaciones instantáneas en (Exp. 2.23).

$$X \oplus_{\Gamma} B = \bigcup_{k \in [0..1]} (X \oplus_{\Gamma(k)} B) = \{y \in R^n : B_y \cap X \neq \emptyset \wedge B_y \cap In(X) = \emptyset\}$$

(Exp. 2.23)

Comparando la expresión de la dilatación con trayectoria (Exp. 2.23) con la frontera de la dilatación morfológica (Exp. 2.21) resulta trivial comprobar la igualdad de ambos conjuntos. Si la variable real  $k$  recorre todo el intervalo, se obtendrá como resultado la frontera de la dilatación completa del objeto, ya que se habrán obtenido todos los centros del elemento estructurante cuando este toca al objeto, haciendo que la frontera de la definición morfológica y determinista coincidan. Siendo la frontera de la dilatación un subconjunto de la misma se obtiene la relación que aparece en la expresión (Exp. 2.24).

$$X \oplus_{\Gamma} B = Fr(X \oplus B) \subseteq X \oplus B$$

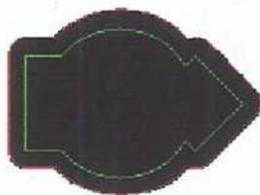
(Exp. 2.24)

La dilatación con trayectoria permite controlar el orden de obtención de puntos del conjunto final. Definida la relación de orden parcial  $\leq$  en  $R$ , una sucesión ordenada de valores paramétricos de  $k$  sobre el intervalo  $[0..1]$  provocará, así mismo, la obtención ordenada de centros del elemento estructurante según el movimiento definido por la transformación homogénea  $\Gamma$ .

## 102 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

Otra posibilidad que permite el modelo, y que no se contempla en la morfología matemática clásica, es el poder obtener subconjuntos ordenados de las primitivas siempre que se establezca un recorrido incompleto del intervalo (primitiva local), o bien una discretización de la variable real en su recorrido (primitiva discreta). En este caso resulta trivial por (Exp. 2.23) y (Exp. 2.21) llegar a la conclusión de que una dilatación incompleta es un subconjunto de la dilatación morfológica.

En la figura 2.6 se muestra un ejemplo de dilatación con trayectoria en dos dimensiones en la que se ha tomado como elemento estructurante un círculo y se compara con la dilatación morfológica convencional.



**Figura 2.6:** Comparativa de dilatación morfológica (en negro) y dilatación con trayectoria (trazo rojo) del objeto cuyo contorno se muestra en verde.

### EROSIÓN con trayectoria

La operación erosión en morfología matemática se puede definir según la ecuación (Exp. 2.25).

$$X \ominus B = \{y \in R^n, B_y \subseteq In(X)\}$$

(Exp. 2.25)

Una interpretación descriptiva de la operación lleva a definirla como el lugar de las posiciones del centro del elemento estructurante  $B$  cuando está incluido en  $X$  [Serra, 1982]. Para objetos que no contienen islas, el contorno de la erosión viene definido por los centros del elemento estructurante cuando éste toca el borde interior del objeto.

$$Fr(X \odot B) = \{y \in R^n : B_y \subseteq In(X) \wedge B_y \cap X \neq \emptyset\}$$

(Exp. 2.26)

Atendiendo a la definición anterior, es posible la utilización de la operación básica instantánea para poder realizar la operación erosión. Cada punto del conjunto final será obtenido mediante la aplicación repetida de operaciones básicas instantáneas de parámetro real variable.

Análogamente a como se realizó con la dilatación, se define la *erosión instantánea*  $\odot_{\Gamma(k)}$  como un paso de la erosión morfológica:

$$X \odot_{\Gamma(k)} B = X \cap OP_{\Gamma(k)} B = \{p \in R^n : B_p \cap X \neq \emptyset \wedge B_p \subseteq In(X)\}$$

(Exp. 2.27)

Partiendo de la operación básica instantánea se ha creado una nueva operación que añade la condición de que el elemento estructurante esté incluido en el conjunto original. Dicha condición es necesaria ya que el cálculo de la función distancia asociada debe determinarse de manera que el elemento estructurante se sitúe en el borde interior del objeto  $X$ . Si no es posible situar al elemento estructurante dentro del conjunto  $X$  (por ejemplo, cuando el tamaño de  $X$  es menor que el de  $B$ ), entonces, el paso de erosión no puede aplicarse, con lo que no se obtiene punto alguno.

Se define la *erosión con trayectoria* como el conjunto de puntos obtenidos por aplicación repetida de la erosión instantánea  $\odot_{\Gamma(k)}$  para el dominio real  $[0..1]$ .

$$X \odot_{\Gamma} B = \bigcup_{k \in [0..1]} (X \odot_{\Gamma(k)} B) = \{y \in R^n : B_y \cap X \neq \emptyset \wedge B_y \subseteq In(X)\}$$

(Exp. 2.28)

La transformación homogénea paramétrica  $\Gamma$  debe asegurar un recorrido interior a través del objeto  $X$  en el espacio normalizado  $[0..1]$ . Si la variable real  $k$  recorre todo el intervalo, se obtendrá como resultado la frontera de la erosión completa del objeto, ya que se habrán obtenido todos los centros del elemento

## 104 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

estructurante cuando este toca al objeto. Análogamente al caso de la dilatación por (Exp. 2.28) y (Exp. 2.26) se deduce que la frontera de la erosión morfológica y la erosión con trayectoria coincidirán. En general se cumple:

$$X \odot_{\Gamma} B = Fr(X \odot B) \subseteq X \odot B$$

(Exp. 2.29)

En la figura 2.7 se muestra un ejemplo bidimensional de erosión por trayectoria y erosión morfológica.

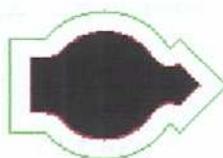


Figura 2.7: Comparativa de erosión morfológica (en negro) y erosión con trayectoria (trazo rojo) del objeto cuyo contorno se muestra en verde.

Al igual que sucedía con la operación dilatación, la erosión con trayectoria permite controlar el orden de obtención de puntos del conjunto final. Definida la relación de orden parcial  $\leq$  en  $R$ , una sucesión ordenada de valores paramétricos de  $k$  sobre el intervalo  $[0..1]$  provocará así mismo una obtención ordenada de centros del elemento estructurante según el movimiento definido por la transformación homogénea  $\Gamma$ .

Resulta sencillo deducir por (Exp. 2.28) que una erosión parcial (cuando no se recorre completamente el espacio paramétrico de  $k$ ) constituirá un subconjunto de la erosión completa.

### Características de las operaciones con trayectoria

Dado que el resultado de las operaciones con trayectoria coincide con el contorno de las primitivas morfológicas cuando la transformación homogénea determina un recorrido completo sobre el contorno de los objetos sobre los que se aplica, y puesto que son consecuencia del resultado final de la operación y no de la forma de obtención, las propiedades que en morfología matemática se asocian a estas operaciones siguen

manteniéndose. En concreto, las propiedades de dualidad, extensividad, conmutatividad, crecimiento y separabilidad [Serra, 1992b] siguen manteniéndose en las primitivas con trayectoria siempre y cuando las características de inclusión y pertenencia a conjuntos se realicen sobre el interior de los contornos descritos por la erosión y dilatación con trayectoria.

Además de las propiedades heredadas de la morfología, las operaciones con trayectoria presentan características que permiten realizar operaciones que la morfología convencional no contempla. La descomposición en operaciones básicas y la asociación de cada una de ellas a una transformación homogénea diferente permite que el elemento estructurante se sitúe, respecto al objeto, en distintas posiciones y orientaciones. En morfología matemática el elemento estructurante no varía su orientación a lo largo de toda la operación; de hecho, la operación se considera como una traslación del mismo sobre el objeto original. En el Modelo Topológico Determinista este comportamiento se corresponde con un caso particular de transformación en donde el elemento estructurante no varía su orientación inicial durante toda la operación. Si no se sigue esta restricción, es posible realizar operaciones de dilatación o erosión en las cuales los elementos estructurantes presenten distintas posiciones y orientaciones ante los objetos sobre los que se aplica la operación morfológica.

En la figura 2.8 se muestra un ejemplo de aplicación de una operación morfológica en el Modelo Topológico Determinista. En dicho ejemplo, el elemento estructurante (un cuadrado de 30 píxeles de lado) varía su orientación a medida que recorre el contorno del objeto original (un cuadrado de 80 píxeles de lado trazado en verde), de manera que la cara frontal del elemento estructurante siempre apunta al centro del objeto original. En negro, se muestra el resultado de la operación morfológica clásica en la que no se produce cambio de orientación en el elemento estructurante. La característica de variación del elemento es interesante para emular cierto tipo de comportamientos morfológicos reales. Tal es el caso de la erosión producida por una herramienta de corte sobre un sustrato material a la hora de mecanizar un objeto. La herramienta va variando su posición y orientación a medida que esculpe la pieza.

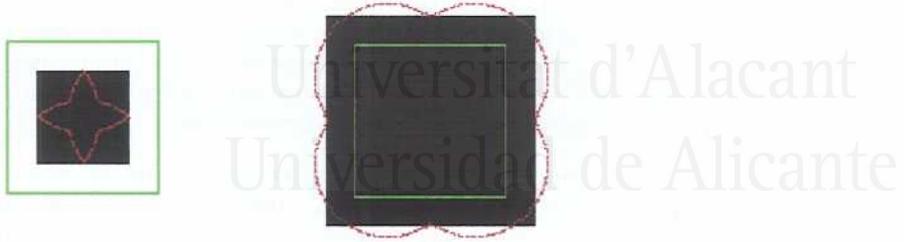


Figura 2.8: Distintas operaciones morfológicas en el MTD utilizando orientación variable para un elemento estructurante cuadrado. A la izquierda, erosión y a la derecha dilatación (resultados mostrados en rojo).

## APERTURA y CIERRE con trayectoria

Las operaciones de erosión y dilatación no tienen inversa, la razón se debe a que distintos conjuntos pueden dar el mismo resultado cuando se opera con el mismo elemento estructurante. Esta característica no las hace apropiadas para realizar operaciones de filtrado. Las operaciones que se describen a continuación, la apertura y el cierre morfológicos, constituyen la base de los filtros morfológicos, que se caracterizan por poseer las propiedades de crecimiento, extensividad e idempotencia [Serra, 1992b].

En morfología matemática la operación de apertura se corresponde con una erosión seguida de una dilatación:

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B$$

(Exp. 2.30)

En términos descriptivos, esta operación define el espacio recorrido por el elemento estructurante cuando se fuerza a estar incluido en un conjunto [Serra, 1982]. Dado que dicha operación se compone de erosión y dilatación es posible definir de manera análoga la *apertura con trayectoria* del modo que expresa la expresión (Exp. 2.31).

$$X \circ_{\Gamma} B = (X \odot_{\Gamma} B) \oplus_{\Gamma} B$$

(Exp. 2.31)

La apertura con trayectoria define el movimiento del elemento estructurante a lo largo del interior del objeto  $X$  y el desplazamiento externo a lo largo del objeto resultante de la operación anterior. Sin embargo, puesto que el resultado de las primitivas erosión y dilatación es independiente del recorrido elegido, las transformaciones homogéneas asociadas a dilatación y erosión no tienen por qué ser las mismas para poder obtener una apertura en el Modelo Topológico Determinista. La única condición que debe cumplirse es que ambas transformaciones paramétricas garanticen el recorrido completo del objeto original.

La operación de cierre se corresponde con una dilatación seguida de una erosión:

$$X \bullet B = (X \oplus B) \odot B$$

(Exp. 2.32)

Descriptivamente, el cierre se corresponde con el complemento del espacio descrito por el elemento estructurante  $B$  cuando es forzado a estar fuera de los conjuntos [Serra, 1982].

De la misma manera que se obtuvo la apertura con trayectoria, se define el *cierre con trayectoria*:

$$X \bullet_{\Gamma} B = (X \oplus_{\Gamma} B) \odot_{\Gamma} B$$

(Exp. 2.33)

Como se ha comentado anteriormente, estos filtros morfológicos tienen las propiedades del crecimiento, extensividad e idempotencia; propiedades que heredan del paradigma morfológico. Sus correspondientes operaciones con trayectoria conservan estas propiedades siempre y cuando el resultado de las operaciones sea completo, es decir, se recorra todo el intervalo continuo del valor paramétrico establecido para cada una de las primitivas implicadas.

A partir de cierre y apertura se definen en morfología matemática una gran cantidad de operaciones, cada una de ellas con diversas utilidades. Si se desea analizar otras operaciones morfológicas, se

puede utilizar la misma metodología que la que se ha empleado con las operaciones anteriores.

## Modelo computacional para el MTD

En este apartado se presenta y evalúa un modelo que permite realizar operaciones morfológicas de acuerdo con el Modelo Topológico Determinista, para lo que se desarrollarán los contenidos que se resumen a continuación:

■ **Definición del modelo.** Partiendo de las definiciones expresadas anteriormente, se crea un método algorítmico genérico de resolución de operaciones morfológicas. Sobre este modelo se efectúa un primer análisis acerca de las funciones que revisten mayor complejidad y se analizan distintas alternativas.

■ **Estudio de la bondad del modelo.** En este punto se analizan las ventajas e inconvenientes que presenta este modelo computacional respecto a otros, se realizan operaciones morfológicas que demuestran la corrección del modelo y se comparan en términos computacionales con otros métodos.

■ **Refinamientos.** Un estudio acerca del paralelismo inherente que posee revela que es posible su utilización sobre plataformas que permiten la computación paralela, lo que redundará en una rebaja de las cotas temporales. También se analizan las partes del algoritmo que aportan la mayor complejidad computacional y se proponen distintas alternativas que mejoran la eficiencia temporal del algoritmo en detrimento de su coste espacial.

## Definición del modelo computacional

Existen dos elementos básicos en el Modelo Topológico Determinista: las transformaciones paramétricas (*TP*) y la operación básica instantánea (*OP*). Ambas configuran el fundamento de las operaciones con trayectoria, ya que cualquiera de ellas se traduce en una aplicación sucesiva de operaciones básicas instantáneas sobre distintas transformaciones del objeto. A continuación, se presenta un modelo computacional que efectúa la operación básica del MTD a partir de una transformación paramétrica determinada:

```

1: Para cada  $f \in FR$  hacer
2:    $t=0$ 
3:   Mientras  $t \leq 1$  hacer
4:      $f' = f \cdot \Gamma(t)$ 
5:      $d = dist_v(f', EE)$ 
6:      $CentroEE = CalcularCentro(d, \Gamma(t))$ 
7:     AñadirTF(CentroEE)
8:     Incrementar( $t$ )
9:   Finmientras
10: Finpara

```

Figura 2.9: Modelo computacional genérico basado en el MTD.

El algoritmo que se muestra en la figura 2.9 se plantea como una búsqueda sucesiva de mínimos que se van almacenando en una lista resultado (línea 7). Esta lista, formada por los distintos centros del elemento estructurante, constituirá el conjunto de puntos que formarán el resultado de una operación morfológica con trayectoria en el Modelo Topológico Determinista.

Para cada objeto frontera del que se compone el conjunto  $FR$  del MTD, se va aplicando sucesivamente una transformación homogénea  $\Gamma(t)$  que sitúa al objeto en un punto determinado del espacio (línea 4 de la figura 2.9). La función  $dist_v$  calcula la distancia mínima entre el elemento estructurante y el objeto transformado, siempre en la dirección que indica el vector  $\vec{v}$  (línea 5 de la figura 2.9).

Finalmente, con la distancia mínima hallada y la transformación aplicada, se determina la posición del punto central del elemento estructurante mediante la función  $CalcularCentro$  (línea 6 de la figura 2.9). El cómputo se expresa en la ecuación (Exp. 2.34) y se obtiene de manera analítica gracias a la aplicación de la inversa de la transformación paramétrica  $\Gamma^{-1}(t)$ .

$$c_{\Gamma(t)} = (c_{EE} + dist_v \cdot \vec{v}) \cdot \Gamma^{-1}(t)$$

(Exp. 2.34)

Desde el punto de vista computacional, la función  $dist_v$  es la que presenta una mayor complejidad. A continuación se analiza detalladamente la misma.

## Cálculo de la función de distancia mínima

La función  $dist_{\vec{v}}$  constituye el elemento más importante de la operación básica instantánea. Su cálculo se realiza por medio de la obtención de la distancia mínima entre objetos asociada a un vector director  $\vec{v}$ .

La flexibilidad del modelo, que permite trabajar tanto con las descripciones geométricas de puntos del espacio euclídeo, como con subconjuntos no ordenados de los mismos, permite introducir en el modelo computacional diferentes mecanismos para calcular dicha función.

### La función $dist_{\vec{v}}$ para objetos geométricos

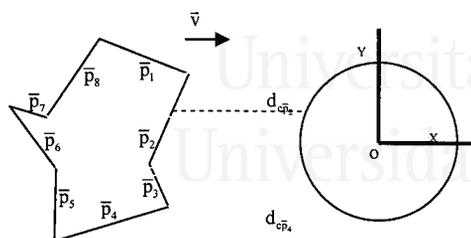
Si se tiene la representación geométrica de los objetos, el cálculo de esta función consiste en obtener la función matemática que determina la distancia entre ellos en la dirección que indica el vector director. Como método analítico general se puede utilizar el cálculo del mínimo de la función anterior que se efectuará a través de la primera derivada de dicha función.

La dificultad en hallar la función distancia depende de la naturaleza geométrica de los objetos de que se trate. Si los objetos son demasiado complejos en su definición, la búsqueda de la solución analítica planteada anteriormente puede conducir a la resolución de un sistema de ecuaciones no lineal. Este tipo de sistemas suelen plantear dificultades de computación y, en ocasiones, tan sólo se podrá obtener una solución aproximada mediante un elevado coste temporal. Por el contrario, si los objetos pueden ser descritos mediante una formulación sencilla, es posible encontrar una solución analítica al problema anterior. Este hecho permitirá cálculos exactos (ya que no se utilizan métodos de aproximación) y tiempos de computación reducidos.

Se mostrarán ejemplos en los que es posible encontrar una solución analítica a este problema. Por claridad, el cálculo se restringirá a espacios de 2 dimensiones y se asumirá como vector director el sentido positivo del eje X (siempre se puede encontrar una transformación de giro que lleve cualquier vector al eje X, por lo que esta última hipótesis no supone una pérdida de generalidad del problema).



## 112 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación



**Figura 2.10:** Cálculo de la función distancia mínima entre un polígono y un círculo.

En los dos ejemplos anteriores se ha obtenido una solución analítica al problema del cálculo de la distancia mínima. Además, la solución será exacta e independiente del tamaño de los objetos. Puesto que no se ha discretizado el espacio geométrico, la operación básica instantánea puede seguir computándose sin tener que recurrir a espacios y métodos discretos, lo que se traduce en el cálculo de primitivas morfológicas continuas.

Cuando existe solución analítica (como ocurre en los casos presentados anteriormente), el coste computacional del algoritmo que calcula la operación básica instantánea dependerá exclusivamente del número de objetos tratados ( $f$ ) y de los valores de trayectoria contemplados ( $t$ ), ya que la distancia mínima se computará en tiempo constante. Así, éste tendrá una cota superior expresada como **O(t.f)**.

Aunque es posible la utilización de métodos de resolución de sistemas no lineales, existe otra alternativa para efectuar el cálculo de la función  $dist_{\vec{v}}$  que, además, no depende de la complejidad geométrica de los objetos. La idea se fundamenta en considerar a los objetos como meras colecciones de puntos del espacio euclídeo. En el siguiente apartado se planteará esta alternativa.

### La función $dist_{\vec{v}}$ para conjuntos de puntos

Cuando los objetos geométricos son considerados como un conjunto de puntos en el espacio, el cálculo de la función distancia se simplifica debido a que tan sólo se necesita computar distancias, en el sentido del vector director, entre dos pares cualquiera de puntos de ambos objetos.

Considerar a los objetos como conjuntos de puntos evita tener que reparar en la geometría de los mismos, que tan sólo se utiliza para poder seleccionar elementos del conjunto. El modelo que se muestra en la figura 2.11 recorre ambos objetos analizando todas las posibles combinaciones entre pares de puntos, obteniendo de esta manera la distancia mínima.

```

1: t=0
2: Mientras t<=1 hacer
3:   MinDistancia=∞
4:   Para cada f∈FR hacer
5:     Para cada p∈f hacer
6:       p′=p•Γ(t)
7:       Para cada q∈EE hacer
8:         d =dv(p′,q)
9:       Finpara
10:      Si d<MinDistancia entonces MinDistancia=d Finsi
11:    Finpara
12:  Finpara
13:  CentroEE=CalcularCentro(MinDistancia,Γ(t))
14:  AñadirTF(CentroEE)
15:  Incrementar(t)
16: Finmientras

```

Figura 2.11: Modelo computacional del MTD para conjuntos de puntos.

A la vista del modelo anterior, la función distancia estará definida tan solo entre pares de puntos del espacio euclídeo. La expresión (Exp. 2.38) muestra dicha función para un espacio tridimensional, tomando el eje X como vector director. En este caso se emplea la función auxiliar  $dr$  que determina la distancia entre un punto  $q$  y la recta formada por el punto  $p$  y el vector director  $(1,0,0)$ .

$$d_{p_{xyz},q_{x'y'z'}} = \begin{cases} |x-x'| & , dr(r_{p\bar{x}^+}, q) \leq \lambda \\ \infty & , dr(r_{p\bar{x}^+}, q) > \lambda \end{cases}$$

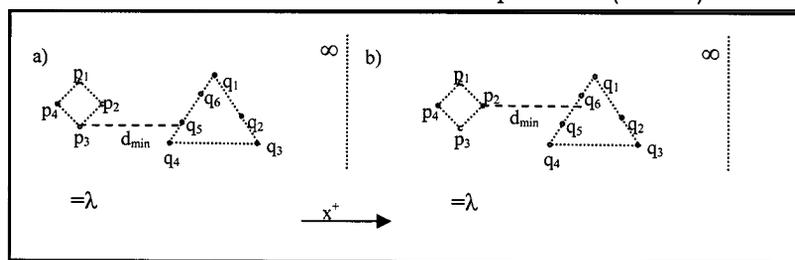
(Exp. 2.38)

La función definida en la expresión anterior posee una formulación que introduce un alto índice de complejidad temporal en el modelo ya que la precisión del cálculo reside en el número de puntos analizados para ambos objetos. Cuanto mayor

## 114 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

sea el número de puntos, mayor será la precisión de cálculo, aunque también se incrementará el tiempo de computación.

Por otra parte, se debe garantizar la solidez del objeto discretizado; para ello, se establecerá un área de influencia alrededor de cada punto del objeto de radio denominado  $\lambda$ . La elección de este valor no está exenta de complejidad, ya que debe garantizar la solidez del objeto discretizado. La figura 2.12 muestra cómo puede cambiar el resultado de la distancia mínima en función de un valor insuficiente de separación (caso *a*).



**Figura 2.12:** Cálculo de la función distancia mínima entre dos polígonos discretizados para dos valores  $\lambda$  diferentes.

La cota asintótica para el modelo de cálculo del algoritmo de la figura 2.11 vendrá dada por la expresión  $O(t.f.n.m)$ , donde  $n$  y  $m$  constituyen el número máximo de puntos seleccionados para los objetos geométricos tratados y el elemento estructurante respectivamente. Puesto que se trata de una discretización espacial, el tamaño de los objetos influirá en la precisión y, por ende, en el tiempo de obtención de la solución.

### La función $dist_v$ de cálculo mixto

El principal inconveniente de la solución por cálculo de distancia entre puntos reside en su elevado coste computacional unido a la inexactitud del cálculo. Por otro lado, su ventaja estriba en que es del todo independiente de la complejidad geométrica del objeto. Es posible utilizar un esquema algorítmico híbrido en el que únicamente uno de los dos objetos, el elemento estructurante, sea considerado definido mediante una función geométrica. Esta decisión se apoya en el hecho de que dicho objeto suele tener en morfología una estructura más simple.

En términos formales la función de cálculo mixto se define como un caso especial de la función de distancia mínima, introducida en (Exp. 2.17), en el que el cálculo se efectúa sobre el elemento estructurante en vez de sobre el objeto:

$$\begin{aligned} dist_{\vec{v}} : EE \times FR &\rightarrow R \\ dist_{\vec{v}}(B, X) &= \min(d_{\vec{v}}(x, B)), \forall x \in X \end{aligned}$$

(Exp. 2.39)

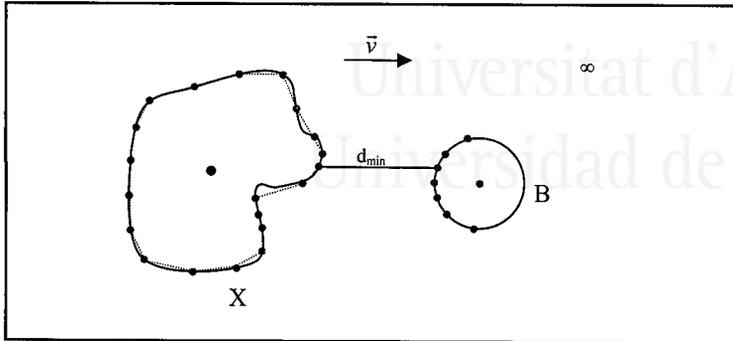
Donde la función  $d_{\vec{v}}$  determina la distancia existente entre un punto cualquiera  $p$  del espacio y un determinado elemento estructurante  $B$ , en la dirección que indica el vector  $\vec{v}$ . Geométricamente viene definida por la distancia euclídea existente entre  $p$  y el punto más cercano obtenido como la intersección de la línea que define el vector y que pasa por el punto  $p$  y el objeto en cuestión. Esta función se puede expresar de forma similar a la utilizada en (Exp. 2.18) teniendo en cuenta que los puntos implicados pertenecen al objeto  $X$  considerado:

$$d_{\vec{v}}(p, X) = \begin{cases} \overline{pp'}, & Int(r_{p\vec{v}}, X) \neq \emptyset, \forall q \neq p' \in Int(r_{\vec{v}}, X), \overline{pp'} \leq \overline{pq} \\ +\infty, & Int(r_{p\vec{v}}, X) = \emptyset \end{cases}$$

(Exp. 2.40)

Donde  $Int(r_{p\vec{v}}, X)$  representa el conjunto de los puntos de intersección entre la recta que pasa por  $p$  con dirección  $\vec{v}$  ( $r_{p\vec{v}}$ ) y el conjunto  $X$ . La figura 2.13 muestra un ejemplo de aplicación de estas funciones.

Para este modelo, el objeto  $X$  será el que se considere como elemento estructurante ya que, como se citó anteriormente, presenta una estructura más simple en la casuística morfológica. Precisamente, esta simplicidad permitirá que la función tenga una solución analítica sencilla al problema de la intersección geométrica entre una recta y el elemento estructurante escogido para la operación morfológica.



**Figura 2.13:** Cálculo de la función  $dist_{\vec{v}}$  entre los objetos B (elemento estructurante) y X (objeto discretizado). El trazo punteado representa el cálculo de sucesivas  $d_{\vec{v}}$ , el trazo continuo, el resultado de la función distancia.

La figura 2.14 contiene el algoritmo que utiliza el modelo mixto de cálculo: la computación del valor de distancia mínima se lleva a cabo entre las líneas 4 y 10 del modelo. El peso computacional recae sobre la función  $d_{\vec{v}}$ , que es la encargada de hallar la intersección entre el elemento estructurante y una recta formada por el punto seleccionado  $p'$  y el vector director  $\vec{v}$ .

```

1: t=0
2: Mientras t<=1 hacer
3:   MinDistancia=∞
4:   Para cada f∈FR hacer
5:     Para cada p∈f hacer
6:       p'=p•Γ(t)
7:       d=dv(p',EE)
8:       Si d<MinDistancia entonces MinDistancia=d Finsi
9:     Finpara
10:  Finpara
11:  CentroEE=CalcularCentro(MinDistancia,Γ(t))
12:  AñadirTF(CentroEE)
13:  Incrementar(t)
14: Finmientras

```

**Figura 2.14:** Modelo computacional del MTD con cálculo mixto de la distancia mínima.

El coste computacional de este modelo tiene, en términos asintóticos y en el peor de los casos, una complejidad temporal

de  $O(t.f.n)$ , siendo  $n$  el número de puntos máximo considerado para la discretización de los objetos geométricos.

Debido a que existe un factor de discretización en el modelo, éste tendrá asociado implícitamente un error en el cálculo de la distancia mínima a la que se encuentra el elemento estructurante. El error dependerá de la propia geometría del elemento y de la máxima distancia existente entre puntos vecinos del objeto discretizado. En la literatura se puede encontrar numerosos métodos que permiten obtener un conjunto representativo de puntos de un objeto geométrico dado un valor máximo de separación entre puntos vecinos [Farin, 1993].

Como ejemplo, la figura 2.15 muestra la representación geométrica del cálculo del error cometido al considerar un polígono discretizado y un círculo como elemento estructurante. En este caso el error cometido vendrá dado por la expresión (Exp. 2.41).

$$R^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + (R - e)^2 \rightarrow e = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2}, R \geq \frac{D}{2}$$

(Exp. 2.41)

donde  $D$  representa la distancia entre puntos vecinos y  $R$  el radio del elemento estructurante. A título informativo decir que, dada una distancia máxima de discretización de 2 mm y un  $EE$  de radio 40 mm, se obtendría según la expresión (Exp. 2.39) un error en el cálculo de 0.0125 mm.

Analizando la tabla 2.4 en términos de eficiencia, la mejor opción la constituye el método geométrico, ya que ofrece exactitud en los cálculos y un coste que depende únicamente del número de objetos que intervienen en la computación. Puesto que en este método no se produce discretización alguna, conserva la ventaja añadida de su generalidad al operar sobre espacios de definición continua. Sin embargo, las ventajas de este método radican fundamentalmente en la existencia de solución analítica del problema. Cuando esta solución no existe o computacionalmente no es viable, se ha de recurrir a métodos aproximativos de cálculo iterativo que introducen un nuevo orden de complejidad en el algoritmo e imprecisión en el cálculo de la solución.

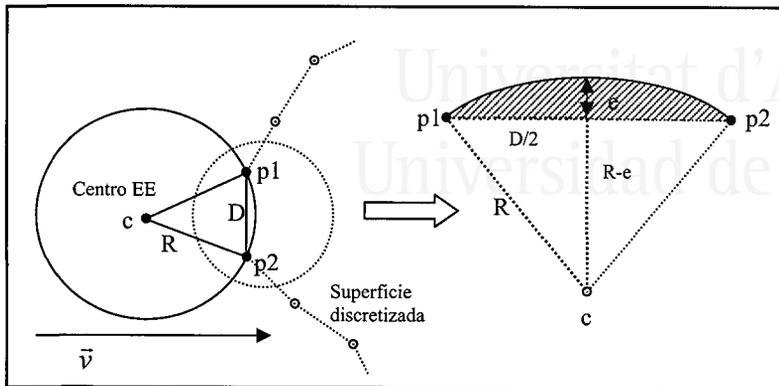


Figura 2.15: Cálculo del error producido por la discretización de un polígono bajo un elemento estructurante circular.

El método mixto ofrece una buena alternativa ya que, aunque se introduzca imprecisión por la discretización del objeto, el cálculo de la intersección entre una recta y objeto, de naturaleza más simple por ser el elemento estructurante, tiene solución analítica. En este trabajo de investigación se optará por este método ya que no depende de la formulación geométrica del objeto tratado conduciendo a soluciones más genéricas (en realidad sólo dependerán de la geometría del elemento estructurante). No obstante, es necesario señalar que el método continuo debe tenerse en cuenta en aquellos casos en los que la geometría de los objetos que intervengan en el cálculo permita la computación analítica de la función  $dist_{\vec{v}}$ .

Modelo	Continuo		Discreto		Mixto	
Elementos	OBJs	EEs	OBJs	EEs	OBJs	EEs
Tipo	GEO	GEO	PTO	PTO	PTO	GEO
Coste "O"	$O(t \cdot n)^*$		$O(t \cdot f \cdot n \cdot m)$		$O(t \cdot f \cdot n)$	
Precisión	Exacto*		Baja		Media	
Espacio	Cont.	Cont.	Discr.	Discr.	Discr.	Cont.

Tabla 2.4: Características de los métodos de cálculo de distancia mínima.

(\*) Coste y precisión en el caso de que exista solución analítica al problema.

## Estudio de la bondad del modelo computacional

En este apartado se realizarán distintas operaciones morfológicas sobre diversos objetos y elementos estructurantes, utilizando una determinada instanciación del Modelo Topológico Determinista. El objetivo es analizar la eficiencia del modelo sobre un computador con estructura secuencial y compararlo con métodos tradicionales de aplicación de primitivas morfológicas.

Las pruebas realizadas se limitan, en este apartado, al espacio de dos dimensiones. Aunque el modelo no restringe la dimensión espacial, el campo 2D ha sido elegido por su facilidad para la representación, así como para obtener resultados comparables con los métodos que se aplican en morfología matemática para el tratamiento de imágenes.

Las operaciones morfológicas que se emplearán en estos experimentos serán la *dilatación* y la *erosión*; ambas constituyen la base sobre la que se desarrollan operaciones morfológicas más complejas. En la figura 2.16 se muestra el algoritmo que realiza la dilatación/erosión de imágenes.

```

1: Para cada punto de la imagen i hacer
2:   Para cada punto e del EE hacer
3:     ComputarSupremo(i+e); // Dilatación
4:     ComputarInfimo(i+e); // Erosión
5: Finpara
6: Finpara

```

**Figura 2.16:** Algoritmo secuencial de cálculo de la dilatación/erosión de una imagen.

En este punto, es necesario hacer constar que los resultados de tiempos que se mostrarán pueden indicar la bondad del Modelo Topológico Determinista respecto a otros algoritmos aunque la comparación no podrá ser directa ya que la naturaleza de los objetos y espacio de representación de este modelo es bien distinta a la de los algoritmos usados en morfología para el tratamiento de imágenes.

La tabla 2.5 resume las principales diferencias entre los métodos que van a ser comparados. En la morfología matemática clásica, el cálculo se realiza sobre una imagen completa, es decir, la operación morfológica no distingue si los píxeles pertenecen a un determinado objeto o no, simplemente se aplica una operación de cálculo de supremo o ínfimo en un entorno de vecindad. En el

## 120 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

Modelo Topológico Determinista, es necesario realizar una diferenciación entre los objetos que se dan en el espacio, pues cada uno de ellos posee una representación geométrica distinta. Además, esta representación define la frontera del objeto y no su interior. Las características del MTD provocarán un mismo resultado para objetos con o sin islas. Otra diferencia importante la constituye la representación del elemento estructurante; mientras que en la morfología tradicional es tratado como otro subconjunto más de puntos (que es discretizado para el caso de operar con imágenes), en el MTD se considera la función geométrica de los puntos que constituyen su frontera, sin ser necesario realizar una discretización del mismo.

	<b>MM sobre imágenes</b>	<b>MTD de cálculo mixto sobre 2D</b>
<b>Espacio de aplicación</b>	Conjunto finito de píxeles como discretización del espacio euclídeo	Espacio euclídeo 2D
<b>Objetos</b>	Se parte de una imagen completa	Representación discreta del contorno de cada objeto
<b>EEs</b>	Conjunto de píxeles	Representación geométrica de la frontera.
<b>Método</b>	Sobre cada píxel se opera en un entorno de vecindad definido por el EE	Se calcula el centro del EE de distancia mínima en una dirección $\vec{v}$ sobre una trayectoria $t$
<b>Resultado</b>	Erosión / dilatación como conjunto de píxeles	Puntos frontera de la operación Erosión / Dilatación

**Tabla 2.5:** Características de los algoritmos basados en morfología matemática clásica (MM) y MTD de cómputo morfológico.

Para finalizar, el resultado obtenido por el modelo morfológico clásico será una imagen completa, es decir, no habrá distinción entre objetos y huecos. En el MTD existirá un resultado por cada objeto tratado, que estará constituido por la frontera de cada operación morfológica con trayectoria.

## Experimentos

Con el fin de poder evaluar los dos modelos anteriores, habida cuenta de la dificultad de la comparación por las diferencias existentes desde su definición, se ha optado por desarrollar un nuevo modelo en el Modelo Topológico Determinista que permite la utilización del mismo dominio de entrada que el modelo

basado en la morfología matemática clásica. Los cambios introducidos se describen a continuación.

### **Dominio de entrada/salida**

Para que los algoritmos sean comparables, ambos han de partir de los mismos datos de entrada y deben producir resultados en un mismo dominio. En este sentido, se ha optado por utilizar un conjunto de puntos bidimensionales para los dos algoritmos. Una imagen formada por un conjunto de píxeles constituirá, por tanto, su ámbito de aplicación. Este condicionante ha supuesto únicamente una restricción al Modelo Topológico Determinista que definirá objetos como conjuntos de posiciones de la forma  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

### **Representación de objetos**

En el modelo expuesto en este trabajo es necesario diferenciar objetos individualmente, ya que éstos serán tratados uno a uno en el cómputo de la función de distancia mínima. En los experimentos realizados se ha tenido en cuenta un solo objeto por imagen, de manera que no es necesaria tal distinción. Además, en el MTD sólo se considera el conjunto de puntos frontera de ese objeto por lo que, para localizar tal frontera, será necesaria la aplicación de un método de obtención de puntos de contorno de una imagen.

Puesto que el número de puntos a tratar por el modelo morfológico clásico no distingue si éstos pertenecen al objeto o no, se ha optado por realizar dos variaciones distintas de este método (en adelante *MM1* y *MM2*) tendentes a equilibrar la desventaja que supone el tratar con un número mayor de datos de entrada que el Modelo Topológico Determinista:

- En el *MM1*, la operación morfológica únicamente se realizará sobre los píxeles objeto de la imagen, es decir, aquéllos que tienen un valor “uno”. De esta manera no se dilatarán o erosionarán los huecos (ceros) de la misma.
- La segunda variación, denominada *MM2*, realiza la operación únicamente sobre los píxeles de la imagen que se consideran contorno del objeto, de manera que tiene exactamente el mismo campo de entrada que el MTD. Aunque este método pueda servir de referencia para la comparación, hay que hacer notar que su

## 122 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

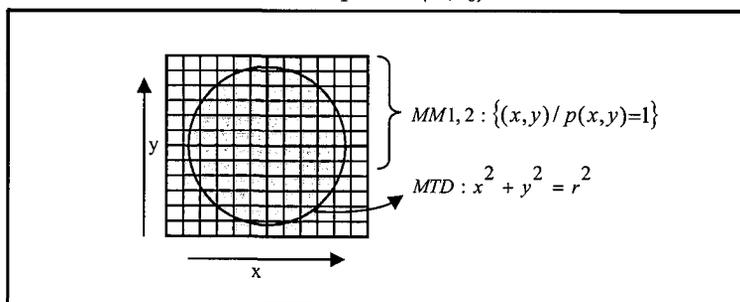
resultado no coincidirá con el que se obtendría mediante una dilatación morfológica, tal y como calcula el *MM1*.

En la tabla 2.6 se muestran los tres algoritmos comparados.

### Elemento estructurante

Para los métodos que utilizan la morfología matemática clásica, el elemento estructurante no es más que otro subconjunto de píxeles. En estos experimentos se ha considerado un círculo de un determinado radio. Tanto el *MM1* como el *MM2* aplicarán como entorno de vecindad el conjunto de posiciones que define el área del círculo tal y como muestra la figura 2.17.

El Modelo Topológico Determinista parte de la definición geométrica del contorno del elemento estructurante que, en este caso, tendrá la forma  $(x-c_x)^2+(y-c_y)^2=r^2$ , correspondiente a una circunferencia centrada en el punto  $(c_x, c_y)$  de radio  $r$ .



**Figura 2.17:** Diferencias en la interpretación del elemento estructurante entre el MTD y los algoritmos MM1 y MM2.

### Algoritmos comparados

En la tabla 2.6 se muestra el pseudocódigo de los algoritmos sobre los que se han realizado los experimentos. La información sobre el contorno del objeto ( $Fr(X)$ ) es necesaria para los algoritmos basados en el Modelo Topológico Determinista y MM2, de ahí que, en los experimentos, haya sido contabilizado su tiempo de cálculo.

La trayectoria escogida para los experimentos con el MTD ha sido implementada mediante una matriz de rotación parametrizada mediante un valor angular, en grados sexagesimales, de  $360*t$ .

Por cada valor este parámetro se producirá una rotación del punto del objeto considerado en ese momento.

<b>MM1</b>	<b>MM2</b>
1: Para $p \in X$ hacer 2: Para $e \in EE$ hacer 3: Imagen( $p+e$ )=1; 4: Finpara 5: Finpara	1: Para $p \in Fr(X)$ hacer 2: Para $e \in EE$ hacer 3: Imagen( $p+e$ )=1; 4: Finpara 5: Finpara
<b>O(p.e)</b>	<b>O(Fr(X).e)</b>
<b>MTD de cálculo mixto</b>	
1: $t=0$ 2: Mientras $t \leq 1$ hacer 3: MinDistancia= $\infty$ 4: Para $p \in Fr(X)$ hacer 5: $p' = Rotar(p, t * 360)$ 6: $d = d_v(p', x^2 + y^2 = r^2)$ // Distancia mínima punto círculo. 7: Si $d < MinDistancia$ entonces MinDistancia= $d$ Finsi 8: Finpara 9: CentroEE=CalcularCentro(MinDistancia, t) 10: AñadirTF(CentroEE) 11: Incrementar(t) 12: Finmientras	
<b>O(t.Fr(X))</b>	

Tabla 2.6: Distintos algoritmos morfológicos que realizan una operación de dilatación. En su parte inferior, el coste computacional asociado.

### Pruebas realizadas

Se han realizado diversos experimentos encaminados a obtener el tiempo de cálculo bajo distintas condiciones de entrada. Se ha variado tanto el tamaño del objeto como el del elemento estructurante, por ser éstos los parámetros que intervienen al realizar la operación morfológica.

Los modelos han sido evaluados sobre un procesador Pentium II de 233Mhz con 128MB de memoria RAM.

## 124 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

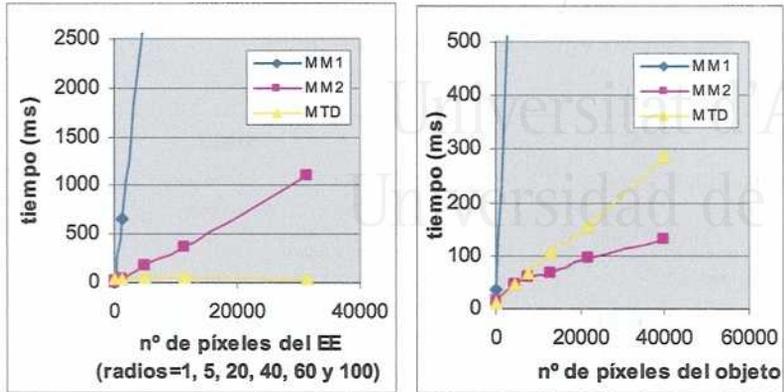


Figura 2.18: Pruebas de dilatación morfológica. A la izquierda influencia del tamaño del elemento estructural. A la derecha influencia en el tamaño del objeto.

La figura 2.18 muestra el comportamiento de los algoritmos ante la variación del tamaño del elemento estructural y del tamaño del objeto respectivamente, manteniendo fijo el parámetro complementario. La conclusión que se deriva de estas gráficas es la práctica independencia que muestra el Modelo Topológico Determinista ante variaciones en el tamaño del elemento estructural; consecuencia lógica por el uso de su representación geométrica en vez de su contenido, como así ocurre con el MM1 y el MM2. La diferencia del MM2 respecto al MM1 se deriva del hecho de que el primero tan sólo procesa los píxeles del entorno del objeto con lo que su cota temporal baja un orden de magnitud respecto al MM1.

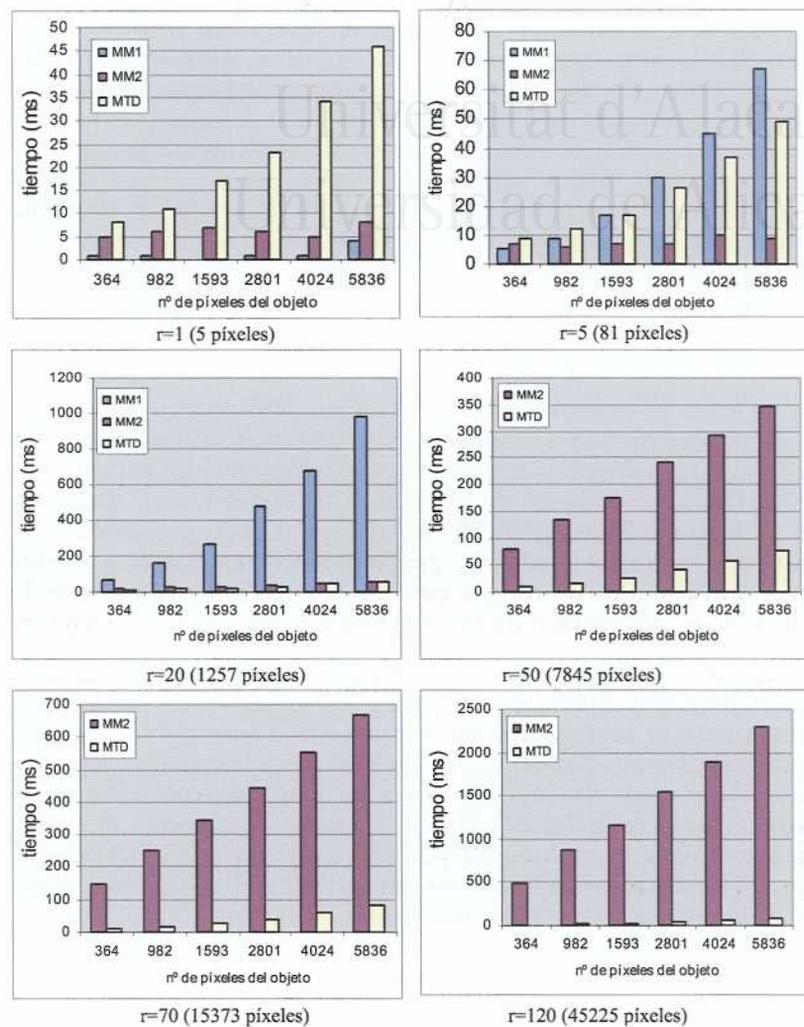


Figura 2.19: Dilatación morfológica. Comparativa cruzada entre tamaño del EE y tamaño del Objeto.

## 126 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

En cuanto a la variación en el tamaño del objeto, el MTD ofrece, en este experimento, peores resultados que el MM2, siendo mejor que el MM1. Puesto que el MM2 trabaja únicamente sobre el contorno del objeto, la diferencia con el MTD estriba en el tamaño elegido para el EE, si este tamaño es suficientemente pequeño, el MM2 empleará menos tiempo que el MTD por poseer una lógica computacional más simple (ver tabla 2.6). El radio del elemento estructurante elegido para esta prueba fue de 10 píxeles, lo que equivale a un área de 81 puntos. Para comprobar cuál es el efecto del aumento del elemento estructurante sobre un conjunto de tamaños de objeto, se han realizado los experimentos que se muestran a continuación.

La figura 2.19 muestra el comportamiento de los algoritmos para la dilatación de diversos objetos bajo distintos radios del EE. Se aprecia que el aumento del radio provoca una mejora exponencial del MTD frente al resto de algoritmos. El experimento mostrado en la figura 2.20 compara la evolución del MTD y el MM2 para distintos radios de elemento. Puede observarse que el aumento en el tamaño del EE provoca que el punto de cruce entre el MM2 y el MTD se produzca para tamaños de objetos cada vez mayores.

La figura 2.20 muestra que en el Modelo Topológico Determinista existe un ligero aumento en el tiempo de computación cuando se incrementa el tamaño del elemento estructurante, aunque esta variación resulta mínima si se compara con los métodos morfológicos estudiados. La razón de este aumento está en el número de píxeles del objeto bajo los cuales la función distancia está definida: si el tamaño del EE aumenta, este número es mayor, lo que provoca que sobre los nuevos puntos se tengan que realizar nuevas operaciones de cálculo.

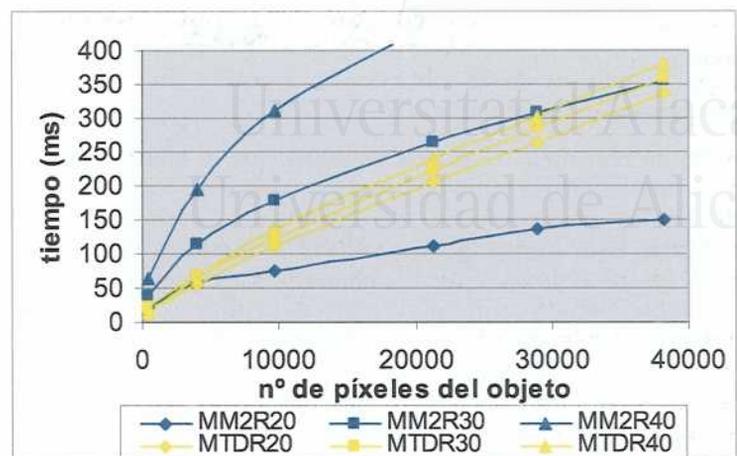


Figura 2.20: Dilatación morfológica. Análisis del punto de cruce entre el MM2 y el MTD para tamaños de radio 20, 30 y 40 píxeles en el EE.

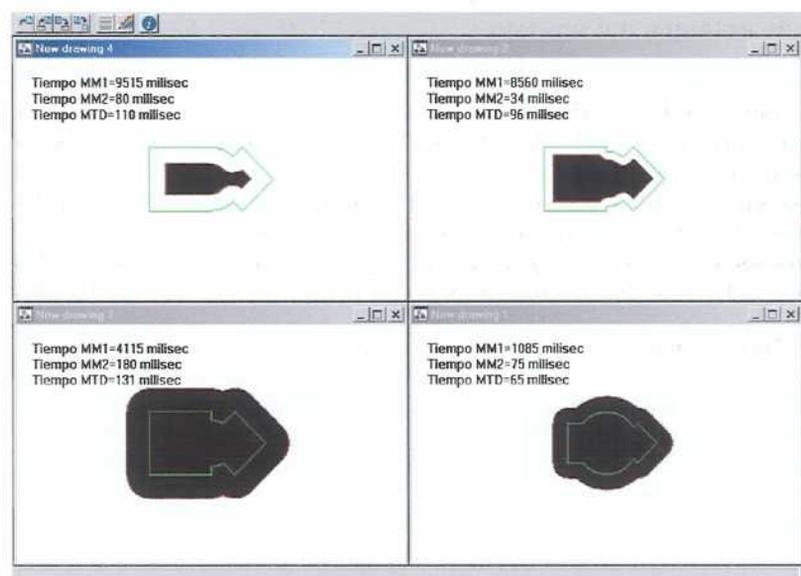


Figura 2.21: Dilatación y erosión morfológica. Resultados de distintas operaciones morfológicas que han servido como base de los experimentos. En la parte superior, dos erosiones y en la inferior dos dilataciones. En verde, el contorno del objeto original, en negro el resultado de la operación del MM1, en rojo el resultado del MTD.

## 128 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

En la figura 2.21 se pueden observar distintos resultados de aplicación de la operación morfológica. En concreto, se puede apreciar como el MTD obtiene la frontera de la operación morfológica que realiza el MM1.

A modo de resumen, se puede concluir que el Modelo Topológico Determinista ofrece una alternativa eficiente a los métodos tradicionales de cómputo de primitivas morfológicas. Esta alternativa está tanto más justificada cuando el número de puntos de los objetos y de los elementos estructurantes llega a ser elevado. Debido a que el número del conjunto de puntos está directamente relacionado con la dimensión del espacio en el que el objeto y el elemento estructurante están definidos, la importancia del MTD se hace más relevante cuando aumenta la dimensión en el espacio de representación (3D, 4D, etc.). En el espacio bidimensional la aplicación del MTD puede estar justificada para imágenes de alta resolución a las que se le apliquen operadores de gran tamaño.

### Refinamientos del modelo

Los modelos computacionales basados en la morfología matemática han sido objeto de continuas revisiones y mejoras desde que su ámbito de aplicación derivó hacia el campo de la visión por computador para aplicaciones de tiempo real (se pueden encontrar referencias en el Capítulo primero - Estado del arte). Así, en la actualidad, existen distintas alternativas que aumentan la eficiencia del modelo morfológico básico (MM1) analizado en el apartado anterior.

A continuación se profundiza en el estudio del modelo computacional presentado en este capítulo. De este estudio se derivarán nuevos principios y propiedades que introducirán una serie de refinamientos en el modelo original. La finalidad que se persigue es conseguir que dichos refinamientos puedan servir como fundamento de futuras optimizaciones que aumenten la eficiencia de las operaciones morfológicas que se realicen mediante el Modelo Topológico Determinista.

### Principio de alcanzabilidad

El MTD realiza operaciones morfológicas recorriendo el contorno de los objetos, alcanzando su frontera y almacenando la posición del centro del elemento estructurante. Para cada valor  $t$  de

trayectoria, se calcula una función de distancia mínima sobre todos los puntos del contorno del objeto. Sin embargo, siempre que la trayectoria y el tamaño del EE lo permitan, es posible que existan puntos del contorno que nunca sean alcanzados por el EE en la dirección del vector director (ver figura 2.22), o lo que es lo mismo, aquellos para los que la función distancia mínima devuelva como resultado  $\infty$ . Bajo el principio de *alcanzabilidad*, se agrupa a los puntos del objeto para los que la función distancia está definida dentro de un determinado valor de trayectoria  $t$ . Este conjunto se define para un determinado objeto  $X$ , como:

$$A_{\Gamma, \vec{v}}(t, X) = \{p \in X : d_{\vec{v}}(p', EE) \neq \infty, p' = p \bullet \Gamma(t)\}$$

(Exp. 2.42)

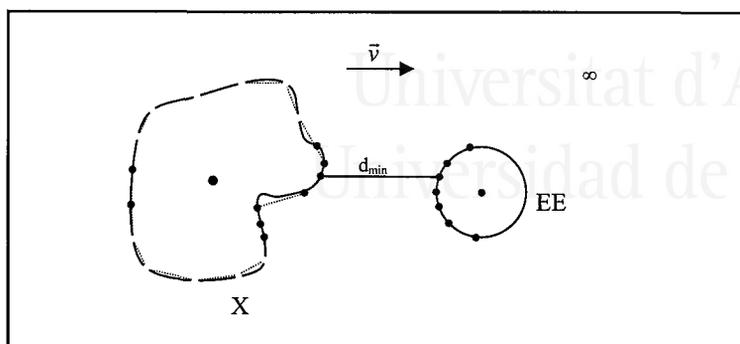
Con una sencilla modificación, es posible transformar el Modelo Topológico Determinista para que tenga en cuenta únicamente aquellos puntos del contorno agrupados bajo este principio. En el peor de los casos,  $A_{\Gamma, \vec{v}}(t, X) = X$ , con lo que no es posible reducir el coste "O" del algoritmo; sin embargo, se alcanzará una sensible mejora en el caso medio.

### Criterio de visibilidad

Otra idea relacionada con el principio de alcanzabilidad es la de considerar únicamente los puntos que no se ocultan tras otros puntos del contorno. Esta idea está relacionada con algoritmos de representación de objetos tridimensionales (*backculling*) y ha sido empleada también en la mejora de algoritmos de trazados de trayectorias de mecanización [Wallner, 2000]. Obviamente, la idea tiene sentido cuando el contorno del objeto es considerado continuo (definido mediante funciones geométricas o mediante unión de puntos consecutivos). El criterio tiene en cuenta los puntos cuya normal forma un ángulo menor de  $90^\circ$  con el vector director (ver figura 2.22). Por término medio, un 50% de los puntos del contorno serán eliminados bajo el criterio que expresa la ecuación (Exp. 2.43).

$$B_{\Gamma, \vec{v}}(t, X) = \left\{ p \in X : \angle(\vec{N}(p'), \vec{v}) \leq \frac{\pi}{2}, p' = p \bullet \Gamma(t) \right\}$$

(Exp. 2.43)



**Figura 2.22:** Optimización del MTD. Los puntos en negro del objeto  $X$  pertenecen a  $A(t, X)$ . Los puntos con aspas serían eliminados mediante el criterio de *backculling*.

### Rango de vecindad

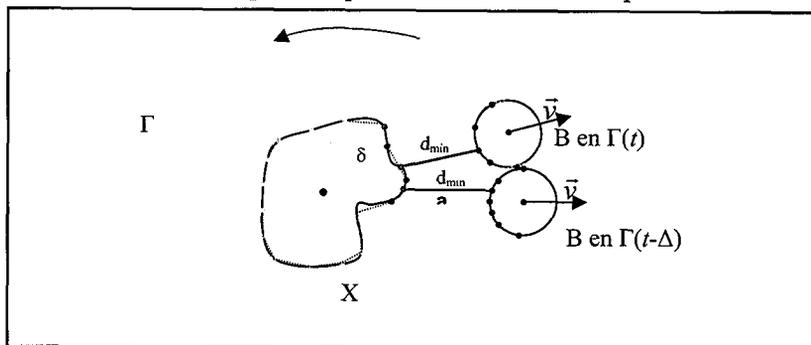
La trayectoria, en el Modelo Topológico Determinista, se fundamentó en un conjunto de transformaciones homogéneas paramétricas. Estas trayectorias definen un recorrido sobre la frontera de un objeto. Dicho recorrido es continuo mediante la utilización del parámetro  $t$ , es decir, valores próximos de  $t$ , colocarán al elemento estructurante en posiciones próximas. Este hecho, unido a la continuidad geométrica que ofrecen los contornos de los objetos, permite deducir que los puntos que obtengan distancias mínimas bajo dos puntos de trayectoria cercanos estarán también próximos entre sí. Basándose en este criterio es posible definir un rango de vecindad  $\delta$  que asegure que el punto de distancia mínima para el parámetro  $t$  se encuentra en un entorno de vecindad del punto mínimo para un valor inmediatamente anterior de  $t$  ó  $t-\Delta$ . La elección de este valor  $\delta$  dependerá de la geometría del objeto y del elemento estructurante, pudiéndose recurrir a heurísticas para determinar su valor. La ecuación (Exp. 2.44) define el conjunto de puntos que se hallan en el rango de vecindad para un valor determinado de trayectoria  $t$ . Como apoyo a la definición de  $V$  se utiliza la función  $C(t)$  que representa el conjunto de puntos de un objeto  $X$  más cercanos al elemento estructurante, es decir, aquellos que están situados a la distancia mínima del elemento estructurante que indica la función  $dist_{\vec{v}}$  para un valor de trayectoria  $t$ .

$$C_{X,\vec{v}}(t) = \{p \in X : d_{\vec{v},\Gamma(t)}(p, EE) = \text{dist}_{\vec{v},\Gamma(t)}(EE, X)\}$$

$$V_{\Gamma,\vec{v}}(t, X) = \{p \in X : |p - q| \leq \delta, \quad q \in C_{X,\vec{v}}(t - \Delta)\}$$

(Exp. 2.44)

El factor  $\delta$  viene a significar la continuidad que un objeto posee ante un determinado recorrido. Un valor elevado significa que el contorno es muy irregular a lo largo de la trayectoria (por ejemplo, una estrella), por el contrario, un factor pequeño indicaría una alta regularidad en la posición que ocupan los elementos de la frontera del objeto (por ejemplo, un círculo). Es posible utilizar heurísticas que estimen el valor del factor para un determinado tipo de objeto y trayectoria. El problema que presenta el uso de estas heurísticas es el de su eficiencia: cuanto más complejo sea obtener el valor, menor será la reducción computacional. No obstante, sería posible caracterizar ciertos tipos de geometría y trayectorias para obtener un determinado rango de vecindad que comprenda a una clase de problemas.



**Figura 2.23:** Refinamiento del MTD bajo el criterio de vecindad. Los puntos en negro del objeto X pertenecen a  $V(t, X)$ .

### Paralelización del modelo

Tal y como se extrae de [Jonker, 1992] y [Pujol, 2000], las principales aportaciones en morfología matemática a la eficiencia de los algoritmos de filtrado se han fundamentado en el paralelismo y la segmentación de operaciones que han instrumentalizado primitivas morfológicas sobre arquitecturas que se adaptan bien al tipo de paralelismo aplicado.

## 132 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

Como se demostrará en el capítulo quinto, es posible la paralelización del modelo computacional del MTD. La clave para posibilitar este refinamiento es la independencia de los valores de trayectoria  $t$ . A cada valor paramétrico de trayectoria le corresponde un cálculo de distancia mínima. En la figura 2.24 se muestra una posible paralelización del MTD. En este tipo de problemas, si se desprecian costes de comunicación, es posible obtener una cota en el peor de los casos de  $O(t/n \text{ Fr}(X))$ , siendo  $n$  el número de procesadores en el que se lleva a cabo la primitiva, aunque la existencia real de la comunicación limitará el número máximo de procesadores.

```

1: Enviar(Fr(X), p0, p1, ..., pn-1)
2: En paralelo t=proc*n;
3: En paralelo mientras t<(proc+1)/n hacer
4:   MinDistancia=∞
5:   Para cada p∈X hacer
6:     p'=p•Γ(t)
7:     d =dv(p', EE)
8:     Si d<MinDistancia entonces MinDistancia=d Finsi
9:   Finpara
10: CentroEE=CalcularCentro(MinDistancia, Γ(t))
11: AñadirTF(CentroEE)
12: Incrementar(t)
13: Finmientras
14: En paralelo si proc<>0 entonces Enviar(TF, p0)
15: Si proc==0 entonces RecibiryAgrupar(TF, e)

```

**Figura 2.24:** Modelo computacional paralelo del MTD. La variable  $proc$  hace referencia al número de procesador actual. La variable  $n$  indica el número de procesadores totales:  $0 \leq proc \leq n-1$ .

## Conclusiones

A lo largo de este capítulo se ha creado una especialización del formalismo que propone la morfología matemática y que se ha convenido en denominar Modelo Topológico Determinista. Dicha especialización consiste en la especificación de un modelo que permite utilizar operaciones morfológicas que están sujetas a un determinado orden o recorrido. De esta forma, el determinismo aparece de forma explícita ligado al concepto morfológico y es posible utilizarlo para la descripción de trayectorias sobre objetos.

El nuevo modelo redefine las operaciones de la morfología matemática como una composición de sucesivas operaciones básicas o elementales sobre las que se establece un orden. De esta forma, el nuevo modelo plantea la posibilidad de realizar

operaciones morfológicas parciales cuando se realiza un recorrido ordenado, pero incompleto, de los objetos definidos.

Cada operación básica en el Modelo Topológico Determinista sitúa al elemento estructurante en una determinada posición y orientación en el espacio de representación. Esta característica, no contemplada por el modelo morfológico convencional, permite abrir un nuevo abanico de posibilidades ya que es posible realizar operaciones que implícitamente produzcan una orientación variable del elemento estructurante.

En este capítulo se ha presentado un modelo computacional que permite llevar a cabo las operaciones morfológicas definidas en el Modelo Topológico Determinista. Su existencia convierte el nuevo modelo (MTD) en operativo y permite comprobar su bondad mediante experimentos.

Del estudio de los costes temporales asociados a este modelo computacional, se deduce que el método de cálculo no crece de forma exponencial con la dimensión del elemento estructurante, como así ocurre con los métodos que se fundamentan en la morfología matemática. Este resultado es de interés para realizar operaciones morfológicas sobre imágenes de gran densidad de puntos u objetos de más de dos dimensiones, ya que es en estos casos donde los métodos tradicionales presentan mayores problemas, ofreciendo resultados temporales prohibitivos sobre computadores convencionales.

El modelo es lo suficientemente general como para tratar información de forma continua o discreta. De esta manera puede ser utilizado sobre campos continuos de aplicación como funciones de variable real, superficies y curvas continuas; sin tener que recurrir a una discretización previa.

Un estudio sobre las propiedades que presenta el modelo computacional permite plantear una serie de refinamientos en el mismo que mejoran su eficiencia. De entre ellas destacan el rango de vecindad y el principio de alcanzabilidad. La primera consigue reducir la complejidad temporal del modelo en un orden de magnitud y la segunda permite la implementación del mismo sobre plataformas que operan en paralelo.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo Tercero

# Modelo Topológico de Fabricación

En este capítulo se presenta una extensión del Modelo Topológico Determinista que contempla los aspectos que plantean los procesos de fabricación mediante el uso de máquinas herramienta. El funcionamiento de este tipo de máquinas se fundamenta en el corte de un material base con el fin de modelar un objeto preconcebido: la forma de la cuchilla esculpe la superficie del sustrato base de manera que, en su traslación, este objeto geométrico va definiendo otro distinto. Este proceso tiene reminiscencias conceptuales con la operación morfológica denominada erosión, la cual, sin embargo, no opera a partir de una determinada trayectoria. El Modelo Topológico Determinista, definido en el capítulo anterior, permite realizar operaciones morfológicas especificando trayectorias, por lo que se adecua al proceso de mecanizado.

Hay que tener en cuenta, principalmente, dos aspectos para adecuar el MTD al modelado de la fabricación: la uniformidad de la superficie de mecanizado y la especificación de trayectoria de la herramienta. Ambos aspectos deben ser tratados desde la casuística que presenta la fabricación mediante máquinas herramienta. El resultado constituirá un modelo topológico dotado de características que lo hagan viable para el uso en este tipo de fabricación.

## Estructura general

Retomando los conceptos descritos en el capítulo primero (formalización del problema), se define el *Modelo Topológico de Fabricación (MTF)* mediante la siguiente tupla:

$$MTF = \langle MTD, D_F \rangle$$

(Exp. 3.1)

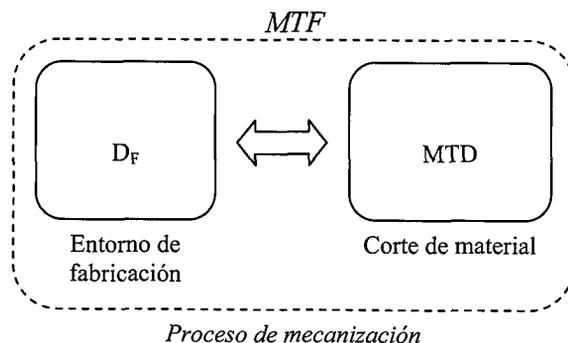
donde cada elemento representa:

$MTD$  Sistema topológico con propiedades deterministas. Se trata de un sistema morfológico con capacidad de describir el proceso de generación de objetos por medio de geometrías preestablecidas. En el modelo propuesto se toma como base el modelo mixto computacional del MTD (MCTD) que lo dota de operatividad.

$D_F$  Dominio del sistema. En este dominio se integran los factores que intervienen en el proceso de fabricación (herramientas, piezas, estrategias...) Representa la relación entre el *Modelo Topológico Determinista* y el exterior.

**Tabla 3.1:** Descripción de los componentes del Modelo Topológico de Fabricación.

En la figura 3.1 se puede apreciar el esquema de componentes teniendo en cuenta esta definición:



**Figura 3.1:** Componentes del MTF.

El Modelo Topológico Determinista ha sido analizado en profundidad en el capítulo anterior, por lo que, a continuación, se profundizará en los elementos que integran el dominio de fabricación, haciendo especial hincapié en la relación que mantienen con el MTD.

## El dominio de fabricación

En este apartado se definirán cada uno de los elementos que intervienen en el proceso de mecanización. En este sentido, se hará mención a los elementos desencadenantes y no al proceso en sí mismo. El dominio lo constituyen todos aquellos factores que determinan el proceso de fabricación, pero también el resultado que el propio proceso genera. En otras palabras, todo aquello que es externo al mecanizado, aunque estrechamente relacionado con él.

Formalmente, el dominio del sistema de fabricación se define mediante la siguiente estructura:

$$D_F = \langle OPF, HR, PZ, EST, TF \rangle$$

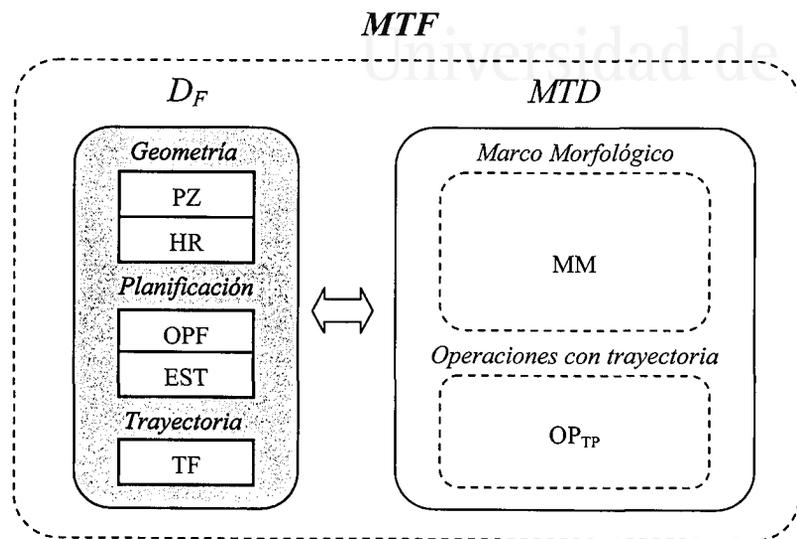
(Exp. 3.2)

donde cada miembro de la tupla representa:

<i>OPF</i>	Conjunto de operaciones posibles de fabricación con herramienta: afinado, desbastado, digitalización,...
<i>HR</i>	Conjunto de herramientas disponibles para realizar una operación de mecanizado.
<i>PZ</i>	Conjunto de piezas sobre las que se realiza una operación.
<i>EST</i>	Conjunto de estrategias de fabricación, constituido por los recorridos que pueden realizar las herramientas alrededor de la pieza.
<i>TF</i>	Conjunto de trayectorias de fabricación. Representa el lugar geométrico de los centros de las herramientas que realizan una determinada operación para mecanizar la pieza.

**Tabla 3.2:** Descripción de los componentes del Dominio de Fabricación.

La figura 3.2 muestra el diagrama de bloques del MTF detallando el dominio de fabricación. A continuación se pormenorizarán cada uno de los componentes del dominio.



**Figura 3.2:** Componentes del MTF. En gris se detalla el bloque correspondiente al dominio de fabricación.

### El modelo geométrico de los objetos pieza (PZ)

En capítulos anteriores se ha constatado la necesidad de un modelo fundamentado en el espacio euclídeo n-dimensional a la hora de representar los objetos que intervienen en un proceso de fabricación. Ahora bien, la representación de los diferentes elementos que intervienen en la fabricación asistida por computador debe ajustarse a unos parámetros que permitan crear, mantener, manipular y almacenar estos elementos en sistemas de diseño automático. Con ese fin, los sistemas CAD/CAM poseen un conjunto de estructuras de datos, algoritmos de manejo y operaciones sobre esos datos que dan soporte a la propia información geométrica del objeto. En [Requicha, 1992] y [Bowyer, 1996] se citan las propiedades deseables que deben tener los modelos geométricos.

Entre ellas:

- Estar exentos de ambigüedad.
- Representar objetos de forma exacta.
- Un objeto sólo puede admitir una representación.
- Las operaciones sobre los objetos deben ser rápidas.
- El tamaño que ocupen los objetos en el computador debe ser reducido.

Existen numerosos modelos geométricos que cumplen estas características y que se dan en los actuales sistemas de diseño y fabricación asistida. Los más populares son los que utilizan modelos superficiales y los basados en modelos sólidos.

El Modelo Topológico Determinista define los objetos mediante su contorno, por lo que no se van a considerar en este estudio modelos basados en geometría sólida constructiva.

Dentro de los modelos superficiales, o modelos BRep (*Boundary Representation*), podemos encontrar distintas alternativas [Hearn, 1995], [Foley, 1990], [Bowyer, 1999], [Sanz, 2002] que pueden resumirse en:

- Poligonales
- Superficies cuádricas y supercuádricas
- Isosuperficies
- Superficies curvas

Aunque cada uno de ellos tiene distintas características, todos pueden abordarse a partir del Modelo Topológico de Fabricación, ya que la única propiedad que debe poseer el modelo superficial es la de proporcionar una formulación que permita obtener cualquier punto del contorno del objeto representado. Dicha formulación será utilizada por el sistema Superficie-Contorno a fin de proporcionar un conjunto de puntos (FR) al Modelo Computacional Topológico Determinista, tal y como se representa en la figura 3.2.

Por su generalidad se va a considerar, en la formulación del MTF, el modelo de superficies curvas, ya que se trata de una generalización del modelo BRep [Bowyer, 1999], en donde las

## 140 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

caras de las que se compone un objeto no son necesariamente planas. Dentro de este modelo, uno de los casos más comunes es el de las superficies paramétricas tales como las Bézier, Bsplines, Splines o NURBS [Piegl, 1997].

Las superficies paramétricas se definen mediante ecuaciones de dos parámetros  $(u, v)$ . Ambos valores recorren la superficie tridimensional en dos direcciones, de manera que el dominio paramétrico es plano. Estos modelos poseen buenas características de continuidad y suavidad en las formas, por lo que su utilización en sistemas CAD/CAM es bastante frecuente [Hearn, 1995]. Además, es posible asociar superficies curvas a un conjunto de puntos del espacio por medio de métodos de interpolación, lo cual las hace especialmente adecuadas para aproximar superficies que no están geoméricamente bien definidas y de las que únicamente se conocen algunos puntos (superficies libres).

Un ejemplo de este tipo de superficie Bspline de grado  $n$  sería [Faux, 1979]:

$$S(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n p_{j,k} B_{j,e}(v) B_{k,d}(u)$$

(Exp. 3.3)

para  $(m+1) \times (n+1)$  puntos de control  $p_{j,k}$  y donde  $B$  son las funciones *blending* o de combinación de Bernstein. Los polinomios de Bernstein se calculan de la siguiente manera [Lorentz, 1989]:

$$B_{k,n}(t) = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k}$$

(Exp. 3.4)

Las ventajas que aporta este tipo de modelo son [Molina, 2002]:

- Es un modelo exacto
- Las superficies definidas mediante las funciones de Bernstein son muy estables numéricamente.
- Son invariantes a transformaciones afines.

- Es un modelo muy utilizado, por lo que las técnicas están muy desarrolladas.

Por otra parte, uno de los inconvenientes más importantes, desde el punto de vista del Modelo Topológico de Fabricación, es el de poseer un cálculo de intersecciones muy complicado. No obstante, esta limitación puede solventarse mediante la utilización del modelo computacional mixto del MTD en el cual, el cálculo de distancias es independiente de la formulación del objeto.

En el MTF, un objeto de fabricación cualquiera estará definido como un conjunto de  $n$  superficies libres Bspline:

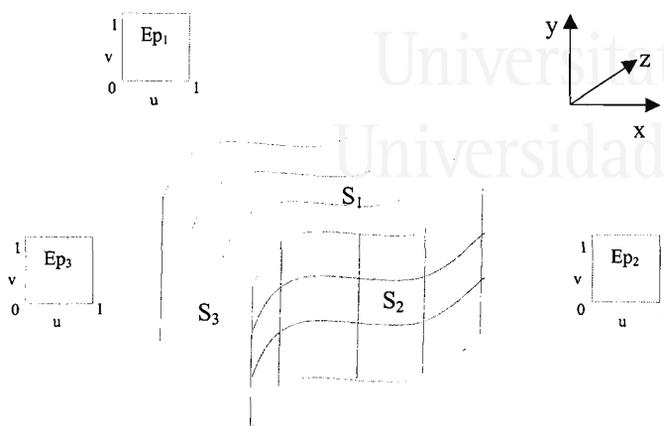
$$PS_n = \{S_i(u, v) : i \in [1..n], u \in [0..1], v \in [0, 1]\}$$

(Exp. 3.5)

Si una pieza está definida mediante más de una superficie, será necesario que cada una de ellas comparta la misma definición de curva frontera en cada dirección a fin de garantizar el cierre completo del objeto (ver figura 3.3):

$$\forall S_i \in PS_n \exists S_j \in PS_n / \begin{cases} S_i(0, v) = S_j(0, v) \vee S_j(1, v) \vee S_j(u, 0) \vee S_j(u, 1) \\ S_i(1, v) = S_j(0, v) \vee S_j(1, v) \vee S_j(u, 0) \vee S_j(u, 1) \\ S_i(u, 0) = S_j(0, v) \vee S_j(1, v) \vee S_j(u, 0) \vee S_j(u, 1) \\ S_i(u, 1) = S_j(0, v) \vee S_j(1, v) \vee S_j(u, 0) \vee S_j(u, 1) \end{cases}, i \neq j$$

(Exp. 3.6)



**Figura 3.3** Objeto cerrado formado por varias superficies libres ( $S_i$ ) junto con sus espacios paramétricos ( $Ep_i$ ). Por claridad, sólo se muestran las caras visibles del mismo.

### El sistema de conversión Superficie-Contorno

El modelo computacional mixto del MTD requiere un conjunto de puntos (FR) para representar los objetos de las operaciones morfológicas. Puesto que este conjunto es finito, es necesario realizar una discretización del modelo de superficies libres (PZ) que representa a los objetos a mecanizar en el Modelo Topológico de Fabricación. La figura 3.4 muestra al sistema Superficie-Contorno como el elemento que facilita la integración de la geometría de la pieza en el MTF, ya que se encarga de realizar dicha discretización. El dominio del sistema SC se expresa como:

$$SC : PZ \rightarrow FR$$

(Exp. 3.7)

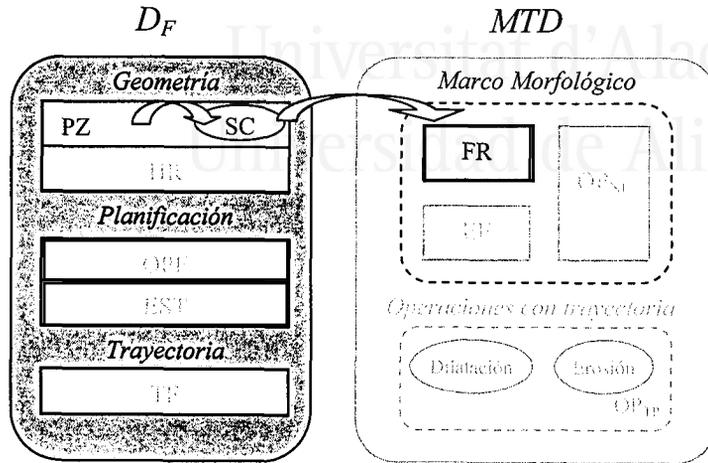


Figura 3.4: El sistema de conversión superficie-contorno y su utilización como elemento integrador de la geometría de la pieza en el MTF.

En la literatura, es posible encontrar distintos métodos que realizan la discretización de curvas y superficies libres atendiendo a diferentes aspectos geométricos como el error de curvatura o la disposición en el espacio paramétrico [Rypl, 1997], etc. Estos métodos suelen utilizarse para conseguir la poligonalización de la superficie, es decir, la consecución de un modelo poligonal que diste del modelo de superficie como máximo una cantidad límite. Con ello, se persigue la representación gráfica del objeto (un polígono es visualizado con más eficiencia que un *patch* superficial) o la simplificación de su geometría. De esta manera, una superficie libre que fuera plana sería representada mediante un único polígono de área igual al de la superficie. Los métodos que parten de la poligonalización no se adecuan al modelo de cálculo del Modelo Topológico de Fabricación, por lo que se recurre a otros métodos alternativos de discretización.

### Discretización de superficies

En el modelo computacional mixto del MTD, el modelo subyacente de cálculo no es poligonal, las distancias se calculan por cada punto, por lo que es necesario que la malla sea densa para garantizar un mínimo de error (ver *Capítulo 2: Cálculo de la*

## 144 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

*función de distancia mínima*). Si, además, se desea que el reparto de puntos sea lo más uniforme posible, se considerará una discretización ordenada y equidistante en el espacio paramétrico de cada superficie, por lo que los puntos aparecerán organizados en forma de malla o retícula bidimensional.

Sea  $PS$  el conjunto de  $n$  superficies libres que conforman un determinado objeto  $P$ . Supóngase que cada superficie se encuentra normalizada en sus dos direcciones paramétricas:  $u$  y  $v$ :

$$PS_n = \{r_i(u, v) : i \in [1..n], u \in [0..1], v \in [0..1]\}$$

(Exp. 3.8)

Sea  $DS$  el conjunto de dominios de todas las superficies implicadas y  $DS_i$  el dominio de la malla para un determinado objeto  $i$  definido como:

$$\begin{aligned} DS &= \{DS_i : i \in [1..n]\} \\ DS_i &= \{(x_j, y_k) : j \in [0..m_i - 1], k \in [0..s_i - 1]\} \\ x_j &= j \cdot \Delta_j : \Delta_j = \frac{1}{m_i - 1}, y_k = k \cdot \Delta_k : \Delta_k = \frac{1}{s_i - 1} \\ m_i, s_i &\in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

(Exp. 3.9)

Se denominará  $GS$  al conjunto de todas las mallas que representan a un determinado objeto en el Modelo Topológico de Fabricación. Una malla  $GS_i$ , correspondiente a una superficie libre  $r_i$ , estará formada por una colección de puntos isoparamétricos para cada una de las direcciones posibles:

$$\begin{aligned} GS &= \{GS_i : i \in [1..n]\} \\ GS_i &= \{r_i(u, v) : (u, v) \in DS_i\} \end{aligned}$$

(Exp. 3.10)

Es posible obtener una medida del error que se comete al realizar una discretización uniforme como la presentada en (Exp. 3.10), y

que dependerá de la máxima separación existente entre puntos vecinos y la geometría de la herramienta utilizada. Lógicamente, este error disminuye al aumentar el número de puntos, aunque esto incrementa el tiempo de cálculo. Como ya se analizó en el capítulo anterior, la discretización convierte al modelo en independiente de la geometría del objeto, lo que lo hace más simple y eficiente que los métodos exactos en la mayoría de casos. Tal y como se muestra en la expresión (Exp. 3.9), un representante discreto de mayor o menor definición puede modelar cada superficie. Los valores adecuados de  $m_i$  y  $s_i$  dependerán de la complejidad de la propia superficie.

En el Modelo Topológico de Fabricación, se ha optado por el modelo de malla por su simplicidad, sin embargo, pueden definirse otros métodos computacionales que hagan posible otro tipo de discretización. Una alternativa interesante sería la utilización del modelo poligonal como base de cómputo. Esta opción llevaría a la definición de una función distancia para polígonos y permitiría aprovechar los métodos de discretización de superficies comentados anteriormente, con la consecuente reducción en el número de cálculos. Su estudio y análisis quedan fuera de los objetivos de este trabajo, pero se presenta como una atractiva y obligada línea de avance.

### El modelo geométrico de los objetos herramienta (HR)

En el proceso de fabricación mediante mecanización, la herramienta es el elemento más importante. De su geometría, resistencia, dureza, velocidad y masa depende la calidad del producto fabricado. Este apartado se centrará en los aspectos geométricos de las herramientas, ya que son los responsables de producir cambios en el material base una vez que los parámetros físicos y dinámicos han sido debidamente seleccionados.

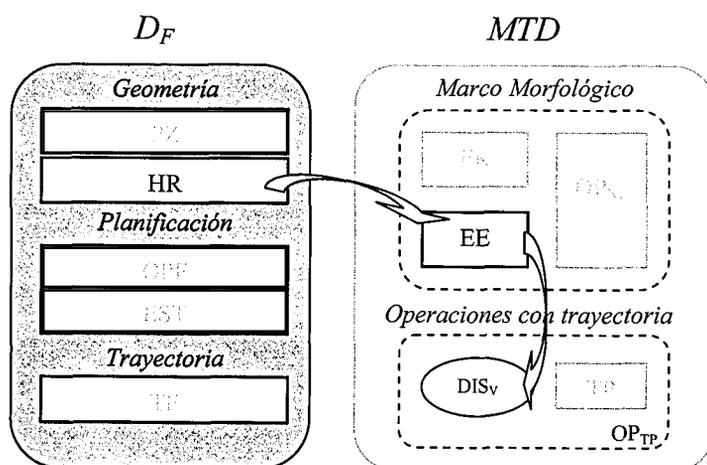
Cuando se habla de geometría de una herramienta de mecanización, se está teniendo en cuenta su geometría en el estado de funcionamiento. En la mayoría de centros de mecanizado, ésta se encuentra girando alrededor de un eje (ver capítulo 1 - *Estado del arte*), con lo que aquí se considerarán geometrías de revolución.

En el Modelo Topológico de Fabricación, las geometrías de las herramientas en funcionamiento serán consideradas como los elementos que estructuran los sustratos materiales que

## 146 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

conformarán los objetos a fabricar. Estos elementos estructurantes constituirán el fundamento de las operaciones morfológicas del modelo topológico.

El modelo computacional mixto propuesto en el capítulo anterior requiere de la geometría exacta de la herramienta, de manera que sea posible calcular una distancia desde un punto cualquiera del espacio y en la dirección marcada por un vector. La selección de una determinada herramienta será considerada, bajo este modelo, como un elemento dentro del conjunto de elementos estructurantes (EE) que llevará asociada un cálculo específico de distancia dentro del conjunto de métodos de  $DIS_v$  (ver figura 3.5).



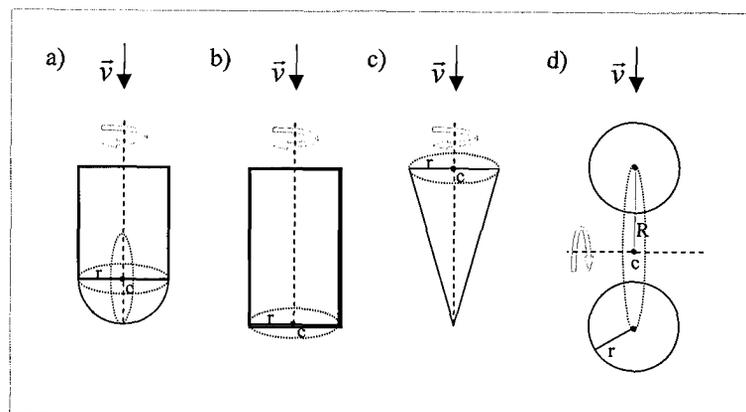
**Figura 3.5:** Utilización del conjunto de herramientas HZ en el MTF. Las operaciones con trayectoria del MTD se basan en el cálculo de una distancia entre la herramienta y una transformación de la pieza que determina la geometría de la propia herramienta.

A continuación se mostrarán los modelos de las herramientas de uso más extendido junto con la formulación asociada a cada una de ellos dentro del conjunto de métodos de  $DIS_v$ .

### Herramientas esféricas

Son las más habituales en centros de mecanizado. La superficie de corte consiste en una semiesfera que, a su vez, se prolonga en un cilindro que sirve de elemento de sujeción (ver figura 3.6). El

movimiento de ataque al material, se suele efectuar en la dirección del eje de rotación de la herramienta (centros de mecanizado de 3 ejes). Desde del punto de vista de un sistema generador de trayectorias, estas herramientas son las que ofrecen menos dificultades al problema de cálculo del compensado de trayectoria<sup>1</sup>, ya que siempre existe la misma distancia desde el centro de la herramienta a cualquier punto de su superficie de corte. Presentan la limitación mecánica de arrancar pequeñas porciones de material.



**Figura 3.6:** Modelos geométricos de las principales herramientas de mecanizado: a) herramienta esférica, b) cilíndrica, c) cónica y d) tórica.

La distancia mínima existente entre un punto y una herramienta esférica de centro  $c$ , radio  $R$  y eje de rotación paralelo al eje  $z$ , viene dada por la expresión (Exp. 3.11) para la dirección que marca el eje de rotación.

$$d_{\min} = \begin{cases} c_z - p_z - \sqrt{R^2 - \sqrt{(c_x - p_x)^2 + (c_y - p_y)^2}} & , \sqrt{(c_x - p_x)^2 + (c_y - p_y)^2} \leq R \\ \infty & , \sqrt{(c_x - p_x)^2 + (c_y - p_y)^2} > R \end{cases}$$

(Exp. 3.11)

<sup>1</sup> En el capítulo primero (Estado del Arte) se enumeran distintas técnicas utilizadas para resolver el problema del compensado de herramienta que están limitadas para herramientas de un solo radio. Es el caso de las herramientas esféricas y cilíndricas.

## 148 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

La función anterior determina el modelo matemático de una herramienta esférica en el conjunto  $DIS_V$ , dentro del Modelo Topológico Determinista, para un centro de mecanizado de 3 ejes. El cálculo de la distancia mínima, desde un punto externo según una dirección de ataque distinta al eje de rotación (centros de mecanizado de 5 ejes), estaría definido por la ecuación de intersección entre la recta que pasa por un punto  $p$  con vector director  $\bar{v}$  y una esfera de centro  $c$ .

### Herramientas cilíndricas

Se encuentran habitualmente en centros de mecanizado al igual que las esféricas. Como se puede apreciar en la figura 3.6, la dirección de ataque viene dada por su eje de rotación. La superficie de corte de material está situada en su base circular, aunque algunas de ellas son capaces de cortar material por encima de ésta. Se trata de herramientas de geometría simple que tienen limitada su capacidad de perfilar objetos a causa de su superficie de corte plana. En general, suelen utilizarse en procesos de desbastado. Su modelo geométrico en el modelo computacional mixto del MTD viene dado por la ecuación (Exp. 3.12), en el que se considera una dirección de ataque paralela al eje  $Z$ .

$$d_{\min} = \begin{cases} c_z - p_z & , \sqrt{(c_x - p_x)^2 + (c_y - p_y)^2} \leq r \\ \infty & , \sqrt{(c_x - p_x)^2 + (c_y - p_y)^2} > r \end{cases}$$

(Exp. 3.12)

### Herramientas cónicas

La geometría de estas herramientas (ver figura 3.6) conlleva limitaciones de resistencia mecánica que hace exclusivo su uso para el perfilado de esquinas y entrantes de objetos. Excepto la base del cono, toda su superficie tiene capacidad de cortar material. La dirección de ataque de estas herramientas, al igual que las anteriores, viene dada por su eje de rotación. Su modelo geométrico para el MCTD mixto viene dado por el cálculo de la distancia mínima que expresa la ecuación (Exp. 3.13).

$$d_{\min} = \begin{cases} c_z - p_z - \left( 1 - \frac{\sqrt{(c_x - p_x)^2 + (c_y - p_y)^2}}{r} \right) \cdot h & , \sqrt{(c_x - p_x)^2 + (c_y - p_y)^2} \leq r \\ \infty & , \sqrt{(c_x - p_x)^2 + (c_y - p_y)^2} > r \end{cases}$$

(Exp. 3.13)

Este tipo de herramientas suelen utilizarse en centros de mecanizado de 5 ejes para el perfilado de superficies o *pencil tracing* [Choi, 1991], con el objeto de marcar bordes o esquinas; en este caso, la dirección de ataque viene determinada por la normal a la superficie en un punto concreto (ver figura 3.7). Para otras direcciones de ataque, es posible encontrar una transformación geométrica que sitúe el vector de ataque  $\vec{v}$  sobre el eje Z y, así, poder aplicar de nuevo la ecuación anterior.

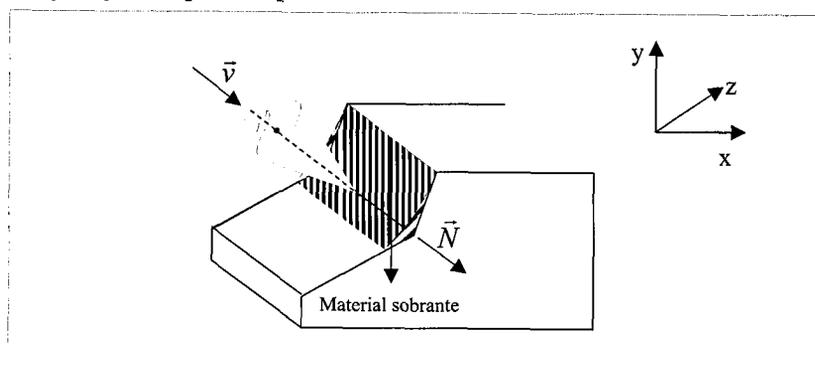


Figura 3.7: Proceso de perfilado en 5 ejes mediante herramienta cónica.

### Herramientas tóricas

Este tipo de herramienta es poco frecuente en centros de mecanizado. Se compone de varias cuchillas cilíndricas dispuestas de manera radial alrededor de un eje de rotación. La multiplicidad de cuchillas la dota de una alta capacidad de arrastre de material. También poseen capacidad de perfilado en la dirección perpendicular al eje de rotación (radio menor del toro, ver figura 3.6), de ahí que sea ésta su dirección normal de ataque. Su geometría, de formulación más complicada que las anteriores, representa un obstáculo a la hora de calcular el compensado de herramienta por métodos tradicionales.

## 150 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

Para simplificar el cálculo, en el Modelo Topológico de Fabricación se ha considerado la superficie de corte en funcionamiento como un disco en vez de un toro, ya que ambas son equivalentes a nivel de mecanización por presentar la misma superficie útil de corte: En la figura 3.8 se muestra su representación geométrica.

Si  $R$  y  $r$  son los radios mayor y menor respectivamente de una herramienta de disco, con centro situado en el origen de coordenadas, y se asume como dirección de ataque el eje cartesiano  $X$ ; dado un punto  $p$  de coordenadas  $(p_x, p_y, p_z)$ , es posible deducir la función de distancia mínima de la siguiente manera:

$$m(p_x) = R + \sqrt{r^2 - p_x^2}$$

$$d_{\min} = \begin{cases} p_y - \sqrt{m(p_x) - p_z^2} & , |p_x| \leq r, |p_z| \leq m(p_x) \\ +\infty & , \text{otro caso} \end{cases}$$

(Exp. 3.14)

La ecuación (Exp. 3.14) determina el valor de la distancia desde cualquier punto  $p$  considerando a la herramienta como un apilamiento de círculos de distinto radio  $m(p_x)$ . Este modelo es válido para cualquier otra posición y orientación de la herramienta, puesto que siempre es posible encontrar una transformación que aplicada sobre todos los puntos lleve a la herramienta a esa posición.

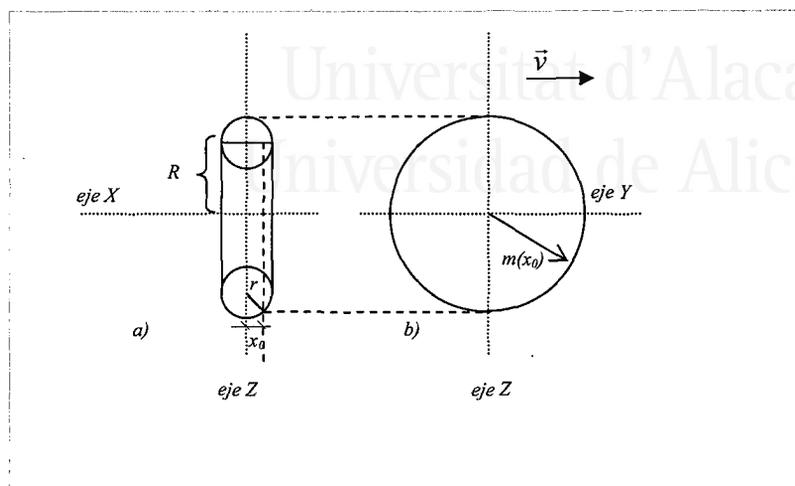


Figura 3.8: Modelado de una herramienta tórica en el MTD para una dirección de ataque en el eje Y: a) vista frontal, b) vista lateral.

### Otros tipos de herramienta

Además de los tipos analizados en el apartado anterior, es posible encontrar otras geometrías de herramienta en centros de mecanizado. Por lo general, suelen ser especializaciones de los modelos antes descritos con diferencias que se centran en el área de corte. El modelado de estas herramientas difiere poco del presentado, pudiendo haber variaciones en el vector de ataque de la herramienta y restricciones en las ecuaciones de cálculo de distancia mínima.

Por otra parte, en [Molina, 2002] se define un modelo de diseño geométrico que utiliza herramientas virtuales. Una herramienta virtual es considerada como un objeto geométrico que, junto con una trayectoria, corta un material base. Desde el punto de vista geométrico, puede verse como una secuencia de sucesivas diferencias booleanas entre el objeto original y la herramienta. Se trata de un modelo de diseño de superficies basado en conceptos del mecanizado. En este caso es también posible utilizar el modelo topológico. El problema se puede abordar desde la generalidad si se considera una superficie libre como herramienta para modelar a la herramienta virtual, o bien desde el propio método que expone el autor para la generación de

## 152 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

herramientas virtuales a partir de una composición de herramientas básicas como las anteriores. De esta forma, podrían utilizarse técnicas morfológicas que realizan la descomposición del elemento estructurante como las descritas en [Shih, 1991] y [Anelli, 1998], aunque merecerían un estudio mucho más profundo que quedaría fuera de los objetivos de este trabajo.

En el modelo computacional mixto del MTD, el cálculo de la distancia entre un punto y una superficie libre viene dado por la intersección entre la recta que pasa por ese punto, con vector director el de la dirección de ataque, y dicha superficie. En la literatura de geometría computacional, se pueden hallar distintos métodos exactos de cálculo de esta intersección [Farin, 1993], aunque su coste temporal viene determinado por el número de puntos de control que definen la superficie Bspline.

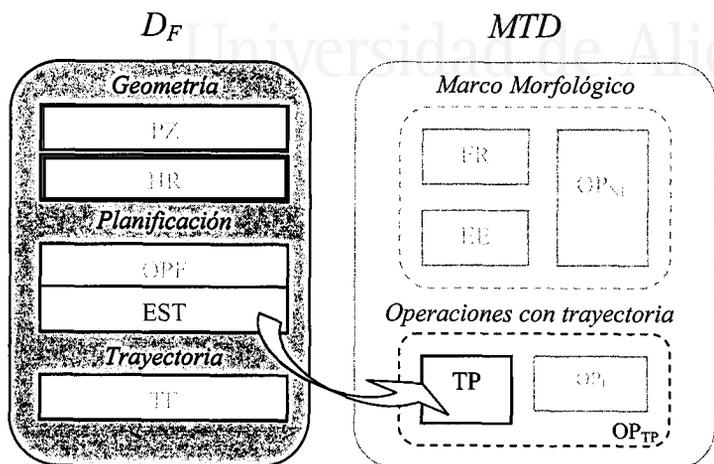
### Estrategias de fabricación (EST)

Por estrategia de fabricación se entiende el conjunto de decisiones que han de tomarse para abordar el mecanizado de una pieza, es decir, por dónde deben transcurrir las trayectorias, qué geometría deben seguir, cómo debe llegarse a definir el objeto final, etc.

La elección de qué estrategia utilizar a la hora de mecanizar un objeto tiene por nombre planificación de la trayectoria. En ocasiones, la planificación es automática y la estrategia es seleccionada por el sistema generador de trayectorias. A veces, es el experto el que, basándose en su conocimiento, elige manualmente el tipo de estrategia a utilizar. Es posible, incluso, que no exista planificación y que la estrategia sea impuesta por la propia dinámica de la máquina (como es el caso de los tornos copiadores).

No es objeto del Modelo Topológico de Fabricación realizar la planificación o la elección de una determinada estrategia, sino que, como modelo, debe incluirla como parte del mismo proceso de mecanizado. La estrategia definirá el orden o recorrido por el que transcurre una operación morfológica. Para ello, se hará uso del mecanismo del que dispone el Modelo Topológico Determinista para definir recorridos sobre operaciones morfológicas, es decir, el conjunto de las transformaciones homogéneas paramétricas (TP). De este modo, a una determinada estrategia se le asociará un subconjunto de transformaciones de

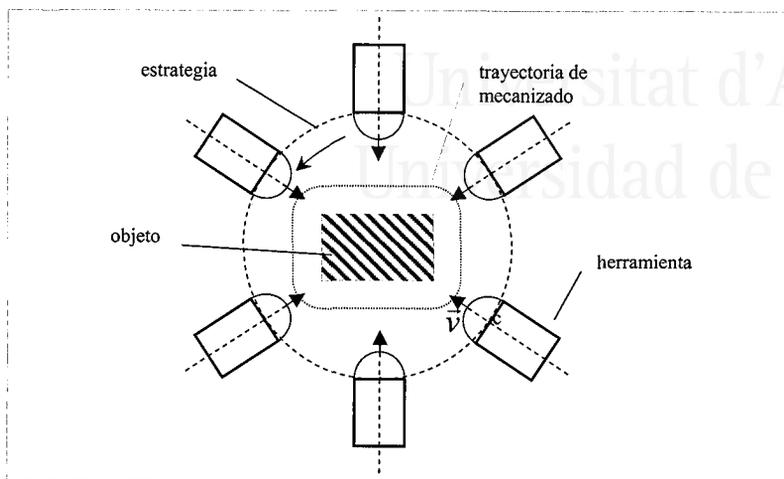
TP que serán finalmente utilizadas por el modelo para el cálculo de la operación morfológica. Este esquema de funcionamiento se muestra en la figura 3.9.



**Figura 3.9:** Relación del conjunto de estrategias EST sobre el MTD del Modelo Topológico de Fabricación. La elección de la estrategia determina la transformación homogénea de TP.

En principio, la posición de la herramienta es determinada por la estrategia de mecanizado. No obstante, la posición final de la misma, es decir, aquella en la que se realiza arrastre de material, debe ser validada previamente en previsión de que la zona eliminada corresponda o no al objeto a fabricar (ver figura 3.10). Análogamente, en el MTF las estrategias determinarán un movimiento previo de herramienta, de manera que se colocará a ésta en una determinada posición y dirección de ataque respecto del material base. Así mismo, se optará por el movimiento del objeto en vez de la herramienta, por lo que ésta permanecerá siempre en el origen de coordenadas para facilitar el cálculo de distancias.

## 154 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación



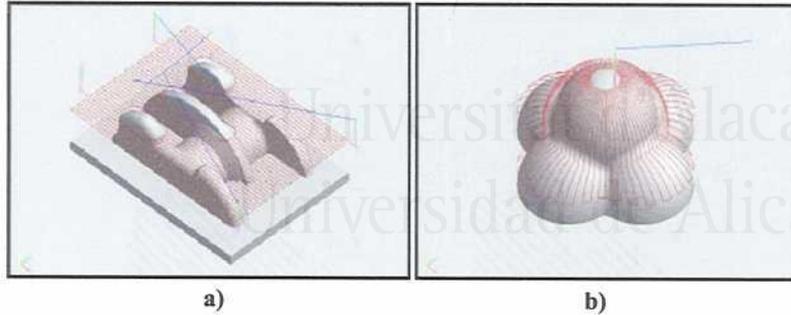
**Figura 3.10:** Mecanización de un objeto cuadrado mediante estrategia circular y herramienta esférica.

A continuación se detallará cómo se modelan distintas estrategias de mecanizado en el MTF.

### Fabricación en 3 ejes

En este tipo de fabricación intervienen herramientas dotadas de tres grados de libertad que coinciden con los ejes cartesianos. Las estrategias son elaboradas en dos dimensiones coincidiendo éstas con los ejes cartesianos de translación de la herramienta (normalmente ejes X-Y). El acercamiento progresivo al material se produce en el tercer eje que es el de ataque de la herramienta (usualmente el Z).

Las estrategias para tres ejes no requieren de orientación de herramienta, ya que no existe libertad para ello. Consecuentemente, serán modeladas en el Modelo Topológico de Fabricación como una secuencia de matrices de translación paramétrica que colocarán al objeto en la posición deseada de ataque y, desde la cual, se efectuará el cálculo de distancias apropiado. Este cálculo podrá ser de dos tipos: *no restringido* o *restringido*, en función de si el acercamiento de la herramienta está también limitado por la estrategia de fabricación (mecanizado a altura variable o constante, respectivamente). En la figura 3.11 se muestra un ejemplo de estos tipos.



**Figura 3.11:** Distintos tipos de mecanizado en tres ejes: a) mecanizado restringido a altura constante en zig-zag y b) mecanizado no restringido de altura variable con distribución radial. En ambos casos puede apreciarse la estrategia como una proyección bidimensional sobre un objeto 3D.

De acuerdo con el modelo topológico determinista, una estrategia de mecanizado para tres ejes vendrá definida mediante una transformación homogénea paramétrica de la forma:

$$T^3(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x(t) & -c_y(t) & z_0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Exp. 3.15)

En la expresión (Exp. 3.15),  $c_x(t)$ ,  $c_y(t)$  definen la curva bidimensional de traslación de la herramienta que se deriva de la estrategia de mecanizado. La componente  $z$  no es considerada en este caso, ya que dependerá directamente de la altura inicial  $z_0$  que la estrategia otorgue a la herramienta. En el caso de mecanizado a altura constante, la componente viene marcada por el plano de acercamiento  $z_i$  y la función distancia determinará si la posición es válida. En el caso de mecanizado a altura variable, la componente estará directamente determinada por dicha distancia (ver figura 3.12).

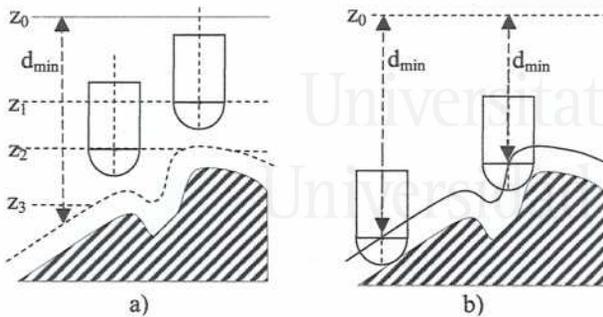


Figura 3.12: Esquemas de mecanizado en 3 ejes. a) Mecanizado a altura constante, b) mecanizado a altura variable.

### Fabricación en 5 ejes

En este tipo de mecanizado, la herramienta es dotada de capacidad de orientación mediante dos ejes auxiliares. De esta manera, es posible conseguir casi cualquier dirección de ataque para la herramienta. Se utiliza principalmente en acabados, perfilados y zonas de difícil acceso.

Existen estrategias especialmente diseñadas para este tipo de fabricación. De todas ellas, la más utilizada es la de mecanizado a altura variable con dirección normal a la superficie de trabajo. Derivado de la estrategia de tres ejes, este modo de mecanizar consigue unos excelentes acabados en las piezas, debido a que la herramienta se sitúa de manera perpendicular a la porción de objeto a fabricar en cada momento (ver figura 3.13).

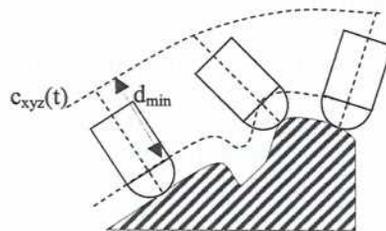


Figura 3.13: Mecanizado con 5 ejes y estrategia de altura variable con dirección normal a la superficie.

Una estrategia de 5 ejes será modelada en el Modelo Topológico de Fabricación como una matriz de transformación homogénea paramétrica con capacidad para la orientación. Dada una curva de posicionamiento  $c_{xyz}(t)$  y una secuencia de vectores de orientación  $\vec{v}_{xyz}(t)$ , la matriz tendrá la forma:

$$T^3(t) = \begin{bmatrix} \cos(\beta_t) & 0 & \sin(\beta_t) & 0 \\ \sin(\alpha_t)\sin(\beta_t) & \cos(\alpha_t) & -\sin(\alpha_t)\cos(\beta_t) & 0 \\ -\sin(\beta_t)\cos(\alpha_t) & \sin(\alpha_t) & \cos(\alpha_t)\cos(\beta_t) & 0 \\ -c_x(t) & -c_y(t) & -c_z(t) & 1 \end{bmatrix}$$

(Exp. 3.16)

donde  $\alpha_t$ ,  $\beta_t$  representan los ángulos existentes entre el vector  $\vec{v}_{xyz}(t)$  y los planos ZX y ZY respectivamente.

### Fabricación por imitación

Aunque la mayoría de procesos de mecanizado se llevan a cabo en centros de 3 y 5 ejes, no es ésta la única alternativa. En ocasiones, las mecanizaciones tienen lugar en máquinas sujetas a fuertes restricciones tanto en el tipo como el número de ejes. Estas limitaciones se traducen en estrategias fijas de mecanizado en las que sólo es posible realizar la fabricación de una determinada manera, es decir, la estrategia de mecanizado es única. Este tipo de máquinas provienen de renovaciones de máquinas antiguas donde, para dar versatilidad al sistema, se han sustituido los accionadores neumáticos e hidráulicos por motores eléctricos controlados por computador. Esta técnica, denominada *retrofitting*, permite la reutilización de maquinaria antigua en sistemas modernos, con el consiguiente ahorro de costes. Sin embargo, puesto que estas máquinas se sitúan fuera de los estándares actuales de fabricación, presentan el inconveniente de no adecuarse a los sistemas actuales de cálculo de trayectorias.

Un ejemplo típico del caso anterior es el de los tornos de control numérico. Son los herederos de los antiguos pero eficientes tornos copiadores y son utilizados, en la actualidad, por sectores tradicionales de fabricación como el calzado [Salas, 2000]. En este tipo de máquinas, existe un eje principal de rotación sobre el que se dispone la herramienta. Ésta es capaz de trasladarse longitudinalmente sobre el anterior, de manera que la trayectoria que se describe finalmente es un helicoides. Debido a la gran

## 158 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

inercia que presenta el sistema, el eje rotativo y el de traslación deben mantenerse a una velocidad constante, por lo que, además, se describe un helicoides de paso fijo. Por último, un tercer eje de ataque, de naturaleza angular o cartesiana, coloca a la herramienta sobre el material base.

La mayoría de sistemas generadores de trayectorias sólo están preparados para operar sobre sistemas cartesianos de tres o cinco ejes, por lo que su uso está vedado en sistemas con fuertes restricciones dinámicas. Los problemas se presentan, principalmente, a partir de la definición de ejes no lineales y de las limitaciones en el movimiento de los mismos. En el Modelo Topológico de Fabricación, estos sistemas no son más complicados que el resto, ya que la estrategia viene definida de antemano, con la única diferencia de que la estrategia es impuesta por la propia máquina.

En la ecuación (Exp. 3.17) se muestra la transformación paramétrica homogénea que representa la estrategia utilizada por un torno de control numérico como el descrito anteriormente para un helicoides de paso fijo  $s_x$ .

$$T^3(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{s_x}c_x(t)\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{s_x}c_x(t)\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{s_x}c_x(t)\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{s_x}c_x(t)\right) & 0 \\ -c_x(t) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

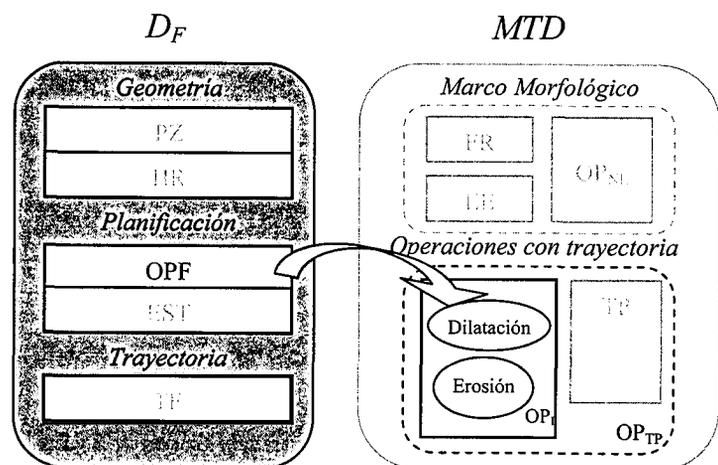
(Exp. 3.17)

### Operaciones de fabricación (OPF)

Una vez definidos los elementos que constituyen la base del proceso de mecanizado (piezas, herramientas y estrategias), es necesario especificar operaciones que produzcan resultados útiles. El Modelo Topológico de Fabricación se apoya en un modelo morfológico determinista, el MTD. Por esta razón, las operaciones que se van describir tendrán estrictamente un significado morfológico que, junto al concepto de trayectoria aportado por el determinismo, se trasladará al proceso de fabricación mediante mecanizado. En el modelo, una

determinada operación de fabricación estará asociada a una operación morfológica definida por trayectoria ( $OP_{TP}$ ) tal y como muestra la figura 3.14.

Son numerosas las distintas operaciones que es posible realizar en el campo de la morfología matemática. Casi todas ellas han sido definidas y aplicadas dentro del campo de la visión por computador. Sin embargo, y a pesar de que el mecanizado es un proceso de naturaleza morfológica, no existen referencias de su uso en el contexto de la fabricación (ver *capítulo 1 – Estado del arte*). En este trabajo se definen un conjunto reducido de operaciones morfológicas que tienen una aplicación directa en el contexto que aquí se trata. El análisis y la posible utilización de otras operaciones, ya descritas en la morfología matemática clásica, se muestran aquí como una atractiva línea de investigación futura que puede conducir a interesantes resultados en el mundo de la fabricación por computador.



**Figura 3.14:** Relación del conjunto de operaciones de fabricación OPF con el MTD del Modelo Topológico de Fabricación. La operación seleccionada determina el tipo de operación instantánea en el MTD.

Se ha conservado, en la denominación de las operaciones, el nombre tradicional derivado del mundo de la imagen, aunque se ha completado utilizando términos más cercanos a este modelo. La definición formal y los modelos computacionales de las operaciones dentro del Modelo Topológico Determinista se

encuentran en el capítulo segundo de este trabajo, por lo que en este apartado sólo se estudiará su significado dentro del contexto del Modelo Topológico de Fabricación.

### **La Dilatación por Trayectoria o Digitalización Virtual**

Esta operación se corresponde con la obtención, mediante una trayectoria, de los centros del elemento estructurante cuando éste toca el contorno del objeto (Exp. 2.23).

En el Modelo Topológico de Fabricación, una operación de dilatación equivale a un recorrido virtual de un objeto (la herramienta) sobre la superficie de un segundo (la pieza). Este proceso virtual es similar al que en la realidad realizan los digitalizadores mecánicos (también denominados *palpadores*), de ahí que haya sido denominada *digitalización virtual*. Esta operación está relacionada con los procesos de obtención de trayectorias compensadas de mecanizado, ya que es, precisamente esta operación, la que sirve para definir el objeto deseado: la posición del centro de la herramienta es la secuencia que necesita una máquina para mecanizar una pieza, eliminando el material sobrante en su recorrido.

### **La Erosión por Trayectoria o Mecanización Virtual**

La definición de esta operación lleva al cálculo de posiciones centrales de un objeto estructurante (la herramienta) que quedan en el interior del mismo tocando su contorno desde el interior (Exp. 2.28).

En este modelo, el sentido de la operación es complementario de la operación anterior: se realiza un recorrido virtual por el interior del objeto, lo que recuerda al proceso real de eliminación de material sobrante por parte de una herramienta (en este caso el término morfológico *erosión* es también adecuado) y por ello se le ha denominado *mecanizado virtual*.

En el siguiente capítulo se demostrará la utilidad de esta operación para la reconstrucción de objetos a partir de trayectorias externas, tales como las generadas por los digitalizadores mecánicos a partir de un elemento palpador de geometría conocida.

### **El Cierre por Trayectoria o Reconstrucción Virtual**

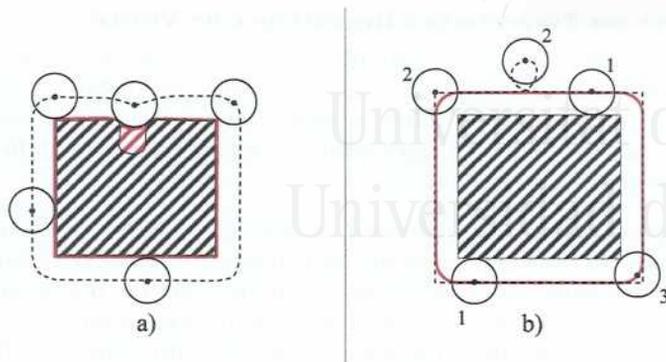
Esta operación equivale a una dilatación seguida de una erosión por trayectoria (digitalización más mecanización) (Exp. 2.33). El resultado obtenido equivaldrá al objeto más parecido al original que es posible fabricar mediante la estrategia que define la trayectoria de la operación.

No es posible fabricar fielmente todos los objetos mediante la utilización de una determinada herramienta: la propia geometría de ésta restringe su capacidad de definición. La operación de *reconstrucción virtual* obtendrá el objeto que realmente será mecanizado mediante una trayectoria determinada (ver figura 3.15). La característica de idempotencia de la operación morfológica garantiza este resultado.

En este punto, es preciso destacar que, aunque la operación erosión se la ha asociado anteriormente con el proceso de reconstrucción de un objeto a partir de trayectorias externas, la operación completa de reconstrucción representa un cierre morfológico, en el que la primera operación morfológica, la dilatación, ha sido obtenida físicamente mediante un dispositivo mecánico (el digitalizador).

### **La Apertura por Trayectoria u Optimización de trayectoria**

La operación se compone de una erosión seguida de una dilatación por trayectoria (mecanización seguida de digitalización virtual)(Exp. 2.31). Su sentido, en el contexto del MTF, está relacionado con el cálculo de trayectorias eficientes de mecanizado. La operación apertura computará la trayectoria mínima que, mediante una herramienta y estrategia determinadas, puede mecanizar el objeto en su recorrido. Esta afirmación se apoya en el hecho de que el elemento estructurante siempre toca la superficie a mecanizar, por lo que no se pueden producir posiciones de herramienta no útiles como muestra la figura 3.15.



**Figura 3.15:** Operaciones compuestas en el MTF. a) Cierre por trayectoria o reconstrucción virtual. El objeto a mecanizar aparece en negro, el trazo rojo se corresponde con la operación cierre. La zona rallada en rojo se corresponde con zonas de material sobrante o residuos. b) Apertura por trayectoria u Optimización de trayectoria (en trazo rojo). Situaciones en b) 1: Trayectoria útil (se perfila el contorno del objeto). 2: Trayectoria no útil (la herramienta queda fuera del objeto). 3: Herramienta en trayectoria útil calculada por apertura a partir de la trayectoria original (punteada).

Otra ventaja que aporta la optimización de trayectorias es la de mejorar el acabado de la pieza, ya que la herramienta siempre se encuentra en situación de arranque de material para perfilear el objeto. Consecuencia de ello, el conjunto de fuerzas que actúan sobre la pieza permanece constante, obteniéndose una continuidad en el acabado del contorno.

### Residuo por trayectoria

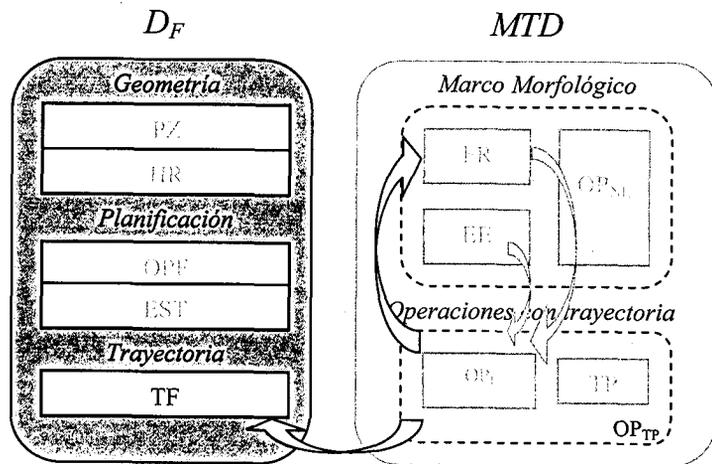
El residuo morfológico se define como la diferencia existente entre primitivas morfológicas [Serra, 1982]. En este caso, se analiza la diferencia entre un objeto y su cierre. En el MTF, tiene, efectivamente, este sentido: el residuo por trayectoria computará el material que no ha podido ser eliminado a la hora de mecanizar un objeto mediante una herramienta y estrategia determinadas (ver figura 3.15 a).

Esta operación proporciona una buena medida de la calidad en la fabricación de un determinado objeto y su uso en sistemas de planificación de trayectorias es útil a la hora de averiguar si una determinada estrategia y herramienta son válidas dentro de un proceso de fabricación.

### Trayectorias de fabricación (TF)

Las operaciones del Modelo Topológico de Fabricación se definen como leyes de composición interna, de ahí que el resultado de las mismas (un conjunto de puntos) pueda ser tomado como entrada de nuevas operaciones morfológicas, tal y como muestra la figura 3.16. Además, se cuenta con la ventaja de que, en este conjunto, los puntos siempre estarán ordenados, puesto que han sido obtenidos gracias a la aplicación de sucesivas matrices de transformación homogénea en función de valores reales consecutivos.

En el MTF, el resultado de las operaciones morfológicas por trayectoria es un conjunto ordenado de puntos del espacio tridimensional. Dicho conjunto está formado por las posiciones de los centros de las herramientas virtuales (elementos estructurantes para el Modelo Topológico Determinista) utilizadas por las distintas operaciones. La interpretación física de los puntos de TF será distinta en función del tipo de operación, como se verá en el siguiente capítulo. Así mismo, este conjunto podrá ser utilizado como entrada para otras operaciones morfológicas.



**Figura 3.16:** El conjunto de trayectorias de mecanizado TF representa el resultado de la aplicación de una operación con trayectoria del MTD y puede ser usado como objeto forma (FR) para realizar nuevas operaciones.

## Conclusiones

Una de las aportaciones más relevantes de esta investigación ha sido la definición del proceso del mecanizado en términos de un problema morfológico. Debido a que un proceso de mecanización mediante máquina herramienta se basa en la descripción geométrica de formas, este proceso puede ser descrito como una operación morfológica condicionada en la que el elemento estructurante modela a la herramienta, el objeto sobre el que se aplica la operación modela la pieza a construir y la condición modela la trayectoria que sigue la herramienta. Gracias a esta definición, problemas no exentos de complejidad que poseen otros métodos de obtención de trayectorias son aquí inexistentes por propia definición. De esta manera, el modelo define operaciones morfológicas cuyo resultado lo componen trayectorias compensadas libres de colisiones. También permite la recuperación de una superficie a partir de los puntos externos producidos por un digitalizador mecánico.

En los casos de mecanizados en los que las máquinas están sujetas a fuertes restricciones dinámicas, los métodos actuales no permiten especificar éstas de forma automática, por lo que la generación de trayectorias se debe hacer de forma semi-manual. El Modelo Topológico de Fabricación, como modelo orientado al mecanizado, es flexible a la hora de poder especificar cualquier tipo de recorrido, lo que lo convierte en especialmente interesante en el caso de máquinas que se reconvierten para poder ser usadas mediante un control numérico.

El modelo permite la reconstrucción de superficies, al ser capaz de ordenar nubes de puntos espacialmente y, por lo tanto, permitir su correcta interpolación. Como se ha visto a lo largo de este trabajo, la idea en la que se centra el Modelo Topológico Determinista es la ordenación de un conjunto de puntos. Una vez definida, se realizan las posteriores operaciones morfológicas. Sin embargo, la ordenación que produce el modelo es, en sí misma, una solución a este problema.

Tras la aplicación del modelo computacional del MTD al entorno de la fabricación industrial mediante máquinas herramienta, han emergido del propio modelo nuevas operaciones cuya aplicación cobra especial importancia en esta área; correctores de trayectoria e identificación de residuos son dos de los más interesantes.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo Cuarto

### Aplicaciones del MTF

En este capítulo se mostrarán dos aplicaciones concretas del Modelo Topológico de Fabricación: el compensado de trayectorias de mecanizado y la obtención de superficies descritas mediante digitalizadores mecánicos; se definirán las operaciones de fabricación y se construirá un modelo de cálculo fundamentado en la particularización del modelo computacional del Modelo Topológico Determinista mostrado en el capítulo segundo.

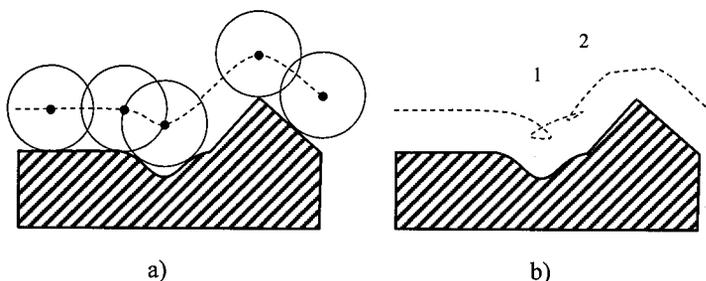
Con la implementación de este modelo se pretende dar respuesta a problemas concretos presentes en la fabricación asistida por computador. La validación de los modelos aquí definidos será llevada a cabo mediante su aplicación a casos concretos de fabricación y digitalización reales.

## Compensado de trayectorias de mecanizado

En el capítulo primero de este trabajo ya se presentó el problema del compensado como uno de los de mayor complejidad en el campo de la fabricación mediante máquinas herramienta; de hecho, el problema no está resuelto totalmente y, aunque existen diversas técnicas para abordarlo, todas ellas lo hacen desde algún caso particular del proceso (usualmente para centros de mecanizado estándar de 3 ó 5 ejes).

La forma habitual de tratar el problema del compensado es mediante el cálculo de una superficie paralela a la superficie a mecanizar. Esta nueva superficie (denominada *offset*) distaría una cantidad fija de cada punto de la superficie original; esta cantidad representa la distancia existente entre el centro de la herramienta y un punto de su superficie de corte, de manera que, la superficie *offset*, representaría el lugar de los centros de herramienta desde los cuales sería posible mecanizar un objeto sin que se produjera una colisión con el mismo.

Si se aborda el problema desde el enfoque exclusivamente geométrico, el cálculo de superficies *offset* no es sencillo. En la mayoría de casos, se generan problemas de autointersecciones que es preciso detectar y eliminar a posteriori. Además, si la herramienta no tiene un único radio (tal y como ocurre con las de tipo tórico), el cálculo se torna mucho más complicado.



**Figura 4.1:** Offset sobre la sección de una superficie: a) mediante dilatación, b) por compensación del vector normal a la curva. b.1) zonas de autointersección, b.2) zonas de discontinuidad.

Desde el punto de vista del Modelo Topológico de Fabricación, la superficie *offset* es, por definición, el resultado de una operación

morfológica: el lugar de los centros de la herramienta que tocan la superficie original (ver figura 4.1). De manera que es la dilatación por trayectoria, o *digitalización virtual*, la operación que resuelve este problema en el modelo. Puesto que el compensado es, en sí, un problema morfológico, no hay restricciones sobre la geometría de la herramienta, ni hay que realizar post procesos sobre los resultados del mismo.

En principio, sería posible plantear, exclusivamente, el problema del compensado mediante la morfología matemática convencional; de hecho, si no existiera la posibilidad de orientar la herramienta, la dilatación morfológica definiría el campo completo de mecanizado dado un objeto y un elemento estructurante. Todas las posibilidades de fabricación estarían allí incluidas. En el capítulo segundo se constató que una operación por trayectoria era, en realidad, un subconjunto de la operación básica morfológica. Como consecuencia, una trayectoria se define como un recorrido sobre ese campo acotado pero infinito. Esta limitación es una necesidad en el campo de la fabricación mediante máquinas herramienta: sin discretizar la superficie, no terminarían su trabajo, sin un recorrido sobre ella, no sería posible determinar una trayectoria de mecanización.

A continuación se va a presentar un modelo computacional para la realización de la digitalización virtual como medio de obtención de superficies offset compensadas, es decir, un caso particular de aplicación de la operación dilatación por trayectoria del Modelo Topológico Determinista.

### Algoritmo de digitalización virtual

La idea de calcular distancias desde una superficie de mecanizado hasta una herramienta virtual no es nueva. Los *z-maps* aparecen en [Choi, 1991] como una forma de recorrido virtual de una herramienta sobre una superficie descrita en función del eje cartesiano Z. Como ya se expuso en el capítulo primero, este modelo cayó en desuso por su limitación al campo del mecanizado en 3 ejes, restricciones en cuanto a la geometría de la herramienta (exclusivamente esférica) y elevado coste computacional. No obstante, la idea de recorrido virtual sigue aplicándose en otros aspectos del proceso de mecanizado, como en el cálculo de curvas de perfilado o *pencil tracing* [Jung, 1991].

## 168 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

El algoritmo aquí presentado se deriva directamente del modelo computacional mixto del MTD. Su sentido mecánico se fundamenta en imitar el recorrido que realizaría un elemento palpador sobre la pieza a mecanizar. El proceso se divide en cuatro fases bien diferenciadas:

1. Definición del movimiento de la herramienta
2. Obtención de un modelo discreto de la superficie
3. Simulación del movimiento de la herramienta
4. Proceso de cómputo del recorrido virtual

En la figura 4.2 se encuentra el algoritmo que realiza la digitalización virtual en el Modelo Topológico de Fabricación, derivado del genérico presentado en la figura 2.14. A continuación se exponen algunos aspectos relevantes acerca de las fases en las que se divide la digitalización virtual.

1. La definición del movimiento de la herramienta vendrá dada por una o varias estrategias del conjunto de entrada *EST*. En el MTF, este movimiento será expresado mediante la utilización de transformaciones homogéneas paramétricas, de manera que esta información se encuentra en  $\Gamma(t)$ , perteneciente al conjunto TP del modelo.
2. Como consecuencia de la utilización del modelo computacional mixto del MTD, se trabajará sobre una discretización de las superficies que componen el objeto a mecanizar. El conjunto de mallas GS, definido en la ecuación (Exp. 3.10), constituirá la representación de tal discretización.
3. La simulación del movimiento de la herramienta sobre la superficie del objeto se consigue gracias a la aplicación reiterada de transformaciones sobre los puntos que representan al objeto (línea 6 del algoritmo que muestra la figura 4.2), de manera que, en realidad, la herramienta no es movida. En su lugar, es el objeto es el que se sitúa de manera apropiada ante ella. Debido a que es el propio modelo computacional el que realiza una simulación del proceso de fabricación, se hace patente su idoneidad para la aplicación en entornos de prueba y verificación de trayectorias, ya que no solamente se obtiene una

trayectoria compensada como resultado final, sino que se simula todo el proceso (movimiento de la herramienta y acercamiento de la misma) dentro del propio algoritmo.

4. Una vez se hayan definido los movimientos de la herramienta, el comportamiento del modelo computacional del MTF, expresado en la figura 4.2, puede describirse de la siguiente manera: para cada punto de la trayectoria (línea 2), el objeto es transformado, de manera que se sitúe ante la herramienta (línea 6); una vez conseguida la posición de ataque, se calcula, para cada punto de las mallas implicadas, la distancia mínima a esa herramienta (líneas 7 y 8); esta distancia, finalmente computada, determinará el punto central (*CentroEE*) de la herramienta para ese instante  $t$  de la trayectoria (líneas 11 y 12).

```

1: t=0
2: Mientras t<=1 hacer
3:   MinDistancia=∞
4:   Para cada GSi∈GS hacer
5:     Para cada pj,k∈GSi hacer
6:       pj,k'=pj,k•Γ(t)
7:       d =dv(pj,k',EE)
8:       Si d<MinDistancia entonces MinDistancia=d Finsi
9:     Finpara
10:   Finpara
11: CentroEE=CalcularCentro(MinDistancia,Γ(t))
12: AñadirTF(CentroEE)
13: Incrementar(t)
14: Finmientras

```

Figura 4.2: Modelo computacional de la operación de digitalización virtual en el MTF.

## Análisis del Coste Computacional

El método denominado *inverse offsetting method*, similar al anterior y basado en el cálculo de distancias, fue diseñado para generar *offsets* de superficies. Sin embargo, una de sus principales desventajas era su elevado coste computacional [Choi, 1991]. En este apartado se analiza la complejidad temporal del modelo computacional del MTF para un determinado tamaño  $n$  del problema. Se utilizará como medida el operador “O” para determinar una cota superior del coste computacional.

### Tamaño del problema

Si se analiza el algoritmo presentado en la figura 4.2, es posible observar hasta tres bucles anidados. El más interno, se utiliza para acceder a cada punto de la malla de la superficie seleccionada en ese momento. Es preciso hacer notar que este último bucle se compone realmente de dos: uno para recorrer las filas y otro para las columnas de la malla.

El resto de bucles itera sobre diferentes datos. El más externo, por ejemplo, recorre cada una de las posiciones de la trayectoria. A fin de obtener una buena calidad en el acabado de la pieza a mecanizar, es necesario que el número de posiciones sea elevado, de manera que dos posiciones consecutivas en la trayectoria de la herramienta incidan sobre un conjunto de puntos similar; de otra manera, el resultado diferirá en gran medida del objeto deseado. En este número también influye la naturaleza del material base, ya que, por ejemplo, los materiales de superficie reflectante como aluminio, acero, necesitan de mucha más definición en puntos de trayectoria que los de superficie no reflectante como plásticos, resinas, madera, para producir acabados similares.

Para determinar una cota superior, se denominará  $n_{GS}$  al número de puntos de todas las mallas que constituyen la discretización de  $PS$ , es decir:

$$n_{GS} = \sum_{i \in [1..n]} (m_i s_i), m_i, s_i \in DS_i$$

(Exp. 4.1)

El segundo bucle del algoritmo itera sobre cada una de las mallas que constituyen el objeto a mecanizar. Este número puede ser considerado como despreciable en relación a  $n_{GS}$ . Por esta razón, no va a ser tenido en cuenta como tamaño del problema y será considerado constante.

### Coste en el peor de los casos

A continuación se va a analizar el algoritmo mostrado en la figura 4.2, desde el bucle más interno hacia el más externo.

El tercer bucle (el más interno) es repetido  $n_{GS}$  veces. Dentro de él se realiza un producto vector – matriz que es guardado en una variable local. Este coste puede ser considerado constante, al no depender del tamaño del problema (en realidad, depende de la dimensión del espacio de representación). A este coste constante se le denominará  $ct_{31}$ . Después de realizada la transformación del punto, se computa la función distancia que, al igual que en el caso anterior, puede considerarse constante al no depender del tamaño del problema y se le denominará  $ct_{32}$ . Para finalizar, se realiza una asignación condicional. En el peor de los casos, la asignación se realizará siempre, denominándose  $ct_{33}$  el coste de efectuar tal comparación y asignación.

El segundo bucle opera sobre cada una de las mallas que componen la discretización de la superficie. Puesto que el número de partes de  $PS$  no depende del tamaño del problema será considerado constante y denominado  $ct_2$ . Las ecuaciones expresadas en (Exp. 4.2) resumen el coste total del tercer y segundo bucle respectivamente:

$$\lim_{n_{GS} \rightarrow \infty} (n_{GS} \cdot (ct_{31} + ct_{32} + ct_{33})) = O(n_{GS})$$

$$ct_2 \cdot O(n_{GS})$$

(Exp. 4.2)

Por último, el primer bucle recorre las distintas posiciones que sigue la herramienta en su trayectoria. A priori, el número de posiciones es independiente del tamaño del problema, pero, si se considera la calidad del mecanizado como un factor a tener en cuenta, la experiencia recomienda no utilizar un valor inferior al número de puntos de GS. En este análisis se considerará igual al tamaño del problema, aunque distintas consideraciones acerca de la calidad del mecanizado pudieran variar sustancialmente este valor.

Dentro del primer bucle se realiza una asignación con coste denominado  $ct_1$ . Tras ella, una llamada a la función de cálculo del centro que fundamentalmente realiza un cálculo de la matriz inversa de  $\Gamma(t)$  y un producto vector – matriz, se considerará realizada en un tiempo constante que se denominará  $ct_3$ . De igual manera, la función que añade dicho centro a una lista resultado realiza el cómputo en un tiempo constante denominado  $ct_4$ .

## 172 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

Teniendo en cuenta el análisis anterior, el coste del primer bucle y, en consecuencia, el del algoritmo viene dado por la expresión (Exp. 4.3).

$$\lim_{n_{GS} \rightarrow \infty} (n_{GS} \cdot (ct_1 + ct_2 \cdot O(n_{GS}) + ct_3 + ct_4)) = O(n_{GS}^2)$$

(Exp. 4.3)

A la vista del resultado de la ecuación (Exp. 4.3), puede considerarse como cuadrático el coste de computación del algoritmo de digitalización virtual. Este coste puede considerarse como cúbico si se interpreta en función del valor del rango de subdivisión en cada malla para cada dirección ( $n_{GSi}=m_i s_i$ ).

En [Choi, 1991] se realiza un análisis del coste computacional del método *z-map* para la obtención de superficies offset que sigue un esquema similar al aquí presentado (aunque con restricciones en el tipo de mecanizado y herramienta); el resultado obtenido, en términos comparativos, es de  $O(n_{GS}^4)$ , lo que representa una cota netamente superior al del Modelo Topológico de Fabricación. El elevado coste del *z-map* supuso un freno a la aplicación del método; el coste cuadrático del MTF también puede considerarse elevado en determinados contextos de fabricación de elevada precisión. No obstante, es posible, en el MTF, reducir sensiblemente la cota temporal. En el siguiente apartado se plantean una serie de refinamientos del modelo encaminados a ello.

### Refinamientos del modelo

Recuperando el conjunto de propiedades y criterios encaminados al refinamiento del modelo computacional del MTD visto en segundo capítulo, en este apartado se concretarán y aplicarán los mismos para reducir el coste del modelo del MTF.

#### Principio de alcanzabilidad

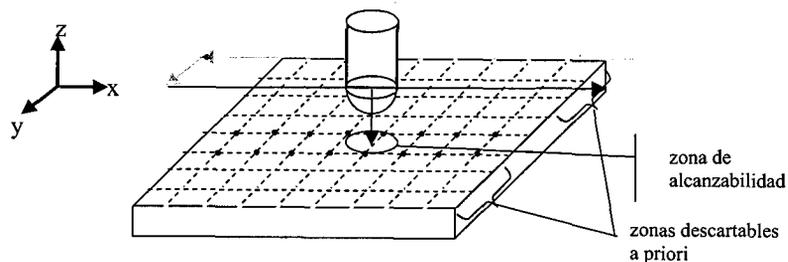
Es posible definir, en el modelo propuesto, un subconjunto de puntos de *GS* que pueden ser mecanizados por la herramienta en un punto de su trayectoria y bajo su dirección de ataque. Retomando este concepto, ya analizado para el MTD, se define el subconjunto de puntos alcanzables desde un determinado punto de la trayectoria *t* como:

$$A_{r,v}(t, GS) = \{p \in GS : d_v(p', H) \neq \infty, p' = p \cdot \Gamma(t)\}$$

(Exp. 4.4)

A priori, la aplicación de este criterio no mejora el coste computacional del algoritmo en el peor de los casos, ya que, como se especifica en la ecuación (Exp. 4.4), todos los puntos de las mallas de GS deben ser previamente transformados y tan sólo sería posible descartar los no alcanzables en el momento del cálculo de la función distancia, en la cual, además, es posible que se tengan que realizar cálculos previos antes de averiguar si un punto es alcanzable.

Sin embargo, este criterio puede ser de gran utilidad cuando es posible averiguar la alcanzabilidad de un punto antes de su transformación, es decir, cuando no existe dependencia entre el movimiento de alcance de la herramienta y la transformación a aplicar. Esto ocurriría, por ejemplo, cuando la herramienta realiza un movimiento paralelo a uno de los ejes cartesianos y se utilizan el resto para descartar puntos no alcanzables (ver figura 4.3). En estrategias de este tipo, la mejora computacional es sustancial y depende fundamentalmente de la relación existente entre la superficie de proyección de la herramienta en su dirección de ataque y el total de la superficie a mecanizar.



**Figura 4.3:** Principio de alcanzabilidad. En la figura se muestran en gris los puntos de la malla que, durante el recorrido actual de la herramienta (paralelo al eje x), pueden ser descartados antes de realizar la transformación del movimiento de la herramienta. La zona sombreada bajo la herramienta muestra la zona de la malla donde finalmente será computada la función distancia. En este caso, la reducción de puntos ha sido de un 78%.

### Criterio de visibilidad

La idea de este refinamiento parte del hecho de que las operaciones de mecanización se realizan sobre objetos cerrados. Por esta razón, no podrá ser mecanizado ningún punto de GS que no se muestre visible desde la dirección de ataque de la herramienta. El criterio, expresado en la expresión (Exp. 2.43) del capítulo segundo para el MTD, es redefinido para el Modelo Topológico de Fabricación en los siguientes términos.

$$B_{\Gamma, \bar{v}}(t, GS) = \left\{ p \in GS : \angle(\bar{N}(p'), \bar{v}) \leq \frac{\pi}{2}, p' = p \cdot \Gamma(t) \right\}$$

(Exp. 4.5)

Si se asume una distribución equidistante de los puntos que forman GS, la utilización de este criterio puede eliminar, por término medio, el 50% de los puntos (los no visibles) antes de realizar el cálculo de la función distancia. Esto provoca una sustancial mejora de la eficiencia, aunque no reduce la complejidad en el peor de los casos. No obstante, la mejora del algoritmo, en cuanto a tiempo de computación, lleva asociado un aumento del coste espacial, ya que es necesario tener almacenado para cada punto de las mallas el valor de su vector normal en la superficie libre original.

### Rango de vecindad

En el segundo capítulo se hacía referencia a este concepto como el de un conjunto de puntos que distaba menos de una cantidad  $\delta$  del punto que había resultado de distancia mínima en un instante de trayectoria anterior. Este concepto se puede redefinir y simplificar para el Modelo Topológico de Fabricación. Si se hace uso de la homogeneidad en cuanto a la distribución de los puntos de GS se refiere, es posible utilizar, como equivalente de la distancia geométrica, una distancia Hamming sobre los valores paramétricos de los puntos de la malla que tendrá la forma de entero; es decir, para el modelo de fabricación, el rango de vecindad estará constituido por dos valores enteros  $\delta_u$  y  $\delta_v$  que redefinirán una submalla de GS. Esta submalla se denominará *LS* y estará formada por el conjunto de puntos que expresa la ecuación (Exp. 4.6).

$$C_{GS, \bar{v}}(t) = \{p \in GS_i : d_{\bar{v}, \Gamma(t)}(p, EE) = dist_{\bar{v}, \Gamma(t)}(EE, GS)\}$$

$$LS_i = V_{\Gamma, \bar{v}}(t, GS_i) = \{p_{j,k} \in GS_i : |j-u| \leq \delta_u \wedge |k-v| \leq \delta_v, \quad q_{u,v} \in C_{GS, \bar{v}}(t-\Delta)\}$$

(Exp. 4.6)

La determinación de los valores paramétricos  $\delta$  vendrá dada por la experiencia y resultará conveniente cuando se realice la mecanización de objetos de forma semejante. En estos casos, el rango de vecindad puede ser sensiblemente inferior al conjunto total de puntos, con lo que el incremento de la eficiencia en el algoritmo es notable. El modelo que utiliza este tipo de optimización es el que aparece en la figura 4.4, en el que se ha sustituido la utilización de GS por el subconjunto LS. El coste del algoritmo, en el peor de los casos, para este modelo vendría dado por la ecuación (Exp. 4.7), donde  $n_{LS}$  representa el número total de puntos de las submallas de GS.

Es preciso hacer notar que  $n_{LS}$  no es un número que dependa del tamaño del problema, sino que viene directamente determinado por los valores de incremento paramétrico  $\delta$  que, a su vez, se encuentran relacionados con la geometría de la herramienta y la forma del objeto, por lo que, una vez obtenido este valor, el coste puede considerarse lineal respecto al tamaño del problema.

$$\lim_{n_{GS} \rightarrow \infty} (n_{GS} \cdot (ct_1 + ct_2 \cdot n_{LS} + ct_3 + ct_4)) = O(n_{GS})$$

(Exp. 4.7)

```

1: t=0
2: Mientras t<=1 hacer
3:   MinDistancia=∞
4:   Para cada  $GS_i \in GS$  hacer
5:      $LS_i = ObtenerSubMalla(GS_i, \delta_u, \delta_v, u_{min}, v_{min})$ 
6:     Para cada  $p_{j,k} \in LS_i$  hacer
7:        $p_{j,k}' = p_{j,k} \bullet \Gamma(t)$ 
8:        $d = d_v(p_{j,k}', EE)$ 
9:       Si  $d < MinDistancia$  entonces  $MinDistancia = d$ ;  $u_{min} = j$ ;  $v_{min} = k$ ;
10:    Finsi
11:   Finpara
12: Finpara
13:  $CentroEE = CalcularCentro(MinDistancia, \Gamma(t))$ 
14:  $AñadirTF(CentroEE)$ 
15:  $Incrementar(t)$ 
16: Finmientras

```

Figura 4.4: Modelo computacional de la digitalización virtual en el MTF optimizado bajo el criterio de rango de vecindad.

## 176 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

### Paralelización

Tal y como se apuntaba en el capítulo segundo, la independencia entre valores de trayectoria  $t$ , respecto al cálculo de la función de distancia mínima, hace posible la explotación del paralelismo espacial en el modelo computacional del MTD. Aquel algoritmo, presentado en la figura 2.24 para el MTD, permite la paralelización del Modelo Topológico de Fabricación (ver la figura 4.5).

```

1: Enviar(GS, p0, p1, ..., pn-1)
2: En paralelo t=idproc*n
3: Mientras t<(idproc+1)/n hacer
4:   MinDistancia=∞
5:   Para cada GSi∈GS hacer
6:     Para cada pj,k∈GSi hacer
7:       pj,k'=pj,k•Γ(t)
8:       d =dv(pj,k', EE)
9:       Si d<MinDistancia entonces MinDistancia=d; Finsi
10:    Finpara
11:  Finpara
12:  CentroEE=CalcularCentro(MinDistancia, Γ(t))
13:  AñadirTF(CentroEE)
14:  Incrementar(t)
15: Finmientras
16: Finparalelo
17: En paralelo si idproc<>0 entonces Enviar(TF, p0) Finparalelo
18: RecibiryAgrupar(TF)

```

**Figura 4.5:** Modelo paralelo de digitalización virtual del MTF. La variable  $idproc$  indica el número de procesador local y  $n$  el número total de procesadores.

A la vista del algoritmo anterior, la complejidad temporal, en el peor de los casos, se reduce considerablemente respecto a la del secuencial presentado en la figura 4.2. El coste total, sin considerar tiempos de comunicación, tomando como número de puntos de trayectoria el número total de puntos en la malla, aparece en la expresión (Exp. 4.8), en la que la variable  $nproc$  hace referencia al número total de procesadores disponibles:

$$\lim_{n_{GS} \rightarrow \infty} \left( \frac{n_{GS}}{nproc} \cdot (ct_1 + ct_2 \cdot n_{GS} + ct_3 + ct_4) \right) = O\left( \frac{n_{GS}^2}{nproc} \right)$$

(Exp. 4.8)

A pesar de la mejora en el coste introducida en el algoritmo, el término cuadrático no desaparece debido a que es necesario

contemplar todos los puntos de GS para realizar el cálculo de distancia mínima (línea 6 de la figura 4.5). El problema reside en que la independencia en términos de puntos de trayectoria no se traduce en independencia sobre tramos de la superficie a tratar; de hecho, diferentes posiciones de herramienta pueden compartir puntos de la malla. Es posible repartir porciones de malla a cada uno de los procesadores en función del subconjunto de trayectoria que tengan que calcular. La complejidad espacial (número de puntos de la malla por procesador) estará limitada por la alcanzabilidad de la herramienta y no podrá reducirse aunque se incremente el número de procesadores.

Es posible reducir el coste medio del algoritmo paralelo si se combina con otras optimizaciones. De las vistas hasta el momento, son aplicables todas excepto la del rango de vecindad, ya que exige una secuencia entre puntos de trayectoria, al necesitar los puntos más cercanos a la herramienta de la iteración anterior.

Como conclusión al análisis anterior decir que, si se tuviera que clasificar el tipo de paralelismo que es posible explotar en el Modelo Topológico de Fabricación atendiendo a la relación coste computacional / número de procesadores, habría que situarlo dentro de los de *grano grueso*. Es decir, para que el algoritmo disminuya tiempos considerablemente en función de nuevos recursos computacionales, es necesario, o bien que el número de éstos no sea excesivamente elevado, o bien que la precisión de la superficie (y, por ende, el número de puntos de GS) sea elevada. Este resultado contrasta con la paralelización de algoritmos de análisis de imagen de la morfología matemática clásica, en la que la naturaleza de las operaciones (computacionalmente simples) y la memoria necesaria para cada procesador permiten la utilización de numerosos elementos de proceso.

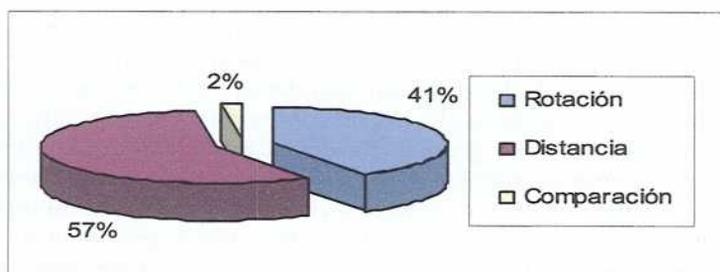
### **Optimización de operaciones de elevado coste**

A la vista del algoritmo secuencial del Modelo Topológico de Fabricación que aparece en la figura 4.2, puede observarse que el esfuerzo computacional recae en las operaciones que se hallan en el bucle más interno, donde se realizan las operaciones de transformación, cálculo de distancia y comparación de las líneas 6 a 8 respectivamente. Puesto que cualquier mejora en los tiempos de cálculo de estas operaciones redundará sensiblemente en el tiempo de ejecución total del algoritmo, uno

## 178 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

de los principales objetivos a perseguir será el de utilizar métodos computacionales eficientes que realicen estas operaciones.

No todas las operaciones que se ejecutan dentro del bucle más interno tienen la misma complejidad. Aunque dependan de factores externos, como la geometría de la herramienta, la operación más costosa es la que realiza el cálculo de la distancia desde un punto hasta dicha herramienta. En la figura 4.6 se muestra una media del porcentaje de tiempo que se emplea, en este bucle, para cada operación, suponiendo una herramienta tórica; para otras geometrías, el porcentaje no varía en gran medida. A la vista de estos resultados, los esfuerzos por optimizar el bucle interno irán principalmente dirigidos a disminuir el tiempo de cálculo de la función distancia y, en menor medida, la transformación de cada punto. En el capítulo siguiente se mostrarán experimentos realizados sobre arquitecturas específicas de computadores que tienen la finalidad de acelerar el cálculo de estas funciones.



**Figura 4.6:** Distribución del tiempo de ejecución del bucle más interno del algoritmo de digitalización virtual utilizando una herramienta de tipo tórica.

## Digitalización de objetos tridimensionales

En el capítulo primero (sección *Estado del Arte*) se presentó el problema de la digitalización de objetos como un problema relacionado con el del compensado. En realidad, se trata de la operación complementaria: dado un conjunto de puntos provenientes de sucesivos centros de un elemento palpador, en su recorrido por la superficie de un objeto, se ha de obtener dicha superficie. El problema, que puede verse como el de un *anticompensado* o un *offset inverso*, presenta la misma problemática que el analizado en el apartado anterior.

A pesar de la similitud que presenta con el problema del compensado, la solución al problema de la reconstrucción de superficies digitalizadas no suele aparecer referenciada en la investigación relativa al CAD/CAM. Este problema tiene una relevancia menor al estar circunscrito al sector de los digitalizadores mecánicos o *palpadores*. Aunque la precisión y robustez de estos últimos siempre ha sido la gran ventaja respecto a sus competidores directos, los digitalizadores ópticos se imponen cada vez más uniendo a su versatilidad una precisión creciente.

La forma habitual de tratar este problema es mediante el cálculo de una superficie *offset* que se proyecta hacia el interior del objeto. De nuevo, el tratamiento geométrico del problema presenta los mismos inconvenientes que el del compensado, con el agravante de que el número de convexidades aumenta por el hecho de tener que realizarse una proyección interior.

Si este problema se aborda desde el Modelo Topológico de Fabricación, la superficie *offset* interna es el resultado de una nueva operación morfológica: el lugar de los centros de la herramienta que tocan internamente la superficie original. Esta operación se corresponde con la erosión por trayectoria o *mecanizado virtual*, la cual resuelve este problema en el modelo.

### Algoritmo de mecanizado virtual

El modelo computacional que realiza esta operación en el MTF es el mismo que el que se utiliza en la digitalización virtual. Este hecho se debe a que el Modelo Topológico Determinista presenta un único modelo computacional para realizar tanto dilataciones como erosiones. La única diferencia la constituye la trayectoria de partida y la dirección de ataque del elemento palpador: ahora deben estar definidos de manera que se pueda tocar la superficie desde el interior. Por lo tanto, el algoritmo consta de las mismas fases que su complementario, es decir:

1. Definición del movimiento de la herramienta
2. Obtención de un modelo discreto de la superficie
3. Simulación del movimiento de la herramienta
4. Proceso de cómputo del recorrido virtual



problema de gran envergadura, resuelto mediante métodos de alto coste computacional; en el Modelo Topológico de Fabricación no existe tal problema.

4. Una vez se hayan definido los movimientos del elemento palpador, el comportamiento del modelo computacional del MTF, a nivel de costes y refinamientos, es idéntico al de digitalización virtual anteriormente analizado.

### **Ejemplo: fabricación de hormas de calzado**

La horma de calzado constituye el soporte físico y el modelo volumétrico sobre el que se construye el zapato mediante técnicas de adaptación a la superficie a fin de satisfacer los requerimientos de ergonomía y estética. Por lo tanto, este elemento determina la forma geométrica y, por ende, el confort (y aún la salud [IBV, 1995]) del consumidor de calzado.

En el prólogo de este trabajo ya se realizó una aproximación al mundo del diseño y fabricación de hormas y a su situación en el tejido industrial nacional y europeo. En este apartado se va a abordar el problema de la fabricación de las hormas de calzado desde el punto de vista del modelo topológico presentado.

El mercado CAD/CAM dispone de multitud de productos que incorporan tecnología para la generación de trayectorias de mecanizado, algunos de los más afamados se pueden encontrar en [TEBIS, 1994], [Paris, 1997] y [MSML, 2000]. La mayoría de ellos han sido diseñados y validados para trabajar sobre centros de mecanizado convencionales estándar de 3 a 5 ejes que distan mucho de ser los tradicionales tornos copiadores de hormas.

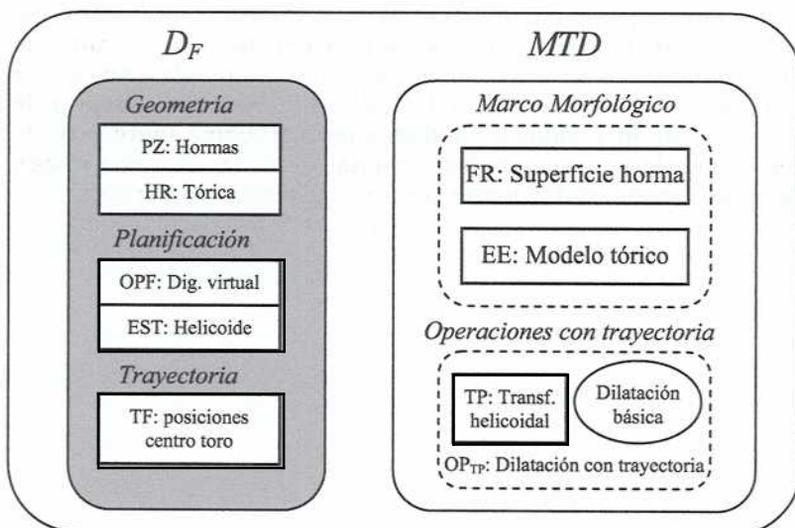
## 182 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación



**Fotografía 4.1:** Hormas de calzado. A la izquierda, modelo artesanal en madera. A la derecha, modelo copiado por torno sobre polietileno de alta densidad.

Para aplicar el modelo al problema aquí expuesto, es necesario determinar cada una de las partes que intervienen en el proceso de fabricación de una horma (ver figura 4.7), esto es, en el Modelo Topológico de Fabricación, la especificación del dominio de fabricación  $D_F$ . A continuación se presentan cada uno de los elementos que lo constituyen.

### *MTF*



**Figura 4.7:** Componentes del Modelo Topológico de Fabricación instanciado para el proceso de fabricación de hormas mediante torno.

## La geometría de la horma (PZ)

La horma de calzado presenta una geometría antropomórfica que varía en gran medida entre diversas poblaciones. Aunque es posible definir algunas medidas fundamentales, éstas son insuficientes para poder crear un modelo partiendo de cero. El resultado es un objeto tridimensional difícilmente parametrizable, por lo que el modelo de superficies libres se presenta como uno de los más adecuados para su representación.

Dado que, hasta la fecha, la fabricación de la horma de calzado ha sido el resultado de la aplicación de un proceso totalmente artesanal, los modelos geométricos se definen mediante interpolación de puntos obtenidos por digitalización de hormas reales. El Modelo Topológico de Fabricación se muestra especialmente adecuado para este tipo de representación de la información, ya que, internamente, el modelo opera sobre un conjunto puntos discreto que, en este caso, pueden provenir directamente de un digitalizador tridimensional. En el caso de conformar una superficie continua, se ha de aplicar un método de discretización como el que lleva a cabo internamente el sistema de conversión Superficie – Contorno (SC) del modelo.

Por otra parte, la precisión que se exige en la fabricación de estos objetos se puede considerar elevada de acuerdo con su tamaño medio ( $\pm 0.1\text{mm}$  para una longitud media de 250 mm y un volumen medio de 1,5 litros), lo que provoca que el número de elementos superficiales (patches NURBS) para mantener la coincidencia con el modelo original, sea también elevado (aproximadamente 50000 por horma). Como resultado, la malla con la que operará el modelo computacional del MTD tendrá una elevada densidad, lo que constituirá un test de eficiencia para el modelo topológico.

## Definición del movimiento de herramienta (EST)

Las máquinas que mecanizan las hormas de calzado han evolucionado muy poco con el paso del tiempo; de hecho, las máquinas actuales siguen poseyendo la estructura básica de aquellas, los mismos ejes, los mismos materiales etc. La única variación sustancial que ha tenido lugar desde que, en la primera mitad del siglo XX, apareciera el primer torno copiado Donzelli,

## 184 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

ha sido la sustitución de los antiguos motores por motores eléctricos paso a paso controlados por computador.



**Fotografía 4.2:** Torno tradicional para el mecanizado de hormas de calzado: en la parte superior, horma de polietileno verde en fabricación; en la parte inferior, horma original de madera sobre el elemento copiador.

La razón de esta escasa evolución está en que los tornos tradicionales copiadores siempre han ofrecido unas muy buenas prestaciones de calidad y eficiencia, consiguiendo la fabricación de hasta 3 pares cada 5 minutos con una precisión de copia de  $\pm 0.1\text{mm}$ . Por este motivo, el sector del calzado se ha mostrado reacio a los modernos centros de mecanizado de 3 o 5 ejes para la realización de esta parte fundamental en el proceso de fabricación del calzado.

Por otro lado, la elección del torno copiador supone un freno a la aplicación de herramientas CAD que ayudaran a las tareas de diseño del modelista de hormas u hormero. La alternativa viable que se ofrece es la adaptación de máquinas tradicionales reconvertidas para su control por computador. Si se utiliza este tipo de máquinas, el problema con que se encuentran los fabricantes de maquinaria radica en que las técnicas de generación de trayectorias no se adecuan a la estrategia de

mecanizado, ya que viene impuesta por su propia dinámica de funcionamiento.

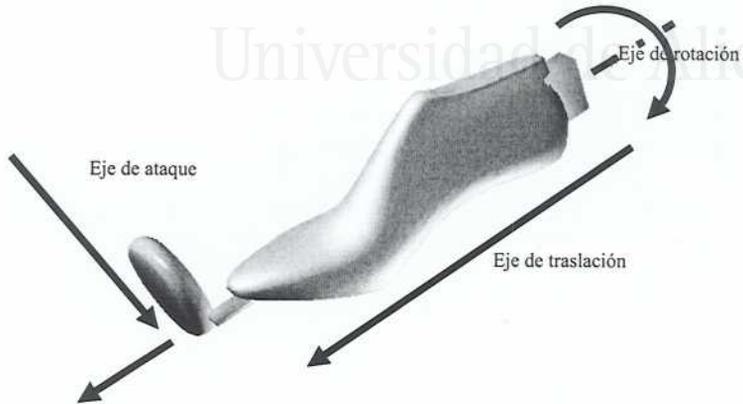


Figura 4.8: Ejes de fabricación en un torno copiado de hormas.

En un torno copiado existen tres grados de libertad para la herramienta (ver figura 4.8). El eje X es un eje de traslación que se mueve en sentido longitudinal a la horma. El eje Z es un eje de rotación que tiene la limitación de operar a velocidad angular constante debido a la gran inercia que presenta el sistema. El eje Y puede ser de dos tipos: en algunas máquinas es un eje de rotación que porta la herramienta y que permite el ataque de la misma al sustrato base, y en otras, este eje es longitudinal y se mueve en sentido perpendicular al eje principal de traslación. El movimiento coordinado de los tres ejes define una trayectoria helicoidal de paso fijo que mecaniza la superficie de la horma.

En el Modelo Topológico de Fabricación, la estrategia de mecanizado es codificada mediante una matriz de transformación homogénea que describe un movimiento helicoidal. En la expresión (Exp. 3.17) del capítulo anterior se muestra este tipo de matriz.

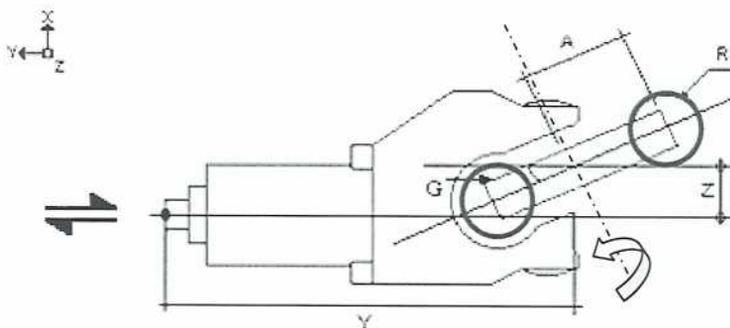
### Geometría de herramienta (HZ)

El material con el que se fabrican las hormas de calzado es, en la actualidad, polietileno de alta densidad. El peso y dureza de este

## 186 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

material es muy adecuado para soportar las fuerzas que actúan sobre él durante el proceso de montaje del calzado. El elevado peso y la dureza del material obligan a que las máquinas que fabrican hormas sean pesadas y potentes. En lo referente a la herramienta, ésta debe poseer también un peso elevado, a la vez de una gran capacidad de desbastado de material.

La geometría que mejor se adapta a los requerimientos de fuerza y precisión es la tórica que posee grandes dimensiones y capacidad de definir la superficie de la horma. La elección de la herramienta tórica no supone una pérdida de generalidad para la puesta a prueba del modelo, más bien al contrario, este tipo de herramienta constituye una generalización de las herramientas esféricas, aunque tiene el inconveniente de poseer dos radios.



**Figura 4.9:** Vista superior de la geometría de una cuchilla para hormas. Elementos cortantes en rojo. Relación de medidas: A: Radio mayor, R: Radio menor, G: Ángulo de ataque, Z: Distancia al eje central de ataque, Y: Distancia desde el centro de herramienta al centro de rotación de la cuchilla.

Todos los tornos copiadores de hormas poseen, como herramienta, un elemento que soporta de dos a tres cuchillas de sección cilíndrica dispuestas de forma radial entorno a un eje de rotación (ver figura 4.9). En movimiento, las cuchillas describen un toro. En el Modelo Topológico de Fabricación, esta herramienta es modelada utilizando un disco tridimensional, por lo que se utilizará la ecuación (Exp. 3.14) para obtener la función de distancia mínima del MTD.

### Operaciones de fabricación (OPF)

En este ejemplo se van a aplicar dos operaciones distintas para abordar dos problemas diferenciados. Se utilizará la operación de digitalización virtual del Modelo Topológico de Fabricación para generar una trayectoria helicoidal compensada de una determinada horma. Más adelante, esta trayectoria será llevada a cabo por un torno copiator adaptado para su control por computador con el fin de verificar su correcto funcionamiento.

Por otra parte, se aplicará la operación morfológica de mecanizado virtual para obtener la superficie original de una horma digitalizada a partir de la trayectoria externa obtenida mediante un palpador mecánico de elemento tórico.



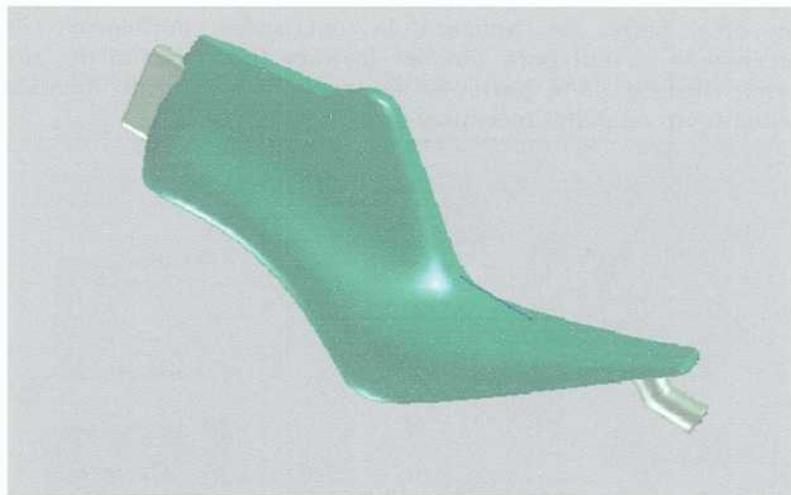
**Fotografía 4.3:** Torno de mecanización de hormas de dos pares controlado por computador. Puede apreciarse, como principal diferencia con el torno tradicional, la ausencia en su parte inferior del elemento copiator.

### Pruebas de digitalización virtual

El algoritmo de digitalización virtual es simple una vez que se ha definido la estrategia en la que se fundamentará el movimiento

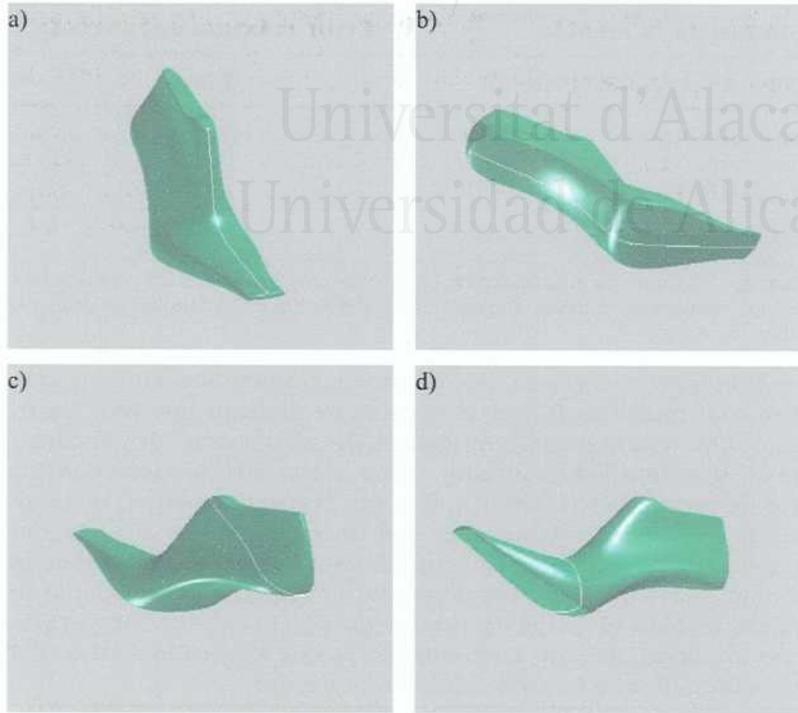
## 188 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

de la herramienta. En el caso del experimento que se va a llevar a cabo, la trayectoria será la impuesta por la dinámica de los tornos de fabricación de hormas: una trayectoria helicoidal de paso 2mm y de velocidad angular constante generada con incrementos angulares de medio grado. Debido a que el material base es fijado a la máquina por sus extremos, es necesario añadir elementos de agarre a la horma original para que la trayectoria generada no origine daños a los soportes, tal y como muestra la figura 4.10.



**Figura 4.10:** Adición de agarres delantero y trasero al modelo geométrico de una horma de calzado previo al cálculo de trayectoria.

Para la realización de estas pruebas, se ha utilizado el software comercial *Forma3D*®, el cual incorpora la metodología presentada en este trabajo de investigación [Salas, 2000]. Se ha escogido una horma de señora de 260mm de longitud (ver figura 4.10). El computador que se ha utilizado para realizar las pruebas ha sido un PC estándar dotado de un microprocesador Intel Pentium II® a 233MHz con 128Mb de RAM y bajo el sistema operativo Windows 98®. Los experimentos están encaminados a probar tanto la corrección como la eficiencia de la generación de trayectorias, aplicando distintos refinamientos propuestos para el Modelo Topológico de Fabricación.



**Figura 4.11:** Medidas fundamentales utilizadas en los experimentos de fabricación: a) línea de empeine, b) longitud, c) perímetro de entrada, d) ball.

Aunque la calidad del modelo ya ha sido refrendada por los expertos hormeros que utilizan el software mencionado, se han realizado mediciones sobre hormas originales y se han comparado con las copiadas mediante la trayectoria que genera el Modelo Topológico de Fabricación. Las mediciones manuales sobre los modelos fabricados son difíciles de realizar e inexactas, por lo que no es posible realizar una comparación rigurosa mediante este método. Para comprobar la exactitud del modelo, se han obtenido, con ayuda de digitalizadores de precisión, las superficies de un conjunto de nueve hormas fabricadas mediante un torno de control numérico. Posteriormente, se han comparado diversas medidas que se consideran fundamentales sobre ellas (ver figura 4.11). En la tabla 4.1 se muestran los resultados de la comparativa.

## 190 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

Nombre de la medida	Error máximo encontrado
Línea de empeine (190mm)	+0.3mm
Largo (280mm)	+0.1mm
Perímetro de entrada (300mm)	+0.7mm
Ball (220mm)	+0.3mm

**Tabla 4.1:** Calidad de reproducción en hormas mediante el MTF, diferencias máximas respecto al modelo original. Junto al nombre de la medida se muestra un valor típico.

La tabla anterior revela las diferencias máximas encontradas sobre una muestra de nueve hormas de distinto tipo (ver figura 4.12). Los resultados demuestran la corrección del modelo. Puesto que tanto digitalizador como torno llevan asociados un error de precisión ( $\pm 0.01\text{mm}$  y  $\pm 0.1\text{mm}$  respectivamente), no tiene sentido ofrecer estos resultados con un valor inferior a la décima de milímetro. En el caso del torno de fabricación, el tamaño de la cuchilla es medido manualmente, por lo que una diferencia en la medida, o bien el desgaste producido por la fabricación, puede llevar implícito un error en el modelo, lo que explica el sentido del error obtenido que ha sido siempre por exceso.



**Figura 4.12:** Modelos utilizados en las pruebas.

El siguiente experimento tiene como objetivo probar la eficiencia del modelo haciendo uso de distintos refinamientos. En la gráfica que se muestra en la figura 4.13, se observa el efecto de la incorporación al modelo del rango de vecindad.

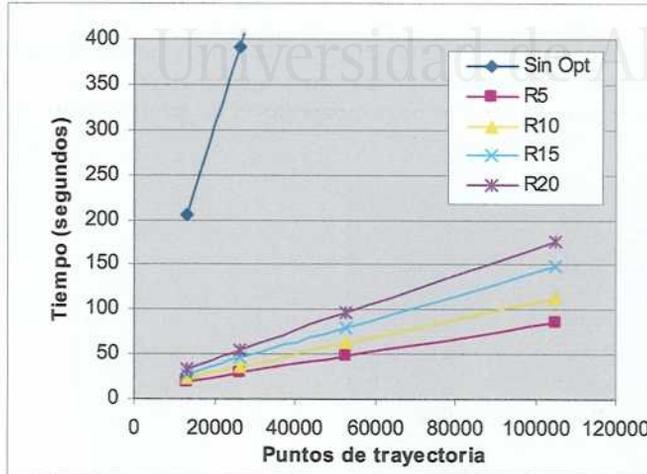
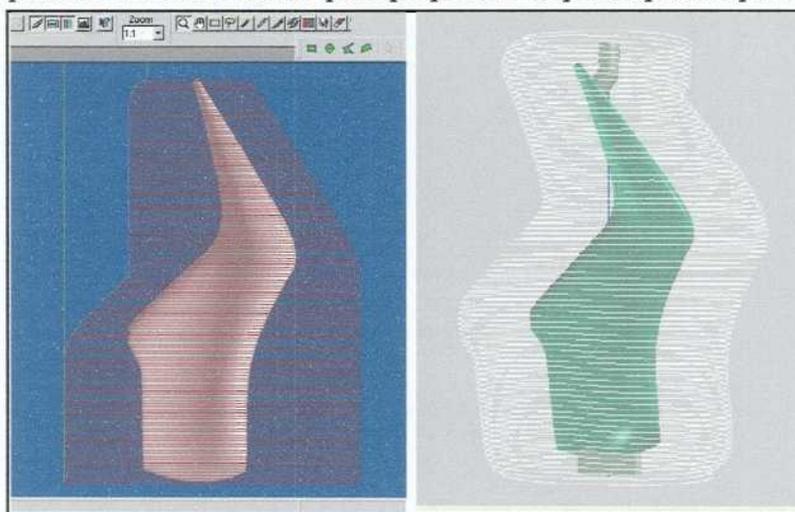


Figura 4.13: Gráfica de tiempos de cálculo de trayectoria compensada para una trayectoria helicoidal de paso 2mm de distinta densidad. Cada una de las líneas muestra un rango de vecindad distinto.

La figura 4.13 muestra el resultado de la aplicación de distintos refinamientos en el modelo para calcular una trayectoria creciente en precisión. A modo de guía, decir que valores típicos de fabricación de formas sobre polietileno de alta densidad se sitúan entre los 50000 y 80000 puntos de trayectoria total. Estos valores pueden variar sensiblemente si el material base es reemplazado por otro de superficie reflectante como el aluminio. A la vista de los resultados, puede observarse, en primera instancia, que la complejidad crece linealmente con el tamaño del problema y no de manera cuadrática como se ha visto, esto ocurre porque los experimentos se han realizado sobre la misma representación geométrica de la horma, lo que significa que el número de puntos de la malla ha permanecido constante (50000 puntos de malla). Por otra parte, puede verse el efecto positivo que introduce la aplicación del rango de vecindad; para este experimento ha sido posible utilizar un valor de hasta 5 puntos, aunque la experiencia aconseja utilizar para superficies de hormas valores nunca inferiores a 10 puntos de rango.

## 192 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

El modelo que no utiliza el refinamiento por rango de vecindad puede parecer lento (para una precisión de 26000 puntos la trayectoria se calcula en 6 minutos), pero hay que tener en cuenta que la mayoría del software actual disponible para la fabricación en centros de mecanizado no puede generar trayectorias de este tipo. Existen algunos productos en los que es posible la definición de una trayectoria en helicoides de paso fijo, sin embargo, el tiempo de cálculo supera el de mecanizado de pieza haciéndolo inviable para propósitos de prototipado rápido.



**Figura 4.14:** Trayectoria helicoidal compensada para la fabricación de una horma de calzado: a la izquierda, obtenida mediante la librería de mecanizado MSML®, a la derecha, obtenida mediante la digitalización virtual del MTF.

Con fines comparativos, ha sido posible utilizar una aproximación de la trayectoria con la que aquí se experimenta gracias a un software que goza de buena aceptación en el mercado CAD/CAM. La librería MSML® ofrece diversas estrategias a la hora de mecanizar un objeto mediante un centro de mecanizado de tres ejes. Esta librería es una de las más optimizadas en cuanto a código y es posible ejecutarla sobre la misma plataforma en la que se han realizado los experimentos con el Modelo Topológico de Fabricación. El resultado ha sido la trayectoria helicoidal compensada que se presenta en la figura 4.14. Se puede observar que no es una trayectoria correcta debido a las limitaciones que presenta la definición de

herramienta, aunque puede considerarse válida con fines de evaluar su eficiencia. La generación de la trayectoria completa, antes mencionada para el MTF con 25000 puntos de definición, y bajo los mismos supuestos de precisión ha llevado un tiempo total de 5 horas y media.

Dada la naturaleza determinista del modelo, es posible la obtención de información parcial acerca de la trayectoria durante el cálculo de la misma. Esta información puede utilizarse en entornos de simulación de trayectorias para comprobar a priori la bondad del resultado. En la figura 4.15 puede observarse una instantánea de este proceso de simulación.

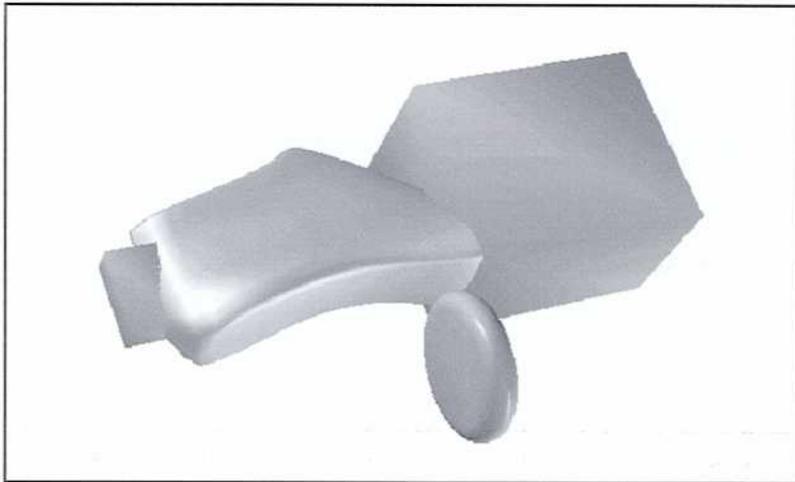


Figura 4.15: Simulación del proceso de fabricación de una horma de calzado mediante el uso del MTF.

Los experimentos anteriores han servido para comprobar la eficiencia y corrección del Modelo Topológico de Fabricación sobre un tipo de objeto específico. Se han realizado pruebas de fabricación sobre otros tipos de objetos tridimensionales. En la figura 4.16 se muestran trayectorias generadas sobre superficies de moldes de tacones. Este tipo de superficie, a diferencia de la horma, está bien parametrizada y es posible construirla utilizando patches NURBS mucho menos complejos. El problema que presentan estriba, fundamentalmente, en el tipo de material con el que suelen fabricarse: el aluminio, cuya superficie refractante obliga a generar una trayectoria de un elevado

número de puntos. En estos casos, el Modelo Topológico de Fabricación representa una buena alternativa a otros métodos de generación de trayectorias compensadas.

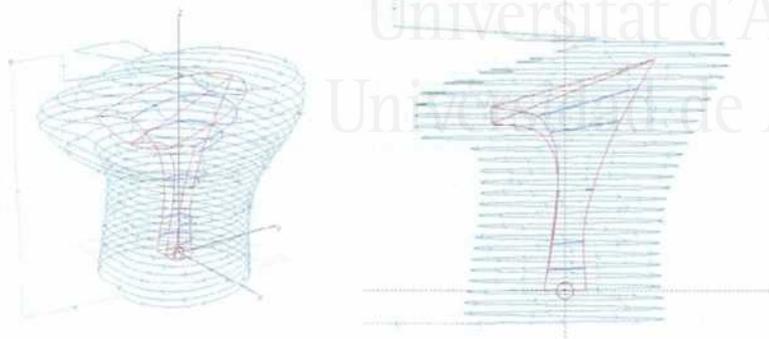


Figura 4.16: Trayectorias compensadas generadas por el MTF para moldes de tacones.

### Pruebas de mecanizado virtual

El experimento que se presenta a continuación tiene como objetivo demostrar la corrección de esta operación morfológica. Para ello, se parte de una nube de puntos generada por un digitalizador mecánico de hormas de calzado como el de la fotografía 4.4. Esta máquina recorre la superficie de la horma, sección a sección, desde el talón hasta la punta de la misma, generando un conjunto de puntos que oscila entre los 20000 y 50000 por horma, dependiendo de la configuración de la precisión. El error de este palpador, según el fabricante, es de  $\pm 0.005\text{mm}$ . La trayectoria que define el digitalizador no es, en este caso, helicoidal sino cilíndrica de paso fijo con velocidad angular constante. Para este experimento se utilizará un paso de 1.8mm. El elemento palpador está constituido por un disco de 84mm de diámetro y una sección de 32mm.

Los puntos que el digitalizador obtiene se corresponden con el centro del elemento palpador en la posición de toque con la horma. Si se observa el conjunto completo de puntos como una superficie, se puede ver el resultado de una operación de dilatación morfológica en 3D (ver figura 4.17), lo que, en el Modelo Topológico de Fabricación, representa una digitalización

virtual, aunque, en esta ocasión, la operación ha sido realizada mecánicamente y no mediante el modelo computacional.



Fotografía 4.4: Digitalizador mecánico de hormas de calzado.

Para realizar la prueba de mecanización virtual se ha utilizado la misma plataforma hardware y software que en el apartado anterior. A fin de verificar la corrección de la operación, se han comparado diversas medidas fundamentales sobre los mismos modelos que en la prueba precedente. Los resultados del experimento que se muestran en la tabla 4.2 corroboran la exactitud de la operación.

Hay que hacer constar que el modelo resultante de la operación de mecanizado virtual no es, en realidad, el modelo original, ya que la operación completa es un cierre morfológico (la dilatación que origina el digitalizador más la erosión que realiza el modelo computacional), por lo que se pueden presentar diferencias al comparar ambos modelos que se harán más visibles en las zonas donde el elemento palpador no pueda acceder a la superficie del modelo original.



**Figura 4.17:** Superficie externa generada por un palpador mecánico de hormas.

<b>Nombre de la medida</b>	<b>Error máximo encontrado</b>
Línea de empeine (190mm)	-0.28mm
Largo (280mm)	-0.06mm
Perímetro de entrada (300mm)	+0.68mm
Ball (220mm)	+0.24mm

**Tabla 4.2:** Calidad de reconstrucción de hormas mediante el MTF, diferencias máximas respecto al modelo original. Junto al nombre de la medida se muestra un valor típico.

A diferencia de la prueba anterior, no es fácil encontrar software comercial CAD/CAM de propósito general que ofrezca la posibilidad de realizar una operación inversa de fabricación. En el momento de realizar esta investigación, únicamente ha sido posible acceder al software que el fabricante adjunta con el digitalizador mecánico que dista mucho de ser un modelo genérico válido para comparar con el Modelo Topológico de Fabricación; no obstante, los tiempos obtenidos de reconstrucción de la superficie, no han mejorado los obtenidos por el modelo topológico. La figura 4.18 muestra el resultado de la operación para la superficie externa exhibida en la figura 4.17.



Figura 4.18: Forma resultante tras la aplicación de la operación de mecanizado virtual sobre la superficie de la figura 4.17.

## Conclusiones

En este capítulo se han mostrado dos aplicaciones diferentes del Modelo Topológico de Fabricación: el compensado de trayectorias y la reconstrucción de superficies a partir de información externa de digitalización.

Se ha desarrollado un modelo computacional que efectúa el cálculo de trayectorias compensadas gracias a la implementación de la operación de digitalización virtual del MTF. Tras un análisis previo de su coste computacional, se han aplicado una serie de refinamientos en el modelo que consiguen rebajar las cotas temporales del mismo haciéndolo viable para la mayoría de plataformas computacionales. Dicho modelo ha sido puesto a prueba mediante un ejemplo real de cálculo de trayectorias para la fabricación de hormas de calzado.

El prototipo ha sido integrado con éxito sobre una plataforma CAD/CAM comercial en el sector de la fabricación de hormas por computador. Dicho prototipo ha demostrado la exactitud de las trayectorias generadas y la eficiencia del cálculo de las mismas.

La generalidad del MTF no sólo ha facilitado su integración como sistema generador de trayectorias en distintos tipos de tornos de

## 198 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

fabricación de hormas, sino que ha sido utilizado en otros sistemas más comunes como centros de mecanizado para la fabricación de tacones.

También se ha desarrollado un modelo computacional que efectúa el cálculo de superficies definidas externamente mediante digitalizadores mecánicos. Para ello, se ha implementado la operación de mecanizado virtual del MTF. El modelo ha sido puesto a prueba sobre un ejemplo real de cálculo de superficies a partir de la información generada por un digitalizador mecánico de hormas de calzado.

En el caso del mecanizado virtual no existen referencias de modelos computacionales genéricos que comercialmente permitan realizar la operación ofreciéndose soluciones puntuales sobre máquinas concretas. En el MTF, la operación se define sencillamente al establecer las condiciones de la trayectoria de digitalización.

El prototipo desarrollado, que implementa la operación de mecanizado virtual, ha demostrado su exactitud y eficiencia a través de la realización de diversas pruebas y ha sido integrado con éxito en una plataforma CAD/CAM comercial para hormas de calzado. La generalidad del modelo ha permitido, con facilidad, su utilización sobre distintos tipos de digitalizadores mecánicos.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo Quinto

### Arquitecturas para el MTF

En el capítulo anterior se desarrolló un modelo topológico de fabricación que es capaz de realizar operaciones que emulan diferentes procesos de mecanización mediante el uso de máquinas herramienta. El modelo computacional que lo hace viable basa su funcionalidad en el cálculo de distancias y en la aplicación reiterada de transformaciones geométricas. Dicho cómputo no es trivial, lo que, unido a la naturaleza polinómica de su coste, constituye un freno a la aplicación del modelo.

Las arquitecturas avanzadas de computadores tienen como principal objetivo resolver problemas de elevado coste computacional. En este capítulo se traslada el modelo algorítmico del Modelo Topológico de Fabricación a distintas arquitecturas con el objetivo final de reducir los tiempos de computación. Se pretende, por una parte, demostrar la adecuación del modelo a distintas plataformas hardware de alto rendimiento y, por otra parte, plantear nuevas organizaciones que aumenten la eficiencia del mismo. Para probar la idoneidad del modelo ante una determinada arquitectura, se realizarán pruebas de digitalización virtual sobre prototipos y se analizará su eficiencia.

## Arquitecturas específicas para mecanizado

El elevado coste de cálculo que presenta el Modelo Topológico de Fabricación, centrado en unas pocas pero reiteradas operaciones, sugiere el uso de circuitos específicos para implementar cada una de ellas, de manera que las funciones más complicadas sean llevadas a cabo eficientemente. La alternativa que aquí se presenta consistirá en plantear una arquitectura convencional que se apoya en una extensión específica para mecanizado. La parte convencional se encarga de implementar el cuerpo principal del modelo computacional mixto del MTD, mientras que la parte específica estará especialmente diseñada para realizar con eficiencia el cálculo de las tareas que soportan el mayor peso de la computación en este modelo.

Como se ha visto en el capítulo primero (*Estado del Arte*), existen diversas maneras (denominadas estrategias) de calcular trayectorias de mecanizado. Dependiendo del tipo de superficie, número de trayectorias a aplicar, precisión, calidad del acabado, etc., es recomendable utilizar una técnica u otra o una combinación de varias de ellas, ya que todas ofrecen ventajas e inconvenientes.

Mediante el uso de una arquitectura específica es posible disponer de un circuito adaptado para cada configuración de estrategia de mecanizado. La arquitectura a considerar dispone de un elemento planificador encargado de seleccionar una serie de circuitos especializados en función de la técnica de mecanizado escogida para cada superficie. Este tipo de arquitectura es el que se muestra en la figura 5.1.

Por la compleja casuística que presenta la fabricación sobre máquinas herramienta, queda fuera del propósito de este trabajo de investigación el desarrollo de un prototipo que implemente esta arquitectura, aunque su realización llevaría a la construcción de un circuito o chip específico de mecanizado cuya aplicación en el sector del CAM puede resultar atractiva. Sin embargo, partiendo del modelo general expuesto en la figura 5.1, se puede llegar a una arquitectura específica para el cómputo de las operaciones más complejas que residen en el modelo topológico de fabricación expuesto en este trabajo.

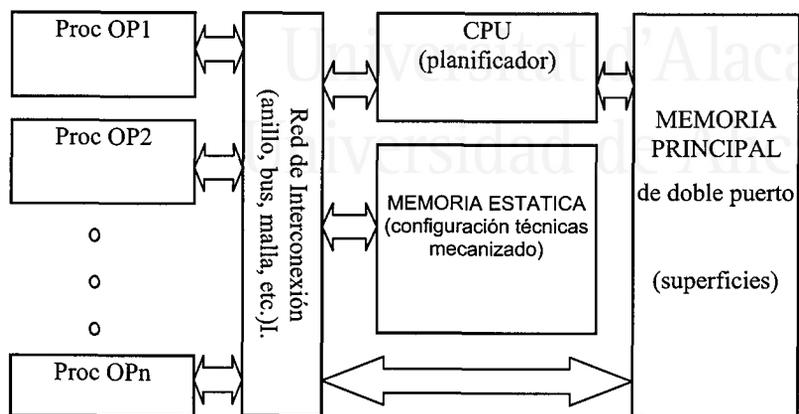


Figura 5.1: Esquema general. Arquitectura específica para el cálculo de trayectorias.

## Arquitectura específica para el MTF

En líneas generales, la versión secuencial del modelo computacional del Modelo Topológico de Fabricación se fundamenta en el cálculo de una distancia mínima a través de todos los puntos de una trayectoria virtual, el esquema general es el que se presenta en la figura 5.2.

```

Para cada posicion_trayectoria " $TR_{4x4}$ " hacer
  DistanciaMin= $\infty$ 
  Para cada superficie hacer
    Para cada punto_superficie "p" hacer
       $p' = \text{AplicarTransformacion}(p, TR_{4x4})$ ;
      DistanciaActual= $\text{Distancia}(p', \text{Herramienta})$ 
      Si DistanciaActual < DistanciaMin
        entonces DistanciaMin = DistanciaActual
      Fin para
    Fin para
  PuntoTrayectoria= $\text{CalcularCentro}(\text{DistanciaMin}, TR_{4x4})$ 
   $\text{Añadir\_Trayectoria}(\text{PuntoTrayectoria})$ 
Fin para
  
```

Figura 5.2: Modelo computacional del MTF (versión secuencial).

Si se tiene en cuenta que tanto las trayectorias generadas como las superficies modeladas suelen tener varias decenas de miles de puntos para conseguir una calidad de acabado aceptable y

## 202 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

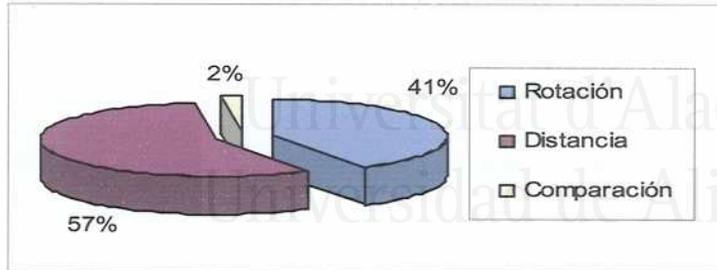
---

que el número de superficies implicadas en el mecanizado puede llegar a ser muy alto, resulta evidente que la complejidad o coste temporal del modelo propuesto puede llegar a constituir un verdadero cuello de botella a la hora de integrar este proceso en un esquema industrial de prototipado rápido. Como ejemplo se puede decir que para mecanizar una superficie de unos 600 cm<sup>2</sup> aproximadamente con una precisión no superior al milímetro, la ejecución del algoritmo que implementa el MTF sin refinamientos en un procesador PentiumII® 233 MHz puede llevar más de una hora de cálculo. Estos tiempos pueden llegar a ser aceptables en un esquema de fabricación en serie (producción industrial), ya que la trayectoria sólo se calcula una vez por cada tipo de pieza. Sin embargo, dentro de un esquema de prototipado rápido, donde el diseño se centra en el esquema prueba - error - rediseño, estos tiempos resultan prohibitivos.

El objetivo se debe centrar entonces en reducir tiempos de ejecución del modelo, haciendo uso de arquitecturas que nos permitan optimizar al máximo el cálculo del mismo. Uno de los pasos más importantes consistirá en optimizar la parte más interna de los bucles que aparecen en el algoritmo y que es la responsable de una parte muy importante del tiempo consumido.

En la parte más interna del modelo computacional se realizan tres operaciones: 1) aplicar una transformación a punto 3D (un producto de matriz por vector), 2) calcular una distancia de un punto a una superficie y 3) comparar magnitudes y realizar una posible asignación. De todas ellas es la segunda la que admite una mayor variabilidad, ya que, dependiendo de la superficie a mecanizar, las especificaciones de trayectoria y herramienta, ese cálculo de distancia puede cambiar desde una simple resta hasta un complejo método de cálculo de intersecciones entre superficies tridimensionales.

La figura 5.3 muestra el coste computacional de cada una de las tareas involucradas como un porcentaje del tiempo total de ejecución para una estrategia helicoidal y una herramienta tórica.



**Figura 5.3.** Distribución del tiempo de computación entre las funciones más internas del modelo computacional del MTF.

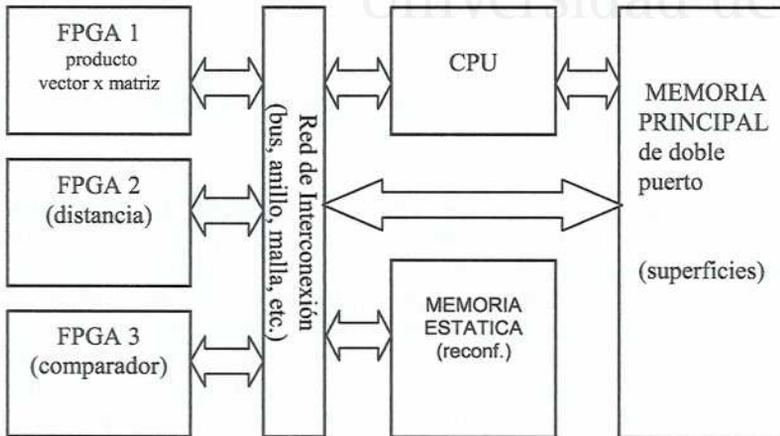
La estructura general presentada en la figura 5.1 no hace referencia a la naturaleza de los circuitos que realizan las operaciones específicas. Aunque estos circuitos podrían implementarse de un manera óptima mediante circuitos específicos o ASIC (*Application Specific Integrated Circuits*), el uso de esta tecnología conlleva un elevado coste a dos niveles: temporal (por la complejidad que existe en el diseño del circuito) y monetario (debido a la exclusividad en la fabricación). Por esta razón no es aconsejable en general utilizar ASICs para desarrollar prototipos.

Tradicionalmente el precio por obtener soluciones no muy caras y a corto plazo ha sido el de no conseguir los mejores índices de rendimiento mediante el uso de arquitecturas de propósito general. Esta barrera existente entre las arquitecturas especializadas y las genéricas se ha reducido con la aparición de circuitos integrados que pueden ser programados y reprogramados a fin de implementar una función específica que se ejecuta a velocidad hardware.

Las FPGAs (arrays de puertas programables por efecto de campo), [Trimberger, 1994], [VillaSeñor, 1997], son circuitos de alta densidad de integración con capacidad de reprogramación que pueden efectuar una tarea concreta a grandes velocidades, se podría decir que constituyen la versión programable de un ASIC. Aunque es un campo de reciente aparición, ya pueden encontrarse en la literatura taxonomías sobre los distintos tipos de arquitecturas que utilizan FPGAs [Radunovic, 1998] y [Sánchez, 1998]. En este apartado se prueba la idoneidad de un circuito construido con FPGAs para el cálculo de trayectorias.

## 204 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

Consecuencia de todo lo expuesto anteriormente se plantea, como prototipo, una arquitectura reconfigurable estática basada en FPGAs para optimizar el modelo propuesto. El sistema (ver figura 5.4) está formado por tres unidades FPGAs que se encargan de realizar, cada una de ellas, operaciones del bucle más interno del algoritmo (operación matricial, distancia y comparación).



**Figura 5.4:** Arquitectura específica para un sistema de digitalización virtual compuesta por 3 FPGAs.

El esquema anterior no debe ser tomado como un modelo final de la arquitectura, sino como una alternativa de diseño rápido para generar un esquema hardware eficiente. Dicho esquema podría ser finalmente implementado sobre una plataforma fija (ASIC) o reconfigurable (FPGA).

A continuación se analizan cada una de las tres operaciones que tienen lugar en los arrays programables desde el punto de vista del hardware reconfigurable.

### Operación matricial

En el algoritmo, esta operación recibe el nombre de *AplicarTransformacion*. La herramienta, en su desplazamiento a través de la superficie a ser mecanizada, va trasladándose a distintos puntos, cada uno de ellos (distinto para cada punto de la trayectoria) puede ser modelado mediante una matriz 4x4 de transformación homogénea. El objetivo de esta matriz en el

algoritmo será el de situar cada punto de la superficie ante la posición actual de la herramienta. Es importante conocer que esta matriz no variará en la parte más interna del bucle, solamente cambiará para cada punto de trayectoria, es decir, en el primer bucle del algoritmo.

Dada la generalidad del problema expuesto, se pueden encontrar en la literatura distintos enfoques, desde la lógica reconfigurable o desde los circuitos ASIC, para realizar eficientemente el producto de matriz – vector [Jang, 2003]. Desde el punto de vista del modelo computacional del Modelo Topológico de Fabricación, existen dos aproximaciones posibles a la hora de implementar este producto sobre una arquitectura FPGA: tener tanto los coeficientes de la matriz de transformación como el punto (vector) en memoria y tener solamente en memoria el vector.

La primera solución consiste en disponer de una FPGA, conectada a una memoria estática, en la que residan los coeficientes de la matriz y el vector a multiplicar. La mayoría de modelos propuestos actualmente siguen este esquema de multiplicación de vector – matriz y ofrecen buenas prestaciones siempre y cuando sea elevado el número de puntos a transformar con la misma matriz, lo que garantiza un aprovechamiento óptimo de los esquemas segmentados de este tipo de arquitecturas. Además de la generalidad de esta solución, la FPGA no necesita ser reprogramada durante toda la operación topológica (arquitectura reconfigurable estática), ya que siempre se realizan multiplicaciones matriz – vector, siendo únicamente necesario rescribir la memoria estática con los coeficientes de la matriz para cada punto de la trayectoria. El algoritmo utilizando este tipo de configuración se expresa en la figura 5.5.

En el esquema anterior, el circuito debe realizar lecturas en memoria de todos los operandos (matriz y vector) para cada multiplicación interna. Esto puede suponer un coste adicional que se puede eliminar si se considera la reprogramación de la FPGA en cada iteración del bucle exterior, de manera que se realice una multiplicación de una matriz constante por un vector (ver figura 5.6), lo que constituye la implementación de una arquitectura FPGA dinámica que justificaría el uso de hardware reconfigurable incluso en la plataforma final.

## 206 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

```

ProgramarFPGA1(Producto_Matriz_Vector4x4, TR4x4);
Para cada posicion_trayectoria "TR4x4" hacer
  ReescribirCoeficientesMatriz(TR4x4);
  DistanciaMin=∞
  Para cada superficie hacer
    Para cada punto_superficie "p" hacer
      ReescribirCoeficientesVector(p);
      p'=LLamarCalculoFPGA1v1();
      DistanciaActual=Distancia(p',Herramienta)
      Si DistanciaActual<DistanciaMin
        entonces DistanciaMin = DistanciaActual
    Fin para
  Fin para
  PuntoTrayectoria=CalcularCentro(DistanciaMin, TR4x4)
  Añadir_Trayectoria(PuntoTrayectoria)
Fin para

```

**Figura 5.5:** Digitalización virtual utilizando un esquema estático FPGA para la transformación del punto.

Con este enfoque, la multiplicación aumenta el grado de paralelismo, pues no es necesario tener que acceder secuencialmente a la memoria en busca de los coeficientes de la matriz.

```

Para cada posicion_trayectoria "TR4x4" hacer
ProgramarFPGA1(Producto_vector_Matriz_TR4x4);
DistanciaMin=∞
Para cada superficie hacer
  Para cada punto_superficie "p" hacer
    ReescribirCoeficientesVector(p);
    p'=LLamarCalculoFPGA1v2();
    DistanciaActual=Distancia(p',Herramienta)
    Si DistanciaActual<DistanciaMin
      entonces DistanciaMin = DistanciaActual
  Fin para
Fin para
  PuntoTrayectoria=CalcularCentro(DistanciaMin, TR4x4)
  Añadir_Trayectoria(PuntoTrayectoria)
Fin para

```

**Figura 5.6:** Digitalización virtual utilizando un esquema dinámico FPGA para la transformación del punto.

Este esquema podría resultar más eficiente que el anterior bajo las siguientes suposiciones:

1. Si el número de puntos de cada superficie es muy elevado.
2. Si el tiempo de reprogramación de la FPGA no es muy elevado.

La primera condición se cumple siempre que se trate de realizar mecanizados con precisión, lo que es habitual cuando se utilizan máquinas herramienta.

En cuanto a la segunda condición, hay que tener en cuenta que, en este tiempo, se ha de incluir el coste de generación del programa y el tiempo efectivo de reprogramación de la FPGA. Debido a que solamente cambian los coeficientes del vector, es fácil parametrizar un algoritmo de multiplicación hardware para que se adapte a ellos en cada momento. Sin embargo, el tiempo de programación de una FPGA está en el orden de las decenas de milisegundos (seis órdenes superior al tiempo de acceso a una memoria estática), lo que puede constituir un cuello de botella para el algoritmo aun cuando se emplee la característica que poseen algunas FPGAs para la reprogramación parcial. En el apartado de simulación se realizarán experimentos encaminados a validar este tipo de arquitectura.

### **Cálculo de la distancia**

Esta operación es la denominada *Distancia (p', Herramienta)* en el algoritmo de la figura 5.6; es la que admite el mayor grado de complejidad y variabilidad dentro del algoritmo. Su cometido es el de calcular la distancia que existe entre un punto de una superficie y la herramienta en su dirección de avance. La forma de calcular dicha distancia varía según la geometría de la herramienta y sus posibilidades de acercamiento al objeto en cuestión (en línea recta, describiendo un arco, de forma libre, etc.). Para máquinas simples, en las que no se admiten carruseles de herramientas y donde los grados de libertad de la máquina están muy limitados (pensar como ejemplo en un torno para fabricar llaves), tanto la herramienta como la forma de acercamiento son fijas en todo el proceso de cálculo. La función distancia podría quedar en una simple resta de componentes. Además, la programación de la FPGA sólo debería realizarse una vez, por lo que podría ser llevado a cabo, finalmente, por un circuito específico.

Cuando las posibilidades de la máquina aumentan (varios tipos de herramienta, 5 grados de libertad en el acercamiento, etc.), la función distancia puede cambiar para cada posición de la herramienta y también para cada punto de la superficie a mecanizar, ya que, con varios grados de libertad, existen varias formas de acercarse a un punto. Habría que incluir la figura del

## 208 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

planificador como elemento de proceso encargado de elegir la implementación más adecuada de la función distancia conforme a una serie de heurísticas. En estos casos, puede que la complejidad de la función requiera del uso de un procesador especializado para el cálculo en coma flotante en vez del empleo de las FPGAs que ofrecen soluciones eficientes para cálculo con enteros.

En modelos más sencillos de máquinas herramienta (3 ejes, carruseles de herramientas no muy numerosos), la complejidad del planificador no es tan elevada como para desaconsejar el uso de FPGAs. Además, pueden utilizarse procesadores de señal (DSP's) para la implementación de dichos planificadores, lo cual liberaría al procesador principal de ese trabajo. Una implementación posible del algoritmo quedaría como indica la figura 5.7.

```

ProgramarFPGA1(Producto_Matriz_Vector4x4);
Para cada posicion_trayectoria "TR4x4" hacer
  ReescribirCoeeficientesMatriz (TR4x4);
  Pr=ObtenerProgramadelPlanificador(posiciontrayectoria);
  ProgramarFPGA2 (Pr);
  DistanciaMin=∞
  Para cada superficie hacer
    Para cada punto_superficie "p" hacer
      ReescribirCoeeficientesVector (p);
      p'=LLamarCalculoFPGA1v1();
      DistanciaActual=LLamarCalculoFPGA2(p')
      Si DistanciaActual<DistanciaMin
        entonces DistanciaMin = DistanciaActual
    Fin para
  Fin para
  PuntoTrayectoria=CalcularCentro(DistanciaMin, TR4x4)
  Añadir_Trayectoria (PuntoTrayectoria)
Fin para

```

**Figura 5.7:** Algoritmo de digitalización virtual utilizando 2 FPGAs (cálculo de la distancia a una superficie).

### Comparador de asignación

Esta tarea, la más simple de las tres propuestas, consiste en comparar una serie de magnitudes y, en caso de éxito, realizar una asignación. Se podría tener una FPGA programada para realizar la comparación – asignación. Dicha programación sería única y, por tanto, el circuito actuaría a nivel de coprocesador en vez de hardware reconfigurable propiamente dicho. Sin embargo, la mejora obtenida, habida cuenta de su posición en la parte más interna del bucle, sería significativa.

El algoritmo mediante la utilización de FPGAs para cada uno de los bloques estudiados se muestra en la figura 5.8.

```

ProgramarFPGA1(Producto_Matriz_Vector4x4);
ProgramarFPGA3(comparación_menor_asignación);
Para cada posicion_trayectoria " $TR_{4x4}$ " hacer
  ReescribirCoeficientesMatriz( $TR_{4x4}$ );
  Pr=ObtenerProgramadelPlanificador(posiciontrayectoria);
  ProgramarFPGA2(Pr);
  DistanciaMin=∞;
Para cada superficie hacer
  Para cada punto_superficie "p" hacer
    ReescribirCoeficientesVector(p);
    p'=LLamarCalculoFPGA1();
    DistanciaActual=LLamarCalculoFPGA2(p');
    LLamarCalculoFPGA3(DistanciaMin);
  Fin para
Fin para
PuntoTrayectoria=CalcularCentro(DistanciaMin,  $TR_{4x4}$ )
Añadir_Trayectoria(PuntoTrayectoria)
Fin para

```

**Figura 5.8:** Algoritmo de digitalización virtual utilizando 3 FPGAs en el bucle interno.

## Simulaciones sobre el rendimiento

En el algoritmo de digitalización virtual básico mostrado en la sección anterior, se puede observar que gran parte del tiempo de ejecución se consume dentro del bucle más interno. Si se aceleran las funciones llamadas en esta parte, será posible reducir el tiempo total de cálculo. La cuestión que surge inevitablemente es la de ¿hasta dónde puede llegar la mejora? En el modelo computacional se realizan algunas operaciones que quedan fuera de las optimizaciones consideradas. El tiempo de realización de estas operaciones supone una sobrecarga de procesamiento que limitará la mejora introducida por el uso de las FPGAs. El propio uso de este tipo de circuitos también supondrá coste adicional debido al tiempo consumido por la reprogramación y acceso al chip.

Para establecer una cota óptima del rendimiento del modelo anterior, se han realizado simulaciones de un modelo de digitalización virtual que emula el comportamiento de un torno copiador de herramienta tórica. Dicho modelo (ver figura 5.9) está compuesto de cuatro bucles anidados: el primero y el segundo simulan el movimiento helicoidal de la herramienta sobre el objeto a mecanizar y el tercero y cuarto analizan cada punto de la

## 210 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

superficie con el objetivo de encontrar el más cercano a la herramienta. La matriz de transformación realiza una rotación simple de un punto 3D sobre el eje X. La función distancia calcula la distancia entre un punto 3D y una herramienta tórica en la dirección de ataque de la herramienta (eje Y), esta función puede expresarse según la ecuación (Exp. 5.1).

$$D(x, y, z) = T_y - y - \sqrt{\left( R + \sqrt{r^2 - (x - T_x)^2} \right)^2 - z^2}$$

(Exp. 5.1)

Donde:

$T_x, T_y$ : Son las coordenadas  $x, y$  del centro del toro.

$x, y, z$ : son las coordenadas 3D de un punto

$R, r$ : son los radios mayor y menor respectivamente de un toro 3D

```

Para cada_posicion_traslacion_x hacer
  Min_distancia=∞
  Para grados = 0 , 360 hacer
    TR4x4 = Matriz_Rotacion_X(grados);
    Para u en FilasSuperficie hacer
      Para v en ColumnasSuperficie hacer
        p' (u,v) = p(u,v) * TR4x4 ...
        DistanciaActual=D(p', Tx, Ty, R, r)
        Si DistanciaActual<DistanciaMin
          entonces DistanciaMin = DistanciaActual
        Fin para
      Fin para
    PuntoTrayectoria=CalcularCentro(DistanciaMin, TR4x4)
    Añadir_Trayectoria(PuntoTrayectoria)
  Fin para
  
```

Figura 5.9: Algoritmo secuencial para el modelo de simulación propuesto.

Tomando como referencia este ejemplo, se debe elegir la mejor configuración para cada una de las tareas involucradas en el proceso de digitalización virtual. En primer lugar, se ha realizado una serie de simulaciones software que evalúan el coste de cada tarea dentro del bucle más interno del algoritmo y el mejor tiempo que podría ser conseguido utilizando la tecnología FPGA. Dado que se pretende encontrar la cota inferior del tiempo de computación, se ha asumido un tiempo de computación

despreciable en las tareas de cálculo que se llevan a cabo en cada uno de los bloques respecto del tiempo que tardarían en ejecutarse sobre un procesador convencional. Por otra parte, sí se han considerado tiempos típicos de reprogramación de la FPGA, así como los derivados de la modificación de los datos con los que operan (tiempos de escritura y reescritura en sus memorias internas).

### Tipo de arquitectura FPGA para la operación matricial

La primera simulación realizada tiene el objetivo de comprobar la mejor organización reconfigurable a la hora de realizar la transformación de los puntos de la superficie. La figura 5.10 muestra los tiempos obtenidos para las dos configuraciones propuestas anteriormente (ver figura 5.5 y figura 5.6) para la operación matricial.

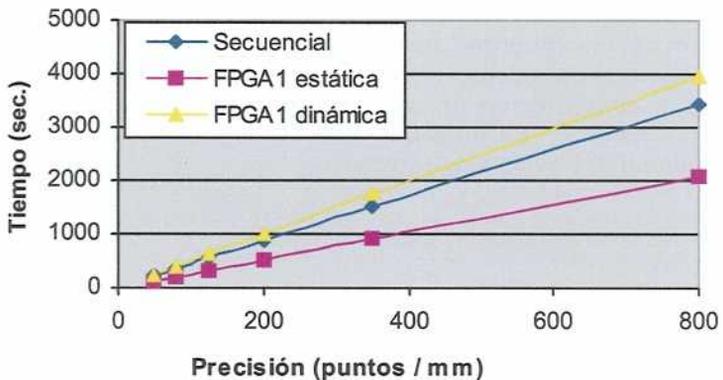


Figura 5.10. Simulación software del MTF usando FPGAs para la transformación de puntos de la superficie. Estimación de los tiempos mínimos de computación en función de la precisión del mecanizado.

La figura 5.10 muestra la conveniencia del uso de una arquitectura estática para la realización de la transformación del punto sobre una FPGA, lo que incidiría decisivamente en la elección de un circuito ASIC para la implementación de este bloque en la plataforma final. Aunque el cálculo en sí de la operación pueda ser más rápido en el esquema dinámico, el peso del tiempo de reprogramación de la FPGA afecta decisivamente sobre el tiempo total del algoritmo, llegando a ser sensiblemente

## 212 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

superior, incluso, a la versión que no utiliza la capacidad para la reconfiguración. No obstante, la evolución de esta tecnología (reprogramación parcial, uso de interfaces rápidos, etc.) muestra una clara tendencia a la disminución de los tiempos de reprogramación, por lo que es muy probable que a medio plazo los resultados mostrados en este estudio puedan cambiar de sentido.

### Simulación del prototipo hardware para el MTF

El modelo computacional que aparece en la figura 5.11 pertenece a una instanciación de la arquitectura reconfigurable presentada para el caso de un mecanizado de trayectoria helicoidal mediante el uso de una herramienta tórica. Aunque, por motivos pedagógicos, se han separado los bloques haciéndolos coincidir con las distintas tareas que se llevan a cabo en el algoritmo secuencial, una versión más realista del mismo incluiría el uso de una única estructura que incluyera la concatenación hardware de las distintas operaciones que tienen lugar en el bucle más interno del algoritmo, de esta manera sería posible, además, la construcción de una arquitectura segmentada cuya eficiencia estaría garantizada habida cuenta de la alta repetitibilidad del bucle más interno.

```

ProgramarFPGA1(Rotación en X de vector 3x1 de alfa grados);
ProgramarFPGA2(Cálculo de D sobre vector 3x1);
ProgramarFPGA3(comparación menor y asignación);
Para cada posición x hacer
  Para grados = 0 , 360 hacer
    Min_distancia=∞
    ReescribirRegistros(FPGA1, grados);
    ReescribirRegistros(FPGA3, Min_distancia);
    Para u en FilasSuperficie hacer
      Para v en ColumnasSuperficie hacer
        ReescribirRegistros(FPGA1,p);
        p'=LLamarCalculo(FPGA1);
        ReescribirRegistros(FPGA2,p',x);
        DistanciaActual=LLamarCalculo(FPGA2);
        DistanciaMin=LLamarCalculo(FPGA3);
      Fin para
    Fin para
    PuntoTrayectoria=CalcularCentro(DistanciaMin,grados)
    Añadir_Trayectoria(PuntoTrayectoria)
    IncrementarTraslación(x)
  Fin para
Fin para

```

**Figura 5.11:** Algoritmo de digitalización virtual de cálculo de trayectoria helicoidal con herramienta tórica basado en FPGAs.

Teniendo en cuenta tiempos de programación típicos en una FPGA y considerando los accesos a memorias compartidas por la arquitectura específica y el procesador que actúa como host, se han realizado simulaciones del algoritmo anteriormente expuesto teniendo en cuenta, por separado, el uso de una o varias operaciones especializadas. La idea tiene como objetivo localizar aquellas tareas que más influyen en el tiempo total del algoritmo y obtener una cota máxima del rendimiento que pueden ofrecer.

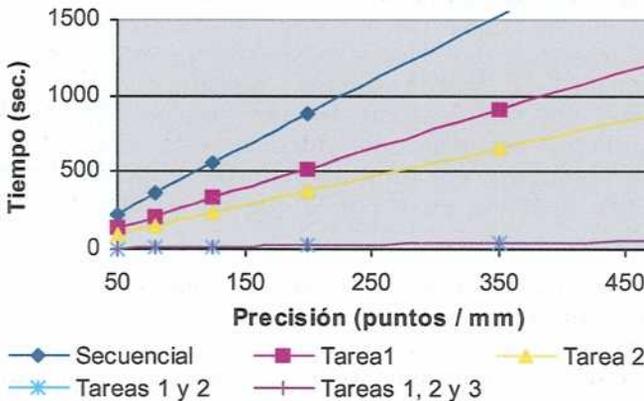


Figura 5.12: Simulación software. La *Tarea 1* realiza la rotación de los puntos. La *Tarea 2* calcula la distancia entre un punto y un toro 3D. La *Tarea 3* efectúa la comparación de la distancia mínima.

La gráfica presente en la figura 5.12 muestra la mejora conseguida tras la utilización de los bloques especializados si se compara con el algoritmo secuencial. Las líneas obtenidas deben ser tomadas como óptimas puesto que el tiempo de cálculo efectivo por parte de la FPGA ha sido considerado despreciable, sin embargo, dan una idea del límite que la mejora puede conseguir.

A la vista de los resultados se puede concluir que es la operación distancia aquella que afecta de manera más directa al rendimiento del algoritmo. Sin embargo, se ha de tener en cuenta la complejidad que puede llegar a tener esta función, lo que, en algún caso, puede suponer pérdida de eficiencia al implementarla sobre FPGAs. En el caso del ejemplo mostrado, la operación consta de una raíz cuadrada, cuatro multiplicaciones y seis sumas, aunque es posible implementar eficientemente raíces

## 214 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

cuadradas sobre FPGAs [Andraka, 1998], no es sencillo demostrar que el cálculo total de esta función se desarrolle con más rapidez que sobre una unidad especializada en el cálculo de coma flotante (procesador DSP o unidad similar). El pertinente estudio comparativo de ambas arquitecturas se muestra como una interesante línea de avance en esta investigación.

La operación de transformación influye en menor medida en el tiempo de algoritmo estudiado, sobre todo por la complejidad que posee la función distancia. Sin embargo, el desarrollo de una arquitectura específica que lleve a cabo esta operación (en este caso la rotación) no pierde interés, puesto que, utilizada conjuntamente con la operación anterior, puede obtener los mejores resultados del algoritmo. Además, esta operación es utilizada con frecuencia en otros ámbitos fuera del CAD/CAM (visión, robótica, gráficos, etc.), por lo que su estudio debe ser considerado.

Existen sistemas hardware que efectúan rotaciones, de ellos, el denominado *CORDIC* (*CO*ordinate *R*otation *D*igital *C*omputer, [Volder, 1959]), fundamentado en las propiedades de la tangente de ángulos, ofrece buenas prestaciones cuando se implementa sobre un sistema ASIC o reconfigurable. El *CORDIC* es versátil, eficiente y robusto, pero presenta algunos inconvenientes cuando es utilizado en el contexto del algoritmo (ver figura 5.11) que se presenta. En el MTF, una gran cantidad de puntos son rotados la misma cantidad de grados numerosas veces; a lo largo de la trayectoria helicoidal, sucesivas rotaciones se producen bajo incrementos constantes. Se ha desarrollado una nueva arquitectura específica, cuyo prototipo se ha implementado mediante hardware reconfigurable, que toma ventaja de este hecho. El sistema, que se denomina *MultiRotador*, introducido en [Jimeno, 2001b] y aplicado a problemas de generación de trayectorias en [Jimeno, 2003], utiliza multiplicadores por coeficientes constantes que mejoran las prestaciones de las implementaciones *CORDIC* tradicionales. La estructura de este sistema (ver *Apéndice A*) ha sido probada bajo entornos de simulación para FPGAs.

En la siguiente sección se muestran una serie de experimentos encaminada a probar la bondad y eficiencia de la arquitectura propuesta.

## Experimentos con sistemas MultiRotadores

Se han realizado tres tipos de pruebas; las primeras tienen como objetivo probar la exactitud de la rotación: dado que se utiliza aritmética de punto fijo es importante conservar la precisión que se obtiene con la longitud de la palabra empleada; el segundo tipo muestra los resultados de una simulación de la arquitectura realizada mediante circuitos reconfigurables en términos de tiempo de computación; por último, se ha comparado el sistema con distintos tipos de arquitecturas reconfigurables que implementan uno de los algoritmos más utilizados para producir eficientemente rotaciones. Puesto que la arquitectura del sistema tiene naturaleza estática, existe la posibilidad de crear circuitos ASIC de alta escala de integración que lleven a cabo la operación con alto grado de eficiencia.

### Precisión de la arquitectura

El sistema *MultiRotador* presentado está formado por una arquitectura escalable que depende del número de bits ( $n$ ) en que vienen representados los datos de entrada.

Para evaluar la precisión de la arquitectura, se ha escogido un tamaño de dato de 32 bits. La elección viene impuesta por la naturaleza del dato de entrada, la cual está determinada a su vez por la precisión de la geometría que se va a emplear en el algoritmo de rotación. En el caso que se muestra se ha seleccionado un formato de punto fijo de 32 bits: 16 para la parte entera del número más su signo y 16 para la parte fraccionaria. El rango de representación del formato que se expresa en la ecuación (Exp. 5.2) es adecuado para el contexto del problema.

$$[+32767.99998, 0.00001] \cup \{0\} \cup [-0.00001, -32767.99998]$$

(Exp. 5.2)

Se utiliza, por tanto, una arquitectura de 32 bits que es necesario evaluar. Uno de los aspectos que intervienen en la pérdida de precisión del MultiRotador (MR) es la existencia de retroalimentación cuando se calculan los senos y cosenos del ángulo incrementado. El experimento que se muestra en la figura 5.13 tiene como objetivo probar esa dependencia. En esta prueba

## 216 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

se ha realizado la rotación de un punto fijo en incrementos constantes hasta llegar a una posición determinada.

En la gráfica se puede observar que existe una dependencia directa entre el número de rotaciones incrementales realizadas y el error acumulado al final de la rotación (a mayor número de grados, mayor es el número de rotaciones incrementales que se han realizado; a menor ángulo incremental, también es mayor el número de rotaciones elementales).

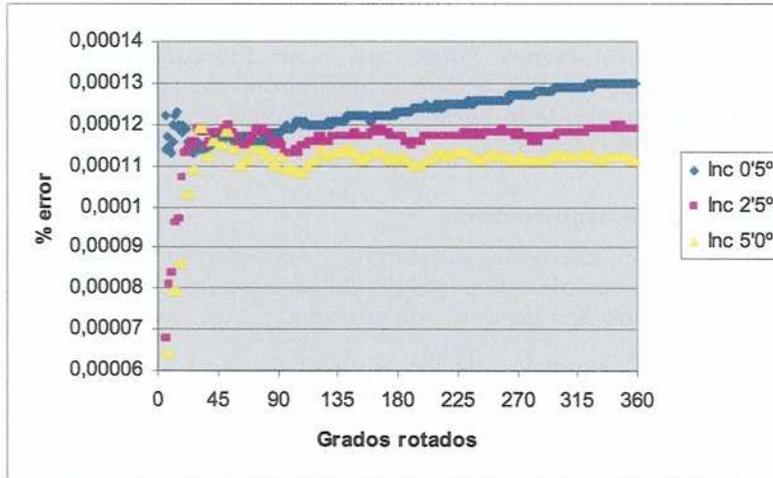


Figura 5.13: Error relativo del MR de 32 bits frente a una cantidad total de grados realizada bajo distintos incrementos angulares.

A la vista de los resultados de la simulación, el error que se comete puede ser considerado extremadamente bajo. Para el peor de los casos estudiados, la rotación de un punto 360 grados en incrementos de 0,5 grados (720 rotaciones elementales), el error relativo que se comete es del 0,00013%, lo que, en términos absolutos, se traduce en un error de 1,2 unidades mínimas representables del formato (unidad mínima en el formato =  $2^{-16}$ ). En problemas de generación de trayectorias de alta precisión como el que aquí se trata, el error máximo admitido se sitúa entorno a la milésima de milímetro. En este caso, el error obtenido por el MultiRotador de 32 bits puede considerarse despreciable ya que es inferior a 0,00002 mm.

En la figura 5.14 se puede observar como la precisión no depende, en realidad, del ángulo elemental en el que se efectúen las rotaciones, sino del número de éstas como ya se ha visto anteriormente. En esta figura, las curvas de 0,5, 2,5 y 5° incrementan su error con el número de rotaciones pero el error es similar entre ambas.

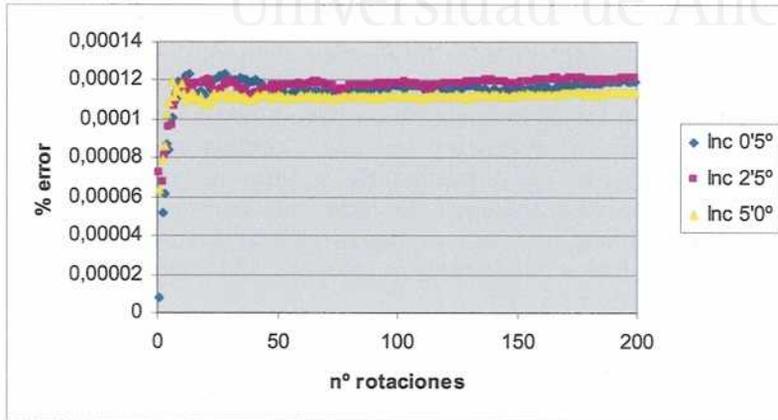


Figura 5.14: Error relativo de un MR de 32 bits en función del número de rotaciones elementales de distinto incremento angular.

### Rendimiento del MultiRotador de 32 bits

Es posible realizar una aproximación del rendimiento que ofrece el MultiRotador de 32 bits integrado en el modelo de digitalización virtual propuesto en la figura 5.11. Para ello, se ha implementado la arquitectura utilizando el programa de diseño para FPGAs *Xilinx Foundation Series 2.1i*®. La simulación ofrece resultados en términos de ciclos de reloj necesarios para su ejecución, ya que se consideran ideales todos los componentes hardware. La arquitectura simulada finalmente necesita los siguientes ciclos reloj para completar un número  $r$  de rotaciones:

- 1 para inicializar el sistema
- Número de ciclos empleados en cada rotación  $r$ :
  - 1 ciclo de carga de datos en los registros de desplazamiento.

## 218 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

- 32+1 ciclos para calcular el producto del multiplicador por una constante (1C- MAC).
- 1 ciclo para actualizar las iteraciones y comprobar la condición de finalización.

■ 1 ciclo para finalizar.

Por lo tanto, si una rotación necesita de 35+2 ciclos, para realizar una ejecución completa de  $r$  rotaciones elementales, el número de ciclos total será de  $35r+2$ . Esta formulación es necesario completarla con los ciclos necesarios para efectuar un cambio de ángulo, es decir, si se quieren realizar  $r$  rotaciones elementales sobre un conjunto de  $p$  puntos de  $n$  bits, el coste temporal equivaldrá a las  $r$  rotaciones de todos los puntos, además de emplear  $r-1$  rotaciones para actualizar los senos y cosenos del nuevo ángulo. En ciclos de reloj se ajustará a la fórmula indicada en la ecuación (Exp. 5.3).

$$\text{Ciclos} = 2 + (r(p+1) - 1)(n+3)$$

(Exp. 5.3)

Se ha llevado este modelo al algoritmo de digitalización virtual planteado en la figura 5.11. Efectuando una simulación en la que se han tenido en cuenta los parámetros anteriores y suponiendo una frecuencia de funcionamiento de la FPGA de 20MHz, se obtiene la gráfica que muestra la figura 5.15.

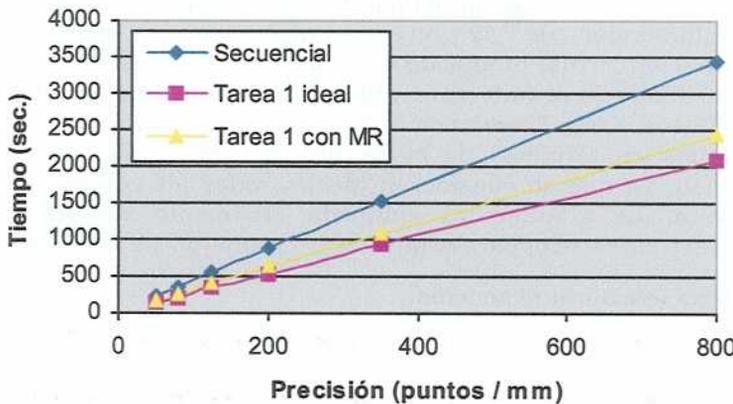


Figura 5.15: Comparativa de tiempos de digitalización virtual para una trayectoria helicoidal de precisión variable y herramienta tórica.

Los experimentos realizados arrojan unos resultados muy próximos a los tiempos ideales supuestos en la figura 5.12, en la que no se consideraba tiempo de cálculo alguno dentro del bloque especializado. Este resultado es, si cabe, más relevante, ya que ha sido obtenido utilizando una baja frecuencia de funcionamiento del circuito FPGA (20MHz).

La gráfica mostrada en la figura 5.16 relaciona distintas frecuencias de funcionamiento de la FPGA para la arquitectura MR utilizada en una instanciación de digitalización virtual de alta precisión (200 puntos por milímetro). A tan sólo 5 MHz ya se empiezan a mejorar los tiempos de ejecución del algoritmo convencional (el cual calcula los senos y cosenos utilizando las funciones estándar del lenguaje C que usa el procesador host). A partir de los 10 MHz ya es posible hablar de mejora sensible respecto al secuencial, mientras que frecuencias superiores a 40 MHz no mejoran el rendimiento debido al peso que, en el algoritmo, tienen otras operaciones.

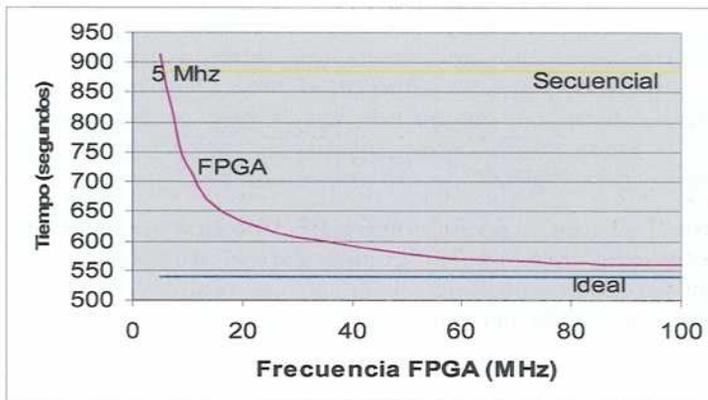


Figura 5.16: Tiempo de cálculo de trayectoria en función de la frecuencia de funcionamiento de la FPGA que implementa un MR de 32 bits.

### Comparativa con arquitectura CORDIC

Como se mencionó anteriormente, CORDIC es un referente en computación hardware que es capaz de llevar a cabo eficientemente diversas operaciones trigonométricas. Además de poder realizar rotaciones de puntos, puede calcular módulos de vectores, raíces cuadradas, etc. Dada su versatilidad y robustez ha sido llevado a circuitos de diversas maneras: unas para

## 220 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

umentar su eficiencia y otras para disminuir los recursos hardware.

Sin embargo, CORDIC presenta algún inconveniente para el tipo de problema que se pretende resolver en el contexto del Modelo Topológico de Fabricación, en el que la precisión y la velocidad son fundamentales. Por una parte, este algoritmo no realiza rotaciones perfectas, sino que se trata de un método iterativo que realiza sucesivas aproximaciones que convergen hasta llegar a la rotación deseada. Cada una de estas iteraciones se denomina *etapa*; con un número suficiente de etapas CORDIC se puede llegar a aproximar la precisión al límite que la longitud de palabra del dato admite. Aun cuando este número de etapas sea suficiente, el punto girado no es el correcto (se comete un error en la magnitud del vector que apunta hacia las coordenadas del punto), por lo que hay que realizar una rectificación a posteriori de las coordenadas que redundará en una pérdida de eficiencia del sistema.

La serie de experimentos que se muestran a continuación comparan el error que se comete (en términos relativos a la magnitud del punto girado) sobre un sistema CORDIC de 32 bits y un MultiRotador del mismo número de bits. Se ha elegido un número de etapas de 32 que garantiza la máxima precisión en una arquitectura CORDIC de ese número de bits.

La figura 5.17 muestra una comparativa de una rotación de un punto que varía entre 1 y 720 grados. Para el MultiRotador se ha utilizado un incremento angular de 1°. Los resultados muestran una mayor precisión del MR en todos los casos, a pesar de que en este sistema, como ya se ha mencionado, existe una dependencia entre el error cometido y el número de rotaciones elementales realizadas. La mejora obtenida es de más del 60% respecto al CORDIC.

El experimento anterior pone de manifiesto la mayor precisión del MR, sin embargo, el incremento angular era constante (1°) y la prueba anterior fue realizada para rotar un mismo punto (de coordenadas  $x=10$  e  $y=10$ ). En el experimento que muestra la figura 5.18 se pueden observar los errores máximos que se producen en ambos algoritmos tras someterlos a una serie de pruebas sobre puntos aleatorios y con rotaciones incrementales que oscilan desde 0,1 hasta los 4 grados. En esta prueba se ha incluido la arquitectura CORDIC de 16 bits, ya que utiliza una

cantidad de recursos hardware comparable con el MultiRotador de 32 bits.

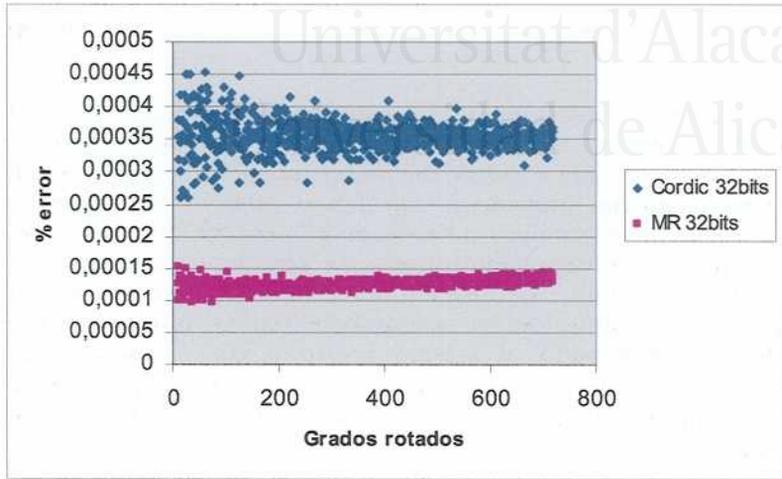


Figura 5.17: Comparativa de la precisión. CORDIC vs. MultiRotador de 32 bits.

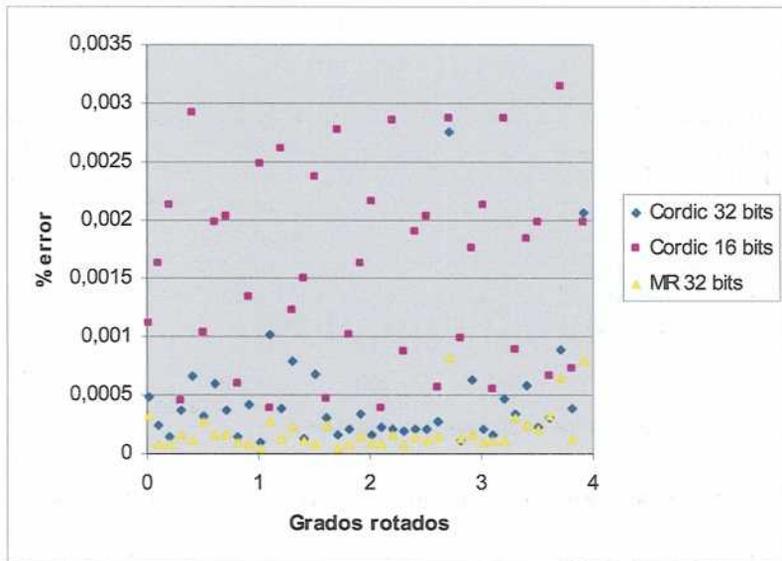


Figura 5.18: CORDIC vs. MultiRotador: Error máximo obtenido para una rotación.

## 222 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

A la vista de la gráfica anterior, el CORDIC de 16 bits ofrece los peores resultados, aunque la versión de 32 bits está muy próxima a este último en algunas de las pruebas realizadas. El MR de 32 bits vuelve a ofrecer los mejores resultados en todas las series.

En las pruebas anteriores se ha supuesto siempre, para el caso del MultiRotador, un incremento angular constante. En la siguiente, se somete a la arquitectura a un conjunto de rotaciones donde, únicamente, se fija el número de rotaciones elementales. Este número varía desde 1 hasta 290 iteraciones en intervalos de 10. Para cada número de iteraciones se ha variado aleatoriamente tanto la posición del punto como el incremento angular. Finalmente se ha realizado la misma prueba para el CORDIC, sometiendo al mismo punto a una rotación total equivalente, es decir, de ángulo  $\alpha = i \cdot \Delta$ , donde  $i$  representa el número de rotaciones elementales del MR y  $\Delta$  el incremento angular seleccionado. Con ello se pretende probar la precisión del MR ante cualquier  $\Delta$  y número de rotaciones efectuadas. La figura 5.19 muestra los resultados de este experimento.

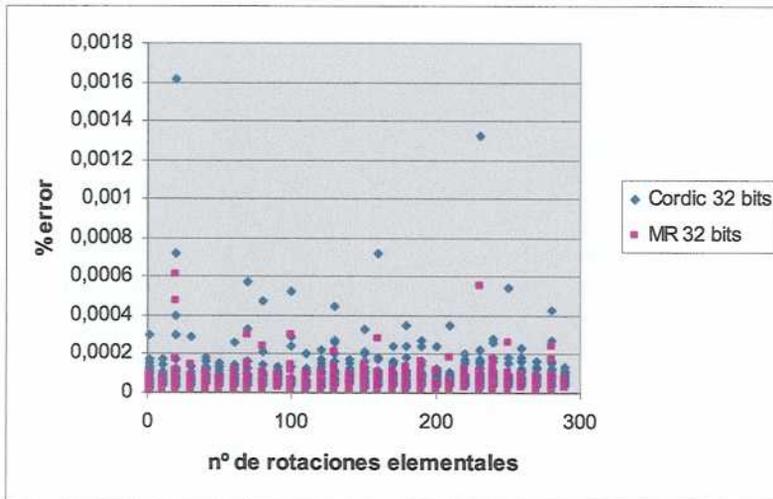


Figura 5.19: CORDIC vs MR, dispersión del error.

Como se puede apreciar en la gráfica anterior, el MR muestra una dispersión menos acentuada que el CORDIC de 32 bits, lo

que garantiza la estabilidad de las rotaciones y, por tanto, del modelo geométrico resultante.

Otro de los aspectos interesantes que presenta el modelo CORDIC, es su eficiencia cuando se implementa sobre una arquitectura reconfigurable como la propuesta. La investigación en este campo ha sido fructífera y, hoy en día, se conocen un amplio abanico de soluciones hardware que lo implementan. Dado que actualmente no se cuenta con un circuito MultiRotador real que haga posible la comparación por tiempos con sus equivalentes CORDIC, esta investigación se ha limitado a realizar la comparación que el modelo hardware simulado permite, es decir, a comparar los ciclos de reloj necesarios. Es evidente que un esquema hardware complejo no podrá funcionar a la misma frecuencia que uno más simple, por ello, para realizar una comparativa más realista, se ha tenido en cuenta en este estudio la cantidad y complejidad de recursos hardware que las distintas alternativas plantean.

La tabla 5.1 muestra una comparativa de rendimiento y recursos del MultiRotador, junto con las implementaciones CORDIC más comunes. Las coordenadas del punto se representan mediante una longitud de palabra de  $n$  bits. En las implementaciones CORDIC se ha denominado  $w$  al número de etapas implementadas ( $w \leq n$ ).

A la vista del estudio, la implementación bit-serie del CORDIC puede considerarse como la de menor rendimiento, ya que se necesitan  $n$  ciclos ( $n$  desplazamientos) por cada etapa realizada. Su simplicidad permite las máximas frecuencias de funcionamiento de la FPGA aunque diversos estudios [Andraka, 1998], [Kuhlmann, 1999], demuestran que los tiempos son sensiblemente superiores al resto de alternativas.

En la implementación bit-paralelo, los  $n$  desplazamientos se realizan en un solo ciclo utilizando registros de desplazamiento en barril, con lo que el número de ciclos disminuye hasta  $n$ . Por el contrario, el tiempo de ciclo aumenta aproximadamente por un factor de cinco [Andraka, 1998]. Ambas implementaciones CORDIC consiguen una precisión máxima que depende del número de etapas  $w$  y que, en todo caso, siempre es menor que la precisión alcanzable con números de  $n$  bits.

La versión totalmente segmentada de la arquitectura anterior proporciona una estructura con elementos más simples, lo que

## 224 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

elimina el inconveniente del elevado tiempo de ciclo de la implementación anterior, por el contrario, el número de elementos hardware es directamente proporcional al número de etapas.

En las implementaciones del MR, el número de ciclos es igual o menor que la implementación más rápida CORDIC, siendo presumible, por la complejidad de los componentes empleados, el alcanzar frecuencias de reloj similares a la bit-paralelo totalmente segmentada. Además, la precisión que se alcanza con el MR es la máxima que se puede conseguir con  $n$  bits, dado que, al no existir error en la magnitud del punto resultante, no se acumula el error producido por el reajuste de las coordenadas del punto.

Es posible, en el MR, reducir los ciclos de reloj a la mitad a costa de duplicar el hardware. La técnica, denominada PDA (*Parallel Distributed Arithmetic*), consiste en dividir cada dato en dos mitades, operando de manera independiente los bits impares y pares de cada uno de ellos.

Arquitectura	Nº ciclos	Recursos	Relación n/w	Error de magnitud
Bit-serie CORDIC	$n \cdot w$	3 S-Reg 3 Add/Subs 1 ROM serie	$n > w$	SI
Bit –paralelo iterativo CORDIC	$w$	3 Reg. 3 Reg barril. 3 Add/Subs	$n > w$	SI
Bit – paralelo completamente segmentado CORDIC	$w+1$	$(3 \text{ Adds/Subs}) \cdot (n+1)$	$w = n+2 + \log_2(n)$	SI
SDA Multi Rotador	$n+1$	2 S-Reg, 4 Reg 4 Acum. Escal. 1 Add + 1 Subs	-	NO
2-bit PDA Multi Rotador	$n/2+1$	4 S-Reg, 6 Reg 8 Acum. Escal. 1 Add + 1 Subs	-	NO

**Tabla 5.1.** Comparativa de algoritmos de rotación.

## Arquitecturas multiprocesador para el MTF

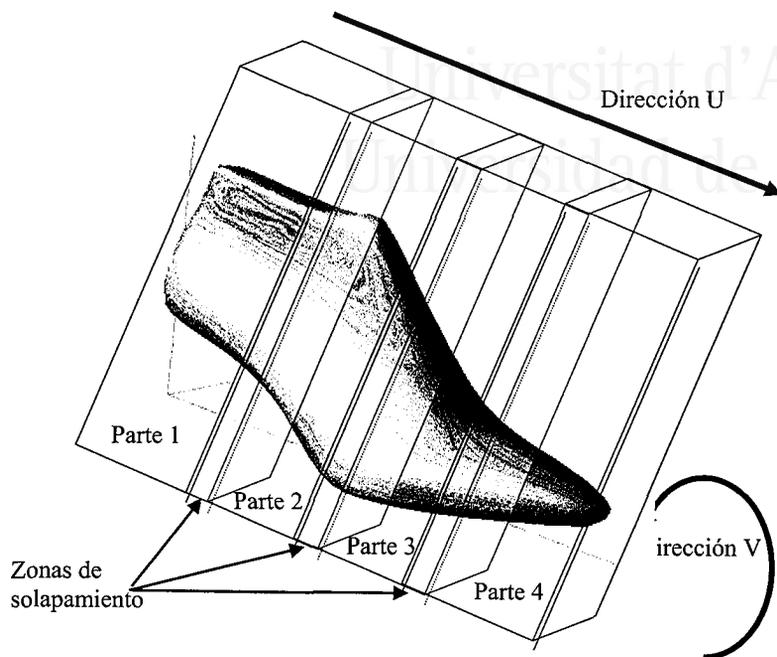
Tal y como se apuntaba en el capítulo anterior, la independencia entre valores de trayectoria respecto al cálculo de la función de distancia mínima, unida a la definición del principio de alcanzabilidad, hacen posible la explotación del paralelismo espacial en el modelo computacional del Modelo Topológico de Fabricación.

En este apartado, se planteará cómo es posible utilizar una arquitectura paralela de propósito general para realizar cálculos de trayectorias de manera eficiente.

### Distribución paralela de los datos del problema

Se va a utilizar un esquema maestro/esclavo en la ejecución de las tareas de cómputo. Se supondrán  $n$  procesadores de cálculo y un procesador maestro que realice y controle el intercambio de datos. La idea básica consistirá en distribuir todos los puntos de la geometría discretizada entre los procesadores esclavos, de esta manera, cada procesador sólo calculará la función distancia y la transformación de trayectoria para su propia porción de superficie. Finalmente, cada procesador enviará los resultados del cálculo al procesador maestro que los agrupará convenientemente con el resto de resultados de otros procesadores, obteniendo así, la trayectoria final.

La figura 5.20 muestra la distribución de un ejemplo de superficie para cuatro procesadores esclavo. Es importante tener en cuenta que las particiones no son disjuntas, sino que se produce un solapamiento entre partes contiguas de la superficie. La razón de este solapamiento viene relacionada con el concepto de alcanzabilidad de la herramienta. Es la geometría del elemento cortante la que, al tener dimensión en la dirección de la partición de la superficie, necesita contar con puntos de la superficie del entorno del procesador vecino para poder calcular la función distancia.



**Figura 5.20:** Partición de la superficie de una horma para cuatro procesadores.

En el caso que se presenta en la figura anterior, se ha escogido la dirección  $u$  de la superficie para poder realizar la subdivisión, puesto que la geometría de la herramienta produce un solapamiento menor en esta dirección. Otras topologías de herramienta pueden recomendar el uso de otro tipo de subdivisión, pudiéndose dar el caso de que el solapamiento pueda producirse, incluso, en ambas direcciones paramétricas.

En general, por lo que afecta a la distribución de los datos de la superficie, se pueden realizar dos formas de reparto:

■ *Reparto que incluye el solapamiento:* en este tipo de distribución se le envía a cada procesador toda la parte de la superficie que interviene en el cálculo de su porción de trayectoria, incluyendo el trozo solapado. Esto indica que se producirá el envío de información redundante por la red de distribución, ya que los mismos puntos de la parte solapada de

dos procesadores contiguos viajarán por la red. La figura 5.21 muestra una posible organización de este tipo de arquitectura. La principal ventaja de este método estriba en que los procesadores, una vez producida la recepción de información, no deben comunicarse entre ellos, por lo que, al no compartir información, pueden dedicarse exclusivamente al cálculo. Sin embargo, la cantidad de información que circulará por la red será mayor por ser una parte de ella redundante. La cantidad de información que se repite depende de la geometría de la herramienta y de la dirección de distribución.

■ *Reparto inicial sin solapamiento*: En este tipo de distribución, el procesador maestro no distribuye puntos de solapamiento entre los distintos procesadores, con lo que se elimina información redundante y el tiempo de reparto inicial disminuye respecto al caso anterior. Como contrapartida, cuando un procesador llega a una zona limítrofe de trayectoria, necesita para el cálculo información que no posee, por esta razón, debe comunicarse con el procesador vecino, que contiene esta información, para poder obtenerla. Para que esta solución sea ventajosa es necesario que exista un canal de comunicación (enlace) entre procesadores vecinos que sea independiente del canal de comunicación con el maestro (ver figura 5.22).

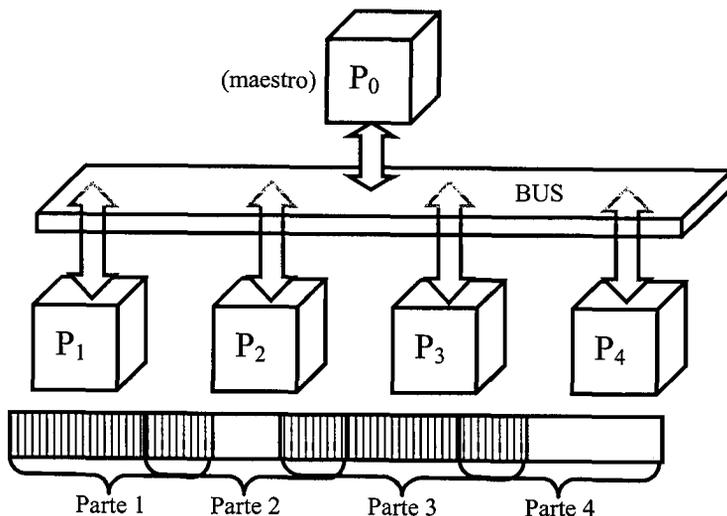


Figura 5.21: Arquitectura multiprocesador con solapamiento.

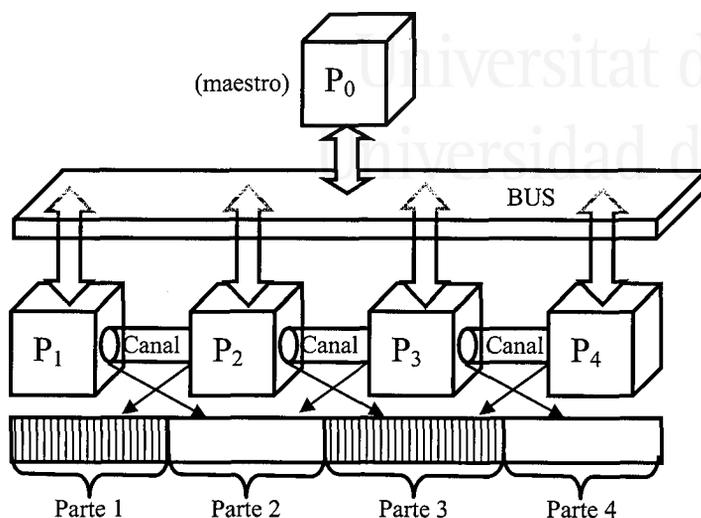


Figura 5.22: Arquitectura multiprocesador sin solapamiento.

### Modelo Cliente-Servidor sobre red de PCs

En algunos sectores tradicionales de producción, no se cuenta con los recursos materiales y humanos necesarios para incorporar grandes sistemas de computadores de alto rendimiento. No obstante, sí es común encontrar en estos lugares pequeñas redes locales que son utilizadas con diversos propósitos: gestión, diseño, producción, etc. Dichas redes pueden ser consideradas heterogéneas no por la naturaleza de los equipos, sino por la diversidad de carga y velocidad de los procesadores que la constituyen.

En el capítulo anterior se puso de manifiesto la naturaleza *gruesa* del paralelismo del Modelo Topológico de Fabricación. Esta característica lo hace especialmente adecuado para entornos como el que se propone en este punto, en el que cada procesador es lo suficientemente complejo como para efectuar las tareas de cálculo y donde los canales de comunicación no tienen un amplio ancho de banda.

En este apartado, el modelo computacional del MTF ha sido implementado sobre una red Ethernet de PCs y se ha evaluado

su eficiencia en términos de tiempo total de cómputo de una trayectoria helicoidal y herramienta tórica.

Se ha utilizado un esquema cliente / servidor para llevar a cabo el algoritmo. El funcionamiento de dicho sistema puede consultarse en el *Apéndice B*. Debido a la inexistencia de canales dedicados a la comunicación entre procesadores vecinos, se ha optado por un sistema de reparto con solapamiento para la realización de estas pruebas.

### Generación de trayectorias helicoidales de fabricación tórica

La batería de experimentos que se muestran a continuación pretende resaltar la utilidad de este tipo de redes para el procesamiento paralelo del Modelo Topológico de Fabricación.

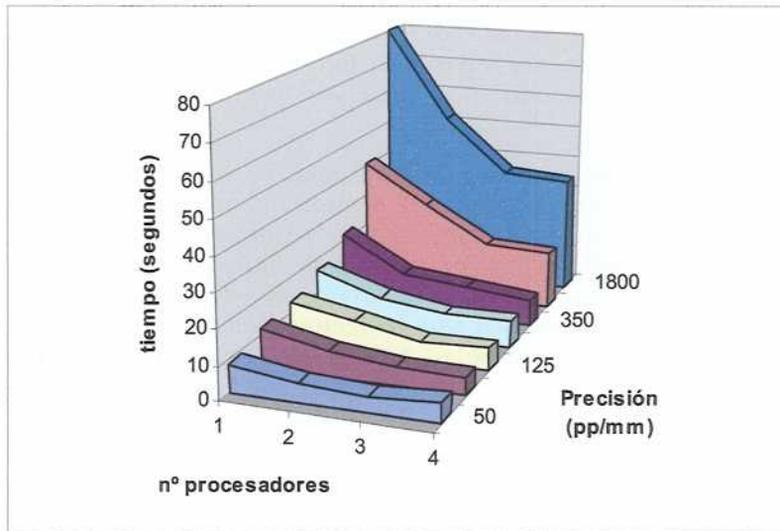


Figura 5.23: Paralelización del MTF sobre red de PCs. Resultados en función de la precisión del mecanizado en puntos por milímetro de trayectoria.

Dada la heterogeneidad de la red, los resultados no deben interpretarse de manera lineal con el número de procesadores, ya que cada procesador tiene unas características distintas de velocidad de CPU, memoria, etc. Por este motivo, el sistema desarrollado mide la capacidad de cálculo de cada procesador antes de solicitar su servicio y, en función de ella, realiza el

## 230 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

reparto de la trayectoria. En otras palabras, un procesador cuya capacidad de cálculo sea dos veces la de otro, recibirá una petición de trayectoria dos veces más grande que aquél. El objetivo es maximizar el tiempo en el que todos los procesadores se hallan trabajando. Es preciso hacer notar que, en este esquema, el procesador cliente, una vez que ha generado la petición de servicio, se convierte en servidor y pasa a calcular su propia porción de trayectoria.

La gráfica que aparece en la figura 5.23 muestra el efecto del aumento del número de servidores para un conjunto de trayectorias de precisión creciente. Los resultados óptimos de rendimiento se obtienen cuando el sistema trabaja con 2 ó 3 procesadores, llegando a cotas que se sitúan entre el 60% y 35% respecto del tiempo empleado por un solo procesador. En este experimento, la adición de un cuarto procesador no ha supuesto sensible mejora, más al contrario, en trayectorias de baja complejidad, el peso del reparto ha influido negativamente en el resultado final, siendo peor que el obtenido mediante 3 procesadores.

La precisión del mecanizado utilizada para el experimento anterior se ha obtenido variando conjuntamente los valores que configuran una trayectoria helicoidal: su paso y el número de puntos por vuelta. Los experimentos que se muestran a continuación estudian por separado el efecto que en el paralelismo puede provocar una trayectoria helicoidal compleja al variar tanto la densidad de su paso como el número de puntos por vuelta.

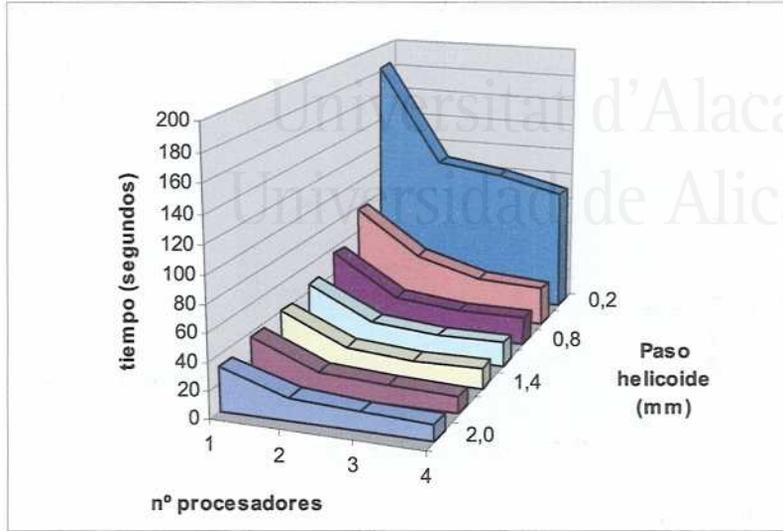


Figura 5.24: Paralelización del MTF sobre red de PC's. Resultados en función de la densidad del paso del helicoides (puntos por vuelta = 720).

A la vista de los resultados se puede ver cómo el paso denso del helicoides, el cual provoca una mayor zona de solapamiento, rebaja la cota máxima de rendimiento del sistema. Un comportamiento mucho más homogéneo se puede observar cuando se aumenta exclusivamente el número de puntos por vueltas, como muestra la gráfica que aparece en la figura 5.25, en la que las cotas temporales se rebajan hasta un 33% respecto del tiempo secuencial.

Como conclusión a este estudio se puede afirmar la utilidad de una red heterogénea de PCs para llevar a cabo la paralelización del Modelo Topológico de Fabricación, si bien el grado de paralelismo que se puede alcanzar no es elevado debido al tiempo empleado en repartir los datos a los procesadores, unido al que se consume enviando la respuesta por parte de los servidores al proceso cliente.

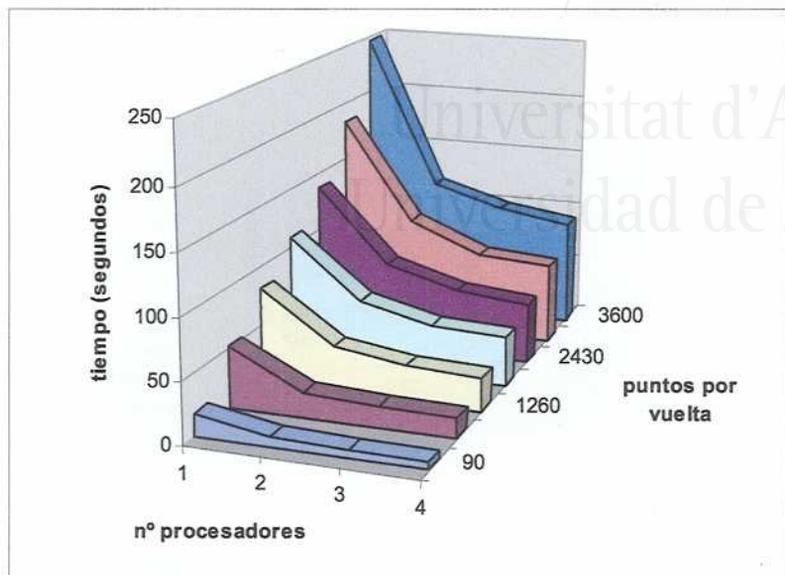


Figura 5.25: Paralelización del MTF sobre red de PC's. Resultados en función de la densidad de puntos del helicoides (paso fijo 1 mm).

## Experimentos sobre el multiprocesador SP2

En el ejemplo anterior se ha constatado un grado de paralelismo bajo para el Modelo Topológico de Fabricación, si bien esta característica es típica de los modelos computacionales de paralelismo grueso, parte de la pérdida de eficiencia del sistema anterior viene dada por dos razones: el ancho de banda de la red que redundaba en un tiempo de comunicación mayor, y la heterogeneidad de los componentes que disminuye el porcentaje de utilización de los mismos.

A fin de probar el modelo sobre una plataforma paralela más homogénea, se han desarrollado pruebas sobre el sistema multiprocesador escalable SP2. Este sistema proporciona una vía de comunicación rápida entre 8 procesadores. Para la implementación del modelo se han usado dos modelos distintos de programación, el modelo de máquina paralela virtual que ofrece *PVM* y el interfaz de paso de mensajes *MPI*.

Los resultados mediante el uso del modelo PVM y MPI se encuentran reflejados en la figura 5.26 y figura 5.27 respectivamente.

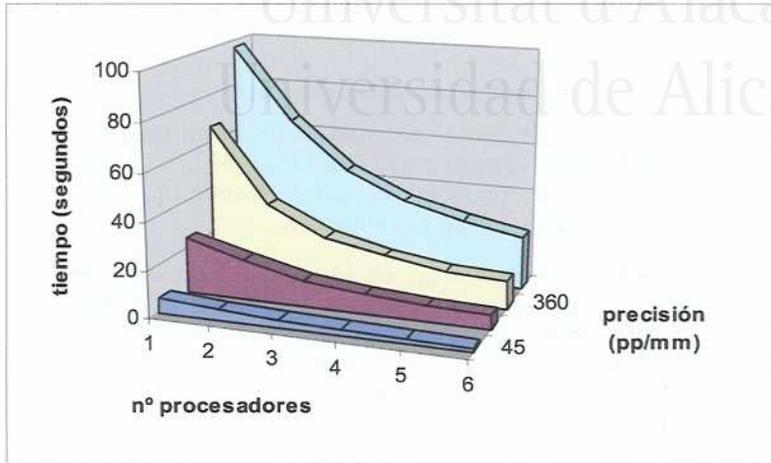


Figura 5.26: Paralelización del MTF sobre el sistema escalable SP2. Versión PVM.

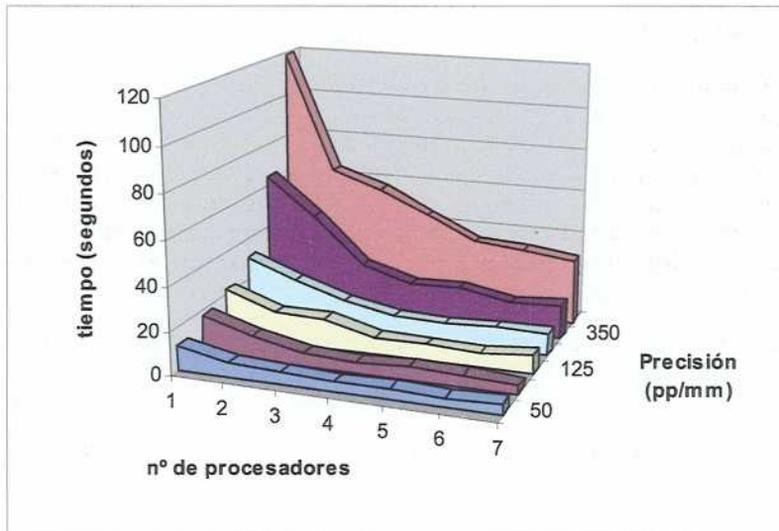


Figura 5.27: Paralelización del MTF sobre el sistema escalable SP2. Versión MPI.

## 234 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

Ambos manifiestan un mayor grado de paralelismo que el que se obtenía en el apartado anterior, ofreciendo tiempos de hasta un 20% sobre el total secuencial. La mayor rapidez en la comunicación favorece que la saturación del sistema se alcance mucho más tarde, en el quinto o sexto procesador.

### Comparativa de los modos de solapamiento

Dada la existencia de canales rápidos de comunicación entre procesadores en esta arquitectura, ha sido posible la realización de experimentos que prueben el comportamiento del modelo computacional paralelo con o sin solapamiento.

Los experimentos se muestran en la gráfica que aparece en la figura 5.28, en la que se pueden contemplar dos grupos de curvas que atienden a dos grados diferentes de precisión en la trayectoria: 180 y 360 puntos por milímetro. La herramienta tórica utilizada tiene un radio menor de 8 milímetros, lo que provoca una zona de solapamiento de 16 milímetros para cada procesador. Puesto que la trayectoria se reparte por igual entre los procesadores, el peso de la zona solapada es mayor conforme el número de procesadores aumenta.

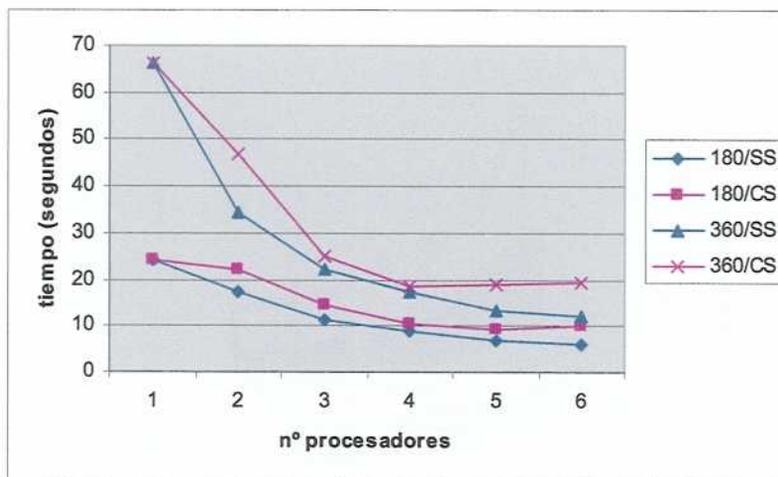


Figura 5.28: Comparativa entre arquitectura con solapamiento (CS) y sin solapamiento (SS) para 180 y 360 puntos por milímetro de trayectoria.

En la gráfica anterior se comprobó cómo el peso de la comunicación entre procesadores hace que el paralelismo del

sistema con solapamiento sea inferior al que no lo tiene. Además, los tiempos son siempre peores, incluso cuando el peso del solapamiento es bajo respecto al resto de la trayectoria, esto es debido a que es posible que un procesador tenga que esperar a recibir los datos que necesita de otro, lo que hace que el porcentaje de utilización de éste disminuya.

## Conclusiones

La complejidad del modelo computacional del Modelo Topológico de Fabricación aconseja la utilización de arquitecturas capaces de mejorar su rendimiento. En este capítulo se ha realizado una serie de pruebas que se han llevado a cabo sobre diversas arquitecturas paralelas convencionales y arquitecturas específicas.

En general, el uso de arquitecturas específicas ha sido, hasta la actualidad, muy poco utilizada para solventar los problemas de elevado coste computacional existentes en el mundo del CAD/CAM, en el que el cálculo de trayectorias, es tan sólo un ejemplo. En este capítulo se ha presentado un modelo de arquitectura genérica que se adapta al modelo computacional del MTF. Dicha arquitectura permite el cómputo eficiente de las operaciones de más coste en el modelo y se plantea independientemente de la tecnología final de implementación.

Dada la utilidad de la tecnología reconfigurable como herramienta de prototipado rápido, se ha implementado un modelo de la arquitectura específica presentada que utiliza circuitos FPGA. Este prototipo (denominado *MultiRotador* o MR) permite optimizar ciertas fases del cálculo de operaciones morfológicas del Modelo Topológico Determinista. El MR, como se puede ver con más detalle en el *Apéndice A*, conforma una arquitectura específica para producir rotaciones consecutivas que no es solamente útil en la generación de trayectorias helicoidales, sino que se puede extrapolar a cualquier problema de cálculo que necesite rotaciones sucesivas y, en general, puede ser utilizado siempre que se pueda definir un movimiento bajo parámetros constantes (dibujado rápido de círculos, elipses, etc.)

Por último, se han realizado otros prototipos del Modelo Topológico de Fabricación que han sido implementados sobre plataformas paralelas reales. Estos sistemas aprovechan el paralelismo inherente al modelo y permiten reducir los tiempos

## 236 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

de ejecución de los algoritmos que utilizan cuando se utilizan sobre dichas plataformas. En sí mismos, los prototipos no suponen una aportación en el mundo de la arquitectura de los computadores, pero sí en el mundo de la fabricación asistida por computador, donde la mayoría de soluciones algorítmicas se ejecutan secuencialmente sobre procesadores convencionales.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo Sexto

### Conclusiones

En esta investigación se ha realizado un estudio detallado de la problemática inherente a los procesos de mecanizado y digitalización de objetos. La complejidad de estos procesos es la que ha llevado al progreso por el empirismo y ha hecho difícil una formalización que aborde los problemas que plantean desde un punto de vista general.

El principal esfuerzo investigador ha estado centrado en la búsqueda de un marco conceptual que resuelva el problema de la generación de trayectorias mediante el uso de máquinas herramienta. Este esfuerzo se ha materializado, finalmente, definiendo una especialización de la morfología matemática. Esta teoría matemática, tradicionalmente afincada en los campos de la visión y tratamiento de señal, constituye un formalismo potente y versátil que se ha podido adaptar a los problemas derivados de los procesos de mecanizado o digitalización.

Pasando a los aspectos prácticos, en esta memoria se ha desarrollado un modelo computacional que permite verificar el comportamiento del formalismo cuando se aplica a problemas reales de fabricación por computador. Dicho modelo ha demostrado ser eficiente y robusto incluso en aplicaciones para las que inicialmente no fue diseñado.

La materialización del modelo sobre diversas arquitecturas demuestra su inherente paralelismo y asienta un nuevo campo dentro del CAM: la utilización de arquitecturas específicas o de

alto rendimiento para la generación de las trayectorias de las herramientas de mecanizado.

## Aportaciones

Se pueden distinguir aportaciones eminentemente científicas y otras esencialmente tecnológicas. Con el fin de facilitar la lectura, los siguientes párrafos muestran las aportaciones de la investigación conforme a los distintos capítulos en las que tienen lugar.

### Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

■ Formulación algebraica del problema de la generación de trayectorias de mecanización. Constituye un esfuerzo de abstracción, ya que, según se concluye del estado del arte, las aproximaciones a este problema han sido tímidas y fundamentalmente empíricas.

### Capítulo 2. EL MODELO TOPOLÓGICO DETERMINISTA

■ Propuesta de una especialización del formalismo de la morfología matemática: el Modelo Topológico Determinista. Dicha especialización consiste en la especificación de un modelo que permite definir operaciones morfológicas que están sujetas a un determinado orden o recorrido. De esta forma, el determinismo aparece de forma explícita ligado al concepto morfológico y es posible utilizarlo para la descripción de trayectorias.

■ Establecimiento de un modelo computacional que permite llevar a cabo las operaciones definidas en el MTD. Esto convierte el modelo en operativo y permite comprobar su bondad mediante experimentos. El estudio de los costes temporales y espaciales asociados al MTD ha revelado un método de cálculo que computacionalmente no crece de forma exponencial con la dimensión de los objetos tratados.

■ El modelo es lo suficientemente general como para tratar información de forma continua o discreta.

■ El MTD sigue permitiendo la realización de operaciones morfológicas convencionales, por lo que su uso está también indicado en los campos en los que la morfología clásica tiene aplicación. El modelo se presenta especialmente eficaz cuando se aplica en imágenes de gran tamaño o con más de dos

dimensiones sobre las que se tiene información que permite establecer una estrategia de recorrido.

- Estudio del paralelismo inherente al modelo. El concepto de localidad de las operaciones definidas permite su implementación bajo plataformas que operan en paralelo.

### **Capítulo 3. EL MODELO TOPOLÓGICO DE FABRICACIÓN**

- Una de las aportaciones más destacables de esta investigación ha sido la definición del proceso del mecanizado en términos de un problema morfológico. Puesto que un proceso de mecanización con máquina herramienta parte de la descripción geométrica de formas, dicho proceso puede ser modelado mediante una operación morfológica condicionada, en la que el elemento estructurante representa a la herramienta, el objeto sobre el que se aplica la operación representa la pieza a construir, y la condición representa la trayectoria de la herramienta. El modelo permite independizar los aspectos geométricos del proceso de fabricación de los tecnológicos, lo cual facilita la resolución de complejos problemas de cálculo geométrico como el del compensado de herramienta y permite exportar soluciones a cualquier entorno de mecanizado.

- En los casos de mecanizados en los que las máquinas están sujetas a fuertes restricciones dinámicas, los métodos actuales no permiten especificar estas restricciones de forma automática, por lo que la generación de trayectorias se debe hacer de forma parcialmente manual. El MTF es flexible a la hora de poder especificar cualquier tipo de recorrido, lo que lo convierte en especialmente interesante en el caso de máquinas que se reconvierten para poder ser usadas mediante un control numérico.

- El modelo permite la reconstrucción de superficies al ser capaz de ordenar nubes de puntos espacialmente y, por lo tanto, permitir su correcta interpolación. Como se ha visto a lo largo de este trabajo, la idea en la que se fundamenta el MTD es la ordenación de un conjunto de puntos; una vez definida, se realizan las posteriores operaciones morfológicas. Sin embargo, la ordenación que produce el modelo es, en sí misma, una solución para este problema.

#### Capítulo 4. APLICACIÓN DEL MTF

■ Se ha desarrollado un prototipo totalmente funcional, que implementa el MTF con la finalidad de generar trayectorias de mecanizado o digitalización sobre hormas de calzado que compite con las plataformas utilizadas en el sector y que se ha implantado en varios países de la UE, América y Asia.

#### Capítulo 5. ARQUITECTURAS PARA EL MTF

■ La realización de pruebas se ha llevado a cabo sobre diversas arquitecturas paralelas. Se han realizado diversos prototipos que aprovechan el paralelismo inherente al MTF y permiten reducir los tiempos de ejecución de los algoritmos cuando se utilizan sobre dichas plataformas. En sí mismos, estos prototipos no suponen una aportación en el mundo de la arquitectura de los computadores, pero sí en el mundo de la fabricación asistida por computador, en el que la mayoría de soluciones algorítmicas se ejecutan secuencialmente sobre procesadores convencionales.

■ Se ha desarrollado una arquitectura específica (cuyo prototipo se ha implementado con tecnología reconfigurable) que permite optimizar ciertas fases del cálculo de operaciones morfológicas del MTF. El *MultiRotador*, como se puede ver con más detalle en el *Apéndice A*, conforma una arquitectura específica para producir rotaciones consecutivas que no es solamente útil en la generación de trayectorias helicoidales, sino que se puede extrapolar a cualquier problema de cálculo que necesite rotaciones sucesivas.

#### Publicaciones

Hasta el momento, este trabajo ha dado lugar, por orden cronológico, a las siguientes publicaciones:

<b>[Sáez, 2000]</b>	
<p><i>Adaptación del PRM sobre superficies libres. Aplicación a entornos CAD/CAM.</i></p> <p>Actas del X Congreso Español de Informática Gráfica.</p> <p>2000.</p>	<p>Artículo científico que propone la modificación de un algoritmo de discretización utilizado en el modelo geométrico de Metaballs para su aplicación sobre superficies libres NURBS.</p>

<b>[Jimeno, 2001a]</b>	
<p><i>Shoe Last Machining Using Virtual Digitising.</i></p> <p>International Journal of Advanced Manufacturing Technology.</p> <p>2001.</p>	<p>Artículo científico en el que se presenta la operación de <i>digitalización virtual</i> como medio de obtención de trayectorias compensadas para tornos de fabricación de hormas de calzado.</p>
<b>[Jimeno, 2001b]</b>	
<p><i>Lógica reconfigurable para CAM.</i></p> <p>Actas de las Jornadas Nacionales sobre Lógica Reconfigurable y Aplicaciones.</p> <p>2001.</p>	<p>Artículo científico en el que se presenta una arquitectura reconfigurable (el MultiRotador) útil para algoritmos de mecanización.</p>
<b>[Jimeno, 2003]</b>	
<p><i>Reconfigurable computing for tool path computation.</i></p> <p>International Journal of Advanced Manufacturing Technology.</p> <p>Aceptado 2002. Publicación prevista Julio 2003.</p>	<p>En este artículo científico se recopila el trabajo realizado sobre las arquitecturas reconfigurables diseñadas para acelerar el Modelo Topológico de Fabricación.</p>

## Líneas abiertas de investigación

En esta memoria se ha dado una solución al problema de la generación de trayectorias. Intentándose ser riguroso y práctico, se ha llevado la investigación desde el mundo de los formalismos hasta el mundo real de la fabricación. El modelo ha demostrado ser válido, pero se puede seguir profundizando en numerosos aspectos que han quedado aún por desarrollar. Los que se consideran más relevantes son los siguientes:

- Desarrollo de heurísticas de planificación de trayectorias sobre el modelo.
- Aplicación del modelo a objetos con huecos o islas.
- Estudio de otras operaciones morfológicas para que puedan ser utilizadas en problemas de CAM.

## 242 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

Los puntos que aún quedan por desarrollar en el modelo computacional empleado son los siguientes:

- Modificación que incluya el cálculo de distancias a un modelo geométrico poligonal.
- Utilización del MTD en problemas de filtrado de imágenes 2D y 3D.
- Implantación de trayectorias de mecanizado convencionales (espiral, zig-zag, z-constante, etc.) sobre el modelo MTF.
- Estudio de los criterios de alcanzabilidad y vecindad del modelo para establecer heurísticas que aumenten la eficiencia del modelo computacional.

Sobre arquitecturas específicas para el mecanizado, decir que se trata de un campo novedoso aún sin explorar. Las investigaciones futuras deberían ir encaminadas a conseguir lo siguiente:

- Introducir hardware específico como método para optimizar el tiempo de ejecución de un algoritmo utilizado para el cálculo de trayectorias de mecanizado. Desarrollo de un chip específico de mecanizado.
- Investigar sobre la aplicación de arquitecturas de elevadas prestaciones en los sistemas de fabricación actuales.
- Desarrollar sistemas de mecanización híbridos que incluyan diversas plataformas que optimicen cada una de las etapas del modelo computacional expuesto en este trabajo de investigación (FPGAs, DSPs, etc.)



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## A p é n d i c e A

### El MultiRotador

En este apartado se propone una arquitectura implementada con tecnología reconfigurable que lleva a cabo una determinada transformación necesaria en una instanciación del Modelo Topológico Determinista. El modelado de la trayectoria helicoidal en el MTD lleva implícito la rotación de cada punto de la superficie. Debido a que a lo largo de dicha trayectoria las rotaciones se producen bajo incrementos constantes, se ha desarrollado una arquitectura reconfigurable que toma ventaja de este hecho. El sistema se denomina *MultiRotador* y está basado en multiplicadores por coeficientes constantes (KCM). El objetivo que se persigue es conseguir las mejores prestaciones para la rotación constante de un gran número de puntos, superando a otras arquitecturas existentes (implementaciones CORDIC).

Se aplicará el algoritmo de Digitalización Virtual (expuesto en el Capítulo Tercero) para un torno copiador compuesto de tres ejes de movimiento; todos ellos, en movimiento, definen una trayectoria helicoidal sobre la pieza que va a ser mecanizada. La herramienta, que simula dos cuchillas cilíndricas unidas por un eje y girando en torno al centro de ese mismo eje que portará el brazo de la máquina, será modelada mediante un toro 3D.

El algoritmo de digitalización virtual emulará el movimiento del brazo de la herramienta mediante rotaciones de los puntos de la superficie. Estas rotaciones siempre se calculan de la misma forma: cada punto de la superficie es rotado un ángulo fijo alrededor del eje de rotación. Por ejemplo, para una vuelta

## 244 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

completa en la trayectoria helicoidal, si se utilizara una configuración de 90 puntos de trayectoria por vuelta, se elegiría un incremento de 4 grados, con lo que las sucesivas rotaciones serían de: 4, 8, 12, ..., 352 y 356 grados.

Tradicionalmente el algoritmo CORDIC [Volder, 1959] se utiliza para producir rotaciones espaciales de una manera genérica. El CORDIC se basa en un método iterativo por aproximación que lleva a cabo rotaciones sobre vectores de ángulos arbitrarios tan sólo utilizando sumas y desplazamientos [Andraka, 1998].

La arquitectura reconfigurable que se propone (denominada MultiRotador, en adelante MR), al contrario que el CORDIC, calcula la rotación directamente, consiguiendo la máxima precisión permitida por la representación binaria escogida para los puntos geométricos. El MR puede implementarse utilizando únicamente Multiplicadores por Coeficientes Constantes (KCMs) y aritmética distribuida [Stanley, 1989], [Goslyn, 1995], consiguiendo un tiempo de respuesta igual e incluso mejor que las versiones completamente segmentadas y paralelas del algoritmo [Wang, 1996b], [Andraka, 1996], [Lin, 1990], utilizando una cantidad de recursos similar y manteniendo el máximo de precisión.

El problema consiste en producir  $r$  rotaciones del mismo punto 3D,  $p$ , con coordenadas  $(x, y, z)$ . Cada incremento de rotación se mantendrá constante  $(\Delta\theta)$ . Para la rotación  $i$ -ésima, el punto  $p$  habrá sido rotado una cantidad de grados expresada por la ecuación (Exp. A.1).

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \Delta\theta$$

(Exp. A.1)

Para este estudio, se asume que la rotación tendrá lugar sobre el eje cartesiano Z. Las coordenadas del punto  $p$ , después de la rotación  $i$ -ésima, serán obtenidas según las ecuaciones que se muestran en (Exp. A.2). La componente  $z$  no cambiará debido a que la rotación se realiza sobre dicho eje:

$$x_i' = x \cos \theta_i - y \sin \theta_i = x C_i - y S_i$$

$$y_i' = y \cos \theta_i + x \sin \theta_i = y C_i + x S_i$$

(Exp. A.2)

donde  $C_i = \cos \theta_i$ ,  $S_i = \sin \theta_i$ . Estas ecuaciones pueden expresarse, en función del ángulo existente en la iteración anterior, como:

$$x_i' = x \cos(\theta_{i-1} + \Delta\theta) - y \sin(\theta_{i-1} + \Delta\theta)$$

$$y_i' = y \cos(\theta_{i-1} + \Delta\theta) + x \sin(\theta_{i-1} + \Delta\theta)$$

(Exp. A.3)

Utilizando las propiedades trigonométricas del coseno y seno de la suma de ángulos se obtiene:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

(Exp. A.4)

luego:

$$C_i' = C_{i-1} C_\Delta - S_{i-1} S_\Delta$$

$$S_i' = S_{i-1} C_\Delta + C_{i-1} S_\Delta$$

(Exp. A.5)

donde  $C_\Delta = \cos \Delta\theta$ ,  $S_\Delta = \sin \Delta\theta$ ,  $C_{i-1} = \cos \theta_{i-1}$ ,  $S_{i-1} = \sin \theta_{i-1}$ .

Esto significa que tanto los productos de (Exp. A.2) como los de (Exp. A.5) presentan la misma una combinación lineal sobre las constantes  $C_\Delta$  y  $S_\Delta$ . Como consecuencia, el nuevo seno y coseno puede calcularse de la misma manera que se realizan las rotaciones. Gracias a estas transformaciones, una vez calculada la primera rotación y para cada una de las restantes, sólo es necesario realizar 4 multiplicaciones por coeficientes constantes ( $C_\Delta$  y  $S_\Delta$ ) que actualicen el valor del seno y coseno del nuevo ángulo.

Los multiplicadores por coeficientes constantes (KCMs) son especialmente adecuados para su implementación mediante

## 246 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

FPGAs, necesitando tan sólo tablas de consulta (LUTs), registros de desplazamiento y sumadores. No obstante, el tamaño de las LUTs crece exponencialmente con  $n$  (número de bits con el que se representan las coordenadas  $x$  e  $y$ ), por lo que esta  $n$  debe permanecer en valores relativamente bajos para obtener ocupaciones de la FPGA aceptables. Esto supone realizar las rotaciones con una precisión de 8-16 bits, insuficiente para la mayoría de las aplicaciones. Una alternativa es utilizar la aritmética distribuida serie (Serial Distributed Arithmetic, SDA) para realizar conjuntamente los productos y las sumas, en este caso, la arquitectura del algoritmo quedaría como muestra la figura A.1.

La arquitectura presenta dos modos de trabajo, el modo de rotación y el modo actualización. En el modo rotación, los dos registros de desplazamiento de  $n$ -bits se utilizan para almacenar las coordenadas  $x$  e  $y$  de los puntos. En cada rotación, los multiplexores de entrada actualizan los S-Reg con las coordenadas  $(x,y)$  del punto. Los bloques 1-C MAC (MACs de un coeficiente) realizan los productos  $x \cdot C_{\Delta}$ ,  $y \cdot C_{\Delta}$ ,  $x \cdot S_{\Delta}$  e  $y \cdot S_{\Delta}$  respectivamente trabajando en modo serie, de forma que, después de  $n$  ciclos, se obtienen los cuatro sumandos de la ecuación (Exp. A.2). En el último ciclo se actualizan los S-Reg con los valores del próximo punto a rotar y se obtienen las coordenadas rotadas del punto anterior  $x'$  e  $y'$

Cuando la arquitectura trabaja en modo actualización de ángulo ( $Inc=1$ ), los multiplexores de entrada actualizan los S-Reg con los valores de  $C_{\Delta}$  y  $S_{\Delta}$ . Los bloques 1-C MAC (MAC de un coeficiente) realizan los productos  $C_{\Delta} \cdot C_{i-1}$ ,  $S_{\Delta} \cdot C_{i-1}$ ,  $C_{\Delta} \cdot S_{i-1}$  e  $S_{\Delta} \cdot S_{i-1}$  respectivamente trabajando en modo serie. Después de  $n$  ciclos se obtienen los cuatro sumandos de la ecuación (Exp. A.5). En el último ciclo se actualizan los registros de ángulo  $CosAngReg$  y  $SenAngReg$  que se obtienen con los valores de  $x'$  e  $y'$  simultáneamente. Para reducir los recursos empleados es posible utilizar un solo sumador/restador en la fase final, a costa de incrementar en un ciclo el tiempo de cálculo. En total serán  $n+1$  ciclos para calcular una rotación de un punto de  $n$  bits utilizando 1 sumador y 1 restador, o  $n+2$  ciclos utilizando 1 sumador/restador.

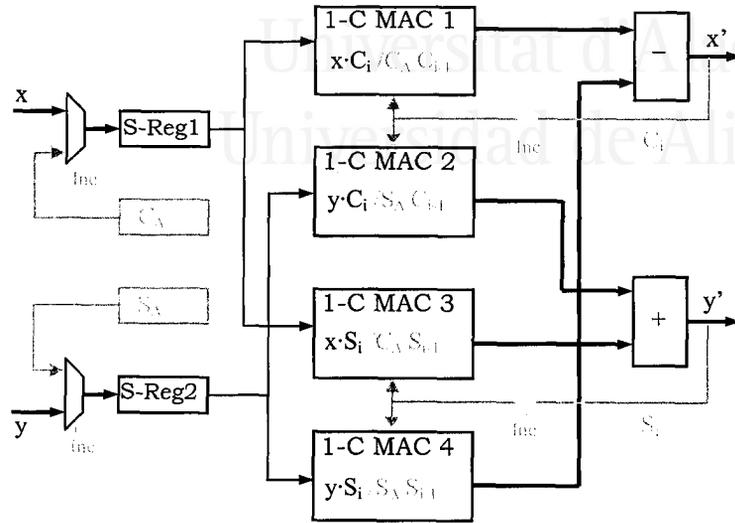


Figura A.1: Arquitectura del MR basada en SDA.

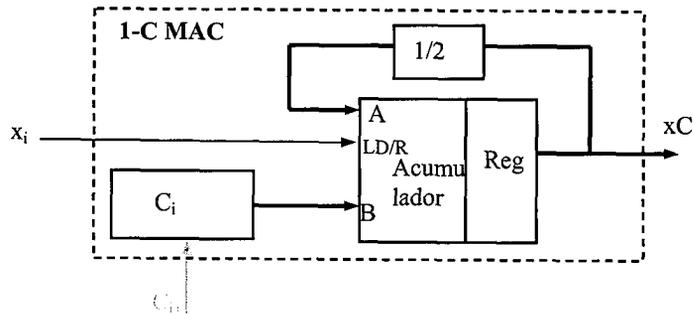


Figura A.2: Estructura de los 1-C MAC basados en SDA.

En cuanto a los recursos necesarios para la implementación, cada uno de los módulos  $1-C MAC$  consta de un acumulador con escalado que va asociado a un registro de ángulo para realizar las sumas parciales (ver figura A.2). Si se analiza la entrada serie proveniente del registro serie, un 1 provocará la entrada en el

## 248 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

acumulador del registro de ángulo, mientras que un cero producirá un reset del acumulador, lo que resultará, tras los desplazamientos a derecha que produce el registro de escalado, el resultado de la multiplicación del valor del registro serie por la constante que almacena el registro de ángulo. El registro del ángulo tendrá un tamaño de  $n+1$  bits.

Puesto que los registros de ángulo son los mismos para los MAC-1 y 2 y MAC-3 y 4, sólo serán necesarios 2 que serán controlados independientemente por bits procedentes de los registros serie. En total serán necesarios 2 multiplexores, 2 registros de desplazamiento de  $n$  bits, 4 registros de ángulo (2 para los 4 MACs y 2 para almacenamiento constante de los valores  $C_\Delta$  y  $S_\Delta$ ), 4 acumuladores con escalado de  $n+2$  bits, 1 sumador de  $n+2$  bits y 1 restador de  $n+2$  bits.

Para incrementar la velocidad de procesamiento del MR es posible utilizar 1-C MACs que usan aritmética paralela distribuida (PDA). De esta manera, es posible procesar simultáneamente los bits pares e impares de cada S-Reg (2-bit PDA), disminuyendo el número de ciclos a la mitad. En este caso, el número de registros de ángulo se duplica y es necesario añadir a cada módulo un acumulador con escalado adicional.

También es posible realizar el MR mediante una arquitectura completamente segmentada, de manera que, tras unos ciclos de latencia iniciales, las rotaciones se efectúen a cada ciclo de reloj. Para llevar a cabo este desarrollo es necesario desplegar el hardware de cada 1-C MAC, de forma que se sustituyan por  $n$  etapas registros/sumadores con desplazamiento cableado. En [Luo, 2000] se presenta una arquitectura reconfigurable completamente segmentada que implementa un MAC utilizando árboles de Wallace. El inconveniente de esta estructura lo constituye el elevado número de elementos que lo forman si la palabra elegida tiene una longitud considerable, por otra parte, la eficiencia está asegurada si el número de puntos que intervienen en la rotación es elevado como sucede en un mecanizado de precisión.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## A p é n d i c e B

### **Paralelización del MTF sobre red de PCs**

El proceso de calcular trayectorias de mecanizado a partir de objetos 3D es tarea computacionalmente costosa. Un solo procesador necesita grandes cantidades de tiempo para llevar a cabo dichos cálculos.

Paralelizar el proceso de cálculo, dividiendo el trabajo proporcionalmente entre los equipos conectados a la propia subred, produce una mejora considerable en el rendimiento de la aplicación, reduciendo sustancialmente el tiempo de respuesta de la misma.

Se ha implementado una arquitectura Cliente/Servidor de Mecanizado que paraleliza el modelo computacional del MTF, repartiendo proporcionalmente los cálculos de mecanizado entre varios Servidores de Mecanizado conectados a su propia subred y recogiendo los resultados proporcionados por éstos.

Para realizar el prototipo se ha empleado una red local tipo Ethernet bajo el sistema operativo Windows 98® y utilizando el interfaz de comunicación NetBEUI® que utiliza buzones de red denominados *Mailslots*.

## Esquema básico de funcionamiento

Es el Cliente el que inicia todo el proceso de mecanizado, seleccionando los servidores a utilizar y distribuyendo la carga entre ellos.

El proceso comienza cuando el usuario ejecuta la acción **Detectar**, en este momento, el Cliente enviará un mensaje a cada uno de los equipos conectados por red al Cliente, preguntando en qué estado se encuentran y esperando sus respuestas. Los Servidores de mecanizado instalados recibirán este mensaje y responderán al cliente con otro mensaje, indicándole el estado en el que se encuentran en ese momento (*Reservados, Ocupados o Libres*). El Cliente mostrará en pantalla el estado de cada uno de los equipos conectados a la red para hacer saber al usuario qué equipos puede emplear.

Una vez seleccionado un Servidor, si el usuario ejecuta el comando **Reservar** y el servidor está Libre, el Cliente mandará una petición de Reserva a ese Servidor. El Servidor recibirá el mensaje y comprobará a su vez si realmente está Libre. En ese caso, pasará automáticamente al estado Reservado y enviará un mensaje al Cliente indicándole este hecho. A partir de ese momento, el Servidor irá enviando mensajes periódicamente al Cliente que lo ha reservado para comprobar si éste sigue en funcionamiento. En caso de que un Servidor compruebe que el Cliente que lo ha reservado no responde, pasará directamente a estado Libre.

Si el usuario ejecuta la acción **Liberar** y el servidor estaba Reservado, el Cliente mandará una petición de Liberación a ese Servidor. Cuando el Servidor reciba el mensaje, pasará de nuevo a estado Libre, enviando un mensaje al Cliente indicándole que se ha llevado a cabo la *Liberación*.

Cuando el Cliente reserva uno o más Servidores para el mecanizado y ordena el comando de **Mecanizar**, el cliente manda un mensaje a cada uno de los Servidores reservados indicándoles que se preparen para comenzar los cálculos de mecanizado. A continuación les envía un mensaje de configuración en el que se incluyen datos de superficie, de herramienta y de trayectoria de mecanizado.

Por último, se divide el trabajo de cálculo entre todos los Servidores reservados y se envía a cada uno de los Servidores sus datos de superficie. Los datos serán capturados por los Servidores que reconstruirán su parte de superficie y comenzarán el proceso de cálculo, enviando los resultados directamente al Cliente.

Una vez iniciados los cálculos de mecanizado, cada Servidor irá informando periódicamente al Cliente de la progresión de sus cálculos. Si el Cliente comprueba que algún Servidor no informa, entenderá que ese Servidor ha dejado de estar operativo, con lo que detendrá el proceso de mecanizado e informará al usuario que no se ha podido llevar a cabo el mecanizado, dándole la oportunidad de volver a reservar equipos e iniciar un nuevo proceso de cálculo de trayectoria.

## Protocolo Cliente-Servidor

El protocolo de comunicación entre Clientes y Servidores de Mecanizado viene dado por el paso de mensajes.

Cuando arranca la aplicación Cliente, en primer lugar, se comprueba qué equipos hay conectados a la red y se manda a cada equipo conectado un mensaje con código REFRESCAR, junto con el nombre del equipo Cliente y el MailSlot por el que el Servidor debe responder (MailSlot creado previamente por el Cliente para la lectura de mensajes). Una vez enviados todos los mensajes, el Cliente entra en un bucle esperando respuestas de Servidores.

Al arrancar un Servidor de Mecanizado, éste entra inicialmente en un bucle de lectura de mensajes. El primer mensaje que recibirá será el de REFRESCAR procedente de un Cliente. Cuando un Servidor reciba este mensaje, comprobará en qué estado se encuentra (LIBRE, OCUPADO o RESERVADO) y enviará un mensaje de respuesta al Cliente que realizó la petición (a través del Mailslot), indicándole su nombre y su estado.

Cada Cliente tendrá almacenado en una lista el nombre de cada uno de los equipos conectados junto con su estado. Esta lista se irá actualizando a medida que los Servidores vayan respondiendo. El Cliente mostrará en una ventana de Mecanizado el estado de cada uno de los equipos conectados,

## 252 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

---

indicándole, de esta forma, al usuario qué servidores dispone para llevar a cabo el mecanizado.

Cuando un usuario ordena la acción **Detectar** de la ventana de Mecanizado, se vuelve a realizar el proceso anterior, es decir, el Cliente mandará un mensaje a cada uno de los Servidores, preguntándoles en qué estado se encuentran, e irá actualizando la lista de equipos y refrescando la ventana de Mecanizado de la aplicación conforme van llegando los mensajes de respuesta de los Servidores.

Cuando un usuario selecciona un Servidor en la ventana de Mecanizado y ejecuta el comando **Reservar**, el Cliente mandará a ese Servidor un mensaje con un código RESERVAR, junto con el nombre del equipo Cliente, información sobre el mecanizado y el MailSlot de respuesta del servidor. Cuando el Servidor reciba este mensaje, comprobará si ya está reservado por algún otro Cliente o si está en proceso de mecanizado. En cada caso, el Servidor enviará un mensaje al Cliente, indicándole su nombre y su estado RESERVADO u OCUPADO respectivamente. En el caso de que el Servidor esté LIBRE, buscará en su sistema de ficheros la información de mecanizado guardada en una tabla. Si el Servidor no encuentra la tabla, enviará un mensaje al Cliente con el código NO\_TABLA junto con su nombre. El Cliente recibirá el mensaje y mostrará un error de Reserva en la ventana de Mecanizado. En caso de que el Servidor no se encuentre ni RESERVADO ni OCUPADO y encuentre en su sistema de ficheros la tabla de mecanizado, almacenará el nombre del Cliente y quedará reservado para ese cliente, enviándole un mensaje con código ID\_RESERVA\_OK junto con su nombre, finalizando, de esa forma, el proceso de Reserva. El Cliente recibirá dicho mensaje, actualizará la lista de equipos y refrescará la ventana de Mecanizado, indicándole al usuario que ese Servidor ha sido reservado.

Una vez queda Reservado un Servidor, se activa un timer de 8 segundos. Cuando transcurre ese periodo de tiempo, si el Servidor aún esta Reservado por el Cliente, enviará un mensaje al Cliente con código ID\_VIVO junto con su nombre. Cuando el Cliente reciba este mensaje, responderá inmediatamente con otro mensaje idéntico (ID\_VIVO). Si el Servidor observa que, después de 8 segundos, el Cliente no ha respondido, pasará directamente a estado Libre, en caso contrario, permanecerá en estado Reservado, volviéndose a iniciar el timer.

Si un usuario ordena el comando **Liberar** sobre un Servidor y el Servidor estaba Reservado, el Cliente manda un mensaje con código ID\_LIBERAR a ese Servidor junto con su nombre y el MailSlot de respuesta. Cuando el Servidor reciba el mensaje, pasará de nuevo a estado Libre y enviará un mensaje con código ID\_LIBERADO al Cliente, indicándole que se ha llevado a cabo la Liberación. El Cliente recibirá este mensaje, actualizará su lista de equipos y refrescará la ventana de Mecanizado.

Cuando el usuario reserva uno o más Servidores para el mecanizado y ejecuta la acción de **Mecanizar**, el cliente manda un mensaje con código ID\_MECANIZAR, junto con su nombre, a cada uno de los Servidores reservados, indicándoles que se preparen para comenzar los cálculos de mecanizado. Cuando los Servidores reciban este mensaje, comprobarán si proviene del Cliente que los reservó, en cuyo caso, saldrán del bucle de lectura de mensajes y esperarán la recepción del mensaje de *Configuración de Mecanizado*. Este mensaje contendrá datos de control, superficie, herramienta y de trayectoria, datos necesarios para que el Servidor pueda llevar a cabo los cálculos de mecanizado, y será enviado inmediatamente por el Cliente a todos los Servidores reservados.

Una vez enviado el mensaje de Configuración, el Cliente dividirá el trabajo de cálculo entre todos los Servidores reservados y asignará a cada Servidor una porción de la superficie de trabajo. Entonces, para cada uno de los Servidores reservados, se creará un fichero donde se escribirán sus datos de Superficie. Una vez escritos los datos en el fichero, el Cliente mandará un mensaje con código ID\_DATOS a cada Servidor, indicándole la ruta del fichero de datos de superficie. Los Servidores recibirán este mensaje y comenzarán a leer cada uno de su fichero de datos, reconstruyendo su parte de superficie.

## 254 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

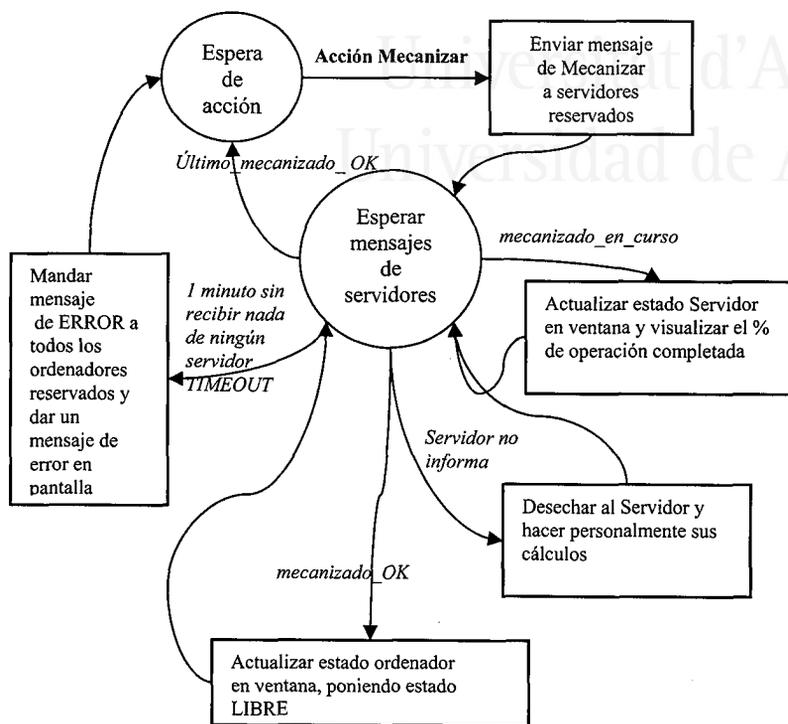


Figura B.1: Grafo de funcionamiento del Cliente para la acción mecanizar.

Cuando un Servidor finalice sus cálculos de mecanizado, escribirá los datos en un fichero y mandará un mensaje al Cliente con código ID\_RESULTADOS, indicándole quién es y la ruta en donde está su fichero de resultados. Cuando el Cliente reciba el mensaje, comprobará de quién son los resultados, los leerá y agrupará.

<b>CaptarMensajes</b>	Bucle principal del Cliente en el que se recogen los mensajes enviados por los Servidores y se tratan convenientemente.
<b>DetectarEquipos</b>	Detecta los equipos conectados por red al Cliente.
<b>HayServidores</b>	Detecta si hay más de 1 Servidor ejecutándose en la subred.
<b>ComprobarServidores</b>	Comprueba que los servidores que están mecanizando están en funcionamiento.
<b>ContarReservados</b>	Cuenta el número de Servidores reservados para el Mecanizado.
<b>EnviarError</b>	Indica a los servidores que ha ocurrido un error poniéndolos Libres.
<b>CmReservar</b>	Reserva los Servidores seleccionados para el Mecanizado.
<b>CmLiberar</b>	Libera los Servidores seleccionados dejándolos como Libres.
<b>CmMecanizar</b>	Indica a los Servidores que se encuentren reservados que inicien el proceso de Mecanizado.
<b>CmRefrescar</b>	Actualiza el estado de cada uno de los equipos conectados al cliente.

**Tabla B.1:** Funciones del Cliente de mecanizado.

Una vez iniciados los cálculos de mecanizado, cada Servidor irá informando periódicamente al Cliente de la progresión de sus cálculos. Para ello, irá enviando mensajes con código ID\_INFORMA junto con el nombre del Servidor y el porcentaje de trabajo realizado. El Cliente irá recibiendo los mensajes e irá visualizando en la ventana de Mecanizado el progreso del Servidor. Si el Cliente comprueba que, tras cierto tiempo, los Servidores no informan, entenderá que se ha producido algún error, con lo que detendrá el proceso de mecanizado e informará al usuario que no se ha podido llevar a cabo el mecanizado, dándole la oportunidad de volver a reservar equipos e iniciar un nuevo proceso de mecanizado.

En caso de que un Servidor deje de estar operativo, enviará un mensaje con código ID\_INFORMA al Cliente que lo reservó con un porcentaje negativo. El Cliente recibirá el mensaje y sabrá que algún servidor ha tenido algún problema, con lo que igualmente detendrá el proceso de mecanizado.

256 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

<b>ComprobarCliente</b>	Comprueba si el cliente que ha reservado al Servidor sigue vivo.
<b>CaptarMensajes</b>	Bucle principal del Servidor en el que se recogen los mensajes enviados por el Cliente y se tratan convenientemente.
<b>EnviarInformacion</b>	Envía información al cliente acerca del porcentaje del trabajo realizado por el Servidor.
<b>Mecanizar</b>	Recibe la configuración y los datos de mecanizado y ejecuta el algoritmo paralelizado, devolviendo los resultados al cliente.

Tabla B.2: Funciones del Servidor de mecanizado.

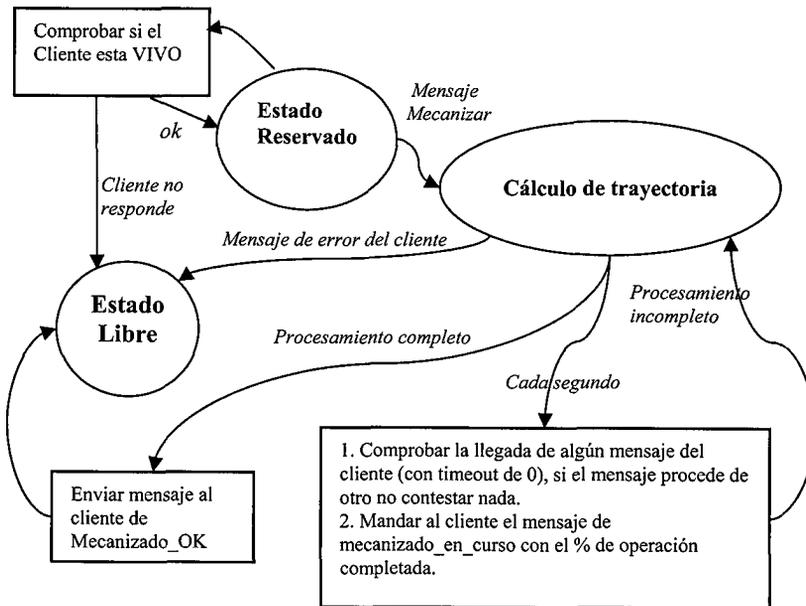
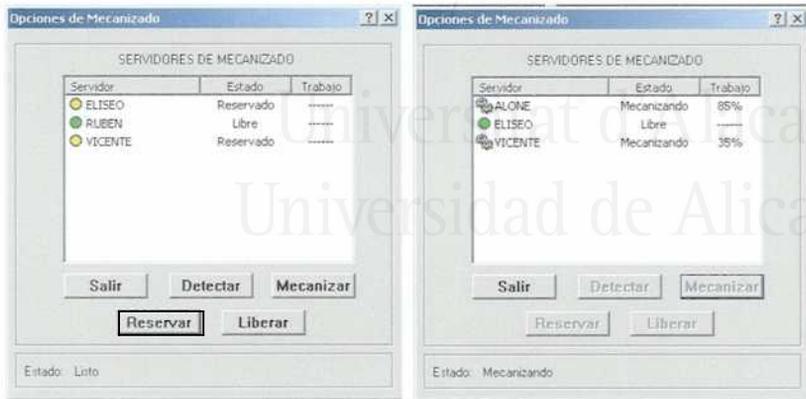


Figura B.2: Grafo de funcionamiento del servidor de trayectoria.



**Figura B.3:** Interfaz del prototipo del cliente de mecanizado del MTF; a la izquierda, instantánea del proceso de reserva de servidores; a la derecha, proceso de mecanizado en paralelo.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## A p é n d i c e C

### Cálculos básicos de distancias mínimas

#### Distancia segmento – segmento

Dados dos segmentos de recta  $\overline{p_1p_2}$  y  $\overline{q_1q_2}$ , definidos por dos puntos cada uno ( $p_1, p_2, q_1, q_2$  respectivamente), se desea hallar la distancia mínima que los separa en la dirección del eje X. Por simplicidad se asume que los extremos de los segmentos están ordenados según la posición que ocupan en el eje X.

Tal y como se muestra en la figura C.1, el problema tiene una solución numérica siempre que los segmentos se solapen parcial o totalmente en la dirección del eje Y. En otro caso, la distancia será infinita.

Las ecuaciones paramétricas que describen la geometría de ambos segmentos son:

$$\begin{aligned} p(s) &= p_1 + (p_2 - p_1)s, s \in [0,1] \\ q(t) &= q_1 + (q_2 - q_1)t, t \in [0,1] \end{aligned}$$

(Exp. C.1)

Dado un punto cualquiera de uno de los dos segmentos, la distancia que existe al segmento contrario es la distancia, en el eje X, de aquel punto respecto al que tiene la misma coordenada  $y$  en el segmento contrario (en caso de que ese punto exista). La

## 260 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

función que define la distancia bajo el vector director  $\vec{v}$  (en este caso el eje X positivo) vendría dada por la siguiente ecuación:

$$d = |p_x(s) - q_x(t)| / p_y(s) = q_y(t) : s, t \in [0, 1]$$

(Exp. C.2)

De la ecuación anterior se deduce fácilmente que la distancia de cualquier punto del segmento  $\overline{q_1q_2}$  al segmento  $\overline{p_1p_2}$  viene dada por la siguiente expresión:

$$d_{\vec{p}}(q) = d_{\vec{p}}(q_x, q_y) = \begin{cases} q_x - p_{1x} + (p_{2x} - p_{1x}) \cdot \frac{q_y - p_{1y}}{p_{2y} - p_{1y}} & , q_y \in [p_{1y}, p_{2y}] \\ \infty & , q_y \notin [p_{1y}, p_{2y}] \end{cases}$$

(Exp. C.3)

De manera análoga se define la distancia de un punto del segmento  $\mathbf{p}$  al  $\mathbf{q}$  como:

$$d_{\vec{q}}(p) = d_{\vec{q}}(p_x, p_y) = \begin{cases} p_x - q_{1x} + (q_{2x} - q_{1x}) \cdot \frac{p_y - q_{1y}}{q_{2y} - q_{1y}} & , p_y \in [q_{1y}, q_{2y}] \\ \infty & , p_y \notin [q_{1y}, q_{2y}] \end{cases}$$

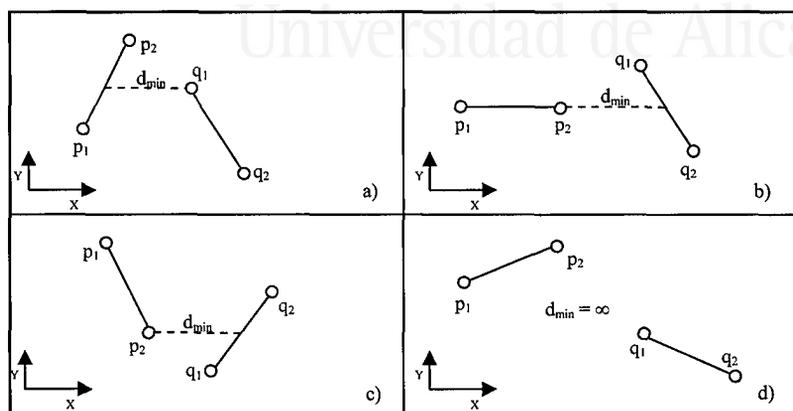
(Exp. C.4)

Ambas ecuaciones se corresponden con funciones de primer orden cuando se sustituye cualquier punto por su forma paramétrica (Exp. C.1) en  $s$  ó  $t$ . Esto significa que sus derivadas en  $s$  o  $t$  serán constantes. Luego la función distancia es monótona y no habrá mínimos ni máximos locales. Por tanto, únicamente se han de considerar las distancias entre los extremos de los segmentos, siempre que éstos tengan proyección en el eje Y sobre el segmento contrario (ver figura C.1, casos a, b y c).

Finalmente, la función  $dist_{\vec{v}}$  para segmentos de recta se definirá como la distancia mínima de entre las cuatro posibles entre los extremos de los segmentos como indica (Exp. C.5).

$$d_{pq}^- = \min(d_{\bar{p}}(q_1), d_{\bar{p}}(q_2), d_{\bar{q}}(p_1), d_{\bar{q}}(p_2))$$

(Exp. C.5)



**Figura C.1:** Diversas situaciones en el cálculo de la función distancia mínima entre segmentos de recta. En sombreado se muestran las zonas de proyección de cada segmento.

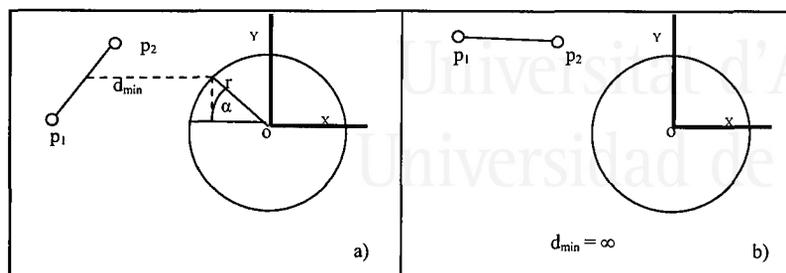
Para los casos que muestra la figura C.1, el valor de la función tomaría los valores  $d_{\bar{p}}(q_1), d_{\bar{p}}(p_2), d_{\bar{q}}(p_2), \infty$  respectivamente.

## Distancia segmento – círculo

Este ejemplo introduce un nuevo grado de complejidad, ya que, como se verá más adelante, la función distancia no tiene una naturaleza lineal.

Dado un segmento de recta  $p$ , definido por los puntos  $p_1$  y  $p_2$ , y un círculo de centro  $c$  y radio  $r$ , se desea hallar la distancia mínima que los separa en la dirección del eje X. Por simplicidad se asume que los extremos del segmento están ordenados según la posición que ocupan en el eje X (ver figura C.2). También se asumirá que el círculo se encuentra en el centro del sistema de coordenadas  $o$ .

## 262 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación



**Figura C.2:** Dos situaciones en el cálculo de la función de distancia mínima ( $d_{\min}$ ) entre un segmento y un círculo. En sombreado se muestran las zonas de proyección de cada figura.

De manera análoga al caso de los dos segmentos, dado un punto cualquiera  $p$  del segmento  $p_1p_2$ , la distancia que existe al círculo, según el vector director  $X$ , vendrá dada por aquel punto respecto al que tiene la misma coordenada  $y$  en el círculo (en caso de que ese punto exista). De la ecuación paramétrica del segmento (Exp. C.1) y la ecuación del círculo, se deduce fácilmente la distancia sobre el eje  $X$  de cualquier punto del segmento  $p$  al círculo  $d_c(p)$ .

$$d_{\overline{cp}}(p) = |p_x - x| / \sqrt{x^2 + p_y^2} = r^2, |p_y| \leq r$$

$$d_{\overline{cp}}(s) = \left| p_{1x} + (p_{2x} - p_{1x}) \cdot s - \sqrt{r^2 - (p_{1y} + (p_{2y} - p_{1y}) \cdot s)^2} \right|$$

(Exp. C.6)

La ecuación (Exp. C.6) tiene una naturaleza no lineal. La distancia mínima de un segmento vendrá dada por el cálculo del mínimo de esta función a través de la primera derivada para la variable  $s$ .

$$d'_{\bar{\varphi}}(s) = 0$$

$$s = \begin{cases} \frac{r \cdot |p_{1x} - p_{2x}| \cdot \text{SIGN}(p_{1y} - p_{2y}) - p_{1y} \cdot \sqrt{p_{1x}^2 - 2 \cdot p_{1x} \cdot p_{2x} + p_{1y}^2 - 2 \cdot p_{1y} \cdot p_{2y} + p_{2x}^2 + p_{2y}^2}}{\sqrt{p_{1x}^2 - 2 \cdot p_{1x} \cdot p_{2x} + p_{1y}^2 - 2 \cdot p_{1y} \cdot p_{2y} + p_{2x}^2 + p_{2y}^2} \cdot (p_{2y} - p_{1y})} \\ \frac{r \cdot |p_{1x} - p_{2x}| \cdot \text{SIGN}(p_{1y} - p_{2y}) + p_{1y} \cdot \sqrt{p_{1x}^2 - 2 \cdot p_{1x} \cdot p_{2x} + p_{1y}^2 - 2 \cdot p_{1y} \cdot p_{2y} + p_{2x}^2 + p_{2y}^2}}{\sqrt{p_{1x}^2 - 2 \cdot p_{1x} \cdot p_{2x} + p_{1y}^2 - 2 \cdot p_{1y} \cdot p_{2y} + p_{2x}^2 + p_{2y}^2} \cdot (p_{1y} - p_{2y})} \end{cases}$$

$$d_{\bar{\varphi}} = \begin{cases} d_{\bar{\varphi}}(s), 0 < s < 1 \\ d_{\bar{\varphi}}(0), s \leq 0 \\ d_{\bar{\varphi}}(1), s \geq 1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} |p_{1y}| \leq r \vee |p_{2y}| \leq r \vee p_{1y} \cdot p_{2y} < 0 \\ \infty, |p_{1y}| > r \wedge |p_{2y}| > r \end{array} \right.$$

## (Exp. C.7)

La naturaleza no lineal de la ecuación ha llevado a las soluciones que se indican en (Exp. C.7). En este punto se deduce que geometrías más complicadas llevarán asociado un cálculo más complejo. En muchas ocasiones, este cálculo deriva en sistemas de ecuaciones no lineales, cuya solución puede darse con algoritmos de aproximación de soluciones que son computacionalmente complejos.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## A p é n d i c e D

### El Marco MTF

Cuando se observa la especificación realizada durante los capítulos segundo y tercero desde el punto de vista de un desarrollador, se encuentra una herramienta de modelado, especificación y diseño con una capacidad expresiva muy interesante. Sin embargo, dicha herramienta no tiene contrapartida como tal en la fase de implementación. Si se exceptúa el modelo computacional presentado en el capítulo segundo tan sólo para analizar costes temporales, este aspecto implica una carencia entre todas estas fases al no existir una continuidad metodológica que permita sistematizar todo el proceso.

El objetivo de este marco del Modelo Topológico de Fabricación es proporcionar una plataforma de desarrollo que permita aplicar directamente las pautas definidas por el diseñador. En concreto, se está interesado en obtener una plataforma que posibilite la introducción de un lenguaje declarativo, dejando de lado, en la medida de lo posible, los aspectos imperativos de la implementación y proporcionando una serie de interfaces que faciliten la distinción de los distintos elementos que la componen:

- Un Entorno Morfológico.
- Un Entorno Topológico Determinista (que incluye al anterior y representa al MTD).
- Un Entorno Topológico de Fabricación (que integra el elemento anterior modelando al MTF).

## 266 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

Por otra parte, se debe añadir como objetivo de diseño de esta herramienta, su facilidad de uso y la posibilidad de ampliación. Para ello se considerarán como objetivos auxiliares los siguientes aspectos:

- Posibilitar la introducción de lenguajes declarativos.
- Posibilitar la introducción de entornos visuales de especificación, desarrollo y simulación.
- Facilitar la implementación hardware de plataformas embebidas: Máquina Virtual de Fabricación.

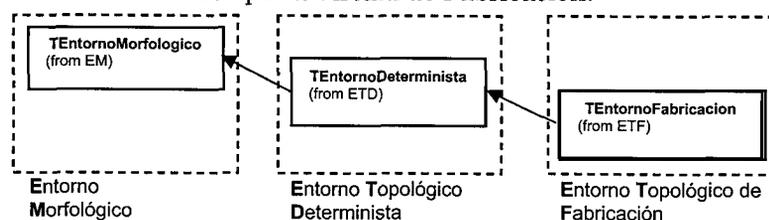


Figura D.1: Visión global del marco MTF en formato UML.

Se dedicará el resto del apéndice a proporcionar una visión global del marco del MTF, así como una descripción de las distintas clases e interfaces desarrolladas. Para ello se utilizará lenguaje de modelado unificado (UML<sup>1</sup>) propuesto en [Booch, 1997].

### Visión general

El marco MTF se ha desarrollado como un conjunto de clases y paquetes de C++. El principal objetivo es proporcionar interfaces que permitan un modelo declarativo de implementación, por lo que se han separado según las entidades a modelar. La figura D.1 muestra un esquema global de las clases y paquetes mencionados utilizando UML, con la relación general entre las mismas.

<sup>1</sup> Unified Modeling Language.

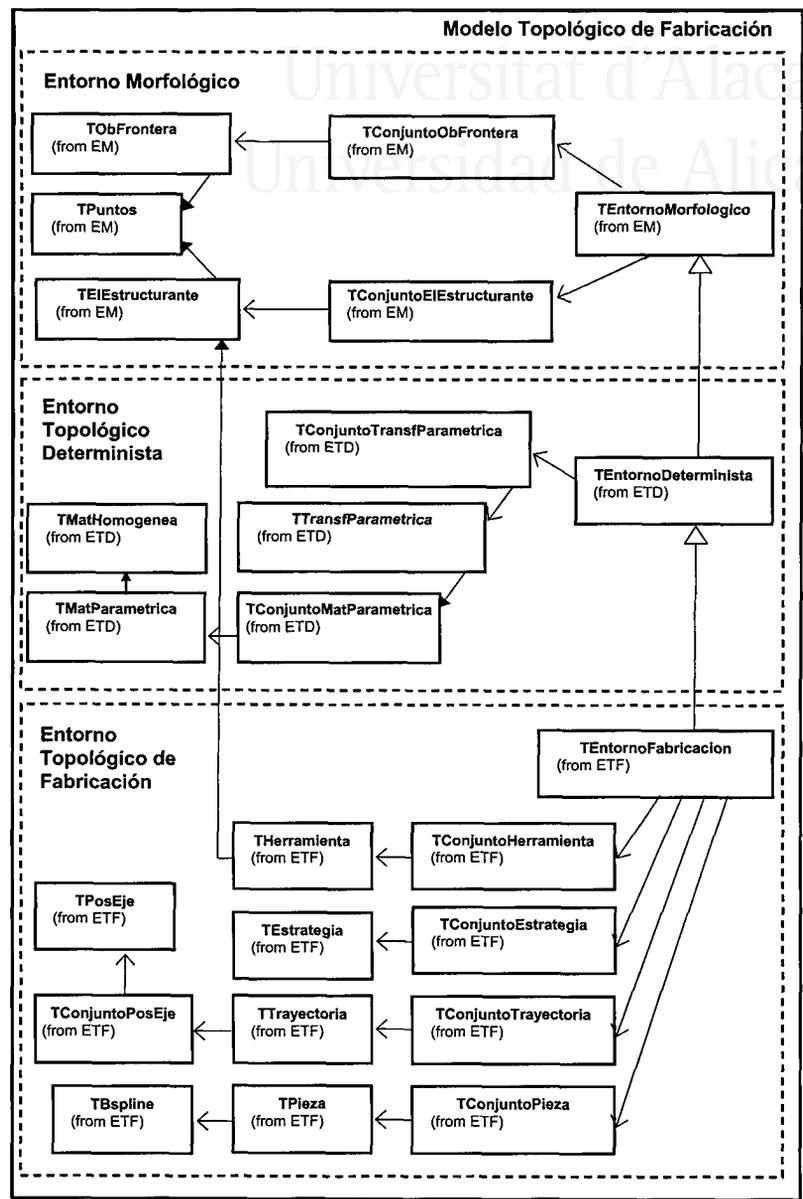


Figura D.2: Estructura global de un entorno de fabricación según el Modelo Topológico de Fabricación y utilizando UML.

## 268 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

En la figura D.1 se observa cómo el marco MTF está organizado en tres paquetes: EM, ETD y ETF, cada uno de los cuales, está formado por un conjunto de clases. El paquete EM representa el entorno que tiene su origen en la morfología matemática convencional, mientras que el ETD especializa el comportamiento anterior añadiendo una componente determinista a través del uso de las transformaciones homogéneas. Finalmente, el ETF integra los aspectos relativos al proceso de fabricación mediante máquinas herramienta. La figura D.2 muestra cada uno de los objetos que componen estos paquetes con mayor detalle.

### El Entorno Morfológico

La implementación del entorno se extrae directamente de la definición propuesta en (Exp. 2.2), que a continuación se reproduce para facilitar la lectura:

$$MM = \langle EE, FR, OP_{NL} \rangle \quad (\text{Exp. 2.2})$$

Para ello se implementarán los distintos elementos de la estructura mediante una serie de clases: TEntornoMorfologico, TConjuntoObFrontera, TConjuntoElEstructurante, TObFrontera, TEIestructuante, TConjuntoPunto y TPunto. Todas ellas incluidas en el paquete EM. En la tabla 2.2 se puede ver un resumen de los elementos más significativos y en la figura D.3 se proporciona su estructura en formato UML.

- TEntornoMorfologico constituye la clase principal que recoge la estructura (Exp. 2.2).
- La clase TConjuntoObFrontera permite declarar el conjunto de los posibles objetos frontera del entorno como instancias de la clase TObFrontera. Esta clase contiene la función pública ObtenerPunto que permite la recorrer todos los puntos que del objeto.
- El conjunto de los posibles elementos estructurantes del entorno morfológico se expresa mediante la clase TConjuntoElEstructurante. Dicha clase estará formada por un conjunto de objetos del tipo TEIestructurante, representando cada uno de ellos un posible elemento estructurante dotado de un centro y de una función pública Dv que permite calcular la distancia entre el elemento y un punto en la dirección que marca un vector.

- Tanto la clase `TObFrontera` como `TEIEstructurante` constituyen una especialización de la clase `TConjuntoPunto`, la cual representa una colección de puntos del espacio  $R^n$  cada uno de los cuales se modela mediante la clase `TPunto`.
- El conjunto de operaciones no lineales que completa la expresión (Exp. 2.2) ha sido restringido, por motivos de simplicidad, a la erosión y dilatación morfológicas. Estas operaciones se materializan para las funciones públicas `ErosionNoLineal` y `DilatacionNoLineal` respectivamente de la clase `TEntornoMorfologico`.

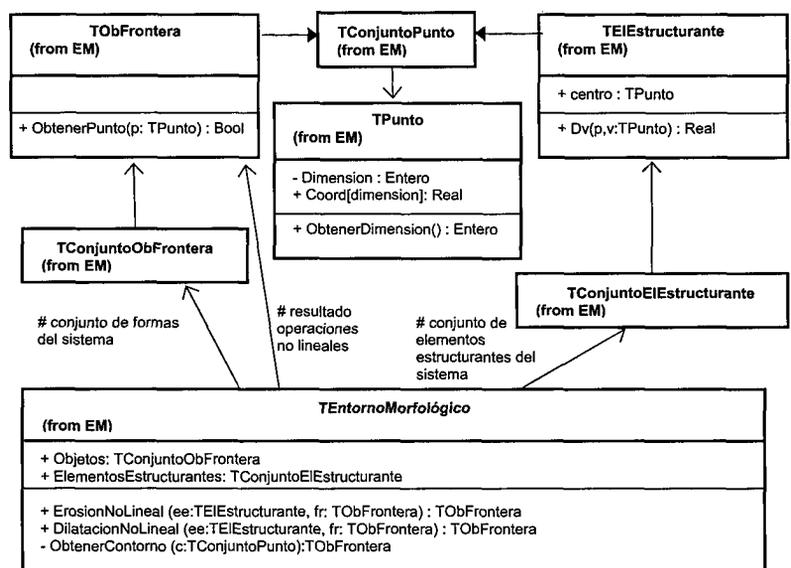


Figura D.3: Estructura del Entorno Morfológico en formato UML.

La clase `TEntornoMorfologico` describe el entorno mediante composición de las clases anteriores e implementa su comportamiento mediante las funciones `ErosionNoLineal` y `DilatacionNoLineal`. Dichas operaciones, que fueron implementadas en el capítulo segundo para probar la bondad del MTD sobre imágenes, obtienen como resultado un objeto frontera gracias a la aplicación de la función `ObtenerContorno` que actúa sobre el resultado de la definición morfológica de la operación (ver método `MM2` en tabla 2.6).

## 270 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

Con la especificación de la clase `TEntornoMorfologico`, se consigue que el desarrollador no tenga que estar pendiente de los aspectos imperativos de la definición y pueda centrarse más en los declarativos. Básicamente se trata de definir los distintos conjuntos que componen la estructura, con lo que se concluye la construcción del entorno morfológico de forma consistente con la estructura utilizada en la especificación (Exp. 2.2):

$\langle TConjuntoElEstructurante, TConjuntoObFrontera, ErosionNoLineal, DilatacionNoLineal \rangle$

A continuación se seguirá con la definición del entorno que introduce el concepto de trayectoria en el modelo anterior.

### El Entorno Topológico Determinista

Como en el caso del entorno morfológico, la implementación de este entorno se obtiene directamente de la especificación propuesta en el capítulo segundo, para el MTD, en (Exp. 2.1) y (Exp. 2.10) que se rescatan aquí por motivos de claridad:

$$MTD = \langle MM, OP_{TP} \rangle \quad (\text{Exp. 2.1})$$

$$OP_{TP} = \langle TP, OP_I \rangle \quad (\text{Exp. 2.10})$$

De esta forma, el entorno determinista constituye una especialización del entorno morfológico definido en el apartado anterior al que se le añaden un conjunto de operaciones con trayectoria.

Un entorno topológico determinista estará compuesto fundamentalmente por las clases: `TEntornoDeterminista` y `TConjuntoTransfParametrica`. Esta última se apoya sobre las clases `TTransfParametrica`, `TConjuntoMatParametrica`, `TMatParametrica` y `TMatHomogenea`. En la tabla 2.3 se puede ver un resumen de los elementos más significativos y en la figura D.4 se proporciona su estructura en formato UML.

- La clase `TEntornoDeterminista` es el elemento principal del paquete ETD, encargada de recoger la estructura del Modelo Topológico Determinista según la expresión (Exp. 2.1).
- La clase `TConjuntoTransfParametrica` permite definir el conjunto de las posibles transformaciones paramétricas del

entorno como instancias de la clase `TTransfParametrica` (Exp. 2.12). Esta clase es una especialización del conjunto de matrices paramétricas `TConjuntoMatParametrica` a la que se le ha añadido funcionalidad para poder aplicar varias transformaciones, ordenadamente, a un objeto frontera en función de un parámetro real. Esto se consigue mediante la operación pública `Transformar` cuya definición puede consultarse en (Exp. 2.14).

- La clase `TMatParametrica` es una especialización de la clase `TMatHomogenea` (Exp. 2.11), la cual implementa una matriz homogénea de dimensión  $dim+1 \times dim+1$ . `TMatParametrica` incluye funcionalidad para modificar la matriz homogénea que almacena a partir de la operación pública de parámetro real `AplicarInstante` (Exp. 2.13) y el rango de transición definido por las variables de la clase inicio y fin.

La clase que permite describir el Modelo Topológico Determinista es `TEntornoDeterminista`. Esta clase utiliza las clases anteriores y define su comportamiento mediante las funciones `ErosionInstantanea` (Exp. 2.27), `DilatacionInstantanea` (Exp. 2.22), `ErosionTrayectoria` (Exp. 2.28) y `DilatacionTrayectoria` (Exp. 2.23).

Las operaciones instantáneas se basan, según la definición dada en (Exp. 2.16), en el cálculo de una distancia mínima y la transformación de un `ObjetoFrontera`. Este comportamiento se puede conseguir mediante el código que se muestra para la operación `DilatacionInstantanea`, una operación instantánea en la que el elemento estructurante debe situarse fuera del objeto según la definición (Exp. 2.22), lo cual se consigue mediante la función privada `SituarRespecto`.

## 272 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

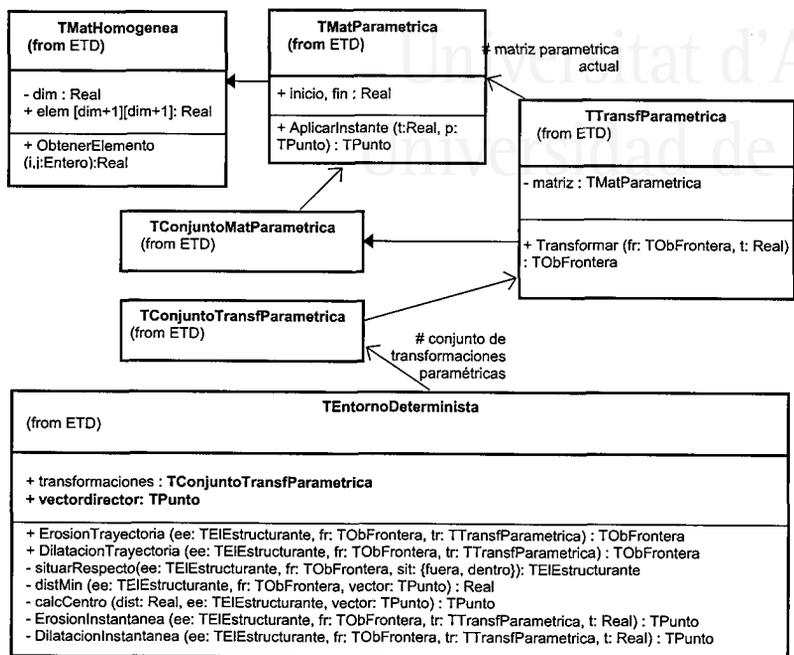


Figura D.4: Estructura general de un entorno topológico determinista en formato UML.

```

private TPunto DilatacionInstantanea(ee: TEIEstructurante, fr:
TOBFrontera, tr: TTransfParametrica, k: Real) {
..ee=SituarseRespecto(ee, fr, {fuera});
  Real dist=distMin(ee, tr.Transformar(fr, k), vectordirector);
  return CalcularCentro(dist, ee, vectordirector);
} // de DilatacionInstantanea
  
```

Bajo estas líneas se incluye el esqueleto básico de la función que calcula la distancia mínima `distMin`, la cual es coherente con la definición dada en (Exp. 2.17).

```

private Real distMin(ee: TELEstructurante, fr: TOBFrontera, vector:
TPunto) {
    TPunto p;
    Real dmin=+INF;
    while (fr.ObtenerPunto(p))
        Real de= ee.Dv(p,vector);
        if (de<dmin) dmin=de;
    } // de while
    return dmin;
} // de distMin

```

Finalmente, apoyándose sobre las funciones previamente definidas y siguiendo la definición de (Exp. 2.23), se muestra una posible implementación de la función pública *DilatacionTrayectoria* sobre un lenguaje imperativo:

```

public TOBFrontera DilatacionTrayectoria(ee: TELEstructante, fr:
TOBFrontera, tr: TTransfParametrica) {
    ..TOBFrontera ob;
    for (Real k=0;k<=1;k+=step) {
        ob.Anyadir(DilatacionInstantanea(ee, fr, tr, k));
    } // de for
    return ob;
} // de DilatacionTrayectoria

```

De la misma forma que en el entorno morfológico, la clase *TEntornoDeterminista* se corresponde directamente con la estructura del Modelo Topológico Determinista expresada en las especificaciones (Exp. 2.1) y (Exp. 2.10) respectivamente:

$\langle \text{TEntornoMorfologico}, \text{ErosionTrayectoria}, \text{DilatacionTrayectoria} \rangle$   
 $\langle \text{TTransfParametrica}, \text{ErosionInstantanea}, \text{DilatacionInstantanea} \rangle$

En general, y al igual que ocurría con el entorno morfológico, se proporciona una plataforma que permite expresar de forma declarativa la mayor parte de la estructura.

## El Entorno Topológico de Fabricación

La implementación de este entorno se obtiene directamente de la especificación propuesta en el capítulo tercero en (Exp. 3.1) y (Exp. 3.2). Estas definiciones se muestran a continuación:

$$MTF = \langle MTD, D_F \rangle \quad (\text{Exp. 3.1})$$

## 274 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

$$D_f = \langle OPF, HR, PZ, EST, TF \rangle \quad (\text{Exp. 3.2})$$

De nuevo, el entorno de fabricación se presenta como una especialización del entorno determinista definido en el apartado anterior al que se le añaden una serie de componentes que modelan aspectos propios de la fabricación mediante máquinas herramienta.

El entorno de fabricación que aquí se presenta estará compuesto, en primera instancia, por las clases: TEntornoFabricacion, TConjuntoTrayectoria, TConjuntoPieza y TConjuntoHerramienta. Para completar la estructura se utilizan las clases: Trayectoria, TConjuntoPosEje, TPosEje, TPieza, TBspline, THerramienta y TEstrategia. La naturaleza de estas clases se inspira en la definición del Modelo Topológico de Fabricación cuyos componentes se describen resumidamente en la tabla 3.1 y en la tabla 3.2. En la figura D.5 se proporciona su estructura en formato UML.

- La clase TEntornoFabricacion constituye el elemento principal del paquete ETF. La clase deriva de TEntornoDeterminista e incorpora la estructura del Modelo Topológico de Fabricación tal y como se define en (Exp. 3.1).
- La clase TConjuntoHerramienta permite especificar el conjunto de todas las posibles herramientas del entorno, cada una de las cuales es instancia de la clase THerramienta. La clase THerramienta es una especialización de la clase TEIEstructurante del paquete EM que incorpora aspectos propios del mecanizado como el punto de aplicación o el tipo de fresa.
- La clase TConjuntoPieza agrupa a todas las posibles piezas que se pueden mecanizar en un entorno de fabricación. Cada una de las piezas constituye una instancia de la clase TPieza que se compone de un conjunto de superficies libres (Bspline), de acuerdo a la definición dada en (Exp. 3.5). La implementación de cada superficie libre se realiza en la clase TBspline que incorpora todos los elementos necesarios para la definición de este tipo de geometría (array de knots, puntos de control y parametrización) según la expresión (Exp. 3.3).
- TConjuntoEstrategia representa el conjunto de todas las posibles estrategias que pueden definirse en el entorno de

fabricación, cada una de las cuales es instancia de la clase `TEstrategia`. Esta clase contiene una instancia de la clase `TTransfParametrica` que es modificada adecuadamente en función del tipo de estrategia mediante la operación pública `ColocarTransf`, de acuerdo con las definiciones dadas en el capítulo tercero (algunos ejemplos se muestran en (Exp. 3.15) y (Exp. 3.16)). La estrategia está condicionada por el número y tipo de ejes de la máquina, de ahí que esta clase incorpore una instancia de la clase `TConjuntoPosEje` y una función pública `CalcPosEje` que se encarga de convertir una posición de centro de herramienta en un instante determinado en un conjunto de posiciones de eje de la máquina (conversión entre espacio cartesiano y espacio de ejes de esta máquina) que la sitúan en dicho punto del espacio.

- La clase `TConjuntoTrayectoria` agrupa todas las posibles trayectorias de mecanizado que pueden realizarse en el entorno. Cada una de éstas constituirá una instancia de la clase `TTrayectoria` que define un conjunto de posiciones de ejes de la máquina herramienta considerada. `TTrayectoria` contiene una función que permite conocer el punto del espacio en el que se colocará el centro de la herramienta tras aplicar a los ejes una determinada posición. Para completar esta definición se incluye la clase `TPosEje` que implementa la posición que tiene un eje de la herramienta especificando su tipo y situación actual.

La clase que implementa el Modelo Topológico de Fabricación es `TEntornoFabricacion`, la cual constituye una especialización de `TEntornoDeterminista` e incluye instancias de las clases `TConjuntoTrayectoria`, `TConjuntoHerramienta`, `TConjuntoPieza` y `TConjuntoEstrategia` para modelar el dominio de fabricación de acuerdo a (Exp. 3.2). Además, esta clase incorpora funcionalidad para realizar las operaciones de fabricación descritas en el capítulo tercero: `DigitalizacionVirtual` y `MecanizadoVirtual` que en realidad constituyen una adaptación al nuevo entorno de las funciones, heredadas de `TEntornoDeterminista`, `DilatacionTrayectoria` y `ErosionTrayectoria` respectivamente. La función privada `ConvSuperficieContorno` sirve de interfaz entre la definición de pieza y objeto frontera según lo dispuesto en (Exp. 3.9) y (Exp. 3.10).

276 Modelado Topológico del Proceso de Fabricación

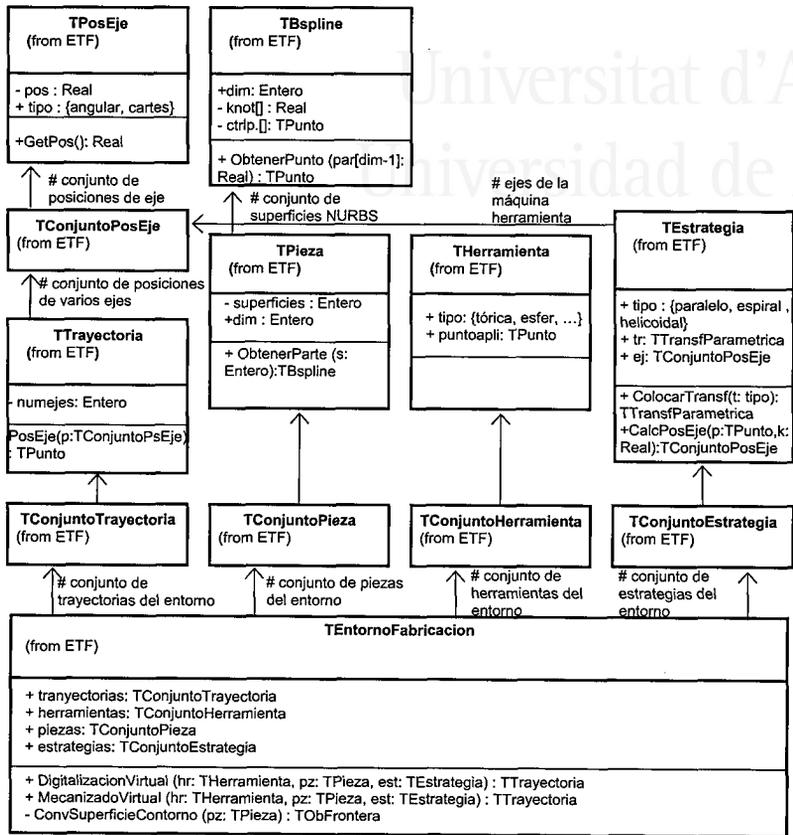


Figura D.5: Estructura general de un entorno topológico de fabricación en formato UML.

A continuación se muestra una posible implementación de la función `DigitalizacionVirtual` que muestra el uso del sistema de conversión superficie – contorno para obtener un objeto frontera a partir de una pieza. También se observa cómo es posible utilizar la clase `THerramienta` sobre la función `DilatacionInstantanea` gracias a la herencia que tiene de `TEEstructurante`. Una instancia de la clase `TEstrategia` se utiliza para obtener la transformación paramétrica y para obtener los puntos de la trayectoria (en el espacio de representación de la máquina) mediante la función `CalcPosEje` de esta clase:

```
public TTrayectoria DigitalizacionVirtual(hr: THerramienta, pz:
TPieza, est: TEstrategia) {
    TTrayectoria ty;
    TObFrontera fr=ConvSuperficieContorno(pz);
    for (Real k=0;k<=1;k+=step) {
        TPunto p=DilatacionInstantanea(hr, fr, est.tr, k);
        ty.Anyadir(est.CalcPosEje(p,k));
    } // de for
    return ty;
} // de DilatacionTrayectoria
```

Al igual que en el entorno determinista, la clase `TEntornoFabricacion` se corresponde de manera consistente con la estructura del Modelo Topológico de Fabricación que queda determinada en (Exp. 3.1) y (Exp. 3.2) obteniéndose la siguiente estructura:

$$ETF = \langle TEntornoDeterminista, D_F \rangle$$

$$D_F = \langle DigitalizacionVirtual, MecanizadoVirtual, TConjuntoHerramienta \rangle$$

$$D_F = \langle TConjuntoPiezaPZ, TConjuntoEstrategia, TConjuntoTrayectoria \rangle$$

De nuevo, y como ocurría con los entornos morfológico y determinista, se proporciona una plataforma que permite expresar de forma declarativa la mayor parte de la estructura consiguiendo que el desarrollador se centre en los aspectos declarativos dejando en segundo término los imperativos.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## A p é n d i c e E

### Referencias bibliográficas

**[Abdel-Malek, 2000]**

Abdel-Malek, K., Seaman, W. et al. *NC verification of up to 5 axis machining processes using manifold stratification*. ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, vol. 122, pp. 1-11, 2000.

**[Andraka, 1996]**

Andraka R. J. *Building a High Performance Bit-Serial Processor in an FPGA*. Proceedings of Design SuperCon, sections 5.1 - 5.21, 1996.

**[Andraka, 1998]**

Andraka R. J. *A survey of CORDIC algorithms for FPGAs*. FPGA '98. Proceedings of the 1998 ACM/SIGDA sixth international symposium on Field programmable gate arrays. Monterey, CA, pp. 191-200, 1998.

**[Anelli, 1998]**

Anelli, G., Broggi, A. et al. *Decomposition of Arbitrary Shaped Binary Morphological Structuring Elements Using Genetic Algorithms*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 20, no. 2, pp. 217-224, 1998.

**[Angulo, 2002]**

Angulo, J., Serra, J. *Morphological color size distribution for image classification and retrieval*. ACIVS 2002: Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems. Ghent University, Bélgica, pp. 46-53, Septiembre 2002.

**[Arkin, 2000]**

Arkin, E., Held, M. et al. *Optimization Problems Related to Zigzag Pocket Machining*. Algorithmica, vol. 26, no. 2, pp. 197-236, 2000.

**[Barkoczy, 1984]**

Barkoczy, B. E., Zdeblick, W. J. *A knowledge-based system for machining operation planning*. Actas de la conferencia CASA/SME AUTOFACT 6, pp. 2.11-2.2, 1984.

**[Beucher, 1995]**

Beucher, S., Peyrard, R. et al. *Road monitoring and obstacle detection system by image analysis and Mathematical Morphology*. Proceedings of 5th European Automobile Engineers Cooperation International Congress, Strasbourg, Junio 1995.

**[Beucher, 1999]**

Beucher, S. *Mathematical Morphology and geology: when image analysis uses the vocabulary of earth science: a review of some applications*. Geovision'99, Liège, pp. 13-16, Mayo 1999.

**[Booch, 1997]**

Booch, G.; Rumbaugh, J. y Jacobson, I.: *Unified Modelling Language User Guide*. Addison Wesley, Diciembre 1997.

**[Bowyer, 1999]**

Bowyer, A. *The Bath final-year undergraduate. Geometric Modelling course*. University of Bath. Department of Mechanical Engineering, 1999.

**[Choleau, 2002]**

Choleau, C., Dokladal, P. et al. *Prevention of hypoglycemia using risk assessment with a continuous glucose monitoring system*. Diabetes, vol. 51, no.11, pp. 3263-73, 2002.

**[Choi, 1991]**

Choi, B. K. *Surface Modeling for CAD/CAM*. Elsevier Science Publishers, pp. 263-272, 1991.

**[Chu, 1998]**

Chu, C., You, C. F. *Operation Planning in NC Programming Based on CAD Systems*. Department of Mechanical Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, 1998.

**[Cullen, 2002]**

Cullen, M., Fricout, G. et al. *Quantization of 3D ureteric branching morphogenesis in cultured embryonic mouse kidney*. International Journal of Developmental Biology, vol. 46, no. 8, pp. 1049-1055, 2002.

**[Decencière, 2001]**

Decencière, E., Marcotegui, B. et al. *Content-dependent image sampling using mathematical morphology: Application to texture mapping*. Signal Processing: Image Communication, vol. 16, pp. 567-584, 2001.

**[Delisée, 2001]**

Delisée, C., Jeulin, D. et al. *Caractérisation morphologique et porosité en 3D de matériaux fibreux cellulosiques*. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série II b, vol. 329, pp. 179-185, 2001.

**[Demarty, 1999]**

Demarty, C. H., Beucher, S. *Efficient morphological algorithms for video structuring and indexing*. Proceedings CBMI'99, Toulouse, Francia, pp. 25-32, Octubre, 1999.

**[Dougherty, 1992]**

Dougherty, E. R. *An Introduction to Morphological Image Processing*. SPIE Optical Engineering Press, Washington, 1992.

**[Elber, 1994]**

Elber, G., Cohen, E. *Tool path generation for freeform surface models*. Computer Aided Design. vol. 26. pp. 490-496, 1994.

**[Elber, 1997a]**

Elber, G., Lee, I. K. et al. *Comparing Offset Curve Approximation Methods*. IEEE Computer Graphics & Applications, pp. 62-71, Mayo 1997.

**[Elber, 1997b]**

Elber, G., Fish, R. *5-Axis Freeform surface milling using piecewise surface approximation*. ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, vol. 119, no. 3, pp. 383-387, 1997.

**[Farin, 1993]**

Farin, G. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. A Practical Guide*. Academic Press Inc., 1993.

**[Faux, 1979]**

Faux, I. D., Pratt, M.J. *Computational Geometry for Design and Manufacture*. Ellis Horwood, 1979.

**[Ferrant, 1999]**

Ferrant, M., Cuisenaire, O. et al. *Multi-object segmentation of brain structures using a computerized brain atlas*. SPIE Medical Imaging San Diego, vol. 3661, pp. 986-995, Febrero 1999.

**[Foley, 1990]**

Foley, J. D., van Dam, A. et al. *Computer Graphics. Principles and Practice*. Addison-Wesley, 1990.

**[Giardina, 1988]**

Giardina, C. R., Dougherty, E. R., *Morphological Methods in Image and Signal Processing*. Prentice Hall, New Jersey, 1988.

**[Gomila, 2000]**

Gomila, C., Meyer, F. *Automatic video object generation tool: segmentation and tracking of persons in real time*. Actas de Telecomunicaciones, vol. 55, no. 4, pp. 172-183, 2000.

**[Gonzalez, 1993]**

Gonzalez, R., Woods, R. *Digital Image Processing*. Addison Wesley, 1993.

**[Goslyn, 1995]**

Goslyn G. *The role of DA in FPGA-based signal processing*. Xilinx Inc., 1995.

**[Goutsias, 1995]**

Goutsias, J., Heijmans, H. J. A. M. et al. *Morphological operators for image sequences*. Computer Vision and Image Understanding, vol. 62, pp. 326-346, 1995.

**[Gürbüz, 2001]**

Gürbüz, R. *Mechatronics and Mechatronics Application, Selection of Motor and Motor Drivers for Converting a General Purpose Lathe to CNC Lathe*. Journal of Polytechnic, vol. 4, no 1, pp. 39-46, 2001.

**[Hanbury, 2001]**

Hanbury, A. *Mathematical morphology in the HLS colour space*. 12th BMVC, British Machine Vision Conference, Manchester, vol. 2, pp. 451-460, Septiembre 2001.

**[Hanbury, 2001]**

Hanbury, A., Gardeux, F. *A quantitative description of wood texture*. QCAV'2001, Colloque International sur le Contrôle Qualité par Vision Artificielle, Le Creusot, vol. 1, pp. 200-205, Mayo 2001.

**[Haralick, 1987]**

Haralick, R. M., Sternberg, S. R. et al. *Image Analysis Using Mathematical Morphology*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 9, no. 4, pp. 532-550, 1987.

**[Hearn, 1995]**

Hearn, D., Baker, M. *Gráficas por Computadora*. Prentice Hall, 1995.

**[Heijmans, 1994]**

Heijmans, H. J. A. M. *Morphological Image Operators*. Academic Press, Boston, 1994.

**[Held, 1998]**

Held, M. *Voronoi Diagrams and Offset Curves of Curvilinear Polygons*. Computer-Aided Design, vol. 30, no. 4, pp. 287-300, 1998.

**[IBV, 1995]**

Instituto Biomecánico de Valencia. *Guía de recomendaciones para el diseño del calzado*. Generalitat Valenciana, 1995.

**[IMT, 1992]**

Instituto Madrileño de Tecnología. *Introducción de la Máquina-Herramienta de Control Numerico en las PME*. 1992.

**[Jang, 2003]**

Jang, J.-W., Choi, S. et al. *Energy-efficient matrix multiplication on FPGAs*. ACM Press, New York, pp. 225 - 234, 2003.

**[Jerard, 1989a]**

Jerard, R. B., Drysdale, R. L. et al. *Sculptured Surfaces: Methods for Detecting Errors in Numerically Controlled Machining of Sculptured Surfaces*. IEEE Computer Graphics & Applications, pp. 26-39, Enero 1989.

**[Jerard, 1989b]**

Jerard, R. B., Hussaini, S.Z. et al. *Approximate Methods for Simulation and Verification of Numerically Controlled Machining Programs*. The Visual Computer, vol. 5, pp. 329-348, Springer-Verlag, 1989.

**[Jeulin, 2001]**

Jeulin, D. *Modelling random media. Image Analysis & Stereology* - Special issue "Looking at Measurement from Various Operations of Image Analysis", (dedicated to 8th ECS, Bordeaux, sept. 2001, invited lecture), no. 21 (Suppl 1), pp. S31-S40, 2002.

**[Jimeno, 2001a]**

Jimeno, A., García-Chamizo, J. M., Salas, P. *Shoe Last machining using Virtual Digitising*. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, vol. 17, no. 10, pp. 744-750, 2001.

**[Jimeno, 2001b]**

Jimeno, A., Cuenca, S. *Lógica reconfigurable para CAM*. Actas de las Jornadas Nacionales sobre Lógica Reconfigurable y Aplicaciones, pp. 243-252, Alicante, 2001.

**[Jimeno, 2003]**

Jimeno, A., Cuenca, S. *Reconfigurable computing for tool path computation*. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 14 pp, Aceptado 2002, fecha publicación prevista Julio 2003.

**[Jonker, 1992]**

Jonker, P. P. *Morphological Image Processing: Architecture and VLSI design*. Kluwer Technische Boeken BV, Deventer, 1992.

**[Jonker, 2000]**

Jonker, P. P. *Morphological Operations on 3D and 4D images: from shape primitive detection to skeletonization*. DGCI 2000, Springer-Verlag, pp. 371-391, 2000.

**[Jung, 1991]**

Jung, W., Park, Y. et al. *Pencil curve tracing using virtual digitizing*. Proceedings of IFIP CAPE conference, pp. 97-104, 1991.

**[Klein, 1973]**

Klein, J., Serra, J. *The texture analyser*. Journal of Microscopy, vol. 95, no. 2, pp. 349-356, Abril 1973.

**[Krar, 2002]**

Krar, S. F., Check, A. F. *Tecnología de las máquinas herramienta*. 5ª Edición, Marcombo, 2002.

**[Kuhlmann, 1999]**

Kuhlmann, M., Parhi, K. K. *A new CORDIC Rotation method for generalized coordinate systems*. Proceedings of the 1999 Asilomar Conference on Signal, Systems and Computers, Pacific Grove, CA, Octubre 1999.

**[Lambregts, 1996]**

Lambregts, C. A. H., Delbressine, F. L. M et al. *An efficient automatic tool path generator for 2 Vz D free-form pockets*. Computers in Industry, vol. 29, no. 3, pp. 151-157, 1996.

**[Lasheras, 1989]**

Lasheras, J. M. *Control Numérico y Robotica*. Cedel, 1989.

**[Lasheras, 2000]**

Lasheras, J. M., *Tecnología mecánica y metrotécnia*. Donostiarra, 2000.

**[Li 1993]**

Li, S. X., Jerard, R. B. *Non-isoparametric Three Axis NC Tool Path Generation for Finish Machining of Sculptured Surfaces*. *Geometric Modeling for Product Realization*. P. R. Wilson, M. J. Wozng and M. J. Pratt Publishers, pp. 251-265, 1993.

**[Li, 1994]**

Li, S. X., Jerard, R. B. *5-axis machining of sculptured surfaces with a flat-end cutter*. Computer Aided Design, vol. 26, no. 3, pp. 165-178, 1994.

**[Li, 1998]**

Li, Y. M., Hsu, V. Y. *Curve offsetting based on Legendre series*. Computer Aided Geometric Design, vol. 15, pp. 711-720, 1998.

**[Lin, 1990]**

Lin H.X., Sips, H.J. *On-Line CORDIC Algorithms*. IEEE Transactions on Computers, vol. 39, no. 8, pp. 1038-1052, 1990.

**[Lorentz, 1989]**

Lorentz, G. G. *Bernstein polynomials*. New York Chelsea publishing Co., 1986.

**[Luo, 2000]**

Luo, Z., Martonosi, M. *Accelerating pipelined integer and floating-point accumulations in configurable hardware with delayed addition techniques*. IEEE Transactions on Computers, vol. 49, no. 3, Marzo 2000.

**[Mahadevan, 1997]**

Mahadevan, B., Putta, L. et al. *A feature free approach to tool selection and path planning in 3-axis rough cutting*. Proceedings of First International Conference on Responsive Manufacturing, Nottingham, pp. 47-60,. Septiembre 1997.

**[Maragos, 1989]**

Maragos, P. *A representation theory for morphological image and signal processing*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 11, pp. 586-599, 1989.

**[Márquez, 1999]**

Márquez, J. *Analysis and Visualization of Three Dimensional Complex Structures: a Boundary Based Approach*. PhD Thesis. Ch. 2. Dept. TSI, ENST, Paris, Junio 1999.

**[Matheron, 1975]**

Matheron, G. *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley & Sons, New York, 1975.

**[McInerney, 2000]**

McInerney, J., Roberts, D. *Frameless stereotaxy of the brain*. The mount of Sinai Journal of Medicine, vol. 67, no 4, pp. 300-310, 2000.

**[Meyer, 1999]**

Meyer, F. *Graph based morphological segmentation*. 2nd IAPR-TC-15 Workshop on Graph-Based Representation, GBR'99. Viena, Austria, pp. 51-61, Mayo 1999.

**[Meyer, 2001]**

Meyer, F. *An overview of morphological segmentation*. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, vol. 15, no. 7, pp. 1089-1118, 2001.

**[Molina, 2002]**

Molina, R. *El modelo superficie-trayectoria. Un modelo para el diseño y fabricación de objetos tridimensionales*. Tesis Doctoral. Dpto. Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Alicante, 2002.

**[Montolío, 1993]**

Montolío, P., Gasull, A. et al. *Document analysis and character recognition by morphological techniques*. International Conference on Signal Processing, Pekín, 1993.

**[Moresco, 1994]**

Moresco, F., Seron, D. et al. *Quantification of interstitial chronic renal damage by means of texture analysis*. *Kidney International*, vol.46, pp.1721-1727, 1994.

**[MSML, 2000]**

*MSML User Guide 8.0*. Geometric Software Solutions Co. Ltd, Abril 2000.

**[Nikopoulos, 1997]**

Nikopoulos, N., Pitas, I. *An Efficient Algorithm for 3D Binary Morphological Transformations with 3D Structuring Elements of Arbitrary Size and Shape*. *Proceedings of 1997 IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing (NSIP'97)*, 1997.

**[Oka, 2002]**

Oka, K., Kumasaka, S. et al. *Assessment of bone feature parameters from lumbar trabecular skeletal patterns using mathematical morphology image processing*. *Journal of Bone and Mineral Metabolism*, vol. 20, no. 4, pp. 201-208, 2002.

**[O'Rourke, 1993]**

O'Rourke, J. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1993.

**[Ortiz, 2002]**

Ortiz, F., Torres, F. et al. *Segmentación de imágenes aéreas mediante morfología matemática en color y geodesia cromática*. XXIII Jornadas de Automática. La Laguna, Santa Cruz de Tenerife, Septiembre 2002.

**[Paciornik, 2003]**

Paciornik, S., Da Fonseca, M. et al. *Multi-scale analysis of the dielectric properties and structure of resin/carbon-black nanocomposites*. *European Physical Journal: Applied Physics*, vol. 21, pp. 17-26, 2003.

**[Paris, 1997]**

Paris, I. *Shoemaster – A CAD/CAM System for the Design and Development of Pedorthics*. *International Symposium of CAD/CAM Systems in Pedorthics, Prosthetics & Orthotics*, Nuremberg, Mayo 1997.

**[Park, 1995]**

Park, H., Chin, R. T. *Decomposition of arbitrarily shaped morphological structuring elements*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 17, no. 1, pp. 2-15, Enero 1995.

**[Piegl, 1997]**

Piegl, L., Tiller, W. *The NURBS book*. 2<sup>nd</sup> Edition. Springer, 1997.

**[Piper, 1989]**

Piper, L. J., Tang, J. T. *Erosion and Dilation of binary images by arbitrary structuring elements using interval coding*. Pattern Recognition Letters, pp. 201-209, Abril 1989.

**[Pitas, 1990]**

Pitas, I., Venetsanopoulos, A. *Morphological Shape Decomposition*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 14, no. 1, pp. 38-45, Enero 1990.

**[Pottmann, 1999]**

Pottmann, H., Wallner, J. et al. *Geometric criteria for gouge-free three-axis milling of sculptured Surfaces*. ASME J. Mech. Design, no. 121, pp. 214-248, 1999

**[Preiss, 1985]**

Preiss, K., Kaplanasky, E. *Automated CNC milling by Artificial Intelligence methods*. Journal of Manufacturing Systems, vol. 4, no 1, pp. 51-6, 1985.

**[Pujol, 2000]**

Pujol, F. A., García-Chamizo, J. M. et al. *DSP Implementations of Morphological Filtering: Application to Path Planning Problems*. Proceedings of the 11th Portuguese Conference on Pattern Recognition, pp. 353-357, Oporto, 2000.

**[Pujol, 2002]**

Pujol, F. A., García-Chamizo, J. M. et al. *Use of Mathematical Morphology in Real-Time Path Planning*. The International Journal of Systems & Cybernetics (Kybernetes), vol. 31, no. 1, pp. 115-123, 2002.

**[Radunovic, 1998]**

Radunović, B., Milutinović, V., *A Survey of Reconfigurable Computing Architectures*. Eighth International Workshop on Field Programmable Logic and Applications, Tallinn, Estonia, 1998.

**[Rappoport, 1997]**

Rappoport, A., Spitz, S. *Interactive boolean operations for conceptual design of 3-D solids*. Computer Graphics (SIGGRAPH '97 Proceedings), no 31, pp. 269-278, 1997.

**[Requicha, 1985]**

Requicha, A., Voelcker, H. *Boolean operations in solid modelling: Boundary evaluation and merging algorithms*. Proceedings of the IEEE, vol. 73, no 1, pp. 30-44, 1985.

**[Richardson, 1991]**

Richardson, C. H., Schafer, W. *A Lower Bound for Structuring Element Decomposition*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 13, no. 4, pp. 365-369, Abril 1991.

**[Roerdink, 1993]**

Roerdink, J. B. T. M. *Solving the empty space problem in robot path planning by mathematical morphology*. Proceedings of Workshop Mathematical Morphology and its Applications to Signal Processing', Barcelona, pp. 216-221, 1993.

**[Roerdink, 1996]**

Roerdink, J. B. T. M. *Computer Vision and Mathematical Morphology*. Theoretical Foundations of Computer Vision, vol. 11, pp. 131-148, 1996.

**[Roth, 2001]**

Roth, D., Bedi, S. et al. *Surface Swept by a toroidal cutter during 5-axis machining*. Computer Aided Desing, vol. 33, 2001.

**[Rypl, 1997]**

Rypl, D., Krysl, P. *Triangulation of 3D surfaces*. Engineering with computers, vol. 13, pp. 87-98, 1997.

**[Sáez, 2000]**

Sáez, J. M., Jimeno, A., Puchol, J. A., Molina R. *Adaptación del PRM sobre superficies libres. Aplicación a entornos CAD/CAM*. Actas del X Congreso Español de Informática Gráfica, CEIGOO, 2000.

**[Salas, 2000]**

Salas, F., García-Chamizo, J.M., Jimeno, A. *Hornas y sistemas informáticos*. Tecnología del Calzado, no. 178, pp. 7-79, Marzo 2000.

**[Salembier, 1995]**

Salembier, P., Torres, L. et al. *Region-Based Video Coding Using Mathematical Morphology*. Proceedings of the IEEE, vol. 83, no. 6, pp. 843-856, 1995.

**[Sánchez, 1998]**

Sánchez, E. *Static and Dinamic configurable systems*. IEEE Transactions on Computers, 1998.

**[Sanz,2002]**

Sanz, A., Felix y Blanco, J. *CAD-CAM. Gráficos, Animación y Simulación por Computador*. Thomson-Paraninfo, 2002.

**[Serra, 1982]**

Serra, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.

**[Serra, 1992a]**

Serra, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology II: Theoretical Advances*. Academic Press, London, 1992.

**[Serra, 1992b]**

Serra, J., Vincent, L. *An Overview of morphological filtering*. Circuits Systems Signal Process, vol. 11, no. 1, pp. 47-108, 1992.

**[Serra, 2002]**

Serra, J., Angulo J. *Aplicación de la morfología matemática a la telemedicina y la biotecnología: caracterización morfológica de células de la sangre y análisis de cDNA microarrays*. Reconocimiento de patrones CIARP'02, México, pp. 39-50, Noviembre 2002.

**[Shih, 1991]**

Shih, F. Y., Mitchell, O. R. *Decomposition of gray-scale morphological structuring elements*. Pattern Recognition, vol. 24, no. 3, pp. 195-203, 1991.

**[Soille, 1999]**

Soille, P. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.

**[Stanley, 1989]**

Stanley A. W. *Applications of Distributed Arithmetic to Digital signal Processing: A tutorial review*. IEEE A DSP Magazine, vol. 6, no. 3, 1989.

**[Sternberg, 1986]**

Sternberg, S. R. *Grayscale morphology*. Computer Vision, Graphics and Image Processing, vol. 35, pp. 333-355, 1986.

**[Stewart, 1998]**

Stewart, N., Leach, G., John, S. *An improved z-buffer CSG rendering algorithm*. Eurographics/Siggraph Workshop on Graphics Hardware, pp. 25-30, 1998.

**[Stewart, 2002]**

Stewart, N., Leach, G., John, S. *Linear-time {CSG} Rendering of Intersected Convex Objects*. The 10-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision '2002 - {WSCG 2002}, vol. 2, pp. 437-444, 2002.

**[TEBIS, 1994]**

*TEBIS The Complete Solution for Tool, Die, Mold, and Pattern Manufacturing*. Tebis Technische Informations systeme, Germany, 1994.

**[Trimberger, 1994]**

Trimberger, S.M., *Field-Programmable Gate Array Technology*. Kluwer Academic, 1994.

**[Villaseñor, 1997]**

Villaseñor, J., Mangione-Smith, W.H. *Configurable Computing*. Scientific Am., vol. 276, no. 6, pp. 54-59, Junio 1997.

**[Vincent, 1991]**

Vincent, L. *Morphological transformations of binary images with arbitrary structuring elements*. Image Processing, vol. 22, no. 1, pp. 3-23, Enero 1991.

**[Vincent, 1993]**

Vincent, L. *Morphological algorithms*. In E. R. Dougherty editor, *Mathematical Morphology in Image Processing*, Marcel Dekker, pp. 255-288, New York, 1993.

**[VOGUE, 1999]**

Petakoski, T., Lounela, L. et al. *MoMuSys: Final report on field trial results*. Center of Mathematical Morphology, Internal Reference: AC098\VT\WP4\DS\P\030\B1, 1999.

**[Volder, 1959]**

Volder, J. *The CORDIC trigonometric computing technique*. IRE Transactions on Electronic Computing, vol. EC-8, pp. 330-334, Septiembre 1959.

**[Wallner, 2000]**

Wallner, J., Pottmann, H. *On the geometry of sculptured surface machining*. Curve and Surface Desing, Vanderbilt University Press, pp. 417-432, 2000.

**[Wallner, 2001a]**

Wallner, J., Sakkalis, T. et al. *Self-intersections of offset curves and surfaces*. Journal of Shape Modeling, no 7, pp. 1-21, 2001.

**[Wallner, 2001b]**

Wallner, J. *Self-intersections and smoothness of general offset surfaces*. Journal of Geometry, no. 70, pp. 176-190, 2001.

**[Walter, 2002]**

Walter, T., Klein, J. C. *Automatic detection of microaneurysms in color fundus images of the human retina by means of the bounding box closing*. Third International Symposium on Medical Data Analysis; ISMDA 2002, Rome, Springer, pp. 210-220, Octubre 2002.

**[Wang, 1987]**

Wang, H. P. *On the efficiency of NC tool planning for face milling operations*. Journal of Engineering for Industry, vol. 109, no. 4, pp.: 70-76, 1987.

**[Wang, 1996a]**

Wang, Y. *Intersection of offsets of parametric surfaces*. Computer Aided Geometric Design, vol. 13, pp.453-465, 1996.

**[Wang, 1996b]**

Wang, S., Piuri, V., *A Unified View of CORDIC Processor Design*. Application Specific Processors, Kluwer Academic, pp. 121-160, 1996.

**[Yan, 1996]**

Yan, X., Gu, P. *A review of rapid prototyping technologies and systems*. Computer-Aided Design, vol. 28, pp. 307-318, 1996.