



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

MODELO MORFOLÓGICO DETERMINISTA.
APLICACIÓN PARA EL DISEÑO Y LA
FABRICACIÓN ASISTIDOS POR
ORDENADOR

Rubén Sarabia Pérez



Tesis

Doctorales

www.eltallerdigital.com

UNIVERSIDAD de ALICANTE

TESIS DOCTORAL

**MODELO MORFOLÓGICO
DETERMINISTA. APLICACIÓN PARA EL
DISEÑO Y LA FABRICACIÓN ASISTIDOS
POR ORDENADOR**



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Dpto. de Tecnología Informática y Computación



TESIS DOCTORAL

**MODELO MORFOLÓGICO DETERMINISTA.
APLICACIÓN PARA EL DISEÑO Y LA
FABRICACIÓN ASISTIDOS POR ORDENADOR**

Presentada por

RUBÉN SARABIA PÉREZ

Dirigida por

DR. ANTONIO MANUEL JIMENO MORENILLA

DR. RAFAEL MOLINA CARMONA

DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍA INFORMÁTICA Y COMPUTACIÓN

SEPTIEMBRE 2012

*Dedicado a mis padres, **Francisco de Asís** y **M^a Ángeles**, dioses de todos los mundos que conozco. A mi hermana **Alicia** y a mi abuelo **Francisco Sarabia**, partes indivisibles de mí.*



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Agradecimientos

A mis directores de Tesis, Antonio Jimeno y Rafael Molina, por involucrarse hasta en el mínimo detalle de mi trabajo. Sin su entrega este trabajo no hubiera sido posible.

Ibi, 20 de Septiembre de 2012.

Rubén Sarabia



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

“Al final todo va a salir bien y si no sale bien es que aún no es el final”

Anónimo



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Índice de Contenidos

AGRADECIMIENTOS	4
ÍNDICE DE CONTENIDOS	6
LISTADO DE FIGURAS	11
RESUMEN	16
ABSTRACT	17
RESUM	18
<u>CAPÍTULO PRIMERO</u>	<u>19</u>
INTRODUCCIÓN	19
1.1 MOTIVACIÓN	20
1.1.1 SISTEMAS CAD/CAM	21
1.1.2 FABRICACIÓN INDUSTRIAL	22
1.2 MODELADO MORFOLÓGICO PARA EL DISEÑO Y FABRICACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES	25
1.3 OBJETIVOS	26
1.4 ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO	29
<u>CAPÍTULO SEGUNDO</u>	<u>31</u>
ESTADO DEL ARTE	31
2.1 INTRODUCCIÓN	32
2.2 MODELOS GEOMÉTRICOS	34

2.2.1 INTRODUCCIÓN	34
2.2.2 CLASIFICACIÓN DE MODELOS GEOMÉTRICOS	36
2.2.3 MODELOS TOPOLÓGICOS	38
2.2.4 MODELOS SUPERFICIALES	39
2.2.5 MODELOS SÓLIDOS	46
2.3 MECANIZADO	53
2.3.1 INTRODUCCIÓN	53
2.3.2 TIPOS DE CONTROL NUMÉRICO	54
2.3.3 PROCESO DE MECANIZADO	55
2.3.4 MÁQUINAS HERRAMIENTA	57
2.3.5 PROBLEMÁTICA GENERAL DEL PROCESO DE MECANIZADO	59
2.3.6 ESTRATEGIAS DE MECANIZADO	61
2.3.7 CÁLCULO DE TRAYECTORIAS	65
2.4 MORFOLOGÍA MATEMÁTICA	73
2.4.1 INTRODUCCIÓN	73
2.4.2 OPERACIONES MORFOLÓGICAS	74
2.4.3 APLICACIONES DE LA MORFOLOGÍA MATEMÁTICA	76
2.4.4 MORFOLOGÍA MATEMÁTICA EN TRES DIMENSIONES	78
2.4.5 MORFOLOGÍA MATEMÁTICA EN LA MECANIZACIÓN INDUSTRIAL	79
2.5 REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE. LIMITACIONES DE LOS MODELOS EXISTENTES	81

2.6 EL MODELO SUPERFICIE-TRAYECTORIA Y EL MODELO TOPOLÓGICO DEL PROCESO DE FABRICACIÓN	82
2.6.1 MODELO SUPERFICIE-TRAYECTORIA	82
2.6.2 MODELO TOPOLÓGICO DEL PROCESO DE FABRICACIÓN	85
<u>CAPÍTULO TERCERO</u>	89
MODELO MORFOLÓGICO DETERMINISTA (MMD)	89
3.1. INTRODUCCIÓN	90
3.2 FORMALIZACIÓN DEL MARCO MORFOLÓGICO.	95
3.2.1 OPERACIONES MORFOLÓGICAS DE TRANSFORMACIÓN DETERMINISTAS	99
<u>CAPÍTULO CUARTO</u>	145
APLICACIÓN DEL MMD AL DISEÑO Y A LA FABRICACIÓN	145
4.1 INTRODUCCIÓN	146
4.2 OPERACIONES PARA EL CAD/CAM	148
4.2.1 DISEÑO POR TRAYECTORIA	148
4.2.2 DIGITALIZACIÓN POR TRAYECTORIA	154
4.2.3 OPTIMIZACIÓN DE TRAYECTORIA	156
4.2.4 RECONSTRUCCIÓN DE LA PIEZA	159
4.2.5 RESIDUO DE FABRICACIÓN	161
<u>CAPÍTULO QUINTO</u>	165
IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL MMD PARA EL DISEÑO POR TRAYECTORIA	165

5.1 INTRODUCCIÓN	166
5.2 DEFINICIÓN DEL MODELO COMPUTACIONAL	169
5.2.1 DISCRETIZACIÓN DE LA TRAYECTORIA	170
5.2.2 OBTENCIÓN DE DISTANCIA OBJETO – ELEMENTO ESTRUCTURANTE	172
5.2.3 DISCRETIZACIÓN DE SUPERFICIES	176
5.3 IMPLEMENTACIÓN DEL DISEÑO POR TRAYECTORIA	178
5.3.1 MODELO BIDIMENSIONAL.	179
5.3.2 MODELO TRIDIMENSIONAL.	185
5.4 EXPERIMENTACIÓN	204
<u>CAPÍTULO SEXTO</u>	<u>209</u>
CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	209
6.1 CONCLUSIONES	210
6.2 TRABAJO FUTURO	213
6.3 PUBLICACIONES	215
<u>APÉNDICE</u>	<u>217</u>
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	217

Listado de Figuras

<i>Figura 1. Factores que intervienen en el mecanizado con máquinas herramienta.</i>	23
<i>Figura 2. Cuerpo geométrico sin homogeneidad tridimensional</i>	36
<i>Figura 3. Ejemplo de cuerpo sólido (cubo)</i>	37
<i>Figura 4. Cubo en modelo alámbrico</i>	38
<i>Figura 5. Ambigüedad de diseño en el modelo alámbrico</i>	39
<i>Figura 6. Cubo en modelo superficial</i>	40
<i>Figura 7. Concepto de producto vectorial</i>	43
<i>Figura 8. Malla triangular representando a un delfín</i>	44
<i>Figura 9. Ejemplo de superficie paramétrica BSpline</i>	45
<i>Figura 10. Barrido por extrusión (1), por revolución (2) y generalizado (3)</i>	47
<i>Figura 11. Proceso de construcción de sólido por CSG</i>	48
<i>Figura 12. Voxelización de un espacio</i>	50
<i>Figura 13. Ejemplo de voxelización</i>	51
<i>Figura 14. Pasos de construcción de árbol BSP</i>	52
<i>Figura 15. Simulación de mecanizado por fresado</i>	56
<i>Figura 16. Fresas de mecanizado con distinta geometría</i>	56
<i>Figura 17. Simulación del proceso de torneado</i>	58
<i>Figura 18. Programación CNC y trayectoria de herramienta equivalente.</i>	60
<i>Figura 19. Estrategias de mecanizado por profundidad</i>	63
<i>Figura 20. Estrategias de mecanizado por trayectoria</i>	65
<i>Figura 21. Mecanizado en exceso de material debido a error de interpolación</i>	66
<i>Figura 22. Problema precisión por distancia excesiva entre pasadas</i>	66
<i>Figura 23. Mecanizado excesivo de material debido a introducción de herramienta demasiado grande</i>	67
<i>Figura 24. Problema del compensado con una herramienta esférica (1) y con una herramienta cilíndrica (2)</i>	68
<i>Figura 25. Problema del mecanizado isoparamétrico</i>	70
<i>Figura 26. Ejemplos de elementos estructurantes básicos</i>	74
<i>Figura 27. Erosión morfológica</i>	75
<i>Figura 28. Dilatación morfológica</i>	75
<i>Figura 29. Erosión y Dilatación Morfológica en imagen en escala de grises</i>	76
<i>Figura 30. Erosión y Dilatación Morfológica en imagen binaria</i>	77
<i>Figura 31. Ejemplo de suavizado de formas mediante operación morfológica</i>	77
<i>Figura 32. Cálculo de offset mediante operación morfológica de dilatación</i>	79

<i>Figura 33. Ejemplos de cálculo de offsets utilizando morfología matemática</i>	80
<i>Figura 34. Herramientas virtuales de rotación y barrido</i>	83
<i>Figura 35. Ejemplo intuitivo de emulación de herramientas virtuales</i>	84
<i>Figura 36. Mecanizado de objeto rectangular (a) con herramienta circular (b) siguiendo una trayectoria (c)</i>	86
<i>Figura 37. Proceso de mecanizado en el MTF</i>	87
<i>Figura 38. Proceso de fabricación</i>	91
<i>Figura 39. Cálculo de erosión morfológica (resultado en gris)</i>	92
<i>Figura 40. Erosión morfológica clásica no determinista de un objeto circular por otro objeto circular (resultado en negro)</i>	93
<i>Figura 41. Erosión morfológica determinista de un objeto circular por otro objeto circular (resultado en discontinuo)</i>	93
<i>Figura 42. Estructura general del Modelo Morfológico Determinista</i>	94
<i>Figura 43. Proceso de cálculo de contorno</i>	97
<i>Figura 44. Operaciones morfológicas de transformación</i>	98
<i>Figura 45. Escenario inicial de operación morfológica</i>	100
<i>Figura 46. Contacto del elemento estructurante con objeto</i>	101
<i>Figura 47. Contacto del elemento estructurante con un punto frontera del objeto con el elemento estructurante incluido en el objeto</i>	101
<i>Figura 48. Conjunto de puntos no accesibles por el elemento estructurante</i>	102
<i>Figura 49. Contacto del elemento estructurante con un punto superficial del objeto con diferente orientación</i>	103
<i>Figura 50. Diferentes puntos de contacto de B con A tras modificar la orientación de A.</i>	103
<i>Figura 51. Transformaciones de orientación</i>	104
<i>Figura 52. Punto de superficie inaccesible para el elemento estructurante</i>	105
<i>Figura 53. Ejemplo de punto frontera inaccesible</i>	106
<i>Figura 54. Transformación adicional de posición que facilita el contacto del elemento estructurante</i>	107
<i>Figura 55. Modificación de posición de objeto para facilitar el contacto del elemento estructurante</i>	107
<i>Figura 56. Cálculo del punto q en la operación básica instantánea</i>	112
<i>Figura 57. Descripción geométrica de la operación básica instantánea</i>	114
<i>Figura 58. Ejemplo de erosión morfológica clásica</i>	117
<i>Figura 59. Distancia mínima a calcular en a) erosión morfológica, b) dilatación morfológica</i>	118
<i>Figura 60. Operaciones básicas instantáneas con distinto valor paramétrico</i>	118

<i>Figura 61. Ejemplo de erosión morfológica con trayectoria</i>	119
<i>Figura 62. Erosión morfológica clásica vs morfológica con trayectoria</i>	120
<i>Figura 63. Cálculo de puntos de la frontera de la erosión morfológica</i>	122
<i>Figura 64. Ejemplos de erosiones parciales con trayectoria</i>	124
<i>Figura 65. Ejemplo de dilatación morfológica clásica</i>	125
<i>Figura 66. Representación de cálculo de distancia mínima en dilatación</i>	125
<i>Figura 67. Dilatación con trayectoria de rectángulo con objeto circular</i>	126
<i>Figura 68. Cálculo de puntos de la frontera de la dilatación morfológica</i>	127
<i>Figura 69. Ejemplos de dilataciones parciales con trayectoria</i>	130
<i>Figura 70. Caso concreto de erosión con trayectoria</i>	131
<i>Figura 71. Caso concreto de dilatación con trayectoria</i>	132
<i>Figura 72. Teorema del Adjunto en operadores con trayectoria</i>	132
<i>Figura 73. Operación morfológica de apertura</i>	134
<i>Figura 74. Apertura con trayectoria de rectángulo con objeto circular</i>	135
<i>Figura 75. Ejemplo de apertura con trayectoria parcial</i>	135
<i>Figura 76. Cierre morfológico clásico</i>	136
<i>Figura 77. Cierre con trayectoria de rectángulo con objeto circular</i>	137
<i>Figura 78. Ejemplo de cierre con trayectoria parcial</i>	137
<i>Figura 79. Ejemplo de aplicación de gradiente morfológico</i>	138
<i>Figura 80. Ejemplo de gradiente morfológico con trayectoria</i>	139
<i>Figura 81. Aplicación del gradiente morfológico parcial</i>	139
<i>Figura 82. Suavizado morfológico clásico. a) Apertura morfológica, b) Cierre morfológico, c) Resultado final</i>	140
<i>Figura 83. Ejemplo de suavizado morfológico con trayectoria</i>	141
<i>Figura 84. Ejemplo de suavizado morfológico parcial con trayectoria</i>	141
<i>Figura 85. Ejemplo de operación morfológica Hit/Miss.</i>	143
<i>Figura 86. Ejemplo de operación morfológica Hit/Miss.</i>	144
<i>Figura 87. Proceso de fabricación en el modelo geométrico clásico</i>	148
<i>Figura 88. Proceso de fabricación diseñando por trayectoria</i>	149
<i>Figura 89. Mecanizado mediante Erosión Morfológica</i>	150
<i>Figura 90.- Mecanizado con herramienta circular de trayectoria abierta</i>	151
<i>Figura 91. Erosión parcial morfológica como subconjunto de la erosión total</i>	152
<i>Figura 92. Dilatación con trayectoria de segmento simple con elemento estructurante circular</i>	152
<i>Figura 93. Proceso de cálculo de erosión parcial regularizada</i>	153
<i>Figura 94. Duplicado de una pieza elíptica empleando la operación morfológica de dilatación con trayectoria.</i>	156

<i>Figura 95. Trayectoria de mecanizado con posiciones no útiles</i>	158
<i>Figura 96. Optimización de trayectoria</i>	159
<i>Figura 97. Reconstrucción de la pieza</i>	161
<i>Figura 98. Residuo de fabricación</i>	163
<i>Figura 99. Esquema modular del sistema computacional</i>	168
<i>Figura 100. Ejemplos de trayectorias paramétricas</i>	171
<i>Figura 101. Ejemplo de discretización de trayectoria circular</i>	172
<i>Figura 102. Cálculo continuo de distancia</i>	173
<i>Figura 103. Cálculo discreto de distancia</i>	174
<i>Figura 104. Cálculo de distancia entre objetos [Jimeno, 03]</i>	175
<i>Figura 106. Dilatación de trayectoria de erosión</i>	180
<i>Figura 107. Trayectoria de erosión sobre un objeto</i>	181
<i>Figura 107. Dilatación de trayectoria por barrido en extremos</i>	182
<i>Figura 108. Dilatación del segmento superior de un rectángulo</i>	182
<i>Figura 110. Eliminación de puntos no válidos en el cálculo de dilatación</i>	184
<i>Figura 110. Ejemplo de dilatación 2D compleja</i>	184
<i>Figura 111. Proceso de erosión parcial 2D</i>	185
<i>Figura 112. Sentidos de giro de la erosión 3D</i>	186
<i>Figura 113. Normales de las rotaciones que representan la dilatación 3D</i>	186
<i>Figura 114. Barridos laterales y frontales que representan la dilatación tridimensional con herramienta esférica</i>	186
<i>Figura 115. Detalle de puntos interiores de la dilatación</i>	187
<i>Figura 116. Resultado de la operación morfológica determinista</i>	188
<i>Figura 117. Ejemplo de trayectoria de erosión</i>	189
<i>Figura 118. Contorno de erosión complejo</i>	189
<i>Figura 119. Superficie de recorte de una trayectoria de erosión lineal</i>	190
<i>Figura 120. Superficie de recorte de una trayectoria de erosión curva</i>	190
<i>Figura 121. Triangulación de la superficie</i>	191
<i>Figura 122. Superficie de erosión</i>	191
<i>Figura 123. Erosión 3D</i>	192
<i>Figura 124. Vista inferior de la superficie de erosión</i>	192
<i>Figura 125. Vista frontal de la superficie de erosión</i>	193
<i>Figura 126. Error en el cálculo de barridos en unión de segmentos</i>	194
<i>Figura 128. Barridos angulares entre segmentos</i>	194
<i>Figura 129. Eliminación de puntos que entran en conflicto</i>	195
<i>Figura 129. Erosión eliminando intersecciones entre arcos</i>	195
<i>Figura 130. Ejemplos de trayectorias complejas</i>	196

<i>Figura 132. Test 1 de coste computacional</i>	198
<i>Figura 133. Test 2 de coste computacional</i>	199
<i>Figura 134. Test 3 de coste computacional</i>	200
<i>Figura 135. Test 4 de coste computacional</i>	201
<i>Figura 136. Test 5 de coste computacional</i>	202
<i>Figura 136. Ejemplos de la erosión parcial 2D</i>	204
<i>Figura 137. Ejemplos de la erosión parcial regularizada 3D</i>	205
<i>Figura 138. Ejemplos de la erosión parcial regularizada 3D</i>	206
<i>Figura 139. Vistas de la erosión parcial regularizada 3D</i>	207
<i>Figura 140. Ejemplos de la erosión parcial regularizada 3D</i>	208



Resumen

En esta memoria se propone un nuevo modelo geométrico capaz de soportar los requerimientos de una aplicación CAD/CAM de diseño y mecanizado de piezas tridimensionales.

Tras realizar un análisis detallado del estado del arte de los modelos existentes en la actualidad y de la problemática inherente al proceso de mecanizado, se llega a la conclusión de que es necesario realizar un esfuerzo investigador que permita definir un nuevo paradigma geométrico que aborde globalmente el proceso de diseño y mecanizado de objetos, resolviendo así algunas de las principales carencias con las que cuentan los modelos existentes.

En esta investigación se presenta el Modelo Morfológico Determinista (MMD), modelo geométrico que permite modelar procesos dinámicos a partir del marco formal que presenta la morfología matemática.

Para demostrar la validez y operatividad del modelo se presenta un sistema computacional que, desarrollando los principios propios del MMD, implementa una aplicación realista de diseño y fabricación de objetos tridimensionales. El entorno computacional ofrece soluciones al diseño de objetos complejos y soporte aritmético a la generación de trayectorias de fabricación, uno de los problemas más complejos que se presentan actualmente en el CAD/CAM.

Abstract

In this piece of work we propose a new geometric model capable of supporting the requirements of a CAD/CAM application for designing and manufacturing three-dimensional pieces.

After a detailed analysis of the state of the art of existing models and of the problems inherent in the machining process, it is concluded that it is necessary to carry out a research effort to define a new geometric paradigm that globally addresses the process of designing and manufacturing of objects, solving this way some of the principal lacks that the existing models have.

This research presents the Deterministic Morphological Model (DMM), geometric model that allows modeling dynamic processes from the formal framework that presents the mathematical morphology.

To demonstrate the validity and operability of the model we present a computational system that, developing the principles inherent in the MMD, implements a realistic application of design and manufacturing of three-dimensional objects. The computational environment provides solutions to the design of complex objects and arithmetic support to the generation of paths of manufacturing, one of the most complex problems that are currently found in the CAD / CAM systems.

Resum

En aquesta memòria es proposa un nou model geomètric capaç de suportar els requeriments d'una aplicació CAD/CAM de disseny i mecanitzat de peces tridimensionals.

Després de realitzar una anàlisi detallada de l'estat de l'art dels models existents en l'actualitat i de la problemàtica inherent al procés de mecanitzat, s'arriba a la conclusió que és necessari realitzar un esforç investigador que permetisca definir un nou paradigma geomètric que aborde globalment el procés de disseny i mecanitzat d'objectes, resolvent així algunes de les principals carències amb què compten els models existents.

En aquesta investigació es presenta el Model Morfològic Determinista (MMD), model geomètric que permet modelar processos dinàmics a partir del marc formal que presenta la morfologia matemàtica.

Per a demostrar la validesa i operativitat del model es presenta un sistema computacional que, desenvolupant els principis propis del MMD, implementa una aplicació realista de disseny i fabricació d'objectes tridimensionals. L'entorn computacional ofereix solucions al disseny d'objectes complexos i suport aritmètic a la generació de trajectòries de fabricació, un dels problemes més complexos que es presenten actualment en el CAD/CAM.

Capítulo Primero

Introducción



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

1.1 Motivación

Mi interés por los sistemas de fabricación asistidos por ordenador me condujo en el año 2000 al despacho de Antonio Jimeno en la Universidad de Alicante con el fin de acordar una línea de trabajo para el proyecto final de mi Ingeniería Superior Informática. Fruto de aquellas conversaciones inicié una beca de investigación en el Instituto Tecnológico Español del Calzado y Conexas (INESCOP) para estudiar la problemática del diseño y fabricación de hormas de calzado. Finalizado el tiempo de la beca mi relación profesional con INESCOP se amplió y pasé a formar parte de la plantilla de este instituto tecnológico de investigación.

Fueron los años trabajados en INESCOP los que despertaron en mí el interés por un proceso productivo que no había sido adaptado suficientemente a los modernos sistemas de fabricación asistidos por ordenador: el proceso de diseño y fabricación de suelas de calzado por mecanizado.

El proceso de fabricación de una suela de calzado se basa en la inyección o moldeo de uno o varios materiales termoplásticos (PVC, poliuretano, caucho, goma, EVA o cuero generalmente) en una máquina de compresión. En la mayoría de los casos, la materia prima está granulada y es fundida a temperaturas que varían entre los 100°C y los 170°C para luego ser vertida en la cavidad de moldeo que se constituye tras la unión programada de dos moldes de aluminio, acero o zamac. En ese momento el material es enfriado mediante circuitos de refrigeración, solidificándose y conformándose finalmente una pieza del objeto diseñado.

El procedimiento es similar al utilizado en la inyección de artículos plásticos como juguetes o fiambreras, productos que han representado históricamente al tejido industrial de Ibi y alrededores. Desde mi infancia me he interesado por este proceso de fabricación, no en vano gran parte de mi familia se ha dedicado históricamente a la fabricación de herramientas de moldeo para la inyección de termoplásticos. La fabricación de este tipo de moldes se basa en la transformación por contacto de una pieza semielaborada de acero con una serie de

herramientas de mecanizado que erosionan la pieza al desplazarse sobre ella, siguiendo una serie de trayectorias de mecanizado definidas previamente por el operario.

La familiaridad del proceso junto con las importantes carencias detectadas al analizar las aplicaciones específicas de diseño de suelas y en extensión los modelos de diseño y fabricación de objetos, alimentaron mi interés por el proceso y aconsejaron dedicar un esfuerzo investigador más profundo.

1.1.1 Sistemas CAD/CAM

La continua evolución de la tecnología industrial ha incrementado paralelamente los requerimientos de la industria asociada. Los sistemas CAD/CAM son ya un elemento fundamental del tejido tecnológico y van evolucionando conforme lo hace la tecnología.

Como diseño asistido por computador (CAD, acrónimo de Computer Aided Design) se entiende al uso de un amplio rango de herramientas computacionales que proporcionan asistencia en el diseño de modelos específicos para la industria.

Cuando los sistemas CAD se conectan a equipos de fabricación también controlados por ordenador conforman un sistema integrado CAD/CAM (CAM, acrónimo de Computer Aided Manufacturing). La fabricación asistida por ordenador ofrece significativas ventajas con respecto a los métodos más tradicionales de control de equipos de fabricación. Por lo general, los equipos CAM conllevan la eliminación de los errores del operador y la reducción de los costes de mano de obra. Además, la precisión constante y el uso óptimo previsto del equipo representan ventajas aún mayores.

Los sistemas CAD/CAM son aprovechados por los diseñadores, ingenieros y fabricantes adaptando sus características a las necesidades específicas de sus situaciones, sin embargo la mayoría de los sistemas CAD/CAM actuales tienen un propósito general, son aplicaciones extensas que buscan abarcar una gran cantidad de tareas. Para ello estos sistemas están dotados de gran cantidad de herramientas y opciones que necesitan de personal con una alta especialización. Conseguir adaptar un sistema de propósito general

para dar solución a las necesidades particulares de la profesión se hace tarea difícil para la pequeña y mediana empresa.

En sectores tradicionales y especializados, se pueden observar algunos de estos problemas. Los sistemas generales se muestran ineficientes, incapaces de ofrecer a las empresas herramientas específicas que optimicen su línea productiva. En estos casos se plantea la necesidad de desarrollar productos específicos que se adapten a la línea de trabajo de los profesionales del sector, sin necesidad de unos conocimientos muy profundos de ingeniería.

Las características de un sistema CAD/CAM vienen determinadas en gran medida por el modelo geométrico que incorpora. Por modelo geométrico se entiende el conjunto de información, estructuras de datos, operaciones y herramientas orientadas para el diseño de objetos geométricos. El modelo geométrico es responsable en buena medida de la funcionalidad del sistema CAD/CAM que lo incorpora, no en vano será el encargado de representar los objetos y de definir sus manipulaciones básicas.

Conforme se han ido incrementando los requerimientos de las empresas han ido evolucionando paralelamente los sistemas y los modelos subyacentes, pasando de ser sencillos modelos que representaban objetos en dos dimensiones, a complejos modelos tridimensionales que aportan gran funcionalidad al sistema. Esta evolución ha conducido a una generalización de los modelos y a una alta especialización en su uso. Los modelos geométricos existentes son modelos de amplio propósito, en los que se consigue generalidad a costa de sencillez de manejo. Esta es la razón por la que estos modelos se muestran ineficientes en su labor de representar procesos de producción específicos y en la presentación de sus herramientas de forma clara y sencilla.

1.1.2 Fabricación industrial

El problema de generar un objeto tridimensional (objeto a mecanizar) mediante el uso de diversas geometrías preestablecidas (herramientas) recibe el nombre de cálculo de trayectorias de mecanizado. Dada una geometría a mecanizar, las formas de hacerlo mediante el uso de diversas herramientas son prácticamente infinitas.

Los primeros sistemas de control numérico funcionaban mediante una secuencia de órdenes que el operario iba introduciendo directamente. Estas órdenes constituían la trayectoria que debía seguir la herramienta. El lenguaje utilizado para ello era complejo estando más cerca de la máquina que del operario. Hoy en día los sistemas de fabricación asistidos por computador son los encargados de generar estas trayectorias y de producir las secuencias que manejan los controles numéricos.

Debido a que el proceso se lleva a cabo de manera automatizada, los programas generados contienen menos errores y el tiempo de generación de los mismos se reduce. Los sistemas actuales no sólo proporcionan al usuario una ayuda en el diseño, sino también en la fabricación del objeto. No obstante, la generación de las trayectorias de las herramientas a partir de una geometría dada por el diseñador no es una tarea fácil y comprende una ingente cantidad de conceptos y métodos matemáticos, ingenieriles, geométricos, de computación, técnicas fundamentadas en inteligencia artificial y de práctica manual que no siempre es posible realizar. Se puede observar en la Figura 1 de forma esquemática los factores que influyen en el mecanizado con máquinas herramienta.

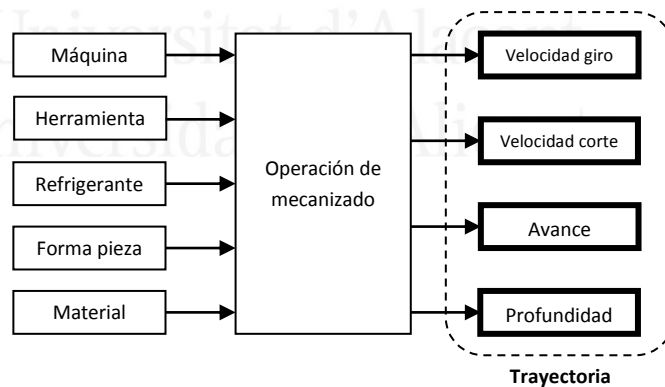


Figura 1. Factores que intervienen en el mecanizado con máquinas herramienta.

La problemática asociada al mecanizado de objetos presenta, en la actualidad, numerosos aspectos que no han sido resueltos

completamente. La planificación y generación de trayectorias de herramienta libres de colisiones constituyen unos de los más importantes. Las técnicas empleadas en la actualidad se asocian a un tipo concreto de máquina y herramienta: las más genéricas son propuestas para centros de mecanizado estándar de 3 ó 5 ejes con herramientas de un solo radio, no haciéndose mención de su uso en otro tipo de máquinas o herramientas. Por otra parte, los métodos desarrollados expresamente para un solo tipo de máquina o herramienta no hacen referencia a su posible uso genérico en centros de mecanizado, con lo que no se abstraen completamente de las limitaciones que supone la utilización de un determinado tipo de máquina y de herramienta, por lo que el problema del mecanizado no se define por sí mismo, sino asociado a un tipo de fabricación.

La mayoría de los modelos separan completamente el diseño de la fabricación de las piezas. Esta opción permite el diseño de objetos a usuarios no familiarizados con los procesos de fabricación. Sin embargo, en estos casos la calidad de la fabricación de las piezas se resiente porque las estrategias de generación de trayectorias no se adaptan al objeto diseñado y el objeto fabricado no representa con la suficiente precisión el diseño original. Incluso en ocasiones algunos objetos diseñados no pueden ni siquiera ser fabricados al resultar su diseño incompatible con particularidades de la maquinaria utilizada.

1.2 Modelado morfológico para el diseño y fabricación de objetos tridimensionales

Se presenta a continuación un modelo computacional para el diseño y fabricación de objetos tridimensionales que pretende dar solución a algunos de los problemas clásicos que soportan las aplicaciones CAD/CAM de diseño y mecanizado de piezas tridimensionales.

El modelo computacional presentado relaciona íntimamente el proceso de diseño del objeto con el de mecanizado, dotando al proceso de fabricación de una continuidad que posibilita la fabricación de piezas con gran precisión y calidad. Para ello, el modelo basa el diseño de los objetos en la definición de trayectorias de mecanizado sobre las que pasarán herramientas de mecanizado conformando el objeto final.

El cálculo de las trayectorias de mecanizado se realiza a partir de un marco formal que redefine operaciones básicas de la morfología matemática, adaptándolas a la dinámica propia de los procesos de fabricación. Fundamentar el proceso de cálculo sobre una base morfológica permite independizar los aspectos geométricos del proceso de fabricación de los puramente físicos, resultando el modelo un sistema fiel y robusto con total independencia de la tecnología existente.

1.3 Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo de investigación es el de definir un nuevo modelo geométrico capaz de soportar los requerimientos de una aplicación CAD/CAM de diseño y mecanizado de piezas tridimensionales. El modelo presentado debe ser preciso y robusto y debe mitigar las limitaciones de los modelos geométricos existentes en la actualidad.

El análisis del estado del arte ha constatado que tanto el modelo Superficie-Trayectoria como el Modelo Topológico del Proceso de Fabricación aportan ventajas significativas con respecto a los modelos existentes. Ambos modelos denotan sin embargo carencias pendientes de resolver. El presente trabajo pretende adaptar y ampliar los planteamientos de ambos modelos a partir de la definición de un nuevo modelo que proponga una solución global al problema del diseño y mecanizado de objetos tridimensionales.

El modelo debe considerar el diseño y fabricación de piezas como un proceso integrado, en el que las metodologías de diseño y de fabricación estén estrechamente relacionadas. Para ello el modelo respaldará la filosofía del modelo Superficie-Trayectoria de fundamentar el diseño de los objetos en la definición de trayectorias de mecanizado, formalizando el problema del cálculo de trayectorias a través de una adaptación del marco morfológico enunciado en el Modelo Topológico del Proceso de Fabricación. Para alcanzar estos propósitos el modelo debe alcanzar dos objetivos fundamentales:

- Definir un nuevo modelo geométrico que represente un marco formal donde puedan definirse operaciones morfológicas deterministas adaptadas a los requerimientos implícitos del proceso de mecanizado de objetos tridimensionales.
- Desarrollar un modelo computacional que, apoyado en el marco formal morfológico propuesto, implemente una aplicación realista de diseño y fabricación de objetos tridimensionales.

Estos dos objetivos principales conducen a la necesidad de cumplir objetivos concretos más específicos, entre los que destacan:

- Establecer una relación entre el proceso de diseño y fabricación de objetos y operaciones propias de la morfología matemática clásica.
- Definir una especialización que dote de determinismo al paradigma morfológico clásico y permita una aplicación ordenada y completa de la operatoria morfológica.
- Proponer un sistema computacional que dote de operatividad al modelo morfológico formal y permita abordar con éxito algunos de los problemas que presentan en la actualidad los sistemas de diseño y fabricación de objetos, como la planificación y generación de trayectorias de mecanizado.
- Implementar en el modelo computacional transformaciones en dos y tres dimensiones, en espacio continuo y discreto en función de la tipología de los elementos que intervengan en la operación.
- Facilitar el procedimiento de diseño de objetos para que el sistema resulte flexible y permita la definición libre de objetos de alta calidad.
- Asegurar la integridad del modelo, de tal manera que los objetos diseñados puedan fabricarse con precisión.
- Orientar el modelo a sistemas computacionales convencionales. El diseño de los objetos no debe requerir el uso de equipos con altas capacidades. Se pretende introducir de manera más generalizada los sistemas de CAD/CAM en industrias de pequeño tamaño aumentando la productividad y calidad de sus productos sin necesidad de asumir elevados costes de implantación.
- Aportar un modelo de visualización que permita la representación realista de los objetos diseñados, manteniendo los parámetros de calidad exigibles a un entorno realista de diseño y fabricación de piezas asistido por ordenador.
- Construir un modelo que permita alcanzar los objetivos anteriores a través de métodos de uso sencillos e intuitivos que simplifiquen y acerquen el modelo a personal no necesariamente cualificado.

- Validar el modelo mediante la experimentación de casos simples y complejos.
- Analizar la funcionalidad del modelo y su posible aplicación sobre otros procesos productivos.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

1.4 Estructura del documento

Se ha dividido el trabajo en seis capítulos:

- En el **capítulo segundo** se realiza un análisis del estado del arte sobre los modelos geométricos existentes en la actualidad y del problema del mecanizado. Se advierten sus limitaciones y se introducen dos modelos actuales que aportan soluciones parciales a esas restricciones: el modelo Superficie-Trayectoria y el Modelo Topológico del Proceso de Fabricación.
- A lo largo del **capítulo tercero** se presenta el Modelo Morfológico Determinista, formalismo que permite modelar procesos dinámicos a partir del marco formal que proporciona la morfología matemática clásica. Se definen formalmente los conjuntos y operaciones morfológicas clásicas participantes en el formalismo y se detallan las operaciones que dotan de determinismo al paradigma, adaptándolo a la dinámica propia de trabajos como el de mecanizado.
- En el **capítulo cuarto** se analizarán posibles aplicaciones del modelo morfológico determinista presentado en el contexto aplicado de sistemas de diseño y fabricación de objetos asistidos por ordenador.
- En el **capítulo quinto** se presenta el sistema computacional que implementa un entorno de diseño de piezas por trayectoria a partir de los principios morfológicos definidos en el Modelo Morfológico Determinista. Se expondrán experimentos con diseños sencillos y complejos que demostrarán la bondad del modelo.
- Finalmente en el **capítulo sexto** se presentan las conclusiones que se han extraído, tanto de la experimentación computacional realizada como del desarrollo del modelo geométrico y se plantean una serie de problemas que dan lugar a líneas futuras de investigación.

Capítulo Segundo

Estado del Arte



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

2.1 Introducción

El presente capítulo pretende ofrecer una profunda visión de las bases teóricas que sustentan el presente trabajo así como sintetizar los últimos desarrollos realizados sobre técnicas relacionadas. En el estado del arte se realiza una contextualización del trabajo que procura facilitar la asimilación de las aportaciones que el presente trabajo realiza al estado de conocimiento actual.

En este documento se presenta un modelo geométrico orientado al diseño y fabricación de objetos tridimensionales abordando el problema a partir de un escenario formal morfológico. Es por ello que se ha considerado adecuado incluir en el estado del arte tres bloques principales:

- **Modelos geométricos.** Se enuncian los principales propósitos de los modelos geométricos orientados a sistemas CAD/CAM y se realiza una visión de los modelos existentes en la actualidad enunciando sus ventajas e inconvenientes.
- **Mecanizado.** Se estudia el proceso de fabricación de las piezas examinando los procedimientos que en la actualidad pretenden dar solución a los dos grandes problemas que presenta el proceso de mecanizado: la estrategia de mecanizado y la generación de trayectorias libres de colisión.
- **Morfología matemática.** Se centra en una revisión de los conceptos propios de la morfología matemática y de su adaptación al proceso de fabricación de piezas tridimensionales.

Una vez descritas las bases teórico-prácticas sobre las que discurre la presente investigación, se añaden dos bloques adicionales que completan el estado del arte:

- **Revisión del estado del arte.** Se analizan los modelos descritos en los bloques anteriores, anunciando sus carencias y justificando el desarrollo del modelo presentado en este trabajo.

- **El Modelo Superficie Trayectoria y el Modelo Topológico del Proceso de Fabricación.** Se describen el Modelo Superficie Trayectoria y el Modelo Topológico del Proceso de Fabricación, modelos que aportan soluciones a algunos de los problemas detectados en los sistemas de fabricación asistidos por ordenador y que han supuesto puntos de partida para la presente investigación.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

2.2 Modelos geométricos

2.2.1 Introducción

Un modelo es un esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o una realidad compleja, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.

El modelado de objetos tridimensionales requiere integridad en la información que define al objeto diseñado y en las operaciones de representación y transformación que se aplican sobre él. Es imposible verificar la integridad de información computacional de una representación a menos que se defina el objeto en términos de propiedades matemáticas computables e independientes de cualquier representación particular.

La geometría es la rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras geométricas en el plano o en el espacio. La geometría proporciona instrumentos capaces de definir formas geométricas, suministrar métodos de diseño y representación, aportar medidas y proporciones y aplicar transformaciones sobre los objetos geométricos de manera formal e íntegra.

El modelo geométrico es pues el esquema conceptual sobre el que se asienta la información geométrica de un objeto. Encapsula las estructuras de datos que almacenan la geometría del objeto y especifica los procedimientos de representación y transformación que operan con ellas. En definitiva, el modelo geométrico es el núcleo geométrico operacional en el que se basan los sistemas automáticos de diseño y fabricación de objetos.

Los modelos geométricos orientados a entornos CAD tienen tres propósitos generales:

- **Definición de la pieza:** lo cual exige una exacta especificación de la pieza diseñada.

- **Manipulación en el diseño:** lo cual permite al usuario modificar una especificación geométrica y manipularla según sus necesidades.
- **Visualización:** Proporciona al usuario la posibilidad de obtener una precisa representación realista del objeto diseñado.

Cuando los sistemas CAD abarcan procesos de fabricación controlados por ordenador se denominan sistemas CAD/CAM. La fabricación asistida por ordenador ofrece ventajas significativas con respecto a los métodos tradicionales de fabricación, elevando los niveles de calidad y productividad industrial. Los modelos geométricos orientados a entornos manufactureros CAD/CAM añaden un cuarto propósito general:

- **Fabricación:** Permite al usuario la producción precisa de la pieza diseñada.

El objetivo final del sistema automático determinará la estructura, procedimientos y herramientas que suministrará el modelo geométrico subyacente. Será pues diferente la estructura de un modelo geométrico encargado de albergar la geometría de un sistema de fabricación de suelas de calzado que la del modelo geométrico que soporte un sistema de fabricación de fuselajes aeronáuticos.

En general, todos los modelos geométricos deben cumplir una serie de características generales [Ogayar, 2006].

- **Precisión:** debe representar los objetos sin aproximaciones.
- **No ambigüedad:** los objetos no deben estar sujetos a más de una posible interpretación.
- **Unicidad:** un objeto no debe permitir más que una representación.
- **Concisión:** la representación debe ser lo más compacta posible, evitando la redundancia en los datos.
- **Eficacia:** El modelo debe permitir la realización de operaciones habituales en el ámbito en el que se desarrolle de forma eficiente y eficaz.

- **Facilidad de uso:** El modelo debe permitir una sencilla edición de los objetos diseñados.

2.2.2 Clasificación de modelos geométricos

El modelado de sólidos o modelado de volúmenes, hace hincapié en el modelado de cuerpos geométricos con volumen. Los modelos geométricos que modelan sólidos deben asegurar que los objetos diseñados tienen entidad sólida completa y exacta.

Para que un subconjunto de puntos cerrado y acotado sea considerado sólido debe satisfacer las siguientes condiciones [Melero, 2008].

- **Rigidez:** Un sólido debe ser invariante ante transformaciones rígidas, esto es traslaciones y rotaciones y no depender de la ubicación u orientación del objeto en el espacio.
- **Homogeneidad tridimensional:** Todo sólido debe estar compuesto por materia sin tener caras, aristas o puntos aislados (Figura 2).

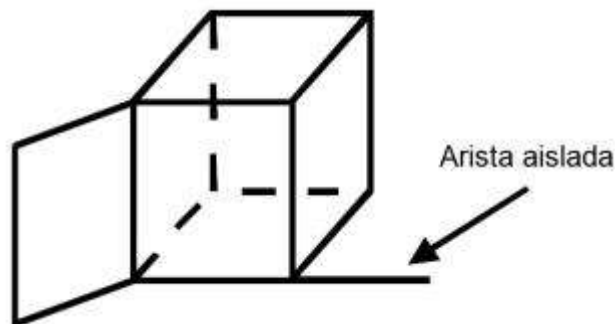


Figura 2. Cuerpo geométrico sin homogeneidad tridimensional

- **Finitud:** La descripción del objeto debe ser finita para poder ser almacenada en un ordenador.

- **Delimitado por el contorno.** Los límites del objeto deben encerrar el objeto y por lo tanto determinar inequívocamente el interior del mismo.

Estas propiedades implican que los modelos sólidos son subconjuntos de \mathbb{R}^3 limitados con identidad tridimensional, lo que implica que sus fronteras deben estar bien definidas (Figura 3). Estos conjuntos de puntos que conforman una entidad sólida son denominados *r-sets* [Prakash, 2010].

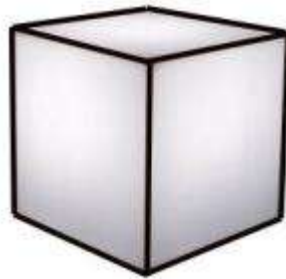


Figura 3. Ejemplo de cuerpo sólido (cubo)

Podemos realizar una clasificación de los modelos geométricos presentes en los sistemas de fabricación actuales, basándonos en el modo en el que los modelos caracterizan el concepto de sólido. Según esta consideración tenemos la siguiente clasificación:

- **Modelos topológicos:** El sólido se caracteriza como un conjunto acotado de puntos tridimensionales conectados.
- **Modelos superficiales:** El sólido se caracteriza a través de sus fronteras, es decir, como un conjunto de superficies conectadas que encierran un volumen.
- **Modelos sólidos.** El sólido se caracteriza como entidad con fundamento sólido.

2.2.3 Modelos topológicos

Dentro de los modelos topológicos el que destaca por encima de todos es el *Modelo alámbrico*.

2.2.3.1 Modelo alámbrico

Se trata del primer modelo geométrico que se formuló. El modelo alámbrico es un modelo simple que tan solo almacena información relativa a los vértices y aristas que componen los objetos, dejando de lado la información superficial (Figura 4).

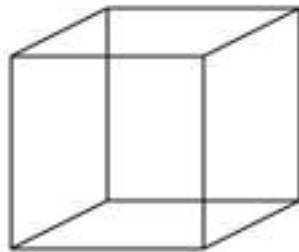


Figura 4. Cubo en modelo alámbrico

La sencillez del modelo alámbrico le proporciona las siguientes ventajas:

- Baja utilización de recursos
- Visualización muy rápida

Sin embargo, el hecho de no almacenar información superficial provoca en el modelo numerosos inconvenientes:

- Los objetos tan sólo pueden ser visualizados mediante entidades básicas (puntos, líneas, arcos, círculos, cónicas, curvas), con lo que no se pueden mostrar superficies.
- Escasa precisión. Al ser un modelo aproximado no permite la definición de objetos complejos.
- Representación ambigua. Objetos diferentes pueden ser representados de forma idéntica (Figura 5).

- No permite la fabricación del objeto. La falta de información superficial imposibilita la fabricación del objeto.

Los numerosos inconvenientes con los que cuenta este modelo hacen que sea un modelo en desuso, ya que en la actualidad existen modelos más completos que ofrecen igualmente rápidas visualizaciones de los diseños.

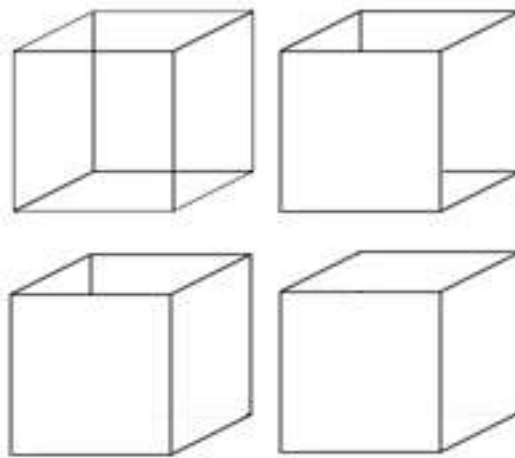


Figura 5. Ambigüedad de diseño en el modelo alámbrico

2.2.4 Modelos superficiales

Los modelos superficiales o también denominados modelos de representación basados en frontera (*boundary representations* o *B-rep*) caracterizan los sólidos almacenando los vértices, las aristas y las caras que conforman estas aristas (Figura 6).

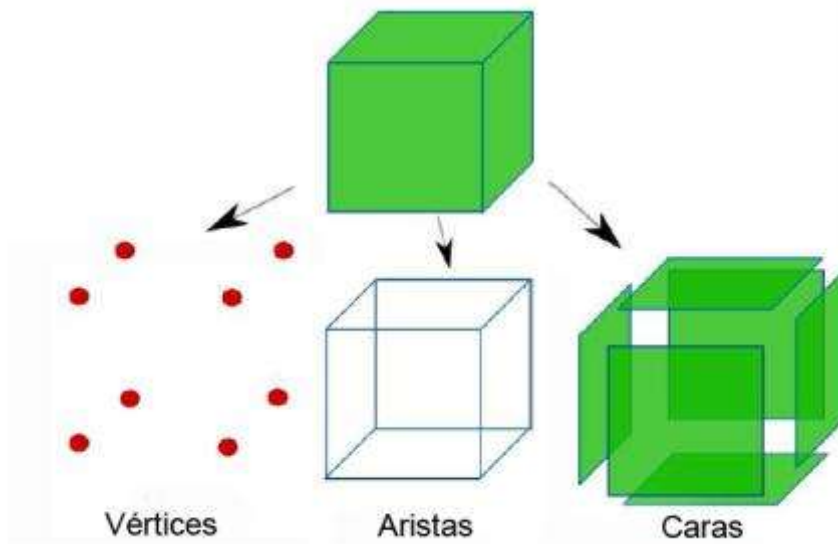


Figura 6. Cubo en modelo superficial

Los objetos son sólidos limitados por caras, donde cada arista es compartida por un número par de caras planas (modelo poligonal) o curvas (modelo de superficies curvas). La fórmula de Euler determina la relación entre el número de vértices (V), aristas (A) y caras (C) que asegura que el objeto definido es un sólido topológicamente correcto [Scott, 2008]:

$$V - A + C = 2$$

Expresión 1.

Para objetos no simples (con agujeros) existe una generalización de la fórmula de Euler que tiene en cuenta el número de anillos (R), el número de componentes independientes que forman el sólido (I) y el número de agujeros (J):

$$V - A + C - R = 2 (I - J)$$

Expresión 2.

En cuanto a las alternativas existentes para representar la geometría y la topología de un modelo de fronteras, destacan las siguientes [Melero, 2008]:

- Modelos de fronteras basados en polígonos: El sólido se representa como un conjunto de caras de las que se almacenan las coordenadas de los vértices que la forman.

$$S = C_1, C_2, \dots, C_n$$

$$C_i = (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_j, y_j, z_j)$$

Expresión 3.

- Modelos de fronteras basados en vértices: El modelo basado en polígonos hace que se almacene la información de un vértice tantas veces como esté presente en caras. Para eliminar esa redundancia se almacena adicionalmente una lista con las coordenadas de los vértices y cada cara hace uso de índices que referencian a los vértices.

$$S = C_1, C_2, \dots, C_n$$

$$C_i = v_1, v_2, \dots, v_j$$

$$V = (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_k, y_k, z_k)$$

Expresión 4.

- Modelos de fronteras basados en aristas: En los modelos basados en aristas el elemento central de la estructura es la arista, en lugar de la cara. Estos modelos representan la superficie como un grafo no dirigido cuyos nodos representan los vértices y las aristas del objeto y las uniones las relaciones de incidencia entre las aristas y los vértices. La estructura de datos define una orientación para las aristas, de forma que una cara está definida por un conjunto de aristas en sentido horario. La cara opuesta se define a partir del conjunto de aristas recorrido en sentido antihorario.

Existen diversas estructuras de datos para almacenar la información, entre las que destacan las siguientes:

- **Aristas aladas (windged-edges):** Se almacena la información de las aristas (A), vértices (V) y caras (C) del objeto:

$$A = (V_{\text{inicio}}, V_{\text{final}}, A_{\text{sigh}}, A_{\text{sigah}})$$

$$V = (x_1, y_1, z_1)$$

$$C = (A_{\text{inicio}}, \text{Sentido})$$

Expresión 5.

V_{inicio} y V_{final} son los vértices de la arista, A_{sigh} es la siguiente arista en sentido horario y A_{sigah} es la siguiente arista en sentido antihorario. Para definir una cara tan sólo se necesita la arista de inicio (A_{inicio}) y el sentido horario o antihorario para indicar si se especifica la cara externa o la opuesta.

- **Semi-aristas aladas.** Es una extensión del modelo de aristas aladas que elimina el atributo de sentido en las caras. En su lugar, se divide cada arista en dos subaristas, una con sentido externo y otra con sentido interno. Para cada subarista se almacena la siguiente información:

$$SA = (V_{\text{final}}, SA_{\text{anterior}}, SA_{\text{siguiente}}, C, SA_{\text{opuesta}})$$

Expresión 6.

V_{final} es el vértice final de la arista, SA_{anterior} y $SA_{\text{siguiente}}$ son las semiaristas anterior y siguiente, C es la cara que contiene la semiarista y SA_{opuesta} es la semiarista opuesta que tiene como V_{final} el vértice origen de SA.

Los modelos superficiales más empleados en la actualidad se presentan a continuación.

2.2.4.1 Modelo poligonal

El modelo poligonal es un caso particular del modelo superficial B-Rep, en el que las caras de los polígonos son polígonos planos. Los modelos poligonales prestan especial atención al orden en el que los vértices de

las caras son almacenados ya que el orden de los vértices influye en algunos algoritmos que se emplean para detección de superficies ocultas, cálculo de intersecciones con entidades externas, visualización realista, etc.

Por ejemplo, si los vértices de una cara se almacenan ordenados en sentido antihorario, vistos desde el exterior del objeto, el producto vectorial (que sigue la comúnmente denominada regla de la mano derecha o del sacacorcho) (Figura 7) proporciona siempre una normal que apunta al exterior del objeto.

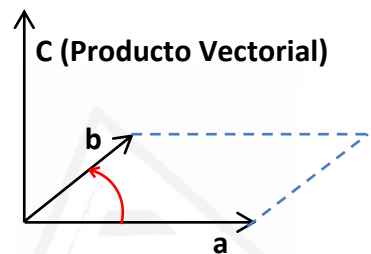


Figura 7. Concepto de producto vectorial

Calculando la ecuación del plano a partir de los vértices y teniendo en cuenta la normal de la cara, podemos determinar si un punto cualquiera del espacio está a un lado o al otro del plano simplemente sustituyendo el punto en la ecuación del plano y comprobando si el resultado es positivo, negativo o cero.

Las caras que forman un objeto poligonal pueden tener cualquier número de aristas. Sin embargo, los casos más habituales son los de caras de tres aristas debido a que los vértices de un polígono triangular son siempre coplanares y facilitan el cálculo de normales. Los modelos poligonales con polígonos triangulares son muy utilizados por la comunidad gráfica en la actualidad, hasta el punto de que fabricantes de hardware y software gráfico lanzan al mercado sus productos diseñados específicamente para ofrecer máximo rendimiento en objetos definidos por mallas de polígonos triangulares. La Figura 8 muestra un ejemplo de representación a partir de polígonos triangulares.

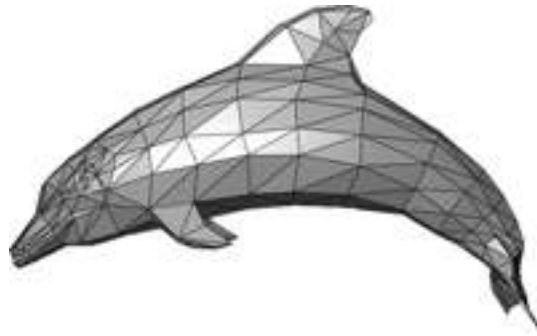


Figura 8. Malla triangular representando a un delfín

El modelo poligonal representa pues objetos poliédricos (cuerpos geométricos con caras planas) con exactitud. Sin embargo, para objetos no poliédricos (caras curvas) el modelo tan sólo permite realizar una aproximación en la representación del objeto a base de añadir polígonos. En objetos complejos, realizar una buena aproximación requiere un número elevado de polígonos [Ju, 2009].

En definitiva, las ventajas que aporta este modelo son:

- Sencilla definición y rápida visualización de cuerpos poliédricos.
- Facilita la realización de cálculos de interioridad/exterioridad e intersección con entidades externas.

Los inconvenientes son los siguientes:

- Representación aproximada de objetos no poliédricos.
- En cuerpos no poliédricos realizar buenas aproximaciones requiere de gran cantidad de polígonos con lo que necesitan un mayor tiempo de proceso

2.2.4.2 Modelo de superficies curvas

El modelo de superficies curvas es un caso particular del modelo superficial B-Rep, en el que las caras de los objetos no son necesariamente polígonos planos. Para la representación de las superficies curvas existe la posibilidad de utilizar superficies implícitas (cuádricas, superficies equipotenciales,...) o superficies paramétricas (bezier, BSplines, NURBS,...) aunque lo habitual es hacer uso de

superficies paramétricas ya que las superficies implícitas restringen mucho la cantidad de objetos a representar [Cuartas, 2006].

Una superficie paramétrica es la imagen de una función de transformación definida en una región de un plano que tiene valores en el espacio xyz. Aunque la superficie se puede determinar mediante procedimientos de interpolación, los métodos de aproximación son los más adecuados para los sistemas de fabricación, por sus buenas propiedades de continuidad y suavidad de las formas. La Figura 9 muestra un ejemplo de superficie paramétrica.

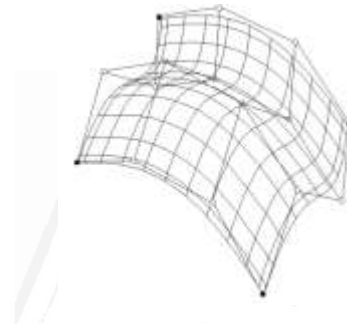


Figura 9. Ejemplo de superficie paramétrica BSpline

Las ventajas del modelo de superficies curvas son las siguientes:

- Modelo exacto para cuerpos poliédricos y no poliédricos.
- Las superficies paramétricas son invariantes ante transformaciones afines (traslación, rotación, escalado,...)

Los inconvenientes que presenta el modelo son principalmente los siguientes:

- El procesamiento de las superficies curvas es complejo.
- La edición de superficies no permite una gran flexibilidad.
- El cálculo de intersecciones es complejo.
- Las superficies cuyo espacio paramétrico no es rectangular tienen una formulación muy complicada.

El modelo de superficies curvas posee pues las ventajas del modelo poligonal eliminando una de sus principales desventajas (falta de

precisión en cuerpos no poliédricos) pero el modelo de superficies aumenta sustancialmente la complejidad incrementando notablemente los tiempos de respuesta. Aun así, el modelo de superficies curvas es uno de los esquemas más implantados en los sistemas automáticos de fabricación ya que proporciona una adaptación inmediata al proceso de mecanizado.

2.2.5 Modelos sólidos

En los modelos sólidos los objetos son caracterizados directamente como entidades sólidas sobre los que se aplican operaciones booleanas de transformación. Los modelos sólidos más empleados en la actualidad son los siguientes:

- Objetos generados por barrido
- Geometría Sólida Constructiva (CSG)
- Descomposición espacial

2.2.5.1 Sólidos generados por barrido

Existen sistemas de creación de sólidos que simplifican la creación de sólidos utilizando métodos simples de diseño. Los modelos que generan sólidos por barrido son un ejemplo de ello.

La generación de sólidos por barrido consiste en definir un sólido mediante una superficie bidimensional que recorre discretamente una trayectoria tridimensional [Ogayar, 2006]. El tipo de trayectoria permite realizar una clasificación de los modelos de representación por barrido existentes (Figura 10):

- **Representación por extrusión (traslación).** El objeto se define desplazando una superficie bidimensional a través de la perpendicular al plano en el que está contenida hasta un punto determinado.
- **Representación por revolución (rotación).** El objeto se define desplazando la superficie bidimensional siguiendo una trayectoria circular alrededor de un eje de rotación.

- **Barrido generalizado.** Modelos extendidos que permiten la generación de superficies con forma y orientación diferente a lo largo de su trayectoria.

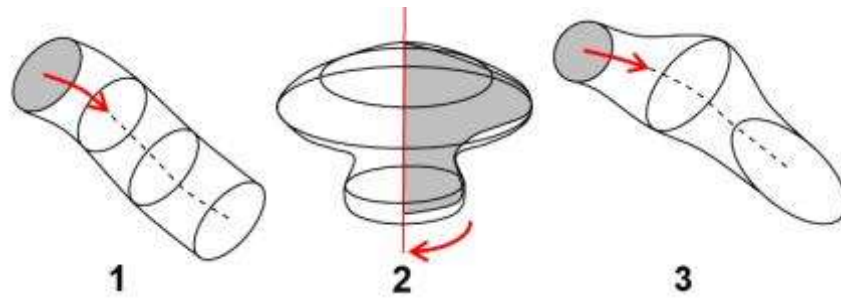


Figura 10. Barrido por extrusión (1), por revolución (2) y generalizado (3)

En cualquiera de los casos, la precisión del objeto viene dada por la discretización realizada sobre la trayectoria de desplazamiento. La principal ventaja que aporta este modelo es la facilidad en la creación de modelos. Para definir un cuerpo tan solo se debe definir una curva y una trayectoria. Por contra, el modelo tiene los siguientes inconvenientes:

- Dominio escaso de representación: Se reduce significativamente la tipología de cuerpos a representar limitándose a sólidos que presentan algún tipo de simetría (rotacional o traslacional).
- Los diseños finales no poseen formulación simple lo cual complica el cálculo de momentos, volúmenes, etc.
- No permiten la aplicación de operadores booleanos.

2.2.5.2 Geometría Sólida Constructiva (CSG)

En la geometría constructiva de sólidos CSG (Constructive Solid Geometry, también denominada representación constructiva o C-Rep) el sólido se representa a través de un conjunto de primitivas geométricas básicas sobre las que se aplican operaciones booleanas regularizadas [Zhang, 2011].

Las primitivas básicas utilizadas normalmente son sólidos parametrizados de figuras simples como cubos, cilindros, esferas,

conos. La aplicación de operaciones booleanas regularizadas (unión, intersección, diferencia) permite la combinación de primitivas básicas para la composición de primitivas más complejas. Las combinaciones mantienen las condiciones de completitud y exactitud propia de los r-sets.

Las estructuras de representación suelen ser árboles binarios (árboles CSG) en los que las hojas son las primitivas básicas y los nodos internos operaciones booleanas que se aplican a los sólidos representados por los dos subárboles que cuelgan del nodo (Figura 11).

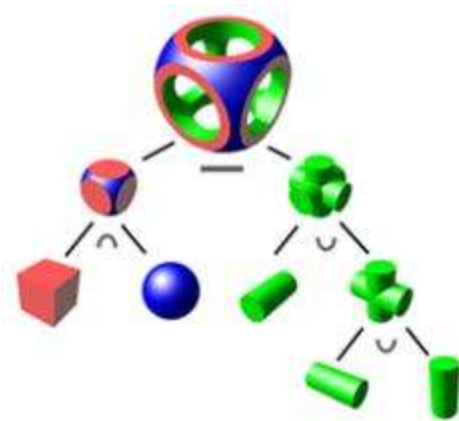


Figura 11. Proceso de construcción de sólido por CSG

El modelo CSG es un modelo exacto (si las primitivas utilizadas lo son), con representaciones fácilmente parametrizables pero su visualización requiere la utilización de un modelo secundario como el BRep o de técnicas avanzadas de representación.

Las ventajas que aporta este modelo son las siguientes:

- Es un modelo muy intuitivo y sencillo de utilizar.
- Si las primitivas utilizadas son exactas el cuerpo final es exacto.
- Facilita el cálculo de propiedades físicas del cuerpo.
- Es un modelo adecuado para el mecanizado.

- A partir de los procedimientos que calculan la interioridad/exterioridad de las primitivas básicas podemos calcular la interioridad/exterioridad del objeto final.
- Resuelve con facilidad interacciones entre objetos.

Los principales inconvenientes son los siguientes:

- Compleja visualización. Al no almacenar el modelo información sobre la geometría y conectividad del cuerpo final la delimitación de las fronteras se complica, con lo que se deben aplicar técnicas adicionales de evaluación de fronteras. Habitualmente se hace uso de técnicas de trazados de rayos o, en el caso de representaciones con modelos BRep, técnicas de evaluación de fronteras. En ambos casos, técnicas que menoscaban la eficacia del modelo.
- Falta de unicidad en la representación: Un mismo diseño puede tener diferentes representaciones
- Elevados requerimientos de almacenaje. El modelo necesita almacenar gran cantidad de información ya que para cada objeto se almacena la definición explícita de las primitivas que intervienen en la figura. En objetos complejos la cantidad de información a almacenar crece rápidamente comportándose el modelo de forma lenta. Esto es un inconveniente para un sistema de fabricación.

2.2.5.3 Descomposición espacial

La descomposición espacial trata de modelar objetos complejos mediante primitivas de fácil definición. Para ello, el cuerpo se descompone en una colección de sólidos primitivos adyacentes que no intersectan. Entre los modelos de descomposición espacial destacan los siguientes:

- Enumeración espacial (voxelización)
- Partición Binaria del Espacio (BSP)

Enumeración espacial

El modelo de enumeración espacial consiste en la división uniforme del espacio en una cuadrícula de regiones fundamentales denominadas *voxels*, generalmente de topología cúbica (aunque pueden presentar cualquier topología poliédrica).

La definición de cuerpos sólidos se basa en la enumeración del conjunto finito de *voxels* que ocupa el sólido [Dong, 2008]. Para ello, todo el espacio que ocupa el sólido se divide en *voxels* (Figura 12) que quedan etiquetados según su inclusión en el sólido (interiores o exteriores). Si el sólido ocupa parcialmente algún vóxel se hace necesario establecer algún criterio que determine si el vóxel se considera interior o exterior al objeto.



Figura 12. Voxelización de un espacio

Para optimizar la organización del espacio en vóxels, se hace necesaria una forma de organización espacial. Una de las más utilizadas son los árboles octales (*octree*).

Un *octree* es un árbol con un máximo de ocho descendientes por nodo. El proceso de generación de un *octree* es el siguiente: Inicialmente se define un cubo que envuelve todo el objeto. A continuación se divide en ocho cubos de igual tamaño (el número de cubos puede variar) y cada cubo se etiqueta conforme a las siguientes condiciones:

- **Nodo negro.** Si el cubo no contiene ninguna porción del objeto se etiqueta como exterior.

- Nodo blanco. Si el cubo se encuentra completamente en el interior del objeto se etiqueta como interior.
- Nodo gris. Si el cubo contiene parte de un objeto, se divide en otros cubos y se repite el proceso.

El proceso termina cuando todos los cubos son completamente interiores o exteriores, o bien se ha alcanzado una profundidad máxima en el árbol [Knoll, 2006].

Para mejorar el *octree* básico se han propuesto esquemas jerárquicos que optimizan la organización espacial almacenando información adicional en los nodos del árbol (*SP-Octrees* [Cano, 2004], *Extended Octrees* [Dyllong, 2008], *ASV Octrees* [Bautembach, 2011] o *PR-Star Octrees* [Weiss, 2011]). Todos estos métodos optimizan los recursos de memoria reduciendo el número de nodos en la representación pero por contra complican las operaciones booleanas al introducir necesariamente cálculos geométricos. Se puede observar en la Figura 13 un ejemplo de voxelización.



Figura 13. Ejemplo de voxelización

Partición Binaria del Espacio (BSP)

La filosofía del modelo de partición binario del espacio es similar a la de la enumeración espacial. El modelo BSP es un modelo jerárquico que fragmenta el espacio recursivamente en subespacios convexos mediante hiperplanos. El proceso es el siguiente: El nodo raíz del árbol representa todo el espacio. A continuación se intersecta el cuerpo entero con el plano. Los puntos que permanezcan a la izquierda del plano se

almacenarán en el descendiente izquierda del nodo inicial. Los puntos que permanezcan a la derecha del plano se almacenarán en el descendiente derecha del nodo inicial. En cuanto a los puntos situados sobre el plano se considerarán puntos derecha o izquierda en función de un criterio que se mantendrá fijo para todo el árbol. El proceso se repetirá recursivamente para cada nodo descendiente hasta que no haya puntos a ningún lado de los planos [Hsieh, 2010] (Figura 14).

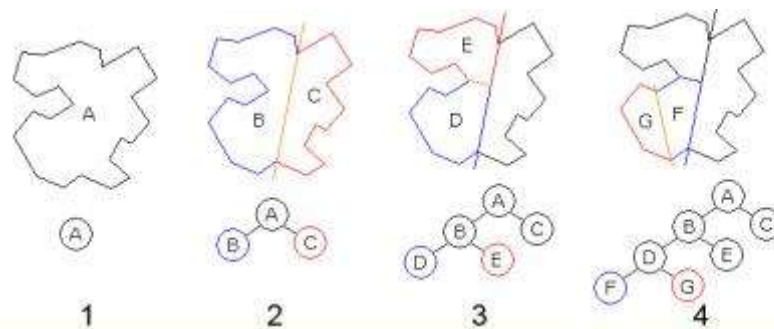


Figura 14. Pasos de construcción de árbol BSP

Las ventajas que aportan los modelos de descomposición espacial son la simplicidad y facilidad de cálculo de operaciones booleanas. Sin embargo el problema de este tipo de representaciones es que tan sólo ofrecen aproximaciones del sólido representado, necesitando, sobretodo en objetos no poliédricos, el almacenamiento de un gran número de vóxels para no provocar efectos frecuentes en este modelo como son los temidos 'dientes de sierra'.

2.3 Mecanizado

2.3.1 Introducción

El mecanizado es un proceso de fabricación que comprende una serie de operaciones de conformación de piezas mediante la eliminación de material de un lingote o tocho de material semielaborado utilizando máquinas de control numérico.

El término control numérico hace referencia a control basado en coordenadas numéricas programadas. Las primeras máquinas de control numérico se construyeron a comienzos de siglo XIX, basadas en máquinas motorizadas cuyos mandos se accionaban automáticamente siguiendo las instrucciones especificadas en un conjunto de tarjetas perforadas. Estas máquinas no disponían de ordenadores integrados con lo que el funcionamiento era totalmente mecánico. Posteriormente, la reducción de precios y tamaños en los procesadores permitió la integración de ordenadores en las máquinas de control numérico dando lugar a las máquinas de control numérico asistidas por ordenador. Estas máquinas fueran denominadas CNC (computer numerally controlled) para diferenciarlas de las CN (numerally controlled) que no disponían de procesador integrado¹.

Fue a mediados del siglo XX cuando investigadores militares crearon los primeros prototipos de fresadoras con control numérico gobernado por procesador. Las máquinas CNC eran capaces de realizar automáticamente una secuencia de operaciones detalladas a través de un conjunto de instrucciones almacenadas en la memoria del

¹ En la actualidad el término 'control numérico' ha realizado una agrupación y hace referencia a la maquinaria de fabricación de control numérico con asistencia de ordenador o sin ella.

ordenador. Este proceso ofrecía ventajas significativas respecto a los métodos automatizados existentes:

- **Mayor productividad.** La eliminación de tareas realizadas por el usuario reducía el tiempo de espera y la velocidad de ejecución de los trabajos.
- **Mayor flexibilidad.** La realización de trabajos diferentes en una máquina diferente se limitaba a cambiar el código fuente de instrucciones.
- **Mayor precisión:** Al eliminarse los errores humanos, se reducían los errores de precisión en las piezas finales.
- **Menor uso de recursos:** La eliminación de errores por parte de la máquina permitía reducir el número de piezas defectuosas, con el correspondiente ahorro en materia prima.

En definitiva los sistemas de control numérico aportaban una mayor eficacia al proceso de fabricación automatizado con lo que su popularidad fue incrementándose rápidamente a la vez que los sistemas CNC comenzaban a incorporarse al tejido productivo empresarial.

2.3.2 Tipos de control numérico

Las máquinas de control numérico pueden clasificarse en tres grupos, en función del trabajo realizado por la máquina en su trayectoria de mecanizado [Cruz, 2005].

- **Máquinas de control punto a punto.** Estas máquinas no realizan trabajo de mecanizado en toda la trayectoria, tan sólo mecanizan en los puntos iniciales y finales. El trazado y la velocidad de desplazamiento de punto a punto no son controlados en este tipo de máquinas. Ejemplos de máquinas de control punto a punto serían las taladradoras o las punteadoras.
- **Máquinas de control paraxial.** Este tipo de máquinas sí que permiten la programación de los desplazamientos y el mecanizado a lo largo de la trayectoria aunque éste debe ser paralelo a los ejes. Los tornos o las aserradoras son ejemplos de máquinas de control paraxial.

- **Máquinas de control interpolador o continuo.** Son las que mayor flexibilidad de mecanizado ofrecen. Las máquinas de contorneado, permiten realizar mecanizados continuos a lo largo de trayectorias de cualquier tipo. Es en este tipo de máquinas donde se han centrado los trabajos sobre mecanizado de piezas asistidos por computador.

2.3.3 Proceso de mecanizado

El tejido industrial actual incorpora maquinaria que permite realizar trabajos de mecanizado muy diversos, en función de las necesidades productivas del entorno (taladrado, limado, cepillado, mandrinado, fresado...). El presente trabajo va a centrarse en el mecanizado por fresado.

El mecanizado por fresado consiste en la eliminación de parte del material superficial de una pieza en bruto mediante el avance de una herramienta cortante que gira a gran velocidad denominada “fresa”. En el mecanizado por fresado se llevan a cabo distintos tipos de movimientos [Miguélez, 2006]:

- Un movimiento de corte que, sin movimiento de avance, sólo arranca viruta durante una revolución (si el movimiento es circular, como el caso del torneado o fresado) o durante una carrera (si el movimiento es rectilíneo, como en el caso del cepillado).
- Un movimiento de avance, que, combinado con el de corte, hace posible el arranque continuo de virutas.
- Un movimiento de penetración que determina la profundidad del corte y, por tanto, el espesor de la viruta que arranca.

La máquina CN dirige la trayectoria de la fresa, especificando en cada momento la posición en la que debe situarse para mecanizar la pieza. Para ello, la maquinaria controla un punto fijo de la fresa, normalmente un punto central situado sobre el eje de rotación de la herramienta (Figura 15). Determinar la posición de la fresa para mecanizar cierto punto del objeto (sin colisionar con superficies ya mecanizadas) viene a ser uno de los problemas más importantes en mecanizado asistido por

ordenador. A este problema se le denomina compensado de herramienta.

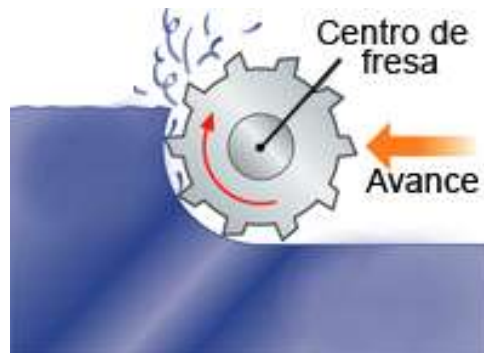


Figura 15. Simulación de mecanizado por fresado

La geometría de la fresa se convierte en un factor fundamental a la hora de calcular el compensado de herramienta y obtener un determinado resultado en la pieza fabricada. Los tipos de geometría existentes actualmente en la industria son muy variados: fresas cilíndricas, esféricas, cónicas, etc. La geometría elegida deberá ser tomada en cuenta por los procedimientos que solucionen el problema del compensado de herramienta. Se pueden observar en la Figura 16 fresas con distinta geometría:



Figura 16. Fresas de mecanizado con distinta geometría

2.3.4 Máquinas herramienta

La naturaleza de la máquina que dirige la fresa es fundamental en el proceso de fabricación. Los tipos de ejes, la característica de los motores, los momentos de inercia mecánicos,... son factores de los que depende la calidad de la pieza final mecanizada. Los tipos de maquinaria más utilizados en los procesos de mecanizado son los siguientes [Cruz, 2005]:

2.3.4.1 Fresadoras

Las máquinas fresadoras son máquinas de contorneado. En la mayoría de fresadoras, la fresa permanece inmóvil durante el proceso de mecanizado y es el propio objeto el que se va desplazando a lo largo de unos ejes. Sin embargo, existen también fresadoras en las que el movimiento de traslación es realizado por el brazo que porta la fresa. Podemos realizar una clasificación de las fresadoras existentes en función del número de ejes de los que disponen [Mudcharoen, 2010]:

- Fresadoras de 2 ejes (XZ). Los movimientos de traslación se realizan sobre 2 ejes. El eje Z es el encargado de realizar el movimiento longitudinal en sentido del eje principal de la máquina y el eje X es el que realiza el movimiento transversal, perpendicular al eje de la máquina.
- Fresadoras de 2 ejes y medio (XZ-Y). La fresadora puede realizar desplazamientos longitudinales y transversales en dos ejes y en un tercer eje cuando la máquina está detenida. El tercer eje realiza el movimiento perpendicular de la herramienta a los otros dos ejes.
- Fresadoras de 3 ejes (XZY). El brazo que porta la fresa puede desplazarse simultáneamente sobre 3 ejes.
- Fresadoras de 5 ejes (XZY $\alpha\beta$). Estas máquinas permiten realizar con el brazo movimientos de traslación en los tres ejes cartesianos así como de rotación en dos ejes.
- Fresadoras de 6 ejes (XZY $\alpha\beta\gamma$). Las máquinas de 6 ejes con máquinas de 5 ejes a las que se les ha proporcionado un eje de rotación adicional situado en la herramienta.

2.3.4.2 Tornos

Los tornos son máquinas de control paraxial que realizan trabajos de mecanizado denominados torneados. El mecanizado se realiza situando el material a mecanizar en un plato giratorio a altas revoluciones y aproximándole una herramienta cortante (habitualmente de tipo tórica) que erosiona parte del material superficial. El brazo que aproxima la herramienta suele realizar desplazamientos transversales, longitudinales o angulares a través de tres ejes. Todos ellos en movimiento definen una trayectoria helicoidal sobre el objeto que va a ser mecanizado (Figura 17).

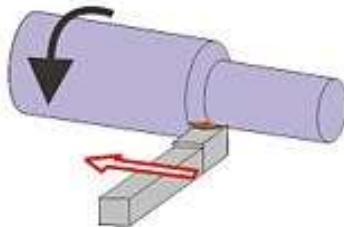


Figura 17. Simulación del proceso de torneado

2.3.4.3 Centros de mecanizado

Tradicionalmente las máquinas de mecanizado operaban con control mecánico. Con la evolución de la informática y a medida que los procesadores fueron evolucionando, éstos comenzaron a integrarse en la maquinaria de mecanizado mejorando la productividad de las industrias.

Los centros de mecanizado son máquinas automatizadas capaces de realizar múltiples operaciones de mecanizado con mínima intervención humana. El cambio automático de herramientas y el posicionado automático de piezas son virtudes adicionales que facilitan el proceso de mecanizado. Algunas de las ventajas que ofrecen estos sistemas frente a los sistemas tradicionales son [Cruz, 2005]:

- **Flexibilidad y versatilidad.** El alto grado de automatización permite a los centros de mecanizado realizar diversas operaciones de mecanizado a un mismo objeto.

- **Uniformidad.** Al ser trabajos automatizados totalmente, la diferencia entre dos piezas mecanizadas con las mismas instrucciones es nula. Este hecho es fundamental para los trabajos en serie.
- **Rapidez.** El disponer de cajones de herramientas y poder cambiar automáticamente de herramientas reduce aún más la intervención humana, con el consiguiente ahorro en tiempos de respuesta.
- **Seguridad.** La reducción de la intervención humana reduce la fatiga del usuario y aumenta los niveles de seguridad del puesto de trabajo.

Los centros de mecanizado, sin embargo, también disponen de inconvenientes:

- **Mayor coste.** El coste del mantenimiento de la maquinaria y de los accesorios es elevado.
- **Alta especialización.** Los operarios deben tener una formación especializada.

Las ventajas de este tipo de maquinaria hacen que hoy en día los centros de mecanizado están presentes en prácticamente todos los procesos de fabricación desde los sectores más avanzados (automóvil, aeronáutico, etc.) hasta los más tradicionales (termoplásticos, calzado, etc.).

2.3.5 Problemática general del proceso de mecanizado

En los inicios de la programación por control numérico, el usuario era el que introducía a pie de máquina la secuencia de instrucciones que ésta debía de realizar. Este conjunto de instrucciones constituían la trayectoria que debía seguir la herramienta. El lenguaje utilizado era un lenguaje de muy bajo nivel, mucho más cercano a la máquina que del usuario, por lo que la programación de mecanizados complejos resultaba costosa (Figura 18).

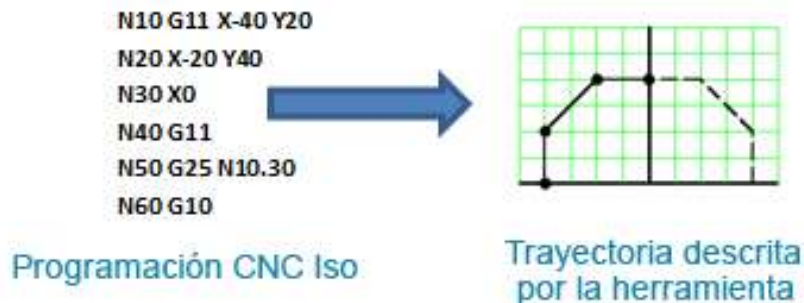


Figura 18. Programación CNC y trayectoria de herramienta equivalente.

Actualmente, los sistemas de fabricación asistidos por computador son capaces de generar automáticamente las trayectorias de mecanizado cometiendo menos errores y reduciendo el tiempo de generación. Sin embargo, la generación de las trayectorias de las herramientas a partir de un diseño geométrico no es una tarea fácil, no en vano uno de los problemas más importantes que deben resolver los sistemas CAD/CAM es la generación automática de trayectorias de mecanizado que den lugar a la fabricación de una pieza lo más parecida posible al modelo geométrico diseñado.

En general, las características que debe cumplir este proceso de generación de trayectorias son [Arkin, 2000]:

- **Validez:** Una vez se mecanice la pieza siguiendo las trayectorias de mecanizado calculadas, no deben existir diferencias con respecto al diseño original en cuanto a material sobrante o falta de material en alguna zona concreta.
- **Precisión:** Las piezas fabricadas deben ser piezas de alta precisión por lo que se deben reducir al mínimo los errores en el cálculo de las trayectorias
- **Eficiencia:** La generación automática de trayectorias en sistemas de fabricación asistidos por computador debe asegurar dos niveles de eficiencia en el proceso de fabricación que mejoren la productividad del proceso:
 - **Eficiencia de cálculo de trayectorias.** El tiempo de generación de las trayectorias debe minimizarse en términos de tiempo de proceso y de espacio de almacenamiento.

- **Eficiencia de fabricación.** El tiempo requerido para mecanizar todas las trayectorias de mecanizado es también un factor a minimizar.

Algunos requerimientos que deben cumplirse a la hora de generar trayectorias eficientes son:

- ✓ No se debe mecanizar ninguna región que haya sido previamente mecanizada. Además del incremento del tiempo de mecanizado, se pueden producir mermas en la calidad de la pieza final.
 - ✓ Debe evitarse un excesivo número de retracciones de la herramienta, que pueden provocar marcas en el material y elevar el tiempo de proceso.
- **Versatilidad:** Un sistema de generación de trayectorias debe adaptar las estrategias de generación de trayectorias en función de las características de la pieza a mecanizar.

La generación de trayectorias de mecanizado encierra dos problemáticas complejas a las que urge dar solución: la elección del tipo de trayectoria a realizar (planificación de la estrategia) y el cálculo de la trayectoria elegida. Ambos problemas no han sido resueltos completamente en la actualidad por lo que parece necesario hacer un esfuerzo en este sentido. Para ello resulta necesario analizar ambas problemáticas, encontrando soluciones que optimicen el proceso general de generación de trayectorias de mecanizado.

2.3.6 Estrategias de mecanizado

Entendemos por estrategia de mecanizado el conjunto de decisiones que conducen a la elección del tipo de trayectorias que llevarán a cabo el mecanizado de una pieza. Los factores a tener en cuenta antes de decidir qué estrategia utilizar en el mecanizado de una pieza son [Molina, 02]:

- La geometría de la pieza.
- La geometría de la herramienta.

- El número de ejes de la máquina.
- El tipo de mecanizado a realizar. La fabricación de una pieza se realiza alternando una serie de mecanizados con finalidades distintas:
 - **Vaciado o Desbastado:** mecanizado rápido y de baja precisión que busca eliminar el grueso del material sobrante. Es el primer proceso que se realiza en el mecanizado de una pieza.
 - **Acabado:** mecanizado lento de alta precisión que termina la mayor parte de la superficie final de la pieza.
 - **Refinado o perfilado:** Mecanizado lento, realizado con herramientas de pequeño tamaño y de muy alta precisión, que refina aquellas partes con un detalle más alto del que las herramientas de acabado pueden mecanizar.

La generación de trayectorias de mecanizado puede llevarse a cabo de tres maneras:

- **Generación automática de trayectorias.** El sistema genera las trayectorias de mecanizado automáticamente siguiendo la estrategia de mecanizado definida en el sistema. Este modo de fabricación suele emplearse por usuarios no expertos en mecanizado y generalmente da como resultado objetos de poca calidad.
- **Generación manual de trayectorias.** El usuario es el encargado de determinar la estrategia de mecanizado y de establecer cada punto del espacio para mecanizar una pieza determinada, lo cual requiere de un conocimiento amplio de la máquina y de la geometría de la pieza. Esta opción es utilizada tan sólo por usuarios expertos.
- **Generación semiautomática de trayectorias.**

Es la opción más utilizada. El usuario define la estrategia de mecanizado especificando una serie de parámetros relativos a las trayectorias de mecanizado. En ese momento es el sistema el que genera de manera automática la trayectoria a partir de los parámetros.

2.3.6.1 Tipos de estrategia de mecanizado

Podemos realizar una clasificación de los distintos tipos de estrategias en función de diversos criterios [Jimeno, 03]:

- **Profundidad de mecanizado.** Se especifica cómo se produce el acercamiento de la herramienta al objeto a mecanizar (Figura 19).

- *Mecanizado a altura constante.*

El mecanizado se realiza retrayendo la herramienta al material base a través de una serie de planos, paralelos entre sí y de profundidad diferente. Este mecanizado es el que suele utilizarse en los procesos de desbastado o vaciado.

- *Mecanizado a altura variable y orientación constante.*

El mecanizado se realiza adaptando la altura de la herramienta a la de la superficie del objeto a fabricar, manteniendo una orientación constante. Este tipo de mecanizado se suele utilizar en procesos de acabado.

- *Mecanizado a altura variable y orientación variable.*

En este tipo de mecanizado se adapta tanto la altura de la herramienta como su orientación, de manera que ésta siempre incida de forma perpendicular a la superficie de mecanizado. Este tipo de mecanizado se utiliza en mecanizados de refinado o perfilado en máquinas que permitan realizar rotaciones en el brazo portador de la herramienta (máquinas de 5 ejes).



Figura 19. Estrategias de mecanizado por profundidad

- **Disposición de la trayectoria.** Se especifica cómo se realiza el acercamiento de la herramienta al material base (Figura 20):

- *Paralelo o ZigZag.*

La herramienta va recorriendo el material trazando planos paralelos entre sí y perpendiculares al material. El ataque de un nuevo plano provoca un cambio de sentido que da forma de zigzag al mecanizado. Este tipo de estrategia se utiliza para mecanizados de desbastado o vaciado a altura constante.

- *Espiral o de contorno*

La herramienta se desplaza por el contorno de la pieza y va realizando saltos concéntricos que lo acercan al centro de la pieza. Este mecanismo, al igual que el ZigZag se utiliza para procesos de desbastado o vaciado.

- *Radial*

La herramienta parte desde el punto central de la pieza y va realizando trayectorias circulares hasta el exterior de la pieza. Se utiliza para mecanizados en altura variable.

- *Contorneado*

La trayectoria sigue el contorno de la pieza. Este método se utiliza fundamentalmente para realizar perfilados y refinados.

- *Ortogonal*

La herramienta se desplaza ortogonalmente en las concavidades donde el mecanizado sea complejo. Se utiliza pues en perfilado de objetos.

- *Isoparamétrico*

Las trayectorias se desplazan sobre líneas isoparamétricas situadas sobre la superficie.

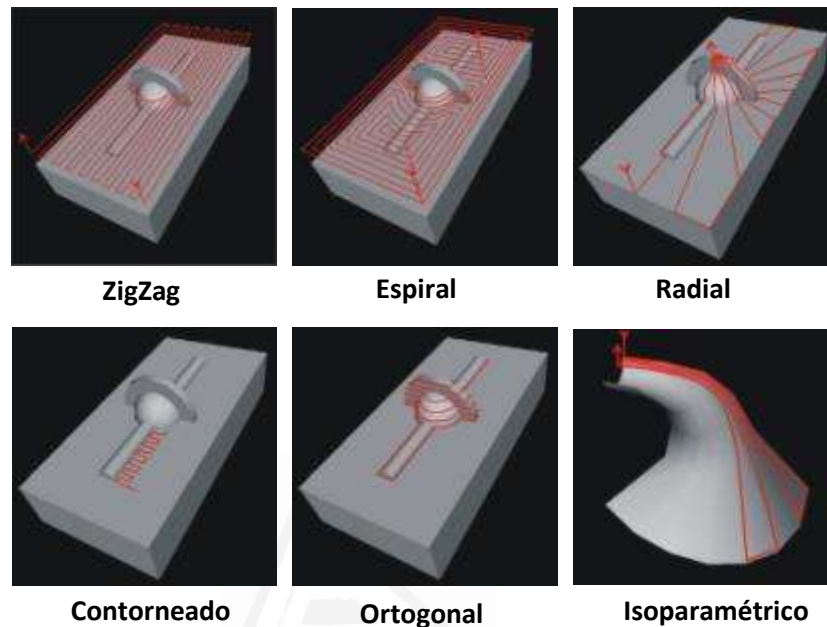


Figura 20. Estrategias de mecanizado por trayectoria

2.3.7 Cálculo de trayectorias

Una vez decidida la estrategia con la que se abordará el mecanizado de la pieza se deben obtener las trayectorias que deberá seguir la herramienta para mecanizar la pieza. Los métodos existentes para estos cálculos dependen del tipo de estrategia elegida. Los principales problemas asociados al cálculo de trayectorias son los siguientes [Molina, 02], [Jimeno, 03]:

- **Problemas de precisión:** Pueden producirse problemas derivados del mecanizado por defecto o por exceso del objeto. Para solucionar estos problemas es necesario controlar los siguientes aspectos del mecanizado:
 - *Distancia entre puntos sucesivos.*

Las máquinas de control numérico realizan una interpolación lineal entre posiciones sucesivas de la herramienta con lo que se pueden producir errores de mecanizado si entre dos puntos sucesivos de la trayectoria existen irregularidades en la superficie (Figura 21).

Distancias excesivas en puntos sucesivos facilitarán la aparición de este problema.

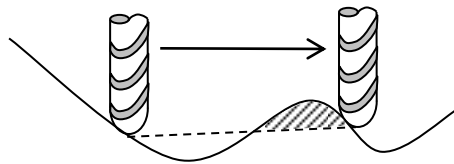


Figura 21. Mecanizado en exceso de material debido a error de interpolación

▪ *Distancia entre pasadas.*

Si la distancia entre pasadas sucesivas es excesiva el mecanizado puede producir montes y valles, especialmente cuando se utilizan herramientas no cilíndricas o la geometría del objeto es muy compleja (Figura 22). En cambio, si la distancia entre pasadas sucesivas es demasiado pequeña, los mecanizados de la herramienta se solaparán en exceso, hecho que retardará el tiempo de mecanizado total.

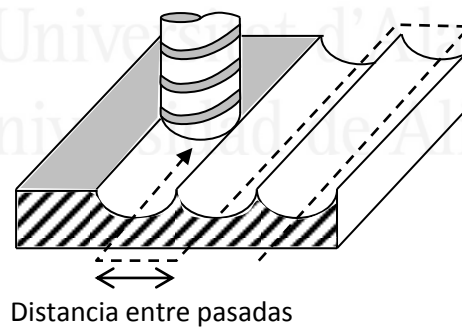


Figura 22. Problema precisión por distancia excesiva entre pasadas

- **Problemas por geometría de la herramienta incorrecta:** Si el radio de la herramienta es mayor que la inversa de la curvatura de la superficie pueden producirse mecanizados no deseados de material (Figura 23).

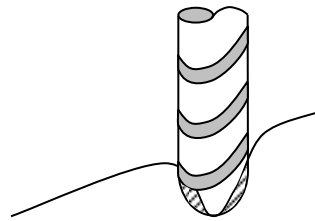


Figura 23. Mecanizado excesivo de material debido a introducción de herramienta demasiado grande

- **Problemas por inconsistencia topológica en el objeto:** Pueden producirse errores cuando los objetos no tienen una topología consistente: objetos abiertos, autointersecciones, superficies superpuestas, etc. El modelo geométrico a utilizar debe evitar la existencia de inconsistencias.
- **Problema del compensado.** En el proceso de mecanizado, la máquina CN dirige la trayectoria de la fresa controlando únicamente el centro de ésta. El problema de determinar para cada punto de la trayectoria dónde debe encontrarse el centro de la herramienta para que ésta sea normal a la superficie es denominado problema del compensado y es tal vez el problema más importante con el que se encuentran los sistemas de fabricación (Figura 24).

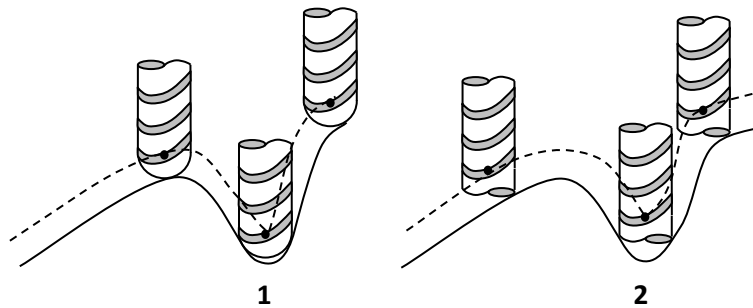


Figura 24. Problema del compensado con una herramienta esférica (1) y con una herramienta cilíndrica (2)

- **Problema de la planificación de las trayectorias.** Consiste en la planificación del orden en el que deben recorrerse las trayectorias para que no se produzcan errores y para que el tiempo de mecanizado sea el menor posible.

2.3.7.1 Soluciones para mecanizados de altura constante

El problema de calcular las trayectorias por las que pasará la herramienta en un mecanizado a altura constante se divide en dos fases:

1. Cálculo del contorno de la pieza para cada plano de mecanizado.
2. Obtención de las trayectorias de mecanizado dentro de cada plano.

Cuando se ha calculado el contorno de la pieza para un determinado plano, el cálculo de las trayectorias va a depender de la estrategia adoptada, ya sea para un mecanizado en paralelo o en espiral.

Mecanizados en paralelo o ZigZag

En este tipo de mecanizados se trazan rectas paralelas que intersectan con el contorno de la pieza [Huang, 2009]. En el caso de que las piezas a mecanizar contengan zonas interiores libres de mecanizado (islas), se emplean procedimientos para determinar las áreas a mecanizar

[Kim, 2006]. Una vez calculados los tramos rectos, se establece el orden en que deben recorrerse para minimizar el trayecto de la herramienta.

Uno de los problemas de este tipo de mecanizados son las excesivas retracciones de la herramienta. Las retracciones de herramienta no tan sólo ralentizan el proceso de mecanizado sino que acortan la vida útil de la herramienta y de la maquinaria [Chuang, 2006].

Mecanizados en espiral

Los mecanizados en espiral se basan en el cálculo de sucesivas curvas paralelas que van desde el contorno de la pieza hasta el centro de ésta. El cálculo de estas curvas se puede llevar a cabo mediante varios métodos. Algunos de ellos son los siguientes:

- Mediante la discretización de las curvas de contorno, convirtiendo el proceso en un problema de cálculo de paralelas rectas, controlando las autointersecciones que puedan provocarse [Chuang, 2006], [Molina, 2007], [Molina, 2008].
- Mediante el uso de mapas de proximidad, entre los que destaca el diagrama de Voronoi, sobre el que existe numerosa bibliografía: [Hinduja, 2010], [Costa, 2011].

2.3.7.2 Soluciones para mecanizados de altura variable

El mecanizado de altura variable tiene especial relevancia en la fabricación de superficies libres en máquinas de tres o más ejes. Este tipo de mecanizados presenta mayor complejidad que los mecanizados de altura constante. Generalmente el problema de mecanizado de altura variable se aborda a través de dos métodos [Jimeno, 2003]:

- Situando la trayectoria de mecanizado discretizada sobre la superficie de la pieza y calculando la posición del centro de la herramienta para que contacte con cada uno de los puntos de la trayectoria.
- Situando la trayectoria de mecanizado sobre una paralela a la superficie y calculando la posición del centro de la herramienta para que contacte con la superficie del objeto a mecanizar.

Algunas aproximaciones al problema del mecanizado de altura variable son:

Mecanizado isoparamétrico

Consiste en recorrer la superficie utilizando líneas isoparamétricas, líneas definidas mediante un parámetro constante u y otro que se incrementa constantemente v . Para cada dupla (u,v) se obtiene la posición sobre la superficie en coordenadas cartesianas [Yuwen, 2003], [Du, 2009], [Abbas, 2009]. El principal problema de este tipo de mecanizado es que dos rectas paralelas en el espacio paramétrico no lo son, en general, en el espacio cartesiano (Figura 25):

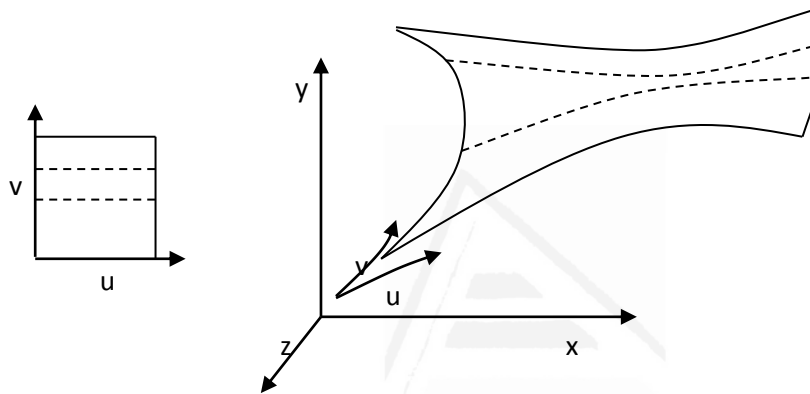


Figura 25. Problema del mecanizado isoparamétrico

Mecanizado no isoparamétrico

El mecanizado no isoparamétrico recorre la superficie trazando trayectorias paralelas en el espacio de representación. Los métodos de mecanizado en paralelo y en espiral pueden generalizarse para este tipo de mecanizados. En estos casos se deben obtener las trayectorias sobre un conjunto de superficies paralelas a la superficie a mecanizar. De nuevo es posible enfocar el problema a partir de dos métodos: calculando las trayectorias sobre la superficie original y obteniendo posteriormente curvas paralelas que se van alejando progresivamente de ésta o bien, calculando superficies paralelas a la original y posteriormente proyectando trayectorias bidimensionales sobre cada superficie paralela [Cao, 2007], [Ouyang, 2008]

El mecanizado de altura variable presenta un problema adicional denominado problema del compensado: no solamente hay que calcular la posición del centro de la herramienta para mecanizar un determinado

punto de la pieza, sino que es necesario evitar que cualquier punto de la herramienta colisione con la superficie original. Hay abundante bibliografía sobre el cálculo de compensado. El problema suele abordarse como fase final del cálculo de trayectorias resultando en una corrección de las trayectorias previas generadas, por ejemplo, mediante los métodos comentados anteriormente para realizar mecanizados paralelos, en espiral o isoparamétricos.

Algunas aproximaciones válidas son las siguientes:

- **Offset de la superficie:** consiste en calcular un desplazamiento de la superficie original en dirección normal a la misma [Kim, 2006], [Cao, 2007], [Zhang, 2007].
- **Compensación del vector normal:** versión discreta del método anterior que consiste en desplazar cada punto a mecanizar en su dirección normal [Ouyang, 2008].
- **Superficies base no paramétricas:** consiste en generar la trayectoria de mecanizado a partir de superficies definidas por conjuntos de puntos y no por ecuaciones paramétricas [Park, 2003], [Feng, 2005].
- **Z-maps:** Se utilizan mapas de proximidad en tres dimensiones. Los objetos se representan como un conjunto de valores de altura. El compensado de herramienta viene dado por la distancia existente entre la herramienta y la altura de un punto determinado. La superficie de mecanizado es calculada como un conjunto de valores máximos de posiciones de herramienta tales que no interfieren con la superficie original [Elber, 2003], [Seong, 2006], [Dhanik, 2010].
- **Visualización y verificación de trayectorias:** Consiste en la observación tridimensional de las mismas para verificar las trayectorias de mecanizado. Su uso está indicado en entornos de simulación para detectar posibles colisiones o fallos en trayectorias previamente calculadas [Wallner, 2001], [Chen, 2010].
- **Compensado morfológico:** Consiste en la utilización de conceptos y operaciones propias de la morfología matemática

para el cálculo del compensado [Jimeno, 2003], [Molina, 2007], [Molina, 2008].

La aplicación de morfología matemática para el cálculo del compensado de herramienta abre nuevas vías de aplicación de este paradigma formal en la resolución de problemas propios de procesos de fabricación. Esta consideración constituye el punto de partida de la presente investigación por lo que a continuación se realiza un estudio del estado del arte en morfología matemática.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

2.4 Morfología matemática

2.4.1 Introducción

La palabra morfología tiene su origen en el término griego morph: forma + logía: tratado. El paradigma de la morfología matemática se encarga del análisis y tratamiento de estructuras geométricas.

La base de la morfología matemática descansa en los estudios del científico alemán Hermann Minkowsky sobre teoría de conjuntos en figuras convexas. Minkowsky fue el primer científico en sumar formas a principios del siglo XX. Poco más tarde fue otro científico alemán llamado Hadwiger el que amplió estos estudios proponiendo la operación de resta de formas.

La morfología matemática nació en 1964 cuando los científicos Georges Matheron y Jean Serra aplicaron las ideas fundamentales de Minkowsky y Hadwiger en sus estudios sobre cuantificación de características minerales [Serra, 1982]. A partir de ese momento, la utilización de la morfología matemática fue rápidamente extendiéndose a nuevos campos de aplicación.

La morfología matemática se basa en la teoría de conjuntos. Los conjuntos representan formas de objetos en un espacio n-dimensional. Conceptos topológicos y geométricos tales como tamaño, forma, convexidad, conectividad... pueden caracterizarse por la morfología matemática en espacios continuos y discretos. A estos conjuntos se les aplican una serie de operaciones normalizadas denominadas operaciones morfológicas, operaciones que se basan en relaciones geométricas entre los puntos de los conjuntos.

En 1988 Jean Serra realizó una generalización de la morfología matemática en un marco teórico basado en retículos completos (conjunto de puntos ordenados con extremo superior [supremo] e inferior [ínfimo]). Esta generalización trajo flexibilidad a la teoría, permitiendo su aplicación a un número mucho mayor de estructuras [Serra, 1988].

2.4.2 Operaciones morfológicas

El objetivo de las operaciones morfológicas es la transformación de un conjunto de puntos que da forma a un objeto a partir de otro conjunto de puntos denominado elemento estructurante. El tamaño y la forma del elemento estructurante se elige en función de la morfología del objeto sobre el que va a actuar y de acuerdo a la forma final que se desea obtener. En la Figura 26 se pueden observar dos ejemplos de elementos estructurantes básicos:



Figura 26. Ejemplos de elementos estructurantes básicos

En morfología matemática existen dos operaciones fundamentales:

- **Erosión.** Es la transformación morfológica que combina dos conjuntos de puntos empleando el concepto de inclusión. La erosión de un conjunto A por un elemento estructurante B (centrado en el origen) se define como el conjunto de puntos x pertenecientes a A para los cuales B trasladado por x está contenido en A .

$$A \ominus B = \{x \in R^n, B_x \subseteq A\}$$

$$B = \{B_x: x = 0, 0 \in E\}$$

Expresión 7.

En la Figura 27 se puede observar el resultado (en color claro) de aplicar la operación básica de erosión morfológica sobre una forma rectangular (en color oscuro) a partir de un elemento estructurante circular.

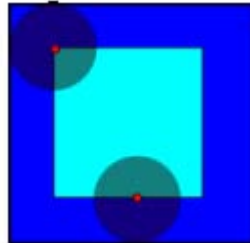


Figura 27. Erosión morfológica

- **Dilatación.** Es la transformación morfológica que combina dos conjuntos de puntos empleando el concepto de exclusión. La dilatación de un conjunto A por un elemento estructurante B se define como el conjunto de puntos x pertenecientes a A para los cuales B trasladado por x entra en contacto con A .

$$A \oplus B = \{x \in R^n, B_x \cap A \neq \emptyset\}$$

Expresión 8.

En la Figura 28 se puede observar el resultado (en color claro) de aplicar la operación básica de dilatación morfológica sobre una forma rectangular (en color oscuro) a partir de un elemento estructurante circular.

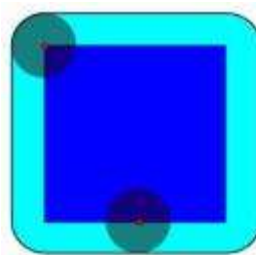


Figura 28. Dilatación morfológica

2.4.3 Aplicaciones de la morfología matemática

Actualmente el ámbito y alcance de los procedimientos morfológicos es muy amplio. La morfología matemática se ha utilizado desde sus inicios con gran éxito en el análisis de imágenes cuando la topología y la estructura geométrica de los objetos presentes en ellas son parámetros claves para su caracterización.

La aplicación de una operación de dilatación morfológica sobre imágenes en escala de grises o en color genera, generalmente, señales de mayor valor, es decir, imágenes más claras, puesto que la dilatación maximiza el valor de la señales y por tanto la luminosidad de éstas. En cambio, la aplicación de la operación de erosión morfológica atenúa la luminosidad de la imagen aumentando su contraste [Ortiz, 2002], [Giacomo, 2003], [Gutierrez, 2009] (Figura 29).

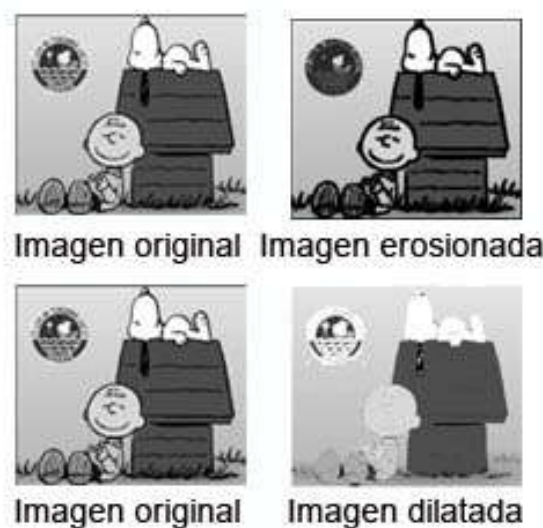


Figura 29. Erosión y Dilatación Morfológica en imagen en escala de grises

El uso de operadores morfológicos en imágenes binarias permite identificar y reconstruir de forma óptima elementos presentes en una imagen distorsionada o ruidosa. Existe abundante bibliografía al respecto de aplicaciones tales como: restauración, segmentación, detección de bordes, aumento del contraste, análisis de texturas,

eliminación de ruido, simplificación de texturas o escalado de imágenes en blanco y negro y en color (Figura 30 y Figura 31).

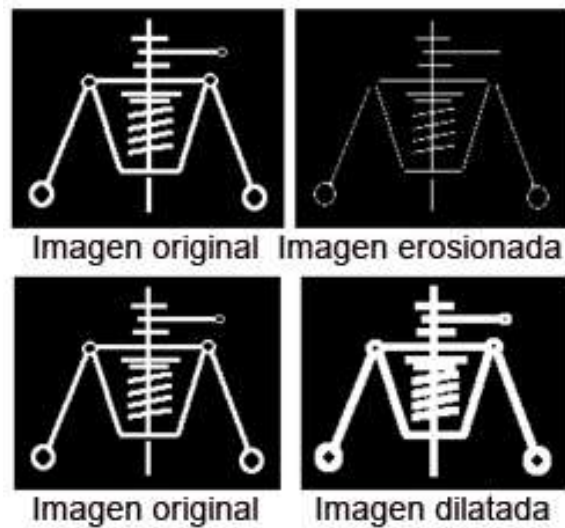


Figura 30. Erosión y Dilatación Morfológica en imagen binaria



Figura 31. Ejemplo de suavizado de formas mediante operación morfológica

El tratamiento de imágenes con morfología matemática es una importante herramienta en múltiples campos. Algunos de ellos son los siguientes [ISSM, 2011]:

- Sistemas de navegación: Análisis de imágenes 3D geográficas para proporcionar información semántica en los sistemas de navegación y en el rastreo de personas.
- Control industrial: Inspección de superficies para la detección de errores.
- Medicina y biología: Monitorización de procesos biológicos como procesos para la detección de moléculas anticancerígenas.
- Física: Predicción de propiedades físicas de materiales heterogéneos.
- Aeronáutica: Filtración y segmentación de imágenes obtenidas del espacio.
- Sistemas de tiempo real: Arquitecturas de procesamiento de imágenes rápido.
- Restauración: Restauración de películas cinematográficas antiguas.

2.4.4 Morfología matemática en tres dimensiones

Si bien, la mayoría de estudios en el campo de la morfología matemática se centran en el trabajo de imágenes en dos dimensiones, el marco conceptual que representa la morfología matemática no está restringido únicamente a las dos dimensiones.

El problema que surge en morfología matemática cuando se añade una tercera dimensión es el elevado coste computacional de sus operaciones básicas. Sin embargo, la reestructuración de estas operaciones básicas y el diseño de arquitecturas específicas han permitido la aplicación de este paradigma a las tres dimensiones. Ejemplos recientes de ello son los estudios de reconstrucción tridimensional de árboles sobre la base de escáneres láser terrestres [Gorte, 2004], el análisis de rugosidad de superficies [Schmähling, 2006], el reconocimiento automático de órganos abdominales (riñón, bazo, estómago,...) [Kaneko, 2008], o el modelado tridimensional del crecimiento de tumores cerebrales [Cortés, 2009].

2.4.5 Morfología matemática en la mecanización industrial

A pesar de que existe una evidente relación entre el mecanizado industrial y el concepto de erosión morfológica, no han aparecido históricamente referencias a la relación entre fabricación industrial y morfología matemática. Fue Antonio Jimeno en su Modelado Topológico del Proceso de Fabricación quien relacionó por primer vez el mecanizado industrial con el concepto de erosión morfológica, definiendo operaciones morfológicas adaptadas a la fabricación de piezas tridimensionales en sistemas asistidos por computador [Jimeno, 2003], [Jimeno, 2004]. Las conclusiones de esta investigación serán tratadas con mayor profundidad en un apartado posterior de este mismo capítulo.

Circunscribiendo las investigaciones de Antonio Jimeno, se ha presentado recientemente en [Molina, 2008] un nuevo formalismo que, apoyándose en el paradigma morfológico, resuelve el problema del cálculo generalizado de *offsets* en trayectorias de dos dimensiones. El *offset* de una trayectoria se define como el resultado de una operación morfológica: el lugar de los centros de la herramienta que tocan la superficie original. Esa operación morfológica es una especialización de la operación básica de dilatación adaptada al dinamismo propio que subyace al concepto de trayectoria (Figura 32).

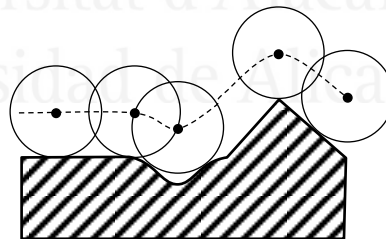


Figura 32. Cálculo de offset mediante operación morfológica de dilatación

Al trasladar el problema del cálculo del *offset* a un problema morfológico, no existen restricciones sobre la geometría de la herramienta, ni hay que realizar post procesos sobre los resultados del mismo.

El método propuesto da solución a problemas clásicos de los métodos tradicionales como son la existencia de intersecciones/discontinuidades en la trayectoria o la falta de generalidad (Figura 33).

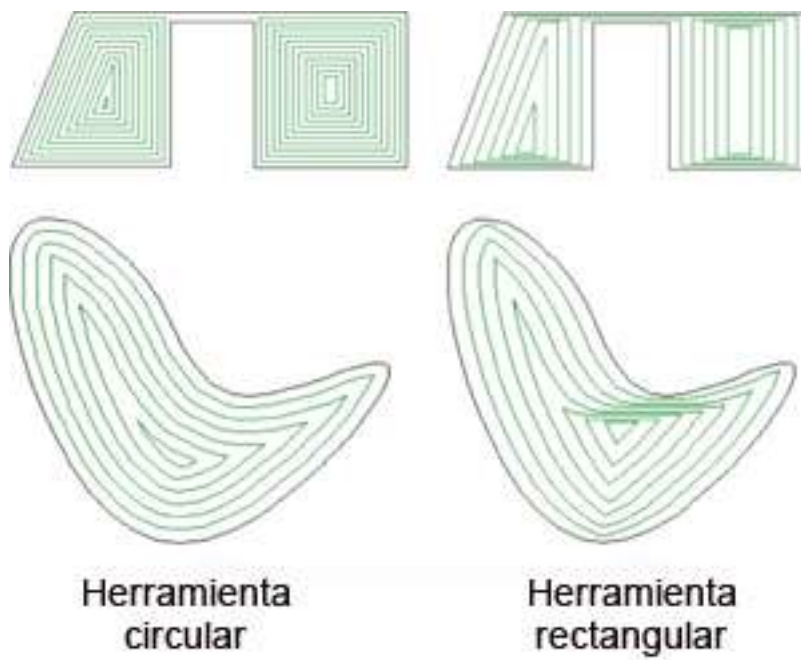


Figura 33. Ejemplos de cálculo de offsets utilizando morfología matemática

2.5 Revisión del estado del arte. Limitaciones de los modelos existentes

Al analizar el estado del arte nos damos cuenta de que los modelos descritos hasta el momento demuestran carencias importantes que dificultan su aplicación en determinados entornos industriales específicos. La mayoría de modelos existentes son modelos generales cuya aplicación a pequeños sectores industriales requiere de la intervención de personal altamente especializado no siempre disponible.

El diseño y fabricación de piezas asistido por ordenador debe ser contemplado como un proceso integrado, en el que las metodologías de diseño y de fabricación estén estrechamente relacionadas. Algunos de los modelos estudiados están básicamente orientados al diseño con lo que el mecanizado de las piezas resulta complejo y de baja calidad. Por contra otros modelos están más cercanos al proceso de mecanizado con lo que el diseño de las piezas es muy poco intuitivo y requiere de personal experto en mecanizado.

En cuanto al proceso de mecanizado, la obtención de trayectorias de mecanizado para un determinado objeto es un problema que no ha sido resuelto en la actualidad. Existen soluciones al respecto, pero están restringidas al uso de un tipo de maquinaria y herramientas determinadas con lo que el problema del mecanizado tan sólo se define asociado a un tipo de fabricación muy específica.

El modelo Superficie-Trayectoria enunciado en [Molina, 2002] y el Modelo Topológico del Proceso de Fabricación [Jimeno, 2003] abren nuevas vías de resolución a los problemas existentes en la actualidad en el proceso de diseño y fabricación de piezas por ordenador. Se ha considerado necesario dedicarle una especial atención a la descripción de dichos modelos, no en vano el modelo geométrico presentado en este trabajo comparte con ambos modelos parte de su filosofía.

2.6 El Modelo Superficie-Trayectoria y el Modelo Topológico del Proceso de Fabricación

2.6.1 Modelo Superficie-Trayectoria

El modelo Superficie-Trayectoria relaciona directamente el diseño de objetos tridimensionales con su mecanizado. Para ello, el modelo fundamenta el diseño de los objetos en la definición de trayectorias por las que se hacen pasar herramientas de mecanizado. Esa estrecha relación entre diseño y mecanizado otorga precisión y continuidad al proceso de diseño y fabricación asistido por ordenador, ofreciendo ventajas importantes respecto a los métodos existentes en la actualidad.

El modelo Superficie-Trayectoria se basa en tres elementos fundamentales que están íntimamente relacionados: el objeto a mecanizar, las trayectorias de mecanizado y las herramientas de mecanizado. La concreción de los objetos se lleva a cabo a través de la definición de superficies que personalizan el objeto sobre las que se describen directamente trayectorias de mecanizado por las que transitarán las herramientas de mecanizado.

A diferencia de otros modelos en los que las trayectorias de mecanizado pretenden fabricar el objeto diseñado, en el modelo Superficie-Trayectoria las trayectorias de mecanizado forman parte del diseño de la pieza. El diseño de un objeto no estará finalizado hasta que no se hayan definido todas las trayectorias de mecanizado y las herramientas de mecanizado que recorrerán esas trayectorias.

Cimentar el diseño de objetos en la definición de trayectorias sobre las que trasladar herramientas de mecanizado convencionales puede acotar la flexibilidad del modelo. Para evitar esta limitación, el modelo incorpora un concepto de herramienta mucho más amplio, la denominada *herramienta virtual*, elemento básico de diseño que aporta el modelo.

En el modelo Superficie-Trayectoria el usuario puede definir de forma completa tanto la forma como el comportamiento de las herramientas de mecanizado virtuales. Para ello, el sistema pone a disposición del

usuario un conjunto de constructores de superficies que permiten definir objetos geométricos sencillos. La idea es diseñar superficies sencillas con las que generar otras más complejas que conformen las herramientas virtuales. La forma en que esta herramienta virtual esculpe el material tampoco tiene porqué corresponderse con el funcionamiento de una herramienta real. El modelo plantea dos tipos de herramientas (Figura 34.):

- **Herramientas de rotación:** su funcionamiento es igual al de las reales: desbastan el material al girar sobre su eje. Por ello son simétricas con respecto al eje de giro.
- **Herramientas de barrido:** su funcionamiento no se corresponde con el de las reales pero facilitan la abstracción del proceso. Actúan arrancando el material mediante un barrido. Esto les permite no ser simétricas respecto a su eje longitudinal.

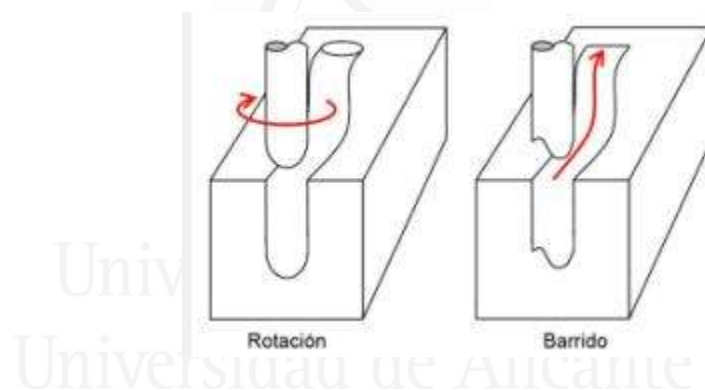


Figura 34. Herramientas virtuales de rotación y barrido

Para que los diseños elaborados con herramientas virtuales puedan ser mecanizados con herramientas convencionales es necesario una posterior redefinición de cada herramienta virtual en función de las herramientas reales de las que se disponga. Una vez diseñadas las herramientas virtuales, el modelo incorpora mecanismos sencillos para emular las herramientas virtuales con herramientas reales de mecanizado. Esta emulación permite elaborar trayectorias de mecanizado reales a partir de las virtuales concediendo al modelo independencia total entre el diseño del objeto y las herramientas de mecanizado disponibles (Figura 35).

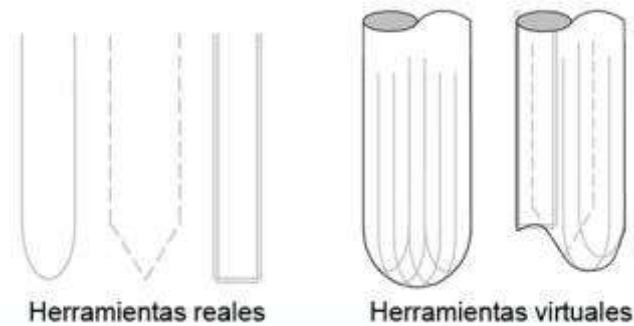


Figura 35. Ejemplo intuitivo de emulación de herramientas virtuales

Las ventajas más significativas de este modelo respecto a los existentes son:

- El diseño está estrechamente relacionado con la fabricación. Una vez diseñado el objeto, las trayectorias de mecanizado ya están definidas con lo que se elimina su complejo y costoso cálculo.
- Las herramientas virtuales permiten que el diseño del objeto sea independiente de las herramientas de mecanizado existentes.
- La definición de las superficies y de las trayectorias está basada en modelos matemáticos exactos, lo que confiere a los objetos que podamos diseñar una representación exacta.
- Las piezas finales son siempre objetos que pueden ser fabricados mediante máquinas de control numérico.
- El modelo permite la reutilización de diseños, proyectándose una misma trayectoria sobre varias superficies, recorriéndose una misma trayectoria con herramientas diferentes, utilizándose herramientas virtuales para definir herramientas más complejas, etc.
- Resulta cercano a la forma habitual de trabajo del especialista en mecanizado.

Sin embargo, el modelo presenta algunos inconvenientes por resolver:

- El algoritmo de representación Marching Cubes implementado por el modelo no otorga gran precisión a las representaciones. El modelo adolece de la falta de un sistema de visualización realista o rendering del objeto rápido y preciso.
- Aunque la filosofía del modelo facilita la validez y calidad del proceso de planificación y generación de trayectorias, el modelo no profundiza en la eficiencia de ambos procesos.

2.6.2 Modelo Topológico del Proceso de Fabricación

En el Modelo Topológico del Proceso de Fabricación se realiza un análisis de la problemática inherente a los procesos de mecanizado y digitalización de objetos. El modelo establece un marco conceptual que pretende resolver formalmente el problema de la generación de trayectorias mediante el uso de máquinas herramienta. Para ello, el modelo define el proceso del mecanizado en términos de un problema morfológico.

La fabricación de objetos por mecanizado relaciona férreamente la geometría del objeto fabricado con la geometría de la herramienta encargada del mecanizado. Para fundamentar este hecho el Modelo Topológico del Proceso de Fabricación presenta un modelo matemático topológico (MTF) que describe formas a partir de geometrías básicas, especificando el modo de obtenerlas, es decir, precisando las trayectorias que deben seguir las herramientas de mecanizado para obtener el objeto final (Figura 36).

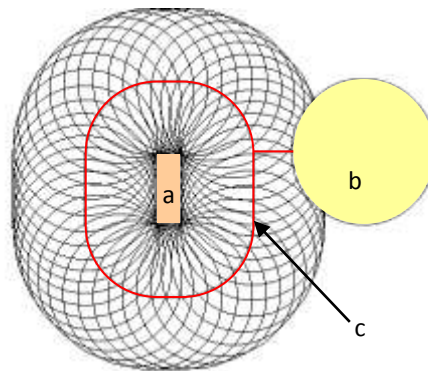


Figura 36. Mecanizado de objeto rectangular (a) con herramienta circular (b) siguiendo una trayectoria (c)

El proceso de mecanizado es modelado mediante una operación morfológica condicionada, en la que el elemento estructurante representa a la herramienta, el objeto sobre el que se aplica la operación representa la pieza a construir, y la condición representa la trayectoria de la herramienta.

El objeto a mecanizar es considerado como un conjunto de puntos de un espacio euclídeo tridimensional y cualquier transformación realizada sobre él se lleva a cabo dentro de un marco topológico (MTD) que aísla el proceso geométrico de fabricación de la componente tecnológica (Dominio de fabricación - D_F) (Figura 37). Las piezas y herramientas también son representadas mediante conjuntos de puntos que pueden ser considerados probabilísticamente o bien como resultado de la aplicación de alguna función de variable real. Esta forma de representación permite que sean utilizadas por las operaciones que define la morfología matemática convencional.

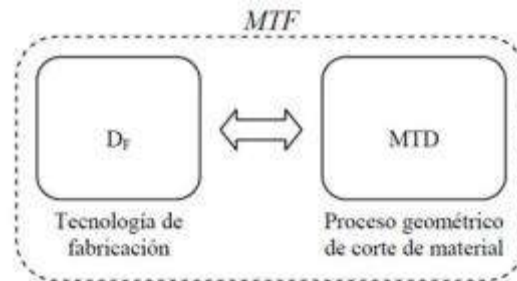


Figura 37. Proceso de mecanizado en el MTF

El sistema topológico MTD, se apoya en el paradigma formal que proporciona la morfología matemática erigiendo una especialización que dota de determinismo al paradigma y permite la formulación de conceptos como el de trayectoria de mecanizado a partir de operaciones morfológicas, operaciones que desde el punto de vista morfológico clásico estarían restringidas en su obtención.

Dicha especialización consiste en definir operadores instantáneos que, en vez de obtener un nuevo conjunto, tan sólo calculen un punto del conjunto que se obtendría tras la aplicación de las operaciones morfológicas convencionales. De esta manera, una secuencia de operaciones morfológicas instantáneas determinará un subconjunto o el conjunto completo de la operación morfológica asociada.

La especialización de la morfología matemática permite al modelo independizar los aspectos geométricos del proceso de fabricación de los puramente físicos derivados de la utilización de una determinada tecnología.

Para que el Modelo Topológico del Proceso de Fabricación resulte operativo incorpora un modelo computacional que permite llevar a la práctica las operaciones morfológicas definidas en el MTD.

Formular el proceso de mecanizado bajo un marco formal morfológico aporta al modelo las siguientes ventajas:

- El modelo independiza los aspectos geométricos del proceso de fabricación de los tecnológicos, lo que facilita la resolución de

complejos problemas de cálculo geométrico y permite la aplicación del modelo a cualquier entorno de mecanizado.

- En los casos de mecanizados en los que las máquinas están sujetas a fuertes restricciones dinámicas, los métodos actuales no permiten especificar estas restricciones de forma automática, por lo que la generación de trayectorias se debe hacer de forma parcialmente manual. El MTF es flexible a la hora de poder especificar cualquier tipo de recorrido, lo que lo convierte en especialmente interesante en el caso de máquinas que se reconvierten para poder ser usadas mediante un control numérico.
- El modelo permite la reconstrucción de superficies al ser capaz de ordenar nubes de puntos espacialmente y, por lo tanto, permitir su correcta interpolación.
- El coste de cálculo no crece de forma exponencial con la dimensión del elemento estructurante, como así ocurre con los métodos que se fundamentan en la morfología matemática. Este resultado es de interés para realizar operaciones morfológicas sobre objetos de más de dos dimensiones, ya que es en estos casos donde los métodos tradicionales presentan mayores problemas.

La principal carencia evidenciada por el modelo es que las operaciones morfológicas presentadas tan sólo están definidas para geometrias bidimensionales. El marco morfológico presentado en el modelo no contempla pues la representación de mecanizados de objetos tridimensionales.

Por otro lado, el modelo aborda específicamente el proceso de fabricación de la pieza, sin entrar a considerar procedimientos propios de la fase de diseño y representación de la pieza a fabricar.

Capítulo Tercero

Modelo Morfológico Determinista (MMD)



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

3.1. Introducción

El modelado de procesos tan complejos como son el diseño y la fabricación de objetos tridimensionales por mecanizado requieren de la utilización de un marco formal que permita describir con exactitud la geometría de los objetos diseñados y de las herramientas que intervendrán en el mecanizado de estos objetos. El marco conceptual deberá proporcionar igualmente procedimientos que emulen el arranque de material realizado por las herramientas de mecanizado en su desplazamiento sobre el bloque de material primitivo.

La morfología matemática es un paradigma formal para el análisis y tratamiento de estructuras geométricas que se fundamenta en la descripción de formas complejas a partir de otras más simples tomando como base la teoría de conjuntos. Los conjuntos representan formas de objetos en un espacio n -dimensional (no están restringidos a un número determinado de dimensiones) y las operaciones morfológicas representan relaciones geométricas entre los puntos de dichos conjuntos.

Existe una evidente relación entre el mecanizado de un objeto y el concepto formal de erosión morfológica. El proceso de mecanizado de piezas puede interpretarse como una operación morfológica, en la cual un elemento estructurante toca a un objeto, siguiendo una dirección determinada. La equivalencia con el mecanizado es directa. En un proceso real de mecanizado el elemento estructurante sería la herramienta y el objeto el material a erosionar. El proceso puede asimilarse, también, al de diseño de un objeto, estableciendo una analogía similar, en el que hablamos de herramientas de diseño y objetos. En este caso, las restricciones impuestas por las herramientas y materiales son mucho menores y el concepto se puede generalizar fácilmente a otras herramientas y operaciones mucho más versátiles.

El modelo matemático morfológico es de naturaleza indeterminista por lo que necesita inicialmente una redefinición en algunos aspectos para adaptarlo convenientemente a la dinámica propia del proceso de mecanizado.

Es conveniente resaltar el hecho de que el término *indeterminista* no hace referencia al concepto matemático que cataloga un experimento como no predecible sino al concepto computacional que advierte de la inexistencia de orden establecido en el tratamiento de los elementos que participan en la operatoria. El resultado final de aplicar una operación morfológica clásica siempre es el mismo, independientemente del orden en el que se hayan tratado los elementos de los conjuntos que participan en la operación.

Descripción del proceso

El proceso de diseño y fabricación de una pieza con máquinas herramienta se basa en la transformación de un objeto primitivo mediante el contacto con una herramienta determinada. En el modelo presentado todos los objetos participantes del proceso (piezas y herramientas) son considerados conjuntos de puntos geométricos ordenados (retículos completos), por lo que el problema de fabricación se puede formular como un proceso de transformación de un conjunto de puntos (pieza) a partir de otro conjunto de puntos (herramienta) dentro de un marco formal morfológico aislado de cualquier restricción tecnológica.

Las características tecnológicas propias del entorno de fabricación (planificación de trayectorias, herramientas de mecanizado disponibles,...) participarán en el proceso sin intervenir directamente en el proceso geométrico de transformación de la pieza (Figura 38).

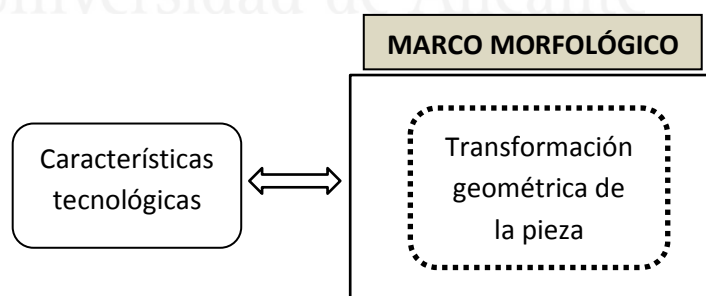


Figura 38. Proceso de fabricación

La representación de los objetos y herramientas mediante conjuntos de puntos permite su adaptación a los principios propios de la morfología

matemática clásica. El modelo presentado aborda el proceso de diseño y fabricación de objetos como un problema morfológico donde un conjunto de puntos es transformado por otro conjunto de puntos como resultado de una operación morfológica en la que intervienen ambos conjuntos.

La morfología matemática clásica define una operación básica que se asemeja al proceso real de mecanizado con máquinas herramienta: la erosión morfológica. En esta operación fundamental, un conjunto de puntos transforma a otro conjunto de puntos por inclusión de un objeto en otro. En la Figura 39 se puede observar el cálculo (discretizado para su representación) de la erosión morfológica que produce un objeto circular en otro rectangular.

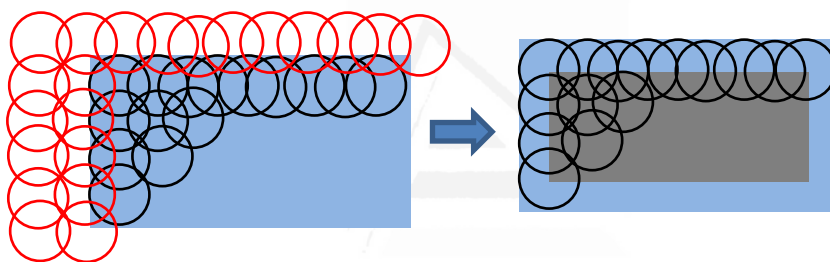


Figura 39. Cálculo de erosión morfológica (resultado en gris)

En un proceso real de fabricación, la transformación de un objeto mediante una herramienta se puede formular a través de una operación morfológica de erosión en la que un conjunto de puntos (herramienta) erosiona a otro conjunto de puntos (objeto). Sin embargo, el carácter no determinista de la morfología matemática clásica imposibilita que sus operaciones básicas se adecúen a la dinámica propia de conceptos como el de trayectoria de mecanizado.

La operatoria morfológica no atiende a ordenaciones temporales ya que sus primitivas actúan sobre conjuntos de puntos continuos y producen como resultado nuevos conjuntos de puntos continuos, sin que se establezca un orden de recorrido sobre sus elementos (Figura 40).

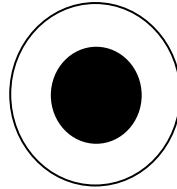


Figura 40. Erosión morfológica clásica no determinista de un objeto circular por otro objeto circular (resultado en negro)

Esta relación de orden es necesaria cuando el paradigma morfológico debe escenificar procesos dinámicos tales como el de mecanizado. La secuenciación de operatoria permite describir la acción de las herramientas de mecanizado en su desplazamiento a través de las trayectorias de mecanizado descritas.

Para introducir la secuenciación en las operaciones morfológicas el modelo realiza una especialización de estas operaciones que dota de determinismo al paradigma. La especialización, basada en la propuesta que el Modelo Topológico de Fabricación enuncia en [Jimeno, 2003] consiste en la definición de operadores instantáneos que calculan un punto concreto del conjunto de puntos que proporcionaría la operación morfológica clásica.

Esta interpretación parcial permite al modelo definir operaciones morfológicas parciales o totales de un objeto, operaciones que no tienen sentido en la morfología clásica pero son importantes desde el punto de vista del mecanizado. La secuenciación posterior de operadores parciales constituirá el conjunto completo de la operación morfológica asociada con carácter determinista (Figura 41).

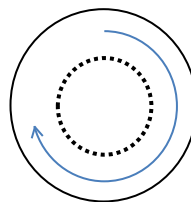


Figura 41. Erosión morfológica determinista de un objeto circular por otro objeto circular (resultado en discontinuo)

El modelo presentando en este trabajo aborda el proceso de diseño y fabricación de objetos a partir de un marco formal inspirado en el paradigma morfológico clásico que permite la definición de objetos y herramientas y la utilización de operaciones morfológicas básicas. El modelo añade una especialización de las operaciones morfológicas básicas, dotándolas del determinismo propio de los procesos físicos de fabricación de piezas por mecanizado (Figura 42).

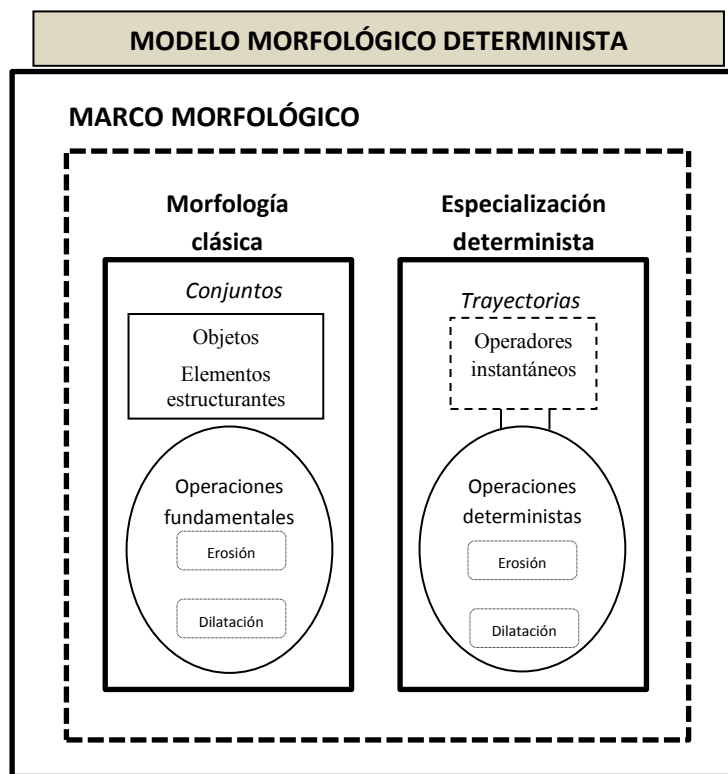


Figura 42. Estructura general del Modelo Morfológico Determinista

3.2 Formalización del marco morfológico.

El marco formal morfológico propuesto (MMD) viene definido por la siguiente expresión:

$$MMD = E, OB, EE, OP$$

Expresión 9.

- E* Representa el espacio de representación de los conjuntos que intervienen en el modelo.
- OB* Representa el conjunto de objetos que serán transformados por las operaciones morfológicas.
- EE* Representa el conjunto de elementos estructurantes mediante los cuales se llevarán a cabo las operaciones morfológicas.
- OP* Hace referencia al conjunto de operaciones morfológicas que permiten transformar el conjunto de objetos *OB* mediante el uso de los objetos *EE*.

Los conjuntos *OB* y *EE* son retículos completos del espacio euclídeo *E* en el que se definen los conjuntos de puntos geométricos del espacio de trabajo. En el caso de objetos bidimensionales $E \equiv R^2$, y para objetos tridimensionales $E \equiv R^3$. En general, $E \equiv R^n$. La operatoria morfológica propuesta no se restringe pues a un espacio bidimensional ni tridimensional sino que es aplicable a cualquier espacio R^n . Para facilitar la representación el presente trabajo utiliza figuras en 2 o 3 dimensiones, siendo siempre casos particulares del conjunto general.

La familia de elementos estructurantes *EE*, está determinada por aquellos objetos que tienen como centro el origen de coordenadas del espacio euclídeo, es decir:

$$EE = \{B_x: x = 0, 0 \in E\}$$

Expresión 10.

La familia de objetos a transformar *OB* estará constituida por aquellos objetos *X* cuyo centro *c* está desplazado respecto al origen de coordenadas:

$$OB = \{X_c: c = 0 + d, d \in E\}$$

Expresión 11.

Es importante destacar en este punto una primera diferenciación del modelo morfológico presentado respecto del paradigma morfológico clásico. Frente al modelado sólido que presenta la morfología matemática, el modelo propuesto es un modelo superficial, es decir, trabaja únicamente con información superficial de los objetos, sin que exista información alguna sobre su interior.

Como consecuencia de estas consideraciones, la información geométrica relevante de los objetos se encuentra en su contorno o frontera con lo que el modelo caracterizará a los objetos por su contorno sin que esta caracterización suponga una pérdida de generalidad.

Se define la función $In A$ que permite recuperar el conjunto de puntos situados en el interior de un conjunto A . La función obtiene el conjunto de posiciones en las que se puede situar el centro de una n -bola sólida de radio ε de forma que ésta quede situada en el interior del objeto A :

$$In A = \{x \in E / \exists \varepsilon > 0: B(x, \varepsilon) \subset A\}$$

$$B(x, \varepsilon) = n - \text{bola con centro } x \text{ y radio } \varepsilon$$

Expresión 12.

La función que permite relacionar un conjunto con su frontera o contorno se denominará $Fr A$ y estará formada por el conjunto de puntos pertenecientes al contorno del objeto A . Esta función no es más que el resultado de aplicar el filtro morfológico de extracción de frontera (β_0) [González, 2008], que viene dado por la resta del objeto A con el conjunto de puntos interiores del objeto (Figura 43).

$$Fr A = \beta_0 = A - In A$$

Expresión 13.

La operación morfológica de diferencia viene dada por la siguiente expresión:

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = A \cap B^c$$

$$B^c = \{\text{complementario de } B\}$$

Expresión 14.

La Figura 43 muestra el proceso de cálculo del contorno. En a) se muestra el objeto A del cual queremos obtener el contorno, en b) el conjunto de puntos interiores de A, resultado de aplicar la función $In(A)$, en c) el proceso de resta del objeto con el conjunto de puntos interiores y finalmente en d) el conjunto de puntos que conforman la frontera del objeto A.

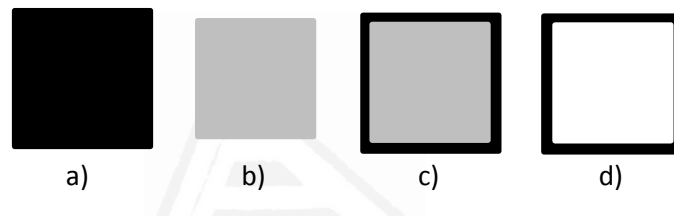


Figura 43. Proceso de cálculo de contorno

Una vez definidos formalmente los objetos a transformar y los elementos estructurantes que llevarán a cabo las transformaciones resulta necesario definir formalmente el conjunto de operaciones que transformarán finalmente el conjunto de objetos OB a partir del conjunto de objetos EE.

En la morfología matemática convencional las operaciones de transformación de los objetos se definen como una sucesión de operaciones que actúan sobre los elementos que los componen [Serra, 1982]. Sobre estas operaciones elementales o básicas no se establece orden de aplicación alguno.

Para que el modelo propuesto defina morfológicamente procesos deterministas es necesario incorporar al paradigma morfológico una especialización de las operaciones morfológicas que las adapte a este tipo de procesos. El determinismo proporcionado a la operatoria será el que permita al modelo cumplir con su finalidad funcional.

El conjunto de operaciones morfológicas que transforman el conjunto de objetos OB a partir del conjunto de objetos EE viene definido pues por la siguiente expresión:

$$OP = \langle OP_{ND}, OP_D \rangle$$

Expresión 15.

OP_{ND} Representa el conjunto de operaciones no deterministas propias de la morfología matemática clásica.

OP_D Representa el conjunto de operaciones morfológicas especializadas, dotadas de orden de aplicación.

La Figura 44 muestra gráficamente el conjunto de operaciones morfológicas presentes en el modelo.

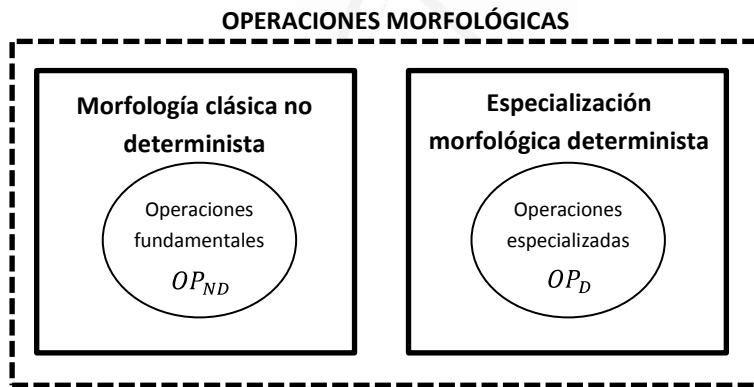


Figura 44. Operaciones morfológicas de transformación

A continuación se definen las operaciones morfológicas básicas que constituyen la base del resto de operaciones morfológicas de filtrado. Se detallan algunos de los filtros morfológicos más comunes si bien con la definición de las operaciones morfológicas de erosión y dilatación queda cubierta en extensión la totalidad de la operatoria morfológica.

Para cada operación morfológica se define una especialización que dota a la operación de orden de aplicación, otorgándole a la operatoria morfológica un determinismo inexistente desde el punto de vista de la morfología matemática clásica.

3.2.1 Operaciones morfológicas de transformación deterministas

Para que el paradigma morfológico pueda modelar procesos dinámicos con orden de aplicación es necesario dotarlo de operatoria específica que secuencie la generación de resultados y dote a la operatoria morfológica del determinismo propio de este tipo de procesos.

A continuación se define la operación básica con trayectoria en la que se fundamentará la especialización determinista de las operaciones morfológicas básicas y de sus filtros asociados.

3.2.1.1 Operación básica con trayectoria

La operación básica con trayectoria \diamond_{τ} constituye la base de la especialización morfológica propuesta en esta investigación. Esta operación morfológica permite la definición de operadores morfológicos que obtengan de forma secuencial conjuntos de puntos ordenados, determinismo inexistente desde el punto de vista del paradigma morfológico clásico.

Para guiar la generación ordenada de resultados, la operación obtiene el conjunto de puntos mediante la aplicación reiterada de otra operación básica fundamental, denominada operación básica instantánea ($\diamond_{\tau(k)}$). Esta operación se denomina instantánea ya que tan sólo calcula un punto del conjunto total de puntos que se obtendrían tras la aplicación de una operación morfológica convencional.

La aplicación secuencial de operaciones morfológicas instantáneas conformará la operación básica con trayectoria que obtendrá de forma ordenada el conjunto completo de la operación morfológica clásica.

Antes de entrar a detallar en profundidad la operación básica instantánea a continuación se describe un escenario de ejemplo que permite comprender mejor la naturaleza de la operatoria morfológica que se definirá con posterioridad. En concreto, el escenario constituye una analogía geométrica en dos dimensiones que representa el entorno en el que se llevarán a cabo las transformaciones morfológicas propuestas. Es importante recalcar el hecho de que el escenario representa únicamente un ejemplo de aplicación de la operatoria

morfológica para el caso particular de objetos bidimensionales sin que ello represente el único ámbito de aplicación del modelo. En la etapa de definición de la operatoria morfológica todas las operaciones se generalizarán para el caso n -dimensional, extendiéndose la aplicación del modelo a escenarios de cualquier dimensionalidad.

Escenario ejemplo de la operatoria morfológica determinista

En una transformación morfológica un conjunto de puntos (objeto) es transformado por otro conjunto de puntos (elemento estructurante) como resultado de la aplicación de una operación morfológica en la que intervienen ambos conjuntos. La transformación se lleva a cabo posicionando el elemento estructurante en determinadas posiciones respecto del objeto a transformar.

En el modelo propuesto el elemento estructurante estará centrado inicialmente en el origen de coordenadas y tendrá libertad de desplazamiento en la dirección que marca un vector v que coincide con el eje de ordenadas. El objeto a transformar A estará posicionado a una distancia determinada del elemento estructurante B .

La Figura 45 muestra la situación inicial de un proceso de transformación morfológica de un objeto rectangular por un elemento estructurante circular.

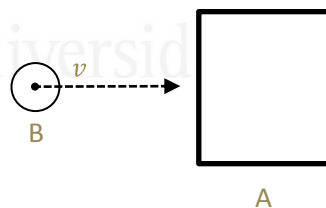


Figura 45. Escenario inicial de operación morfológica

Al ser el modelo propuesto un modelo superficial, los únicos puntos que intervendrán en las operaciones morfológicas serán los puntos frontera de los objetos y de los elementos estructurantes. La operatoria morfológica se fundamentará en el contacto del elemento estructurante sobre el conjunto de puntos que conformen la frontera del objeto a transformar. La Figura 46 muestra el contacto de un elemento

estructurante circular sobre un punto concreto de la frontera de un objeto rectangular.

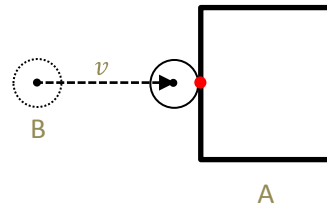


Figura 46. Contacto del elemento estructurante con objeto

En este caso concreto, el contacto del elemento estructurante con el objeto se realiza manteniendo al elemento estructurante en el exterior del objeto tal y como ocurre en operaciones morfológicas clásicas como la de dilatación. Sin embargo la operatoria morfológica clásica incluye operaciones en las que el contacto del elemento estructurante con el objeto a transformar se realiza desde el interior del propio objeto. La operación morfológica clásica de erosión es un ejemplo de ello. La Figura 47 muestra un ejemplo de escenario de aplicación de este tipo de transformación morfológica. En a) se muestra el estado inicial de la operación morfológica y en b) el contacto del elemento estructurante con un punto concreto de la frontera del objeto, con el elemento estructurante posicionado en el interior en el objeto a transformar:

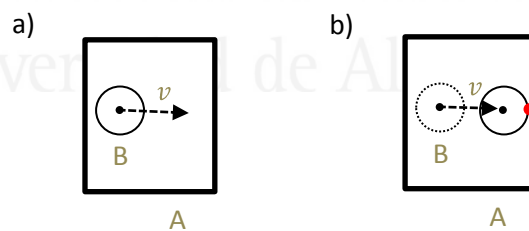


Figura 47. Contacto del elemento estructurante con un punto frontera del objeto con el elemento estructurante incluido en el objeto

La morfología matemática clásica proporciona resultados completos, es decir, sus operaciones se aplican sobre el conjunto completo de puntos que conforman el objeto a transformar. La operatoria morfológica propuesta ha de asegurar que el elemento estructurante entra en contacto con todos y cada uno de los puntos frontera del objeto a

transformar, siempre y cuando esos puntos sean realmente accesibles al elemento estructurante. El conjunto de puntos frontera accesibles dependerá de la geometría del objeto a transformar y la del propio elemento estructurante utilizado en la operación.

Si el elemento estructurante se desplaza en una única dirección determinada por el vector director v resulta necesario definir un conjunto de transformaciones que, aplicadas sobre el objeto A , permitan el contacto del elemento estructurante sobre el conjunto total de puntos frontera del objeto A . La Figura 48 muestra el conjunto de puntos no accesibles por el elemento estructurante si éste se desplaza únicamente en la dirección que indica el vector de desplazamiento v . En a) se muestra un ejemplo en el que el elemento estructurante contacta con el objeto desde el exterior y en b) un ejemplo en el que el elemento estructurante contacta desde el interior:

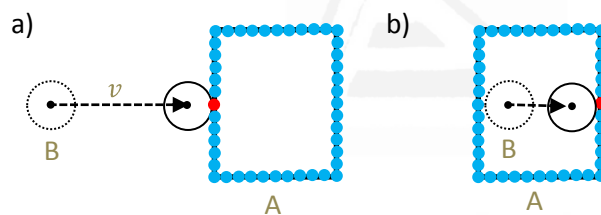


Figura 48. Conjunto de puntos no accesibles por el elemento estructurante

Una primera transformación que facilita el acceso del elemento estructurante sobre el conjunto completo de puntos superficiales del objeto consiste en modificar reiteradamente la orientación del objeto a transformar. Si se modifica la orientación del objeto a transformar, el desplazamiento del elemento estructurante en la dirección que marca el vector v provocará el contacto de éste sobre un punto distinto de la frontera del objeto (Figura 49):

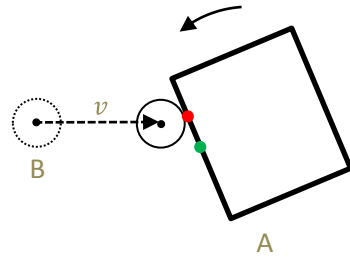


Figura 49. Contacto del elemento estructurante con un punto superficial del objeto con diferente orientación

Sucesivas modificaciones en la orientación del objeto, facilitarán el contacto del elemento estructurante sobre diferentes puntos de la frontera del objeto (Figura 50).

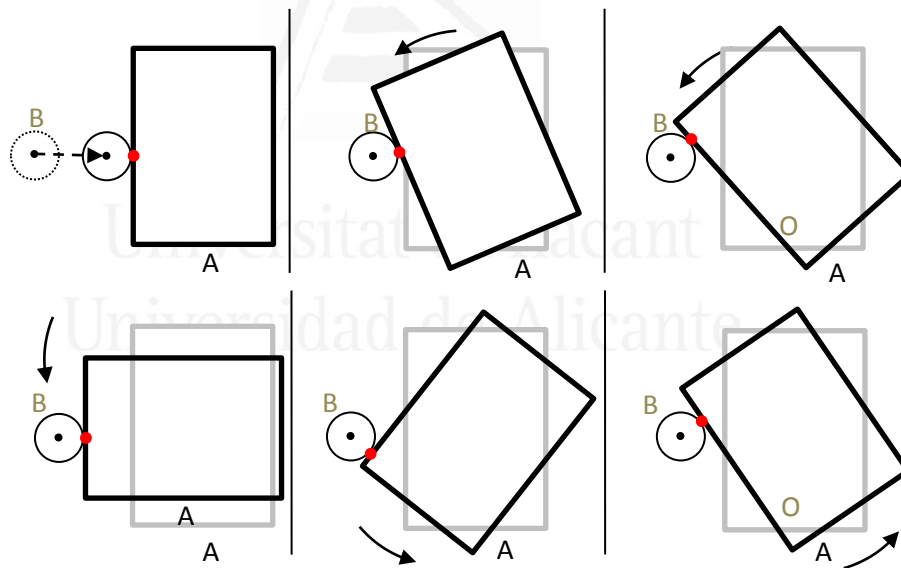


Figura 50. Diferentes puntos de contacto de B con A tras modificar la orientación de A.

La Figura 51 muestra en a) un conjunto de transformaciones de orientación, y en b) el conjunto total de puntos frontera sobre los que ha podido contactar el elemento estructurante tras el conjunto completo de transformaciones.

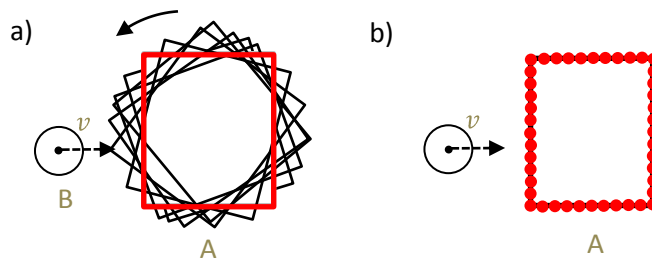


Figura 51. Transformaciones de orientación

Sin embargo, la transformación de rotación del objeto no garantiza en todos los casos la incidencia del elemento estructurante sobre el conjunto completo de puntos que conforman la frontera del objeto si el elemento estructurante se desplaza únicamente en la dirección que marca el vector v .

En la Figura 52 se puede observar un ejemplo en el cual el elemento estructurante no es capaz de acceder a un punto concreto de la frontera del objeto a transformar. En a) se muestra el punto concreto de la frontera del objeto sobre el que debe contactar el elemento estructurante y en b) se muestra cómo el elemento estructurante puede efectivamente entrar en contacto con este punto. El apartado c) muestra el estado inicial que propone el modelo y en d), e) y f) se observan diversas orientaciones del objeto A, que no consiguen el objetivo de que el elemento estructurante incida sobre el punto deseado.

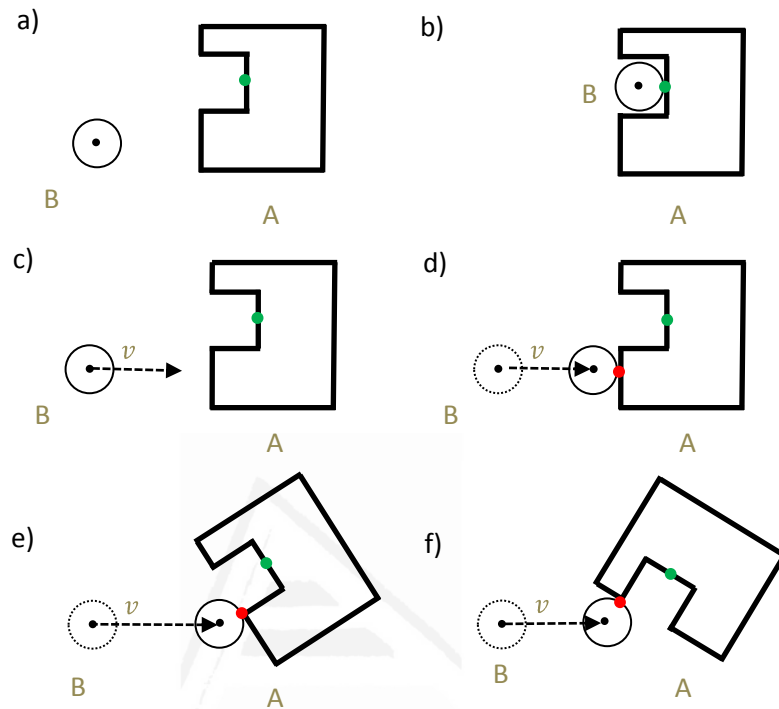


Figura 52. Punto de superficie inaccesible para el elemento estructurante

La Figura 53 muestra otro caso que ilustra el mismo problema. En a), se muestra el escenario inicial donde aparecen el elemento estructurante *B* y el punto concreto del objeto *A* con el que debe contactar el elemento estructurante. En b) se muestra cómo el elemento estructurante puede contactar con el punto en concreto y en c) y d) se muestra cómo modificar tan sólo la orientación del objeto no facilita que el elemento estructurante incida sobre el punto frontera del objeto.

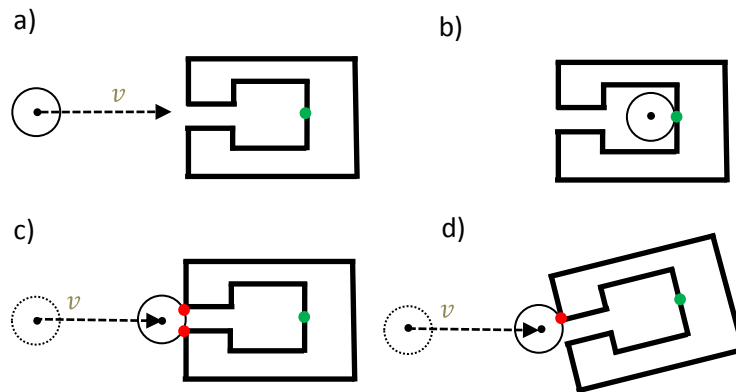


Figura 53. Ejemplo de punto frontera inaccesible

Las modificaciones en la orientación del objeto tan sólo aseguran en algunos casos el acceso del elemento estructurante al conjunto completo de puntos accesibles de la frontera del objeto a transformar. Para asegurar que en todos los casos el elemento estructurante incide sobre el conjunto completo de puntos frontera del objeto resulta necesario aplicar una transformación adicional al objeto. Esta transformación consistirá en una operación de traslación que modifique la posición inicial del objeto respecto del elemento estructurante. El conjunto total de traslaciones facilitarán (siempre y cuando la geometría del objeto y del elemento estructurante lo permitan) el contacto del elemento estructurante al conjunto completo de puntos frontera del objeto a transformar.

La Figura 54 y la Figura 55 muestran cómo los problemas con los que se encuentra el elemento estructurante para contactar con puntos concretos de los objetos se solucionan modificando la posición del objeto a transformar. En a) se presenta el escenario inicial, mostrándose el punto concreto de la frontera del objeto sobre el que se desea hacer contactar el elemento estructurante. En b) se muestra la transformación que modifica la posición del objeto, acción que permite, tal y como se muestra en c) y d), que el elemento estructurante incida correctamente sobre el punto deseado.

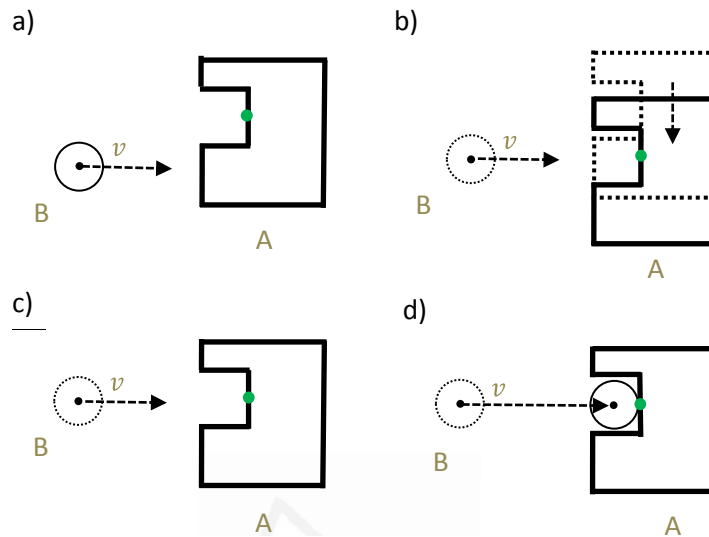


Figura 54. Transformación adicional de posición que facilita el contacto del elemento estructurante

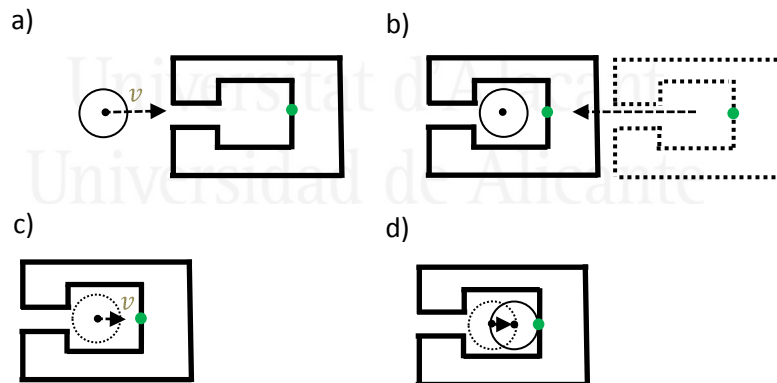


Figura 55. Modificación de posición de objeto para facilitar el contacto del elemento estructurante

Las traslaciones del objeto aseguran que el elemento estructurante contacte con el conjunto completo de puntos frontera del objeto a

transformar, mientras que las rotaciones proporcionan una mayor generalidad y libertad en el espacio de representación.

A continuación se define la función trayectoria, función que atiende aspectos de orientación y posición del elemento estructurante respecto del objeto a transformar, introduciendo el concepto de recorrido o trayectoria que añade la característica de ordenación a la operatoria morfológica, determinismo inexistente en el paradigma morfológico clásico.

Función trayectoria

Se define una función ζ de parámetro real que obtiene el conjunto total de orientaciones-posiciones que deben aplicarse al objeto a transformar para facilitar que el elemento estructurante, en su desplazamiento en la dirección del eje de ordenadas, pueda entrar en contacto con el conjunto completo de puntos accesibles que conforman la frontera del objeto.

El dominio y el recorrido de la función ζ son los siguientes:

$$\zeta: [0,1] \rightarrow R^n \times R^n$$

$$\zeta k = (V_1, V_2, \dots, V_n) P_1, P_2, \dots, P_n,$$

Expresión 16.

En el espacio de representación R^3 :

$$\zeta: [0,1] \rightarrow R^3 \times R^3$$

$$\zeta k = (v_x, v_y, v_z) p_x, p_y, p_z$$

Expresión 17.

Para un valor k del espacio normalizado $[0,1]$ la función ζ devuelve un par de valores (orientación, posición), que definen las transformaciones que deben realizarse sobre el objeto para asegurar que un punto frontera concreto de éste resulte accesible al elemento estructurante.

El recorrido completo del espacio paramétrico describirá la secuencia completa de posiciones y orientaciones que deberán aplicarse al objeto para que el elemento estructurante pueda contactar con el conjunto total de puntos que conforman la frontera del objeto. Esa sucesión de posiciones y orientaciones se halla ordenada por un criterio de vecindad en los puntos, de forma que el recorrido secuencial del espacio normalizado detallará la secuencia de transformaciones a realizar para que el elemento estructurante pueda contactar, de forma ordenada, sobre el conjunto completo de puntos frontera del objeto.

En este punto es importante destacar que la decisión de que el elemento estructurante se desplace en una sola dirección sobre el objeto a transformar no corresponde a una restricción del sistema, sino a una consideración que facilita la generación ordenada de resultados, especialización que permite dotar de determinismo al paradigma morfológico. Asimismo, conviene resaltar que las transformaciones realizadas sobre el objeto son transformaciones duales, es decir, se obtiene el mismo resultado al desplazar el objeto que al desplazar el elemento estructurante. En lo sucesivo se utilizará la definición estándar de trayectoria o su dual, en función de las necesidades de cada situación.

Conocidas las transformaciones necesarias para que la operatoria morfológica presentada obtenga resultados completos y ordenados, resulta necesario definir funciones encargadas de aplicar dichas transformaciones al conjunto completo de puntos que conforman la frontera accesible del objeto a transformar.

Se define la función trayectoria en un punto $\tau_{p,k}$ que aplica las transformaciones de rotación y traslación que aseguran que un punto concreto p del objeto será accesible por el elemento estructurante. La definición formal de la función trayectoria de un punto τ , es la siguiente:

$$\tau : R^n \times R \rightarrow R^n$$

$$\tau_{p,k} = p' \rightarrow \text{Pos}(\zeta k) \cdot (\text{Rot}(\zeta k) \cdot p)$$

Expresión 18.

Rot es una matriz de rotación generada a partir del vector orientación que proporciona la función ζ para el valor paramétrico k y Pos es una matriz de traslación generada mediante la posición devuelta por la función ζ para el mismo valor paramétrico.

Concretada la función trayectoria para un punto, la definición de una nueva función que extienda la definición de trayectoria en un punto al conjunto completo de puntos que conforman un objeto resulta trivial. La función trayectoria en un objeto $\tau A, k$ vendrá dada por la aplicación de la función trayectoria para el conjunto completo de puntos que constituyen el objeto:

$$\tau: P R^n \times R \rightarrow P(R^n)$$

$$\tau A, k = \{ p \in E / \forall q \in A p = \tau q, k \}$$

Expresión 19.

La función trayectoria en un objeto orienta y posiciona al objeto de forma que un punto concreto de éste resulte accesible por el elemento estructurante, en su desplazamiento en la dirección del eje de ordenadas. Debido a que las transformaciones aplicadas sólo efectúan rotaciones y traslaciones, el objeto no sufrirá transformaciones de escalado ni deformaciones. Como resultado, la operación mantiene la forma del objeto aunque cambia la orientación y posición del mismo respecto del elemento estructurante en el espacio de representación.

La aplicación secuencial de la función trayectoria en el espacio paramétrico normalizado transformará el objeto de forma ordenada a medida que el parámetro real vaya tomando valores consecutivos. El recorrido completo del espacio normalizado asegurará que todos los puntos accesibles de la frontera del objeto entrarán en contacto con el elemento estructurante en su desplazamiento en la dirección que marca el eje de ordenadas (siempre y cuando la geometría del objeto y del elemento estructurante lo permitan).

Una vez definida la función trayectoria, se presenta a continuación la operación básica instantánea, operación morfológica fundamental que constituye la base de la operatoria morfológica determinista presentada en esta investigación.

Operación básica instantánea

La operación básica instantánea propuesta ($\diamond_{\tau(k)}$) es una operación básica morfológica que incluye un parámetro k que indica su posición dentro del conjunto total de operaciones elementales que compondrán la operación básica completa con trayectoria. La operación se denomina instantánea ya que obtiene un único punto del conjunto total de puntos que se obtendrían tras la aplicación de una operación morfológica convencional.

En términos descriptivos, la operación básica instantánea obtiene el centro del elemento estructurante cuando éste se desplaza una distancia determinada siguiendo una dirección v hasta llegar a tocar a un objeto frontera A al que se le ha aplicado la función trayectoria. La operación representa el acercamiento del elemento estructurante al objeto a transformar dentro de un proceso de transformación morfológico.

En concreto la operación instantánea básica se formula de la siguiente forma:

$$A \diamond_{\tau k} B = p \in E, p = \tau^{-1} q, k, q = \text{dist}_v B, \tau A, k \cdot v$$

$$\tau^{-1} = \{\text{inversa de } \tau\}$$

Expresión 20.

Cada una de las operaciones instantáneas efectúa transformaciones homogéneas en el objeto, transformaciones de cuerpo rígido definidas en la función trayectoria, que transforman los objetos sin escalarlos ni deformarlos. La inclusión de la función trayectoria en la operación instantánea asegura que el cálculo de la distancia se realiza siempre entre el elemento estructurante y un punto accesible de la frontera del objeto a transformar.

La función de distancia $\text{dist}_v X, Y$ obtiene la distancia que ha de trasladarse como mínimo un objeto X para entrar en contacto con otro objeto Y , siguiendo una dirección determinada v . Esa distancia viene dada por la mínima distancia existente entre los dos objetos en la dirección que determina el vector dado.

Resulta conveniente destacar en este momento que la operación instantánea básica no obtiene finalmente el centro q del elemento estructurante cuando éste contacta con el objeto a transformar. Una vez obtenido el punto q se deben deshacer las transformaciones aplicadas por la función trayectoria sobre el objeto en ese punto, para que al situar el objeto en su posición y orientación iniciales, el punto obtenido por la operación instantánea básica mantenga su posición relativa respecto al punto frontera del objeto contactado.

La Figura 56 muestra la posición del punto q calculada por la operación básica instantánea una vez deshechas las transformaciones realizadas por la función trayectoria sobre el objeto A y situado éste en su posición inicial. Se puede observar en la figura cómo, una vez situado el objeto en su posición y orientación inicial, el punto q obtenido no mantiene la posición relativa que mantenía con el punto frontera sobre el que contactó el elemento estructurante:

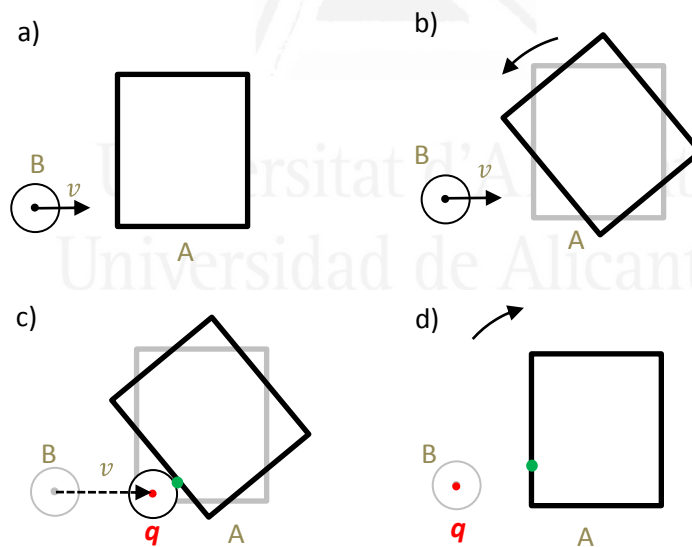


Figura 56. Cálculo del punto q en la operación básica instantánea

La función trayectoria de un objeto modifica la posición y orientación del conjunto de puntos frontera de un objeto mediante la aplicación de matrices de rotación y traslación. Para deshacer estas transformaciones basta con aplicar a los puntos obtenidos las inversas de dichas matrices.

La función trayectoria inversa en un punto τ^{-1} aplica a un punto las matrices de transformación inversas de rotación y posición definidas en la función trayectoria (aplicadas en orden inverso).

$$\tau^{-1} : R^n \times R \rightarrow R^n$$

$$\tau^{-1}(q, k) = q' \rightarrow \text{Rot}^{-1}(\zeta k) \cdot (\text{Pos}^{-1}(\zeta k) \cdot q)$$

Expresión 21.

La Figura 57 muestra gráficamente la aplicación de la operación básica instantánea sobre un objeto A como una sucesión de cuatro fases: Una primera fase inicial (a) donde el elemento estructurante B aparece alejado del objeto a transformar A, una segunda fase (b) en la que se aplica la función trayectoria al objeto A para un valor k determinado, una tercera fase (c) en la que se calcula la distancia que ha de desplazarse el centro del elemento estructurante para entrar en contacto con el objeto A y una fase final (d) en la que se aplica la función trayectoria inversa al centro q de la herramienta para calcular el punto p final que obtiene la operación morfológica.

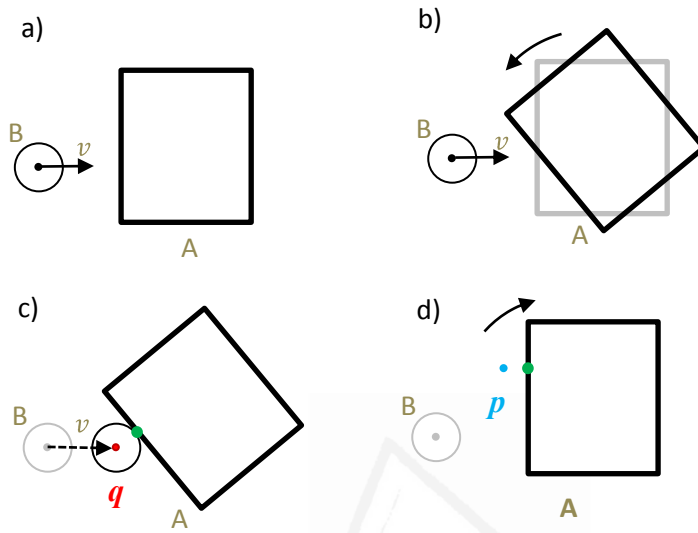


Figura 57. Descripción geométrica de la operación básica instantánea

Operación básica con trayectoria

Definida la operación instantánea $\diamond_{\tau k}$ que obtiene un punto concreto del espacio paramétrico en el que se encuentra definida la transformación completa del objeto, la aplicación reiterada de estas operaciones básicas instantáneas recorriendo todo el espacio paramétrico definirá por sí misma la operación básica con trayectoria completa ($A \diamond_{\tau} B$)

$$A \diamond_{\tau} B = \bigcup_{k \in [0...1]} A \diamond_{\tau k} B$$

Expresión 22.

La aplicación secuencial de operadores instantáneos en todo el rango paramétrico $[0...1]$ asegura la aplicación completa del operador morfológico. El valor paramétrico k se encuentra normalizado, por lo que el conjunto de transformaciones se encuentran ordenadas en función de dicho parámetro con posición inicial $k = 0$ y final $k = 1$. Ese

orden en la generación de resultados viene asociado a la relación de orden que establece la función trayectoria. La operación básica con trayectoria encadena una secuencia de operaciones morfológicas, estableciendo un determinismo que las dotará de un movimiento ordenado en el espacio, determinismo inexistente en el paradigma morfológico clásico.

Es importante recalcar de nuevo que tanto en las traslaciones morfológicas como en las rotaciones aplicadas en la operación básica con trayectoria, los objetos que participan en la operación permanecen invariantes en cuanto a tamaño y forma alterándose tan sólo su posición y orientación en el espacio. El propósito de la operación básica instantánea no es realizar transformaciones en la forma de los objetos, tan sólo secuenciar la generación de resultados de las operaciones morfológicas de transformación que serán las encargadas de modificar la forma de los objetos OB, reproduciendo los procesos propios de sistemas deterministas.

Operación básica con trayectoria parcial

La función trayectoria τ asegura una aplicación completa del operador básico a todo el conjunto de puntos que conforman la frontera accesible del objeto ordenados según el espacio paramétrico $k=0\dots 1$. Sin embargo, es posible definir recorridos del espacio paramétrico que no completen todo el espacio paramétrico constituyendo subconjuntos de la operación morfológica completa. El recorrido parcial del espacio paramétrico constituye la operación con trayectoria parcial ($A \diamond_{\tau \langle i,j \rangle} B$):

$$A \diamond_{\tau \langle i,j \rangle} B = \bigcap_{k \in [i\dots j]} A \diamond_{\tau k} B, 0 \leq i < j \leq 1$$

Expresión 23.

Definida pues la operación básica con trayectoria de forma completa o parcial, el siguiente paso consiste en integrar esta operación en la operatoria morfológica clásica incorporando de esta forma al modelo un conjunto de operaciones morfológicas (OP_D) dotadas de determinismo que transformen un objeto a partir de un elemento estructurante.

En la morfología matemática clásica existen dos operaciones morfológicas fundamentales: la erosión y la dilatación. Ambas operaciones constituyen la base para la definición de operadores morfológicos de filtrado. A continuación se definen formalmente y se especifica la especialización que realiza el modelo para dotarlas de determinismo.

3.2.1.2 Erosión con trayectoria

La operación erosión en morfología matemática se puede definir según la expresión:

$$A \ominus B = \{y \in E, B_y \subseteq A\}$$

Expresión 24.

Una interpretación descriptiva de la operación lleva a definirla como el lugar de las posiciones del centro del elemento estructurante B cuando está incluido en A. El contorno de la erosión viene definido por los centros del elemento estructurante cuando éste toca el borde interior del objeto.

La erosión morfológica actúa sobre el conjunto de puntos de A produciendo como resultado un nuevo conjunto de puntos transformado sin que se establezca un orden de recorrido sobre sus elementos (Figura 58). Esta relación de orden es necesaria cuando el paradigma morfológico debe escenificar procesos dinámicos deterministas.

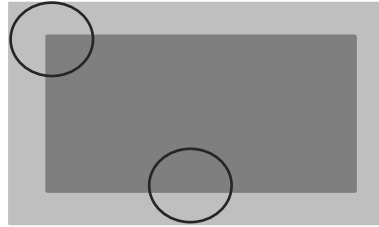


Figura 58. Ejemplo de erosión morfológica clásica

Para dotar a la erosión morfológica de ese necesario determinismo el modelo incorpora una especialización de la operación de erosión morfológica basada en la utilización de la operación básica instantánea.

Al integrar la operación básica instantánea en la operación de erosión el conjunto final de la erosión total será obtenido mediante la aplicación repetida de operaciones básicas instantáneas de parámetro real variable, definiéndose la erosión instantánea $\Theta_{\tau(k)}$ como un paso de la erosión morfológica:

$$A \ominus_{\tau(k)} B = \{ p \in E : p = \tau^{-1}(q, k), q = \text{dist}_v(B, \tau(A, k)) \cdot v \wedge B_q \subseteq \tau(A, k) \}$$

Expresión 25.

En este punto es necesario realizar una puntualización sobre la función distancia dist_v que calcula la distancia mínima entre el objeto y el elemento estructurante. En el caso de la erosión morfológica con trayectoria, la definición de erosión morfológica exige que el elemento estructurante B se encuentre incluido completamente en el objeto A . La función distancia integrada en la erosión morfológica debe calcular pues la distancia mínima del objeto A con el elemento B respetando esta restricción, es decir, situando el elemento estructurante en el interior del objeto. Esta situación no se da en operadores morfológicos como el de dilatación en los cuales el elemento estructurante debe tocar al objeto desde el exterior de éste, como muestra la Figura 59.

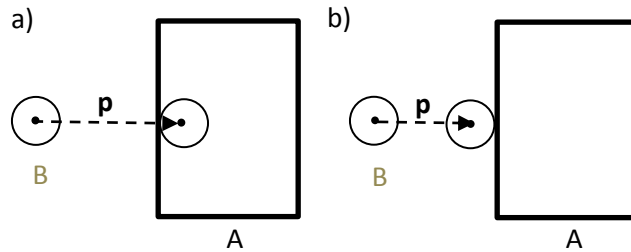


Figura 59. Distancia mínima a calcular en a) erosión morfológica, b) dilatación morfológica

En la Figura 60 se representa la aplicación repetida de operaciones básicas instantáneas de erosión con distinto valor paramétrico k .

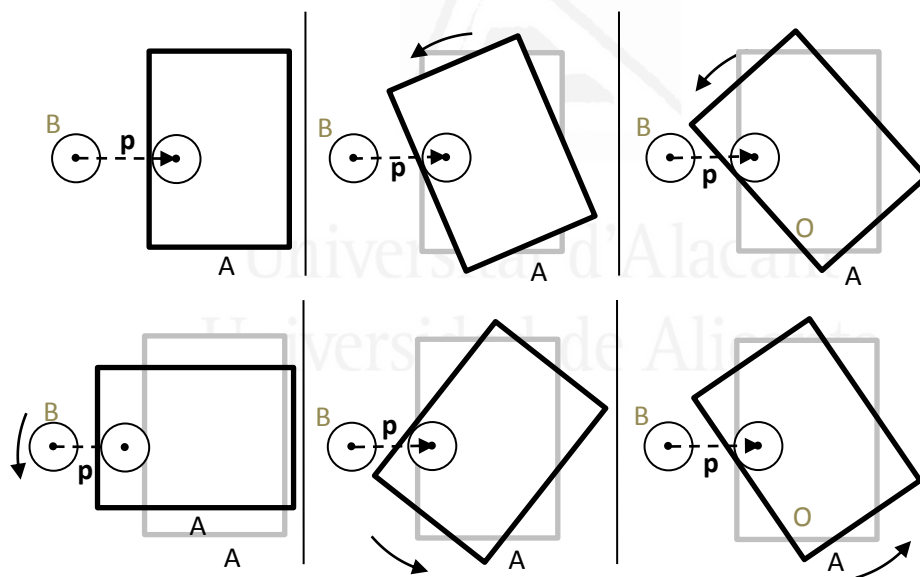


Figura 60. Operaciones básicas instantáneas con distinto valor paramétrico

Se define la erosión con trayectoria Θ_τ como el conjunto de puntos obtenidos por aplicación repetida de la erosión instantánea $\Theta_{\tau(k)}$ para el dominio real $[0...1]$.

$$A \ominus_{\tau} B = \bigcap_{k \in [0...1]} (A \ominus_{\tau(k)} B) = \{p \in E : p = \tau^{-1}(q, k), q = \text{dist}_v(B, \tau(A, k)) \cdot v \wedge B_q \subseteq \tau(A, k)\}$$

Expresión 26.

La función trayectoria τ asegura un recorrido interior a través del objeto A en el espacio normalizado $[0...1]$. Si la variable real k recorre todo el intervalo, se obtendrá como resultado la frontera de la erosión completa del objeto, ya que se habrán obtenido todos los centros del elemento estructurante cuando éste toca al objeto (Figura 61).



Figura 61. Ejemplo de erosión morfológica con trayectoria

En este punto se puede observar la diferencia entre la erosión morfológica clásica y la erosión con trayectoria. Mientras que en la erosión morfológica el resultado era un conjunto continuo de puntos que representaban el contorno y el interior del objeto erosionado, la erosión con trayectoria trabaja únicamente con información superficial de los objetos obteniendo, de forma ordenada, el contorno del objeto erosionado sin que exista información alguna sobre su interior (Figura 62).

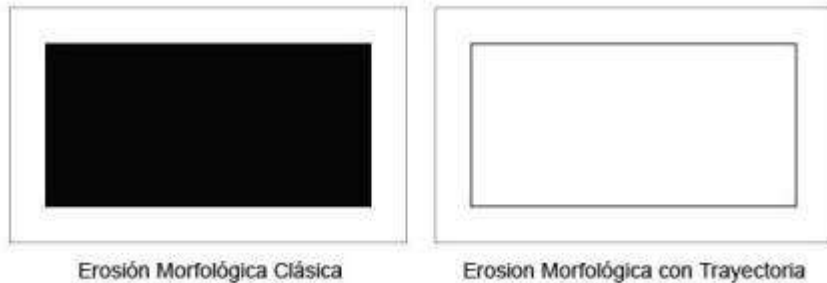


Figura 62. Erosión morfológica clásica vs morfológica con trayectoria

A pesar de que ambas operaciones no devuelven el mismo conjunto de puntos sí que se puede demostrar que la frontera de la erosión morfológica y la erosión con trayectoria coinciden: Si A y B son dos conjuntos incluidos en E , entonces la erosión con trayectoria es igual a la frontera de la erosión:

$$A \ominus_{\tau} B = FR A \ominus B \subseteq A \ominus B$$

Expresión 27.

Para demostrar este hecho se va a hacer uso del método de demostración formal de reducción al absurdo.

- Demostración $A \ominus_{\tau} B \subseteq FR A \ominus B$

Supongamos que es cierta la hipótesis de que un punto de la erosión con trayectoria $A \ominus_{\tau} B$ no es parte del conjunto de puntos frontera del objeto $FR A \ominus B$.

Los puntos obtenidos por la erosión con trayectoria $A \ominus_{\tau} B$ corresponden con los lugares geométricos del centro del elemento estructurante cuando éste está contenido en A y toca al menos un punto de su contorno.

$$p = \tau^{-1} q, k, q = \text{dist}_v B, \tau A, k \quad \cdot v \wedge B_p \subseteq \tau A, k$$

Expresión 28.

Cualquier punto resultado de aplicar la operación de erosión con trayectoria estará pues alejado del contorno de A una distancia mínima que permita situar el elemento estructurante en el interior del objeto.

La erosión morfológica obtiene el conjunto de puntos que posicionan el elemento estructurante en el interior del objeto, sin entrar a valorar si el elemento estructurante entra en contacto con el contorno del objeto o no. La erosión morfológica asegura únicamente que el elemento estructurante estará contenido en el objeto, con lo que conformarán la erosión morfológica todas aquellas posiciones que sitúen el elemento estructurante en el interior del objeto tocando su contorno o no.

$$A \ominus B = \{x \in R^n, B_x \subseteq A\}$$

Expresión 29.

La frontera de la erosión morfológica elimina los puntos que posicionan el elemento estructurante dentro del objeto sin contactar con el contorno de éste, es decir, los puntos que no están separados del contorno por la distancia mínima que permite situar el elemento estructurante en el interior del objeto.

$$FR A \ominus B = A \ominus B - In A \ominus B$$

$$In A = \{x \in E / \exists \varepsilon > 0: B(x, \varepsilon) \subset A\}$$

$$B(x, \varepsilon) = n - \text{bola con centro } x \text{ y radio } \varepsilon$$

Expresión 30.

Para que un punto pertenezca a la frontera de la erosión morfológica $A \ominus B$ debe pues estar alejado del contorno del objeto A la distancia mínima que permita posicionar el elemento estructurante en el interior del objeto A (Figura 63).

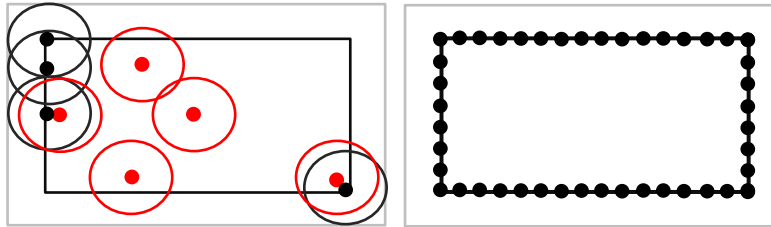


Figura 63. Cálculo de puntos de la frontera de la erosión morfológica

Si un punto pertenece al conjunto de puntos resultado de aplicar la operación de erosión con trayectoria al objeto A , el punto estará situado a una distancia mínima min del contorno del objeto A tal que el elemento estructurante centrado en ese punto estará contenido en A .

$$dist\ p, A = \min, \forall p \in A \ominus_r B$$

$$dist = \{ \text{distancia entre el punto } p \text{ y el objeto } A \}$$

Expresión 31.

Si la hipótesis inicial de que ese punto no pertenece a la frontera de la erosión morfológica es cierta, el punto pertenecerá al interior del objeto, con lo que estará a una distancia mínima del contorno del objeto que asegure que el elemento estructurante esté contenido en el objeto más una distancia δ proporcional al radio ε de la n -bola utilizada en la función $In\ A$ para calcular los puntos interiores del objeto:

$$dist\ p, A = \min + \delta, \delta > 0, \forall p \in FR\ A \ominus B$$

Expresión 32.

Si igualamos las distancias en ambos casos, se llega a una clara contradicción:

$$min = \min + \delta, \delta > 0$$

Expresión 33.

La hipótesis de partida es pues falsa, cualquier punto perteneciente a la erosión con trayectoria forma parte del conjunto de puntos obtenidos por el contorno de la operación de erosión morfológica clásica.

- Demostración $FR A \ominus B \subseteq A \ominus_{\tau} B$

Esta segunda implicación se demuestra de forma idéntica a la primera. Suponemos verdadera la hipótesis de que un punto de la frontera de la erosión morfológica clásica $FR A \ominus B$ no pertenece al conjunto de puntos resultado de aplicar la erosión con trayectoria $A \ominus_{\tau} B$. Un punto perteneciente a la frontera de la erosión morfológica $A \ominus B$ debe estar distanciado mínimamente respecto al contorno del objeto A de forma que el elemento estructurante quede situado en el interior del objeto. Sin embargo al no formar parte de la erosión con trayectoria no estará situado a una distancia mínima del contorno del objeto tal que el elemento estructurante se sitúe en el interior del objeto, lo cual es una contradicción. La hipótesis inicial es falsa y es por tanto cierta la hipótesis opuesta: $A \ominus_{\tau} B \subseteq FR A \ominus B$.

Demostrados que $A \ominus_{\tau} B \subseteq FR A \ominus B$ y $FR A \ominus B \subseteq A \ominus_{\tau} B$, queda demostrada la expresión inicial: $A \ominus_{\tau} B = FR A \ominus B$. *L.Q.Q.D.*

Erosión parcial con trayectoria

La erosión con trayectoria permite controlar el orden de obtención de puntos del conjunto final. Definida la relación de orden parcial \leq en E , una sucesión ordenada de valores paramétricos de k sobre el intervalo $[0...1]$ provocará así mismo una obtención ordenada de centros del elemento estructurante según el movimiento definido por la función trayectoria τ .

Si bien la erosión con trayectoria puede obtener la frontera de la erosión completa, si la transformación no recorre completamente todo el espacio paramétrico k el resultado de aplicar la erosión con trayectoria es una erosión parcial del objeto.

$$A \ominus_{\tau \langle i, j \rangle} B = \bigcap_{k \in [i \dots j]} A \ominus_{\tau k} B, 0 \leq i < j \leq 1$$

Expresión 34.

Se puede observar en la Figura 64 el resultado de aplicar diferentes operaciones de erosión morfológica con trayectoria parcial sobre un objeto rectangular.

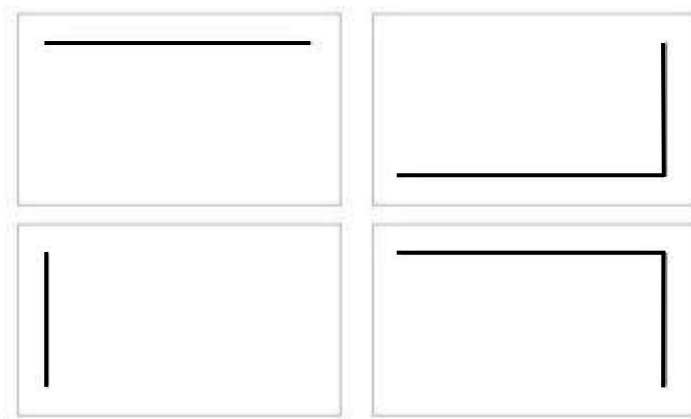


Figura 64. Ejemplos de erosiones parciales con trayectoria

3.2.1.3 Dilatación con trayectoria

La operación dilatación en morfología matemática viene definida por la expresión:

$$A \oplus B = \{x \in E, B_x \cap A \neq \emptyset\}$$

Expresión 35.

En términos descriptivos, esta operación puede definirse como el lugar de las posiciones del centro del elemento estructurante H cuando toca al conjunto A . Por ejemplo, para $E \equiv R^2$ la dilatación de un cuadrado por un objeto circular obtiene otro cuadrado de mayor tamaño con las esquinas redondeadas (Figura 65):

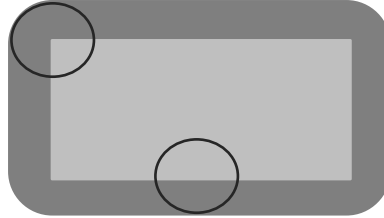


Figura 65. Ejemplo de dilatación morfológica clásica

Se define la dilatación instantánea $\oplus_{\tau(k)}$ como un paso de la dilatación morfológica:

$$A \oplus_{\tau(k)} B = \{p \in E : p = \tau^{-1}(q, k), q = \text{dist}_v(B, \tau(A, k)) \cdot v \wedge B_q \cap \tau(A, k) \neq \emptyset\}$$

Expresión 36.

En el caso de la dilatación instantánea, la función distancia dist_v calculará la distancia mínima del objeto A respecto al objeto B sin establecer la condición de que el elemento estructurante esté incluido en el objeto. La distancia calculada siempre mantendrá el elemento estructurando en el exterior del objeto, tal y como muestra la Figura 66:

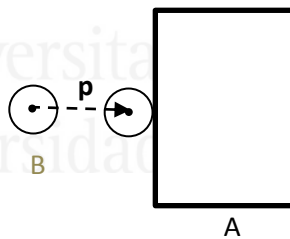


Figura 66. Representación de cálculo de distancia mínima en dilatación

La dilatación con trayectoria vendrá dada por el conjunto de puntos obtenidos por aplicación repetida de la dilatación instantánea $\oplus_{\tau(k)}$ para el dominio real $[0...1]$.

$$A \oplus_{\tau} B = \bigcup_{k \in 0..1} A \oplus_{\tau k} B =$$

$$= \{p \in E : p = \tau^{-1} q, k, q = \text{dist}_v(B, \tau A, k) \cdot v \wedge B_q \cap \tau A, k \neq \emptyset\}$$

Expresión 37.

El resultado de la dilatación con trayectoria será un conjunto ordenado de puntos dilatados respecto al objeto original (Figura 67) que coincidirán con la frontera de la dilatación morfológica clásica.



Figura 67. Dilatación con trayectoria de rectángulo con objeto circular

Tal y como ocurría con la erosión es posible demostrar que la frontera de la dilatación clásica coincide con la dilatación con trayectoria. Si A y B son dos conjuntos incluidos en E, entonces la dilatación con trayectoria es igual a la frontera de la dilatación morfológica clásica:

$$A \oplus_{\tau} B = FR A \oplus B$$

Expresión 38.

- Demostración $A \oplus_{\tau} B \subseteq FR A \oplus B$

Supongamos que es cierta la hipótesis de que un punto de la dilatación con trayectoria $A \oplus_{\tau} B$ no es parte del conjunto de puntos frontera del objeto $FR A \oplus B$.

Los puntos obtenidos por la dilatación con trayectoria $A \oplus_{\tau} B$ corresponden con los lugares geométricos del centro del elemento estructurante cuando éste es situado en el exterior del objeto A, tocando al menos un punto del objeto. Cualquier punto resultado de aplicar la operación de dilatación con trayectoria estará pues alejado del

contorno del objeto A la distancia máxima que permita posicionar el elemento estructurante en el exterior del objeto A pero en contacto con él.

$$p = \text{dist}_v B, \tau A, k \cdot v \wedge B_p \cap \tau A, k \neq \emptyset$$

Expresión 39.

La dilatación morfológica $A \oplus B$ obtiene el conjunto de puntos que posicionan el elemento estructurante B en contacto con el objeto A , sin considerar si el elemento estructurante esté situado en el exterior o en el interior del objeto.

$$A \oplus B = \{x \in R^n, B_x \cap A \neq \emptyset\}$$

Expresión 40.

Sin embargo, el cálculo de la frontera de la dilatación morfológica elimina los puntos de la dilatación que no estén situados a una distancia máxima del contorno del objeto.

$$FR A \oplus B = A \oplus B - \text{In}(A \oplus B)$$

Expresión 41.

Para que un punto pertenezca a la frontera de la dilatación morfológica $A \oplus B$ debe estar alejado del contorno del objeto A la distancia máxima que permita posicionar el elemento estructurante en el exterior del objeto A pero entrando en contacto con él (Figura 68).

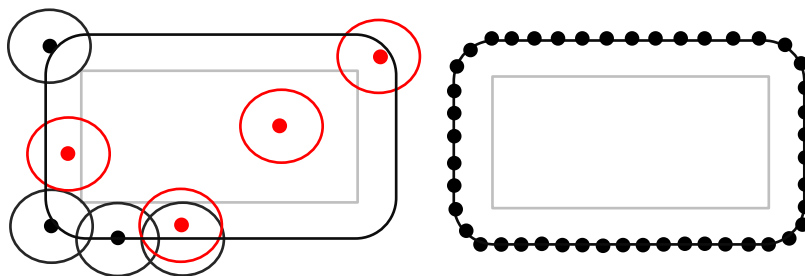


Figura 68. Cálculo de puntos de la frontera de la dilatación morfológica

Si un punto pertenece al conjunto de puntos resultado de aplicar la operación de dilatación con trayectoria al objeto A , el punto estará situado a una distancia máxima del contorno del objeto A asegurando que el elemento estructurante centrado en ese punto contacte con A .

$$dist\ p, A = \max, \forall p \in A \oplus_{\tau} B$$

$$dist = \{distancia\ entre\ el\ punto\ p\ y\ el\ objeto\ A\}$$

Expresión 42.

Si la hipótesis inicial de que ese punto no pertenece a la frontera de la dilatación morfológica es cierta, el punto pertenecerá al interior de la dilatación morfológica, con lo que estará a una distancia máxima del contorno del objeto tal que permita posicionar elemento estructurante fuera del objeto en contacto con él menos una distancia δ proporcional al radio ε de la n -bola utilizada en la función $In\ A$ para calcular los puntos interiores de la dilatación:

$$dist\ p, A = \max - \delta, \delta > 0, \forall p \in FR\ A \oplus B$$

Expresión 43.

Si igualamos las distancias en ambos casos, se llega a una clara contradicción:

$$\max = \max - \delta, \delta > 0$$

Expresión 44.

La hipótesis de partida es pues falsa, cualquier punto perteneciente a la dilatación con trayectoria forma parte del conjunto de puntos obtenidos por el contorno de la operación de dilatación morfológica clásica.

- Demostración $FR\ A \oplus B \subseteq A \oplus_{\tau} B$

Esta segunda implicación se demuestra de forma idéntica a la primera. Suponemos verdadera la hipótesis de que un punto de la frontera de la dilatación morfológica clásica $FR\ A \oplus B$ no pertenece al conjunto de puntos resultado de aplicar la dilatación con trayectoria $A \oplus_{\tau} B$. Un

punto perteneciente a la frontera de la dilatación morfológica $A \oplus B$ debe estar distanciado todo lo posible respecto al contorno del objeto A de forma que el elemento estructurante quede en contacto con el objeto. Sin embargo al no formar parte de la dilatación con trayectoria no estará situado a una distancia máxima del contorno del objeto tal que el elemento estructurante se sitúe fuera del objeto, lo cual es una contradicción. La hipótesis inicial es falsa y es por tanto cierta la hipótesis opuesta: $FR A \oplus B \subseteq A \oplus_{\tau} B$

Demostrados que $A \oplus_{\tau} B \subseteq FR A \oplus B$ y $A \oplus_{\tau} B \subseteq FR A \oplus B$, queda demostrada la expresión inicial: $A \oplus_{\tau} B = FR A \oplus B$. *L.Q.Q.D.*

Dilatación parcial con trayectoria

Nuevamente, si la trayectoria no recorre completamente todo el espacio paramétrico k el resultado de aplicar la dilatación con trayectoria es una dilatación parcial del objeto.

$$A \oplus_{\tau \langle i, j \rangle} B = \bigcup_{k \in [i \dots j]} A \oplus_{\tau k} B, 0 \leq i < j \leq 1$$

Expresión 45.

La Figura 69 muestra el resultado de aplicar varias dilataciones parciales con trayectoria a una línea:

Universidad de Alicante

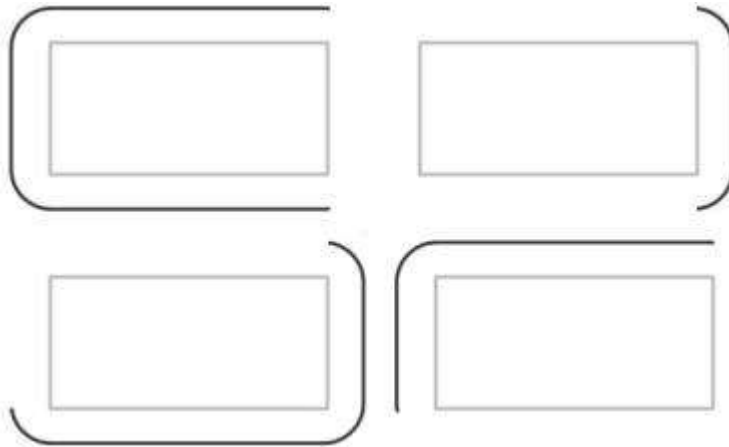


Figura 69. Ejemplos de dilataciones parciales con trayectoria

3.2.1.4 Erosión con trayectoria y dilatación con trayectoria, operadores morfológicos de erosión y dilatación

Llegados a este punto es importante constatar que las operaciones de erosión y dilatación con trayectoria presentadas son operaciones de erosión y dilatación que llevan a cabo acciones propias de operaciones clásicas de erosión y dilatación morfológicas.

Para demostrar formalmente que la erosión y dilatación presentadas son operaciones, efectivamente, de erosión y dilatación basta con aplicar el Teorema de la Adjunción que detalla bajo qué condiciones un par de operaciones son una pareja erosión-dilatación [Serra, 2001]. Este teorema está basado en las conexiones de Gallois, que establecen correspondencias particulares entre conjuntos parcialmente ordenados.

El Teorema de la Adjunción enuncia que si dos operadores δ y ε están ligados por la equivalencia $X \subseteq \varepsilon(Y) \leftrightarrow \delta(X) \subseteq Y$ entonces necesariamente ε y δ forman una pareja erosión-dilatación.

Se define ε como la operación de erosión con trayectoria (\ominus_{τ}) y δ como la operación de dilatación con trayectoria (\oplus_{τ}):

$$\varepsilon = \ominus_{\tau}, \delta = \oplus_{\tau}$$

Expresión 46.

- Demostración: $X \subseteq \varepsilon(Y) \rightarrow \delta(X) \subseteq Y$

En términos descriptivos, si un conjunto X de puntos pertenecen al conjunto de puntos resultado de erosionar con trayectoria un objeto Y entonces necesariamente el conjunto de puntos Y serán parte del resultado de dilatar el conjunto de puntos X .

Definimos X como el conjunto de puntos resultado de erosionar el objeto Y por un elemento estructurante B :

$$X = Y \ominus_{\tau} B = \bigcap_{k \in [0..1]} (Y \ominus_{\tau(k)} B) = \{ p \in E : p = \tau^{-1}(q, k), q = \text{dist}_v(B, \tau(Y, k)) \cdot v \wedge B_q \subseteq \tau(Y, k) \}$$

Expresión 47.

Si p es un punto cualquiera del conjunto X , p es la traslación mínima que ha de realizar el elemento estructurante siguiendo el vector dirección v para situarse en el interior del objeto Y tocando al menos un punto de éste c . El punto c de contacto dependerá del valor paramétrico k utilizado en la operación instantánea básica (Figura 70).

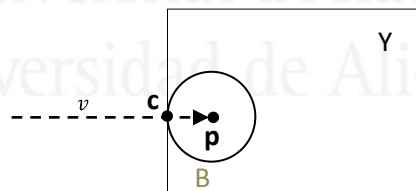


Figura 70. Caso concreto de erosión con trayectoria

Definimos Y como el conjunto de puntos resultado de dilatar el objeto X por un elemento estructurante B :

$$\begin{aligned}
 Y = X \oplus_{\tau} B &= \bigcup_{k \in 0 \dots 1} X \oplus_{\tau k} B = \\
 &= \{ p \in E : p = \tau^{-1} q, k, q = \text{dist}_w B, \tau X, k \cdot w \wedge B_q \cap \tau X, k \neq \emptyset \}
 \end{aligned}$$

Expresión 48.

Si q es un punto cualquiera del conjunto X , q es la traslación mínima que ha de realizar el elemento estructurante siguiendo el vector dirección w para situarse en el exterior del objeto X tocando al menos un punto de éste d .

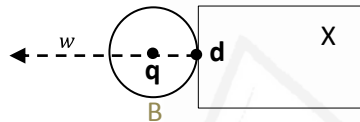


Figura 71. Caso concreto de dilatación con trayectoria

Si el vector director v es igual al vector director w y la normalización de la erosión con trayectoria es homogénea a la realizada en la dilatación, necesariamente el punto p de la erosión coincidirá con el punto d de la dilatación y el punto de contacto c de la erosión coincidirá con el punto q que calculará la dilatación. El punto del conjunto X dilatado formará parte pues del conjunto de puntos que conforman el objeto Y (Figura 72).

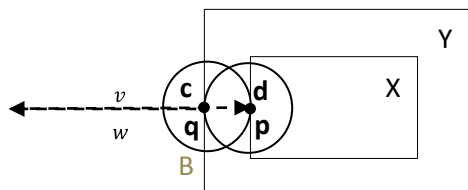


Figura 72. Teorema del Adjunto en operadores con trayectoria

Así pues, si los vectores directores de los elementos estructurantes son iguales en la rotación y la dilatación con trayectoria y la normalización de los espacios parametrizados en los que se llevan a cabo las

transformaciones es homogéneo, todo punto generado por la erosión de un objeto Y si es dilatado coincide con un punto del objeto Y , lo cual demuestra la implicación que $X \subseteq \varepsilon(Y) \rightarrow \delta(X) \subseteq Y$.

- Demostración: $\delta(X) \subseteq Y \rightarrow X \subseteq \varepsilon(Y)$

La doble implicación del Teorema de la Adjunción requiere la demostración la implicación en ambos sentidos. La demostración de esta segunda implicación se desarrolla en los mismos términos que la primera: Si los vectores directores y la normalización de la dilatación con trayectoria es homogénea a la realizada en la erosión, necesariamente el punto calculado de la dilatación con trayectoria coincidirá con el punto de contacto de la erosión con el objeto y el punto de contacto de la dilatación con el objeto coincidirá con el punto calculado por la erosión. Cualquier punto obtenido por la dilatación con trayectoria del conjunto X si es erosionado coincide con un punto del objeto X .

Con la demostración de esta segunda implicación queda demostrada la expresión general, que declara que las operaciones de erosión y dilatación con trayectoria son efectivamente, operaciones de erosión y dilatación morfológicas. *L.Q.Q.D.*

3.2.1.5 Operadores morfológicos con trayectoria

La erosión y la dilatación morfológicas constituyen la base de composición de los denominados operadores morfológicos de filtrado que se obtienen por combinación de ambas operaciones básicas. A continuación se define la especialización de un conjunto de operadores de filtrado si bien con la definición de la erosión y dilatación con trayectoria se cubre en extensión la totalidad de la operatoria morfológica.

Apertura con trayectoria

La apertura morfológica clásica de A por B se obtiene erosionando A por B y seguidamente dilatando el objeto resultante por B . Formalmente:

$$A \circ B = A \ominus B \oplus B$$

Expresión 49.

En términos descriptivos la apertura es el lugar geométrico de las traslaciones del elemento estructurante B dentro del objeto A :

$$A \circ B = \bigcup_{B_x \subset A} B_x$$

Expresión 50.

El filtro morfológico de apertura elimina las pequeñas protuberancias en el objeto y rompe puntos de unión. La correspondencia geométrica es pasar el elemento estructurante por el interior de la frontera eliminando las partes no cubiertas. La Figura 73 representa la operación de apertura de un objeto rectangular por un elemento estructurante circular:

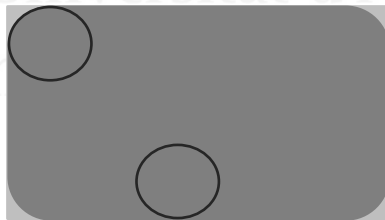


Figura 73. Operación morfológica de apertura

En la apertura hay dos operaciones con trayectoria, una erosión y una dilatación que generan trayectorias distintas. La erosión sitúa al elemento estructurante en el interior del objeto tocando su frontera mientras que la dilatación lo sitúa en el exterior tocando también su frontera (en este caso la frontera de la erosión). La operación morfológica de apertura con trayectoria incluye pues la definición de

dos funciones de trayectoria, τ_1 y τ_2 que recorrerán dos conjuntos de valores posición-rotación describiendo las trayectorias de erosión y dilatación que conforman la operación de apertura morfológica instantánea.

La apertura con trayectoria vendrá dada por la aplicación del operador erosión con trayectoria seguida de una dilatación con trayectoria:

$$A \circ_{\tau} B = A \ominus_{\tau_1} B \oplus_{\tau_2}$$

$$\tau = \tau_1 \cdot \tau_2$$

· = {operador concatenación}

Expresión 51.

La Figura 74 muestra el resultado final de la apertura con trayectoria completa de un objeto rectangular, llevada a cabo por un elemento estructurante circular:



Figura 74. Apertura con trayectoria de rectángulo con objeto circular

La Figura 75 muestra el resultado de aplicar de aplicar la operación de apertura con trayectoria de modo parcial:



Figura 75. Ejemplo de apertura con trayectoria parcial

Cierre con trayectoria

El cierre de A por B se obtiene por la dilatación de A por B , seguida por la erosión del objeto resultante por B . Formalmente:

$$A \bullet B = A \oplus B \ominus B$$

Expresión 52.

En términos descriptivos el cierre se corresponde con el complemento del espacio descrito por el elemento estructurante B cuando es forzado a estar fuera de los conjuntos (Serra, 1982).

El cierre tiene una interpretación geométrica similar al caso del operador apertura con la diferencia de que los desplazamientos del elemento estructurante se producen por fuera de la frontera del objeto provocando el alisado de los contornos y el cierre de grietas o pequeños orificios. La Figura 76 muestra un ejemplo en dos dimensiones del cierre morfológico clásico.

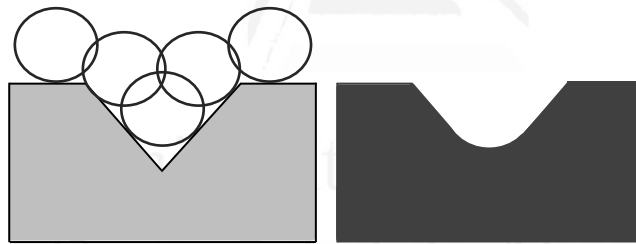


Figura 76. Cierre morfológico clásico

Al Igual que ocurría en la apertura, la operación morfológica de cierre con trayectoria incluye la definición de dos funciones de trayectoria τ_1 y τ_2 , que definen las trayectorias de dilatación y erosión que conforman la operación de cierre.

El operador de cierre con trayectoria se define como la aplicación de una dilatación con trayectoria seguida de una erosión con trayectoria:

$$A \cdot_{\tau} B = A \oplus_{\tau_1} B \ominus_{\tau_2}$$

$$\tau = \tau_1 \cdot \tau_2$$

$\cdot = \{\text{operador concatenación}\}$

Expresión 53.

La Figura 77 muestra el resultado final de aplicar el cierre con trayectoria completa de un objeto rectangular, llevada a cabo por un elemento estructurante circular:



Figura 77. Cierre con trayectoria de rectángulo con objeto circular

La Figura 78 representa un ejemplo de cierre con trayectoria parcial:

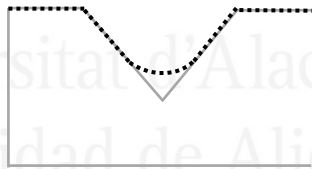


Figura 78. Ejemplo de cierre con trayectoria parcial

Gradiente morfológico con trayectoria

El operador morfológico de gradiente es un filtro utilizado históricamente en la detección de bordes y segmentación de imágenes basándose en una combinación de operaciones morfológicas de dilatación y erosión. En concreto el gradiente consiste en la substracción del resultado de erosionar el objeto con el elemento estructurante al resultado de dilatar el objeto por el mismo elemento estructurante. Formalmente:

$$G(A, B) = (A \oplus B) - (A \ominus B)$$

Expresión 54.

La Figura 79 muestra un ejemplo de aplicación de gradiente morfológico:

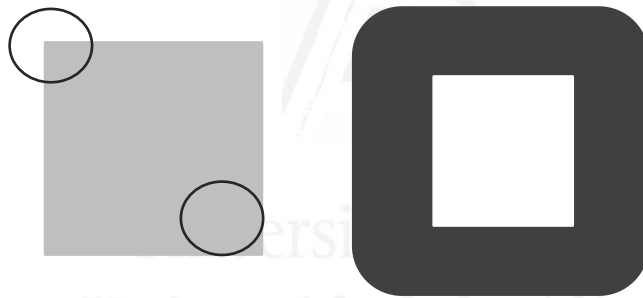


Figura 79. Ejemplo de aplicación de gradiente morfológico

Al ser el modelo propuesto un modelo superficial y trabajar únicamente con información superficial de los objetos el cálculo del gradiente instantáneo se reduce a la unión ordenada o concatenación (+) de una operación de dilatación con trayectoria y una erosión con trayectoria:

$$G_{\tau} A, B = (A \oplus_{\tau_1} B) + (A \ominus_{\tau_2} B)$$

$$\tau = \tau_1 \cdot \tau_2$$

$$\cdot = \{\text{operador concatenación}\}$$

Expresión 55.

La Figura 80 muestra el resultado de aplicar el gradiente con trayectoria de un objeto rectangular por un elemento estructurante circular:

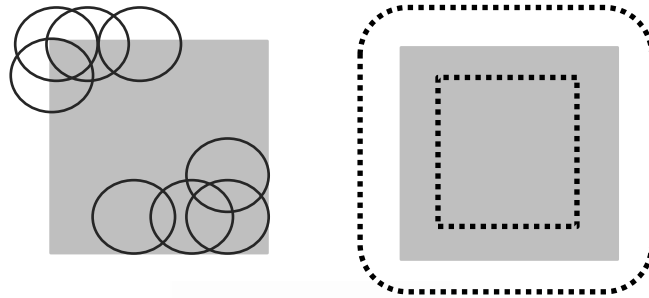


Figura 80. Ejemplo de gradiente morfológico con trayectoria

Si el recorrido del espacio paramétrico k no es completo, el resultado es un operador de gradiente morfológico con trayectoria parcial. La Figura 81 muestra la aplicación del gradiente morfológico con trayectoria parcial:

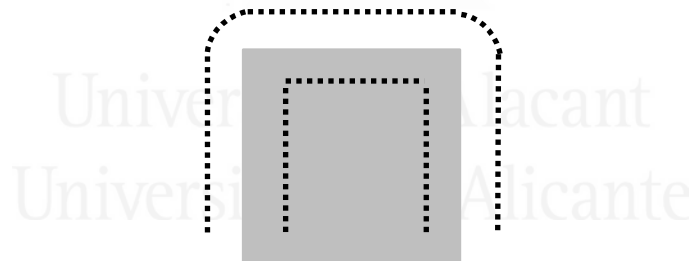


Figura 81. Aplicación del gradiente morfológico parcial

Suavizado morfológico con trayectoria

El suavizado morfológico consiste en la aplicación de una apertura seguida de un cierre con el mismo elemento estructurante:

$$S(A, B) = (A \circ B) \bullet B$$

Expresión 56.

La combinación de ambas operaciones provocan, en el espacio 2D, la eliminación o atenuación de discontinuidades en la frontera del objeto suavizando su contorno, tal y como muestra la Figura 82:

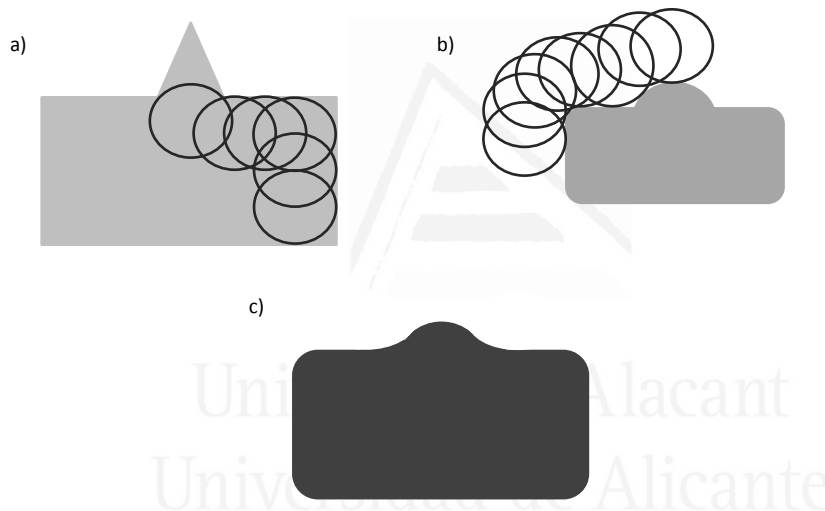


Figura 82. Suavizado morfológico clásico. a) Apertura morfológica, b) Cierre morfológico, c) Resultado final

Tal y como se ha descrito previamente, las operaciones morfológicas de apertura y de cierre implican en su definición la aplicación de una sucesión de operaciones erosión-dilatación (con diferente orden de aplicación en cada operación). Al incluir la operación de suavizado morfológico una operación de apertura y una de cierre la definición formal del operador de suavizado morfológico lleva implícita la aplicación de dos operaciones de erosión y dos de dilatación lo cual implica la existencia de cuatro trayectorias de transformación.

El operador suavizado con trayectoria viene dado por la siguiente expresión:

$$S_{\tau}(A, B) = (A \circ_{\tau_1} B) \cdot_{\tau_2} B$$

$$\tau = \tau_1 \cdot \tau_2$$

$$\cdot = \{\text{operador concatenación}\}$$

Expresión 57.

La Figura 83 muestra gráficamente el resultado del operador de suavizado con trayectoria:

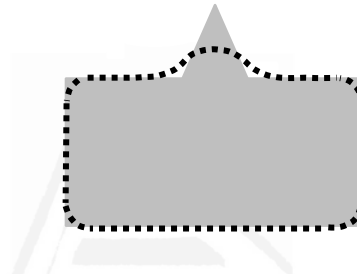


Figura 83. Ejemplo de suavizado morfológico con trayectoria

Si el recorrido del espacio paramétrico es parcial, el resultado de aplicar el operador morfológico es un subconjunto del conjunto total de puntos obtenidos por el operador completo. La muestra un ejemplo de aplicación del suavizado parcial con trayectoria.

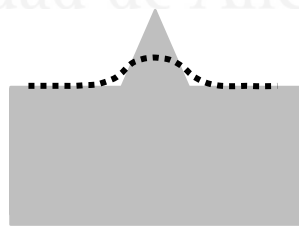


Figura 84. Ejemplo de suavizado morfológico parcial con trayectoria

Transformación de localización (*Hit/Miss*) con trayectoria

La transformación “*Hit-or-miss*” es un filtro morfológico comúnmente utilizado en la detección de formas. Permite localizar en un conjunto de puntos una determinada distribución espacial de éstos, es decir, localiza en un objeto cuántas veces aparece una forma concreta. La forma a localizar viene dada por el elemento estructurante, que en el caso del operador de transformación *Hit/Miss* es un elemento compuesto (H_1, H_2) .

La definición formal del filtro de transformación de localización es el siguiente:

$$A \odot B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$$

$$B = B_1, B_2 \mid B_1 \subset B, B_2 = B - B_1$$

Expresión 58.

El operador A^c hace referencia al operador básico de complemento:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

Expresión 59.

El conjunto $A \odot B$ contiene todos los puntos en los cuales, simultáneamente B_1 encontró una coincidencia (*Hit*) en A y B_2 encontró una coincidencia en A^c .

La Figura 85 muestra un ejemplo gráfico de aplicación de filtro morfológico de transformación de localización. En a) se muestra la definición del objeto a transformar A ($A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$), en b) se define el elemento estructurante B ($B = B_1, B_2$) y en c) se muestra finalmente el resultado de aplicar la operación de transformación de localización $A \odot B$.

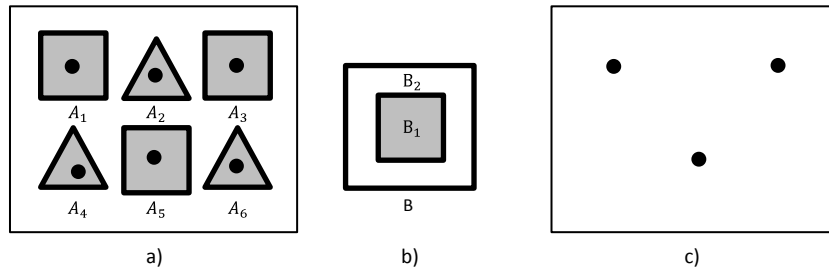


Figura 85. Ejemplo de operación morfológica Hit/Miss.

La transformación de localización con trayectoria se define de la siguiente forma:

$$A \odot_{\tau} B = (A \ominus_{\tau_1} B_1) \cap (A^c \ominus_{\tau_2} B_2)$$

$$B = B_1, B_2 \mid B_1 \subset B, B_2 = B - B_1$$

$$\tau = \tau_1 \cdot \tau_2$$

$$\cdot = \{\text{operador concatenación}\}$$

Expresión 60.

Si el recorrido del espacio paramétrico no se realiza completamente, se obtiene una transformación de localización parcial. Sin embargo es necesario realizar una puntualización si el objetivo de aplicar el operador de localización parcial es efectuar un filtrado morfológico de localización de formas. Para que la localización morfológica parcial cumpla con éxito su labor de localizar en un objeto el número de veces que aparece una forma concreta es necesario que el subrango recorrido por las variables paramétricas recorra totalmente ese objeto.

En el caso de la Figura 86, el apartado c) muestra el resultado de aplicar la operación de transformación de localización parcial al conjunto de objetos A, teniendo en cuenta que tanto la erosión del objeto A₁ como la de su complementario se han realizado de forma completa:

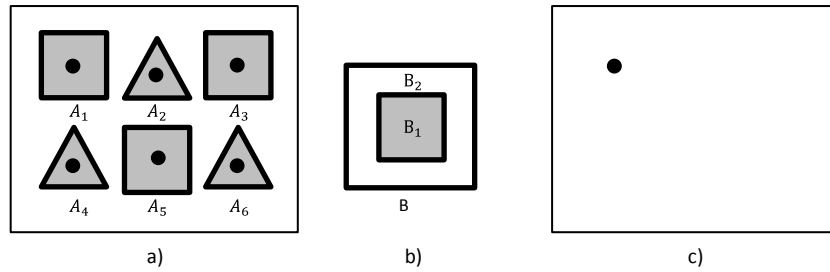


Figura 86. Ejemplo de operación morfológica Hit/Miss.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Capítulo Cuarto

Aplicación del MMD al diseño y a la fabricación



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

4.1 Introducción

El modelo presentado aporta un marco formal inspirado en el paradigma morfológico clásico que permite la definición de objetos y la aplicación de operaciones morfológicas que transforman estos objetos. El modelo aporta una especialización de las operaciones morfológicas clásicas, dotándolas del determinismo propio de procesos dinámicos que requieren orden de aplicación.

El proceso de diseño y fabricación de piezas por mecanizado es un ejemplo concreto de este tipo de procesos. La especialización morfológica permite secuenciar la generación de resultados y reproducir acciones tales como el desplazamiento de herramientas a través de trayectorias previamente descritas. La definición de operadores morfológicos parciales permite describir operaciones que, si bien no tienen cabida en la morfología clásica, son necesarias desde el punto de vista del diseño y fabricación.

En un proceso real de fabricación, una herramienta transforma progresivamente la geometría de una pieza. El mecanizado de un objeto por una herramienta se puede formular a partir de una operación morfológica en la que un conjunto de puntos (herramienta) transforma a otro conjunto de puntos (pieza). El elemento estructurante de la operación morfológica sería la herramienta y el objeto transformado la pieza a mecanizar. La aplicación ordenada de la operación morfológica determinista representaría el movimiento guiado de la herramienta mientras elimina material de la pieza y obtiene finalmente la pieza fabricada.

Sin embargo, la misma operación morfológica puede ser considerada como una operación orientada al diseño en un entorno en el que el modelado de los objetos se fundamente en la definición de trayectorias de mecanizado por las que se hagan pasar herramientas que simulen el mecanizado de la pieza. Esta filosofía de diseño permite al diseñador modelar las piezas a la vez que define el modo en el que éstas serán fabricadas, relacionando estrechamente los procesos de diseño y

mecanizado, aspecto que favorece el proceso general de fabricación de las piezas.

En el modelo morfológico las operaciones adquieren una semántica morfológica. En este capítulo la semántica de las operaciones se trasladará a los procesos de diseño y fabricación asociando cada acción con una operación morfológica con trayectoria.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

4.2 Operaciones para el CAD/CAM

El modelo morfológico planteado puede ser aplicado a una gran cantidad de procesos industriales. A continuación se exponen algunas aplicaciones concretas del modelo morfológico propuesto en el contexto de sistemas de diseño y fabricación asistidos por ordenador.

En un capítulo posterior, se propondrá la posibilidad de aplicar el modelo morfológico determinista a otros campos, como el análisis de imágenes. La aplicación del modelo en esos entornos se planteará como hipótesis para trabajos posteriores.

4.2.1 Diseño por trayectoria

Al abordar el problema de fabricación de objetos tridimensionales los modelos geométricos clásicos realizan una división del proceso segmentándolo en dos fases: fase de diseño y fase de mecanizado. Los modelos secuencian el proceso aportando por un lado herramientas y funcionalidades orientadas al diseño del objeto y por otro lado definiendo y planificando estrategias de generación de trayectorias para el mecanizado de la pieza diseñada (Figura 87).

La integridad y precisión de los modelos depende tanto de los tratamientos empleados en las fases de diseño y mecanizado como de los procedimientos establecidos para la conexión de ambas fases. En el mejor de los casos, la independencia de ambos procesos puede generar problemas de exactitud e integridad en las piezas fabricadas.

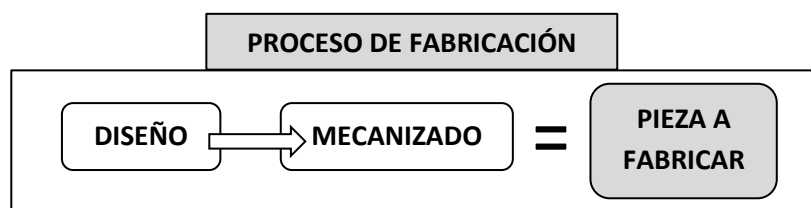


Figura 87. Proceso de fabricación en el modelo geométrico clásico

El diseño por trayectoria plantea el problema del diseño y mecanizado desde una perspectiva común, vinculando ambas tareas en un único proceso de definición de objeto donde el diseño y la generación y planificación de trayectorias son parte indisoluble (Figura 88).

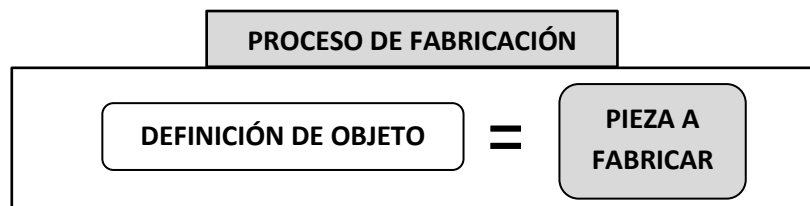


Figura 88. Proceso de fabricación diseñando por trayectoria

El diseño por trayectoria hace referencia al modelado de una pieza basándose en la definición de trayectorias de mecanizado sobre ella. El proceso de diseño se fundamenta en la definición de trayectorias por las que se hacen pasar herramientas de mecanizado virtuales que recorren las trayectorias simulando un proceso real de eliminación de material que actúa sobre la pieza obteniendo un nuevo diseño.

Para lograr esta continuidad de proceso, el diseño de los objetos incorpora la definición de las trayectorias de mecanizado que describen con exactitud el recorrido a seguir por las herramientas de mecanizado para fabricar la pieza final. El propio diseño del objeto integra el mecanizado con lo que el modelo resuelve los problemas de precisión que la independencia de ambos procesos ocasionaba.

Asimismo, al encapsular en un único proceso diseño y trayectorias de mecanizado, el objeto diseñado se encuentra inmediatamente dispuesto para su fabricación sin necesidad de generación de trayectorias adicionales, lo que dota de una gran inmediatez al proceso global de diseño y fabricación de piezas.

De entre las operaciones morfológicas analizadas, se puede observar cómo la acción de arranque de material de un proceso de mecanizado está relacionada con el concepto de erosión morfológica con trayectoria. La mecanización mediante una herramienta puede interpretarse como una operación morfológica de erosión, en la cual un elemento estructurante transforma a un objeto siguiendo una dirección

determinada. En un proceso real de fabricación, el elemento estructurante sería la herramienta H , el objeto la pieza a transformar P y el orden definido en la función trayectoria τ describiría la trayectoria de mecanizado utilizada.

$$P \ominus_{\tau} H = \bigcap_{k \in [0 \dots 1]} (P \ominus_{\tau(k)} H)$$

Expresión 61.

La operación obtiene, de forma ordenada, los centros de la herramienta cuando ésta recorre el interior de la pieza entrando en contacto con su contorno (Figura 89):

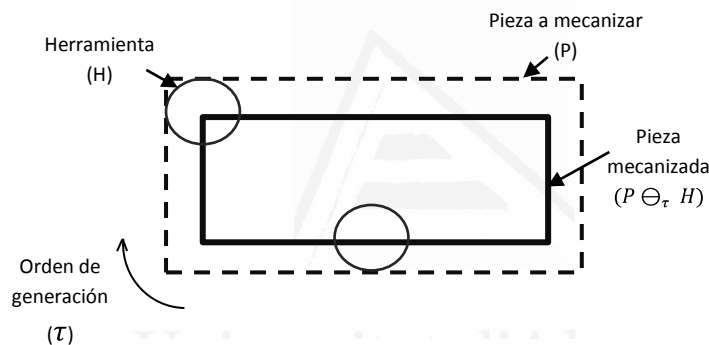


Figura 89. Mecanizado mediante Erosión Morfológica

El resultado de la operación morfológica de erosión con trayectoria muestra cómo quedaría la pieza final si se llevara a cabo la fabricación con la herramienta y la trayectoria de mecanizado definidas.

Esa misma correspondencia entre la operación morfológica de erosión con trayectoria y el proceso real de fabricación es la que permite relacionar la operación de erosión con el proceso de diseño de piezas. En un entorno real de diseño, la operación morfológica de erosión con trayectoria proporciona una herramienta para diseñar piezas mediante la definición de trayectorias de mecanizado.

El modelo constituye una aproximación a las técnicas utilizadas por un artesano escultor para realizar sus obras: se exculpe una forma inicial y sobre ella se van aplicando herramientas que arrancan material hasta obtener la pieza final deseada. En el diseño por trayectoria, el diseñador

define una trayectoria de mecanizado sobre la pieza y simula el paso de una herramienta de mecanizado que elimina material de la pieza obteniendo un nuevo diseño. A continuación puede continuar con el proceso de diseño definiendo nuevas trayectorias de mecanizado y simulando su mecanizado hasta obtener la pieza deseada. Esta filosofía de diseño permite al diseñador la posibilidad de modelar la pieza a medida que define cómo se llevará a cabo su fabricación.

Sin embargo, es importante recordar que los procesos de mecanizado no están dedicados únicamente a mecanizar trayectorias de mecanizado cerradas (equivalentes a la erosión morfológica con trayectoria) sino que también realizan el mecanizado de trayectorias no cerradas o parciales, que no se corresponden exactamente con la erosión, tal y como está planteada. En este tipo de procesos, la entrada y salida de la herramienta realiza también un trabajo de desbastado sobre el objeto que se representa lógicamente en el resultado final (Figura 90).

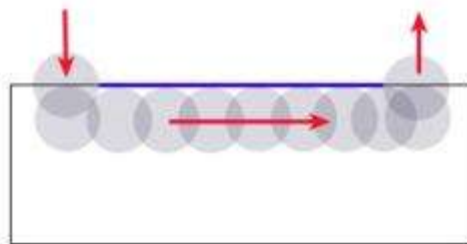


Figura 90.- Mecanizado con herramienta circular de trayectoria abierta

Resulta pues necesario ampliar la definición de erosión morfológica y aportar una nueva operación de erosión parcial normalizada que permita la definición formal de mecanizados con herramienta en trayectorias no cerradas, en los que las trayectorias de entrada y salida del elemento estructurante en el objeto tengan su representación formal en la solución.

Erosión parcial Regularizada

La erosión parcial $\Theta_{\tau < i, j >}$ recorre parcialmente el espacio paramétrico de k , constituyendo un subconjunto de la erosión completa:

$$A \ominus_{\tau \langle i, j \rangle} B \subseteq A \ominus_{\tau} B$$

Expresión 62.

Sin embargo, la erosión parcial, a diferencia de la erosión total, no tiene un equivalente inmediato en el proceso de mecanizado. En la Figura 91 se puede observar el resultado final de aplicar la erosión parcial morfológica a un subconjunto de puntos del rectángulo:



Figura 91. Erosión parcial morfológica como subconjunto de la erosión total

Si bien el resultado es correcto, la solución no es válida en el contexto aplicado de un sistema de diseño por mecanización. Resulta necesario redefinir el concepto de erosión parcial, entendiendo ésta como una operación parcial regularizada, es decir, una operación parcial adaptada a los requerimientos implícitos del proceso de mecanizado con herramienta.

Dado un objeto A y una trayectoria de erosión T definida sobre éste, definimos erosión parcial regularizada del objeto A por un elemento estructurante B , como la resta del elemento A con la trayectoria de erosión T , dilatada el radio de la herramienta B .

$$A \ominus_{\tau \langle i, j \rangle} B = A - (T \oplus_{\tau} B)$$

$$T = \{\text{puntos frontera de } A \text{ correspondientes al intervalo paramétrico } \langle i, j \rangle\}$$

Expresión 63.

El resultado de dilatar una trayectoria lineal con un elemento estructurante circular es mostrado en la Figura 92:



Figura 92. Dilatación con trayectoria de segmento simple con elemento estructurante circular

La Figura 93 muestra gráficamente la simulación del proceso completo de erosión de un objeto rectangular por una herramienta circular que recorre una trayectoria parcial definida sobre el objeto.

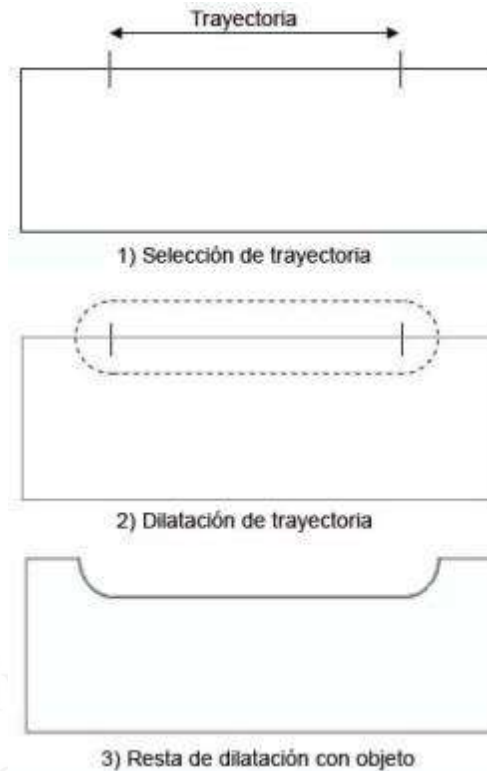


Figura 93. Proceso de cálculo de erosión parcial regularizada

4.2.1.1 Simulación de mecanizado

La visualización realista del mecanizado constituye una de las aplicaciones básicas de cualquier sistema CAD/CAM de fabricación de piezas.

La propia operación de erosión morfológica que se ha orientado al diseño de piezas puede tener aplicación desde el punto de vista de la fabricación si el proceso de obtención de resultados se vincula con el proceso de mecanizado de una pieza.

La operación morfológica de erosión con trayectoria puede simular la acción de arranque de material que se lleva a cabo en un proceso real de mecanizado. En la operación morfológica el elemento estructurante representaría la herramienta de mecanizado, el objeto la pieza a transformar y el orden definido en la función trayectoria describiría la trayectoria que seguiría la herramienta de mecanizado para llevar a cabo la fabricación de la pieza. El resultado de la operación morfológica de erosión con trayectoria simularía la pieza final fabricada.

4.2.2 Digitalización por trayectoria

La digitalización por trayectoria es el recorrido virtual de una herramienta palpadora sobre una pieza simulando el proceso de digitalización mecánica de ésta. La digitalización obtiene, de forma ordenada, los centros de la herramienta cuando ésta recorre la superficie de la pieza entrando en contacto con su contorno.

El cálculo del digitalizado virtual está íntimamente relacionado con uno de los problemas tradicionales con el que se encuentran los sistemas de fabricación con máquinas herramienta, el denominado cálculo del compensado u offset de trayectoria. El cálculo del compensado de trayectoria consiste en determinar cuál es la posición en la que se debe colocar una herramienta para poder mecanizar un punto concreto de una pieza, sin que la herramienta entre en colisión con puntos ya mecanizados de la pieza.

Este proceso es similar al realizado por sistemas que utilizan dispositivos de captación mecánica para obtener información sobre la posición en la que deben situar un elemento palpador (habitualmente una esfera) para que éste recorra la superficie completa de una pieza siempre en contacto con ella. Al almacenar el digitalizador mecánico información relativa al elemento palpador (habitualmente su centro geométrico) y no de la superficie de la pieza, el conjunto de posiciones obtenidas constituye una trayectoria compensada de herramienta. Esa trayectoria define por sí sola la pieza digitalizada, ya que describe la secuencia de posiciones en las que debe posicionarse el centro de una herramienta de mecanizado para fabricar una nueva pieza idéntica a la pieza original digitalizada.

Fresadoras copiadoras o dispositivos de prototipado rápido son ejemplos de sistemas que hacen un uso industrial del digitalizado virtual para la obtención de trayectorias de mecanizado que faciliten la creación de duplicados de un patrón o pieza particular.

La operación morfológica equivalente a la digitalización virtual es la dilatación con trayectoria. La dilatación morfológica con trayectoria obtiene una trayectoria compensada que describe la secuencia de posiciones en las que debe posicionarse un elemento estructurante para recorrer un objeto sin perder el contacto con su contorno. En un proceso de digitalización virtual el elemento estructurante representa la herramienta palpadora (H), el objeto A representa la pieza a duplicar (P) y el orden establecido en la función trayectoria τ definirá el recorrido que seguirá la herramienta palpadora sobre la pieza en el proceso de digitalización. El mecanizado de esta trayectoria compensada obtendrá un duplicado de la pieza original.

$$P \oplus_{\tau} H = \bigcup_{k \in 0 \dots 1} P \oplus_{\tau k} H$$

Expresión 64.

La Figura 94 muestra un ejemplo de aplicación de dilatación con trayectoria para la obtención del duplicado de una pieza elíptica. En a) se muestra el cálculo de la trayectoria compensada de herramienta mediante la aplicación de la operación morfológica de dilatación con trayectoria y en b) se muestra el mecanizado de esta trayectoria sobre un objeto rectangular, obteniendo un duplicado de la pieza elíptica inicial.

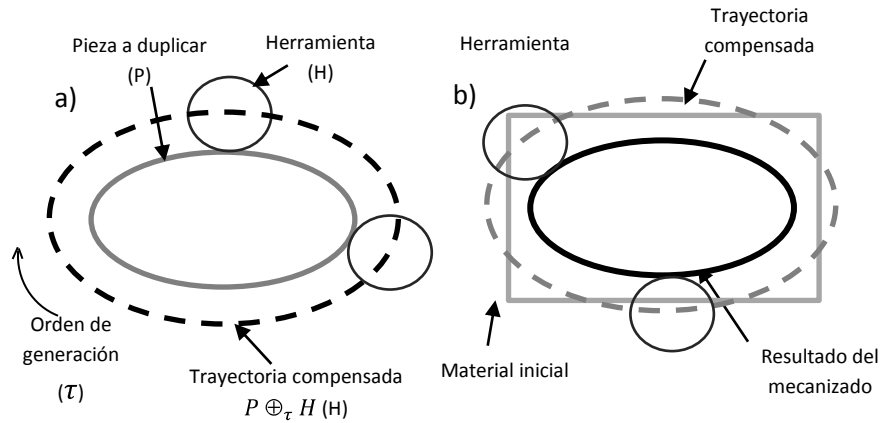


Figura 94. Duplicado de una pieza elíptica empleando la operación morfológica de dilatación con trayectoria.

4.2.3 Optimización de trayectoria

La optimización de trayectoria hace referencia a la eficiencia en el cálculo de trayectorias de mecanizado, aspecto fundamental en la optimización de los procesos de fabricación.

Una trayectoria de mecanizado eficiente es aquella que mecaniza una pieza realizando el mínimo número de desplazamientos de herramienta, es decir, será la trayectoria mínima que, mediante una herramienta y estrategia determinadas, puede mecanizar el objeto en su recorrido.

Aspecto importante en la optimización de trayectorias es la eliminación de posiciones de herramienta que no aseguren el contacto de la herramienta con el objeto a mecanizar (posiciones no útiles). Estas posiciones de herramienta ralentizan el proceso de fabricación, provocan imperfecciones en la pieza mecanizada (la salida y entrada de la cuchilla en el material produce marcas por la diferencia en la aceleración de la herramienta) y acortan la vida útil de la herramienta y de la maquinaria.

La operación morfológica de apertura con trayectoria asegura una trayectoria de mecanizado mínima ya que obtiene la trayectoria mínima que, mediante una herramienta y estrategia determinadas, puede mecanizar el objeto en su recorrido. Esta afirmación se apoya en el

hecho de que al permanecer siempre el elemento estructurante en contacto con el objeto, no se pueden producir posiciones de herramienta no útiles (siempre que el material base esté bien posicionado en la máquina herramienta).

En un entorno real de fabricación, el elemento estructurante de una operación morfológica de apertura representaría la herramienta real (H) que llevaría a cabo el mecanizado, el objeto representaría la trayectoria (T) que se desea optimizar y el orden establecido en las funciones trayectoria τ_1 y τ_2 definiría la estrategia de mecanizado utilizada. El resultado de la operación de apertura representaría la trayectoria T optimizada, sin la existencia de posiciones de herramienta no útiles.

$$T \circ_{\tau} H = T \ominus_{\tau_1} H \oplus_{\tau_2}$$

Expresión 65.

La Figura 95 muestra en a) una propuesta de trayectoria de mecanizado que permite a una herramienta circular fabricar una pieza rectangular. Si bien la trayectoria de mecanizado permite fabricar la pieza con la herramienta indicada no constituye la trayectoria óptima ya que, tal y como se muestra en b), incluye posiciones de herramienta que provocan la salida y entrada de la herramienta en el material y el mecanizado de zonas ya mecanizadas, desplazamientos innecesarios que provocan un mecanizado ineficiente:

Universidad de Alicante

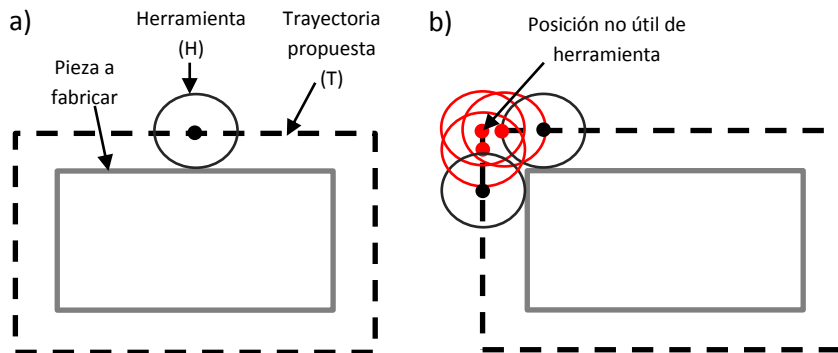


Figura 95. Trayectoria de mecanizado con posiciones no útiles

La Figura 96 muestra la aplicación de la operación morfológica de apertura para la optimización de trayectorias. En a) se muestra el mismo escenario de fabricación propuesto anteriormente, en b) se muestra la erosión ordenada de la trayectoria de mecanizado según el orden definido en τ_1 , en c) se muestra la dilatación ordenada de la erosión según el orden definido en τ_2 y finalmente en d) se muestra el resultado final de aplicar la operación de apertura morfológica con trayectoria.

La operación optimiza la trayectoria de mecanizado eliminando las posiciones en las que la herramienta no entra en contacto con la pieza. Se puede observar como en la trayectoria optimizada no existen posiciones no útiles, con lo que el mecanizado de la pieza resulta eficiente.

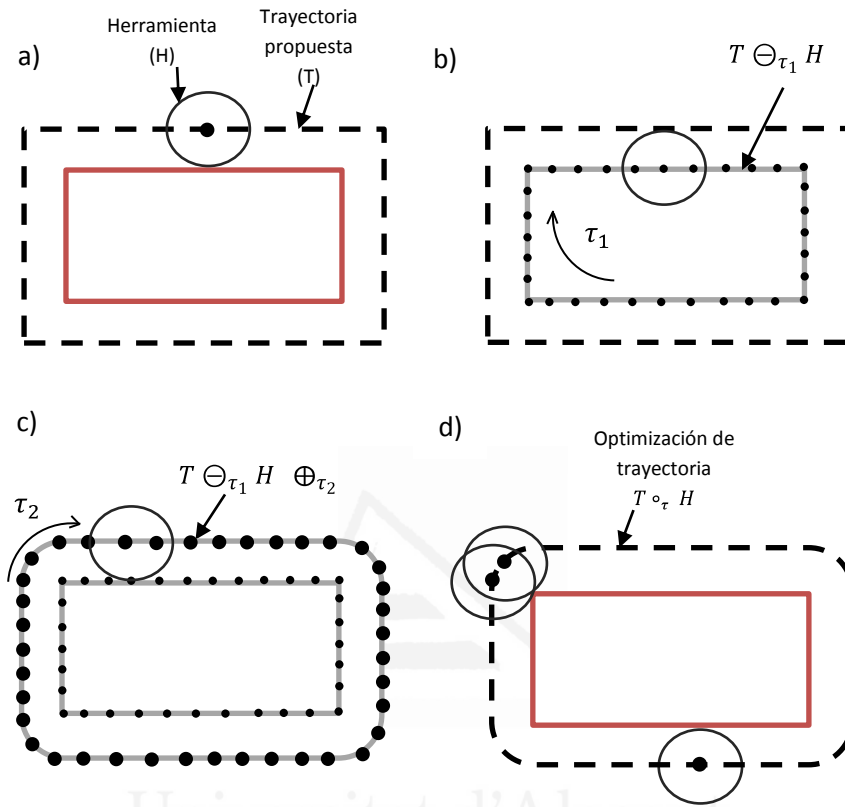


Figura 96. Optimización de trayectoria

4.2.4 Reconstrucción de la pieza

Tal y como se ha indicado anteriormente, la digitalización de una pieza y el mecanizado de las trayectorias compensadas obtenidas constituye uno de los métodos más empleados en el replicado industrial de piezas. Sin embargo, en muchas ocasiones, no es posible fabricar fielmente una pieza mediante la utilización de una herramienta determinada.

La precisión en la fabricación de una pieza mediante una herramienta concreta depende en gran medida de la geometría de la pieza y de la herramienta utilizada. Ambas geometrías limitan los dominios de fabricación posibles. La reconstrucción de la pieza hace referencia al proceso de obtención de la pieza más parecida a la original que es

posible fabricar mediante una determinada estrategia de mecanizado y una herramienta concreta.

Existen ámbitos industriales en los que se necesita una gran precisión de fabricación, en otros existe una mayor tolerancia al error en la fabricación de piezas. Sea cual sea la tolerancia permitida en el proceso de fabricación es de gran ayuda el disponer de herramientas que ofrezcan una reconstrucción de la pieza a fabricar, pudiendo observar la pieza que realmente será fabricada antes de que inicie el proceso de fabricación.

La operación morfológica que permite realizar una reconstrucción de una pieza es la operación de cierre con trayectoria. Esta operación realiza una dilatación seguida de una erosión por trayectoria. El resultado obtenido por una operación de cierre morfológico con trayectoria muestra el objeto más parecido al original que puede fabricar un sistema de fabricación mediante una determinada herramienta. En un entorno de fabricación, el elemento estructurante representaría la herramienta utilizada en el proceso (H), el objeto la pieza a reconstruir (P) y el orden establecido en las funciones trayectoria τ_1 y τ_2 definiría la estrategia de mecanizado utilizada.

$$P \bullet_{\tau} H = P \oplus_{\tau_1} H \ominus_{\tau_2}$$

Expresión 66.

La Figura 97 muestra un proceso de reconstrucción de la pieza a partir de una operación morfológica de cierre con trayectoria. En a) se puede observar la pieza a reconstruir (P) y cómo la herramienta circular utilizada (H) en el mecanizado no es capaz de acceder a ciertos puntos de la pieza. En b) se muestra el primer paso de la operación de cierre morfológico con la dilatación ordenada del contorno de la pieza según el orden definido en τ_1 , en c) se muestra la erosión ordenada de la dilatación según el orden definido en τ_2 y finalmente en d) se representa el resultado de la operación morfológica de reconstrucción de pieza ($P \bullet_{\tau} H$) que muestra la pieza más parecida a la original que se puede fabricar con la herramienta definida.

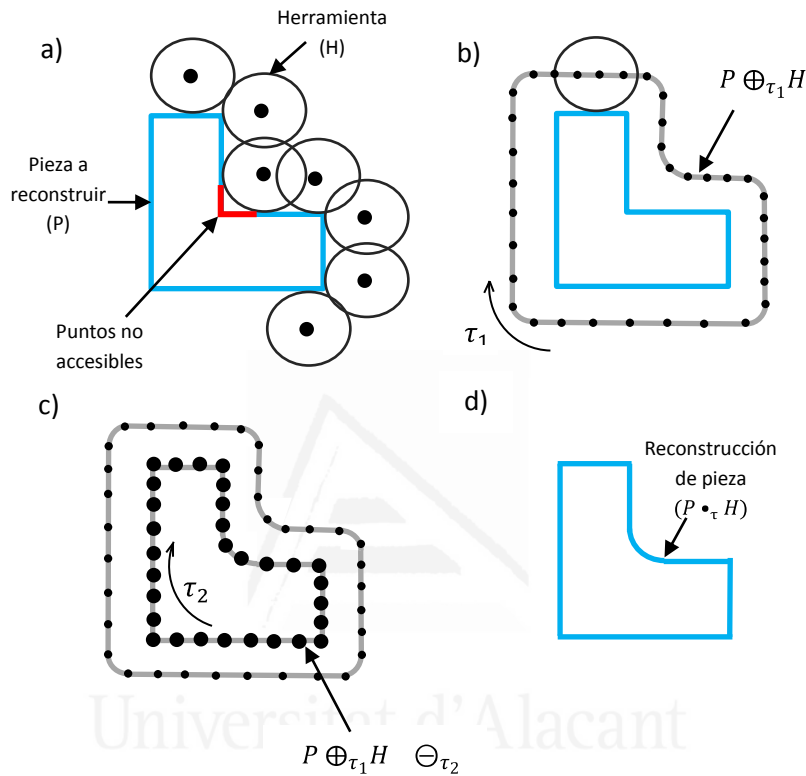


Figura 97. Reconstrucción de la pieza

4.2.5 Residuo de fabricación

El residuo de fabricación es otro parámetro utilizado frecuentemente para evaluar la eficiencia de las trayectorias de mecanizado generadas por un sistema de fabricación con máquinas herramienta.

La geometría de la herramienta y la del objeto a mecanizar condicionan en gran medida el resultado del proceso de fabricación de un objeto. El residuo de fabricación es la cantidad de material que no ha podido ser eliminada en el mecanizado de un objeto con una herramienta y trayectoria de mecanizado determinadas. El residuo ofrece información sobre la calidad del objeto final fabricado ya que muestra qué partes de

la pieza no podrán ser mecanizadas por la herramienta y no se reproducirán fielmente en la pieza final mecanizada.

La operación morfológica de residuo se define en [Serra, 1982] como la diferencia existente entre dos primitivas morfológicas. En el contexto aplicado de un proceso de mecanizado, la operación de cierre morfológico con trayectoria permite calcular qué puntos de una pieza (P) no serán mecanizados si en el proceso de mecanizado se utiliza una herramienta determinada (H). La diferencia entre un objeto y su operación de cierre obtiene directamente el residuo de fabricación, es decir, las partes de material que no podrán ser mecanizadas por la herramienta:

$$\text{Resíduo}(P, H) = P - (P \bullet_{\tau} H)$$

Expresión 67.

La Figura 98 muestra una aplicación del cierre morfológico con trayectoria para el cálculo del residuo. En a) se muestra la pieza original a mecanizar y la herramienta que llevará a cabo el mecanizado, en b) el resultado de aplicar la operación morfológica de cierre con trayectoria utilizando la herramienta definida, en c) el cálculo de la diferencia entre la pieza y la operación de cierre y en d) el resultado final del cálculo del residuo, mostrando la porción de material del objeto que no podrá ser mecanizada por la herramienta:

Universidad de Alicante

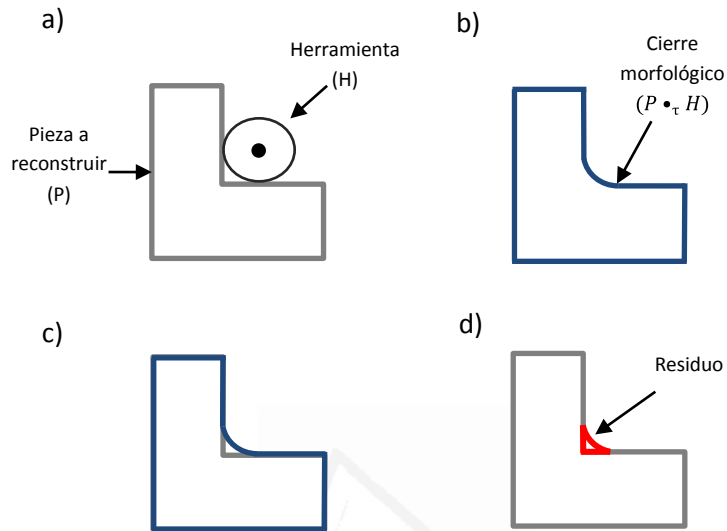


Figura 98. Residuo de fabricación

Capítulo Quinto

Implementación computacional del MMD para el diseño por trayectoria



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

5.1 Introducción

La morfología matemática no es en sí misma un paradigma computacional, por lo que el marco morfológico planteado requiere de un sistema computacional paralelo que permita modelar objetos concretos con representación computacional.

El modelo computacional asociado debe concretar las abstracciones morfológicas permitiendo el almacenamiento de la información geométrica relativa a los conjuntos y la operatividad de las operaciones morfológicas.

En este capítulo se presenta un sistema computacional que, a partir de los principios propios del modelo morfológico determinista presentado, implementa un entorno de diseño por trayectoria de objetos sólidos.

La morfología matemática define y opera con conjuntos continuos infinitos de puntos. Sin embargo, los sistemas computacionales están basados necesariamente en esquemas operativos finitos que no son capaces de almacenar conjuntos infinitos de información por extensión. Resulta pues necesario adecuar los principios infinitos que rigen la morfología matemática a las estructuras de almacenamiento y representación finitas que proporcionan los ordenadores.

El modelo computacional presentado lleva a cabo esta adaptación discretizando los conjuntos que intervienen en las operaciones morfológicas. De esta forma, los objetos y los elementos estructurantes que participan en el paradigma pueden ser definidos a partir de conjuntos discretos y finitos de puntos. Además, al ser el modelo morfológico determinista un modelo superficial, los objetos son caracterizados a partir de información referente a su frontera, con lo que el modelo computacional tan sólo debe administrar puntos referentes a la superficie de los objetos, sin almacenar información alguna sobre su interior. La operatoria morfológica se representa computacionalmente como una función de transformación que a partir de un conjunto de puntos (objeto y elemento estructurante) obtiene un nuevo conjunto de puntos (objeto final transformado).

Para definir todos los objetos y operaciones morfológicas descritas el modelo computacional únicamente debe emplear estructuras básicas de almacenamiento de puntos y funciones que representen las transformaciones geométricas entre conjuntos de puntos que se han definido morfológicamente. No se requiere pues del uso de estructuras complejas de almacenamiento que puedan aminorar la simplicidad operativa que persigue el modelo. Además, al haber una relación exacta y directa entre los puntos que definen los conjuntos morfológicos y las estructuras lógicas que almacenan esos puntos la equivalencia entre las operaciones morfológicas con trayectoria y su implementación se realiza de forma compacta y precisa.

Una vez obtenido el conjunto de puntos pertenecientes al objeto transformado, el sistema computacional debe proporcionar un modelo de representación del objeto en pantalla. Si bien la representación del objeto puede realizarse directamente como una nube de puntos este método no constituye un entorno de simulación realista del proceso de transformación de objetos sólidos. El sistema computacional presentado aporta un modelo secundario de representación realista que muestra los objetos transformados como objetos cerrados con apariencia sólida simulando un verdadero proceso de transformación de objetos tridimensionales sólidos.

La Figura 99 muestra un esquema modular del sistema computacional presentado.

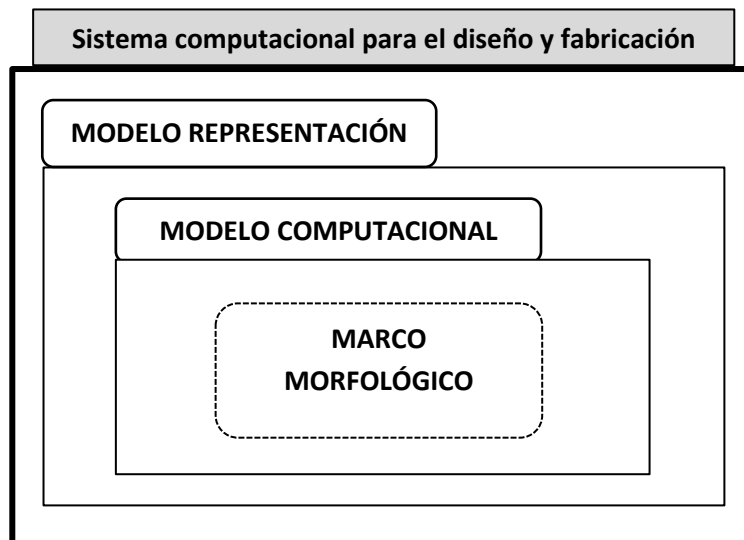


Figura 99. Esquema modular del sistema computacional

5.2 Definición del modelo computacional

Existen dos elementos básicos que constituyen el fundamento de las operaciones con trayectoria en el modelo morfológico presentado. La función trayectoria τ y la operación básica instantánea \diamond_{τ} :

$$\tau A, k = \{ p \in E / \forall q \in A p = \tau q, k \}$$

$$A \diamond_{\tau k} B = p \in E, p = \tau^{-1} q, k, q = \text{dist}_v B, \tau A, k \cdot v$$

Expresión 68.

A partir de la formulación de ambas operaciones morfológicas la obtención del algoritmo es inmediata. A continuación, se presenta el algoritmo general que aplica la operación básica instantánea del modelo morfológico a partir de las transformaciones aplicadas por la función trayectoria:

```

1: P = Frontera(A)
2: H = Frontera(EE)
3: Para Todo t Entre 0 y 1 hacer
4:   P' =  $\tau(P, t)$ 
5:   d =  $\text{dist}_v(P', H)$ 
6:   CentroH = CalcularCentro(d)
7:   AñadirAResultado(CentroH)
8: FinPara

```

Para un objeto A y un elemento estructurante EE, el algoritmo obtiene una lista que almacena la secuencia ordenada de centros del elemento estructurante cuando éste recorre la trayectoria definida sobre el conjunto de puntos frontera del objeto definidos en el espacio paramétrico t.

En primer lugar se obtienen los objetos P y H que proporcionan información geométrica de los puntos frontera del objeto A a

transformar y del elemento estructurante EE respectivamente (líneas 1 y 2). A continuación se va aplicando la función trayectoria τ que transforma el objeto frontera P posicionándolo y orientándolo en el espacio (línea 4). La función $dist_v(P',H)$ calcula la distancia mínima entre el objeto transformado y el elemento estructurante siempre en la dirección que indica el vector v (línea 5). Finalmente, con la distancia mínima hallada y la transformación aplicada, se determina la posición del punto central del elemento estructurante mediante la función $CalcularCentro$ que deshace la transformación realizada por la función $distancia$ (línea 6) y se añade finalmente el punto central al conjunto de puntos solución (línea 7).

Desde el punto de vista computacional el algoritmo presenta dos procedimientos que deben ser tomados en consideración: la discretización de la trayectoria y la obtención de la distancia entre el objeto y el elemento estructurante.

5.2.1 Discretización de la trayectoria

La trayectoria que guía el recorrido del elemento estructurante sobre el objeto a transformar se define a partir del conjunto de posiciones-orientaciones que permiten recorrer un conjunto continuo de puntos frontera del objeto a transformar. La naturaleza finita de los ordenadores requiere obligatoriamente de una discretización de la trayectoria de forma que el recorrido del elemento estructurante sobre el objeto a transformar (línea 3 del algoritmo general) quede definido a partir de un conjunto concreto y finito de pares posición-orientación.

La Figura 100 muestra dos ejemplos de trayectorias definidas paramétricamente:

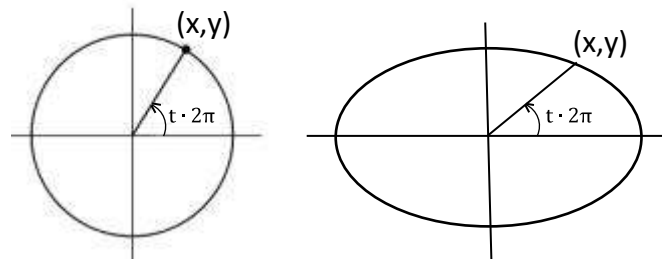


Figura 100. Ejemplos de trayectorias paramétricas

Las ecuaciones paramétricas que definen una trayectoria circular de radio r y centro en (a,b) son:

$$x = a + r \cdot \cos t \cdot 2\pi \quad , \quad y = b + r \cdot \sin t \cdot 2\pi$$

$$t \in [0,1]$$

Expresión 69.

En el caso de una trayectoria elíptica de centro (a,b) , semieje mayor m y semieje menor n , la ecuación paramétrica que define cada uno de sus puntos es la siguiente:

$$x = a + m \cdot \cos t \cdot 2\pi \quad , \quad y = b + n \cdot \sin t \cdot 2\pi$$

$$t \in [0,1]$$

Expresión 70.

El recorrido del espacio paramétrico t asegura un conjunto continuo e infinito de puntos trayectoria. Si se desea implementar computacionalmente el recorrido de la trayectoria será necesario realizar una discretización que determine el subconjunto finito de puntos que definirán la trayectoria de forma discreta.

Un ejemplo de discretización sería el mostrado en la Figura 101 donde los puntos resaltados constituirían el recorrido discreto de una trayectoria circular:

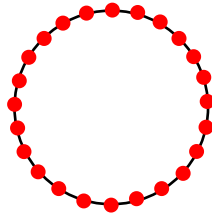


Figura 101. Ejemplo de discretización de trayectoria circular

Cualquier curva que pueda discretizarse es apta para definir la trayectoria. En la literatura, es posible encontrar distintos métodos que realizan la discretización de curvas atendiendo a diferentes aspectos geométricos como el error de curvatura o la disposición en el espacio paramétrico [Rypl, 1997], [Solís, 2003], [Anderson, 2008], [Heibel, 2009]. De la discretización realizada dependerá la precisión del modelo y consecuentemente su complejidad temporal.

5.2.2 Obtención de distancia objeto – elemento estructurante

La función $dist_v$ que calcula la distancia mínima entre el objeto y el elemento estructurante constituye el elemento más importante de la operación básica instantánea y el que presenta una mayor complejidad computacional. El modelo permite trabajar tanto con las descripciones geométricas de puntos del espacio euclídeo como con subconjuntos no ordenados de los mismos con lo que la implementación de la función distancia entre elemento estructurante y objeto se puede abordar desde diferentes métodos:

- Cálculo analítico de la distancia.
- Cálculo discreto de la distancia.
- Cálculo mixto de la distancia.

5.2.2.1 Cálculo analítico de la distancia

Si se dispone de la expresión analítica de los objetos, la distancia entre los objetos se obtiene a partir de la función matemática que determina la distancia entre ellos en la dirección que indica el vector director. Al no discretizar el espacio geométrico, el cálculo de la distancia puede

llevarse a cabo sin necesidad de recurrir a espacios y métodos discretos lo que permite cálculos exactos y tiempos de computación reducidos.

La dificultad en hallar esa función distancia depende de la naturaleza geométrica de los propios objetos de que se trate. Si la representación geométrica de los objetos es sencilla el cálculo de la distancia obtendrá una solución analítica exacta, sin embargo si la representación de los objetos es compleja puede darse el caso de que tan sólo se pueda obtener una solución aproximada con un coste computacional además muy elevado.

La Figura 102 muestra un ejemplo bidimensional concreto en el que el cálculo de la distancia puede abordarse de forma analítica. En el escenario presentado el objeto es definido a partir de un polígono y la herramienta mediante una circunferencia. El cálculo de la distancia entre ambos objetos puede llevarse a cabo analíticamente a partir de la distancia mínima existente entre cada uno de los segmentos del polígono y la circunferencia.

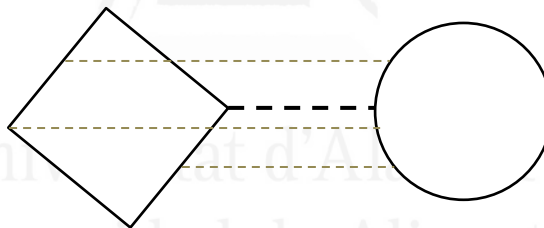


Figura 102. Cálculo continuo de distancia

5.2.2.2 Cálculo discreto de la distancia

Cuando los objetos geométricos tienen una representación compleja, el cálculo analítico de la distancia puede conducir a la resolución de un sistema de ecuaciones no lineal que no asegura una consecución de resultados eficaz ni eficiente.

En este caso, es posible abordar el cálculo de la distancia entre objeto y elemento estructurante a partir de una discretización de ambos objetos entendiendo el cálculo de distancia como un proceso de cálculo de distancia entre conjuntos de puntos. En este caso la función distancia

calculará la distancia existente un punto del elemento estructurante y el polígono resultante de la discretización del objeto, en el sentido del vector director (Figura 103).

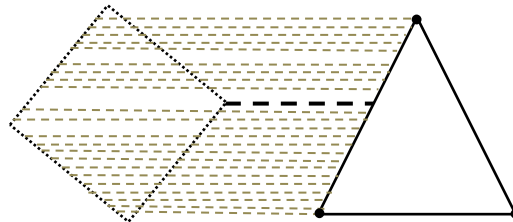


Figura 103. Cálculo discreto de distancia

Este método simplifica el procedimiento ya que el cálculo de la distancia se lleva a cabo con independencia de la geometría de los objetos. Sin embargo, la necesidad de obtener conjuntos de puntos de ambos objetos introduce un alto índice de complejidad temporal en el modelo ya que la precisión en el cálculo depende del número de puntos analizados de ambos objetos. Cuanto mayor sea el número de puntos, mayor será la precisión de cálculo, aunque también se incrementará el tiempo de computación.

5.2.2.3 Cálculo mixto de la distancia

El principal inconveniente del método de cálculo discreto de la distancia entre conjuntos de puntos reside en su elevado coste computacional unido a la inexactitud del cálculo. Sin embargo, tiene la ventaja respecto al cálculo de distancia analítico que el cálculo de la distancia es totalmente independiente de la complejidad geométrica del objeto.

Un método intermedio consiste en definir el elemento estructurante mediante una función geométrica y el objeto como un conjunto de puntos discretizados. Este método se basa en el hecho de que generalmente el elemento estructurante posee una representación geométrica más simple con lo que el cálculo de la distancia tiene una solución analítica más sencilla.

En términos formales, el cálculo de la distancia entre dos objetos viene dado por la siguiente expresión:

$$dist_v B, X = \min d_v b, X, \forall b \in B$$

Expresión 71.

La función d_v obtiene la distancia entre un punto y un objeto en la dirección que indica el vector v . Geométricamente la función $d_v(b, X)$ que obtiene la distancia euclídea existente entre el punto b y el punto más cercano del objeto puede obtenerse a partir de la intersección de la línea que define el vector v y que pasa por dicho punto y el objeto X : La Figura 104 muestra un ejemplo de aplicación de la función $dist_v$.

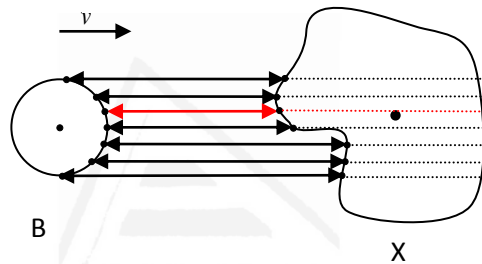


Figura 104. Cálculo de distancia entre objetos [Jimeno, 03]

El cálculo mixto de la distancia requiere pues de una representación analítica que describa con exactitud la geometría del elemento estructurante que participará en el proceso de transformación y de la discretización de las superficies que conformen el objeto a transformar. Este método intermedio ofrece una buena alternativa ya que, aun al incorporar la discretización del objeto un error en el cálculo, la naturaleza generalmente sencilla del elemento estructurante permitirá encontrar una solución analítica al cálculo de la distancia, obteniendo de esta forma un equilibrio entre precisión y coste computacional.

5.2.2.4 Coste computacional

El coste computacional del algoritmo que calcula la operación morfológica básica determinista viene determinado por el método elegido para el cálculo de la distancia entre objeto y elemento estructurante. Si el método utilizado es el método continuo, el coste del

algoritmo dependerá exclusivamente de la discretización de la trayectoria de erosión (t), ya que la distancia se calculará siempre analíticamente en un tiempo constante. La complejidad temporal será en ese caso de $O(t)$.

Si se decide utilizar el método discreto, la complejidad temporal añadirá dos nuevos factores n y m que corresponderán con el número máximo de puntos considerados para la discretización del objeto geométrico a transformar y del elemento estructurante respectivamente. La complejidad temporal será en este caso de $O(t \cdot n \cdot m)$.

Finalmente, si el método utilizado es el mixto tan sólo añadirá el factor de discretización n del objeto teniendo en el peor de los casos una complejidad de $O(t \cdot n)$

Para la experimentación presentada en esta investigación se ha hecho uso del método mixto de cálculo de distancias. Al existir un factor de discretización en el modelo, éste tendrá asociado implícitamente un error en el cálculo de la distancia mínima a la que se encuentra la herramienta. El error dependerá de la propia geometría del elemento y de la máxima distancia existente entre puntos vecinos del objeto discretizado. A pesar de ello el método intermedio de cálculo de distancias entre pieza y herramienta ofrece buenos resultados ya que, aunque se introduzca imprecisión por la discretización del objeto, el cálculo de la intersección entre una recta y un objeto de geometría sencilla tiene solución analítica.

5.2.3 Discretización de superficies

Al trabajar el modelo morfológico propuesto con información superficial de los objetos sin considerar la información relativa al interior de los objetos, los sólidos se caracterizan a través de sus fronteras como un conjunto de superficies conectadas que encierran un volumen. Los métodos de cálculo de distancia discreta y mixto abordan el cálculo de la distancia entre objeto y elemento estructurante desde una perspectiva discreta que requiere de la definición de un modelo de discretización de superficies que permita representar los objetos como conjuntos finitos de puntos discretos.

Dentro de los modelos superficiales, o modelos BRep (Boundary Representation), se pueden encontrar distintas alternativas [Bowyer, 1999], [Meijster, 2000], [Sanz, 2002], [Stroud, 2006], que pueden resumirse en:

- Poligonales
- Superficies cuádricas y supercuádricas
- Isosuperficies
- Superficies curvas

Aunque cada modelo caracteriza de forma particular un sólido, todos ellos proporcionan formulación que permite obtener los puntos del contorno de los objetos representados, con lo que todos ellos son modelos de representación válidos para el modelo morfológico presentado.

La precisión del modelo computacional propuesto depende de la densidad con la que se discreticen las superficies del objeto ya que el cómputo de distancias de la operación básica determinista se realiza a partir de los puntos de la superficie. Es pues necesario que la malla sea densa para garantizar un mínimo de error. Si, además, se desea que el reparto de puntos sea lo más uniforme posible, se deberá considerar una discretización ordenada y equidistante en el espacio paramétrico de cada superficie, por lo que los puntos aparecerán organizados en forma de malla o retícula bidimensional.

5.3 Implementación del diseño por trayectoria

En el capítulo anterior se han detallado algunas aplicaciones del modelo morfológico determinista presentado en esta investigación en el contexto aplicado de un entorno de diseño y fabricación de objetos tridimensionales.

Una de las aplicaciones descritas es el diseño por trayectoria, metodología de modelado de piezas que relaciona íntimamente la etapa de diseño con la de mecanizado.

En el diseño por trayectoria el diseño de las piezas se caracteriza por la definición de trayectorias de erosión que guían el recorrido de herramientas de modelado que simulan el arranque de material de la pieza. El propio diseño de las piezas define la fabricación de éstas, con lo que el proceso de diseño y fabricación de piezas se contempla como un proceso continuo sin pérdida de precisión entre ambos procesos.

Esta metodología de diseño ofrece ventajas significativas:

- La obtención de trayectorias de mecanizado a partir de un diseño es inmediata con lo que se evitan costosos cálculos de trayectoria y la pieza final es de mayor calidad.
- El diseño de los objetos no se restringe al uso de una determinada herramienta. La morfología matemática no impone ningún tipo de limitación a la geometría de los objetos que participan en la operatoria morfológica con lo que las herramientas que participan en el proceso de diseño pueden presentar cualquier tipo de tipología. Las herramientas de diseño pueden coincidir con herramientas de mecanizado reales o pueden ser herramientas virtuales que sean emuladas en una fase posterior con herramientas reales (un ejemplo de ello se presenta en [Molina, 02]).
- El modelo garantiza que el objeto diseñado siempre podrá ser fabricado con precisión, siempre que las herramientas de diseño coincidan con herramientas de mecanizado reales o exista un

procedimiento de emulación de las herramientas virtuales con otras reales.

En definitiva, el diseño por trayectoria aporta ventajas significativas en entornos de diseño y fabricación asistidos por ordenador.

Se presenta a continuación un sistema computacional que presenta una aplicación de diseño de piezas por trayectoria desarrollada sobre los principios básicos del modelo morfológico presentando en esta investigación. Para ello, se propone un método computacional para la implementación de la operación de erosión parcial regularizada con trayectoria y su integración en un entorno de diseño y fabricación de piezas tridimensionales como una herramienta modeladora de objetos.

Por simplicidad, se ha abordado inicialmente la erosión de objetos bidimensionales a partir de un elemento estructurante circular para concluir con el modelo computacional de objetos tridimensionales con elemento estructurante esférico si bien el sistema es válido para cualquier geometría de objeto y elemento estructurante.

5.3.1 Modelo bidimensional.

La erosión parcial normalizada de una pieza por una herramienta determinada se define como la resta de la pieza con la trayectoria de erosión dilatada mediante la herramienta. La dilatación de la trayectoria de erosión se puede describir geoméricamente como el conjunto de posiciones que sitúan la herramienta a una determinada distancia del conjunto completo de puntos que conforman la trayectoria.

La Figura 105 muestra la dilatación de un segmento rectilíneo por una herramienta circular. En este caso la dilatación se compone de aquellos puntos que están distanciados de la trayectoria el radio de la herramienta:

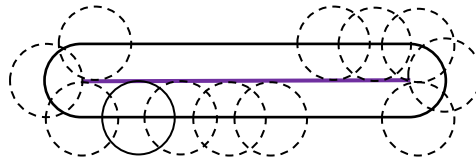


Figura 105. Dilatación de trayectoria de erosión

Tal y como se ha avanzado en este capítulo, una trayectoria de erosión es un conjunto de puntos continuo que se obtiene directamente del método morfológico. Al trabajar la morfología matemática con conjuntos infinitos de puntos la representación de la operatoria morfológica debe llevarse a cabo mediante mallados que discreticen los conjuntos a partir de métodos geométricos.

El método general que permite obtener la representación de la operación morfológica de erosión es el siguiente:

```

1: F = Discretizar(T)
2: Para t=0 Hasta 1 hacer
3:   t'=ObtenerCentro(t, Vp)
4:   Si No Conflicto(t', F) entonces hacer
5:     AñadirAResultado(t')
6:   Incrementar(t)
7: Finpara

```

En primer lugar se lleva a cabo la discretización de la trayectoria en un conjunto ordenado de puntos t (Línea 1). Por cada punto se calcula la posición de la herramienta que la sitúa perpendicular al sentido de la trayectoria y en contacto con el punto dado (Línea 3). El punto se añade a la lista de puntos resultado si no entra en conflicto con el conjunto completo de puntos que conforman la trayectoria, es decir, si mantiene también una distancia adecuada con respecto a la trayectoria de erosión completa (Línea 4 y Línea 5).

En el modelo bidimensional las trayectorias de erosión se definen seleccionando uno o varios segmentos del objeto diseñado,

consideración que simplifica los procedimientos sin establecer ningún tipo de limitación al problema. La Figura 106 muestra el escenario inicial de una erosión parcial normalizada en la que se propone la erosión del segmento superior de un objeto rectangular mediante una herramienta circular.

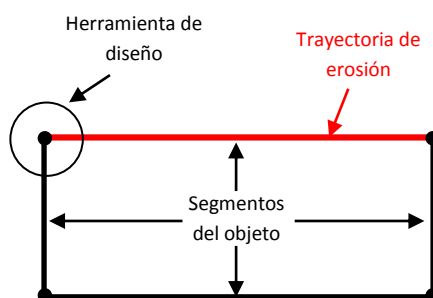


Figura 106. Trayectoria de erosión sobre un objeto

Cada objeto diseñado se define paramétricamente estableciéndose un orden en la secuencia de puntos que conforman cada segmento del objeto. De esta forma, un objeto está compuesto por un conjunto ordenado de segmentos compuestos por conjuntos discretos de puntos ordenados en secuencia.

La discretización de la trayectoria de erosión representa el orden de generación de resultados de la función morfológica de trayectoria τ . El problema del cálculo de la erosión parcial 2D se reduce pues a la discretización de los n_{seg} segmentos del objeto a erosionar (A) y a la aplicación secuencial de la función `ObtenerCentro()` que obtiene el centro de herramienta situado a la distancia adecuada de cada punto de cada segmento $p_i q_i$. En el caso de una herramienta circular de tamaño R , el conjunto completo de puntos dilatados se definiría de la siguiente forma:

$$D = \left\{ p'_{ij} = p_{ij} + R \cdot \frac{(p_{iy} - q_{iy}, q_{ix} - p_{ix})}{(q_{ix} - p_{ix})^2 + (q_{iy} - p_{iy})^2} \right. \\ \left. : p_{ij} \in A; \forall j = 0, \dots, d_i; \forall i = 0, \dots, n_{seg}; \right.$$

Expresión 74.

siendo i el número de segmento a erosionar, p_i y q_i los puntos inicial y final del segmento i , d_i el número de puntos en los que se discretiza el segmento i y R el radio de herramienta.

Si un punto del segmento presenta una discontinuidad en primera derivada, como es el caso de los puntos extremos, es necesario realizar un barrido angular de normales para obtener la dilatación de la trayectoria en esos puntos (Figura 107).

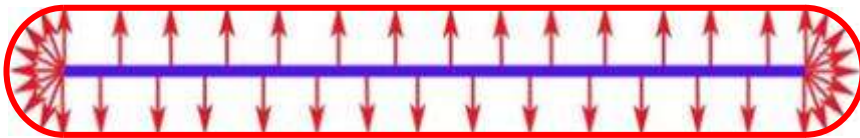


Figura 107. Dilatación de trayectoria por barrido en extremos

Formalmente, el barrido (B_j) de un extremo p_j se define como el conjunto de puntos resultado de hacer rotar n veces el punto p' un ángulo α_i , siendo n la precisión deseada:

$$B_j = p_1, p_2, \dots, p_n = \underset{i=0, \dots, n}{(Rot(p_j', \alpha_i))}$$

$$\alpha_i = \frac{i \cdot \alpha}{n}; i = 0, \dots, n \quad \alpha = \text{ang}(\text{vector}_n, \text{vector}_p)$$

Expresión 75.

La Figura 108 muestra el resultado de la dilatación de una trayectoria de erosión definida sobre el segmento superior de un objeto rectangular mediante una herramienta circular.

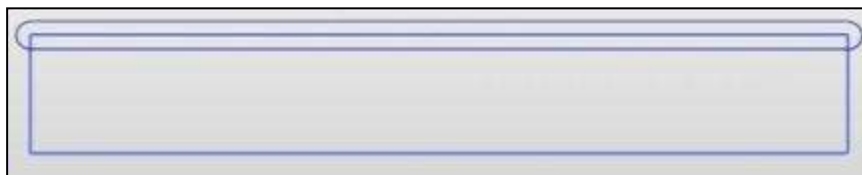


Figura 108. Dilatación del segmento superior de un rectángulo

Es importante destacar en este punto que la dilatación computacional del segmento obtiene directamente una secuencia ordenada de puntos dilatados tal y como ocurre en la operación morfológica de dilatación con trayectoria. Sin embargo, para que el resultado de la dilatación tenga apariencia continua se ha definido una curva a partir de los puntos de dilatación para mostrar el resultado de la dilatación 2D.

No todos los puntos obtenidos por la función *ObtenerCentro* son válidos. Una vez calculado un punto de la dilatación es necesario comprobar si al posicionar la herramienta en ese punto no existen conflictos con el resto de puntos de la trayectoria de erosión. La función *Conflicto* es la encargada de validar cada punto calculado y decidir si el punto formará parte del conjunto final de puntos resultados o no.

Un método general de validación consiste en comprobar si al posicionar el centro de la herramienta en el punto calculado ésta se sitúa completamente en el interior de la trayectoria de erosión, es decir, no interseca con más de un punto de la trayectoria de erosión. La validación se reduce al cálculo de la intersección entre la expresión analítica de la herramienta y los segmentos discretizados de la trayectoria de erosión.

La expresión 76 muestra la ecuación cuadrática que determina la intersección entre un círculo centrado en el origen y un segmento 2D definido entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) para un rango normalizado t .

Ecuación de Segmento

$$\begin{aligned}x &= x_1 + (x_2 - x_1) \cdot t \\y &= y_1 + (y_2 - y_1) \cdot t \\t &\in [0..1]\end{aligned}$$

Ecuación de Círculo

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Ecuación Intersección Segmento-Círculo

$$[x_1 + (x_2 - x_1) \cdot t]^2 + [y_1 + (y_2 - y_1) \cdot t]^2 = R^2$$

Expresión 76.

La Figura 109 muestra un ejemplo de validación de puntos. En el caso a) se puede comprobar cómo los centros del elemento estructurante situados en los tramos de color verde no deben formar parte de la dilatación final calculada, pues aun siendo puntos calculados respecto a un segmento del objeto no están a la distancia adecuada con respecto a puntos de otro segmento. Esos puntos no son necesarios en el cálculo de la dilatación con lo que son pues descartados del resultado final, tal y como se muestra en el caso b).

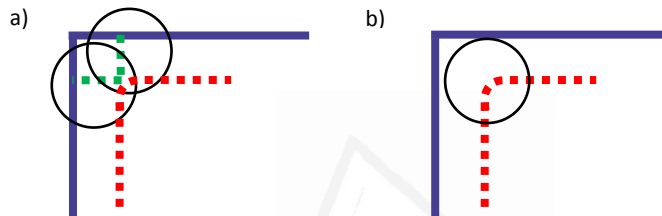


Figura 109. Eliminación de puntos no válidos en el cálculo de dilatación

En la Figura 110 se muestra el resultado del cálculo real de la dilatación de varios segmentos de un objeto bidimensional complejo. Para simplificar sólo se muestra la parte de la dilatación que incide sobre el objeto.

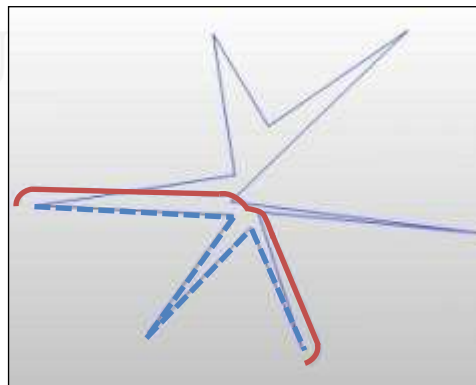


Figura 110. Ejemplo de dilatación 2D compleja

El resultado final de la erosión viene dado por la resta de la trayectoria de erosión dilatada y el elemento a erosionar, operación que deja al descubierto el objeto final erosionado. Al definirse el objeto y la dilatación como conjuntos de puntos ordenados, el cálculo de la resta del objeto con la trayectoria dilatada es geoméricamente inmediato. El resultado de la resta viene dado por el subconjunto de puntos pertenecientes al objeto que no entran en contacto con la herramienta más los puntos derivados del cálculo de la dilatación de la trayectoria.

Se muestra a continuación el proceso completo de la erosión parcial 2D. En la Figura 111 en a) se puede observar el objeto que será erosionado y en línea discontinua la trayectoria de erosión que seguirá la herramienta. En b) se puede observar el primer paso de la erosión con la dilatación de la trayectoria y finalmente en c) se puede observar el estado final del objeto una vez efectuada la erosión.

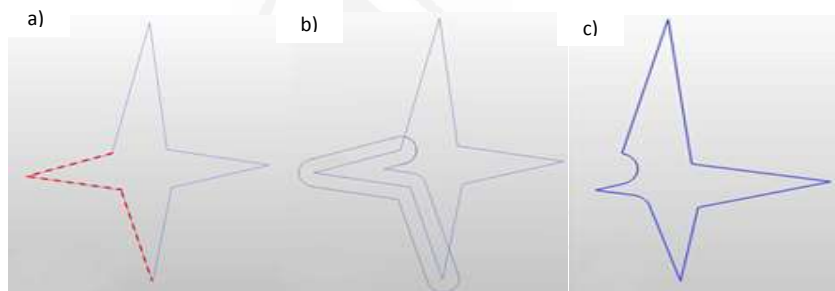


Figura 111. Proceso de erosión parcial 2D

En objetos más complejos pueden producirse particiones múltiples que dan lugar a discontinuidades en el objeto final. Estas discontinuidades las trata el método de forma intrínseca, no constituyendo en realidad casos especiales.

5.3.2 Modelo tridimensional.

Para la erosión tridimensional se han aplicado los mismos conceptos de la erosión 2D adaptándolos a las tres dimensiones. Mientras que en el 2D la dilatación de la trayectoria de erosión sólo tenía un barrido dimensional, en el 3D se dispone de dos barridos, lateral y frontal,

dando a la dilatación un tratamiento tridimensional de forma cilíndrica en el caso de utilizar una herramienta esférica (Figura 112).

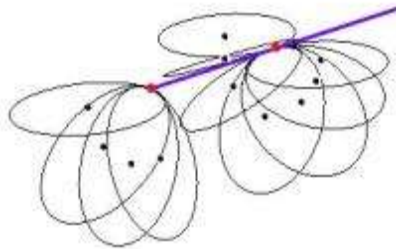


Figura 112. Sentidos de giro de la erosión 3D

Para representar la dilatación tridimensional, por cada punto de cada segmento se realiza un barrido de rotaciones laterales y para los puntos extremos un barrido de rotaciones frontales adicional (Figura 113).

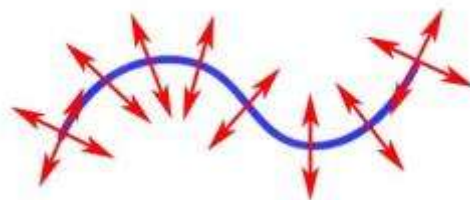


Figura 113. Normales de las rotaciones que representan la dilatación 3D

Los barridos laterales constituyen finalmente arcos perpendiculares al segmento y los frontales medias esferas (Figura 114).

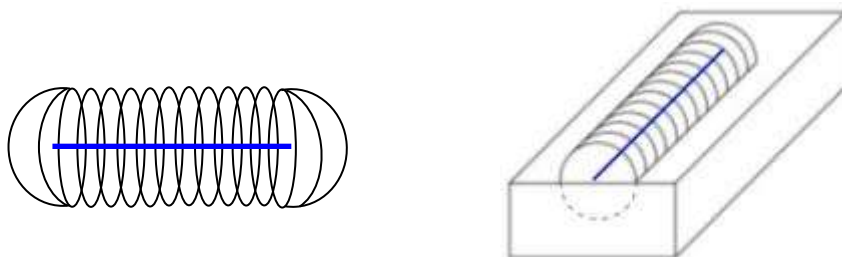


Figura 114. Barridos laterales y frontales que representan la dilatación tridimensional con herramienta esférica

No resulta necesario calcular la dilatación de la trayectoria completa en todos los casos, pues si la dilatación de la trayectoria obtiene puntos externos que no entran en colisión con el objeto esos puntos no participarán en la transformación del objeto. El conjunto de puntos de la dilatación que resultan externos al objeto quedan por tanto descartados del conjunto de puntos resultado (Figura 115).

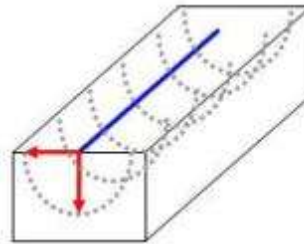


Figura 115. Detalle de puntos interiores de la dilatación

5.3.2.1 Modelo secundario de representación.

Una vez se han calculado los puntos de la erosión, el sistema computacional debe proporcionar un modelo de representación que visualice en pantalla la pieza erosionada de forma realista, entendiendo la erosión como una herramienta de modelado incluida dentro en un entorno realista de diseño de objetos tridimensionales sólidos.

Si bien, la nube de puntos resultado de la operación de erosión permite visualizar el objeto erosionado, esta representación no cumple con los parámetros de calidad requeridos por un sistema de diseño y fabricación orientado por ordenador actual, que requiere una calidad de visualización de la pieza transformada mucho mayor. Por esta razón se necesita un modelo de representación que visualice el objeto erosionado con apariencia cerrada y sólida. La Figura 116 muestra la nube de puntos que se obtiene al aplicar la operación de erosión morfológica determinista sobre trayectorias de erosión sencillas:

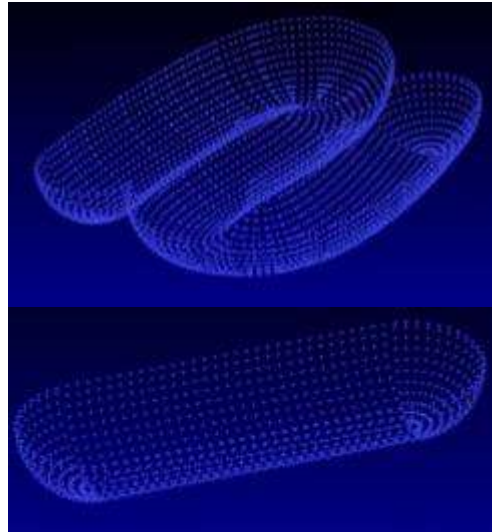


Figura 116. Resultado de la operación morfológica determinista

El modelo morfológico presentado en esta investigación es un modelo superficial que caracteriza a los sólidos a través de sus fronteras sin considerar información alguna acerca de su interior. Los objetos son considerados conjuntos de superficies conectadas encerrando un volumen.

El modelo de representación propuesto no incorpora operaciones booleanas entre sólidos para representar el proceso de erosión, sino que representa las piezas como una suma de superficies: las superficies de la forma inicial no implicadas en la erosión, una superficie de la forma inicial recortada por la erosión y una superficie de erosión generada a partir de los arcos de la trayectoria de erosión.

Esta característica del modelo es fundamental, pues denota una relación directa e inmediata entre el cálculo de la erosión y su visualización, relación que dota al sistema de gran rapidez y precisión, al no existir proceso alguno entre el cálculo de las trayectorias de erosión y su visualización final.

La forma a erosionar inicial no es un objeto sólido, son superficies individuales que unidas constituyen un objeto con apariencia sólida. La trayectoria de erosión calculada es por tanto visible para el usuario

desde cualquier punto de vista tal y como se puede observar en la Figura 117:

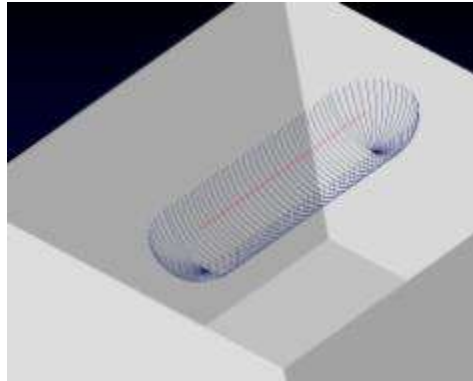


Figura 117. Ejemplo de trayectoria de erosión

Un primer paso para conseguir una visualización realista de la escena consiste en obtener la superficie de recorte de la trayectoria de erosión con la superficie inicial a partir del contorno de la erosión. Para obtener el contorno de la erosión se construye una curva con los puntos inicial y final de cada arco de la trayectoria obteniendo en casos sencillos directamente el contorno de erosión. En casos más complejos como el mostrado en la Figura 118 es necesario el aplicar un filtrado que determine el contorno final

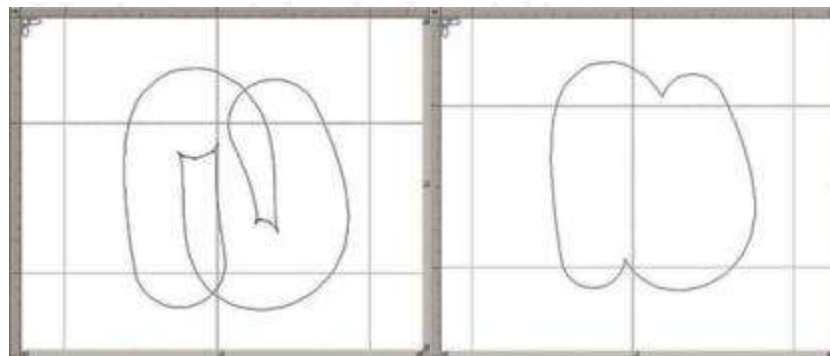


Figura 118. Contorno de erosión complejo

Una vez obtenida la curva del contorno se procede al recorte de la superficie de la forma original con esta curva de recorte, obteniéndose una superficie recortada que formará parte de la superficie final.

Se puede observar en la Figura 119 y en la Figura 120 el resultado de realizar el recorte de superficies, quedando visibles los arcos de la trayectoria de erosión previamente calculados, arcos que en una fase posterior servirán de base en la construcción de la superficie de erosión:

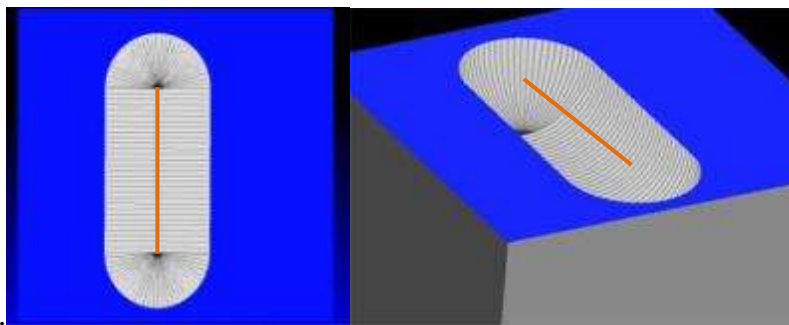


Figura 119. Superficie de recorte de una trayectoria de erosión lineal

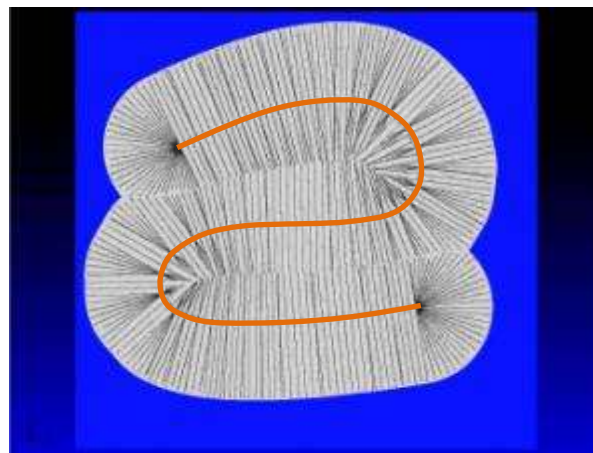


Figura 120. Superficie de recorte de una trayectoria de erosión curva

El último paso de la erosión consiste en la generación de la superficie de erosión a partir de los arcos de la trayectoria de erosión. Al realizar la generación de la trayectoria de erosión de forma ordenada, la superficie de erosión puede generarse triangulando punto a punto los arcos consecutivos de la trayectoria (Figura 121).

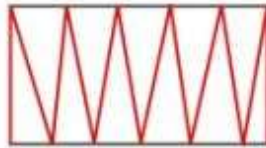


Figura 121. Triangulación de la superficie

Esta forma de representación es precisa y muy rápida, pues la mayoría de las tarjetas gráficas existentes en el mercado están optimizadas para el dibujado de triángulos.

Una vez generada la superficie de erosión las superficies unidas simulan perfectamente el resultado de la erosión de un objeto sólido como se puede observar en la Figura 122:

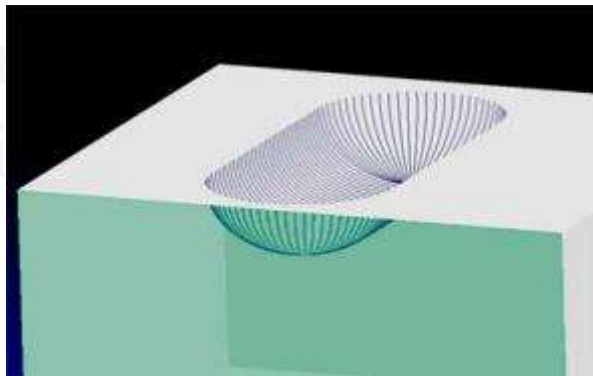


Figura 122. Superficie de erosión

La eliminación de las curvas de trayectoria junto con la visualización de todas las superficies que conforman la pieza final ofrece finalmente una representación realista de la erosión (Figura 123):

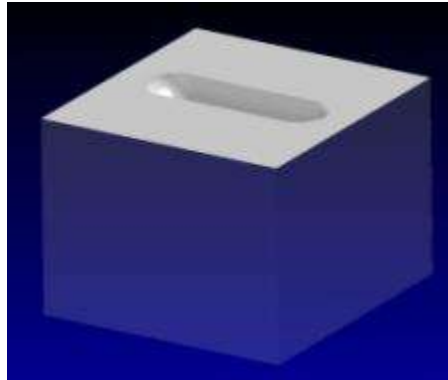


Figura 123. Erosión 3D

Al permanecer oculto el interior de la pieza original el proceso de cálculo de las superficies resulta transparente para el usuario, que tan sólo observa en el resultado final de la erosión un objeto erosionado con entidad sólida (Figura 124 y Figura 125):

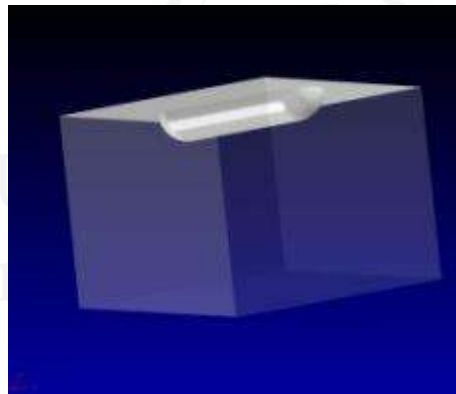


Figura 124. Vista inferior de la superficie de erosión

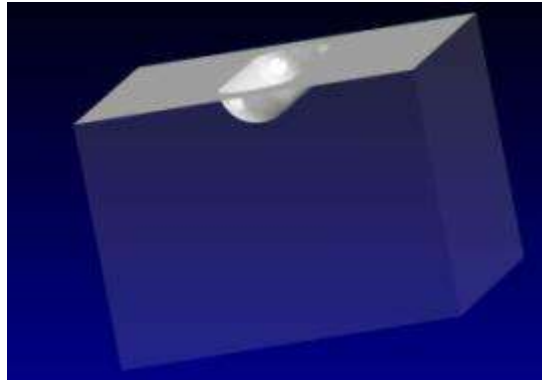


Figura 125. Vista frontal de la superficie de erosión

5.3.2.2 Refinamientos del modelo

Resuelta la erosión 3D de trayectorias lineales simples, se han analizado trayectorias de erosión más complejas, donde la generación de la superficie de erosión requiere de refinamientos en el proceso de cálculo.

Para generar la trayectoria de erosión 3D se procede a la discretización de cada segmento de la trayectoria a erosionar en un número determinado de puntos. Por cada punto de la trayectoria se realiza un barrido angular que representa el paso de la herramienta por ese punto. Para realizar ese barrido se utiliza el vector normal del segmento con lo que es en la unión de dos segmentos donde se produce una discontinuidad que provoca un espacio sin rellenar.

La Figura 126 muestra la vista superior de la erosión de una línea en la cual se puede observar el problema descrito. La línea gruesa es la trayectoria de mecanizado y las líneas finas conforman la trayectoria de mecanizado generada por una herramienta tras realizar el erosionado de la trayectoria.

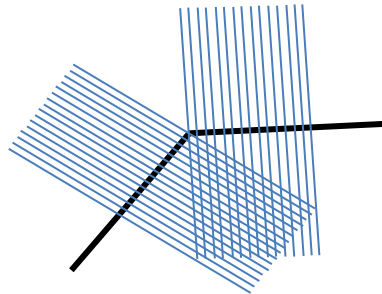


Figura 126. Error en el cálculo de barridos en unión de segmentos

Para evitar que la superficie de erosión muestre una discontinuidad en cada concavidad o convexidad que muestre la trayectoria, en cada discontinuidad se efectúa un barrido adicional de puntos que definen la superficie totalmente (Figura 127).

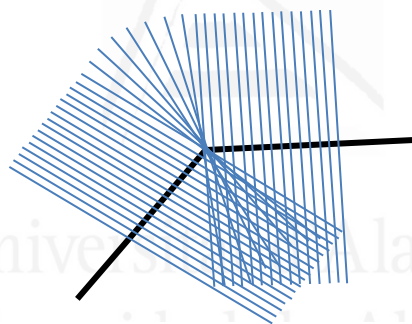


Figura 127. Barridos angulares entre segmentos

La generación de barridos para cada punto de cada segmento incrementa el número de arcos de la solución y el número de intersecciones entre arcos. La trayectoria de erosión servirá de base para la construcción de la superficie de erosión, con lo que la existencia de intersecciones entre arcos dificultará en gran medida la construcción de la superficie.

Con el fin de evitar intersecciones entre arcos, para cada punto de cada arco calculado se comprueba si entra en conflicto con el posicionamiento de la herramienta en otro punto de la línea de mecanizado. Si el punto entra en conflicto no se incluye en el arco

resultante. De esta forma se han eliminado intersecciones entre arcos solución (Figura 128 y Figura 129):

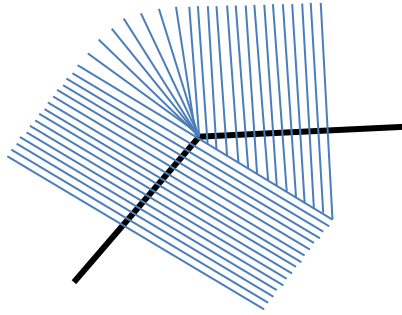


Figura 128. Eliminación de puntos que entran en conflicto

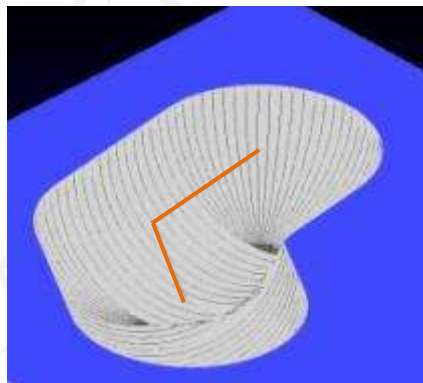


Figura 129. Erosión eliminando intersecciones entre arcos

Este refinamiento optimiza la definición de superficies de erosión en trayectorias de erosión complejas como las mostradas en la Figura 130:

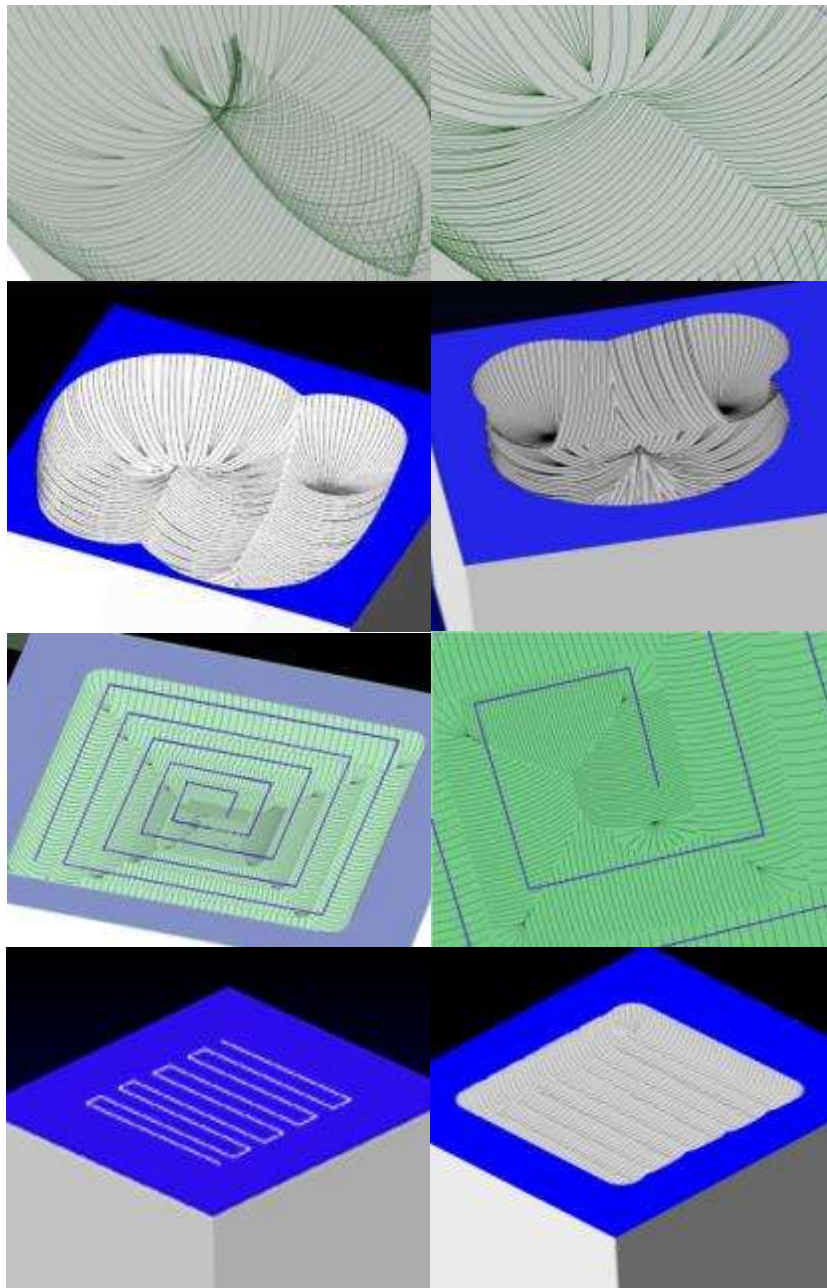


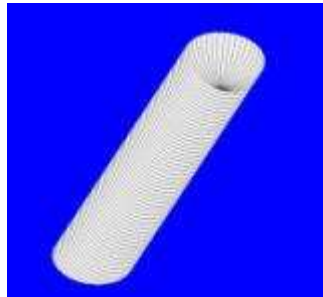
Figura 130. Ejemplos de trayectorias complejas

5.3.2.3 Análisis del Coste computacional

Los siguientes experimentos muestran los tiempos de ejecución del modelo aplicado a diferentes trayectorias de erosión. El análisis se ha llevado a cabo sobre trayectorias de erosión sencillas que constituyen la base de trayectorias de erosión más complejas por lo que el análisis del coste computacional puede extrapolarse fácilmente a trayectorias de erosión más complejas.

En cada prueba se ha obtenido el tiempo de cálculo de la erosión, el tiempo dedicado a la visualización y el tiempo total del proceso con el fin de comparar ambos procesos. Las gráficas resumen los tiempos totales obtenidos en cada experimento en función de la calidad de la superficie (puntos/mm²) y la precisión de la trayectoria de erosión (puntos/mm) empleadas.

La experimentación ha sido realizada sobre un sistema dotado de un procesador Intel® Pentium IV 1,8 Mhz, 2Gb de RAM y Microsoft Windows 7®.



TIEMPO CÁLCULO

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,140	0,151	0,233	0,433	0,406
13	0,125	0,170	0,234	0,453	0,900
23	0,125	0,187	0,244	0,453	0,920
49	0,125	0,187	0,266	0,459	0,936
90	0,125	0,187	0,270	0,469	0,969

TIEMPO VISUALIZACIÓN

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,108	0,125	0,141	0,156	0,156
13	0,125	0,1140	0,141	0,172	0,234
23	0,125	0,141	0,156	0,172	0,230
49	0,141	0,141	0,156	0,344	0,250
90	0,188	0,172	0,1203	0,235	0,265

**Calidad Superficie
(puntos/mm²)**

TIEMPO TOTAL

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,248	0,276	0,374	0,589	1,102
13	0,250	0,290	0,375	0,625	1,134
23	0,250	0,328	0,400	0,625	1,150
49	0,266	0,328	0,422	0,0693	1,186
90	0,313	0,358	0,473	0,704	1,234

**Calidad Superficie
puntos/mm²)**

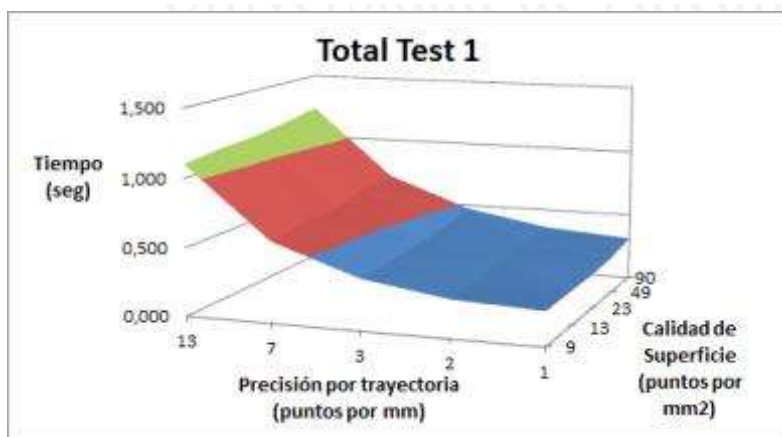
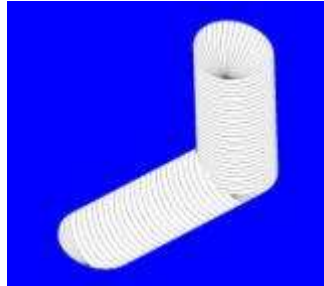


Figura 131. Test 1 de coste computacional



Calidad Superficie
(puntos/ mm²)

Calidad Superficie
puntos/ mm²)

TIEMPO CÁLCULO

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,100	0,141	0,204	0,420	0,406
13	0,110	0,125	0,210	0,430	0,906
23	0,115	0,125	0,215	0,437	1,001
49	0,125	0,156	0,219	0,440	1,014
90	0,128	0,159	0,221	0,444	1,391

TIEMPO VISUALIZACIÓN

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,125	0,125	0,125	0,172	0,187
13	0,125	0,125	0,141	0,172	0,203
23	0,140	0,141	0,141	0,172	0,250
49	0,140	0,156	0,156	0,200	0,660
90	0,172	0,172	0,187	0,218	0,800

TIEMPO TOTAL

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,225	0,266	0,329	0,592	1,003
13	0,235	0,250	0,351	0,602	1,109
23	0,255	0,266	0,356	0,609	1,251
49	0,265	0,312	0,375	0,640	1,340
90	0,300	0,331	0,408	0,662	1,400

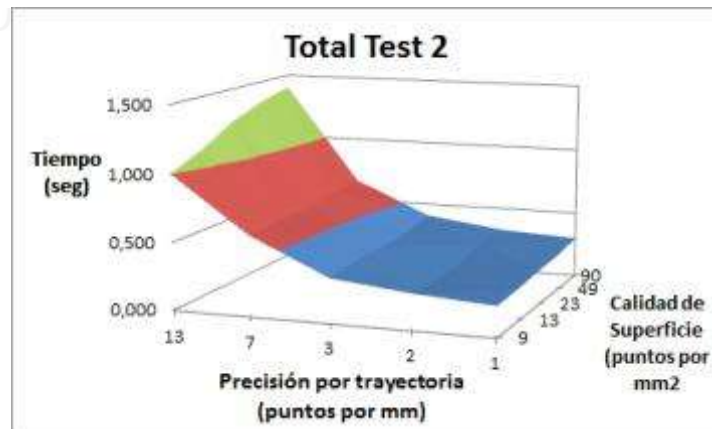
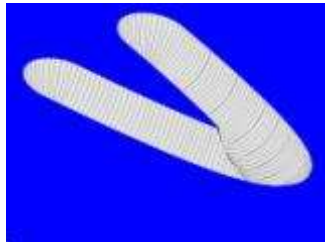


Figura 132. Test 2 de coste computacional



TIEMPO CÁLCULO

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,281	0,375	0,469	0,813	0,860
13	0,281	0,386	0,500	0,860	1,828
23	0,312	0,390	0,500	0,875	1,875
49	0,312	0,390	0,510	0,890	1,906
90	0,313	0,400	0,510	0,890	2,094

TIEMPO VISUALIZACIÓN

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,141	0,141	0,156	0,203	0,203
13	0,156	0,156	0,172	0,203	0,282
23	0,172	0,172	0,188	0,235	0,312
49	0,172	0,172	0,200	0,250	0,340
90	0,234	0,219	0,234	0,250	0,406

Calidad Superficie
(puntos/ mm²)

TIEMPO TOTAL

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,422	0,516	0,625	1,016	1,998
13	0,437	0,542	0,672	1,063	2,110
23	0,484	0,562	0,688	1,110	2,187
49	0,484	0,562	0,710	1,140	2,246
90	0,547	0,619	0,744	1,140	2,500

Calidad Superficie
puntos/ mm²)

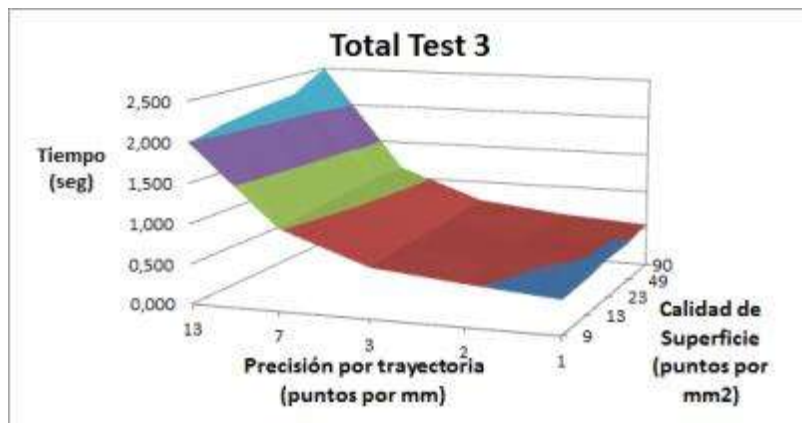
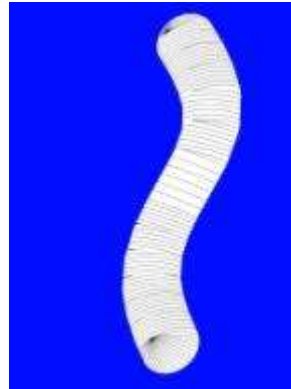


Figura 133. Test 3 de coste computacional



Calidad Superficie
(puntos/ mm²)

Calidad Superficie
puntos/ mm²)

TIEMPO CÁLCULO

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,230	0,266	0,375	0,610	0,650
13	0,235	0,281	0,375	0,656	1,375
23	0,250	0,281	0,375	0,656	1,375
49	0,265	0,281	0,378	0,672	1,380
90	0,265	0,282	0,380	0,860	1,385

TIEMPO VISUALIZACIÓN

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,140	0,141	0,156	0,188	0,188
13	0,140	0,141	0,156	0,188	0,266
23	0,141	0,156	0,172	0,203	0,820
49	0,172	0,156	0,173	0,219	0,870
90	0,187	0,187	0,235	0,243	0,920

TIEMPO TOTAL

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,370	0,407	0,531	0,798	1,935
13	0,375	0,422	0,531	0,844	2,105
23	0,391	0,437	0,547	0,859	2,195
49	0,437	0,437	0,551	0,891	2,250
90	0,452	0,469	0,615	1,103	2,305

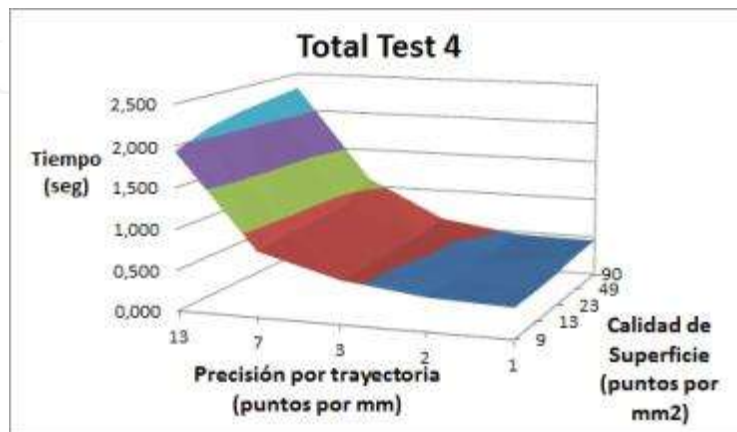


Figura 134. Test 4 de coste computacional



Calidad Superficie
(puntos/ mm²)

TIEMPO CÁLCULO

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,391	0,469	0,578	1,141	2,200
13	0,375	0,469	0,578	1,188	2,328
23	0,375	0,472	0,583	1,188	2,391
49	0,375	0,472	0,599	1,188	2,420
90	0,380	0,475	0,610	1,188	2,450

TIEMPO VISUALIZACIÓN

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,140	0,141	0,172	0,234	0,250
13	0,140	0,156	0,172	0,250	0,328
23	0,156	0,156	0,172	0,250	0,328
49	0,156	0,170	0,203	0,250	0,350
90	0,203	0,219	0,234	0,266	0,375

Calidad Superficie
puntos/ mm²)

TIEMPO TOTAL

Precisión de trayectoria (puntos/mm)

	1	2	3	7	13
9	0,531	0,610	0,750	1,375	2,450
13	0,515	0,625	0,750	1,438	2,656
23	0,531	0,628	0,755	1,438	2,719
49	0,531	0,642	0,802	1,438	2,770
90	0,583	0,694	0,844	1,454	2,825

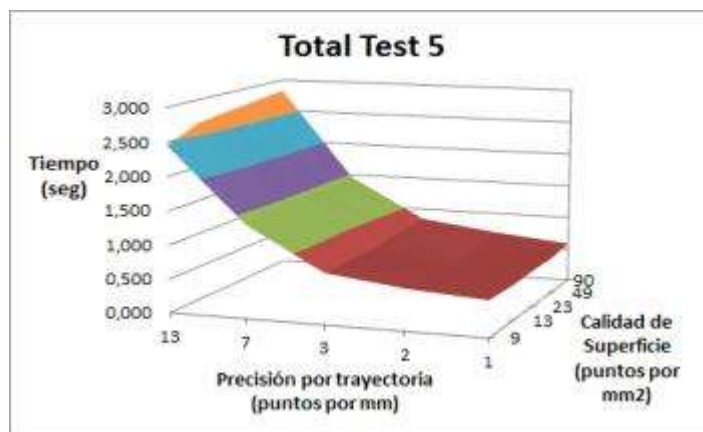


Figura 135. Test 5 de coste computacional

Atendiendo a los datos podemos concluir que es la precisión de la trayectoria la que determina en mayor medida el coste computacional del modelo y que la calidad de la superficie no provoca diferencias sustanciales en los tiempos de ejecución del proceso. Este dato es significativo y permite confirmar que el cálculo mixto de la distancia es una buena elección ya que apenas añade complejidad al proceso, y resulta lineal, frente a la trayectoria que tiene una repercusión cuadrática.

Todos los experimentos tienen una curva de crecimiento similar, sin que haya casos excepcionales que presenten alteraciones reseñables. La morfología matemática no está sujeta a restricciones geométricas que impidan la definición libre de objetos por lo que el modelo resuelve implícitamente cualquier complejidad existente en las trayectorias de erosión sin que ello repercute sobre el coste temporal del proceso.

Los reducidos tiempos de visualización demuestran la estrecha relación que establece el modelo entre los procesos de transformación y de visualización de los objetos. Al no existir etapas intermedias el modelo se muestra muy rápido y preciso en la visualización del objeto diseñado.

5.4 Experimentación

Se muestran a continuación diversos ejemplos que ilustran parte de la experimentación realizada en la implementación del entorno computacional presentado de diseño de objetos por trayectoria en dos y tres dimensiones.

La Figura 136 muestra la erosión parcial aplicada sobre dos objetos 2D complejos:

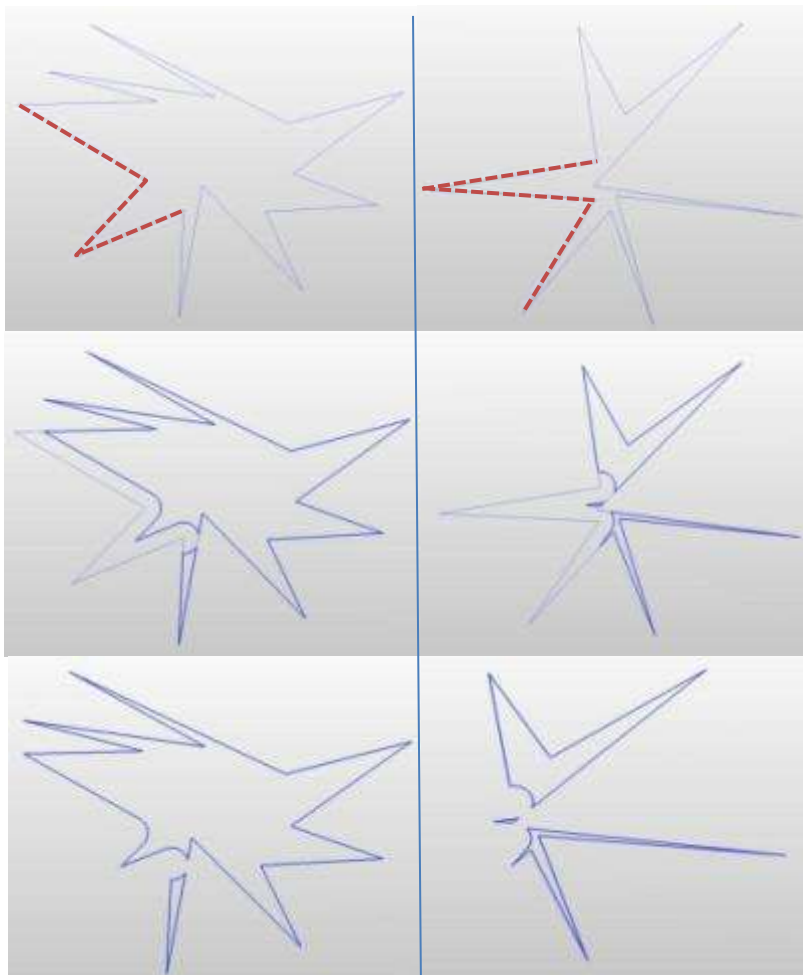


Figura 136. Ejemplos de la erosión parcial 2D

En las figuras siguientes se pueden observar ejemplos de la erosión parcial regularizada de trayectorias simples en objetos 3D. Las imágenes muestran trayectorias rectas, curvas, en espiral, con autointersecciones,...trayectorias que constituyen la base de trayectorias de erosión más complejas que permiten el diseño de objetos complejos:

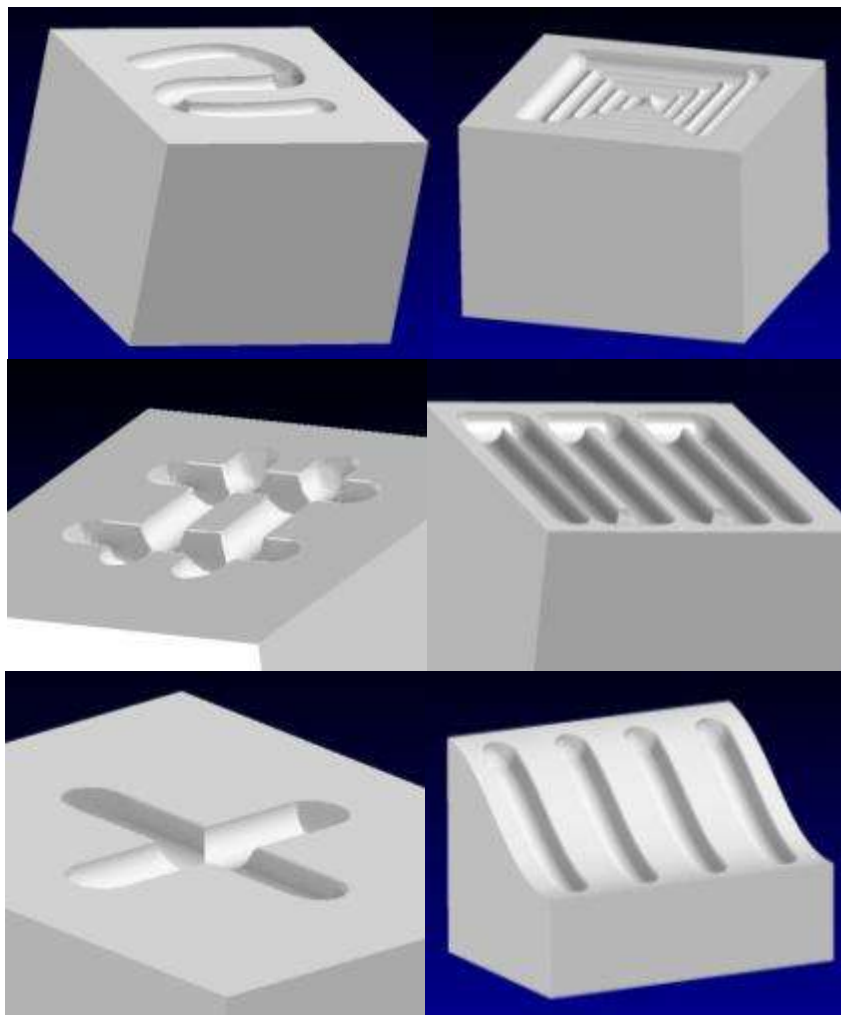


Figura 137. Ejemplos de la erosión parcial regularizada 3D

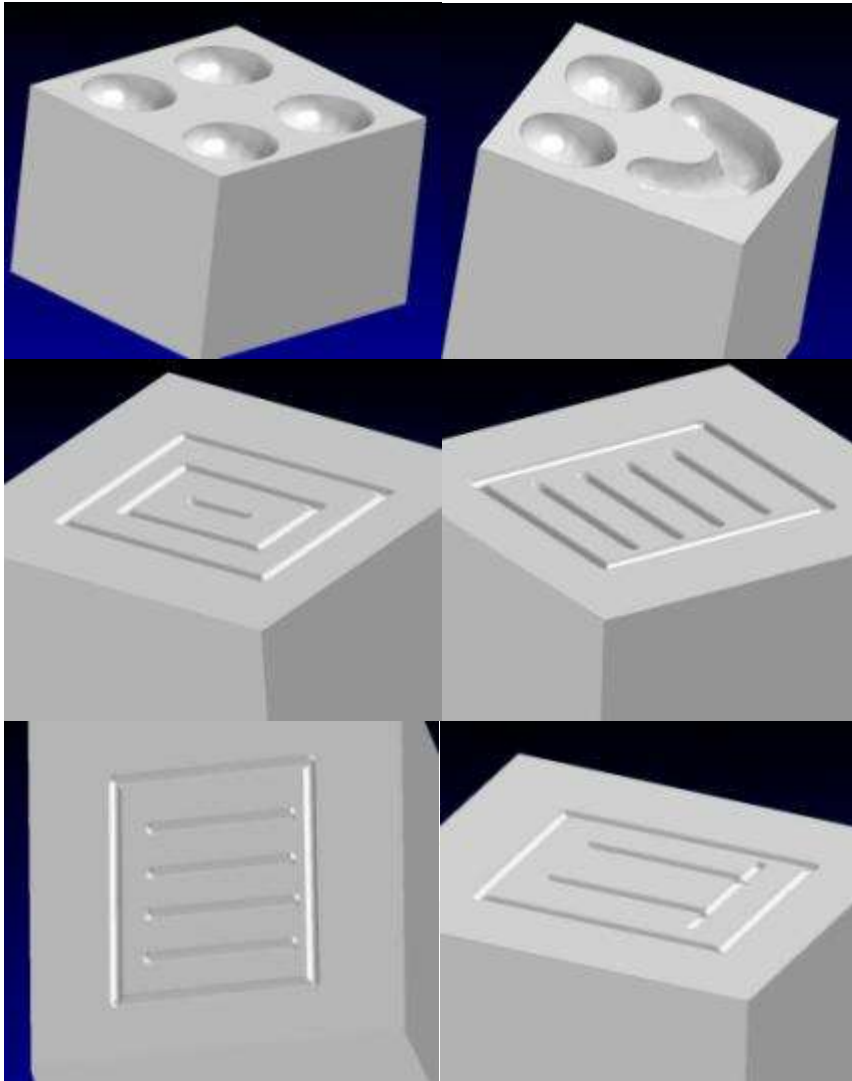


Figura 138. Ejemplos de la erosión parcial regularizada 3D

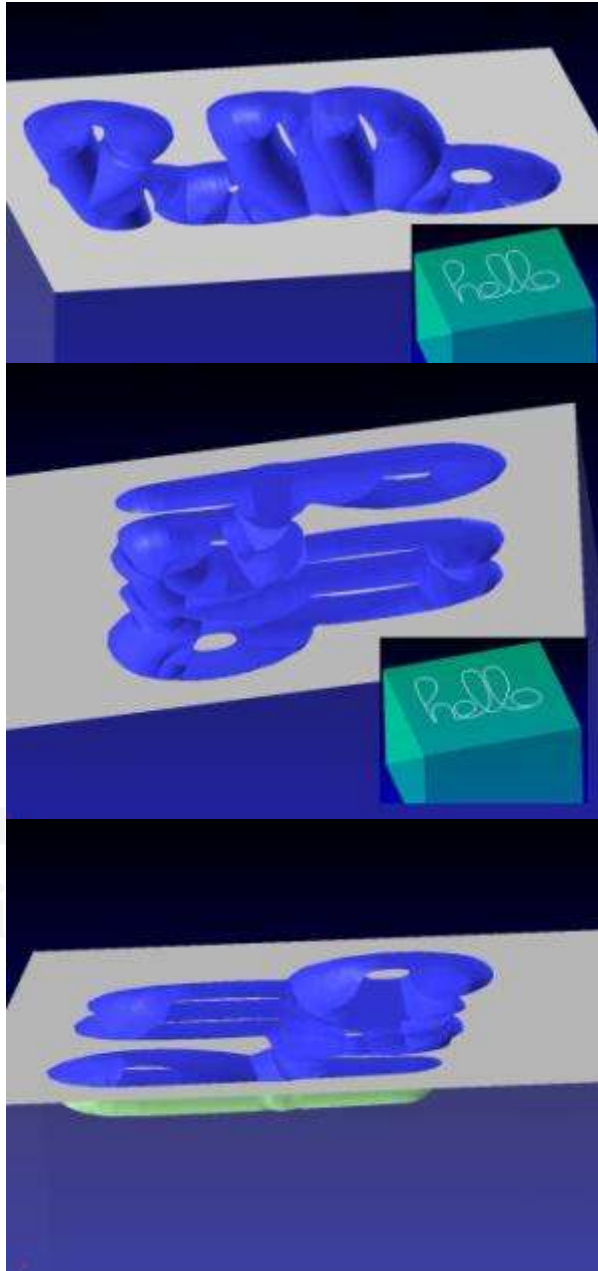


Figura 139. Vistas de la erosión parcial regularizada 3D

La Figura 140 muestra diseños de objetos modelados a partir de la definición de varias trayectorias de erosión.

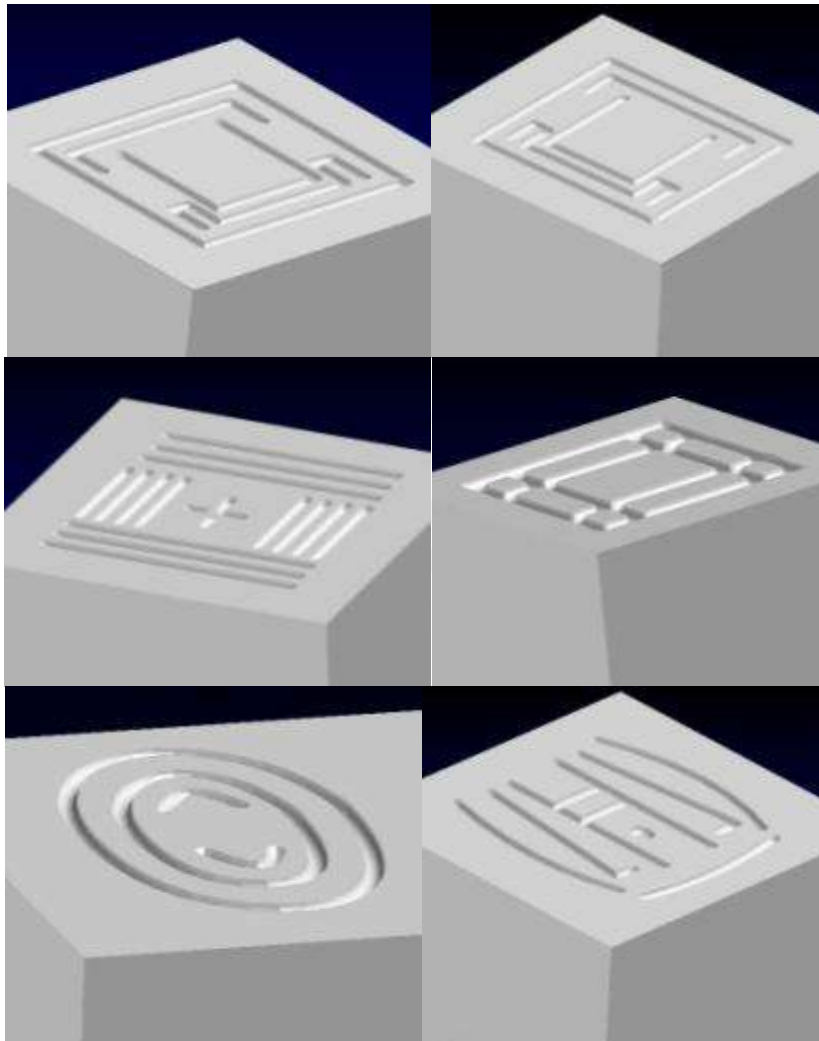


Figura 140. Ejemplos de la erosión parcial regularizada 3D

Capítulo Sexto

Conclusiones y trabajos futuros



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

6.1 Conclusiones

Para finalizar conviene efectuar un análisis de las aportaciones realizadas en esta investigación analizando el grado en el que se han cumplido los objetos establecidos en su etapa inicial.

La continua evolución tecnológica obliga a una constante revisión de los paradigmas que modelan los procesos productivos. En la actualidad, los modelos existentes demuestran carencias importantes que dificultan su aplicación en determinados entornos industriales específicos. La mayoría de modelos existentes son modelos generales cuya aplicación a pequeños sectores industriales requiere de la intervención de personal altamente especializado no siempre disponible. Por otro lado algunos modelos son muy específicos y están vinculados a una tecnología concreta. La aparición de nuevas tecnologías demuestra la ineficiencia de estos modelos en la representación de procesos de producción específicos y en la presentación de sus herramientas de forma clara y sencilla. Un caso concreto es el de diseño y fabricación de objetos tridimensionales en entornos CAD/CAM.

El diseño y fabricación de piezas asistido por ordenador debe ser contemplado como un proceso continuo, en el que las metodologías de diseño y de fabricación estén estrechamente relacionadas. Algunos de los modelos estudiados están básicamente orientados al diseño con lo que el mecanizado de las piezas resulta complejo y de baja calidad. Por contra otros modelos están más cercanos al proceso de mecanizado con lo que el diseño de las piezas es muy poco intuitivo y requiere de personal experto en mecanizado.

En esta investigación se ha presentado el Modelo Morfológico Determinista, modelo geométrico que permite modelar procesos dinámicos a partir del marco formal que presenta la morfología matemática. El paradigma morfológico permite independizar los aspectos geométricos del proceso de los puramente físicos, resultando el modelo un sistema fiel y robusto con total independencia de la tecnología existente.

Para ello, la operatoria morfológica se ha definido a partir de una especialización que dota a la operación de orden de aplicación, determinismo inexistente desde el punto de vista de la morfología matemática clásica. La especialización se fundamenta en una función trayectoria, que aplica transformaciones de traslación y rotación a los objetos a transformar facilitando la aplicación de operaciones morfológicas de forma completa y ordenada. Estas transformaciones dotan de generalidad y libertad al proceso de transformación permitiendo representar la acción de herramientas de transformación sin ningún tipo de limitación espacial.

Se ha presentado un sistema computacional que desarrolla los principios propios del Modelo Morfológico Determinista para la implementación de un entorno de diseño de objetos tridimensionales basado en trayectorias de erosión. El modelo aborda el proceso de diseño de objetos por asimilación de un proceso de mecanizado dando soluciones al diseño de objetos complejos y soporte aritmético a la generación de trayectorias de fabricación, uno de los problemas más complejos que se presentan actualmente en el CAD/CAM.

El modelo constituye una aproximación a las técnicas utilizadas por un artesano escultor para realizar sus obras: se exculpe una forma inicial y sobre ella se van aplicando herramientas que arrancan material hasta obtener la pieza final deseada. En el diseño por trayectoria, el diseñador define una trayectoria de mecanizado sobre la pieza y simula el paso de una herramienta de modelado que elimina material de la pieza obteniendo un nuevo diseño. Esta filosofía de diseño permite al diseñador la posibilidad de modelar la pieza a medida que define cómo se llevará a cabo su fabricación.

El sistema computacional presentado implementa computacionalmente la operación morfológica de erosión, operación que se asemeja al proceso real de erosión con máquinas herramienta. El sistema fundamenta el diseño de una pieza a partir de la aplicación de operaciones de erosión que simulan la acción de arranque de material de la pieza.

En el mismo diseño de la pieza se define la forma en la que ésta será fabricada con lo que la misma operación morfológica de erosión puede

ser considerada una herramienta de diseño o de fabricación. Esta consideración relaciona estrechamente los procesos de diseño y fabricación de la pieza, eliminando de forma inherente problemas clásicos y complejos del diseño y fabricación de objetos como es el cálculo de las trayectorias de mecanizado que permiten fabricar un diseño eficientemente. El sistema no debe decidir la estrategia de mecanizado a utilizar para fabricar una pieza determinada ya que en el propio diseño de la pieza se define el modo en el que ésta debe ser mecanizada. De esta forma el modelo asegura que un objeto diseñado puede ser fabricado con gran precisión.

Para entender la operación morfológica de erosión como una herramienta de modelado incluida dentro en un entorno realista de diseño de objetos tridimensionales sólidos, el sistema computacional proporciona un modelo de representación que visualiza en pantalla la pieza erosionada de forma realista. El modelo de representación vincula estrechamente el cálculo de la erosión con su visualización, sin incluir etapas intermedias, lo cual permite al modelo ofrecer una rápida y fiel representación de la pieza diseñada.

Además, el basarse la operatoria morfológica en conjuntos de puntos superficiales de los objetos no se necesitan excesivos recursos computacionales para almacenar las estructuras básicas geométricas y las operaciones entre los objetos, con lo que el modelo no requiere de potentes equipos para la resolución de problemas de erosión complejos.

Al basar el diseño de objetos sobre morfología matemática, el modelo se muestra genérico y robusto, no existiendo casos especiales ni objetos complejos en los que el modelo no aporte una solución correcta.

6.2 Trabajo futuro

El sistema computacional presentado aborda el proceso de diseño y fabricación de objetos desde una única perspectiva, modelando el proceso de forma continua y presentando soluciones al proceso global de diseño y fabricación de piezas. Existen, tal y como se ha analizado en el estado del arte, diferentes modelos que abordan la representación de piezas, sin entrar a valorar aspectos de fabricación como el cálculo de trayectorias de mecanizado. Una posible línea futura de trabajo podría consistir en analizar si la representación final de los objetos (recorte de superficies, generación de superficie de erosión...) puede optimizarse mediante el uso de uno de estos modelos de representación.

Si bien el modelo no requiere para su aplicación potentes equipos informáticos, la optimización de los algoritmos de cálculo de la erosión mediante la utilización de arquitecturas de alto rendimiento constituye una recomendable línea abierta de investigación. Algunos sistemas de cálculo de mecanizados permiten la paralelización del cálculo de las trayectorias en redes de área local, optimizando los tiempos de cálculo sin necesidad de efectuar elevadas inversiones en la infraestructura disponible. Sin duda paralelizar el proceso de cálculo de la erosión puede reducir los tiempos de ejecución del proceso, con lo que la paralelización de algoritmos y al análisis profundo de arquitecturas de alto rendimiento que optimicen el cálculo de la erosión pueden constituir oportunas líneas de trabajo.

El modelo morfológico presentado no limita la operatoria morfológica a la utilización de una herramienta y tecnología específicas. El sistema computacional presentado lleva a cabo el modelado de piezas mediante el uso de una herramienta circular (caso 2D) o esférica (3D). Desarrollar computacionalmente el uso de diferentes elementos estructurantes y diversas tipologías de maquinaria constituye también una línea abierta de trabajo.

En este trabajo se ha presentado una aplicación de diseño de objetos por trayectoria que lleva a cabo una interpretación funcional de una de las operaciones morfológicas definidas en el Modelo Morfológico Determinista para formular el proceso de diseño y fabricación de

objetos. En el capítulo cuarto se presentan algunas otras operaciones útiles en el contexto aplicado de sistemas de diseño y fabricación asistidos por ordenador como son la digitalización por trayectoria, la optimización de trayectoria, la reconstrucción de la pieza o el residuo de fabricación. Un estudio más minucioso de cada operación permitiría proponer nuevos modelos computacionales que llevaran a la práctica esas operaciones.

El Modelo Morfológico Determinista propuesto es una de las principales aportaciones de esta investigación ya que su interés no se restringe únicamente a entornos de diseño y fabricación industriales. El dominio del Modelo Morfológico Determinista es mucho más extenso y su operatoria puede modelar múltiples procesos productivos. Un claro ejemplo de aplicación más allá del proceso de fabricación de objetos lo constituye el análisis de imágenes. La morfología matemática se ha empleado desde sus inicios en el análisis y filtrado de imágenes, no en vano los filtros morfológicos son frecuentemente utilizados actualmente en múltiples disciplinas científicas. El modelo presentado puede realizar contribuciones a estos campos, formalizando operaciones morfológicas que den como resultado el filtrado parcial de las imágenes. La aplicación del Modelo Morfológico Determinista a otros ámbitos científicos constituye pues un buen punto de partida para trabajos futuros.

6.3 Publicaciones

Hasta el momento, este trabajo ha dado lugar a los siguientes artículos en publicaciones de investigación:

[Sarabia, 2010]

A Morphological Approach to the Design of Complex Objects. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*. October 2010. Vol. 132 / 051003-7.

Resumen: Se presenta un modelo computacional de representación para un entorno de diseño y fabricación de objetos tridimensionales que encapsula el cálculo del mecanizado y la visualización realista del objeto mecanizado de forma rápida y precisa, a partir del marco formal que proporciona la morfología matemática clásica.

El modelo presentado aborda el proceso de diseño de objetos por asimilación de un proceso de mecanizado dando soluciones al diseño de objetos complejos y soporte aritmético a la generación de trayectorias de fabricación, uno de los problemas más complejos que se presentan actualmente en el CAD/CAM.

El diseño de los objetos se lleva a cabo a partir de la definición de trayectorias por las que se hacen pasar herramientas de mecanizado virtuales que recorren las trayectorias erosionando el material simulando un proceso real de transformación. El diseño de los objetos incorpora la definición de las trayectorias de mecanizado describiendo con exactitud el recorrido a seguir por las herramientas de mecanizado para fabricar la pieza final. El propio diseño del objeto integra el mecanizado con lo que el modelo resuelve los problemas de precisión que la independencia de ambos procesos ocasionaba.

Al basar el diseño sobre morfología matemática y no realizar ningún tipo de operación entre sólidos para calcular superficies, el modelo se muestra genérico y robusto, no existiendo casos especiales ni objetos complejos en los que el modelo no aporte una solución correcta. Sin embargo, el principal valor del modelo de representación consiste en que el propio cálculo de la erosión da como resultado directamente la visualización del objeto. No existen etapas intermedias entre el cálculo de la erosión y su visualización con lo que el modelo consigue de forma muy rápida una fiel representación del objeto erosionado.

[Sarabia, 2012]

Modelling with Deterministic Boundary-Based Mathematical Morphology. *Advances in Computational Mathematics*.

(Enviado y pendiente de publicación)

Resumen: Se presenta un nuevo modelo geométrico que, inspirándose en el paradigma morfológico clásico, permite modelar procesos dinámicos que requieren orden de aplicación

El carácter no determinista de la morfología matemática clásica imposibilita que sus operaciones básicas se adecúen a la dinámica propia de procesos dinámicos dotados de orden de aplicación. La operatoria morfológica no atiende a ordenaciones temporales ya que sus primitivas actúan sobre conjuntos de puntos continuos y producen como resultado nuevos conjuntos de puntos continuos, sin que se establezca un orden de recorrido sobre sus elementos.

El modelo aporta una especialización de las operaciones morfológicas clásicas, dotándolas del determinismo propio de procesos dinámicos que requieren orden de aplicación como el caso del diseño y fabricación de objetos en entornos CAD/CAM.

Además, la operatoria morfológica clásica obtiene siempre resultados completos, sin existir la posibilidad de aplicar transformaciones parciales sobre los objetos que participan en la operatoria. El modelo presentado define operaciones morfológicas parciales de un objeto, operaciones que no tienen sentido en la morfología clásica pero son útiles en múltiples procesos productivos. La secuenciación de operadores parciales constituye el conjunto completo de la operación morfológica asociada, que se presenta integrada en el modelo como una operación morfológica con carácter determinista.

Apéndice

Referencias bibliográficas



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

BIBLIOGRAFIA REFERENCIADA

[Abbas, 2009]

T. Abbas. Automatic Tool Path Generation for Parametric Surfaces in Terms of Bezier Patches. Eng&Tech Journal. Vol. 27. 2009

[Anderson, 2008]

S. Anderson. Discretization of a Continuous Curve. IEEE Transactions on robotics. Vol. 24. April 2008

[Arkin, 2000]

E. Arkin, M. Held, C. Smith. Optimization Problems Related to Zigzag Pocket Machining. Algorithmica, vol. 26, num. 2, págs. 197-236. 2000

[Bautembach, 2011]

D. Bautembach. Animated Sparse Voxel Octrees. Thd Thesis. University of Hamburg. 2011

[Bierdman, 2010]

D. Biermann, F. Kahleyss, E. Krebs, T. Upmeier. A study on Micro-Machining Technology for the Machining of NiTi : Five-Axis Micro-Milling and Micro Deep-Hole Drilling. Journal of Materials Engineering and Performance. Vol. 20. 2010

[Bowyer, 1999]

A. Bowyer. The Bath Final-Year Undergraduate. Geometric Modelling Course. University of Bath. Department of Mechanical Engineering. 1999

[Cano, 2004]

P. Cano. SP-Octree: Representación Jerárquica de Sólidos Poliédricos. PhD thesis, Univ. Granada. 2004

[Cao, 2007]

L. Cao, H. Gong, J. Liu. The Offset Approach of Machining Free From Surface. Part 2: Toroidal Cutter in 5-Axis NC Machine Tools. Journal of Materials Processing Technology 1844, 6-11. 2007

[Chen, 2010]

Z. Chen. Development of Opengl Based 3D Simulator for Computer Numerical Control. Artificial Intelligence and Computational Intelligence (AICI), 2010 International Conference on. 2010

[Cortés, 2009]

E. Cortés, F. Castillo, S. Sánchez. Mathematical Morphology Based on Dynamic Structural Components for 3D Modelling of Brain Tumor Growth. International Journal of Computer and Information Engineering 3:4. 2009

[Costa, 2011]

L. Costa, T. Sales. Optimization of the 2 1/2 D Pocket Machining Using Multiple Tools. Advanced Materials Research. Vol. 223. 2011

[Cruz, 2005]

F. Cruz. Control Numérico y Programación. Sistemas de Fabricación de Máquinas Automatizadas. Marcombo S.A. 2004

[Chuang, 2006]

J. Chuang, D. Yang. A Laplace-Based Spiral Contouring Method for General Pocket Machining. Int. J. Adv. Manuf. DOI 10.1007. 2006

[Cuartas, 2006]

E. Cuartas. Reconstrucción de Superficies de Forma Libre mediante Funciones NURBS. Phd Thesis. Universidad Nacional de Colombia. 2006

[Dhanik, 2010]

S. Dhanik, P. Xirouchakis. Contour Parallel Milling Tool Path Generation for Arbitrary Pocket Shape Using a Fast Marching Method. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. Vol. 50. 2010

[Dong, 2008]

Z. Dong, W. Chen, H. Bao, H. Zhang, Q. Peng. A Smart Voxelization Algorithm. CiteSeerX - Scientific Literature Digital Library and Search Engine. 2008

[Du, 2009]

Y. Du, B. Li, W. Lin, X. Yang. Information and Automation, 2009. ICIA '09. International Conference on. Zhuhai, Macau. 2009

[Dyllong, 2008]

E. Dyllong, C. Grimm. A Reliable Extended Octree Representation of CSG Objects with an Adaptive Subdivision Depth. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 4967/2008. 2008

[Elber, 2003]

G. Elber, M. Kim. Trimming Local and Global Self-Intersections in Offset Curves Using Distance Maps. Proc. of the 10th IMA conference on the mathematics of surfaces. Leeds, UK, 219-222. 2003

[Faux, 1979]

I. Faux, M. Pratt. Computational Geometry for Design and Manufacture. Ellis Horwood. 1979

[Feng, 2005]

H. Feng, Z. Teng. Iso-Planar Piecewise Linear NC Tool Path Generation from Discrete Measured Data Points. Computer-Aided Design. Vol. 37. 2005

[Giacomo, 2003]

J. Giacomo. Implementación de una Arquitectura para un Filtro Morfológico de Imágenes Digitales en Escala de Grises en una FPGA de Altera. Phd Thesis, Univ. Católica del Perú. 2003

[González, 2008]

R. González, R. Woods. Digital Image Processing. Prentice Hall. 2008

[Gutierrez, 2009]

G. Gutierrez, S. Suárez, J. Oropeza. Detección de Fallas Estructurales en Envases de Vidrio no Cilíndricos y Grabados Utilizando Morfología Matemática y Wavelet. Programación Matemática y Software. Vol. 1. 2009

[Gorte, 2004]

B. Gorte, N. Pfeifer. Structuring Laser-Scanned Trees Using 3d Mathematical Morphology. Section of Photogrammetry and Remote Sensing, TU Delft, Kluyverweg 1, 2629HS, The Netherlands. Commission V, Working Group 2. 2004

[Heibel, 2009]

T. Heibel. Discrete Tracking of Parametrized Curves. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2009.

[Hinduja, 2010]

S. Hinduja. Voronoi-Diagram-Based Linking of Contour-Parallel Tool Paths for Two-and-a-Half-Dimensional Closed-Pocket Machining. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture September 1. 2010

[Hsieh, 2010]

H. Hsieh, C. Chang, W. Tai, H. Shen. Novel Geometrical Voxelization Approach with Application to Streamlines. Journal of Computer Science and Technology. Vol. 25. 2010

[Huang, 2009]

X. Huang, Z. Lin. The Optimal Model of Tool Paths Generation for Pocket Milling. Advances in Materials Manufacturing Science and Technology XIII. Vol. 1. 2009

[ISSM, 2011]

ISSM,2011. International Symposium on Mathematical Morphology. 2011. Vancouver BC, Canada. 2011

[Jimeno, 2003]

A. Jimeno. Modelo Topológico del Proceso de Fabricación. Phd Thesis. Universidad de Alicante. 2003

[Jimeno, 2004]

A. Jimeno, F. Maciá, J. García. Trajectory-Based Morphological Operators: a Morphological Model for Tool Path Computation. Proceedings of the international conference on algorithmic mathematics & computer science. AMCS 2004. Las Vegas. 2004

[Ju, 2009]

T. Ju. Fixing Geometric Errors on Polygonal Models. A Survey. Journal of Computer Science and Technology. Vol. 24, num. 1, 19-29. 2009

[Kaneko, 2008]

T. Kaneko, L. Gu, H. Fujimoto. Abdominal Organ Recognition Using 3D Mathematical Morphology. 15th International Conference on Pattern Recognition. Vol. 2. 2008

[Kim, 2006]

H. Kim, S. Lee, M. Yang. A New Offset Algorithm for Closed 2D Lines with Islands. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2006

[Knoll, 2006]

A. Knoll. A Survey of Octree Volume Rendering Methods. In Proceedings of the 1st IRTG Workshop. 2006

[Leisch, 2008]

F. Leisch. Modelling Background Noise in Finite Mixtures of Generalized Linear Regression Models. Technical report Number 037/2008. Department of Statistics University of Munich. 2008

[Meijster, 2000]

A. Meijster, J. Roerdink, W. Hesselink. A General Algorithm for Computing Distance Transforms in Linear Time. In: Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing. Kluwer Acad. Publ. 2000, 331-340. 2000

[Melero, 2008]

F. Melero, BP-Octree: Una Estructura Jerárquica de Volúmenes Envolventes. Phd Thesis, Univ. Granada. 2008

[Miguélez, 2006]

M. Miguélez, J. Cantero, J. Canteli, J. Filippone. Problemas Resueltos de Tecnología de Fabricación. Thomson Ediciones Spain. Paraninfo S.A. 2006

[Molina, 2002]

R. Molina. Modelo Superficie-Trayectoria. Un Modelo Geométrico para el Diseño y la Fabricación de Objetos Tridimensionales. Phd Thesis. Universidad de Alicante. 2002

[Molina, 2007]

R. Molina, A. Jimeno, R. Rizo. Morphological Offset Computing for Contour Pocketing. Journal of Manufacturing Science and Engineering. Vol. 129. 2007

[Molina, 2008]

R. Molina, A. Jimeno, M. Davia. Contour Pocketing Computation Using Mathematical Morphology. Int. J. Adv. Manuf. Technol. 36:334-342. 2008

[Mudcharoen, 2011]

A. Mudcharoen, S. Makhanov. Optimization of Rotations for Six-Axis Machining. Int. J. Adv. Manuf. Technol. 53:435-451. 2011.

[Ogayar, 2006]

J. Ogayar (2006). Optimización de Algoritmos Geométricos Básicos mediante el Uso de Recubrimientos Simpliciales. Univ. Granada. 2006

[Ortiz, 2002]

F. Ortiz. Procesamiento Morfológico de Imágenes en Color. Aplicación a la Reconstrucción Geodésica. Phd Thesis. Universidad de Alicante. 2002

[Ouyang, 2008]

D. OuYang, H. Feng. Machining Triangular Mesh Surfaces via Mesh Offset Based Tool Paths. Computer-Aided Design and Applications. 2008

[Park, 2003]

S. Park, Y. Chung. Tool-Path Generation from Measured Data. Computer-Aided Design. Vol. 35. 2003

[Prakash, 2010]

S. Prakash. Computer Aided Analysis and Design. I.K. International Publishing House Pvt. Ltd. 2010

[Rypl, 1997]

D. Rypl, P. Krysl. Triangulation of 3D Surfaces. Engineering with computers. Vol. 13, 87-98. 1997

[Sanz, 2002]

A. Sanz, A. J. Felix y Blanco. CAD-CAM. Gráficos, Animación y Simulación por Computador. Thomson-Paraninfo. 2002

[Schmähling, 2006]

J. Schmähling, F. Hamprecht, D. Hoffmann. A Three-Dimensional Measure of Surface Roughness Based on Mathematical Morphology. Technical Report from Multidimensional Image Processing, IWR, University of Heidelberg. 2006

[Scott, 2008]

D. Scott. Euler's Gem: the Polyhedron Formula and the Birth of Topology. Princeton University Pres. New Jersey. 2008

[Seong, 2006]

J. Seong, G. Elber, M. Kim. Trimming Local and Global Self-Intersection in Offset Curves/Surfaces Using Distance Maps. Computer Aided Design 38. 183-193. 2006

[Serra, 1982]

J. Serra. Image Analysis and Mathematical Morphology. Academic Press, London. 1982

[Serra, 1988]

J. Serra. Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 2: Theoretical Advances. Academic Press, London. 1988

[Serra, 2001]

J. Serra. Lecture Notes on Morphological Operators. First French-Nordic Summer Course in Mathematics. Uppsala University. Sweden. 2001

[Solís, 2003]

F. Solís, G. Castro. Discretización de Ecuaciones Diferenciales no Lineales Unimodales. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 19, 197-210. 2003

[Stroud, 2006]

I. Stroud. Boundary Representation Modeling Techniques. Springer. 2006

[Wallner, 2001]

J. Wallner. Self-Intersections and Smoothness of General Offset Surfaces. Journal of Geometry. Num. 70, 176-190. 2001

[Wang, 2007]

J. Wang, D. Sutter. A Consensus-Based Method for Tracking: Modelling Background Scenario and Foreground Appearance. Pattern recognition. Vol. 40, Issue 3. 2007

[Weiss, 2011]

K. Weiss, R. Fellegara. The PR-star Octree: A Spatio-Topological Data Structure for Tetrahedral Meshes. The 19th ACM SIGSPATIAL International Conference on Advances in Geographic Information System. Chicago. 2011

[Yuwen, 2003]

S. Yuwen, G. Dongming, J. Zhenyuan, W. Haixia. Iso-Parametric Tool Path Generation from Triangular Meshes for Free-Form Surface Machining. 2003

[Zhang, 2007]

L. Zhang, J. Tan, Z. Liu. Rational Approximation of Offset Surfaces by Using Bivariate S-power Basis. Second Workshop on Digital Media and its Application in Museum & Heritage. 2007

[Zhang, 2011]

Y. Zhang, X. Xu, Y. Liu. Numerical Control Machining Simulation. A Comprehensive Survey. International Journal of Computer Integrated Manufacturing. Vol. 24. 2011

OTRA BIBLIOGRAFIA RELACIONADA CONSULTADA

- **[Anotaipaiboon, 2005]** W. Anotaipaiboon, S. Makhanov. Tool path generation for five-axis NC machining using adaptive space-filling curves. *Int. Journal of Production Research* 43:1643–1665. 2005
- **[Balasubramaniam, 2010]** M. Balasubramaniam. Automatic 5-axis NC toolpath generation. Phd Thesis. Massachusetts institute of technology. 2010
- **[Banon, 2007]** G. Banon, J. Barrera, U. Braga. Mathematical morphology and its applications to signal and image processing. *Proceedings of the 8th international symposium on mathematical morphology*. 2007
- **[Bastl, 2008]** B. Bastl, B. Jüttler, J. Kosinka, M. Láviccka. Computing exact rational offsets of quadratic triangular Bézier surface patches. *Computer Aided design* 40. 197-209. 2008
- **[Berg, 2008]** M. Berg, O. Cheong, M. Kreveld, M. Overmars. *Computational geometry. algorithms and applications*. Ed Springer. 2008
- **[Can, 2010_A]** A. Can, A. Unuvar. A novel iso-scallop tool-path generation for efficient five-axis machining of free-form surfaces. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 51:1083–1098. 2010
- **[Can, 2010_B]** A. Can, A. Unuvar. Five-axis tool path generation for 3D curves created by projection on B-spline surfaces. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 1124. 2010
- **[Cano, 2002]** P. Cano, J. Torres. Representation of polyhedral objects using sp-octrees. In *Journal of WSCG*. Vol. 10, pp. 95–101. 2002
- **[Cao, 2006]** L. Cao, H. Gong, J. Liu. The offset approach of machining free from surface. Part 1: Cylindrical cutter in five-axis NC machine tools. *Journal of Materials Processing Technology* 174, 298-304. 2006
- **[Cha, 2003]** S. Cha, C. Kyungduck, L. Yuan. Optimizing tool orientation for 5 axis machining by configuration-space search method. *Computer Aided Design* 35:549–566. 2003
- **[Chen, 2008]** T. Chen, Z. Shi. A tool path generation strategy for tree-axis ball-end milling of free-form surfaces. *Journal of Materials Processing Technology*. Issues 1-3. 2008
- **[Chen, 2011]** K. Chen. Investigation of tool orientation for milling blade of impeller in five-axis machining. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 52:235–244. 2011
- **[Chiou, 2006]** J. Chiou, Y. Lee. Multiple-axis sculptured surface machining. *International Journal of Manufacturing Research*. Vol. 1, num. 2. 2006
- **[Chu, 2006]** C. Chu, J. Chen. Tool path planning for five-axis flank milling with developable surface approximation. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 29:707–713. 2006
- **[Chu, 2008]** C. Chu, W. Huang, Y. Hsu. Machining accuracy improvement in five-axis flank milling of ruled surfaces. *Int. J. Mach. Tools. Manuf.* 48:914–921. 2008
- **[Cignoni, 2004]** P. Cignoni, L. De Floriani, P. Magillo, E. Puppo, R. Scopigno. Selective refinement queries for volume visualization of unstructured tetrahedral meshes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10(1):29–45. 2004

- **[Cullen, 2002]** M. Cullen, G. Fricout. Quantization of 3D ureteric branching morphogenesis in cultured embryonic mouse kidney. *International Journal of Developmental Biology*. Vol. 46, num. 8, pp. 1049-1055, 2002
- **[Dietzsch, 2005]** M. Dietzsch, M. Gerlach, S. Groger. Back to the envelope system with morphological operations for the evaluation of surfaces. *Proceedings of the 10th International Conference on Metrology and Properties of Engineering Surfaces*, Saint-Etienne, France. 2005
- **[Du, 2009]** Y. Du, B. Li, W. Lin, X. Information and Automation, 2009. Yang. ICIA '09. International Conference on. Zhuhai, Macau. 2009
- **[Groover, 2007]** M. Groover. *Automation, production systems, and computer-integrated manufacturing*. Prentice Hall Press Upper Saddle River, NJ, USA ©2007
- **[Gurung, 2009]** T. Gurung and J. Rossignac. A compact representation for tetrahedral meshes. In *Proceedings SIAM/ACM Geometric and Physical Modeling, SPM '09*, pages 79–88, San Francisco, USA. 2009
- **[He, 2009]** W. He, M. Lei, H. Bin. Iso-Parametric CNC tool path optimization based on adaptive grid generation. *The international journal of advanced manufacturing technology*. Vol. 41. 2009
- **[Hosseinkhani, 2007]** Y. Hosseinkhani, J. Akbari, A. Vafaeesefat. Penetration_elimination method for five-axis CNC machining of sculptured surfaces. *Int. J. Mach. Tools. Manuf.* 47(10):1625–1635. 2007
- **[Huang, 2006]** B. Huang, D. Yang. A parametric implicit solid modeller based morphing technology for free-form surface machining. *International Journal of Manufacturing Research* 2006. Vol 1, num 2. 2006
- **[Jerard, 2006]** R. Jerard, B. Fussell, M. Xu, C. Yalcin. Process simulation and feedrate selection for three-axis sculptured surface machining. *International Journal of Manufacturing Research*. Vol. 1, num. 2. 2006
- **[Jiang, 2010]** Z. Jiang, X. Feng, Xi. Feng, Y. Liu, Y. Liu. Contour-parallel tool-path planning of free surface using Voronoi diagram approach. *Advanced Computer Theory and Engineering (ICACTE)*, 3rd International Conference on. 2010
- **[Jianhua, 2008]** F. Jianhua, B. Alan B. Quadric method for cutter orientation in five-axis sculptured surface machining *Int. J. Mach. Tools. Manuf.* 48:788–801. 2008
- **[Karunakaran, 2007]** K. Karunakaran, R. Shringi. Octree to Brep conversion for volumetric NC simulation. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2007.
- **[Kasik, 2005]** D. Kasik, W. Buxton, D. R. Ferguson Ten CAD challenges. *IEEE Computer Graphics and Applications*. 2005
- **[Kayal, 2008]** P. Kayal. Offset error analysis of ball-end mill for cutter-path generation from point-based surfaces. *Int J Adv Manuf Technol* 36:1133-1144. 2008
- **[Krar, 2002]** S. Krar, A. Check. *Tecnología de las maquinas herramienta*. 5ª Edición. Marcombo. 2002

- **[Kim, 2003]** B. Kim, J. Park, H. Lee, D. Kim. Determination of Cutting Direction for Minimization of Tool Retraction Length in ZigZag Pocket Machining. *Computational Science and Its Applications — ICCSA 2003. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 2669/2003, 987. 2003
- **[Kim, 2004]** S. Kim, D. Lee, M. Yan. Offset triangular mesh using the multiple normal vectors of a vertex. *Computer-Aided Design and Applications*. Vol. 1, num. 1-4, 285-29. 2004
- **[Kim, 2005]** S. Kim, M. Yang. Triangular mesh offset for generalized cutter. *Computer Aided Design* 37. 999-1014. 2005
- **[Li, 1994]** S. Li, R. Jerard. 5-axis machining of sculptured surfaces with a flat-end cutter. *Computer Aided Design*. Vol. 26, num. 3, pp. 165-178. 1994
- **[Li, 2010]** Z. Li, B. Yan. Ball-End Cutter Machining Process Analysis in Five-Axis Millin. *Applied Mechanics and Materials*. Vol. 34 Mechanical Engineering and Green Manufacturing. 2010
- **[Liu, 2005]** A. Liu. *Mechanics and Mechanisms of Fracture: An Introduction*. ASM International Materials Park, Ohio. 2005
- **[Liu, 2007]** X. Liu, J. Yong, G. Zheng, J. Sun. An offset algorithm for polyline curves. *Computers in Industry* 58, 240–254. 2007
- **[Makhanov, 2005]** S. Makhanov, M. Munlin. Optimal sequencing of rotation angles for five-axis machining. *Int J Adv Manuf Technol* 35:41–54. 2005
- **[Makhanov, 2010]** S. Makhanov. Adaptable geometric patterns for five-axis machining: a survey. *Int J Adv Manuf Technol* 47:1167–1208. 2010
- **[Martínez, 2009]** F. Martínez, A. J. Rueda, F. R. Feito. A new algorithm for computing Boolean operations on polygons. *Computers & Geosciences*, 35. 2009
- **[Mesmoudi, 2008]** M. Mesmoudi, L. De Floriani, U. Port. Discrete distortion in triangulated 3-manifolds. *Computer Graphics Forum*, 27(5):1333–1340. 2008
- **[Mohammed, 2003]** L. Mohammed, G. Al-Kindi, M. Kadhim. Voronoi diagram based offset paths for NC. 2003
- **[Najman, 2010]** L. Najman, H. Talbot. *Mathematical morphology: from theory to applications*. ISTE-Wiley. ISBN 978-18-48-21215-2. 2010
- **[Oka, 2002]** K. Oka, S. Kumasaka. Assessment of bone feature parameters from lumbar trabecular skeletal patterns using mathematical morphology image processing. *Journal of Bone and Mineral Metabolism*. Vol. 20, num. 4, pp. 201-208. 2002
- **[Organista, 2008]** O. Organista, J. Rodríguez, A. Sevilla. Un proceso de formalización matemática. *Americal Journal of Physics Education*. 2008
- **[Patelou, 2010]** V. Patelou, E. Duc, P. Ray. BSpline approximation of circle arc and straight line for pocket machining. *Computer-Aided Design*. Vol. 42, Issue 9. 2010
- **[Peng, 2008]** Y. Peng, Z. Yin. The algorithms for trimmed surfaces construction and tool path generation in reverse engineering. *Computers & Industrial Engineering*, 54. 624-633. 2008
- **[Piegl, 1997]** L. Piegl, W. Tiller. *The NURBS book*. 2nd Edition. Springer. 1997

- **[Pijush, 2008]** K. Pijush, D. Koichiro. Mathematics of shape description. A morphological approach to image processing and computer graphics. Wiley Editions. 2008
- **[Qing, 2009]** B. Qing B, W. Yu W, D. Han. A GPU-based algorithm for generating collision-free and orientation-smooth five-axis finishing tool paths of a ball-end cutter. Int. J. Prod. Res. 48:1105. 2009
- **[Rauch, 2010]** M. Rauch, X. Xu. Five-axis machining: technologies and challenges. International Journal of Manufacturing Research 2010. Vol. 5, num. 3. 2010
- **[Roberts, 2007]** C. Roberts, R. Rawat. An approach for tool accessibility evaluation for multi-axis machining models. Computer-Aided Design and Applications. Vol. 4, num. 1-6, 385-394. 2007
- **[Ronse, 2005]** C. Ronse, L. Najman, E. Decenciére. Mathematical Morphology. 40 years on. Proceedings of the 7th international symposium on Mathematical Morphology, April 18-20. 2005
- **[Rueda, 2004]** A. Rueda, F. Feito, R. Segura, J. Miras. Rasterizing complex polygons without tessellations. Graphical Models, 66. 2004
- **[Rueda, 2005]** A. Rueda, F. Feito, L. Ortega. Layer-based decompositions of solids and its applications. The Visual Computer, 21. 2005
- **[Sakkalis, 2001]** T. Sakkalis, G. Shen, N.M. Patrikalakis. Topological and Geometric Properties of Interval Solid Models. Massachusetts Institute of Technology. 2001
- **[Salisbury, 2004]** K. Salisbury, F. Conti, F. Barbagli. Haptic rendering: Introductory concepts. Computer Graphics and Applications. IEEE, 24(2):24-32. 2004
- **[Salloum, 2009]** T. Salloum, B. Anselmetti, K. Mawussi. Design and manufacturing of parts for functional prototypes on five-axis milling machines. Int. J. Adv. Manuf. Technol. 45:666–678. 2009
- **[Senatore, 2005]** J. Senatore, F. Monies, J.Redonnet, W. Rubio. Analysis of improved positioning in five-axis ruled surface milling using envelope surface. Computer Aided Design 37:989–998. 2005
- **[Serra, 2002]** J. Serra, J. Angulo. Aplicación de la morfología matemática a la telemedicina y la biotecnología: caracterización morfológica de células de la sangre y análisis de cDNA microarrays. Reconocimiento de patrones CIARP'02, México, pp. 39-5. 2002
- **[She, 2011]** C. H. She, K. S. Li, Z. H. Zheng. Special purpose five-axis machine tool for manufacturing a precision Cam. Advanced Manufacturing Systems. Vol. 201. 2011
- **[Skytt, 2009]** V. Skytt, G. Xu, B. Mourrain. Isogeometric toolbox. Basic geometric support tools. EC-Project EXCITING. SCP8-2007-GA-218536. 2009
- **[Stroud, 2011]** I. Stroud, H. Nagey. Solid modelling and DAD systems. How to survive a CAD System. Ed. Springer. 2011
- **[Tangelder, 2008]** J. Tangelder, R. Velkamp. A survey of content based 3D shape retrieval methods. Multimed Tools Appl (2008) 39:441–471. 2008
- **[Tao, 2001]** S. Tao, K. Ting. Unified rough cutting tool path generation for sculptured surface machining. International Journal of Production Research. Vol. 39, num. 13, 2973-2989. 2001

- **[Takeuchi, 2009]** Y. Takeuchi, Y. Yoneyama, T. Ishida, T. Kawai. 6-Axis control ultra precision micro grooving on sculptured surfaces with non-rotational cutting tool. CIRPAnnals-Manufacturing Technology 58:53–56. 2009
- **[Verbree, 2004]** E. Verbree, S. Zlatanova. 3D Modeling with respect to boundary representations within geo-DBMS. OTB Research Institute for Housing, Urban and Mobility Studies. The Netherlands. 2004
- **[Wu, 2003]** J. Wu, L. Kobbelt. Piecewise linear approximation of signed distance fields. In VMV, pages 513-520. 2003
- **[Wu, 2008]** P. Wu, Y. Li C. Chu. Optimized tool path generation based on dynamic programming for five-axis flank milling of rule surface. Int. J. Mach. Tools Manuf. 48:1224–1233. 2008
- **[Yan, 2011]** X. Yan. A Method of Automatic Detection and Avoidance of Local Interference in Five-Axis Machining with Flat-End Cutter. Advanced Materials Research. Vol. 211. 2011
- **[Yang, 2007]** J. Yang, M. Zhou, X. An, L. Zhang. Offset Aproximation Algorithm for Subdivision Surfaces. Eight ACIS International Conference on Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking and Parallel/Distributed Computing. 2007
- **[Yiu, 2002]** C. Yiu, D. Lapadat, L. Sieger, W. C. Regli. Using shape distributions to compare solid models. Proceedings of the seventh ACM symposium on Solid modeling and applications. New York. 2002
- **[Yoon, 2005]** J. Yoon. Fast tool path generation by the iso-scallop height method for ball-end milling of sculptured surfaces. Int. J. Prod. Res. 43:4989–4998. 2005
- **[Yoon, 2007]** J. Yoon. Two-dimensional representation of machining geometry and tool path generation for ball-end milling of sculptured surfaces. Int. J. Prod. Res. 45:3151–3164. 2007
- **[Zhou, 2011]** Z. Zhou, M. Gong, X. Huang, B. Guo. Data-Parallel octrees for surface reconstruction. Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on. 2011
- **[Zhu 2010]** J. Zhu. Modelling and computation in engineering. CRC Press. 2010