LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FÍSICA
UNA DIDÁCTICA ALTERNATIVA

DANIEL GIL PÉREZ
JOAQUIN MARTÍNEZ TORREGROSA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA
Editorial VICENS-VIVES,
Madrid, 1987
ISBN: 84-316-2568-6

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
Dirección General de Renovación Pedagógica

Grades 11, 12

DE 16 a 18 años

IV. EJEMPLOS DESARROLLADOS PARA ENSEÑANZA MEDIA

BACHILLERATO

Vamos a desarrollar algunos ejemplos [fruto de nuestra experiencia durante varios cursos en BUP y COU], con objeto de mostrar los resultados de llevar la metodología a la práctica. La transcripción que hemos realizado no es, por supuesto, literal: representa la síntesis de las aportaciones de los distintos grupos, tal como puede ser reformulada al término de la puesta en común de cada una de las fases que se contemplan en la forma de resolución propuesta. Se intercalan, también, una serie de comentarios didácticos que hemos considerado útiles

Los problemas han sido seleccionados por su representatividad o porque su desarrollo permite hacer comentarios sobre aspectos esenciales de la metodología para su mejor utilización. Ello ha conducido a resaltar en estos ejemplos, algún aspecto particular de la metodología propuesta. De ahí los subtítulos introducidos, que pretenden llamar la atención sobre cada uno de dichos aspectos.

1. ¿CUÁL ES EL PROBLEMA?

Consideremos el enunciado: «*¿Chocará el tren con el obstáculo?*» Se trata de un problema cuyo enunciado tradicional hemos incluido en la relación del capítulo anterior con el número 18, y que presenta el interés [en la forma propuesta aquí] de no explicitar inequívocamente qué es lo que se pide. Ello exige, como veremos, un esfuerzo suplementario de reflexión y precisión por parte de los alumnos, y puede producir incluso una desorientación inicial, dado que habitualmente las cuestiones solicitadas aparecen con total nitidez.

a) Planteamiento cualitativo y formulación de hipótesis

Las primeras consideraciones cualitativas en las que los alumnos coinciden sin dificultad, conducen a referirse a un tren que avanza con una velocidad determinada y cuyo maquinista, a la vista de un obstáculo, frena para impedir el choque. Según que el problema sea abordado en un contexto cinemático o dinámico, los alumnos traducen el *frena* por *producir una aceleración* o por *aplicar una fuerza*. El problema puede por supuesto resolverse en cualquiera de los dos niveles. Pero la auténtica dificultad y las discrepancias, aparecen en cuanto se trata de precisar qué es lo que el problema pide. La pregunta «*¿chocará...?*» no puede traducirse automáticamente a la forma habitual de «*calcular la distancia...*», o bien «*obtener la fuerza...*», etc. Y se trata sin embargo de realizar dicha precisión u operativización, sin lo cual difícilmente se podrá seguir avanzando. En otras palabras, los alumnos han de plantearse [y es posible que el profesor necesite impulsarles a ello si por sí mismos no lo hacen] la cuestión de qué se podría calcular que diera información sobre si el choque se produce o no. Ello conduce a distintos planteamientos que resumimos a continuación:

- Una primera forma de operativizar el problema, es plantearse la obtención de la distancia, d, que recorrerá el tren desde que empieza a frenar hasta que se para. Si esta distancia es igual o menor que D [distancia desde el obstáculo al punto donde se encontraba el tren cuando empezó a frenar] no chocará.

- Otra forma de abordar el problema propuesta por los alumnos es tratar de calcular la fuerza necesaria para que el tren se pare justo después de recorrer la distancia D. Si el valor de la fuerza de frenado que puede aplicarse es igual o superior a la obtenida, el choque se evitará.

- Una última manera de operativizar el problema que suele aparecer, aunque con menos frecuencia, es considerar cuál es la velocidad inicial máxima que puede llevar el tren para que, al aplicar los frenos, se pare justo a la distancia D. Si la velocidad que llevaba efectivamente el tren, era igual o menor a ésta, el choque se habrá evitado.

Para algunos alumnos estas formas de abordar el problema pueden parecer distintas, puesto que se trata respectivamente de calcular una distancia, una fuerza y una velocidad. Es fácil comprender sin embargo que ello no es así y que los resultados habrán de ser coincidentes. Precisamente la resolución por más de un procedimiento se convierte en una forma de contrastar la validez de los resultados. En lo que sigue, describiremos la resolución realizada según el primer planteamiento, es decir, determinando la distancia que recorrerá un tren hasta pararse cuando se le aplica una determinada fuerza de frenado (situando, pues, el problema en un marco dinámico).

Los alumnos no encuentran dificultad para exponer a modo de hipótesis, que la distancia d recorrida dependerá de la velocidad v_o que llevaba el tren, de la fuerza, F, de frenado que se le aplica y de la masa, m, del mismo.

Algún alumno suele aludir al tiempo que tardará el tren en detenerse, pero rápidamente surgen comentarios sobre la dependencia de este tiempo de los factores anteriormente considerados. A este respecto, es necesario advertir a los alumnos la conveniencia de permitir la formulación de cualquier hipótesis sin pasar a criticarla de entrada, con objeto de evitar efectos inhibitorios. Una vez formuladas todas las hipótesis, es cuando conviene pasar a su discusión y profundización. Así, los alumnos expresan que d aumentará si lo hace v_o, debiendo ser nula si v_o es nula, o que tenderá a infinito si lo hace v_o. Cuanto mayor sea la aceleración [mayor fuerza de frenado para un valor de m dado], menor deberá ser d, siendo $d \to 0$ si $F \to \infty$.

Cuando se separan las variables F y m, la dependencia de la distancia de frenado con la masa no aparece siempre clara: algunos alumnos afirman que al aumentar m el tren recorrerá menor distancia. Esto pone en evidencia una concepción errónea que considera la masa como propiedad que mide la «resistencia» del cuerpo al movimiento, que mediante un razonamiento irreflexivo se convierte en: mayor masa, «más resistencia», luego se parará antes. Otros alumnos, por supuesto, argumentan lo contrario: a mayor masa, más distancia recorrerá, pues la aceleración de frenado será menor. A pesar de que el argumento es concluyente, con objeto de incidir sobre la concepción errónea citada, se puede dejar en alto esta cuestión y clarificarla a la luz de los resultados obtenidos.

b) Estrategias de resolución

Las estrategias de los alumnos vienen influenciadas por el tema en que ha sido propuesto el problema. Exponemos a continuación las posibles opciones.

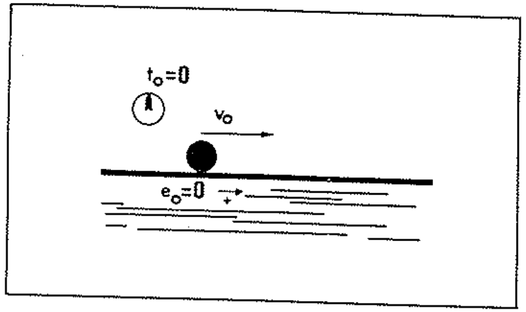
b.1) Si se sigue el tratamiento cinemático/dinámico, la estrategia propuesta supone hallar la aceleración del tren [a partir de la ecuación fundamental de la dinámica], quedando el problema reducido a su aspecto cinemático: a partir de la ecuación de la rapidez, hallar el tiempo que tarda en parar, en ser $v=0$, y sustituir el valor del tiempo obtenido en la ecuación de la posición del tren medida desde el punto en que empieza a frenar, con lo que se obtendrá la distancia buscada, d.

b.2) Se puede hallar la distancia recorrida hasta parar, mediante un tratamiento energético, que aparece si se propone el problema en el tema correspondiente. Se trataría de una transformación de un sistema físico, el tren, que pasa desde un estado inicial en que tiene una velocidad v_o, y por lo tanto una energía cinética $\frac{1}{2}\, m\, v_o^2$ respecto al suelo, a otro estado en que su velocidad, su energía cinética, es cero. Esta transformación es debida al trabajo de la fuerza resultante: el trabajo realizado por la fuerza de frenado, F, a lo largo de la distancia d. Por tanto, se podrá utilizar la expresión $W_{res} = \Delta E_c$ (trabajo resultante igual a variación de energía cinética) para hallar d.

c) Resolución propiamente dicha

c.1) Dado que el estudio del movimiento se realiza a lo largo de una

figura 7.



trayectoria conocida y fija (la vía del tren) los alumnos suelen prescindir, y ello es correcto, del tratamiento vectorial. Pasan así a elegir un sistema de referencia espacio temporal sobre la trayectoria (figura 7), tomando como origen de tiempos el instante en que el tren empieza a frenar y como origen de espacios, la posición donde se encuentra el tren en ese instante, y como sentido positivo el de avance del tren. De este modo, las características cinemáticas del movimiento pasan a ser: v_o, $e_o=0$ y $t_o=0$, y las ecuaciones del movimiento

$$v = v_o + at \quad [1]$$

$$e = v_o t + \tfrac{1}{2} \cdot at^2 \quad [2].$$

Por otra parte, la única fuerza tangencial a la trayectoria es la fuerza de frenado que, de acuerdo con el convenio de signos adoptado, resulta negativa: —F. De este modo, la aceleración resulta

$$a = -\frac{F}{m} \quad [3].$$

El problema ahora se reduce a sustituir dicho valor de la aceleración en las ecuaciones cinemáticas, hallar el tiempo que tarda en parar el tren haciendo $v=0$ (velocidad final con el tren parado) en la ecuación [1] y obtener d sustituyendo dicho tiempo en la ecuación [2]. Los alumnos no tienen, así, excesivas dificultades en obtener:

$$d = \frac{m\, v_o^2}{2\, F}$$

c.2) Para la resolución mediante la estrategia energética (igualando el trabajo resultante a la variación de la energía cinética) los alumnos utilizan bien la expresión

$W = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot \cos\theta$, o bien $W = F_{tg} \cdot |\Delta\vec{r}|$.

En ambos casos llegan a

$$W_{res} = -F \cdot d$$

(trabajo negativo naturalmente), que produce una variación de energía cinética que pasa de $\frac{1}{2} \cdot m\ v_o^2$ a 0, con lo que

$$\Delta E_c = 0 - \tfrac{1}{2} \cdot m\ v_o^2.$$

De acuerdo con ello:

$$-F \cdot d = (0 - \tfrac{1}{2} \cdot m\ v_o^2),$$

y por tanto

$$d = \frac{m\ v_o^2}{2\ F}.$$

d) Análisis de los resultados

Tal como los alumnos anticipan al formular las hipótesis, la distancia recorrida por el tren depende de v_o, aumentando o disminuyendo si v_o lo hace y cumpliendo los casos límites evidentes: si v_o es nula, d sería también nula; y si $v_o \to \infty$, $d \to \infty$. Cuanto mayor sea la fuerza de frenado, menor será la distancia recorrida hasta parar, siendo esta distancia nula si $F \to \infty$. Con respecto a la masa, como se puede advertir, la distancia aumentará al aumentar la misma, en contra de muchas opiniones iniciales. El papel de la masa se puede clarificar más si se escribe el resultado de distintas formas:

$$d = \frac{m\ v_o^2}{2\ F} = \frac{v_o^2}{2\ F/m} = \frac{v_o^2}{2\ a}.$$

En definitiva, el resultado obtenido para d parece lógico, no muestra incoherencias y puede ser aceptado como correcto [es posible, además, comprobar la homogeneidad dimensional de la expresión obtenida].

La respuesta a la pregunta planteada por el problema se obtiene ahora concluyendo que, si d es menor o igual que D, es decir, si

$$(m v_o^2/2\ F) \leqslant D,$$

el tren se detendrá sin llegar a chocar con el obstáculo.

Cuando la resolución se orienta hacia el cálculo de la fuerza necesaria para que el tren se pare tras recorrer la distancia D, el resultado obtenido es

$$F = \frac{m\ v_o^2}{2\ D}$$

y la respuesta, ahora, es que el tren no chocará si F es igual o mayor al valor obtenido, o sea si

$$F \geqslant (m\ v_o^2/2\ D)$$

expresión que es absolutamente equivalente a la obtenida anteriormente.

Del mismo modo, puede hallarse el valor máximo de la velocidad inicial que puede llevar el tren:

$$v_o = \sqrt{\frac{2\ F\ D}{m}}.$$

Por tanto si

$$v_o \leqslant \sqrt{\frac{2\ F\ D}{m}}$$

no se producirá choque.

De este modo queda patente que es posible proponer enunciados ambiguos que permitan a los alumnos determinar con cierta autonomía cuál va a ser el enunciado a resolver. Otros enunciados similares son los propuestos, en el capítulo anterior, con los números 12 (¿cogerá el perro a la liebre antes de que llegue a su madriguera?) y 21 (¿alcanzará una persona que está en la calle, un objeto dejado caer desde una ventana?).

2. LA OPERATIVIZACIÓN DE LAS HIPÓTESIS: PAPEL DE LOS CASOS LÍMITES

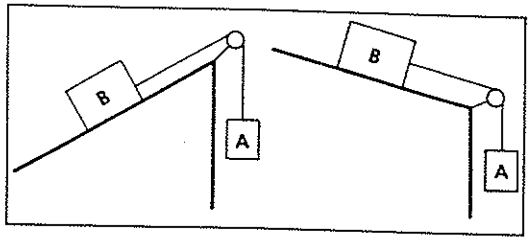
Vamos a centrar nuestra atención en el proceso de formulación de hipótesis a lo largo del desarrollo del problema número 61 del capítulo anterior, cuyo enunciado es el siguiente:

«Sobre un plano inclinado se encuentra un cuerpo unido mediante una cuerda, que pasa por una polea, a otro que cuelga verticalmente. Calcular la aceleración del sistema».

a) Planteamiento cualitativo y formulación de hipótesis

Los alumnos proceden a la *traducción* gráfica de un enunciado puramente verbal, apareciendo dos posibilidades distintas como muestra la figura 8. Si bien en este caso el croquis se elabora sin mayores dificultades, hay que señalar que su ejecución no debe realizarse de modo inmediato: es necesaria una comprensión cualitativa de la situación física para que sea posible su realización correcta. Cuando esta comprensión no se produce, los croquis presentan deficiencias manifiestas (Gil y Martínez Torregrosa, 1984), siendo por ello conveniente presentar los enunciados en forma verbal, sin dibujos (si es posible), con objeto de que los alumnos se ejerciten en este proceso.

figura 8.



Los dos posibles esquemas de la figura 8 son considerados por los alumnos como equivalentes [cambiando sólo el ángulo del plano inclinado], por lo que el resultado deberá ser aplicable a las dos situaciones. El planteamiento cualitativo se realiza partiendo del primer croquis. Se precisa que, en ese caso, si se abandona libremente, el sistema podrá deslizarse en uno u otro sentido [dependiendo de los valores de las masas y el ángulo], realizando un movimiento rectilíneo con aceleración constante cuyo valor se busca.

Se inicia así, el trabajo de formular el problema de modo preciso, lo que se completa considerando, en general, que existe rozamiento y que las masas de la polea y la cuerda son despreciables. Estas condiciones suelen ser menos restrictivas si el problema se aborda en COU, donde se considera el caso más general de que la polea tenga momento de inercia no nulo.

Esta formulación se completa proponiendo el estudio del movimiento de ambos cuerpos a lo largo de su trayectoria, lo que evita un tratamiento vectorial más complejo y hace que la aceleración buscada sea igual para los dos, al estar unidos por una cuerda inextensible. Razonando ahora, a título de hipótesis, los alumnos consideran que dicha aceleración habrá de depender de las masas de los cuerpos: m_A y m_B, del ángulo del plano: α, del coeficiente de rozamiento: μ, y del valor de la intensidad del campo gravitatorio: g.

Pero, queremos insistir en que no se trata simplemente de indicar de qué factores puede depender la magnitud buscada, actividad que, en ocasiones, puede resultar trivial, sino de profundizar, adelantando justificadamente el tipo de dependencia que cabe esperar, y tomando en consideración casos límites más o menos obvios, como tendremos ocasión de ver. Todo ello no sólo evita que la emisión de hipótesis pueda convertirse en una enumeración mecánica de factores, sino que contribuye a la comprensión de la situación estudiada y enriquece el posterior análisis de resultados, ya que las expresiones obtenidas habrán de dar cuenta de las dependencias hipotetizadas, reflejar los casos límites considerados y sugerir, como veremos también, nuevos problemas.

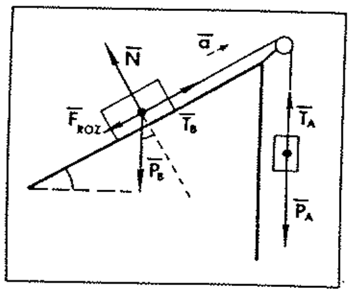
De este modo, en el problema que nos ocupa, los alumnos precisan las hipótesis emitidas señalando, por ejemplo, que si el sistema se acelera de manera que descienda el cuerpo A, esta aceleración aumentará con m_A y disminuirá con m_B. En particular si m_B es nula [o prácticamente nula frente a m_A por ser ésta mucho mayor], la situación se convierte en una caida libre del cuerpo A, y la aceleración debe ser igual a g. De modo análogo, si es m_A la que resulta nula, la situación se convierte en el deslizamiento del cuerpo B por un plano inclinado y, tal como se ha visto en otros problemas, ha de valer: $a = g$ sen α —si el rozamiento es nulo: $\mu = 0$— o bien:

$$a = g\,(\text{sen}\,\alpha - \mu\cos\alpha),$$

si existe rozamiento y el ángulo α es mayor que el ángulo crítico. Otro caso de fácil interpretación que los alumnos abordan, corresponde a un ángulo $\alpha = 90°$, que convierte el sistema en una máquina de Atwood, en cuyo caso la aceleración ha de ser

$$a = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)}.$$

figura 9.



Algunos alumnos consideran que si el cuerpo B estuviera sobre una superficie horizontal: $\alpha = 0°$, y m_A fuera nula, la aceleración deberá ser nula. Por último, cabe suponer que la aceleración dependerá del coeficiente de rozamiento: μ [disminuyendo al aumentar éste] y de la intensidad del campo gravitatorio: g, aumentando con ella y siendo nula en caso que g lo fuera.

Como vemos, pues, el resultado deberá englobar toda una serie de situaciones más sencillas que serán una buena prueba para la contrastación de su validez.

Llamamos, una vez más, la atención sobre la importancia de esta fase de emisión de hipótesis, que supone una ocasión privilegiada para el uso del pensamiento divergente, tan escaso en la enseñanza habitual de las ciencias y que juega, sin embargo, un papel central en la metodología científica. La importancia de las *expectativas* en la resolución de problemas ha sido probada, por un camino muy distinto, por recientes estudios en el campo de la Psicología del Procesamiento de Información (Good, 1984).

b) Elaboración de estrategias

En la puesta en común aparecen estrategias desde dos puntos de vista alternativos: el dinámico y el energético.

b.1) Puesto que el movimiento se realiza a lo largo de una trayectoria recta, sólo las proyecciones de las fuerzas sobre ella, contribuirán a producir la aceleración. Por tanto será fácil calcular el módulo de la aceleración, aplicando la ecuación fundamental a cada uno de los cuerpos (figura 9), teniendo en cuenta que las tensiones $\bar{T}_B$ y $\bar{T}_A$ son de igual módulo al considerar despreciables las masas de la cuerda y la polea.

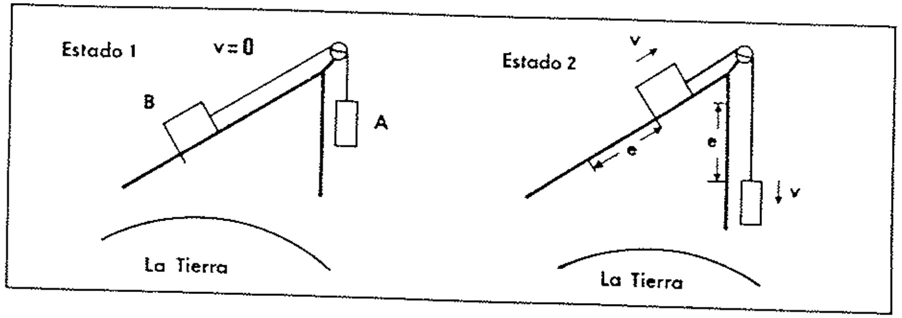


figura 10.

Otra estrategia dinámica posible, consiste en considerar los dos cuerpos como un único sistema, de masa: $m_A + m_B$ [lo que es posible por las condiciones restrictivas impuestas], que describe una trayectoria fija y conocida, siendo, por tanto, la fuerza resultante a lo largo de esa trayectoria, la causante de la aceleración.

b.2) Si bien con la estrategia dinámica la mayor parte de los alumnos se dan por satisfechos, es necesario, tal como ya hemos señalado, fomentar la búsqueda de estrategias alternativas, tanto por el esfuerzo de reflexión que ello supone, como por ser el procedimiento más eficaz para comprobar la validez de un resultado. En este caso, una estrategia energética no suele ser considerada porque conduce al valor de la velocidad y no al de la aceleración, que es lo que se busca. Puede ser, por tanto, necesario que el profesor insista en la posibilidad de obtener la aceleración a partir de una estrategia distinta a la dinámica. Esta búsqueda conduce a la aceptación de una estrategia energética ya que, efectivamente, si se conoce el valor de la rapidez de A y B, en función de la posición sobre la trayectoria, $v = f(e)$, resulta posible hallar la aceleración.

Por tanto, se propone hallar la rapidez de los cuerpos [la misma para ambos por ser la cuerda inextensible], considerando una transformación del sistema físico formado por los cuerpos A y B, la cuerda y la Tierra, desde el estado 1 al estado 2 (figura 10).

Este sistema sufre una variación de energía propia [energía cinética más energía potencial], producida por un trabajo exterior que, en este caso, es el de la fuerza de rozamiento. Como se debe cumplir [en el sistema elegido no existen fuerzas interiores no conservativas] que el trabajo exterior es igual a la variación de energía propia producida:

$$W_{ext} = \Delta U = \Delta E_c + \Delta E_p,$$

podrá obtenerse la velocidad buscada.

También es posible hallar la velocidad aplicando la expresión $W_{tot} = \Delta E_c$ (trabajo resultante igual a la variación de energía cinética) en la misma transformación. En este caso, el trabajo resultante es la suma de los trabajos de cada una de las fuerzas, tanto internas como externas.

c) Resolución propiamente dicha

La resolución en este caso no presenta otras dificultades que la exigencia de una cuidadosa consideración de las componentes tangenciales de las fuerzas. Se obtiene así, por los distintos procedimientos:

$$a = \frac{m_A - m_B\,(\text{sen}\,\alpha + \mu\cos\,\alpha)}{m_A + m_B}\,g$$

Conviene, quizás, puntualizar que algunos alumnos utilizan la estrategia energética para obtener en primer lugar la velocidad en función de la posición, $v = f(e)$, y hallar la aceleración por derivación, recurriendo a la derivada de una función de función:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{de}\cdot\frac{de}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot v.$$

Otros, sin embargo, tienen en cuenta que por tratarse de un movimiento con aceleración constante y velocidad inicial nula, se puede expresar el desplazamiento como $e = \frac{1}{2}\,a\,t^2$, y la velocidad final: $v = a\,t$, con lo que obtienen directamente la aceleración por sustitución en la expresión

$$W_{ext} = \Delta U.$$

d) Análisis de resultados

La obtención de resultados idénticos por métodos distintos es, sin duda, la mayor garantía de la validez del resultado. Se cumplen, además, las dependencias esperadas en el proceso de formulación de hipótesis. En efecto, la aceleración depende de las masas m_A y m_B, de modo que si la masa que cuelga (m_A) se hace muy grande o la masa de B se anula, su valor será el de caída libre: g. Tal como se suponía, si la masa que cuelga es nula, $m_A = 0$, y no existe rozamiento, $\mu = 0$, la aceleración de caída de B por el plano inclinado es g sen α [el signo menos está relacionado con el sentido adoptado para la aceleración]. En cambio no concuerda el resultado con lo esperado [lo que es advertido inmediatamente por los alumnos], en el caso en que la masa que cuelga es nula: $m_A = 0$, y existe rozamiento, ya que la expresión obtenida se reduce a:

$$-g\,(\text{sen}\,\alpha + \mu\cos\,\alpha),$$

cuando se debería obtener

$$-g\,(\text{sen}\,\alpha - \mu\cos\,\alpha).$$

Esta situación conduce a la conclusión de que la solución obtenida no es válida cuando el desplazamiento del sistema se realiza de modo que la masa que cuelga asciende, pues la fuerza de rozamiento tendría sentido opuesto al considerado, mientras que no variaría el de los pesos. Esto lleva a los alumnos a rechazar la equivalencia, aceptada en principio, de los dos sistemas de la figura 8, avanzando que en el otro caso la solución deberá ser:

$$a = \frac{m_A - m_B\,(\text{sen}\,\alpha - \mu\cos\,\alpha)}{m_A + m_B}\,g$$

Como vemos, la consideración de casos límites no sólo es útil para detectar resultados incorrectos, sino también para modificar planteamientos cualitativos, fijar límites de validez de las expresiones obtenidas, etc. Ello se pone de manifiesto de nuevo, al considerar otro de los casos límites aludidos por los alumnos: cuando la masa que cuelga es nula: $m_A = 0$ y el plano es horizontal: $\alpha = 0°$, la aceleración debe ser nula. En cambio en la expresión obtenida queda: $a = -\mu g$. Los mismos alumnos afirman que en la situación límite considerada, la fuerza de rozamiento es nula al no existir desplazamiento de B sobre la superficie, por lo que el resultado obtenido sigue siendo válido. También la expresión obtenida engloba a la máquina de Atwood, ya que si $\alpha = 90°$, la aceleración de las masas sería:

$$a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}.$$

A lo largo de los ejemplos desarrollados en este capítulo tendremos más ocasiones de comprobar la eficacia del proceso de formulación de hipótesis y consideración de casos límites.

3. ¿QUÉ HACER CUANDO NO SE ENCUENTRA UNA ESTRATEGIA?

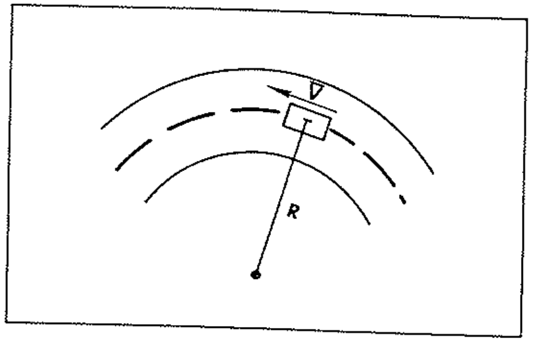
El enunciado siguiente [número 69 del capítulo anterior]: *«¿Con qué velocidad máxima puede tomar un coche una curva sin derrapar?»*, es un problema habitualmente propuesto en libros de 3.º de BUP y COU, pero su correcta solución puede llegar a plantear dificultades incluso a profesores, evidenciando fijaciones funcionales y visiones erróneas sobre el concepto newtoniano de fuerza.

Este ejemplo permitirá mostrar cómo puede ser utilizada la metodología para identificar y eliminar procedimientos y concepciones equivocadas, así como para producir situaciones privilegiadas de aprendizaje. Se trata, además, de un caso singular que solemos utilizar como problema fundamental para el aprendizaje de aspectos esenciales de la Mecánica, y que a menudo produce un cambio cualitativo en la comprensión de la misma.

a) Planteamiento cualitativo y formulación de hipótesis

Los alumnos suelen referirse al caso de un coche que entra en una curva con una velocidad excesiva y se *sale* de la misma sin volcar (derrape); se trataría de encontrar, pues, la máxima velocidad que puede tener un vehículo en una curva, que se supone circular, para que esto no ocurra. Concretando más, se trata de obtener la velocidad máxima que debe tener un coche para seguir una curva de radio determinado (figura 11), suponiendo que tiene un movimiento circular de rapidez constante.

figura 11.



Es posible imponer más condiciones simplificatorias tales como considerar la curva plana [sin peralte], o sin rozamiento. Si esto ocurre, no hay ninguna dificultad en continuar con esas simplificaciones y proponer, por último, el problema con toda su complejidad. Si esto no ocurre [como ha sucedido en nuestras clases], su necesidad aparecerá, como veremos, a la hora de elaborar la estrategia a seguir, produciéndose una situación que consideramos de gran interés didáctico.

Si no se incluyen las simplificaciones citadas, las hipótesis suelen expresar que la velocidad máxima dependerá del rozamiento con el suelo, coeficiente μ, de la inclinación del peralte α, del radio de curvatura R, de la intensidad del campo gravitatorio g, e incluso de la forma aerodinámica del vehículo. El profesor hace notar que si bien es evidente que la forma del vehículo influirá [variando la fuerza normal y, por tanto, la fuerza de rozamiento], su estudio está lejos de los objetivos del curso, por lo que no procede considerar su influencia. Ello no significa que dicho estudio no sea relevante [recordemos el efecto de «ala invertida» en los coches de competición]; por el contrario una de las características del trabajo científico consiste en imponer condiciones que hagan asequible el problema. Indudablemente, esto influirá en el campo de validez de los resultados obtenidos.

Después de estas consideraciones,

las hipótesis formuladas se pueden resumir de este modo:

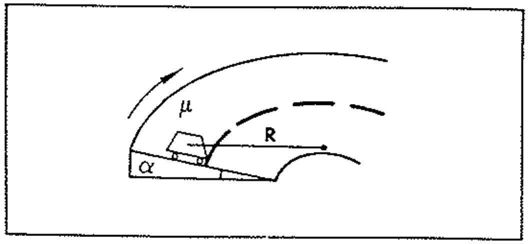
$$v_{máx} = f(\mu, \alpha, R, g),$$

ver figura 12, siendo completadas por las precisiones sobre el tipo de dependencia y casos límites: cuando mayor sea el coeficiente de rozamiento con el suelo μ, con mayor velocidad se podrá tomar la curva. Si no hubiera rozamiento y la curva fuera horizontal, el coche no podría girar, por tanto si $\mu=0$ y $\alpha=0°$, debe ser $v_{máx}=0$. Cuanto mayor sea el ángulo del peralte α, mayor será la velocidad a partir de la cual se derrapa. Cuando el ángulo tienda a 90° [curva de carretera vertical], es de esperar que no derrape a ninguna velocidad, que $v_{máx} \rightarrow \infty$. La dependencia con el radio es evidente: a mayor radio, mayor podrá ser la velocidad sin peligro de que derrape; si el radio es *infinito* [una recta], la velocidad máxima será también *infinita*. Si la curva fuera muy cerrada [si el radio tiende a cero], también lo hará la velocidad. Respecto a g, cabe esperar que aumente la velocidad de derrape al hacerlo g, pues al aumentar el peso del cuerpo aumentaría la fuerza normal y, por tanto, el rozamiento entre las ruedas y el suelo. Si g fuera nula no se podría tomar la curva: $v_{máx}=0$.

b) Elaboración de estrategias, resolución y análisis de resultados

Los alumnos piensan y discuten durante cierto tiempo sin llegar a concretar estrategia alguna. Evidentemente se trata de un verdadero problema para ellos. Es necesario resaltar que esta situación en que no se sabe qué estrategia seguir, en que se está *dando vueltas* al problema, es característica de cualquier proceso de investigación o resolución de problemas. Sin embargo, esta etapa es ignorada en la didáctica habitual, como hemos mostrado en el capítulo primero, donde el profesor actúa de un modo lineal, sin incertidumbre: se explican problemas ya resueltos. Este modo de actuar produce en el alumno la creencia de que la resolución de problemas es fruto de una intuición inmediata sólo al alcance del profesor o de sus compañeros más dotados, generando comportamientos miméticos o pasivos: o se reconoce de inmediato el problema, o se abandona. Nada más lejos de la realidad, como cualquier profesor habrá podido comprobar al enfrentarse a problemas que, en principio, no sabía resolver.

figura 12.



No hay ninguna regla que se pueda utilizar mecánicamente, a modo de receta, para encontrar estrategias correctas. No obstante, *las dificultades encontradas por los alumnos les conducen a la conveniencia de resolver previamente casos más simples:* abordar, por ejemplo, el problema suponiendo que la curva tiene rozamiento pero no tiene peralte, y después suponiendo que tiene peralte sin rozamiento. Es importante resaltar la validez de este modo de abordarlo, que constituye uno de los caminos más utilizados en procesos de investigación dificultosos, y uno de los procedimientos más citados por los investigadores en el campo de la resolución de problemas (Wickelgren, 1974) para alcanzar la solución de un verdadero problema.

Vamos, pues, a exponer el proceso seguido en clase: 1) resolución considerando la curva con rozamiento sin peralte; 2) resolución con peralte sin rozamiento; y 3) curva con peralte y rozamiento.

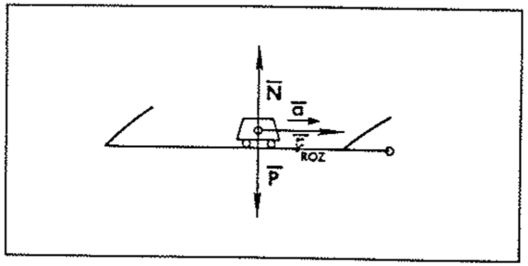


figura 13.

1) *Curva horizontal con rozamiento*

a) *Elaboración de estrategias:* La puesta en común conduce a discusiones sobre la dirección de la fuerza de rozamiento, que concluyen afirmando que si el vehículo tiene un movimiento circular uniforme, la fuerza resultante que actúa sobre él debe ir dirigida al centro de curvatura. Esa fuerza resultante no es otra que la fuerza de rozamiento, pues el peso y la normal son perpendiculares al plano de la trayectoria (ver figura 13).

Si los alumnos han comprendido el principio de acción y reacción de la dinámica newtoniana y que en el movimiento circular uniforme la fuerza resultante debe ir hacia el centro, no deben aparecer alusiones a la fuerza centrífuga: su aparición indicaría un aprendizaje confuso, siendo aconsejable la utilización de actividades más sencillas para corregirlo. Continúan los alumnos expresando que la fuerza resultante [en este caso, la fuerza de rozamiento] producirá una aceleración que sólo tiene componente normal y cuyo valor es v^2/R. Cuando el coche derrape [cuando haya desplazamiento relativo de las ruedas respecto al suelo en dirección radial], la fuerza resultante será la máxima posible, pues la fuerza de rozamiento alcanzará su valor máximo μN.

Hallaremos, pues, el valor de la velocidad, suponiendo que el rozamiento es máximo, a partir de la ecuación fundamental de la dinámica.

b) *Resolución:* La resolución es inmediata, ya que como se ha dicho, la fuerza resultante es la fuerza de rozamiento:

$$F_{res} = F_{roz} = m \cdot a,$$

es decir,

$$\mu N = m \cdot v_{máx}^2/R.$$

El valor de la normal es igual al peso: mg, porque al no tener la aceleración componente vertical, estas fuerzas deben anularse, con lo que resulta:

$$\mu mg = m\, v_{máx}^2/R \Rightarrow v_{máx} = \sqrt{\mu g R}.$$

c) *Análisis de resultados:* Como los propios alumnos advierten, el resultado [dimensionalmente correcto] es lógico, pues como se preveía, la velocidad a partir de la cual derrapa depende del rozamiento entre las ruedas y el suelo, de lo cerrada que sea la curva y del valor de la intensidad del campo gravitatorio. Se cumplen, además, los casos límites evidentes: si g, R o μ son nulos, no se podría tomar la curva. Si alguno de ellos tendiera a un valor infinitamente grande, no se derraparía nunca.

El profesor puede, y debe, aprovechar las situaciones que frecuentemente se producen en el análisis de los resultados para profundizar en la comprensión de los aspectos fundamentales de la Física o de hechos cotidianos. En este caso las consideraciones del profesor podrían ser como sigue: *«Se gira porque la fuerza resultante va dirigida hacia el centro (v constante). Dicha fuerza, como hemos visto, es producida por el rozamiento del suelo con las ruedas: al girar el volante hacemos que haya fuerza de rozamiento dirigida hacia el*

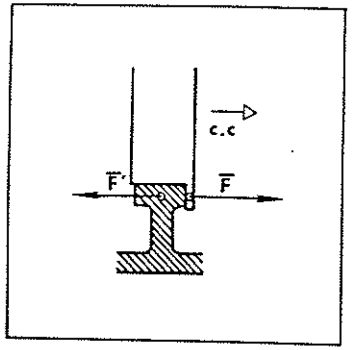
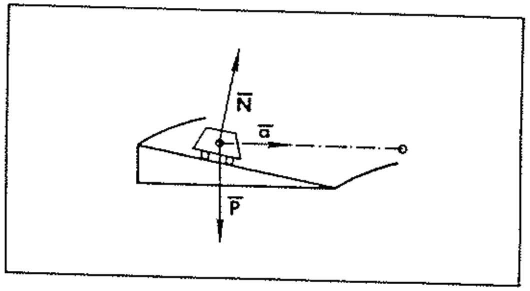


figura 14.

centro. Si no existe suficiente rozamiento, no sirve de nada girar el volante, como ocurre en ocasiones al formarse hielo». Es posible también que los alumnos planteen el caso del tren. ¿Cómo se ejerce aquí la fuerza? *«Para que tome una curva, la fuerza resultante sobre el tren F, dirigida al centro, es efectuada por los raíles, figura 14 [para ello las ruedas tienen solapas], mientras que sobre los raíles el tren ejerce una fuerza igual y de sentido opuesto $\bar{F}'$. Es fácil comprender por qué deben estar los raíles sujetos fuertemente al suelo, sobre todo en las curvas, o por qué algunos trenes marchan sensiblemente más despacio en las mismas.»*

Como vemos, la metodología propuesta, además de producir la actitud propia de una investigación, proporciona numerosas ocasiones [ver todos los ejemplos desarrollados], de influir

figura 15.



en el paradigma conceptual de los alumnos y en aspectos de la vida cotidiana, con la ventaja de que surjen de la propia actividad de los alumnos.

Aún es posible obtener más consecuencias prácticas del resultado, si se agrupan los términos de modo que aparezcan en un miembro magnitudes variables (v, R) y en otro aquellas sobre las que no podemos influir fácilmente (μ, g): $v^2_{max}/R = \mu g$; cuya interpretación es interesante: una vez superada la velocidad de derrape, el cociente entre el cuadrado de la velocidad y el radio de la curva debe ser constante [pues sólo depende del estado de las ruedas y el suelo y de g]. Cuanto mayor sea la velocidad, mayor será el radio de la curva que ha de describir el vehículo, de modo que se saldrá de la carretera sencillamente porque describe una curva de radio mayor.

2) *Curva con peralte sin rozamiento*

a) *Elaboración de estrategias:* Consideraciones idénticas a las anteriores conducen a establecer que si el vehículo lleva un movimiento circular uniforme, la fuerza resultante $\bar{F}_{res}$ [suma de la normal y el peso] ha de estar dirigida hacia el centro de curvatura (ver figura 15) y su módulo será: $m \cdot v^2/R$. Algunos alumnos dibujan la fuerza resultante tangente al plano, hacia abajo, poniendo de manifiesto una fijación producida por haber resuelto abundantes ejercicios en los que el cuerpo tiene un movimiento rectilíneo sobre el plano inclinado y en los que, evidentemente, la aceleración y la fuerza resultante llevan esa dirección. Es un error que puede y suele ser corregido por los propios alumnos durante la puesta en común.

La estrategia de resolución que suele elegirse [aunque algunos alumnos proponen expresar vectorialmente la fuerza normal y el peso, y aplicar la ecuación fundamental de la dinámica] es recurrir a una sencilla relación trigonométrica que ligue el valor de la fuerza resultante con el de $\bar{N}$ o $\bar{P}$. Nos detendremos ahora en la resolución, porque en ella se ponen de manifiesto nuevos efectos de fijación funcional producidos por un aprendizaje superficial.

b) *Resolución:* La tendencia más frecuente entre los alumnos es relacionar la fuerza resultante ($m v^2/R$) con la normal (figura 15) a través de sen $\alpha = \frac{(m v^2/R)}{N}$, lo cual evidentemente es correcto. Los alumnos consideran además que el valor de la normal es conocido: $N = m\ g \cos\alpha$. Se trata, como puede verse, de una nueva fijación asociada al deslizamiento de objetos sobre un plano inclinado. Una pequeña reflexión bastaría para mostrar que, según ello, N habría de ser menor que m g, mientras que la figura muestra claramente que en este caso N es mayor que m g. Sin embargo puede ser interesante no corregir inmediatamente dicho error y dejar que ellos mismos, al analizar el resultado así obtenido ($v = \sqrt{g\ R \cos\alpha\ \text{sen}\alpha}$) se den cuenta de que algo no funciona.

c) *Análisis de resultados:* Tal como era previsible, la velocidad depende del radio R, de g y del ángulo α, siendo dimensionalmente homogénea la expresión obtenida. Por otra parte se cumple que si $R \to \infty$ (una recta) el coche no derrapa ($v \to \infty$) además si no hay peralte ($\alpha = 0°$) la velocidad es también nula, es decir, el coche no puede girar porque no hay peralte ni rozamiento. Hasta aquí todo es correcto. Sin embargo, la expresión obtenida *no* predice que al aumentar el ángulo aumente la velocidad, por figurar el producto $\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$. Nos encontramos así que para 90° también la velocidad máxima es ¡nula!

Los alumnos revisan el problema, la estrategia, la resolución,... no siendo a menudo capaces de encontrar el fallo. Si algún equipo ha pensado utilizar la relación numérica entre la fuerza resultante y el peso ($\text{tg}\alpha = \frac{m\ v^2/R}{m\ g}$), o si el profesor incita a ello, el error se advierte fácilmente puesto que en este caso $v = \sqrt{g\ R\ \text{tg}\alpha}$, resultado que no contiene las contradicciones del anterior y que además no coincide con el mismo. Esta es, pues, una buena ocasión para llamar la atención sobre el uso de algunas expresiones fuera de su dominio de aplicabilidad [cuestión sobre la que volveremos a incidir en el apartado 5 de este capítulo].

Al mismo resultado se llega también si, a través de la figura se constata que $\cos\alpha = \frac{m\ g}{N}$ y por tanto al sustituir en $\text{sen}\alpha = \frac{m\ v^2/R}{N}$, se obtiene ahora la expresión $v = \sqrt{g\ R\ \text{tg}\alpha}$, reforzándose así su validez.

De modo análogo a como se hizo en el caso anterior, los alumnos profundizan en el significado físico del resultado obtenido, separando las variables: $v^2/R = g\ \text{tg}\alpha$, donde se advierte que si la velocidad aumenta, el coche ascenderá por el plano inclinado hasta que el radio sea tal que el cociente v^2/R sea igual a $g\ \text{tg}\alpha$ [que sólo depende de la carretera]. Aquí no se trata de velocidad máxima, pues no hay fuerzas cuyo valor dependa de la velocidad (como antes la de rozamiento): para cada valor del radio sólo hay una velocidad posible. Si ésta aumenta o disminuye, el móvil ascenderá o descenderá por el plano hasta alcanzar el radio adecuado.

Es ahora cuando los alumnos deciden [y pueden hacerlo] abordar el problema con toda su complejidad.

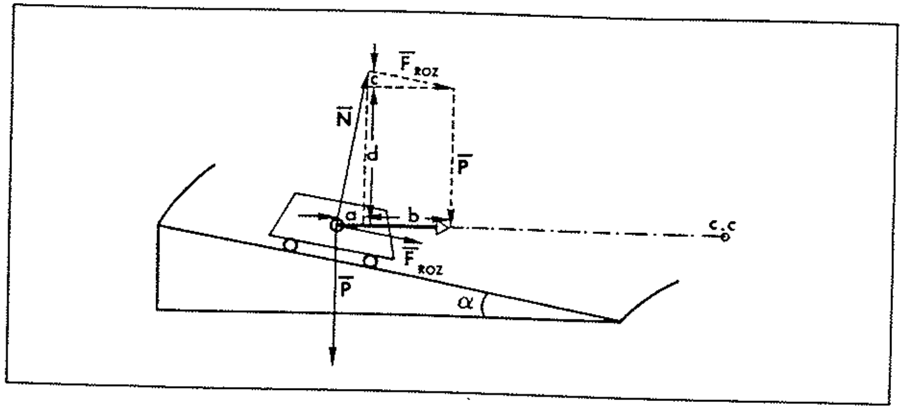


figura 16.

3) *Curva con peralte y rozamiento*

a) y b) *Estrategia y resolución:* La estrategia ya no ofrece dificultad: la fuerza resultante: $\bar{N}+\bar{P}+\bar{F}_{roz}$, debe estar dirigida hacia el centro y su módulo debe ser m v²/R. De ahí obtendremos el valor de la velocidad a la que comienza a producirse derrape si ponemos el valor máximo de la fuerza de rozamiento. Unos alumnos utilizan ejes coordenados, con el eje X en la dirección y sentido de la aceleración, y otros optan por utilizar el método de resolución gráfica que exponemos a continuación. Como $\bar{N}+\bar{P}+\bar{F}_{roz}$ debe ser un vector dirigido hacia el centro de curvatura, de la figura 16 se pueden obtener las siguientes relaciones que ligan la fuerza resultante (m v²/R) con g, μ y el ángulo, eliminando las posibles variables intermedias (N, F_{roz}, ...).

$$F_{res}=a+b=N \text{ sen } \alpha+F_{roz} \cos\alpha \quad [1];$$
$$c+d=N \cos\alpha;$$

como

$$c=F_{roz} \text{ sen}\alpha$$

y

$$d=m\ g$$

se obtiene

$$N \cos\alpha=F_{roz} \text{ sen}\alpha+m\ g \quad [2].$$

Sustituyendo ahora

$$F_{roz}=\mu N$$

y

$$F_{res}=m\ \frac{v^2_{max}}{R}$$

y eliminando N entre [1] y [2] se llega sin dificultad a:

$$v_{máx}=\sqrt{g\ R \frac{\mu+tg\alpha}{1-\mu\ tg\alpha}}$$

c) *Análisis de resultados:* En primer lugar, sin peralte, $\alpha=0°$, se debe obtener el mismo resultado que en el primer caso: $v_{máx}=\sqrt{\mu g\ R}$, cosa que ocurre. Si no hay rozamiento, $\mu=0$, se debería obtener $v=\sqrt{g\ R\ tg\alpha}$, lo que también es así, etc. En definitiva, se comprueba que el significado físico y los casos límites son reproducidos por la expresión obtenida.

Del mismo modo, se debe fomentar el hábito de analizar los valores singulares: aquellos para los que se anula el numerador o el denominador, cuya interpretación física puede ser importante. Alumnos habituados a este tipo de análisis actúan de la siguiente forma: cuando $\mu+tg\alpha=0$, es decir, si $tg\alpha=-\mu$ [ángulo negativo, peralte *al revés* como en la figura 17] no se puede tomar la curva porque a cualquier velocidad se producirá el derrape. Como vemos, lo que interesa para tomar la curva con seguridad [para no derrapar alejándose del centro], es que α sea positivo y lo mayor posible. Es factible tomar una curva con peralte *al revés*, siempre que $\mu+tg\alpha$ sea mayor que cero, pero son muy peligrosas, produciéndose el derrape a velocidades pequeñas. En todas las ciudades existen curvas de este tipo. Hay que añadir que el ángulo de peralte negativo, para el que se anula el numerador, coincide con el ángulo crítico de rozamiento.

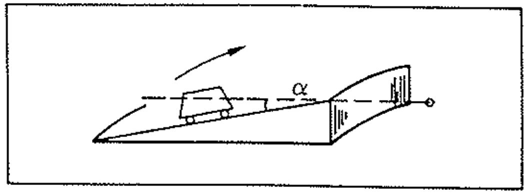


figura 17.

El denominador se anula cuando $1-\mu\ tg\ \alpha=0$ es decir cuando

$$tg\alpha=1/\mu,$$

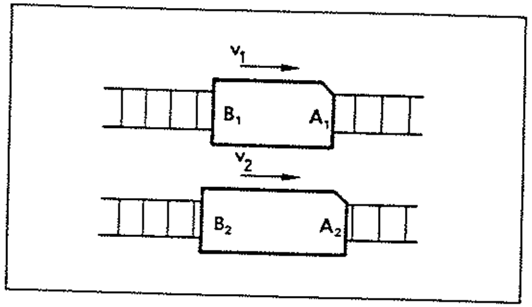
tendiendo la velocidad a infinito en este caso, o sea no derraparía para ningún valor de v. En una curva cuyo peralte tenga un ángulo tal que su tangente sea mayor o igual que $1/\mu$ no se derrapará; como no existe una velocidad a partir de la cual se produce el derrape, aquí el problema sería hallar la velocidad mínima para que el vehículo se mantuviera en esa curva sin derrapar hacia abajo. Se trata, pues, de un nuevo problema generado por un análisis cuidadoso de los resultados obtenidos. También aquí aparece un aspecto básico de la metodología científica: una investigación eficaz no sólo da solución a problemas sino que pone en evidencia otros que reclaman nuevas investigaciones.

4. LA MEJOR ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN SON VARIAS ESTRATEGIAS

El problema que vamos a desarrollar tiene la característica de que aunque, como veremos, el aparato matemático es elemental, la operativización y elaboración de estrategias suele plantear verdaderas dificultades a los alumnos, aún de niveles superiores, exigiendo una buena dosis de discusión y reflexión. Ya hemos mostrado su enunciado tradicional y su traducción (ver número 22), que es la siguiente: *«¿Cuánto tiempo estarán cruzándose dos trenes que circulan por vías paralelas?»*.

a) Planteamiento cualitativo y formulación de hipótesis

La descripción cualitativa de los alumnos suele referirse a dos trenes que circulan con rapidez constante, en el mismo sentido o en el opuesto, por vías paralelas y que se cruzan.



figuras 18 (arriba) y 19 (extremo derecha).

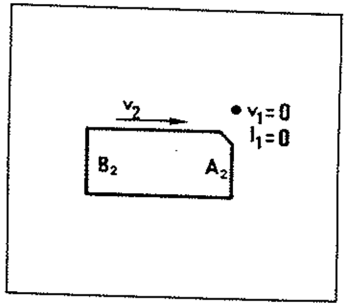
Debido a la longitud de los mismos, transcurrirá cierto tiempo durante el cual están cruzándose; el problema es calcular ese tiempo: Δt.

Como es evidente, esta descripción no supone una operativización del problema, debiéndose evitar continuar [dejando este aspecto para la estrategia], hasta que ésta se produzca. La traducción de la frase *estar cruzándose* al lenguaje operativo comporta un período de reflexión que conduce a los alumnos de 2.º de BUP, por ejemplo, a dar nombre a los extremos de los trenes y numerarlos, como se indica en la figura 18.

Si se supone que van en el mismo sentido, el tiempo que tardan en cruzarse será el tiempo que transcurre desde que el extremo A_2 del tren 2 [cuya velocidad se supone mayor] se halla en la misma posición que el extremo B_1 del tren 1, hasta que el extremo B_2 del tren 2 se halla en la misma posición que el extremo A_1 del tren 1.

Ahora ya es posible pasar a la formulación de hipótesis. Los alumnos expresan que el tiempo que están cruzándose dependerá de las velocidades v_1 y v_2, siendo mayor cuanto menor sea la diferencia entre éstas: $v_2 - v_1$ [la velocidad relativa], de manera que si ésta se anula, Δt será infinito, pues estarán uno frente a otro indefinidamente. El tiempo dependerá también de las longitudes de los trenes, l_1 y l_2, aumentando al aumentar éstas.

En la consideración de casos límites, también es factible una gran creatividad: la dependencia de Δt con los factores citados debe ser tal que si uno de los trenes se encuentra inmóvil y su longitud es nula: $v_1 = 0$ y $l_1 = 0$, Δt sería el tiempo que tarda el tren 2 en pasar por un punto fijo,



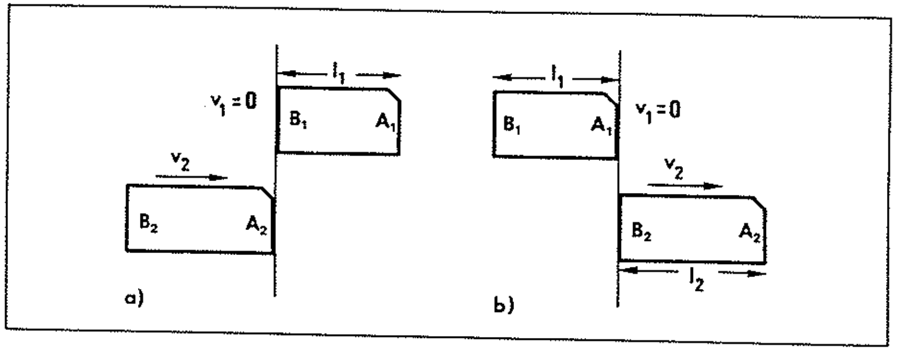


figura 20.

que evidentemente (ver figura 19) sería l_2/v_2. Análogamente, si $v_2 = 0$ y $l_2 = 0$, Δt sería l_1/v_1. Otro caso más complejo que también suele ser contemplado por los alumnos, se da cuando uno de los trenes está parado: $v_1 = 0$, pero su longitud l_1 no es nula (ver figura 20), entonces Δt sería el tiempo que tarda en desplazarse el extremo A_2 del tren 2 una distancia $l_1 + l_2$, es decir: $(l_1 + l_2)/v_2$. Análogamente si $v_2 = 0$, Δt será $(l_1 + l_2)/v_1$.

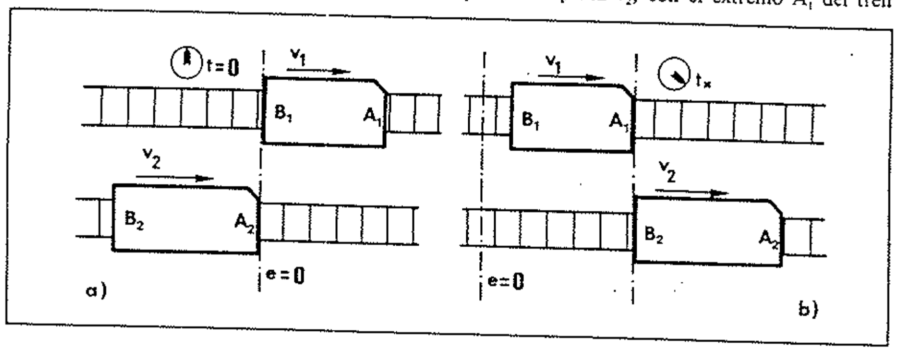
En caso de que estos últimos casos límites no surgieran en los grupos de trabajo, el profesor puede sugerirlos, preguntando qué ocurriría si uno de los trenes estuviera parado, etc.

b) Estrategias de resolución

Aunque la mayor dificultad ha sido salvada al operativizar el problema en el planteamiento cualitativo, la estrategia y la resolución exigen sistematización, siendo un buen ejercicio contra la precipitación y el desorden. En la reformulación de la puesta en común de los distintos grupos, la estrategia que habitualmente se propone es la siguiente: hallar el tiempo que transcurre desde que hacen *contacto* por primera vez los extremos hasta que hacen contacto por última vez.

La concreción de esta estrategia viene apoyada por croquis como los de la figura 21, donde los alumnos toman como origen de tiempos, el instante del primer contacto, y origen de espacios, el punto en que esto sucede, consistiendo la estrategia, pues, en hallar en qué instante, t*, se cruzarán el extremo B_2 del tren 2, que se mueve hacia la derecha con una rapidez v_2, con el extremo A_1 del tren

figura 21.



l_1 que se mueve también en sentido positivo con rapidez v_1. Habrá, por tanto, que escribir las ecuaciones de la posición de estos dos puntos respecto al mismo origen y hallar el instante en que la posición es la misma, es decir $e_{B2} = e_{A1}$.

Esta es una estrategia basada en la aplicación cuidadosa de las ecuaciones del movimiento a cada móvil utilizando el mismo sistema de referencia. Con mayor o menor complejidad, la mayoría de los problemas de cinemática pueden enfocarse así. Ello presenta indudables ventajas pero también el inconveniente de introducir un cierto mecanicismo y evitar la posible invención de procedimientos más sencillos o adecuados en algún caso concreto. Es sobre todo esencial habituar a los alumnos a no contentarse con un solo camino, con una sola estrategia de resolución. Y ello no sólo por favorecer una vez más el pensamiento divergente y evitar la rigidez en los enfoques, sino también porque la solución mediante más de un procedimiento se convierte en la forma más fiable de contrastar la validez de unos resultados. Por ello [y en contra de una cierta práctica didáctica consistente en potenciar en cada tipo de problema, de forma excluyente, un determinado procedimiento para *evitar que los alumnos se mareen*], creemos muy recomendable impulsar a la búsqueda de más de una estrategia en cada problema. En este caso concreto, puede aparecer [y debe, repetimos, inducirse a ello] otra estrategia tan válida como la primera: la de resolver el problema como el desplazamiento de A_2, con la velocidad relativa v_2-v_1, a lo largo de una distancia l_1+l_2, suma de las longitudes de ambos trenes.

c) Resolución propiamente dicha

Si tomamos el sentido positivo hacia la derecha, la ecuación de la posición de A_1 será: $e = v\,(t-t_o) + e_o$ y como para $t_o=0$, $e_o = l_1$ y $v = v_1$, sustituyendo queda $e_{A1} = v_1 t + l_1$.

Análogamente para el extremo B_2, para $t_o=0$, $e_o = -l_2$ y $v = v_2$, con lo que la ecuación se concreta en $e_{B2} = v_2 t - l_2$.

El instante de cruce, será aquel, t^*, para el que se cumpla que $e_{A1} = e_{B2}$ (ya que son posiciones medidas desde el mismo origen): $v_1\,t^* - l_1 = v_2\,t^* - l_2$,

de donde
$$t^* = \frac{l_1 + l_2}{v_2 - v_1}.$$

d) Análisis de resultados

Los alumnos no tienen ninguna dificultad en comprobar que se cumplen los casos límites concebidos en el planteamiento cualitativo, así, si v_1 y l_1 son nulos, el tiempo que tardan en cruzarse es l_2/v_2; si uno de los trenes está parado el tiempo de cruce, Δt, es l_1+l_2 dividido por la velocidad del otro, etc. Como perspectiva surge el estudio del mismo problema para el caso en que se muevan en sentidos opuestos. Se trataría, según el sistema de referencia elegido, de un mero cambio en el signo de una de las velocidades, quedando

$$\Delta t = \frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2}$$

que sería, como es lógico, menor que en el caso en el que van en el mismo sentido.

A la vista de los resultados, queda confirmada la validez de la estrategia que algunos apuntaban de modo directo y más intuitivo: el tiempo que están cruzándose es el tiempo que tardaría un móvil que tuviera la rapidez relativa de los trenes (v_2-v_1 si van en el mismo sentido y v_1+v_2 si van en sentidos opuestos) en recorrer la suma de sus longitudes (l_1+l_2).

5. UN PELIGRO FRECUENTE DURANTE LA RESOLUCIÓN: EL USO DE EXPRESIONES FUERA DE SU CAMPO DE VALIDEZ

Vamos a abordar un problema extraído de un libro de Física General, cuyo enunciado clásico es el número 78 de los propuestos en el capítulo anterior y el transformado es como sigue: *«Una escalera se apoya sobre un muro, ¿qué fuerza ejerce sobre el mismo?»*.

a) Planteamiento cualitativo y emisión de hipótesis

En primer lugar resulta evidente que si la escalera se apoya en el muro sin resbalar (figura 22) ha de ser debido a fuerzas de rozamiento y que en su ausencia la escalera resbalaría hasta quedar horizontal en el suelo. Esta fricción puede darse tanto en el suelo como en la pared, pero es posible plantearse el problema más sencillo de que sólo tenga importancia la fricción con el suelo (o, al menos, comenzar por plantear primero este caso).

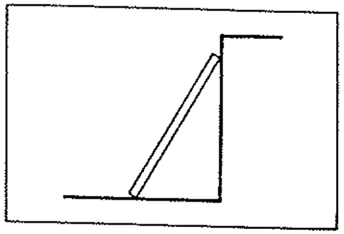
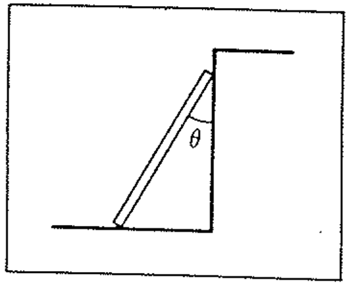


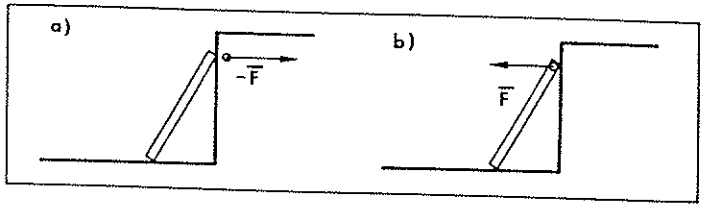
figura 22.

Con esta simplificación y admitiendo que la escalera es homogénea, podemos intentar resolver el problema pedido de determinar la fuerza $\vec{F}$ que la escalera ejerce sobre la pared (figura 23a), que ha de ser, por supuesto, igual a la que la pared ejerce sobre la escalera (figura 23b), identidad que permite centrar el problema en la escalera, objeto cuyo equilibrio es, por supuesto, más fácilmente abordable.

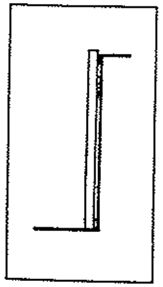
El problema planteado es, pues, encontrar el módulo de la fuerza $\vec{F}$ que la pared ejerce sobre la escalera. Cabe pensar que dicho valor dependerá del peso, mg, de la escalera. Si no fuera por dicha fuerza peso, la escalera apoyada no ejercería fuerza alguna sobre la pared o el suelo, ni habría rozamiento, etc.

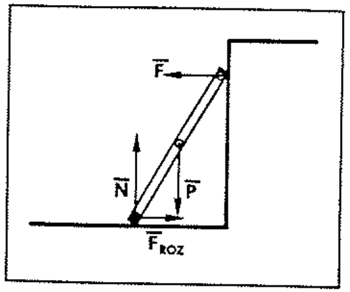
Por otra parte hay que considerar la influencia del ángulo. Más aún, es lógico suponer que el equilibrio sólo se dará dentro de ciertos límites del ángulo θ que forma la escalera con la pared (figura 24) y que si θ aumenta suficientemente (dependiendo de que el rozamiento sea más o menos grande) la escalera caerá. (Algunos alum-





figuras 23 (derecha) y 24 (extremo derecha).





figuras 25 (arriba) y 26 (extremo derecha).

nos recurren a materializar estas reflexiones con ayuda de un lápiz o una regla, etc., apoyados en la pared.) Es lógico pensar que $\vec{F}$ crezca de alguna forma con θ. De hecho para un ángulo nulo [escalera vertical: figura 25], $\vec{F}$ deberá ser nula. Pero a partir de cierto valor de θ la escalera dejará de estar en equilibrio y resbalará. Esto sucederá, ya lo hemos indicado, tanto más fácilmente cuanto menor sea la fricción del suelo (única considerada). Podría incluso pensarse [y algunos alumnos así lo hacen] que $\vec{F}$ depende de dicha fricción [es decir, del coeficiente μ de rozamiento], puesto que sin rozamiento la escalera resbalaría. Dicho de otro modo, sin fuerza de rozamiento ($\vec{F}_{roz}$) no puede pensarse en otra fuerza que equilibre a la $\vec{F}$ del muro sobre la escalera, puesto que las otras fuerzas concebibles, el peso mg y la del suelo $\vec{N}$ en ausencia de fricción son ambas verticales (figura 26).

Ello nos lleva a ver que determinar F es tanto como determinar la fuerza de rozamiento F_{roz}, puesto que el valor de ambas ha de coincidir en la situación de equilibrio [como han de coincidir los valores de N y mg]. El hecho de que F sea igual a la fuerza de rozamiento F_{roz} puede reforzar la idea de que F dependa del coeficiente μ. Se trata, sin embargo, de un error puesto que la fuerza de rozamiento no puede tomar su valor límite μN [que correspondería en caso de deslizamiento sobre el suelo], sino que ha de ser menor, pues en caso contrario ya no se daría el equilibrio. En definitiva, cabe pensar que F es función de m, g y θ pero no de μ:

$$F = f(m, g, \theta).$$

Podría también pensarse en la influencia de la longitud de la escalera, puesto que los momentos de las fuerzas cuyo equilibrio hay que estudiar dependen de las distancias de las fuerzas al punto que se considere. En este caso concreto, L no influye porque todos los momentos van a ser función de L. Pero esto no siempre resulta evidente a primera vista para los alumnos, por lo que se puede posponer la cuestión y aceptar $F = f(m, g, \theta, L)$.

b) Estrategias de resolución

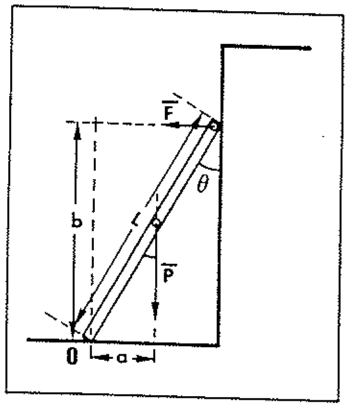
En este caso la estrategia consiste simplemente en aplicar las condiciones de equilibrio [es decir, fuerza resultante nula y momento resultante nulo] a la escalera.

La primera condición conduce, como ya hemos señalado, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan sobre la escalera (figura 26) a: $N = mg$ y $F = F_{roz}$. Esto, naturalmente, si nos ocupamos únicamente de los módulos de las fuerzas, sin entrar en un tratamiento vectorial en este caso innecesario.

Así pues, $F = F_{roz} < \mu mg$. Y es importante explicitar la desigualdad porque ello permite precisar las condiciones del problema y el campo de validez del resultado que se obtenga.

Para encontrar el valor de F hemos de recurrir a la segunda condición de equilibrio, calculando el momento resultante, bien respecto al punto de contacto de la escalera con el suelo (con lo que aparecerá F), o bien con la pared (con lo que aparecerá F_{roz}).

figura 27.



El resultado, por supuesto, ha de ser el mismo, lo que permitirá contrastarlo y afianzar su validez.

c) Resolución

Se trata de establecer la igualdad numérica de los momentos respecto al punto 0 (figura 27) teniendo particular cuidado en la consideración de los *brazos de palanca* de cada fuerza.

El momento de la fuerza peso [que designaremos por M_P] tendrá por módulo:

$$M_P = m\ g\ a = m\ g\ (L/2)\ \text{sen}\ \theta.$$

En cuanto al módulo del momento de F respecto al mismo punto valdrá:

$$M_F = F\ b = F\ L\ \cos\theta.$$

Y como el momento resultante debe ser cero, se debe cumplir la igualdad de los módulos:

$$m\ g\ \frac{L}{2}\ \text{sen}\ \theta = F\ L\ \cos\theta,$$

de donde:

$$F = ½\ m\ g\ \text{tg}\ \theta.$$

Si, por otra parte, se aplica la igualdad de los momentos respecto al punto de contacto de la escalera con la pared, se llega igualmente a

$$F_{roz} = ½\ m\ g\ \text{tg}\ \theta.$$

d) Análisis de los resultados

Además de la verificación que supone la obtención de F y F_{roz} cuyos resultados coinciden, puede estudiarse la influencia de los factores considerados al emitir hipótesis: m, g y θ aparecen como era previsto. La no aparición de L es ahora fácilmente interpretable al tiempo que se comprende que en caso de una situación más compleja, como la de un hombre subido a una escalera, F sí que dependería de L y de la distancia que determina la posición del hombre.

Puede constatarse que, de acuerdo con la hipótesis, para un peso nulo [m o g nulos], las fuerzas F y F_{roz} resultan nulas. En cuanto a la influencia del ángulo, vemos que para $\theta = 0°$ (escalera vertical sin apoyarse en la pared), F resulta cero, mientras que al aumentar θ, F y F_{roz} aumentan, como habíamos supuesto, si bien, como sabemos, el máximo valor de F_{roz} es μN, es decir, en este caso μmg. Alcanzado este valor la fuerza de fricción no crece ya, y la escalera resbalará. Los valores de θ, para los que puede darse el equilibrio, serán, pues, aquellos que cumplan:

$$\mu mg \geqslant ½\ m\ g\ \text{tg}\ \theta$$

de donde

$$\theta \leqslant \text{arc tg}\ 2\ \mu,$$

siendo el ángulo límite para que exista equilibrio

$$\theta_{lim} = \text{arc tg}\ 2\ \mu.$$

Dicho de otra manera, para un ángulo dado habrá equilibrio si el coeficiente de rozamiento es tal que

$$\mu > ½\ \text{tg}\ \theta.$$

El valor de μ sí es, pues, relevante en cuanto que determina los límites de validez de la expresión

$$F = F_{roz} = \frac{1}{2}\ mg\ tg\ \theta,$$

pero el valor de F resulta independiente de μ como se había razonado. Insistimos en ello porque [como ya se vio en el problema del coche que toma una curva] la tendencia a utilizar expresiones fuera de su campo de validez es uno de los peligros mayores a la hora de resolver problemas. Contribuye a ello la habitual resolución mecánica no acompañada de reflexión cualitativa ni de análisis de resultados. En efecto, si por error los alumnos asumen en este problema que la fuerza de rozamiento es μmg y dado que la fuerza solicitada F ha de ser igual, obtienen inmediatamente $F = \mu mg$. Pero esta expresión sólo puede aceptarse en ausencia de una mínima reflexión, es decir en ausencia de la emisión de hipótesis razonadas que el resultado ha de contrastar. Aquí, el resultado $F = \mu mg$ no da cuenta de la evidente influencia del ángulo, etc. La metodología que estamos mostrando se convierte así, en un procedimiento eficaz para salir al paso de fijaciones funcionales y concretamente para evitar el uso mecánico de expresiones usuales fuera de su campo de validez.

Si se desea ahora calcular F para los datos del enunciado clásico ($m = 20$ kg y $\theta = 30°$), que el profesor puede proporcionar a petición de los alumnos, se obtiene

$$F = \frac{1}{2} \times 20 \times 9{,}8 \times tg\ 30° \simeq 56{,}6\ N,$$

es decir el equivalente al peso de unos 6 kg. Esto exige que el coeficiente de rozamiento sea superior a ½ tg 30°, es decir, superior a 0,29, valor perfectamente plausible.

Es ahora posible, utilizando estrategias similares, abordar problemas más complejos como el siguiente, propuesto por un grupo de alumnos: *«¿hasta qué altura puede subir un hombre por una escalera apoyada en la pared sin que la escalera resbale?».*

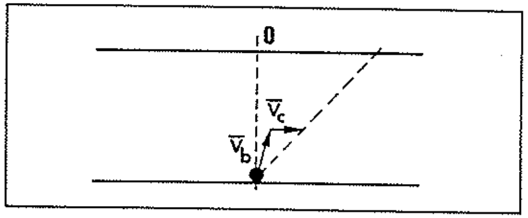
6. EL ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS: UN PROCESO CREATIVO

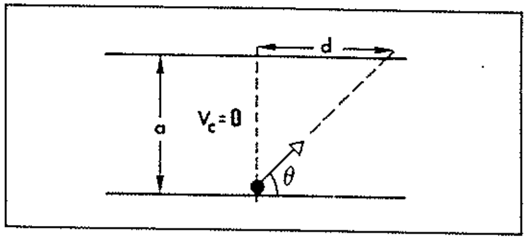
A través de los ejemplos desarrollados hemos ido centrando la atención en uno u otro aspecto del modelo propuesto para la resolución de problemas como investigación. Queremos ahora referirnos, por último, al análisis de los resultados, cuyo papel [íntimamente asociado al de emisión de hipótesis] ha sido ya resaltado. Pretendemos así poner en evidencia el carácter creativo [y no simplemente de contrastación] que dicho análisis puede llegar a tener. Para ello, partiremos del siguiente enunciado (número 51 del capítulo anterior): *«Una barca parte de la orilla de un río para atravesarlo. ¿A qué punto de la otra orilla llegará?».*

a) Planteamiento cualitativo y formulación de hipótesis

Al plantearse este problema, la mayor parte de las propuestas coinciden en imaginar una barca desplazándose con rapidez constante en un río [que consideran rectilíneo], cuya corriente es también de rapidez constante. Son simplificaciones lógicas que coinciden con las que plantean los enunciados habituales. Pueden, sin embargo, aparecer algunas diferencias de enfoque: algunos grupos consideran la barca orientada perpendicularmente a la orilla (y, por tanto, a la corriente) y otros consideran una situación más general, imaginando que la barca forma un ángulo cualquiera con la orilla que dependerá del punto que se desea alcanzar (figura 28).

figura 28 (abajo) y 29 (extremo inferior).





En cualquier caso, el problema se concreta en determinar la distancia d [la deriva] desde el punto de llegada hasta el punto 0 donde hubiera llegado la barca si navegara perpendicularmente a la orilla y no existiera corriente.

Los alumnos continúan estableciendo, sin dificultad, las hipótesis, que se refieren a la dependencia de la deriva (d) respecto de la velocidad de la barca (v_b) y de la corriente (v_c), así como del ángulo de orientación (θ) y de la anchura del río (a). Estas hipótesis son precisadas añadiendo que d aumentará al hacerlo v_c, de modo que si v_c es muy grande, también lo será d, mientras que si $v_c = 0$ [no hay corriente], y la barca avanza perpendicularmente ($\theta = 90°$), entonces la deriva será nula. Un grupo planteó la situación en que la velocidad de la corriente (v_c) fuera nula y θ un ángulo cualquiera, avanzando que en ese caso, ver figura 29, la deriva sería:

$$d = a\ tg\ (\pi/2 - \theta) = a\ cotg\ \theta = a/tg\ \theta.$$

De igual modo afirman que si la anchura fuera nula ($a = 0$) la deriva sería nula y que si la barca partiera paralelamente a la orilla ($\theta = 0°$), d sería infinita (no llegaría a la otra orilla). Por último, debe cumplirse que cuanto mayor sea la rapidez de la barca (v_b) menor será la deriva para un án-

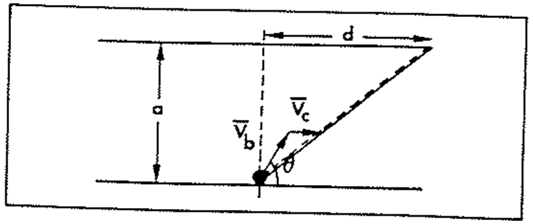


figura 30.

gulo determinado, y que si v_b fuera nula, la deriva sería *infinita*, pues la barca sería arrastrada por la corriente, paralela a la orilla, y nunca alcanzaría la orilla opuesta.

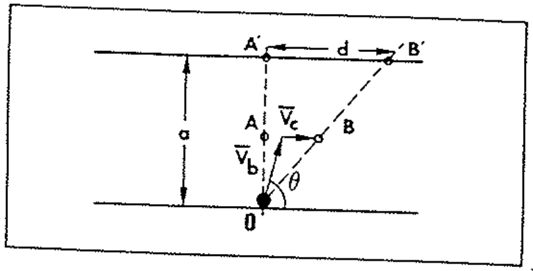
Al final de esta etapa, el croquis elaborado es como el que muestra la figura 30, donde $\vec{v}_b$ es el vector velocidad de la barca respecto a la corriente [respecto a un sistema de referencia fijo al agua] y $\vec{v}_c$ el vector velocidad de la corriente respecto a un sistema de referencia fijo en la tierra.

b) Elaboración de estrategias

Se trata de un problema cinemático que los alumnos proponen, básicamente, resolver según dos estrategias diferentes:

b.1) Se trata de hallar el vector posición: $\vec{r} = f(t)$ de la barca respecto a un sistema de referencia adecuado [que en este caso es uno con el origen en el punto de salida de la barca, el eje X paralelo a la orilla y el Y perpendicular a las mismas], cuya componente x en el instante en que la barca llega a la otra orilla es la distancia buscada. Dicho instante se puede calcular teniendo en cuenta que es aquél en que la componente y del vector posición es igual a la anchura (a) de río.

figura 31.



b.2) Suelen surgir, también, estrategias basadas en la geometría, que pueden resumirse en consideraciones de semejanza entre los triángulos OAB y OA'B' de la figura 31, así: OA/AB = OA'/A'B', que físicamente significa que la proporción entre la distancia avanzada transversalmente a la orilla y el desplazamiento lateral es constante [aunque esto sólo es válido si las velocidades son constantes].

c) Resolución

c.1) Como es lógico, los alumnos hallan primero el vector velocidad, que en el sistema de referencia elegido será:

$$v = v_b + v_c =$$

$$= (v_b \cos\theta,\ v_b \operatorname{sen}\theta) + (v_c,\ 0) =$$

$$= (v_b \cos\theta + v_c,\ v_b \operatorname{sen}\theta),$$

y a partir de aquí obtienen el vector posición:

$$\vec{r} = [(v_b \cos\theta + v_c)\ t,\ v_b\ t \operatorname{sen}\theta]$$

El instante (t^*) en que llega a la otra orilla será aquél en que se cumpla que $v_b\ t^* \operatorname{sen}\theta = a$, de donde $t^* = \dfrac{a}{v_b \operatorname{sen}\theta}$, que sustituido en la componente x, conduce a:

$$d = \frac{v_b \cos\theta + v_c}{v_b \operatorname{sen}\theta}\ a \qquad [1]$$

c.2) La resolución geométrica es inmediata a partir de la figura 31:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{AB'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_b \operatorname{sen}\theta}{a} = \frac{v_b \cos\theta + v_c}{d}$$

de donde se deduce que:

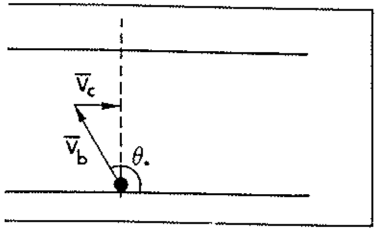
$$d = \frac{v_b \cos\theta + v_c}{v_b \operatorname{sen}\theta}\ a \qquad [1]$$

d) Análisis de resultados

En primer lugar, hay que referirse a la obtención del mismo resultado con los dos procedimientos de resolución utilizados y a la homogeneidad dimensional de la expresión obtenida. Por otra parte, d resulta ser, efectivamente, función de v_b, v_c, a, y θ, como se había hipotetizado. Más aún, d crece con la anchura del río, a, siendo nula si a es nula. La influencia del ángulo está también de acuerdo con lo previsto: si θ es nulo [es decir, si la barca se desplaza paralela a la orilla], no llegará nunca a la otra orilla: $d \rightarrow \infty$. El resto de casos límites avanzados también son contemplados por el resultado:

- si $\theta = 90°$ y $v_c = 0$ [barca cruzando perpendicularmente a las orillas sin corriente]: d vale cero.
- si no hay corriente ($v_c = 0$), la deriva vale $a/\operatorname{tg}\theta$.

Naturalmente, son posibles muchas más situaciones de interés y es muy conveniente impulsar a los alumnos a contemplarlas con objeto de convertir, también, el análisis de los resultados en una tarea creativa que no se limite a la contrastación de las hipótesis. Se trata, en definitiva, de concebir situaciones que presenten algún interés y que, a menudo, suponen plantear nuevos problemas, dar pie a nuevas investigaciones —como ya hemos visto en alguno de los otros problemas desarrollados—. En el caso que nos ocupa, la invitación del profesor a considerar alguna situación de particular interés práctico, conduce a que los alumnos planteen la cuestión del ángulo (θ_*) con que ha de salir la barca para atravesar perpendicularmente el río cuando hay corriente. La figura 32 muestra el esquema de velocidades para que esto ocurra. Como puede verse, θ_* ha de ser mayor que 90° y $v_b > v_c$. Los alumnos, de la expresión [1], haciendo $d = 0$, obtienen $\cos\theta_* = -v_c/v_b$, que, como vemos, indica que θ_* es mayor que 90° y que sólo existe si $v_c \leqslant v_b$, coincidiendo con la reflexión física previa.



La consideración de casos límites o de especial interés físico se convierte así en un útil esencial para profundizar en la comprensión de la situación física estudiada, emitir hipótesis contrastables, analizar los resultados y plantear nuevos problemas, convirtiendo cada una de estas tareas en un proceso creativo que exige tanto imaginación e inventiva como rigor y precisión.

Interrumpimos aquí la descripción de ejemplos resueltos para no sobrepasar los límites de esta breve introducción a la didáctica de resolución de problemas. Cualquiera de los ejemplos enumerados en el capítulo anterior puede abordarse del mismo modo y de hecho todos ellos han sido resueltos por distintos grupos de alumnos. Queremos, sin embargo, referirnos [y a ello dedicamos el capítulo siguiente] a la cuestión esencial de la aplicabilidad del método con los alumnos de niveles más elementales.