Fundamentos Matemáticos

Tijani Pakhrou

Índice general

Capítulo 1

Matrices y determinantes

1.1. Definiciones básicas

Se llama matriz de $m \geq 1$ filas y $n \geq 1$ columnas a la disposición en forma de caja,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde para cada $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ es el número situado en la fila i y la columna j.

Se dice entonces que la matriz A es de tipo (orden) $m \times n$ y se suele abreviar escribiendo

$$A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Los números que componen la matriz se llaman **entradas o coeficientes** de la matriz.

Ejemplo 1.1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

es una matriz de orden 2×3 (tiene 2 filas y 3 columnas)

Definición 1.1.2. *Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ lo denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}$*

1) Se llama **matriz nula**, y se denota O, a aquella cuyos coeficientes son todos cero.

$$O = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

2) Si la matriz es de tipo $n \times n$, se dice que es **cuadrada de orden** n. En tal caso, los coeficientes $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ constituyen la **diagonal principal** de A.

3) Si $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \mathbf{0} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-2} & a_{2n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se dice que **A** es **triangular superior**

4) Si $a_{ij} = 0$ siempre que $i < j$, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & \mathbf{0} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se dice que **A** es **triangular inferior**

5) Las matrices cuadradas que son, simultáneamente, triangulares superiores e inferiores, se llaman **matrices diagonales**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6) La matriz diagonal de orden n cuyos coeficientes $a_{ii} = 1$ se denota I_n y se llama **matriz identidad de orden** n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.1.3. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es cuadrad de orden tres, de hecho es triangular superior.

1.2. Suma de Matrices

Dados dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ del mismo tipo $m \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama ***suma*** de A y B a la matriz $A + B$, también de tipo $m \times n$, cuyo coeficiente de la fila i-ésima y la columna j-ésima es $a_{ij} + b_{ij}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición 1.2.1. *Si A, B, $C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ (matrices de tipo $m \times n$), entonces:*

1) *Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$*

2) *Conmutativa: $A + B = B + A$*

3) *Existencia de elemento neutro: $A + O = A$*

4) *Existencia de elemento opuesto: Si denotamos $-A$ la matriz cuyo coeficiente de la fila $i-$ésima y la columna $j-$ésima es $-a_{ij}$, entonces $A + (-A) = O$.*

1.3. Producto de un escalar por una matriz

Dados un número λ y una matriz $A = (a_{ij})$ de tipo $m \times n$, el producto de λ por A es la matriz λA de tipo $m \times n$, cuyo coeficiente de la fila $i-$ésima y la columna $j-$ésima es λa_{ij}.

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición 1.3.1. *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ (matrices de tipo $m \times n$), entonces:*

1) *Distributiva respecto de la suma de escalares:* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

2) *Distributiva respecto de la suma de matrices:* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

3) *Asociativa:* $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

4) *Existencia de elemento neutro para el producto:* $1A = A$

1.4. Transposición de matrices

$$\text{Sea} \quad A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \quad \text{una matriz de tipo} \quad m \times n.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se llama ***traspuesta*** de A, y se denota A^t, a la matriz de tipo $n \times m$ cuyo coeficiente de la fila $i-$ésima y la columna $j-$ésima es a_{ji}.

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición 1.4.1. *Si* $\lambda, \in \mathbb{R}$ *y* A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *(matrices de tipo* $m \times n$*), entonces:*

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

3) $(A^t)^t = A$

1.5. Producto de matrices

Sea $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq n}$ y $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq p}$ dos matrices de tipos $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente. Se llama ***matriz producto*** de A por B, en este orden, y se denota $C = AB$, a la matriz de tipo $m \times p$ cuyo término de fila $i-$ésima y la columna $j-$ésima es

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Observación 1.5.1. *Para efectuar el producto* AB*, es necesario que el número de columnas de* A *coincide con el de filas de* B*.*

Ejemplo 1.5.2. Sea $A = (a_1, \cdots, a_n)$ y $B = (b_1, \cdots, b_n)$ dos matrices de tipo $1\times n$. **no se pueden multiplicar**.

La matriz B^t es de tipo $n \times 1$, y el producto AB^t es el producto escalar de A y B.

$$AB^t = (a_1, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Ejemplo 1.5.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 2 & 1\cdot 3 + 0\cdot 5 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + 5\cdot 0 + 4\cdot 2 & 3\cdot 3 + 5\cdot 5 + 4\cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 50 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.5.4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 14 \\ 15 & 25 & 20 \\ 14 & 20 & 20 \end{pmatrix}$$

Observación 1.5.5. *sean A y B dos matrices. En general, aunque los dos productos AB y BA existen, no coinciden ($AB \neq BA$)*

Ejemplo 1.5.6.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Proposición 1.5.7. *El producto de matrices satisface las siguientes propiedades:*

1) $(AB)C = A(BC)$, *si* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$ *y* $C \in \mathcal{M}_{p\times q}$.

2) $(A+B)C = AC + BC$, *si* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *y* $C \in \mathcal{M}_{n\times p}$.

3) $A(B+C) = AB + AC$, *si* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *y* $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}$.

4) $I_m A = A = AI_n$, *si* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

5) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$, *si* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$.

6) $(AB)^t = B^t A^t$, *si* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$.

1.6. Inversa de una matriz cuadrada

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se dice que otra matriz B de orden n es ***inversa*** de A si $AB = I_n = BA$. En caso de existir tal inversa, se dice que A es ***invertible o regular***.

Proposición 1.6.1.

1) *Si la matriz A es invertible, entonces su inversa es única, y se denota A^{-1}*

2) *Sean A y B dos matrices cuadradas, del mismo orden, que son invertibles. Entonces su producto también es invertible y, además*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3) *Si la matriz cuadrada de orden n es invertible, entonces también es invertible su traspuesta y*

$$\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$$

1.7. Cálculo de la matriz inversa

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Consideramos la matriz

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}$$

Para calcular la matriz A^{-1} hay que realizar operaciones sobre las filas de la matriz $(A|I_3)$ hasta que la matriz del lado izquierdo se transforma en la matriz identidad.

Sustituyendo la fila F_2 por $F_2 - 2F_1$, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|l} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{array}$$

Sustituyendo la fila F_3' por $F_3' - 3F_1'$, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c} F_1'' \\ F_2'' \\ F_3'' \end{array}$$

Sustituyendo la fila F_2'' por $-F_2''$, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c} F_1''' \\ F_2''' \\ F_3''' \end{array}$$

Sustituyendo la fila F_3''' por $F_3''' + 2F_2'''$, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c} F_1^{(4)} \\ F_2^{(4)} \\ F_3^{(4)} \end{array}$$

Sustituyendo la fila $F_1^{(4)}$ por $F_1^{(4)} - 2F_2^{(4)}$, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c} F_1^{(5)} \\ F_2^{(5)} \\ F_3^{(5)} \end{array}$$

Sustituyendo la fila $F_3^{(5)}$ por $F_3^{(5)} + F_1^{(5)}$, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c} F_1^{(6)} \\ F_2^{(6)} \\ F_3^{(6)} \end{array}$$

Sustituyendo la fila $F_2^{(6)}$ por $F_2^{(6)} - 2F_3^{(6)}$, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c} F_1^{(7)} \\ F_2^{(7)} \\ F_3^{(7)} \end{array}$$

Por tanto, se obtiene que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.8. Determinante de una matriz cuadrada

Asociaremos a la matriz A un escalar, que denotaremos $\det(A)$ y que definiremos por recurrencia sobre el orden n de la matriz.

- El caso $n=1$, A es un escalar $\big(A=(a_{11})\big)$, y se define su determinante como

$$\det(A)=|A|=a_{11}.$$

- Si $n>1$, y fijados dos índices i,j, se denota A_{ij} **a la matriz de orden** $n-1$ **que resulta de eliminar en** A **la fila** i **y la columna** j. Así supuesto definida la noción de determinante para matrices de orden $n-1$, se define

$$\det(A)=|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\,\det(A_{i1}).$$

Ejemplo 1.8.1.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{pmatrix} \cancel{a}_{11} & \cancel{a}_{12}\\ \cancel{a}_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=a_{22},\qquad A_{21}=\begin{pmatrix} \cancel{a}_{11} & a_{12}\\ \cancel{a}_{21} & \cancel{a}_{22}\end{pmatrix}=a_{12}$$

$$\begin{aligned}\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} &= a_{11}\det(A_{11})-a_{21}\det(A_{21})\\ &= a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.8.2.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A)=(-1)^{1+1}2\,\det\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+(-1)^{2+1}(1)\,\det\begin{pmatrix} -1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ +(-1)^{3+1}(1)\,\det\begin{pmatrix} -1 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\det(A)=2(2-0)-\big((-1)1-0\times 5\big)+\big((-1)1-2\times 5\big)=-6.$$

1.9. Propiedades elementales de los determinantes

Proposición 1.9.1.

1) *Una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante*:

$$\det(A) = \det(A^t).$$

2) *El determinante del producto de dos matrices del mismo orden es el producto de sus determinantes*:

$$\det(AB) = \det(A)\ \det(B).$$

Proposición 1.9.2.

1) *El valor de un determinante se puede hallar "desarrollándolo" por cualquiera de sus columnas. esto es, para cada índice j :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\ \det(A_{ij}).$$

2) *También se puede calcular el valor de un determinante "desarrollando" por filas, es decir, fijado un índice i se tiene*:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\ \det(A_{ij}).$$

Ejemplo 1.9.3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Desarrollo respecto a la columna 2:

$$\det(A) = (-1)(-1)\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\ \det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -6.$$

2) Desarrollo respecto a la fila 3:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} +\ \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -6.$$

Ejemplo 1.9.4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos $\det(A) = -80$.

Proposición 1.9.5. *Si tres matrices cuadradas A, B y C son idénticas salvo en que la i-ésima fila (o columna) de C es la suma de las filas (o columnas) correspondientes de A y B, entonces*

$$\det(C) = \det(A) + \det(B),$$

esto es:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & \dots & x_n + y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \det(A) + \det(B).$$

Proposición 1.9.6. *Si una matriz cuadrada A tiene dos filas (o columnas) iguales, entonces*

$$\det(A) = 0,$$

esto es:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Proposición 1.9.7. *Si B es la matriz que se obtiene de una matriz A intercambiando dos de sus filas (o columnas), entonces*

$$\det(B) = -\det(A),$$

esto es:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\det(A).$$

Proposición 1.9.8. *Si B es la matriz que se obtiene a partir de una matriz A multiplicando por un número real λ una de sus filas (o columnas), entonces*

$$\det(B) = \lambda \det(A),$$

esto es:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda x_1 & \lambda x_2 & \dots & \lambda x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \det(A).$$

Proposición 1.9.9. *Si una matriz tiene una fila (o columna) de ceros, su determinante es nulo.*

Proposición 1.9.10. *Si A una matriz cuadrada de orden n y λ un escalar, entonces*

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Proposición 1.9.11. *Si a una fila (o columnas) de una matriz cuadrada A se le* *suma otra multiplicada por un escalar λ, entonces su determinante no varía:*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 + \lambda y_1 & x_2 + \lambda y_2 & \dots & x_n + \lambda y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proposición 1.9.12. *Si una de las filas (o columnas) de la matriz A es combinación lineal (véase la Definición 1.11.3 más adelante) de las restantes filas (o columnas), entonces*

$$\det(A) = 0.$$

1.10. Matriz inversa y determinantes

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se llama ***adjunto*** de A a la matriz A^*, de orden n, cuyo coeficiente de la fila $i-$ésima y la columna $j-$ésima es

$$a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Ejemplo 1.10.1. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculemos los coeficientes a^*_{ij} de la matriz adjunto A^*

$$a^*_{11} = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

$$a^*_{12} = (-1)^{1+2} \det(A_{12}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

$$a^*_{13} = (-1)^{1+3} \det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

$$a^*_{21} = (-1)^{2+1} \det(A_{21}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

$$a_{22}^* = (-1)^{2+2}\det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$$

$$a_{23}^* = (-1)^{2+3}\det(A_{23}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

$$a_{31}^* = (-1)^{3+1}\det(A_{31}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$$

$$a_{32}^* = (-1)^{3+2}\det(A_{32}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$a_{33}^* = (-1)^{3+3}\det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

Por tanto, tenemos que

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.10.2. *Una matriz A de orden n es invertible, si y sólo si,* $\det(A) \neq 0$*. En tal caso, su inversa es*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A^*)^t,$$

cuyo determinante es

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\ .$$

Ejemplo 1.10.3. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos $\det(A) = 2$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 8 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}\ , \quad (A^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \\ -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \\ -6 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.11. Dependencia lineal y rango de una matriz

Sea $n \in \mathbb{N}$, denotaremos $\mathbb{R}^n$ al conjunto formado por todas las $n-$uplas de números reales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, es decir

$$\mathbb{R}^n = \big\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ldots, n\big\}.$$

Se dice que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las *coordenadas* de x. A los elementos de $\mathbb{R}^n$ se les llama *vectores.*

Observación 1.11.1. $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$ *son el plano y el espacio habituales.*

Proposición 1.11.2. *Dados* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *y sea* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Se tiene que*

1) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

2) $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

1.11.1. Dependencia lineal

Definición 1.11.3.
Dados los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *de* $\mathbb{R}^n$, *se dice que* u_1 ***depende linealmente*** *de los vectores* $u_2, u_3, \ldots, u_k$, *o que es* ***combinación lineal*** *de los mismos, si existen escalares* $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ *tales que*

$$u_1 = \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \ldots + \lambda_k u_k.$$

Definición 1.11.4.
Se dice que los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *de* $\mathbb{R}^n$ *son* ***linealmente dependientes***, *lo que abreviamos por* $(l.d)$, *si alguno de ellos depende linealmente de los demás.*

En caso contrario, diremos que $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *son* ***linealmente independiente***, *y esto lo abreviamos por* $(l.i)$.

Ejemplo 1.11.5. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los vectores

$$u_1 = (1, 0, 1), \ u_2 = (2, -1, 0), \ u_3 = (0, 1, 2)$$

- Comprobemos que u_1, u_2 son l.i.
  Supongamos que u_1 depende linealmente de u_2, entones existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u_1 = \lambda u_2$. Esto es imposible pues

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2 \\ 0 = \lambda(-1) \\ 1 = \lambda 0 \end{cases}$$

- Comprobemos que u_1, u_2, u_3 son l.d.
  Es inmediato comprobar que $u_3 = 2u_1 - u_2$, luego u_3 depende linealmente de u_1, u_2. Por tanto, los vectores u_1, u_2, u_3 son l.d.

Proposición 1.11.6.

1) *Los vectores* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *son l.i. si y sólo si*

$$\Big(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0\Big).$$

2) *Los vectores* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *son l.d., si y sólo si, existen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *no todos nulos, tal que*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = 0.$$

1.11.2. Rango de un conjunto de vectores

Definición 1.11.7.
Se llama ***rango*** *del conjunto de vectores* $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *y se denota* $\mathrm{rg}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ *al máximo número de vectores l.i. entre ellos.*

Ejemplo 1.11.8. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los vectores

$$v_1 = (1, 0, 1), \;\; v_2 = (2, -1, 0), \;\; v_3 = (0, 1, 2)$$

Tenemos $v_2 = 2v_1 - v_3$ (estos vectores son l.d), mientras v_1 y v_2 son l.i. por tanto, se tiene

$$\mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3) = 2.$$

Ejemplo 1.11.9. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los vectores

$$v_1 = (1, 0, 1, 1), \quad v_2 = (2, -1, 0, -1), \quad v_3 = (0, 1, 2, 2), \quad v_4 = (1, 0, 0, 0)$$

Supongamos que estos vectores son l.d. entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0.$$

Así que

$$(\bigstar) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} \lambda_1 & +2\lambda_2 & & +\lambda_4 & = 0 \\ & -\lambda_2 & +\lambda_3 & & = 0 \\ \lambda_1 & & +2\lambda_3 & & = 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & & = 0 \end{array} \right.$$

Si denotamos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

el sistema ($\bigstar$) se escribe como $A\Lambda = O$, y como $\det(A) = 1$, la matriz A es invertible. Por tanto

$$A^{-1}A\Lambda = A^{-1}O = O$$

esto significa que todos los λ son nulos.

Luego los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 son l.i. por tanto

$$\text{rg}(v_1, v_2, v_3, v_4) = 4.$$

1.11.3. Rango de una matriz

Definición 1.11.10. *Sea A una matriz de tipo $m \times n$ y sea*

$$v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, v_{in}), \quad \textit{con} \;\; 1 \le i \le m,$$

sus m filas, que son vectores de $\mathbb{R}^n$.

*Se llama **rango** de A, y se denota* $\text{rg}(A)$ *al rango de dichos vectores, esto es,*

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(v_1, v_2, \ldots, v_m).$$

Ejemplo 1.11.11. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideramos los vectores $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, -1, 0)$ y $v_3 = (0, 1, 2)$.

Tenemos que

$$v_1 = \frac{1}{2}(v_2 + v_3).$$

Por otra parte sabemos que v_1 y v_2 son *l.i.*

Se deduce que

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(v_1, v_2, v_3) = 2.$$

Definición 1.11.12. *Se denomina **menor de orden k** de la matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, al determinante de una submatriz cuadrada de orden k (que se obtiene eliminando filas y/o columnas en la matriz A).*

Ejemplo 1.11.13. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Los números

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5; \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -4; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

Son algunos menores de orden 2 de la matriz A.

Teorema 1.11.14. *El rango de la matriz A es el máximo orden de sus menores no nulos.*

Ejemplo 1.11.15. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) = 0$ y el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \qquad \text{es de orden } 2$$

tenemos que

$$\operatorname{rg}(A) = 2.$$

Observación 1.11.16.

1) *El rango de una matriz es también el máximo de vectores columna l.i.*

2) *Si A en una matriz de tipo $m \times n$, entonces* $\operatorname{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Proposición 1.11.17. *Sea A una matriz cuadrada de orden n. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *Los n vectores fila de A son l.i.*

2) $\operatorname{rg}(A) = n$.

3) $\det(A) \neq 0$.

4) *Los n vectores columna de A son l.i.*

Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones lineales

2.1. Definiciones básicas

Se pretende decidir si el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$(2.1.1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

admite alguna ***solución***, es decir, si existe alguna $n-$upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de escalares que satisfagan las ecuaciones (2.1.1) anteriores.

Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} y$$

$$A^a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

se denominan ***matriz de coeficientes, matriz de términos independientes*** y ***matriz ampliada***, respectivamente, del sistema (2.1.1), mientras que

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se llama ***matriz de incógnitas***.

Observación 2.1.1. *Con estas notaciones, el sistema* (2.1.1) *se expresa abreviadamente como*

$$AX = B.$$

2.2. Teorema de Rouché-Fröbenius

Teorema 2.2.1. *El sistema de ecuaciones* (2.1.1) *tiene solución si y sólo si*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^a)$$

Ejemplo 2.2.2. Consideramos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 3 \\ \\ -4x_1 + 2x_2 & = 0 \end{cases}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^a = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema no tiene solución, pues $\mathrm{rg}(A) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^a) = 2$.

Proposición 2.2.3.

1) *Si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^a) = n$, *el sistema* (2.1.1) *admite una única solución. En este caso se dice que el sistema es **compatible y determinado**.*

2) *Si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^a) < n$, *el sistema* (2.1.1) *tiene más de una solución. En este caso se dice que el sistema es **compatible e indeterminado**.*

3) *Si* $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A^a)$, *el sistema* (2.1.1) *no tiene solución. En este caso se dice que el sistema es **incompatible**.*

2.3. Regla de Cramer

Supongamos que en el sistema (2.1.1), $m = n$ y $\det(A) \neq 0$. En este caso, por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema tiene una única solución, es, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$x_i = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

Ejemplo 2.3.1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 11x_3 = 1 \end{cases}$$

Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix}, \quad A^a = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene una única solución, ya que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^a) = 3.$$

Por tanto la solución del sistema es:

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 11 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}\ ,$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{0}{84} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{0}{84} = 0.$$

Ejemplo 2.3.2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^a = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

El sistema tiene una infinitas soluciones, ya que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^a) = 2 < 3$$

Los pasos a seguir son:

1. Detectar un menor no nulo de A.
   Por ejemplo el menor $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

2. Suprimir las ecuaciones que corresponden a las filas que no estén contenidas en dicho menor de A.
   Nosotros suprimimos la última ecuación.

3. Pasamos a la derecha de la igualdad aquellas incógnitas que correspondan a las columnas que no estén en el menor elegido.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 4 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 = 6 - 3x_3 \end{cases}$$

4. Por último resolvemos utilizando las formulas de Cramer

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 - x_3 & -3 \\ 6 - 3x_3 & -2 \end{vmatrix}}{1} = -2(4 - x_3) + 3(6 - 3x_3) = -7x_3 + 10$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 - x_3 \\ 1 & 6 - 3x_3 \end{vmatrix}}{1} = (6 - 3x_3) - (4 - x_3) = -2x_3 + 2$$

   Haciendo $x_3 = t$, se tiene que el conjunto solución es de la forma:

$$\big\{(x_1, x_2, x_3) \ : \ x_1 = -7t + 10, \ x_2 = -2t + 2, \ x_3 = t, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Ejemplo 2.3.3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{array}\right.$$

Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^a = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema no tiene solución, ya que

$$\mathrm{rg}(A) = 2 \neq \mathrm{rg}(A^a) = 3.$$

2.4. Sistemas equivalentes

Definición 2.4.1.
*Dos sistemas de ecuaciones (con las mismas incógnitas) se dice que son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.*

Proposición 2.4.2. *Un sistema de ecuaciones lineales es **equivalente** a cualquiera de los sistemas que resultan de realizar operaciones elementales en él.*

Ejemplo 2.4.3. El sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 11x_3 = 1 \end{array}\right.$$

es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = 1 \\ & & 7x_2 & - & 8x_3 & = 0 \\ & & & & 6x_3 & = 0 \end{array}\right.$$

Utilizando la propiedad anterior, podemos resolver sistemas de ecuaciones lineales buscando un sistema equivalente más sencillo. Uno de los métodos de resolución de sistemas que utiliza esta propiedad es el método de Gauss

2.5. Método de Gauss

Todo sistema de ecuaciones lineales tiene un sistema equivalente escalonado. Es decir, realizando sucesivas operaciones elementales podemos obtener un sistema con una matriz escalonada.

El método de eliminación de Gauss consiste en la eliminación sucesiva de incógnitas a través de una matriz escalonada.

Ejemplo 2.5.1. Resolver mediante el método de Gauss el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{array}\right. \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 = F_2' \\ F_3 - F_1 = F_3' \\ F_4 - 3F_1 = F_4' \end{array}\right.$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} F_1 \\ F_2' + 3F_3' \\ F_3' \\ F_4' + 2F_3' \end{array}\right.$$

Haciendo la ultima fila cero, dividiendo entre -14 la segunda fila y cambiándola por la tercera obtenemos el sistema equivalente (escalonado).

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & -4 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

La solución del sistema se obtiene comenzando por la última ecuación, y sustituyendo dicho valor sucesivamente en las ecuaciones anteriores. La solución es, por tanto, $(-1, 0, 1)$.

Observemos que el $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^a) = 3 = n$ (número de incógnitas) , luego el sistema es compatible determinado.

2.6. Sistemas homogéneos

Definición 2.6.1. *Llamamos* ***sistema homogéneo*** *a aquel sistema cuyos términos independientes son todos nulos. Es decir*

$$AX = O.$$

Observación 2.6.2. *El sistema* $AX = O$ *admite la solución trivial* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$

Teorema 2.6.3. *Un sistema homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si* $\mathrm{rg}(A) < n$ *(número de incógnitas).*

En este caso el sistema resulta compatible indeterminado y tiene un conjunto infinito de soluciones.

Observación 2.6.4. *Un sistema homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si* $\det(A) = 0$.

Proposición 2.6.5. *Cualquier combinación lineal de soluciones de un sistema homogéneo es también una solución del sistema.*

Ejemplo 2.6.6. Resolver el sistema homogéneo y escribir las soluciones como combinación lineal de términos independientes

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{array}\right.$$

Primero calculamos el rango de la matriz, para ello transformaremos la matriz de coeficientes mediante operaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 + F_1 \end{array} \right.$$

Por tanto $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Como el número de incógnitas es 5, el sistema es compatible indeterminado.

Resolvemos el sistema mediante las fórmulas de Cramer siguiendo el método anteriormente expuesto

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = -x_3 + x_4 - 2x_5 \\ 3x_1 = x_3 - x_4 \end{array}\right.$$

De esta manera las soluciones son

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}t_3 - \frac{1}{3}t_4 \\ \\ x_2 = \frac{5}{9}t_3 - \frac{5}{9}t_4 + \frac{2}{3}t_5 \\ \\ x_3 = t_3 \in \mathbb{R} \\ \\ x_4 = t_4 \in \mathbb{R} \\ \\ x_5 = t_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Podemos escribir las soluciones como combinación lineal de vectores independientes

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t_3\Big(\frac{1}{3}, \frac{5}{9}, 1, 0, 0\Big) + t_4\Big(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{9}, 0, 1, 0\Big)$$

$$+ t_5\Big(0, \frac{2}{3}, 0, 0, 1\Big).$$

2.7. Resolución de un sistema no homogéneo utilizando un sistema homogéneo

Consideremos el sistema no homogéneo

$$(2.1.1) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

de m ecuaciones con n incógnitas. Se denomina ***sistema homogéneo asociado*** al que se obtiene sustituyendo las b_i por cero.

Proposición 2.7.1. *La solución general del sistema es igual a la suma de la solución del sistema homogéneo asociado y de una solución del sistema.*

Teorema 2.7.2. *Sea v una solución de* (2.1.1). *Existen k soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo asociado $u_1, \dots, u_k$, tal que todas las soluciones de* (2.1.1) *son*

$$v + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$$

*donde λ_i son números reales. A esta expresión se le denomina **solución general** del sistema y a v **solución particular** del sistema.*

Ejemplo 2.7.3. Sea el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + t = 2 \\ 2z + 3t = 0 \\ x + 3z = 1 \end{array} \right.$$

que tiene como una de sus soluciones $(10, -20, -3, 2)$. Calcular todas sus soluciones.

Estudiamos el sistema asociado homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + t = 0 \\ 2z + 3t = 0 \\ x + 3z = 0 \end{array} \right.$$

Tiene como solución general $(4{,}5\lambda; -10\lambda; -1{,}5\lambda; \lambda)$. Si encontramos una solución particular del sistema inicial, podemos escribir sus soluciones como combinación lineal de estas. De esta manera

$$(x, y, z, t) = (10; -20; -3; 2) + \lambda(4{,}5; -10; 1{,}5; 1)$$

Capítulo 3

Espacios vectoriales

3.1. Definición de espacio vectorial

Se dice que un conjunto E tiene estructura de ***espacio vectorial sobre*** $\mathbb{R}$ si están definidas dos operaciones, la ***suma***, $+$, de elementos de E (a los que se llama vectores) y el ***producto***, $\cdot$, multiplicar números reales por vectores, que satisfacen las siguientes propiedades:

1) $E \times E \xrightarrow{+} E$ la operación suma cumple los siguientes axiomas:

   1.1. Para cada $x, y \in E,\ x + y \in E$ (operación interna en E)

   1.2. $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in E$ (asociativa)

   1.3. $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in E$ (conmutativa)

   1.4. Existe $0_E \in E$, (vector nulo), tal que $x + 0_E = x \ \ \forall\, x \in E$

   1.5. Para cada $x \in E$ existe $-x \in E$ tal que $x + (-x) = 0_E$

2) $\mathbb{R} \times E \xrightarrow{\bullet} E$ la operación producto cumple los siguientes axiomas:

2.1. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y cada $x \in E$ $\quad \lambda \cdot x = \lambda x \in E$ (operación externa en E)

2.2. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \quad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\forall\ x \in E$ (asociativa)

2.3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda x \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall\ x, y \in E$ (distributiva)

2.4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall\ x, y \in E$ (distributiva)

2.5. Para cada $x \in E$ se tiene $1x = x$

Definición 3.1.1. *Por cumplirse las cinco primeras propiedades, que solo involucran a la suma, se dice que el par $(E, +)$, es un **grupo abeliano**. Y por cumplirse las diez propiedades, se dice que la terna $(E, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial sobre** $\mathbb{R}$.*

Ejemplos 3.1.2.

1) El conjunto $\mathbb{R}$ es el ejemplo más sencillo de espacio vectorial.

2) Sea $n \in \mathbb{N}$, el conjunto
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada} \ \ i = 1, \ldots, n\}$$
es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

3) Sean $n, m \in \mathbb{N}$, el conjunto
$$\mathcal{M}_{m\times n} = \Big\{ \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}} \ \text{matrices con } m \text{ filas } n \text{ columnas } : a_{ij} \in \mathbb{R} \Big\}$$
es un espacio vectorial.

4) Sean $n \in \mathbb{N}$, el conjunto
$$\mathcal{M}^0_{n\times n} = \Big\{ \big(a_{ij}\big)_{i,j=1,\ldots,n} \ \text{matrices cuadradas de orden } n : \ a_{ij} \in \mathbb{R} \ \ \text{y} \ \ \det\Big(\big(a_{ij}\big)_{i,j=1,\ldots,n}\Big) = 0 \Big\}$$
no es espacio vectorial.

En efecto: consideramos las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^0_{2\times 2}$$
sin embargo
$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{M}^0_{2\times 2}$$

3.2. Subespacios vectoriales

Un subconjunto H del espacio vectorial $(E, +, \cdot)$ se llama ***subespacio vectorial*** de E cuando, $(H, +, \cdot)$ con las mismas operaciones que E, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 3.2.1. *Un subconjunto H del espacio vectorial E es un subespacio vectorial de E si y solo si*

$$\begin{cases} 1) \;\; 0_E \in H \\ \\ 2) \;\; \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad y \quad \forall\ x, y \in H \quad \lambda x + \mu y \in H \end{cases}$$

Ejemplos 3.2.2.

1) Una recta del plano $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen $(0, 0)$ se puede escribir como

$$H = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a_1x_1 + a_2x_2 = 0, \quad \text{con} \quad a_i \in \mathbb{R}\big\}$$

es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

2) Un plano del espacio $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen $(0, 0, 0)$ se puede escribir como

$$H = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad \text{con} \quad a_i \in \mathbb{R}\big\}$$

es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

3) Sea A una matriz de tipo (m, n). Consideremos, en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, el subconjunto H definido como

$$H = \big\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; Ax^t = O\big\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

4) Sea $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 = 1\}$, un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Observamos que $u = (1, 0), v = (0, 1) \in H$, pero $u + v = (1, 1) \notin H$. Por tanto H no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

3.3. Intersección de subespacios

Definición 3.3.1. *Sean H_1 y H_2 dos subespacios de un mismo espacio vectorial E. El conjunto*

$$H_1 \cap H_2 = \{x \in E \;:\; x \in H_1 \quad y \quad x \in H_2\}$$

*se llama la **intersección** de H_1 con H_2.*

Proposición 3.3.2. *Dados dos subespacios vectoriales H_1 y H_2 de E. El conjunto $H_1 \cap H_2$ es un subespacio vectorial de E.*

Observación 3.3.3. *Dados dos subespacios vectoriales H_1 y H_2 de E, la unión*

$$H_1 \cup H_2 = \{x \in E \ : \ x \in H_1 \ o \ x \in H_2\}$$

no es un subespacio vectorial de E.

Ejemplo 3.3.4. Las rectas

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0\}, \quad H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\}$$

son subespacios de $\mathbb{R}^2$, pero $H = H_1 \cup H_2$ **no lo es**, pues los vectores $u = (1, 0), v = (0, 1) \in H$ pero $u + v = (1, 1) \notin H$.

3.4. Suma de dos subespacios

Definición 3.4.1. *Dados dos subespacios H_1 y H_2 de un mismo espacio vectorial E, se define su* ***suma*** *como:*

$$H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2 \in E \ : \ x_1 \in H_1, \quad x_2 \in H_2\}$$

que es un subespacio vectorial de E.

3.5. Suma directa de dos espacios

Definición 3.5.1. *Un espacio vectorial E es* ***suma directa*** *de dos de sus subespacios H_1 y H_2 si:*

$$\begin{cases} 1) \quad H_1 + H_2 = E \\ \\ 2) \quad H_1 \cap H_2 = \{0_E\}. \end{cases}$$

Para señalarlo se escribe $H_1 \oplus H_2 = E$.

Ejemplos 3.5.2.

1) El plano $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como suma directa de dos rectas no coincidentes que pasan por el origen, es decir,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = \lambda x\} \oplus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = \mu x\}$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\lambda \neq \mu$

2) El plano $\mathbb{R}^3$ puede escribirse como suma directa de un plano que pasan por el origen y una recta que le corta en este punto, es decir,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \lambda x + \mu y\} \oplus \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = \gamma x\}$$

donde $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Observación 3.5.3. *Dos subespacios H_1 y H_2 de un espacio vectorial H son **complementarios,**(**suplementarios**) si $H_1 \oplus H_2 = H$.*

Proposición 3.5.4. *Sean H_1 y H_2 subespacios vectoriales de un espacio vectorial E. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $H_1 \oplus H_2 = E$.

2) *Paratodo $x \in E$existe una descomposición **única** de la forma $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in H_1$ y $x_2 \in H_2$.*

3.6. Sistema generador de un espacio vectorial

Sea E un espacio vectorial sobe $\mathbb{R}$ y $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ $(n \geq 1)$ un sistema de vectores en E.

Se dice que S es un ***sistema generador*** de E cuando cualquier vector de E se puede expresar como combinación lineal (c.l.) de los vectores de S.

Es decir, para cada $x \in E$, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

En tal caso se suele denotar $E = \operatorname{span}(S) = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$

Ejemplos 3.6.1.

1) $S = \{(1, 0, 2), (-1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ no es sistema generador de $\mathbb{R}^3$ porque el vector $(-, 1, -)$ no es c. l. de la familia S.

2) $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

3) $S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 3), (0, 0, 2)\}$ es sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

3.7. Dependencia lineal de vectores en un espacio vectorial

Definición 3.7.1. *Sean $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vectores del espacio vectorial E. Se dice que v_1 **depende linealmente** de $v_2, \ldots, v_m$ si v_1 es **combinación lineal** (c.l.) de $v_2, \ldots, v_m$, es decir: existen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que*

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \cdots + \lambda_m v_m$$

Definición 3.7.2. *Se dice que un conjunto finito S de vectores de E es **linealmente dependiente** (l.d.), si existe un vector $v \in S$ que es combinación lineal del resto de vectores de S.*

Definición 3.7.3. *Se dice que un conjunto finito S de vectores de E es **linealmente independiente o libre** (l.i.), si no es linealmente dependiente.*

Proposición 3.7.4.

1) *Los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son l.i. si y solo si existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = 0 \quad \textit{entonces} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

2) *Los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son l.d. si y solo si existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ no todos nulos, tal que*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = 0$$

3.8. Base de un espacio vectorial

Una ***base*** del espacio vectorial E es un sistema generador S de E que además es linealmente independiente (libre).

Ejemplos 3.8.1.

1) $S = \{(1,0), (0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

2) Denotamos $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ el vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son todas nulas, salvo la $i-$ésima que vale 1. El sistema

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

es una base de $\mathbb{R}^n$. Se dice que S la base ***natural o canónica*** de $\mathbb{R}^n$.

3) Denotamos Δ_{ij} la matriz de tipo $m \times n$ cuya entrada de la fila $i-$ésima y la columna $j-$ésima vale 1 y el resto son nulas,

$$\Delta_{ij} = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

El sistema $S = \{\Delta_{ij}\ :\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ es una base de $\mathcal{M}_{m\times n}$. Se dice que S la base ***natural o canónica*** de $\mathcal{M}_{m\times n}$. Cada matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se escribe como

$$A = \sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} a_{ij}\Delta_{ij}.$$

Teorema 3.8.2. *Sea B una base del espacio vectorial E. Entonces cada vector de E se expresa, de modo único, como combinación lineal de los vectores de B.*

Es decir, si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ entonces:

$$\forall x \in E,\ \exists!\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \quad : \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\,.$$

Los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ se llaman ***coordenadas del vector*** *x.*

Definición 3.8.3. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se dice que E* ***es de tipo finito*** *cuando posee un sistema generador con un número finito de vectores.*

Teorema 3.8.4. *Todo espacio vectorial de tipo finito tiene al menos una base.*

Proposición 3.8.5. *Todas las bases de un espacio vectorial $E \neq \{0_E\}$ de tipo finito tienen el mismo número de vectores.*

3.9. Dimensión de un espacio vectorial

Sea S una base del espacio vectorial E. Se llama ***dimensión*** de E al número de elementos de S y se denota $\dim(E)$.

Ejemplo 3.9.1.

$$
\begin{array}{ll}
1) & \dim(\mathbb{R}^n) = n \\
2) & \dim(\mathcal{M}_{m\times n}) = mn
\end{array}
$$

Observación 3.9.2. *Si H es un subespacio de E, entonces*

$$\dim(H) \leq \dim(E).$$

Además, $\dim(H) = \dim(E) \iff H = E$.

Proposición 3.9.3. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $\dim(E) = n$. Sea S un subconjunto de E.*

1) *Si S tiene menos de n vectores, entonces S no es sistema generador de E.*

2) *Si S tiene más de n vectores, entonces S es l.d.*

3) *Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es l.i., entonces S es base de E.*

4) *Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema generador de E, entonces S es base de E.*

Teorema 3.9.4. *Sean H_1 y H_2 dos subespacios de E, y sean $H_1 \cap H_2$ y $H_1 + H_2$ la intersección y la suma de dichos subespacios, se tiene:*

$$\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(H_1 \cap H_2) + \dim(H_1 + H_2)$$

Proposición 3.9.5. *Sea E un espacio vectorial y* $\dim(E) = n$.
Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset E$, $(m \leq n)$, un sistema l.i.(libre).
Entonces existen $n - m$ vectores $v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n$ de E tal que el conjunto

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n\}$$

es base de E.

3.10. Cambio de Base

Sean $B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $B_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ dos bases del espacio espacio vectorial de tipo finito E.

Entonces, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, existen $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj} \in \mathbb{R}$ tales que

$$u_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \ldots + a_{nj}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i \ , \quad (\bigstar)$$

es decir,

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n \\ u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n \\ \quad \vdots \\ u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n \end{cases}$$

Definición 3.10.1. *Se llama* ***matriz de paso*** **(*cambio de base*)** *de la base* B_1 *a la base* B_2 *y se denota* $M(B_1, B_2)$ *a la que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de* B_1 *respecto* B_2*, es decir,*

$$M(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Observación 3.10.2. *La matriz de paso permite calcular con sencillez las coordenadas* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de un vector* $v \in E$ *respecto de la base* B_2 *a partir de sus coordenadas* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ *respecto de la base* B_1*.*

En efecto,

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j$$

sustituyendo el valor de cada u_j *que nos proporciona* ($\bigstar$) *obtenemos*

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j \right) v_i$$

es decir,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j \qquad \textit{para cada} \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

en forma matricial

$$M(B_1, B_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B_2}$$

Ejemplo 3.10.3. Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$, $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$.
Hallar las coordenadas del vector $x = u_1 + 2u_2 + 3u_3$ en la base B_2, sabiendo que

$$\begin{cases} v_1 = 3u_1 + 2u_2 - u_3 \\ v_2 = 4u_1 + u_2 + u_3 \\ v_3 = 2u_1 - u_2 + u_3 \end{cases}$$

Escribimos la matriz de cambio de base:

$$M(B_2, B_1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como las coordenadas del vector respecto a la base antigua son $(1, 2, 3)$, escribimos

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Así, una vez calculada la inversa de la matriz obtenemos,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 5 & 7 \\ 3 & -7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El vector pedido es $x = (-\frac{5}{2}, \frac{15}{4}, -\frac{13}{4})$.

Observaciones 3.10.4.

1) Sean $B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $B_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_3 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ tres bases del espacio espacio vectorial E, entonces

$$M(B_2, B_3) M(B_1, B_2) = M(B_1, B_3).$$

2) En particular, $B_3 = B_1$, y puesto que $M(B_1, B_1) = I_n$ se sigue que

$$M(B_2, B_1) M(B_1, B_2) = I_n.$$

Por tanto $M(B_1, B_2)$ es invertible, y

$$\big(M(B_1, B_2)\big)^{-1} = M(B_2, B_1)$$

Capítulo 4

Aplicaciones lineales

4.1. Definición de aplicación lineal

Sean A y B dos conjuntos y

$$f \subset A \times B = \{(x, y) : \; x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Se dice que f es una ***aplicación o función*** de A en B si para cada $x \in A$ existe un único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Definición 4.1.1. *Sean E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, una **aplicación lineal** de E en F es una aplicación $f : E \longrightarrow F$ tal que:*

1) *$f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todo $u, v \in E$.*

2) *$f(\alpha v) = \alpha f(v)$ para todo $v \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

*En el caso en que $E = F$, se dice que f es un **endomorfismo***

Ejemplos 4.1.2.

1) La aplicación

$$\begin{aligned} f \;:\; \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = 2x \end{aligned}$$

es lineal.

2) La aplicación

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow & f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + 2x_3) \end{array}$$

es lineal.

3) Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Entonces la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & u = (u_1, \ldots, u_n) & \longrightarrow & f(u) = v = (v_1, \ldots, v_m) \end{array}$$

donde $v^t = Au^t$ es lineal.

4) La aplicación

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \longrightarrow & f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2) \end{array}$$

no es lineal, puesto que $f\big(2(1, 0)\big) = (4, 0) \neq (2, 0) = 2f(1, 0)$.

Observaciones 4.1.3.

1) Las aplicaciones lineales preservan el vector nulo, es decir, si

$$f : E \longrightarrow F \text{ es lineal, entonces } \quad f(0_E) = 0_F.$$

2) La ***aplicación identidad*** del espacio vectorial E, se denota

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{I}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & u & \longrightarrow & \mathbb{I}_E(u) = u \end{array}$$

es una aplicación lineal.

3) Sea $f : E \to F$ es un aplicación lineal y H un subespacio de E, entonces la restricción de f a H, que denotaremos

$$f|_H : H \longrightarrow F$$

es también lineal.

Teorema 4.1.4. (Determinación de aplicaciones lineales)
Sean $B_E = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base del espacio vectorial E, y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ un subconjunto arbitrario de n vectores del espacio vectorial F.

Entonces, existe una única aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$ tal que $f(u_i) = w_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

4.2. Matriz de una aplicación lineal

Sean $B_E = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $B_F = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de los espacios vectoriales E y F, y $f : E \to F$ una aplicación lineal.

Para cada índice $j = 1, 2, \ldots, n$, el vector $f(u_j)$ es combinación lineal de los vectores de B_F, es decir, existen $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \in \mathbb{R}$ tales que para cada índice $j = 1, 2, \ldots, n$, se tiene que:

$$f(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i.$$

Definición 4.2.1. *Se llama **matriz** de f respecto de las bases B_E y B_F y se denota $M(f, B_E, B_F)$, a la que tiene por columnas las coordenadas respecto de la base B_F de las imágenes mediante f de los vectores de B_E, es decir,*

$$M(f, B_E, B_F) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

coordenadas de $f(u_j)$
respeto B_F

Si $E = F$ y $B_E = B_F$, se denota simplemente

$$M(f, B_E) = M(f, B_E, B_F)$$

*y se le llama **matriz del endomorfismo** f respecto de la base B_E.*

Ejemplos 4.2.2.

1) Sean $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dos bases en $\mathbb{R}^3$. Sea f una aplicación lineal en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$f(e_1) = v_1 - v_2; f(e_2) = v_2; f(e_3) = v_1.$$

La matriz de f es

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Se considera la aplicación

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (1,0,1) & \longrightarrow & (0,1) \\ & & (0,1,1) & \longrightarrow & (0,2) \\ & & (1,1,0) & \longrightarrow & (1,1) \end{array}$$

Calcular la matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Sean $B_3 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ y $B_2 = \{e'_1, e'_2\} \subset \mathbb{R}^2$ las bases canónicas. Tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = (1,0,1) = e_1 + e_3 \\ u_2 = (0,1,1) = e_2 + e_3 \\ u_3 = (1,1,0) = e_1 + e_2 \end{array} \right.$$

Así que

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = (1,0,0) = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 \\ \\ e_2 = (0,1,0) = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 \\ \\ e_3 = (0,0,1) = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 \end{array} \right.$$

Utilizando la aplicación lineal sabemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1,0,0) = \frac{1}{2}f(u_1) - \frac{1}{2}f(u_2) + \frac{1}{2}f(u_3) \\ \\ f(0,1,0) = -\frac{1}{2}f(u_1) + \frac{1}{2}f(u_2) + \frac{1}{2}f(u_3) \\ \\ f(0,0,1) = \frac{1}{2}f(u_1) + \frac{1}{2}f(u_2) - \frac{1}{2}f(u_3) \end{array} \right.$$

Y como $f(u_1) = (0,1); f(u_2) = (0,2); f(u_3) = (1,1)$, entonces tenemos que $f(1,0,0) = (\frac{1}{2}, 0); f(0,1,0) = (\frac{1}{2}, 1); f(0,0,1) = (\frac{-1}{2}, 1)$

Puesto que la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $\{(1,0),(0,1)\}$, podemos escribir

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1,0,0) = \frac{1}{2}e'_1 \\ \\ f(0,1,0) = \frac{1}{2}e'_1 + e'_2 \\ \\ f(0,0,1) = -\frac{1}{2}e'_1 + e'_2 \end{array} \right.$$

La matriz de la aplicación es

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observaciones 4.2.3.

1) Dos aplicaciones lineales f y g de E en F coinciden ($f \equiv g$) si y solo si

$$M(f, B_E, B_F) = M(g, B_E, B_F).$$

2) La matriz $M(f, B_E, B_F)$ permite calcular con sencillez las coordenadas $(y_1, \dots, y_m)$ respecto de B_F de la imagen $f(u)$ de cada vector $u = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \in E$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j u_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} x_j f\big(u_j\big) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) v_i = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i. \end{aligned}$$

Por la unicidad de los coordenadas de un vector respecto de una base, para cada índice $i = 1, \dots, m$, se tiene

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Esto se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Y = M(f, B_E, B_F) X$$

y se denomina **ecuación matricial** de f respecto de las bases B_E y B_F.

4.3. Operaciones con Aplicaciones lineales

1) **Suma de aplicaciones lineales.** Sean $f : E \to F$ y $g : E \to F$ dos aplicaciones lineales del espacio E en F. Entonces

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u) \quad \text{para} \quad u \in E.$$

2) **Producto de un escalar por una aplicación**. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal del espacio E en F. Entonces

$$(\lambda f)(u) = \lambda(f(u)) \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad u \in E.$$

3) **Composición de aplicaciones**.
Dados tres espacios vectoriales E, F, G y dadas las aplicaciones lineales $f : E \to F$ y $g : F \to G$.

   Se llama ***composición de*** f ***con*** g***, o*** f ***compuesta con*** g, y se denota $g \circ f$, en este orden, a la aplicación

$$\begin{array}{rccl} h = g \circ f : & E & \longrightarrow & G \\ & u & \longrightarrow & h(u) = g\big(f(u)\big). \end{array}$$

Proposición 4.3.1. *Se verifica que:*

1) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

2) $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

3) $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$.

4) $\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)$.

4.4. Operaciones con matrices

Sean A y B las matrices asociadas a las aplicaciones lineales f y g entonces:

1) $A + B$ es la matriz asociada a la aplicación $f + g$.

2) αA es la matriz asociada a la aplicación αf.

3) El producto de las matrices $A \cdot B$ es la matriz de la aplicación lineal composición $f \circ g$.

Ejemplo 4.4.1. Sean f y g dos aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definidas por

$$\begin{array}{l} f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_2 + x_3) \\ g(x_1, x_2, x_3) = (x_2, 2x_3 - x_1, x_1 - x_2) \end{array}$$

1) Calcular las matrices asociadas a f y g respecto de las bases canónicas. Sea S_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

$$M(f,S_3,S_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad M(g,S_3,S_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

2) Determinar $h_1=f+g$, $h_2=3g$, $h_3=g\circ f$ y $h_4=f\circ g$.

$$\begin{aligned}h_1(x_1,x_2,x_3)&=(f+g)(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_2,x_3)+g(x_1,x_2,x_3)\\&=(x_1,x_1+x_2,x_2+x_3)+(x_2,2x_3-x_1,x_1-x_2)\\&=(x_1+x_2,x_2+2x_3,x_1+x_3).\end{aligned}$$

Producto por un escalar:

$$\begin{aligned}h_2(x_1,x_2,x_3)&=(3g)(x_1,x_2,x_3)=3(g(x_1,x_2,x_3))\\&=(3x_2,6x_3-3x_1,3x_1-3x_2).\end{aligned}$$

Composición de funciones:

$$\begin{aligned}h_3(x_1,x_2,x_3)&=(g\circ f)(x_1,x_2,x_3)=g(f(x_1,x_2,x_3))\\&=g(x_1,x_1+x_2,x_2+x_3)\\&=(x_1+x_2,2(x_2+x_3)-x_1,x_1-(x_1+x_2))\\&=(x_1+x_2,2x_2+2x_3-x_1,-x_2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_4(x_1,x_2,x_3,x_4)&=(f\circ g)(x_1,x_2,x_3,x_4)\\&=f(g(x_1,x_2,x_3,x_4))=f((x_2,2x_3-x_1,x_1-x_2))\\&=(x_2,x_2+2x_3-x_1,2x_3-x_2).\end{aligned}$$

3) Calcular las matrices asociadas a h_1,h_2,h_3 y h_4.

$$M(f,S_3,S_3)+M(g,S_3,S_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$3M(g,S_3,S_3)=\begin{pmatrix}0&3&0\\-3&0&6\\3&-3&0\end{pmatrix}$$

$$M(g,S_3,S_3)\cdot M(f,S_3,S_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$M(f,S_3,S_3)\cdot M(g,S_3,S_2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.4.2. Sean f y g las aplicaciones lineales cuyas ecuaciones son:

$$f:(x,y,z)\longrightarrow f(x,y,z)=(x+2y+3z,-x+y+5z)$$

$$g:(u,v)\longrightarrow g(u,v)=(u+v,2u-v,3u-4v)$$

Hallar las composiciones $f\circ g$ y $g\circ f$. Sean S_3 y S_2 las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

Las matrices asociadas a cada una de las aplicaciones son:

$$M(f,S_3,S_2)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}\qquad M(g,S_2,S_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Por tanto las ecuaciones pedidas son

$$g\circ f:(x,y,z)\longrightarrow M(g,S_2,S_3)\cdot M(f,S_3,S_2)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$g\circ f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 8\\ 3 & 3 & 1\\ 7 & 2 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

y

$$f\circ g:(u,v)\longrightarrow M(f,S_3,S_2)\cdot M(g,S_2,S_3)\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & -13\\ 16 & -22\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}$$

4.5. Imagen de una aplicación lineal

4.5.1. Definiciones

Sean X e Y dos conjuntos, $f:X\longrightarrow Y$ una aplicación, y A un subconjuntos de X.

1) Se llama ***imagen directa por*** f de A al conjunto

$$f(A)=\{y\in Y\ :\ \exists\, x\in A\ \text{ con }\ f(x)=y\}.$$

2) En particular, se llama ***imagen*** de f, a la imagen directa por f de X, y se denota
$$\mathrm{Im}(f) = f(X).$$

4.5.2. Imágenes directas mediante aplicaciones lineales

Sean $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y H un subespacio del espacio vectorial de tipo finito E.

Proposición 4.5.1.

1) *La imagen directa $f(H)$ es un subespacio vectorial de F.*

2) *El conjunto* $\mathrm{Im}(f)$ *es un subespacio vectorial de F.*

3) *Si S es un sistema generador de H, entonces $f(S)$ lo es de $f(H)$.*

4) *Si S es una base de H, entonces* $\dim\big(f(H)\big) \leq \dim(H)$.

Observación 4.5.2. *Si $B_E = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de E, se tiene que*
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}(\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}).$$

4.5.3. Dimensión de una imagen directa

Sean $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y H un subespacio del espacio vectorial E.

Sean $S = \{w_1, \ldots, w_r\}$ un sistema generador de H y $B_F = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de F.

Tenemos que, $f(H)$ está generado por los vectores $\{f(w_1), \ldots, f(w_r)\}$, que se escribirán como combinación lineal de los vectores de B_F
$$f(w_j) = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{mj}v_m, \quad \text{para cada } \; j = 1, 2, \ldots, r.$$

Por lo tanto, la dimensión de $f(H)$ es el número máximo de vectores *l.i.* de $\{f(w_1), \ldots, f(w_r)\}$, es decir,
$$\dim\big(f(H)\big) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición 4.5.3. *Si B_E es una base de E, entonces*
$$\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim\big(f(E)\big) = \mathrm{rg}\big(M(f, B_E, B_F)\big).$$

Definición 4.5.4. *Llamamos **rango** de una aplicación lineal a la dimensión de su imagen .*

4.6. Núcleo de una aplicación lineal

4.6.1. Definición

Sean X e Y dos conjuntos, $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación, y B un subconjuntos de.

Se llama ***imagen inversa por*** f de B al conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ : \ f(x) \in B\}.$$

4.6.2. Imágenes inversas mediante aplicaciones lineales

Sean $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y H un subespacio del espacio vectorial de tipo finito F.

Proposición 4.6.1. *La imagen inversa $f^{-1}(H)$ es un subespacio vectorial de E.*

Definición 4.6.2. *Se llama **núcleo** de f, a la imagen inversa del subespacio $\{0_F\}$, y se denota*

$$\ker(f) = f^{-1}\big(\{0_F\}\big) = \{u \in E \ : \ f(u) = 0_F\}.$$

4.6.3. Dimensión del núcleo de una aplicación lineal

Sean $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal, $B_E = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $B_F = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases en E y F. Se tiene que,

$$\dim\big(\ker(f)\big) = n - \mathrm{rg}\big(M(f, B_E, B_F)\big).$$

Por lo tanto

Proposición 4.6.3.

$$\dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(E).$$

Definición 4.6.4. *Se llama **nulidad** de una aplicación lineal a la dimensión de su núcleo.*

4.7. Ejemplo: Determinación de la imagen y del núcleo de una aplicación lineal

Sea $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal dada por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

tal que

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \\ y_2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \\ y_3 = \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 \\ y_4 = x_1 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 \end{cases}$$

Sean $B_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y $B_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^5$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente.

La matriz de f respecto de estas bases es

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Calcular la dimensión de la imagen de f.

Como

$$(1,0,2,1,3) = 5(1,1,1,2,-1) + (0,1,-1,1,0) - 4(1,0,2,1,4)$$

y el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

no es nulo, obtenemos que $\mathrm{rg}\big(M(f, B_1, B_2)\big) = 3$. Por tanto

$$\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim\big(f(\mathbb{R}^5)\big) = \mathrm{rg}\big(M(f, B_1, B_2)\big) = 3.$$

2) Calcular la dimensión del núcleo de f.

Puesto que,

$$\dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^5),$$

$\dim(\mathbb{R}^5) = 5$ y $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 3$, se consigue que

$$\dim\big(\ker(f)\big) = 2.$$

4.8. Aplicaciones lineales inyectivas

4.8.1. Definición

Sean X e Y dos conjuntos, $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación.

Si dice que f es ***inyectiva***, si

$$\forall\ x_1, x_2 \in X,\quad x_1 \neq x_2 \quad\Longrightarrow\quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

4.8.2. Monomorfismo

Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Se dice que f es ***monomorfismo*** si es inyectiva.

Observación 4.8.1. *La restricción de una aplicación inyectiva es también inyectiva.*

Proposición 4.8.2. *La aplicación f es inyectiva si y solo si*

$$\ker(f) = \{0_E\}.$$

Proposición 4.8.3. *La aplicación f es monomorfismo si y solo si existe una aplicación lineal*
$g : F \to E$ tal que $g \circ f = \mathbb{I}_E$.

4.9. Aplicaciones lineales sobreyectivas

4.9.1. Definición

Sean X e Y dos conjuntos, $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación.

Se dice que f es ***sobreyectiva***, si todos los elementos de Y son imagen de algún elemento de X, esto es,

$$\mathrm{Im}(f) = f(X) = Y.$$

4.9.2. Epimorfismo

Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Se dice que f es ***epimorfismo*** si es sobreyectiva.

Proposición 4.9.1. *La aplicación f es epimorfismo si y solo si existe una aplicación lineal $h : F \to E$ tal que $f \circ h = \mathbb{I}_F$.*

4.10. Aplicaciones lineales biyectivas

4.10.1. Definición

Sean X e Y dos conjuntos, $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación.

Si dice que f es ***biyectiva***, si es inyectiva y sobreyectiva. En tal caso

$$\forall\ y \in Y,\ \ \exists!\ \text{(existe un único)}\ \ x \in X\ \ \text{tal que}\ \ f(x) = y.$$

Observación 4.10.1. *Solo si f es biyectiva, se define la aplicación*

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\longrightarrow X \\ y &\longrightarrow f^{-1}(y) = x. \end{aligned}$$

4.10.2. Isomorfismo

Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Se dice que f es ***isomorfismo*** si es biyectiva.

Proposición 4.10.2. *Si f es isomorfismo, entonces su inversa*

$$f^{-1} : F \longrightarrow E$$

también es isomorfismo.

4.10.3. Caracterización de la isomorfía

Proposición 4.10.3. *Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *f es isomorfismo (biyectiva)*

2) *f es monomorfismo (inyectiva)*

3) *f es epimorfismo (sobreyectiva)*

4) $\mathrm{Im}(f) = f(E) = F$

5) $\dim(E) = \dim(F)$

6) $\ker(f) = \{0_E\}$

7) *$f^{-1} : F \to E$ es isomorfismo (biyectiva)*

Proposición 4.10.4. *Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita y $f : E \to F$ una aplicación lineal. Entonces:*

1) *f es inyectiva si y sólo si* $\mathrm{rg}\big(M(f, B_E, B_F)\big) = \dim(E)$.

2) *f es sobreyectiva si y sólo si* $\mathrm{rg}\big(M(f, B_E, B_F)\big) = \dim(F)$.

4.10.4. Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Clasificar el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $f(e_1) = ae_1 + e_2 + e_3$; $f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3$; $f(e_3) = e_1 + be_2 + e_3$ según los valores de a y b.

La matriz de la aplicación lineal es

$$M(f, B_3, B_3) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos la aplicación según el rango de la matriz de la aplicación, mediante transformaciones lineales obtenemos

$$M(f, B_3, B_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos distinguir los siguientes casos:

1) Si $a \neq 1$ y $b \neq 1$ entonces el rango de la aplicación es 3, por lo tanto

$$\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim\big(f(\mathbb{R}^3)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3.$$

Luego la aplicación es sobreyectiva. Y como

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \mathrm{rg}\big(M(f, B_3, B_3)\big) = 3$$

entonces la aplicación es inyectiva. Por lo tanto f es automorfismo (endomorfismo biyectivo).

2) Si $a = 1$ y $b \neq 1$ entonces

$$\mathrm{rg}\big(M(f, B_3, B_3)\big) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$$

por lo que f no es sobreyectivo.

Además sabemos que

$$\dim\big(\ker(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 3 - 2 = 1,$$

por lo que f no es inyectivo.

3) Si $a \neq 1$ y $b = 1$ igual que el anterior.

4) Si $a = 1$ y $b = 1$ entonces el rango de la matriz es 1, por lo que la aplicación no es sobreyectiva, ni inyectiva $\dim(\ker(f)) = 2$.

4.11. Cambio de base

Sean $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal, B_E, B'_E dos bases en E, y B_F, B'_F dos bases en F de manera que

$$Y = M(f, B_E, B_F)X.$$

Sea X un vector de E cuyas coordenadas respecto de la base B_E son $X = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$ sabemos que las coordenadas del vector en otra base se calculan mediante la ecuación matricial de cambio de base

$$X' = M(B_E, B'_E)X.$$

De manera análoga en F, podemos escribir un vector $Y = f(X)$ tal que $Y = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_mv_m$, entonces

$$Y' = M(B_F, B'_F)Y.$$

El objetivo es encontrar una aplicación lineal que lleve vectores de E respecto de la base B'_E a vectores de F respecto de la base B'_F. Es decir, la matriz de la aplicación lineal tal que

$$Y' = M(f, B'_E, B'_F)X'$$

Como

$$\begin{aligned} Y &= M(f, B_E, B_F)X \\ X' &= M(B_E, B'_E)X \\ Y' &= M(B_F, B'_F)Y. \end{aligned}$$

Entonces

$$Y' = M(B_F, B'_F)M(f, B_E, B_F)M(B_E, B'_E)^{-1}X'.$$

Recordemos que como $M(B_E, B'_E)$ es la matriz de cambio de base del espacio E es invertible y

$$M(B_E, B'_E)^{-1} = M(B'_E, B_E).$$

Por tanto

$$Y' = M(B_F, B'_F)M(f, B_E, B_F)M(B'_E, B_E)X'.$$

Teorema 4.11.1.

$$M(f, B'_E, B'_F) = M(B_F, B'_F)M(f, B_E, B_F)M(B'_E, B_E).$$

Todo este cambio se puede recordar mediante el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
(E,B_E) & \xrightarrow{\quad f \quad} & (F,B_F) \\
X=\sum_{i=1}^{n} x_i u_i & & Y=\sum_{i=1}^{m} y_i v_i \\
M(B_E,B'_E)\Big\downarrow & & \Big\downarrow M(B_F,B'_F) \\
(E,B'_E) & \xrightarrow{\quad f \quad} & (F,B'_F) \\
X'=\sum_{i=1}^{n} x'_i u'_i & & Y'=\sum_{i=1}^{m} y'_i v'_i
\end{array}$$

Ejemplo 4.11.2. Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccl}
f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 & & (u_1,u_2,u_3) & \longrightarrow f(u_1,u_2,u_3)=(u_1-u_2+2u_3,u_1+3u_2)
\end{array}$$

y consideremos en dichos espacios las bases
$B_2=\{(-2,1),(1,-1)\}$ y $B_1=\{(1,0,-1),(2,1,0),(0,1,1)\}$.
Las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ son
$S_3=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $S_2=\{(1,0),(0,1)\}$ respectivamente.

1) Calcular la matriz de f asociada a las bases canónicas.

   Tenemos que

$$\begin{aligned}
f(1,0,0) &= (1,1)=(1,0)+(0,1) \\
f(0,1,0) &= (-1,3)=-(1,0)+3(0,1) \\
f(0,0,1) &= (2,0)=2(1,0).
\end{aligned}$$

   Por lo tanto, la matriz asociada a la aplicación respecto de las bases $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ es:

$$M(f,S_3,S_2)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Calcular la matriz de f asociada a B_1 y B_2.

   Consideramos las matrices de cambio de base de S_3 a la base B_1 y de S_2 a la B_2.

$$M(B_1,S_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M(B_2,S_2)=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que

$$M(f, B_1, B_2) = M(B_2, S_2)^{-1} M(f, S_3, S_2) M(S_3, B_1)^{-1}$$

así que

$$M(f, B_1, B_2) = M(S_2, B_2) M(f, S_3, S_2) M(B_1, S_3).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} M(f, B_1, B_2) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ -1 & -11 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podríamos haber calculado la matriz de la aplicación haciendo:

$$\begin{aligned} f(1,0,1) &= (-1,1) = -v_2 \\ f(2,1,0) &= (1,5) = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ f(0,1,1) &= (1,3) = \gamma v_1 + \delta v_2 \end{aligned}$$

donde $v_1 = (-2, 1)$ y $v_2 = (1, -1)$. De este sistema obtenemos $\alpha = -6; \beta = -11; \gamma = -4; \delta = -7$.

3) Calcular la matriz asociada a la aplicación f respecto de las bases B_1 y S_2.

Sabemos que

$$M(f, B_1, B_2) = M(B_2, S_2)^{-1} M(f, S_3, S_2) M(S_3, B_1)^{-1}$$

Por tanto

$$M(f, B_1, S_2) = M(S_2, S_2)^{-1} M(f, S_3, S_2) M(S_3, B_1)^{-1}.$$

Entonces

$$M(f, B_1, S_2) = M(f, S_3, S_2) M(B_1, S_3).$$

Luego

$$M(f, B_1, S_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

4) Calcular la matriz de f respecto de las bases S_3 y B_2.

Sabemos que

$$M(f, B_1, B_2) = M(B_2, S_2)^{-1} M(f, S_3, S_2) M(S_3, B_1)^{-1}$$

Por tanto

$$M(f, S_3, B_2) = M(B_2, S_2)^{-1} M(f, S_3, S_2) M(S_3, S_3)^{-1}$$

Entonces

$$M(f, S_3, B_2) = M(S_2, B_2,) M(f, S_3, S_2)$$

$$M(f, S_3, B_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Capítulo 5

Diagonalización de matrices

5.1. Autovalores y autovectores

Sea E un espacio vectorial y sea $f : E \longrightarrow E$ un endomorfismo de E.

1) Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **autovalor (o valor propio)** de f si existe un vector $v \in E$, con $v \neq 0_E$ tal que $f(v) = \lambda v$, en cuyo caso se dice que v es un **autovector (o vector propio)** de f asociada al autovalor λ.

2) Dado un autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de f, el conjunto de todos los autovectores asociados a λ es un subespacio vectorial llamado **subespacio propio** que notaremos

$$V_\lambda = \{v \in E \ : \ f(v) = \lambda v\}.$$

Ejemplo 5.1.1.

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longrightarrow & (x + y + z, 2y + z, 3z) \end{array}$$

Tenemos que

$$f(1, 1, 1) = (3, 3, 3) = 3(1, 1, 1)$$

Por tanto 3 es un autovalor de f.

Calculemos el subespacio propio V_3 asociado al autovalor 3:

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)\in V_3 &\Longleftrightarrow f(x,y,z)=3(x,y,z)\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 3x\\ 2y+z &=& 3y\\ 3z &=& 3z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z\\ y &=& z\\ z &=& z \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$V_3=\operatorname{span}\big(\{(1,1,1)\}\big).$$

Por otra parte no es difícil ver que 5 no es un autovalor de f.

Proposición 5.1.2. *Sea E un espacio vectorial de dimensión n, f un endomorfismo de E y sea A la matriz asociada a f respecto de una base de E. Dado $\lambda\in\mathbb{R}$ autovalor de f, se verifica:*

1) $V_\lambda=\operatorname{Ker}(f-\lambda I)=\{v\in E\ :\ (f-\lambda I)(v)=0_E\}$.

2) V_λ *es un subespacio vectorial de E.*

3) $\dim(V_\lambda)=n-\operatorname{rg}(A-\lambda I)$.

Observación 5.1.3. *Sea A una matriz cuadrada, llamamos autovectores y autovalores de A a los autovectores y autovalores del endomorfismo f de matriz asociada A.*

5.2. Cómo calcular los autovalores y autovectores

Sea E un espacio vectorial y sea $f:E\longrightarrow E$ un endomorfismo de E de matriz asociada A. Llamamos ***polinomio característico de*** f al polinomio

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda I).$$

Proposición 5.2.1. *Dado $\lambda\in\mathbb{R}$, se verifica:*

$$\lambda \ \text{ es autovalor de } f \text{ si, sólo si, } \ P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0.$$

Ejemplo 5.2.2. Consideremos el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico será:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6.$$

Factorizando, se obtiene:

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda).$$

Por tanto los autovalores de f son:

$$\begin{cases} \lambda_1 & = & 1 \\ \lambda_2 & = & 3 \\ \lambda_3 & = & -2 \end{cases}$$

Ejemplo 5.2.3. El polinomio característico

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3.$$

Así pues $P(\lambda)$ tiene una única raíz de multiplicidad 3 y, en consecuencia, el único autovalor de A es $\lambda = 2$.

Ejemplo 5.2.4. Calcular los autovalores y los subespacios de autovectores correspondientes, así como la dimensión de los mismos de la aplicación dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 12$$

Sus raíces son los autovalores buscados. Por lo tanto, $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = 3$.

El subespacio propio asociado a $\lambda_1 = -4$ estará formado por los vectores que cumplen que $Av = -4v$, es decir por lo vectores (v_1, v_2) que satisfacen el sistema homogéneo $(A + 4I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El subespacio resultante es $V_{\lambda_1} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 / v_1 = v_2\}$, de manera análoga calculamos el subespacio para el autovalor $\lambda_2 = 3$, obteniendo el subespacio $V_{\lambda_2} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 / 5v_1 + 2v_2 = 0\}$. La dimensión de ambos subespacio es uno ($\dim(V_{\lambda_1}) = \dim(V_{\lambda_2}) = 2 - 1 = 1$).

5.3. Propiedades de los autovalores y autovectores

Proposición 5.3.1. *Dada una matriz A de orden n. Entonces:*

1) *A y A^t tienen los mismos autovalores.*

2) *Si λ es un autovalor de A, entonces $k\lambda$ es autovalor de kA.*

3) *Si λ es un autovalor de A, entonces $\lambda - k$ es autovalor de $A - kI$.*

4) *Si λ es un autovalor de A y es A es regular, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un autovalor de A^{-1}.*

5) *Si λ es un autovalor de A, entonces λ^n es autovalor de A^n.*

Observación 5.3.2. *El polinomio característico un endomorfismo no depende de la base elegida.*

Demostración. Sean B y B' dos bases en un espacio vectorial E y f endomorfismo de E. Sean A y A' las matrices que representan a f en las bases B y B' respectivamente.

Sea $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ el polinomio característico de la matriz A y sea $Q(\lambda) = |A' - \lambda I|$ el polinomio característico de la matriz A'.

Llamemos $C = M(B', B)$ a la matriz de cambio de base de B a B'. Entonces

$$\begin{aligned} Q(\lambda) = |A' - \lambda I| &= |C^{-1}AC - \lambda I| \\ &= |C^{-1}AC - C^{-1}\lambda IC| \\ &= |C^{-1}(A - \lambda I)C| \\ &= |C^{-1}| \cdot |A - \lambda I| \cdot |C| \\ &= |A - \lambda I| = P(\lambda) \end{aligned}$$

□

Proposición 5.3.3. *Los autovectores de una aplicación lineal correspondientes a autovalores distintos dos a dos son linealmente independientes.*

5.4. Multiplicidades algebraicas y geométricas

Definición 5.4.1. *Sea E un espacio vectorial de dimensión n y sea f un endomorfismo de E de matriz asociada A y λ un autovalor de f (o de A) :*

1) *Se llama **multiplicidad algebraica** de λ al orden de multiplicidad $\mathbf{m}$ de λ como raíz del polinomio característico.*

   $\big($Esto es: el mayor exponente $\mathbf{m}$ para el cual el factor $(\mu-\lambda)^m$ aparece en la descomposición de $P(\mu)\big)$.

2) *Se llama **multiplicidad geométrica** de λ a la dimensión $\mathbf{d}$ del subespacio propio V_λ asociado a λ.*

   $\big($Esto es:
$$d = \dim(V_\lambda) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I)\big).$$

Ejemplo 5.4.2. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es $P(\lambda) = (2-\lambda)^3$, luego A tiene un único autovalor $\lambda = 2$ de multiplicidad algebraica $m = 3$.

La multiplicidad geométrica de A es:

$$d = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Proposición 5.4.3. *Sea E un espacio vectorial de dimensión n y sean f un endomorfismo de E y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sus distintos autovalores. Entonces para cada $i = 1, 2, \ldots, r$ se verifica:*
$$1 \le d_i \le m_i.$$

5.5. Matrices diagonalizables

Definición 5.5.1.

1) *Una matriz cuadrada A es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal D y una matriz regular P (invertible) tales que*

$$D = P^{-1}AP.$$

2) *Diremos que el endomorfismo $f : E \to E$ es* ***diagonalizable*** *si existe una base de E tal que la matriz que representa a f en dicha base es una matriz diagonal.*

Proposición 5.5.2. *Un endomorfismo $f : E \to E$ es diagonalizable si, y solamente si, existe una base de E formada por autovectores de f.*

Teorema 5.5.3. *Sea $f : E \to E$ un endomorfismo y sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sus distintos autovalores con multiplicidades algebraicas $m_1, m_2, \dots, m_r$ y geométricas $d_1, d_2, \dots, d_r$, entonces f (o A) es* ***diagonalizable*** *si y solo si se verifica:*

1) $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = \dim E$.

2) $d_i = m_i$ *para todo* $i = 1, 2, \dots, r$.

Ejemplo 5.5.4. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$$

Factorizando, se obtiene:

$$P(\lambda) = (2-\lambda)^2(5-\lambda).$$

Así pues, los autovalores de A y sus multiplicidades algebraicas son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2; \qquad m_1 = 2 \\ \lambda_2 &= 5; \qquad m_2 = 1 \end{aligned}$$

Calculemos ahora las multiplicidades geométricas

$$d_1 = 3 - \mathrm{rg}(A - 2I) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Para d_2, aplicando que $1 \leq d_2 \leq m_2 = 1$, obtenemos que $d_2 = 1$.
Tenemos por tanto

$\lambda_1 = 2$	$m_1 = 2$	$d_1 = 2$
$\lambda_2 = 5$	$m_2 = 1$	$d_2 = 1$

Puesto que $d_1 = m_1$, $d_2 = m_2$ y $m_1 + m_2 = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, la matriz A es diagonalizable y su forma diagonal será

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de paso, necesitamos bases de los espacios propios

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in V_2 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow x + y + z = 0 \end{aligned}$$

Pasamos a paramétricas

$$V_2 \equiv \begin{cases} x = -\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

y de aquí obtenemos la base de V_2

$$\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

De igual forma

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in V_5 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Así pues V_5 tiene ecuaciones paramétricas

$$V_5 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{array} \right.$$

y por tanto una base es $\{(1,1,1)\}$.

En consecuencia una base formada por autovectores es

$$\{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\}.$$

Es importante que los vectores de esta base estén en el mismo orden en que figuran los autovalores correspondientes en la forma diagonal.

Finalmente la matriz de paso será:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En este momento hemos acabado y sólo restará comprobar que efectivamente $D = P^{-1}AP$:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D$$

Ejemplo 5.5.5. Dado el siguiente endomorfismo, estudiar si es diagonalizable y en caso afirmativo, calcular su diagonalización.

$$f(x_1,x_2,x_3) = (-11x_1 - 10x_2 + 5x_3, 4x_2, -15x_1 - 10x_2 + 9x_3)$$

I) En primer lugar calculamos la matriz asociada a dicho endomorfismo respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^3$, obteniendo

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -10 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & -10 & 9 \end{pmatrix}$$

Para saber si el endomorfismo es diagonalizable tenemos que calcular los autovectores asociados a A, para ello calculamos el polinomio característico $P(\lambda)$.

$$P = \begin{vmatrix} -11-\lambda & -10 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -15 & -10 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-24)$$

Las raíces del polinomio son $\lambda_1 = -6$ y $\lambda_2 = 4$ cuyas multiplicidades algebraicas respectivas son $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$.
Calculemos ahora los subespacio propios:

$$\begin{aligned} V_{-6} &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (A+6I)x = 0\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = x_3, x_2 = 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{4} &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (A-4I)x = 0\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\dim(V_1) = 1 = m_1$ y $\dim(V_2) = 2 = m_2$ y como se cumple que:
1) $d_1 + d_2 = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$
2) $m_1 = d_1$ y $m_2 = d_2$
entonces el endomorfismo es diagonalizable.

II) La matriz diagonal es, por tanto,

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Además como unas bases para los subespacios propios son

$$B_1 = \{(1,0,1)\}$$

y

$$B_2 = \{(1,0,3),(0,1,2)\},$$

una base en la que el endomorfismo es diagonal es

$$B = \{(1,0,1),(1,0,3),(0,1,2)\}$$

y se cumple que

$$A' = P^{-1}AP$$

o bien que

$$A = PA'P^{-1}$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Observación 5.5.6. *El hecho de que una matriz no sea diagonalizable puede ser por dos causas:*

1) *Las raíces del polinomio característico no pertenezcan al cuerpo en el que se trabaja.*

2) $\dim(V_\lambda) < m_\lambda$ (*multiplicidad algebraica del autovalor* λ)

Ejemplo 5.5.7. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable en $\mathbb{C}$, ya que sus autovalores son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$, que son distintos (ver Proposición 5.3.3). Sin embargo no es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Teorema 5.5.8 (Teorema espectral). *Toda matriz simétrica es diagonalizable en* $\mathbb{R}$.

5.6. Forma canónica de Jordan

El objetivo de este capítulo, es simplificar la matriz asociada a una aplicación lineal.

A pesar que no todas las matrices son diagonalizables, existe una "*forma sencilla*" de reducirlas mediante un cambio de base, esta forma se denomina ***matriz de Jordan*** de la matriz dada.

La forma de Jordan no solo se utiliza para clasificar las aplicaciones lineales en un espacio vectorial, sino que podemos utilizarla para realizar operaciones con matrices.

5.6.1. Forma canónica de Jordan para matrices de orden 2

Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E y A su matriz asociada de orden 2 respecto de la base B

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A la matriz de Jordan la representamos mediante J. Si P es la matriz de cambio de base de A a J, entonces se tiene que

$$J = P^{-1}AP$$

o equivalentemente
$$A = PAP^{-1}.$$

El polinomio característico es
$$P(\lambda) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$
por lo que los autovalores serán las raíces de dicho polinomio. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Las raíces del polinomio son distintas:

En este caso la matriz es diagonalizable y su forma de Jordan es la matriz diagonal
$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.6.1. Encontrar la forma de Jordan J de
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$
y la matriz del cambio de base.

Como
$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 1$$
sus autovalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$; su matriz de Jordan es
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos los subespacios propios V_1 y V_{-1}.

• Si $\lambda_1 = 1$, tenemos
$$v = (x, y) \in V_1 \iff (A - I)v = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff 2x - 4y = 0 \iff x - 2y = 0$$
así que,
$$V_1 = \ker(A - I) = \operatorname{span}(\{(2,1)\}) = \{\alpha(2,1) \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

• Para $\lambda_2 = -1$ tenemos
$$v = (x, y) \in V_{-1} \iff (A + I)v = 0 \iff \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff x = y$$

así que,

$$V_{-1} = \ker(A + I) = \text{span}(\{(1,1)\}) = \{\alpha(1,1) \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Tomando $\{(2,1)\}$ como base de V_1 y $\{(1,1)\}$ como base de V_{-1} obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Caso II. Las raíces coinciden $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:

En este caso tenemos que calcular el subespacio propio:

$$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I).$$

1) Si $\dim(V_\lambda) = 2$, entonces la matriz también es diagonalizable, ya que la multiplicidad algebraica y geométrica coinciden, por lo tanto, la forma de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2) Si $\dim(V_\lambda) = 1$, entonces no podemos encontrar una base de autovectores de E.

Lema 5.6.2. *Si A tiene dos autovalores iguales entonces*

$$(A - \lambda I)^2 = 0.$$

La idea es buscar una base para el espacio vectorial, que como tiene dimensión dos, necesitaremos dos vectores.

Sea $V = \text{Ker}(A - \lambda I)^2$ que, según el Lema 5.6.2, coincide con E.

Como $\dim(V_\lambda) = 1$ podemos encontrar $v \in V - V_\lambda$; tomamos

$$u = (A - \lambda I)v.$$

Los vectores u, v son linealmente independientes puesto que $v \notin V_\lambda$ y $u \in V_\lambda$ (ya que

$$(A - \lambda I)(u) = (A - \lambda I)\big((A - \lambda I)(v)\big) = (A - \lambda I)^2(v) = 0(v) = 0),$$

y ninguno de ellos es el vector nulo. Por tanto $\{u, v\}$ es una base de E. Tenemos

$$\begin{array}{lcl} (A - \lambda I)(u) = 0 & \Longleftrightarrow & A(u) = \lambda u \\ (A - \lambda I)(v) = u & \Longleftrightarrow & A(v) = u + \lambda v \end{array}$$

La matriz de Jordan (que no es diagonal) es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

5.6.2. Forma de Jordan para matrices de orden 3

Ejemplo 5.6.3. Calcular la forma de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) El polinomio característico satisface la ecuación

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = -(\lambda - 2)(\lambda + 2)^2$$

Por lo tanto los autovalores son $\lambda = 2$ (simple) y $\lambda = -2$ (doble).

2) Calculamos, ahora los subespacios propios asociados a cada autovalor:
- Para $\lambda = 2$.

$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = x_2 = -x_3\}$$

Una base para dicho subespacio es, por ejemplo, $\{(1, 1, -1)\}$, dimensión 1.
- Para $\lambda = -2$.

$$V_{-2} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = -x_2 = x_3\}$$

Una base para el subespacio es, por ejemplo, $\{(1, -1, 1)\}$, también de dimensión 1. Por lo tanto la matriz *no* es diagonalizable.

3) Calculamos $\text{Ker}(A + 2I)^2 = V$.

$$\begin{aligned} V &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (A + 2I)^2 x = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Una base para dicho subespacio es $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$, que tiene dimensión 2.

4) Puesto que $V_2 + V$ llena todo el espacio E, podemos elegir una base de E de manera que la matriz de A sea, en este base, bastante sencilla.

En primer lugar elegimos un vector $u_1 \in V - V_{-2}$, por ejemplo $u_1 = (0, 0, 1)$ y sea

$$u_2 = (A + 2I)u_1 = (1, -1, 1)$$

y por último tomamos un vector $u_3 = (1, 1, -1) \in V_2$.

El conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de E y en esta base la expresión de la aplicación A que tiene a A como matriz es:

$$Au_3 = 2u_3 \quad Au_2 = -u_2 \quad Au_1 = u_2 - 2u_1$$

Con lo que la forma de Jordan es

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

La matriz de paso es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Ejemplo 5.6.4. Calcular la forma de Jordan de la matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Calculamos el polinomio característico

$$P = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8 = -(\lambda + 2)^2$$

Por lo que el autovalor es $\lambda = -2$ (triple).

2) Calculamos el subespacio propio asociado al autovalor

$$V_{-2} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = x_2 = x_3\}.$$

Luego una base para el subespacio es $\{(1, 1, 1)\}$, que tiene dimensión uno.

3) Como no existe una base de autovectores para todo el espacio tenemos que calcular $\mathrm{Ker}(A + 2I)^2 = V$, obteniendo

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = x_3\}$$

Una base de V es, por ejemplo, $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$, por lo que tampoco llena todo el subespacio.

Lema 5.6.5. *Si A tiene tres autovalores iguales entonces* $(A-\lambda I)^3 = 0$.

De esta manera, la cadena de subespacios es

$$V_{-2} \subsetneq V \subsetneq V' = \ker(A+2I)^3 = E$$

4) Construimos una base adecuada para el espacio vectorial. Tomamos un vector $u_1 = (1,0,0) \in V' - V$ que esté en , ahora

$$u_2 = (A+2I)u_1 = (0,-1,0)$$

y $u_3 = (A+2I)u_2 = (-1,-1,-1)$. Se cumple que

$$Au_3 = -2u_3 \quad Au_2 = u_3 - 2u_2 \quad Au_1 = u_2 - 2u_1 1$$

Con lo que la forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.7. Aplicaciones

5.7.1. Potencia y exponencial de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n y J su forma de Jordan, tales que $J = P^{-1}AP$, entonces:

1) $A^k = PJ^kP^{-1}$

2) $e^A = Pe^JP^{-1}$

$\star$ Si J es una matriz diagonal, entonces

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \qquad e^J = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

⋆ Si J no es diagonal, entonces

$$J^k = \begin{pmatrix} \boxed{J_1^k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2^k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_n^k} \end{pmatrix} \qquad e^J = \begin{pmatrix} \boxed{e^{J_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{e^{J_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{e^{J_n}} \end{pmatrix}$$

Sea $J_i = (\lambda_i I + N_i)$ y n_i el orden de J_i, donde

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $J_i^k = (\lambda_i I + N_i)^k$, teniendo en cuenta que $N_i^{n_i} = 0$.
Además e^{J_i} se calcula de la siguiente forma.

$$e^{J_i} = e^{\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n_i-2)!} & \frac{1}{(n_i-3)!} & \cdots & \frac{1}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{(n_i-1)!} & \frac{1}{(n_i-1)!} & \frac{1}{(n_1-3)!} & \cdots & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.7.1. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar e^A.

Como la matriz que nos dan ya es diagonal por cajas

$$\left(\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Según lo visto tenemos que calcular

$$e^A = \left(\begin{array}{c|c} e^{J_1} & \\ \hline & e^{J_2} \end{array}\right)$$

Donde $e^{J_1} = e^{-2}$ y

$$e^{J_2} = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \end{pmatrix}$$

5.7.2. Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 5.7.2. *Toda matriz A satisface su polinomio característico.*

Ejemplo 5.7.3. Sea J la forma de Jordan de la matriz A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Calcular:

$$2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I$$

Como el polinomio característico de A es el mismo que el de una matriz semejante a ella, es igual al polinomio característico de J que es

$$P = (1-\lambda)^2(\frac{1}{2} - \lambda)) = -(\lambda^3 - \frac{5}{2}\lambda^2 + 2\lambda - \frac{1}{2})$$

Por el Teorema de Cayley-Hamilton se cumple que

$$-(A^3 - \frac{5}{2}A^2 + 2A - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 2A^3 - 5A^2 + 4A - I = 0 \Rightarrow 2A^4 - 5A^3 + 4A^2 - A = 0$$

Por lo tanto

$$2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I = -2A^3 + 5A^3 - 4A + I = 0.$$

Capítulo 6

Cónicas y cuádricas

6.1. Cónicas o conos

Definición 6.1.1. *Se llama* ***cono doble*** *a la superficie obtenida al hacer girar una recta alrededor de otra que la corta. La recta que gira se llama* ***generatriz****; la otra,* ***eje****, y el punto de corte de ambas es el* ***vértice*** *del cono doble.*

Ejemplo 6.1.2.

Definición 6.1.3. *Toda figura plana (elipse, hipérbola y parábola) que se obtiene como intersección de un doble cono recto con un plano que le corta se denomina* ***sección cónica****.*

Ejemplo 6.1.4.

Definición 6.1.5. *Sean $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$ dos puntos del plano métrico $\mathbb{R}^2$. Se llama **distancia** del punto X al punto Y, al número no negativo*

$$\mathrm{dist}(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

6.2. La elipse

Definición 6.2.1.

1) *Una **elipse** es el conjunto de los puntos $P = (x, y)$ del plano $\mathbb{R}^2$ cuya suma de las distancias de $P = (x, y)$ a dos puntos fijos y distintos, llamados **focos**, $F = (c, 0)$ y $F' = (-c, 0)$ (situados a distancia* $\mathrm{dist}(F, F') = 2c$*), es constante $(2a)$, es decir:*

$$\mathrm{dist}(P, F) + \mathrm{dist}(P, F') = 2a,$$

es decir,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

2) *La elipse referida a sus ejes principal (OX) y secundario (OY) admite por ecuación a:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\textit{ecuación reducida})$$

donde $b > 0$ tal que $a^2 = b^2 + c^2$.

3) *A los puntos de intersección con los ejes (OX) **eje principal** y (OY) **eje secundario** $(x = \pm a$ e $y = \pm b)$ se les denominan **vértices** y al punto o **centro**.*

Ejemplo 6.2.2.

6.3. La hipérbola

Definición 6.3.1.

1) *Se llama* ***hipérbola*** *que tiene por* ***focos*** *a los puntos* $F = (c, 0)$ *y* $F' = (-c, 0)$ *(situados a distancia* $\mathrm{dist}(F, F') = 2c$*) y cuya constante es* $2a \in \mathbb{R}$ *(donde* $0 < a < c$*), al conjunto de los puntos* $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tales que*

$$\left|\mathrm{dist}(P, F) - \mathrm{dist}(P, F')\right| = 2a,$$

es decir,

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

2) *La hipérbola referida a sus ejes principal* (OX) *y secundario* (OY) *admite por ecuación a:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\textit{ecuación reducida})$$

donde $b > 0$ *tal que* $a^2 + b^2 = c^2$.

3) *A los puntos de intersección de la curva con el eje* (OX) ***eje principal****,* $(-a, 0)$*;* $(a, 0)$ *se les llama* ***vértices****; y al punto* O ***centro****. Las* ***asíntotas*** *son las rectas*

$$y = \frac{b}{a}x \quad e \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Si $a = b$*, la hipérbola se llama* ***equilátera****, en este caso su ecuación se escribe*

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Ejemplo 6.3.2.

6.4. La parábola

Definición 6.4.1.

1) *Se llama* ***parábola*** *que tiene por* ***foco*** *al punto* F *y por* ***directriz*** *a la recta* d *(situada a distancia* $p > 0$ *del foco,* $\mathrm{dist}(F, d) = p$*; a* p *se le llama* ***parámetro*** *), al conjunto de los puntos* $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que:*

$$\mathrm{dist}(P, F) = \mathrm{dist}(P, d) = \inf_{Q \in d} \mathrm{dist}(P, Q),$$

es decir,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

2) *El* ***eje de la parábola*** *es la recta perpendicular a d que pasa por el punto* $F = (\frac{p}{2}, 0)$*; tal eje corta la parábola en un punto,* O*, que se llama* ***vértice****.*

3) *La parábola, referida a su eje* (OX) *y a la tangente en el vértice* $O = (0, 0)$ *admite por ecuación a*

$$y^2 = 2px \quad (\textit{ecuación reducida})$$

Ejemplo 6.4.2.

6.5. Ecuación general de una cónica

Definición 6.5.1.

1) *Una* ***cónica*** *es el lugar geométrico de los puntos del plano que verifican una ecuación de segundo grado en dos variables:*

$$(\bigstar) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

(*ecuación general de una cónica*).

2) *La matricial de la la cónica es:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

3) *Denotaremos:*

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2a_{01} & 2a_{02} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial queda:

$$X^t AX + BX + a_{00} = 0.$$

Ejemplo 6.5.2. La ecuación

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 29y - 5 = 0.$$

Esta ecuación se puede escribir en dos formas matriciales:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -5 & -\frac{29}{2} \\ -5 & 9 & -2 \\ -\frac{29}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

y también

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0$$

6.6. Ecuación reducida

Definición 6.6.1. *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y sea $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de E.*

1) *Se dice que B es una **base ortogonal** si*

$$< e_i, e_j >= e_i^t e_j = \alpha_i^1 \beta_j^1 + \cdots + \alpha_i^n \beta_j^n = 0, \qquad \forall i \neq j$$

donde $e_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^n)$ y $e_i = (\beta_i^1, \ldots, \beta_i^n)$.

2) *Se dice que B es una **base ortonormal** si es ortogonal y además:*

$$\|e_i\| = \mathrm{dist}(0, e_i) = 1, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Teorema 6.6.2. *Sea C la cónica de ecuación*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0.$$

Entonces existe una base $B = \{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ ortonormal respecto a la cual la ecuación de la cónica es:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + a_{00} = 0, \quad (\textbf{\textit{ecuación reducida}}).$$

6.7. Cómo eliminar el término xy en ($\bigstar$)

El objetivo de esta sección es obtener, a partir de la ecuación general de una cónica, una ecuación reducida en la que no aparece el término xy, mediante un cambio de base.

Sea B_0 la base canónica (ortonormal) de $\mathbb{R}^2$ y sea C la cónica que tiene en la base B_0 la ecuación:

$$(\bigstar) \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_{01} & 2a_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} = 0.$$

El objetivo es eliminar el término xy mediante un giro de los ejes coordenados.

Paso 1. Calcular los autovalores λ_1 y λ_2 de

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Paso 2. Calcular los autovectores u_1 y u_2 de A asociados a λ_1 y λ_2. Tomamos

$$B = \left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|} \right\}$$

como una base ortonormal.

Paso 3. Sea $P = M(B, B_0)$ la matriz de cambio de base de B a B_0. Como A es diagonalizable (Teorema espectral) entonces tenemos que

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{donde} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} PDP^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si (x', y') son las nuevas coordenadas de un punto de la cónica C en la base B, se tiene:

$$M(B, B_0) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} PD \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Por otra parte sabemos que

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \left(P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t P^t$$

y puesto que $P^t = P^{-1}$ (P es ortogonal, $\det(P) = 1$), obtenemos que

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Así que

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2.$$

Paso 4. La ecuación ($\bigstar$) se transforma ahora en

$$(\bigstar)' \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \begin{pmatrix} 2a_{01} & 2a_{02} \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_{00} = 0$$

es decir,

$$(\bigstar)' \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + a_{00} = 0$$

donde

$$\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

6.8. Cómo obtener la ecuación reducida

Caso I. $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 > 0$.

La ecuación $(\bigstar)'$ puede escribirse de la forma

$$\lambda_1\left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + a_{00} - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0$$

la traslación dada por

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \\ y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \end{cases}$$

transforma la cónica en

$$\lambda_1 {x''}^2 + \lambda_2 {y''}^2 = -a_{00} + \frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2}.$$

Pongamos

$$\delta = -a_{00} + \frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2}.$$

Por lo tanto

$$(\bigstar)'' \quad \lambda_1 {x''}^2 + \lambda_2 {y''}^2 = \delta.$$

1. Si $\delta \neq 0$, se tienen los siguientes casos:

   1.1. $\mathrm{sig}(\lambda_1) = \mathrm{sig}(\lambda_2) = \mathrm{sig}(\delta)$.
   En este caso la cónica es una ***elipse***, de ecuación reducida:

   $$\frac{{x''}^2}{a^2} + \frac{{y''}^2}{b^2} = 1$$

   donde $a^2 = \frac{\delta}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{\delta}{\lambda_2}$.

   1.2. $\mathrm{sig}(\lambda_1) = \mathrm{sig}(\lambda_2) \neq \mathrm{sig}(\delta)$.
   En este caso la cónica es una ***elipse imaginaria***, no tiene ningún punto real puesto que la igualdad $(\bigstar)''$ es imposible.

2. Si $\delta = 0$,

   $$(\bigstar)'' \quad \lambda_1 {x''}^2 + \lambda_2 {y''}^2 = 0.$$

   Como $\mathrm{sig}(\lambda_1) = \mathrm{sig}(\lambda_2)$, la cónica está formada por ***dos rectas imaginarias que se cortan en un punto real*** $(x'', y'') = (0, 0)$.

Caso II. $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 < 0$. Tenemos que

$$(\bigstar)'' \quad \lambda_1 {x''}^2 + \lambda_2 {y''}^2 = \delta.$$

1. Si $\delta \neq 0$. La cónica es una ***hipérbola***. Si $a^2 = \frac{\delta}{\lambda_1}$ y $b^2 = -\frac{\delta}{\lambda_2}$ la ecuación de cónica es:

   $$\frac{{x''}^2}{a^2} - \frac{{y''}^2}{b^2} = 1.$$

2. Si $\delta = 0$. Como $\mathrm{sig}(\lambda_1) \neq \mathrm{sig}(\lambda_2)$, podemos tomar $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (sin pérdida de generalidad). Se tiene que la cónica es ***dos rectas que se cortan en un punto***:

   $$a^2{x''}^2 - b^2{y''}^2 = \big(ax'' + by''\big)\big(ax'' - by''\big) = 0$$

   donde $a^2 = \lambda_1$ y $b^2 = -\lambda_2$. Las ecuaciones de la rectas son:

   $$ax'' + by'' = 0 \quad \text{y} \quad ax'' - by'' = 0.$$

Caso III. $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 = 0$. Podemos tomar $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ (sin pérdida de generalidad), (nótese que los dos autovalores no pueden ser nulos a la vez, ya que entonces $A = 0$).
La ecuación $(\bigstar)$ se transforma ahora en

$$(\bigstar)'' \quad \lambda_2\left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_1x' + a_{00} - \frac{b_2}{\lambda_2} = 0.$$

Pongamos

$$\rho = a_{00} - \frac{b_2}{\lambda_2}.$$

Se pueden presentar los siguientes casos:

1. Si $b_1 \neq 0$, entonces la cónica es una ***parábola***. Poniendo

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{\rho}{2b_1} \\ \\ y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \end{cases}$$

se obtiene la ecuación

$$\lambda_2 {y''}^2 + 2b_1 x'' = 0.$$

2. Si $b_1 = 0$, se tiene:

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + \rho = 0.$$

Hacemos la traslación

$$\begin{cases} x'' = x' \\ \\ y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \end{cases}$$

obtenemos:

$$\lambda_2 {y''}^2 + \rho = 0.$$

Tenemos los siguientes casos:

2.1. Si $\rho = 0$, la cónica es la ***recta doble*** ${y''}^2 = 0$.

2.2. Si $\rho \neq 0$ y $\mathrm{sig}(\rho) \neq \mathrm{sig}(\lambda_2)$, la cónica está formada por ***dos rectas paralelas***:

$$(y'' - a)(y'' + a) = 0$$

siendo $a^2 = -\frac{\rho}{\lambda_2}$.

2.3. Si $\rho \neq 0$ y $\mathrm{sig}(\rho) = \mathrm{sig}(\lambda_2)$, la cónica está formada por ***dos rectas paralelas imaginarias***, no tiene puntos reales.

Ejemplo 6.8.1. Estudiar la sección cónica

$$x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0.$$

La ecuación matricial es:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 9 = 0.$$

Empezamos diagonalizando la matriz asociada

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda - 16 = 0$$

que tiene valores propios $\lambda = 2$ y $\lambda = -8$.

Para obtener la base ortonormal de vectores propios calculamos:

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego puede tomarse $v = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ como vector propio para $\lambda = -8$ y

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

nos da $u = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ como vector propio para $\lambda = 2$.

Por tanto

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Así que la ecuación de la cónica quedará:

$$-8(x')^2 + 2(y')^2 + \begin{pmatrix} 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 9 = 0.$$

Es decir,

$$-8(x')^2 + 2(y')^2 + \frac{16}{\sqrt{10}}x' - \frac{28}{\sqrt{10}}y' + 9 = 0.$$

Ahora tenemos que realizar una traslación para eliminar los términos de grado 1; completando cuadros:

$$\begin{aligned} -8\left((x')^2 - \frac{2}{\sqrt{10}}x'\right) &= -8\left(\left(x' - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{1}{10}\right) \\ &= -8(x'')^2 + \frac{8}{10} \end{aligned}$$

donde

$$x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$2\left((y')^2 - \frac{14}{\sqrt{10}}y'\right) = 2\left(\left(y' - \frac{7}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{49}{10}\right)$$
$$= 2(y'')^2 - \frac{98}{10}$$

con

$$y'' = y' - \frac{7}{\sqrt{10}}.$$

Sustituyendo en la ecuación queda

$$-8(x'')^2 + 2(y'')^2 + \frac{8}{10} - \frac{98}{10} + 9 = 0$$

que resulta

$$4(x'')^2 - (y'')^2 = 0$$

o equivalentemente

$$(2x'' + y'')(2x'' - y'') = 0$$

por lo que se trata de un par de rectas que cortan.

6.9. Clasificación de las cónicas

Sea C la cónica de ecuación

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0.$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Llamamos

$$\gamma_1 = \det(M), \qquad \gamma_2 = \det(A), \qquad \gamma_3 = a_{11} + a_{22}$$

1. $\gamma_1 \neq 0$
   - 1.1. $\gamma_2 > 0$, elipse
     - 1.1.1. $\mathrm{sig}(\gamma_3) = \mathrm{sig}(\gamma_1)$, elipse imaginaria
     - 1.1.2. $\mathrm{sig}(\gamma_3) \neq \mathrm{sig}(\gamma_1)$, elipse real
   - 1.2. $\gamma_2 < 0$, hipérbola
   - 1.3. $\gamma_2 = 0$, parábola

2. $\gamma_1 = 0$

   2.1. $\gamma_2 \neq 0$

      2.1.1. $\gamma_2 > 0$, un punto

      2.1.2. $\gamma_2 < 0$, dos rectas que se cortan

   2.2. $\gamma_2 = 0$, dos rectas paralelas.

6.10. Cuádricas

Definición 6.10.1. *Llamamos* ***cuádrica*** *al lugar geométrico de los puntos de* $\mathbb{R}^3$ *que verifican una ecuación general de segundo grado entres variables:*

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 & \\ + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz & \\ + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} &= 0. \end{aligned}$$

que puede ser expresada en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Denotamos

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2a_{01} & 2a_{02} & 2a_{03} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

se tiene:

$$X^t AX + BX + a_{00} = 0.$$

6.11. Clasificación de las cuádricas

Consideramos los números:

$$I_4 = \det(M), \qquad I_3 = \det(A)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_1 = \operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Caso I. $I_4 \neq 0$.

1. Si $I_3 \neq 0$

   1.1. $I_3 I_1 > 0$ e $I_2 > 0$

   1.1.1 $I_4 > 0$ Elipsoide imaginario

   1.1.2 $I_4 < 0$ Elipsoide real

   1.2. $I_3 I_1 \geq 0$ e $I_2 > 0$ ó $I_3 I_1 < 0$

   1.2.1. $I_4 > 0$ Hiperboloide de una hoja

   1.2.2. $I_4 < 0$ Hiperboloide de dos hojas

2. Si $I_3 = 0$

   2.1. $I_4 > 0$ Paraboloide hiperbólico

   2.2. $I_4 < 0$ Paraboloide elíptico

Caso II. $I_4 = 0$.

1. $I_3 \neq 0$

   1.1. $I_3 I_1 > 0$, $I_2 > 0$ Cono imaginario

   1.2. Otro caso. Cono real

2. $I_3 = 0$ Cilindro o un par de planos

Ejemplo 6.11.1. Para la cuádrica

$$2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$$

tenemos

$$I_4 = \begin{vmatrix} -31 & -3 & 5 & 1/2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$I_1 = -31$$

Puesto que $I_4 > 0$ e I_3, se trata de un paraboloide hiperbólico.

Capítulo 7

Funciones

7.1. Funciones reales de variable real

Definición 7.1.1. *Una función se dice* ***real de variable real*** *si tanto los valores que toma como la variable, son números reales.*

Observación 7.1.2. *Como solo vamos a considerar funciones de este tipo, a partir de ahora diremos simplemente* ***funciones****.*

Ejemplo 7.1.3.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & 2x-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & -x^2+9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \frac{1}{x} \end{array}$$

Para saber qué valor toman en un punto dado, basta sustituir y operar. Así,

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$
$$g(1) = -1^2 + 9 = -1 + 9 = 8$$
$$h(-7) = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}$$

Definición 7.1.4. *Llamamos **dominio** de una función f al conjunto de números reales en los que está definida, y lo denotaremos por $D(f)$.*

Ejemplo 7.1.5.

1) El dominio de $\ln(x)$ (logaritmo neperiano) es el intervalo $(0, +\infty)$.

2) El dominio de $h(x) = \frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.

3) El dominio de $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ es

$$\mathbb{R} - \Big\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\Big(\frac{\pi}{2} + \pi\Big), \pm\Big(\frac{\pi}{2} + 2\pi\Big), \dots \Big\}.$$

7.2. Funciones definidas "a trozos"

Muchas veces las funciones vienen definidas "a trozos", como la del ejemplo siguiente.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ -x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para saber qué valor toma una función como esta en un punto x_0 dado, lo primero que debemos hacer es determinar en qué "trozo" del dominio se encuentra.

Por ejemplo, calculemos $f(3), f(1), f(-7)$.
Como $3 > 1$, el punto 3 está en el tercer "trozo" y así

$$f(3) = -3 + 3 = 0$$

El segundo punto, $x = 1$, pertenece al segundo "trozo", y por tanto,

$$f(1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Finalmente, $-7 \leq \frac{1}{2}$, luego

$$f(-7) = (-7)^2 = 49.$$

7.3. Representación gráfica de una función

Definición 7.3.1. *La representación gráfica de la función f, es el dibujo que se obtiene al unir los puntos representados por los pares $(x, f(x))$.*

Ejemplo 7.3.2. $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x^2 + 9$, $h(x) = \frac{1}{x}$

Ejemplo 7.3.3.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ -x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 7.3.4.

$$v(t) = \begin{cases} gt & \text{si } 0 \leq t \leq t_0 \\ \\ v_f + ce^{-\beta t} & \text{si } t \geq t_0 \end{cases}$$

donde v_f, c y β son tales que $v(t_0) = gt_0 = v_f + ce^{-\beta t_0}$.

Esta función puede representar la velocidad a la que un paracaidista que se lanza en el instante $t = 0$ y abre su paracaídas en el instante $t = t_0$. Hasta el instante $t = t_0$, despreciamos el rozamiento del aire. Por tanto, cae con un movimiento uniformemente acelerado, con la aceleración de la gravedad g.

Cuando abre el paracaídas, sí que debemos contar con el rozamiento del aire (es vital). Se puede ver que la función $v(t)$ nos da una razonable aproximación de lo que sucede. Nos dice que la velocidad disminuye (se produce una frenada), pero no disminuye más allá de un cierto valor v_f (velocidad final), al que se aproxima conforme transcurre el tiempo.

7.4. Límites

Dado una función f, si cogemos un punto x_0 de la recta y tomamos puntos x cada vez más próximos a x_0, podemos preguntarnos qué ocurre con los valores de $f(x)$, *¿se acercan a algún número*?

Alguien podría contestar: "*Pues claro, se acerca a* $f(x_0)$".

Para muchas funciones esta respuesta es correcta, pero para otras, no. Basta que miremos la gráfica de la función f para observar que esto no ocurre en el punto $x_0 = \frac{1}{2}$, donde:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ -x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si nos acercamos a $x_0 = \frac{1}{2}$ por puntos $x > \frac{1}{2}$, los valores $f(x)$ no se aproximan a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, sino a 1. ¿Será entonces 1, en vez de $f\left(\frac{1}{2}\right)$, el número que buscamos? Tampoco, pues si nos acercamos a $\frac{1}{2}$ por puntos $x < \frac{1}{2}$, los valores $f(x)$ no se acercan a 1.

En resumen, al aproximarnos a $\frac{1}{2}$, los valores de f no se aceran ni a $f\left(\frac{1}{2}\right)$, ni a ningún otro número.

Definición 7.4.1 (Informal). *Decimos que un número l es el **límite de** f **en** x_0, si al tomar puntos x cada vez más próximos a x_0 (por su izquierda y derecha), pero distintos de x_0, los valores de $f(x)$ se aproximan a l.*

*En este caso decimos que $f(x)$ **tiende a** l **cuando** x **tiende a** x_0, y escribimos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad o \quad \text{“}f(x) \to l \text{ cuando } x \to x_0\text{”}$$

Definición 7.4.2. *Sea f una función y $x_0 \in \mathbb{R}$. Sea l un número. Decimos que l es el **límite de** f **en** x_0, y escribimos $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que,*

$$si \;\; x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad entonces \;\; f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

Nota 7.4.3. *Cuando hablamos del límite de una función en $x_0 \in \mathbb{R}$, se siempre tomamos puntos distintos de x_0, por tanto, **el valor de la función en el punto** x_0 **no tiene ninguna importancia**. De hecho, en muchos casos, la función ni siquiera está definida en este punto.*

Ejemplo 7.4.4. La función $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ no está definida en 0, pero sí tiene límite en 0. Veremos más adelante que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Observación 7.4.5. *Algunas funciones tienen un comportamiento diferente si nos acercamos al punto x_0 por su derecha $x > x_0$ o por su izquierda $x < x_0$. Incluso en algunos casos solamente es posible aproximar por un lado, pues por el otro no tiene sentido.*

Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x}$, carece de sentido acercarse a $x_0 = 0$ por la izquierda ya que la función no está definida por valores negativos.

Definición 7.4.6. *El número l es el **límite por la derecha de** $f(x)$ **en** x_0, si al tomar puntos x, $x > x_0$, cada vez más próximos a x_0, los valores $f(x)$ se aproximan a l. En este caso escribimos*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \quad o \quad \text{“}f(x) \to l \text{ cuando } x \to x_0^+\text{”} \iff$$
$$\forall\, \varepsilon > 0, \; \exists\, \delta > 0 : \quad si\; x \in (x_0, x_0 + \delta), \;\; entones \;\; f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

*Análogamente hablamos de **límite por la izquierda**, que denotamos:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \quad o \quad \text{“}f(x) \to l \text{ cuando } x \to x_0^-\text{”} \iff$$
$$\forall\, \varepsilon > 0, \; \exists\, \delta > 0 : \quad si\; x \in (x_0 - \delta, x_0), \;\; entones \;\; f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

Ejemplo 7.4.7.

Definición 7.4.8. *Una función f tiene límite en un punto x_0 si y sólo si en dicho punto existen los límites laterales* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *y* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ *y coinciden. En este caso:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

O, expresado de forma abreviada:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l.$$

Ejemplo 7.4.9. Tomemos la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Esta función está definida para todo número real x excepto para $x_0 = 0$. Observemos que en realidad se trata de la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Por tanto, para cualquier número real c, $c \neq 0$, tenemos

$$\lim_{x\to c} = f(c).$$

En cambio, en el punto 0,

$$\lim_{x\to 0^-} = -1 \neq \lim_{x\to 0^+} = 1.$$

Así que la función f no tiene límite en el punto 0.

7.5. Límites en el infinito

Definición 7.5.1. *Decimos que un número l es* ***límite de la función*** *$f(x)$* ***cuando x tiende a*** *$+\infty$, si al considerar números x cada vez más grandes, los valores de $f(x)$ se aproximan a l. Es decir,*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, N \in \mathbb{R}^{+}(\textit{tan grande}): \quad \textit{si } x > N, \quad \textit{entonces} \quad f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

En este caso, escribimos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad o \quad \text{“}f(x) \to l \textit{ cuando } x \to +\infty\text{”}$$

Análogamente hablamos de ***límite por la izquierda****, que denotamos:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \quad o \quad \text{“}f(x) \to l \textit{ cuando } x \to -\infty\text{”} \iff$$

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, N \in \mathbb{R}^{+}(\textit{tan grande}):\ x < -N \Longrightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

Ejemplo 7.5.2. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$

Tanto si nos fijamos en la gráfica, como si vamos dando valores a x, es claro que a medida que x aumenta, su inverso $\frac{1}{x}$ se hace más pequeño, tan pequeño como queramos, es decir:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ocurre lo mismo cuando x se hace muy grande en valor absoluto pero negativo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

7.6. Límites infinitos

Definición 7.6.1. *Decimos que una función $f(x)$ tiene* ***límite infinito*** *($+\infty$ o $-\infty$) cuando nos acercamos a un punto x_0 por uno de sus lados, o por ambos, o cuando hacemos tender x a $+\infty$ o a $-\infty$. Escribimos*

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty) \iff \forall\, M > 0,\ \exists\, \delta > 0 :\ f(x) > M$

  $\big(f(x) < -M\big)$ *cuando* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty\ (-\infty) \iff \forall M>0,\ \exists\,\delta>0:\ f(x)>M$

  $\big(f(x)<-M\big)$ *cuando* $x\in(x_0,x_0+\delta)$.

- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty\ (-\infty) \iff \forall\, M>0,\ \exists\,\delta>0:\ f(x)>M$

  $\big(f(x)<-M\big)$ *cuando* $x\in(x_0-\delta,x_0)$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} f(x) = +\infty\ (-\infty) \iff \forall\, M>0,\ \exists\,N>0:\ f(x)>M$

  $\big(f(x)<-M\big)$ *cuando* $x>N(x<-N)$.

Ejemplo 7.6.2. Sea la función $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

Ejemplos 7.6.3.

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty \qquad\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

2) $f(x) = 2x - 1$

$$\lim_{x \to +\infty} (2x - 1) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} (2x - 1) = -\infty$$

3) $f(x) = -x^2 + 9$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^2 + 9) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} (-x^2 + 9) = -\infty$$

7.7. Operaciones con límites

Proposición 7.7.1. *Sean f y g dos funciones tales que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad y \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}.$$

Entonces:

$$1)\quad \lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)=l+l'$$

$$2)\quad \lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}g(x)=l-l'$$

$$3)\quad \lim_{x\to x_0}\alpha f(x)=\alpha\lim_{x\to x_0}f(x)=\alpha l,\ \ \textit{donde } \alpha\in\mathbb{R}$$

$$4)\quad \lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=l\cdot l'$$

$$5)\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{l}{l'},\ \ \textit{si } l'\neq 0.$$

Observación 7.7.2. *En el resultado anterior, tanto x_0 como l y l' pueden ser números reales o también $+\infty$ o $-\infty$, solamente hay que tener cuidado con las "**indeterminaciones**":*

$$+\infty-\infty,\ 0\cdot(\pm\infty),\ \pm\frac{\infty}{\infty},\ \frac{l}{0}\ \textit{con } l\neq 0,\ \frac{0}{0}.$$

Ejemplo 7.7.3. Calcular:

$$1)\ \lim_{x\to 2}(3x^2-2x+9),\qquad 2)\ \lim_{x\to -1}\frac{6x^2+3x-43}{x+3}$$

Comencemos por el primero. Gracias a los propiedades anteriores tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(3x^2-2x+9)&=\lim_{x\to 2}3x^2-\lim_{x\to 2}2x+\lim_{x\to 2}9\\ &=3\lim_{x\to 2}x^2-2\lim_{x\to 2}x+9=3\cdot 2^2-2\cdot 2+9=17.\end{aligned}$$

El segundo es análogo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{6x^2+3x-43}{x+3}&=\frac{\lim\limits_{x\to -1}6x^2+3x-43}{\lim\limits_{x\to -1}x+3}\\ &=\frac{6\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)-43}{(-1)+3}=\frac{-40}{2}=-20.\end{aligned}$$

Los límites del ejemplo anterior son una pequeña muestra de lo ocurre con los polinomios. En general:

Proposición 7.7.4. *Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y c es un número real, entonces:*

$$\lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} \quad \textit{siempre que} \quad q(c) \neq 0.$$

En particular, $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$.

Observación 7.7.5. *Es un error común "*despejar*" $+\infty$ en la igualdad* $\frac{1}{+\infty} = 0$. ***No es correcto****.*

$$\frac{1}{+\infty} \neq 0 \ \ y \ \ \frac{1}{0} \neq +\infty.$$

La razón está en que $\frac{1}{x}$ es muy grande si x si es muy pequeño, pero positivo, y es muy grande en valor absoluto, pero con signo negativo, si x es muy pequeño y negativo.

Con más precisión, lo que en realidad se tiene es:

Proposición 7.7.6.

- $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to c} f(x) = l > 0 \\ \\ \lim_{x\to c} g(x) = 0 \\ \\ g(x) > 0 \ \textit{para } x \textit{ próximo a } c \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

- $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to c} f(x) = l > 0 \\ \\ \lim_{x\to c} g(x) = 0 \\ \\ g(x) < 0 \ \textit{para } x \textit{ próximo a } c \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

Ejemplo 7.7.7. Estudiar

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{(x-2)^2} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2} \frac{3}{(x+1)(x-2)}$$

El límite $\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{(x-2)^2}$ es de la forma $\frac{l}{0}$, con $l = 5 > 0$, pero además observamos que el denominador $(x-2)^2$ es siempre positivo, luego:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{(x-2)^2} = +\infty.$$

En cuanto al segundo límite, es de la forma $\frac{l}{0}$, con $l = 3 > 0$, pero ahora el denominador $(x+1)(x-2)$ no siempre es positivo.

Observamos que si x es próximo a 2 y $x > 2$ entonces:

$$x + 1 > 0 \text{ y } \ x - 2 > 0 \Longrightarrow (x+1)(x-2) > 0$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{(x+1)(x-2)} = +\infty$$

En cambio, si x es próximo a 2 y $x < 2$ entonces:

$$x + 1 > 0 \text{ y } \ x - 2 < 0 \Longrightarrow (x+1)(x-2) < 0$$

Con lo cual,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{(x+1)(x-2)} = -\infty$$

Naturalmente, puesto que los límites laterales son distintos deducimos que no existe

$$\lim_{x \to 2} \frac{3}{(x+1)(x-2)}.$$

Lo que acabamos de ver en el ejemplo anterior para dos límites concretos de cocientes de polinomios, lo podemos expresar con más generalidad de la siguiente forma:

Proposición 7.7.8. *Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y c es un número real, entonces:*

$$\lim_{x \to c} \left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| = +\infty \quad \textit{si} \quad q(c) = 0 \quad \textit{y} \quad p(c) \neq 0.$$

¡Ojo! si en el límite anterior queremos quitar el valor absoluto, la cosa se complica, tal como hemos comprobado en el Ejemplo 7.7.7. Tenemos que cuidar los signos y quizás distinguir entre límite por la derecha y límite por la izquierda.

Observación 7.7.9. *Hemos estudiado el límite de un cociente de polinomios $\frac{p(x)}{q(x)}$ en un punto $c \in \mathbb{R}$ cuando*

$$\begin{cases} 1) \quad q(c) \neq 0 \\ \\ 2) \quad q(c) = 0 \ \ \textit{y} \ \ p(c) \neq 0. \end{cases}$$

Nos queda el caso $p(c) = q(c) = 0$, es decir, la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Pero este caso se reduce inmediatamente a los anteriores.

Como estamos trabajando con polinomios, si $p(c) = q(c) = 0$ tanto $p(x)$ como $q(x)$ son divisibles por $(x - c)$, o, si es posible, por $(x - c)^2$, $(x - c)^3$, etc. (ver el ejemplo siguiente).

Ejemplo 7.7.10. Estudiar
$$\lim_{x\to 2} \frac{3x-6}{x^3-3x^2+4}.$$
Tenemos límite de la forma $\frac{0}{0}$.

Como 2 es raíz del numerador $3x-6$, este polinomio es divisible entre $x-2$. Así, obtenemos:
$$3x-6 = 3(x-2).$$

Por otra parte, 2 también es raíz del denominado $x^3 - 3x^2 + 4$, por tanto $x - 2$ divide este polinomio. Así que,
$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)^2(x+1).$$

Luego

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x-6}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)^2(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{3}{(x-2)(x+1)}$$

Observamos que si x es próximo a 2 y $x > 2$ entonces:
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x-6}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{3}{(x-2)(x+1)} = +\infty$$

En cambio, si x es próximo a 2 y $x < 2$ entonces:
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x-6}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{3}{(x-2)(x+1)} = -\infty$$

Nota 7.7.11. *Una vez que hemos estudiado el límite de un* ***cociente de polinomios*** *en un número real c cualquiera, para completar nuestro trabajo es natural preguntarse qué sucede en $+\infty$ y en $-\infty$ cuando el límite de la forma $\pm\frac{\infty}{\infty}$.*

Para responder a esta pregunta, hay un truco que usaremos muy a menudo: ***dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparece en el denominador****.*

Ejemplo 7.7.12. Calcular:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-3}{2-x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{6x^2+3x-4}{x^2+3}$$

Tenemos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\left(\frac{3}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right)-1} = \frac{-\infty-0}{0-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+3x-4}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6+\left(\frac{3}{x}\right)-\left(\frac{4}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{6+0-0}{1+0} = 6$$

Ejemplo 7.7.13. Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(3x^4-2x^3+9\right), \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(5x^3-4x\right)$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \left(3x^4-2x^3+9\right) &= \lim_{x\to+\infty} x^4\left(3-\left(\frac{2}{x}\right)+\left(\frac{9}{x^4}\right)\right) \\ &= (+\infty)^4(3-0+0) = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(5x^3-4x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(5-\left(\frac{4}{x^2}\right)\right) = (-\infty)^3(5-0) = -\infty$$

Observación 7.7.14. *No se deben aprender como una "lista de casos", sino más bien interesa entender lo que ocurre, para ser capaz en cada situación de resolver el problema.*

7.8. Límites de funciones y límites de sucesiones

7.8.1. Límite de una sucesión

Definición 7.8.1. *Decimos que el **límite** de una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es el número $l \in \mathbb{R}$ si los términos de dicha sucesión se van aproximando a l.*

*También decimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ **tiende a** l o $(x_n)_{n\geq 1}$ **converge a** l. Y lo escribimos así*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l.$$

Definición 7.8.2. *Se dice que el número $l \in \mathbb{R}$ es el límite de la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ se tiene que*

$$|x_n - l| < \varepsilon.$$

7.8.2. Relación entre el límite de una función y de una sucesión

Cuando $\lim_{x\to c} f(x) = l$ sabemos que al aproximarnos a c por puntos $x \neq c$, $f(x)$ se aproxima a l.

Imaginemos que nos aproximamos a c a través de una sucesión, es decir, que tomamos una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ convergente a c, con $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces los valores $f(x_n)$ se aproximarán a l, esto es la sucesión $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$ convergerá a l.

Proposición 7.8.3.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to c} f(x) = l \\[2em] \lim\limits_{n\to +\infty} x_n = c \\[2em] \textit{donde } x_n \neq c \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to c} f(x) = l.$$

En este resultado tanto c como l pueden ser números reales o $\pm\infty$.

Observación 7.8.4. *Cuando consideramos límites por la derecha o por la izquierda el resultado anterior sigue siendo válido con tal de que hagamos la modificación obvia.*

7.8.3. Una aplicación: Probar que no existe $\lim\limits_{x\to c} f(x)$

Ejemplos 7.8.5. Compruebe que no existen los límites

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \cos(x).$$

- En el primer límite observamos que la gráfica de la función tiene infinitas oscilaciones cerca del punto 0.

La idea entonces es tomar dos sucesiones (x_n) e (y_n), lo más sencillas posible, y de manera que:

1) Ambas tiendan a 0 y sean de términos positivos.

2) Sus imágines por la función f sean lo más distintas posible para que tengamos

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \neq \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{y_n}\right).$$

Las sucesiones $(x_n) = \left(\frac{1}{n\pi}\right)$ e $(y_n) = \left(\frac{2}{\pi+4n\pi}\right)$ satisfacen plenamente los requisitos anteriores. Las dos son sucesiones de términos positivos y convergen a 0. En cambio,

$$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(n\pi) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Por tanto, no existe $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

De forma análoga, poniendo un signo menos a las sucesiones anteriores, podemos probar que no existe $\lim\limits_{x\to 0^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

► Para comprobar que no existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x)$, nos interesa encontrar una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de forma que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ y tal que $\big(\cos(x_n)\big)_n$ no tenga límite. Basta tomar $(x_n)_{n\geq 1} = (n\pi)_{n\geq 1}$

Claramente $\lim\limits_{n\to+\infty} n\pi = +\infty$ pero

$$\big(\cos(x_n)\big)_{n\geq 1} = \big(\cos(n\pi)\big)_{n\geq 1} = \big((-1)^n\big)_{n\geq 1}$$

no tiene límite.

7.9. Límites y desigualdades

- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to c} f(x) = l \\[2ex] \lim\limits_{x\to c} g(x) = l' \\[2ex] f(x) \le g(x) \text{ para todo } x \ne c \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad l \le l'$$

- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to c} f(x) = l \\[2ex] f(x) \le b \text{ para todo } x \ne c \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad l \le b$$

- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to c} f(x) = l \\[2ex] \lim\limits_{x\to c} h(x) = l \\[2ex] f(x) \le g(x) \le h(x) \text{ para todo } x \ne c \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = l$$

  (Criterio del sandwich)

- $$\left.\begin{array}{l} |f(x)| \le g(x) \text{ para todo } x \ne c \\[2ex] \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$$

7.10. Algunos límites especiales

- $\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ y $\lim_{x\to 0^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existen
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$
- $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

Capítulo 8

Continuidad

8.1. ¿Qué es la continuidad?

Nuestro interés se centra en cómo se comporta una función $f(x)$ cuando la variable x está cerca un punto dado x_0.

Definición 8.1.1.

1) *Dada una función f y un punto x_0 de su dominio, decimos que f es* ***continua en*** *x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

2) *Decimos que f es* ***continua en un conjunto****, si es continua en todos los puntos de ese conjunto.*

Ejemplo 8.1.2. Las funciones $f(x) = x^7 - 3x + 5$, $g(x) = \frac{1}{x}$ y $h(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$, son continuas. Sus gráficas son las siguientes:

Nota 8.1.3. *Cuando se dice que una función es continua, sin precisar más, se entiende que es* ***continua en todo su dominio****.*

Observación 8.1.4. *Para la existencia de límite de f en c,* ***no influye para nada el valor de*** *$f(c)$. De hecho, ni siquiera hace falta que esté definida en dicho punto (por ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$ y $c = 0$). Sin embrago, para la continuidad la cosa cambia completamente:* ***es fundamental el valor*** *$f(c)$.*

Proposición 8.1.5. *Para que f sea continua en c se tiene que cumplir las tres condiciones siguientes:*

1) *Que f esté definida en c.*

2) *Que exista $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ y que sea finito.*

3) *Que el límite anterior sea $f(c)$: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.*

Ejemplo 8.1.6. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ -x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función está definida en todo la recta real y es continua en cualquier punto salvo en $\frac{1}{2}$, pues:

1) Si $c \neq \frac{1}{2}$, se cumple $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

2) No existe $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$, puesto que

$$\left(\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = 1 \right) \neq \left(\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \frac{1}{4} \right).$$

Definición 8.1.7 (Informal). *Una función es continua en un intervalo si podemos dibujar su gráfica en ese intervalo "****sin levantar el lápiz del papel****".*

Nota 8.1.8. *Otro punto de vista que nos puede ayudar a entender el significado de la continuidad es el siguiente:*

Supongamos que f es una función cuya variable t es la temperatura (o cualquier otra magnitud, como, la longitud, presión, etc.).

***Y supongamos que queremos conocer** $f(t_0)$**, donde** t_0 **es la temperatura en un cierto instante**.*

Naturalmente lo primero que tenemos que hacer es medir dicha temperatura, pero esto nos enfrenta con el problema de toda medida está sujeta a error.

***En otras palabras, para nosotros el valor exacto de** t_0 **es sencillamente desconocido**.*

Lo único que sabemos es que el resultado de la medición es un cierto valor t que más o menos se aproxima a t_0.

***Como consecuencia, en vez de obtener** $f(t_0)$**, obtenemos** $f(t)$. Esperemos que si hemos cometido un error pequeño en la medición (t es próximo a t_0), obtengamos un error pequeño en el resultado $\big(f(t)$ es próximo a $f(t_0)\big)$.*

***Esto es precisamente lo que sucede cuando la función es continua en** t_0.*

Ejemplos 8.1.9.

1) Dada la función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ (para $x \neq 3$),¿podemos definir $f(3)$ de manera que la función resultante sea continua?

   Desde luego podemos dar a $f(3)$ cualquier valor, pero solo hay una forma de conseguir que f sea continua en 3. Se debe cumplir:

$$f(3) = \lim_{x\to 3} f(x)$$

   Ahora bien,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

   Así la función

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

   es continua en 3.

   Por otra parte, la función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ es continua en su dominio (es decir, en todo número x, $x \neq 3$) por ser una función racional.

   Por tanto $f_0(x)$ es continua en toda la recta real.

2) Hacemos lo mismo con la función $g(x) = \frac{1}{x}$.

   Tenemos que el límite
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$
   no existe, luego no es posible definir esta función en 0 de manera que la función resultante sea continua en dicho punto.

Como la continuidad viene definida mediante límite de funciones y los límites de funciones están relacionados con las *sucesiones convergentes* (sección 1.8 del capítulo de Funciones), tenemos una conexión clara entre continuidad y sucesiones. Queda expresada de la siguiente forma:

Proposición 8.1.10.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c \\ \\ f \textit{ continua en } c \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to+\infty} x_n\Big) = f(c).$$

8.2. Operaciones de funciones continuas

Proposición 8.2.1. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en x_0 y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces las funciones $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $\alpha f(x)$ y $f(x) \cdot g(x)$ son continuas en x_0. La función $\frac{f(x)}{g(x)}$ también es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.*

Proposición 8.2.2. *Si f es continua en x_0 y g continua en $f(x_0)$, entonces $gof(x) = g\big(f(x)\big)$ es continua en x_0.*

Observación 8.2.3. *Las funciones que resultan mediante suma, producto, composición, etc., de los polinomios, funciones racionales, trigonométricas, etc., son continuas.*

Ejemplo 8.2.4. Podemos garantizar inmediatamente que

$$\frac{7\sin(x^2+1) - \sqrt{1+x^2}}{x^3 e^{x^2+3\cos(x)}} \qquad \text{o} \qquad \ln\big(x^3\cos^2(x+7)\big)$$

son continuas.

Quizás no sea tan inmediato cuáles son sus dominios, pero tampoco es difícil dar una respuesta: la primera está definida en toda la recta real excepto en $x = 0$, y la segunda solamente en los números reales positivos en los que no se anula $\cos(x+7)$.

8.3. Continuidad de funciones definidas a trozos

Para estudiar la continuidad de las funciones definidas a trozos, lo que tenemos que cuidar son los puntos de "empalme" de los trozos.

Ejemplo 8.3.1. Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} |2x+1| & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{x^5-11x-10}{x+3} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- ⊙ Empecemos por el primer trozo. Si $c < 0$, tenemos

  $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} |2x+1| = f(c)$$

  Luego f es continua en c (un polinomio compuesto con la función valor absoluto).

- ⊙ ¿Qué sucede en el punto 0?

  Para los puntos menores que 0, la función f coincide con $|2x+1|$ y por tanto,

  $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} |2x+1| = 1.$$

  Por el otro lado tenemos

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{4-x^2} = 2$$

  En el punto 0 los límites laterales son distintos. Esto nos dice que la función no tiene límite en 0 y, por ello, que no es continua en dicho punto.

- ⊙ La función f es continua en $(0,2)$ (un polinomio compuesto con la función raíz cuadrada)

- ⊙ La función f es continua en $(2,+\infty)$ (función racional).

- ⊙ ¿Qué ocurre en el punto 2?

  $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$$

  $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^5-11x-10}{x+3} = \frac{2^5-11\cdot 2-10}{2+3} = 0$$

  Por tanto, en este caso sí existe el límite. Tenemos:

  $$\lim_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2)$$

  Por tanto la función es continua en este punto.

En resumen, hemos visto que la función es continua en todos los puntos de la recta real excepto en 0. Es decir, es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Ejemplo 8.3.2. Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Está claro que la función f es continua en x si $x \neq 0$. El único problema es estudiar qué ocurre en 0. Sabemos que

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Deducimos que f es continua en 0, por tanto es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$.

Ejemplo 8.3.3. Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La función f es continua en x si $x \neq 0$. El único problema es estudiar qué ocurre en 0. Pero ya vimos en el Ejemplo 1.8.5 del capítulo de funciones, que no existe $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Decimos que f no es continua en 0.

8.4. La continuidad y el cálculo de límites

Hasta ahora hemos utilizado los límites para estudiar la continuidad. Recíprocamente, la continuidad también puede ser una excelente herramienta para calcular límites.

Proposición 8.4.1.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to c} f(x) = l \\ \\ g \textit{ continua en } l \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to c} g\big(f(x)\big) = g\Big(\lim_{x \to c} f(x)\Big) = g(l).$$

(*el resultado también es válido si* $c = \pm\infty$).

Ejemplo 8.4.2. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{3x-2}{x+7}\pi\right)$.

Tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{3x-2}{x+7}\pi\right) = \sin\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{x+7}\pi\right) = \sin(3\pi) = 0.$$

Ejemplo 8.4.3. Calcular $\lim\limits_{x\to0} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$, sabiendo que $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Tenemos:

$$\lim_{x\to0} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(1) = 0.$$

Ejemplo 8.4.4. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}-x\sqrt{x}}$.

El límite es de la forma $\frac{1}{\infty-\infty}$, es decir tenemos una indeterminación en el denominador. Para evitarla, vamos a multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por el conjugado del denominador.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}-x\sqrt{x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x+1}+x\sqrt{x}}{(x\sqrt{x+1}-x\sqrt{x})(x\sqrt{x+1}+x\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x+1}+x\sqrt{x}}{x^2(x+1)-x^2x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x+1}+x\sqrt{x}}{x^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x}{x^2}}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}} \\
&= \sqrt{0+0} + \sqrt{0} = 0.
\end{aligned}$$

Observación 8.4.5. *Evidentemente, es esencial la existencia de límite, por ejemplo,* $\sin(+\infty)$ *no tiene sentido, pues no existe* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$*.*

Ejemplo 8.4.6. Calcular $\lim\limits_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$, $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x)$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg}(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg}(x)$.

Tenemos

- $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = 0$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \ln(0^+) = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg}(x) = \lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^- = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arc\,tg}(x) = \operatorname{arc\,tg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}.$

Esto es consecuencia del siguiente resultado general (c y l pueden ser $+\infty$ o $-\infty$).

Proposición 8.4.7. *Supongamos que l no está en el dominio de una cierta función g, pero que existe $\lim\limits_{y\to l} g(y)$.*

Denotemos $g(l) = \lim\limits_{y\to l} g(y)$. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to c} f(x) = l \\ &f(x) \neq l \text{ para } x \neq c \end{aligned}\right\} \implies \lim_{x\to c} g\big(f(x)\big) = g\Big(\lim_{x\to c} f(x)\Big) = g(l).$$

Ejemplo 8.4.8. Estudiar $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{x+7}}{x^2-1}\right)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\right) = \operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\right) = \operatorname{arc\,tg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Como los límites laterales son distintos, no existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{x+7}}{x^2-1}\right) &= \ln\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+7}}{x^2-1}\right) \\
&= \ln\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{7}{x^4}}}{1-\frac{1}{x^2}}\right) \\
&= \ln(0) = -\infty.
\end{aligned}
$$

Proposición 8.4.9.

$$
\left.\begin{array}{l}
\lim_{x\to c} f(x) = l > 0 \\[2ex]
\lim_{x\to c} h(x) = m
\end{array}\right\} \implies \lim_{x\to c} \big(f(x)\big)^{h(x)} = \Big(\lim_{x\to c} f(x)\Big)^{\lim_{x\to c} h(x)} = l^m.
$$

Ejemplo 8.4.10. Calcular $\lim_{x\to 1}(3-x^2)^{\cos(\pi x)}$ y $\lim_{x\to 0}(2x^2+5)^{\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}}$.

$$
\lim_{x\to 1}(3-x^2)^{\cos(\pi x)} = \Big(\lim_{x\to 1}(3-x^2)\Big)^{\lim_{x\to 1}\cos(\pi x)} = 2^{\cos(\pi)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}
$$

$$
\lim_{x\to 0}(2x^2+5)^{\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \Big(\lim_{x\to 0}(2x^2+5)\Big)^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}} = 5^{+\infty} = +\infty.
$$

8.5. Los “grandes teoremas” sobre continuidad

8.5.1. Teorema del máximo y del mínimo

Teorema 8.5.1 (Weierstrass). *Si f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, entonces f alcanza el máximo y el mínimo en $[a,b]$, es decir, existen x_1 y x_2 en $[a,b]$ tales que*

$$
\min_{y\in[a,b]} f(y) = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = \max_{y\in[a,b]} f(y)
$$

para todo x en $[a,b]$.

Ejemplo 8.5.2.

Observación 8.5.3. *Una función puede tener varios puntos en los que se alcance su máximo o su mínimo.*

Ejemplo 8.5.4. La función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \cos(x) \end{array}$$

alcanza su máximo en los puntos $x = 2k\pi$ y su mínimo en los puntos $x = k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

8.5.2. Teorema de acotación

Teorema 8.5.5. *Si f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces f está acotada en $[a, b]$, es decir, existe $M > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq M \quad \textit{para todo} \;\; x \in [a, b].$$

Geométricamente, el hecho de que una función, en valor absoluto, esté acotada por un número $M > 0$, se traduce en que su gráfica está entre las rectas $y = M$ e $y = -M$.

Ejemplo 8.5.6. Estudiar si la función

$$f(x) = \frac{\ln\big(\sin^2(x) + 1\big)}{x^2 - 9}$$

es acotada en los intervalos $[4,6]$, $(-2,2)$ y $(2,3)$.

Como $\sin^2(x)+1 \geq 1 > 0$ para cualquier número real x, entonces, $\ln\big(\sin^2(x)+1\big)$ está definida en toda la recta real. Por tanto, la función f es continua en todo su dominio $D(f) = \mathbb{R} - \{-3,3\}$.

- f es continua en $[4,6]$, y por el teorema de acotación está acotada en dicho intervalo.

- f es continua en $[-2,2]$, y por el teorema de acotación está acotada en dicho intervalo. Con mayor razón está acotada en $(-2,2)$, que es un subconjunto de $[-2,2]$.

- Aunque f es continua en $(2,3)$, para este intervalo no son válidos los argumentos anteriores, pues f no está definida en el intervalo $[2,3]$ (no olvidemos que no está definida en 3).

  Estudiemos el comportamiento de f al acercarnos a 3, es decir, estudiemos $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$:

  Tenemos
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \ln\big(\sin^2(x)+1\big) = \ln\big(\sin^2(3)+1\big) > 0 \\[2ex] \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2-9) = 0 \\[2ex] x^2-9 = (x-3)(x+3) < 0 \quad \text{para} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

  $$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{\ln\big(\sin^2(x)+1\big)}{x^2-9} = -\infty$$

  Por tanto, f toma valores arbitrariamente grandes en valor absoluto (y negativos) en el intervalo $(2,3)$ y así, no está acotada en dicho intervalo.

8.5.3. Teorema de los valores intermedios

Teorema 8.5.7. *Sea f una función continua en un intervalo I y sean a, b dos puntos de I. Supongamos $f(a) < f(b)$ y sea α un número tal que*

$$f(a) \leq \alpha \leq f(b).$$

Entonces existe un punto c entre a y b tal que $f(c) = \alpha$.

Informalmente, el Teorema nos dice que una función continua en un intervalo, cuando toma dos valores, toma todos los "intermedios". Su significado queda recogido en la figura siguiente:

Con un lenguaje geométrico más preciso, esto significa que si f es continua en un intervalo I, y a y b dos puntos de I, entonces cualquier recta horizontal entre $y = f(a)$ e $y = f(b)$ corta la gráfica de f en algún punto cuya abscisa está entre a y b.

Teorema 8.5.8 (Bolzano). *Sea f una función continua en un intervalo I y sean a, b dos puntos de I tales que $f(b) < 0 < f(a)$. Entonces existe un punto c entre a y b tal que $f(c) = 0$.*

Observación 8.5.9.

1) *Tanto en el Teorema de valores intermedios como en el de Bolzano, no se supone $a < b$.*

2) *Una forma de expresar que $f(b)$ es negativo y $f(a)$ es positivo es*

$$f(a)f(b) < 0$$

Ejemplo 8.5.10. Demostrar que la ecuación $x = \cos(x)$ tiene solución.

Resolver $x = \cos(x)$ es lo mismo que resolver $x - \cos(x) = 0$. Por tanto, si consideramos la función $f(x) = x - \cos(x)$, solo tenemos que garantizar que se anula en algún punto.

Desde luego f es continua en la recta real. Así, si encontramos puntos en los que f tome valores con distinto signo, por el Teorema de Bolzano, habremos terminado.

Observemos que $f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Luego f se anula en algún punto. Más todavía, podemos asegurar que f se anula en algún punto del intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ejemplo 8.5.11. Demostrar que $x^5 - 2x^2 - 3x - 7 = 0$ tiene solución.

Consideramos la función $f(x) = x^5 - 2x^2 - 3x - 7$, que es continua en todo la recta real (es un polinomio). Para ver que se anula en algún punto, basta probar que hay en es positiva y puntos en que es negativa.

Así vemos que, por ejemplo, $f(1) = -11 < 0$ y $f(2) = 11$. Por tanto, por el Teorema de Bolzano, ya sabemos que f tiene una raíz en el intervalo $(1, 2)$.

Capítulo 9

Derivabilidad

9.1. La derivada

Definición 9.1.1. *La* ***derivada*** *de una función f en el punto $a \in D(f)$, que denotaremos $f'(a)$, es:*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que el límite anterior exista. En este caso, decimos que f es ***derivable*** *en a.*

- *La expresión $f'(a)$ se lee "f prima de a". También se emplean las notaciones:*

  $$\frac{d}{dx} f(a) \quad o \quad \frac{df}{dx}(a)$$

  que se leen "derivada de f respecto de x en a".

- *Decimos que f es* ***derivable*** *si f es derivable en a para todo a del dominio de f.*

Proposición 9.1.2. *Si f es derivable en el punto a, entonces f es continua en a.*

Demostración. Si f es derivable en a podemos escribir:

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

es decir, f es continua en a. □

Observación 9.1.3. *Hay funciones continuas que no son derivables, por ejemplo, la función* $f(x) = |x|$ *es continua en* 0 *pero no derivable* (*véase* Ejemplo 9.2.7).

Proposición 9.1.4. *La recta tangente a la gráfica de* f *en el punto* $\big(a, f(a)\big)$ *tiene por ecuación*

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ejemplo 9.1.5. Encontrar la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 - x$, en el punto de abscisa $\frac{2}{3}$ sabiendo que $f'\big(\frac{2}{3}\big) = \frac{1}{3}$.

Como $f\big(\frac{2}{3}\big) = \big(\frac{2}{3}\big)^3 - \frac{2}{3} = -\frac{10}{27}$, el punto correspondiente a $x = \frac{2}{3}$ es:

$$\Big(\frac{2}{3}, f\Big(\frac{2}{3}\Big)\Big) = \Big(\frac{2}{3}, -\frac{10}{27}\Big)$$

Por tanto, la recta tangente será:

$$y - \Big(-\frac{10}{27}\Big) = \frac{1}{3}\Big(x - \frac{2}{3}\Big) \Longleftrightarrow y + \frac{10}{27} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} \Longleftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{27}$$

El cociente $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ recibe el nombre de ***pendiente*** de la recta tangente.

9.2. Significado de la derivada

Proposición 9.2.1. *La derivada es la pendiente de la recta tangente.*

Dada una función f, ***busquemos la tangente a su gráfica en un punto*** $\big(a, f(a)\big)$.

Las rectas que pasan por el punto $\big(a, f(a)\big)$ tienen la forma:

$$y - f(a) = m(x - a), \quad (m \text{ es la pendiente de la recta}).$$

Según varía m, vamos recorriendo todas las rectas del plano que pasan por $\big(a, f(a)\big)$ (excepto la vertical).

Así pues, la pregunta "¿cuál es la recta tangente?" significa simplemente "¿qué pendiente m debemos tomar?".

Una idea para encontrar esta pendiente, que no conocemos, es partir de pendientes que sí conocemos.

Para ello, tomamos puntos x próximos a a, que expresamos de la forma $a+h$, y consideremos las rectas que pasan por $\big(a, f(a)\big)$ y por $\big(a+h, f(a+h)\big)$.

Estas rectas tienen pendiente:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Haciendo h más y más pequeño, nuestras rectas se aproximan más y más a la tangente, es decir, sus pendientes se acercan más y más a la pendiente buscada.

En una palabra, la pendiente buscada será:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

Ejemplo 9.2.2. Sea $f(x)=mx+b$. Calcular $f'(x)$.

Tomemos un punto x cualquiera, se trata de calcular

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{mh}{h}=\lim_{h\to 0}m=m\end{aligned}$$

Así, obtenemos $f'(x)=m$ para todo x.

Ejemplo 9.2.3. Sea $g(x) = x^2$. Calcular $g'(x)$. Tomemos un punto x cualquiera, se trata de calcular
$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
Tenemos:
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2xh}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x) = 2x\end{aligned}$$
Así, obtenemos $g'(x) = 2x$ para todo x.

Definición 9.2.4. *Dada una función f definida en un intervalo I y un punto $a \in I$, definimos la derivada lateral por la derecha de f en a como el límite finito*
$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$
Análogamente se define la derivada lateral por la izquierda de f en a, $f'_-(a)$.

Nota 9.2.5. *Si a es uno de los extremos de I solo tiene sentido una de las dos derivadas laterales.*

Observación 9.2.6. *La derivabilidad de f en a equivale a que las dos derivadas laterales de f en a existan y sean iguales.*

Ejemplo 9.2.7. Sea la función $f(x) = |x|$. Estudia en qué puntos es derivable y calcular la derivada cuando exista.

Observamos que dado $x > 0$, si h es suficientemente pequeño tenemos $x+h > 0$. Por tanto, si $x > 0$:
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

Análogamente, si $x < 0$, también tenemos $x+h < 0$ para valores pequeños de h, por lo que:
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(x+h)-(-x)}{h} = -1$$

Luego
$$f\,'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sin embargo, para $x = 0$, tenemos:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Así, los límites laterales $f'_+(0)$ y $f'_-(0)$ son distintos y deducimos que no existe $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

Por tanto $|x|$ no es derivable en 0.

Nota 9.2.8. *Las funciones derivables son aquellas cuyas gráficas son curvas "**suaves**", es decir, curvas que no tienen "**picos**" o "**esquinas**"*

9.3. Técnicas para el cálculo de derivadas

Con la definición de la derivada y las propiedades de los límites, se obtienen unas reglas que convierten el proceso de calcular derivadas en algo sencillo y mecánico.

9.3.1. Reglas básicas de derivación

Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo I y derivables, y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) La función $f+g$ es derivable, y se tiene que la derivada de la suma es la suma de las derivadas, es decir,
$$\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x) \quad \forall\, x \in I.$$

2) La función αf es derivable, y se tiene que La derivada del producto de una constante por una función es la constante por la derivada de la función, es decir,
$$\big(\alpha f(x)\big)' = \alpha f'(x) \quad \forall\, x \in I.$$

3) La función $f-g$ es derivable, y se tiene que La derivada de la diferencia es la diferencia de las derivadas, es decir,
$$\big(f(x)-g(x)\big)' = f'(x)-g'(x) \quad \forall\, x \in I.$$

4) La función fg es derivable, y se tiene que la derivada del producto de dos funciones es la derivada de la primera por la segunda más la primera por la derivada de la segunda, es decir,
$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad \forall\, x \in I.$$

5) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ entonces la función $\frac{f}{g}$ es derivable, y la derivada del cociente viene dada de la siguiente forma:
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}.$$

Observación 9.3.1.

1) $\dfrac{d}{dx}\alpha = (\alpha)' = 0, \quad \textit{donde} \;\; \alpha \in \mathbb{R} \quad (\textit{función constante } f(x)=\alpha)$

2) $\dfrac{d}{dx}x = (x)' = 1 \quad (f(x)=x)$

Ejemplo 9.3.2. Calcular la derivada de $f(x) = 3x + 7$.

Utilizando las propiedades 1 y 2, obtenemos:

$$f'(x) = (3x + 7)' = (3x)' + (7)' = 3(x)' + 0 = 3 \cdot 1 = 3.$$

Ejemplo 9.3.3. Calcular la derivada de x^2 y de x^3.

Utilicemos que x^2 es el producto de x por sí mismo. Así podemos aplicar la propiedad 3:

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = (x)' \cdot x + x \cdot (x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

Utilizando esto, y de nuevo la propiedad 3:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2.(x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

Con la idea del Ejemplo 9.3.3 podemos calcular también la derivada de x^4, x^5, ... En general, tenemos (basta utilizar inducción):

Proposición 9.3.4.

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Ejemplo 9.3.5. Calcular la derivada de

$$f(x) = 2x^6 + 3x^5 - 9x^3 + 7x^2 - 8x + 3.$$

Determinar la recta tangente a la gráfica de f en el punto

$$(1, f(1)) = (1, -2).$$

Aplicamos las propiedades anteriores:

$$\begin{aligned}(2x^6 + 3x^5 - 9x^3 {+} 7x^2 - 8x + 3)' = \\ &= (2x^6)' + (3x^5)' - (9x^3)' + (7x^2)' - (8x)' + (3)' \\ &= 2(x^6)' + 3(x^5)' - 9(x^3)' + 7(x^2)' - 8(x)' + 0 \\ &= 2 \cdot 6x^5 + 3 \cdot 5x^4 - 9 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x^1 - 8 \cdot 1 \\ &= 12x^5 + 15x^4 - 27x^2 + 14x - 8\end{aligned}$$

Por tanto,

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 - 27x^2 + 14x - 8.$$

La recta tangente en el punto $(1, f(1)) = (1, -2)$ es:

$$y - (-2) = f'(1)(x - 1).$$

Como $f'(1) = 12 \cdot 1^5 + 15 \cdot 1^4 - 27 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 - 8 = 6$, la recta tangente será:

$$y + 2 = 6(x - 1) \Longleftrightarrow y = 6x - 8.$$

Proposición 9.3.6. *La derivada de un polinomio de grado n es un polinomio de grado $n-1$, es decir,*

$$\big(a_nx^n + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\big)' = na_nx^{n-1} + \cdots + 2a_2x + a_1.$$

Ejemplo 9.3.7. Calcular la derivada de $\frac{x-1}{x^2+1}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)' &= \frac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1\cdot(x^2+1) - (x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

9.3.2. Derivadas de algunas funciones

1) La función exponencial:

$$\frac{d}{dx}e^x = (e^x)' = e^x.$$

2) La función logaritmo neperiano:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}.$$

3) Las funciones trigonométricas:

- $\dfrac{d}{dx}\sin(x) = \big(\sin(x)\big)' = \cos(x)$
- $\dfrac{d}{dx}\cos(x) = \big(\cos(x)\big)' = -\sin(x)$
- $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg}(x) = \big(\operatorname{tg}(x)\big)' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Ejemplo 9.3.8. Calcular la derivada de $\sin(x)\operatorname{tg}(x) + 3\cos(x)$ y la de $\frac{x^2+7}{\sin(x)+\cos(x)}$.

$$\begin{aligned}\big(\sin(x)\operatorname{tg}(x) + 3\cos(x)\big)' &= \big(\sin(x)\operatorname{tg}(x)\big)' + \big(3\cos(x)\big)' \\ &= \big(\sin(x)\big)'\operatorname{tg}(x) + \sin(x)\big(\operatorname{tg}(x)\big)' + 3\big(\cos(x)\big)' \\ &= \cos(x)\operatorname{tg}(x) + \sin(x)\frac{1}{\cos^2(x)} - 3\sin(x) \\ &= \sin(x) + \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos(x)} - 3\sin(x) \\ &= \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos(x)} - 2\sin(x).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x^2+7}{\sin(x)+\cos(x)}\right)' &= \frac{(x^2+7)'\big(\sin(x)+\cos(x)\big)-(x^2+7)\big(\sin(x)+\cos(x)\big)'}{\big(\sin(x)+\cos(x)\big)^2}\\
&= \frac{2x\big(\sin(x)+\cos(x)\big)-(x^2+7)\cos(x)-\sin(x)}{\big(\sin(x)+\cos(x)\big)^2}\\
&= \frac{(x^2+2x+7)\sin(x)-(x^2-2x+7)\cos(x)}{\big(\sin(x)+\cos(x)\big)^2}
\end{aligned}
$$

9.3.3. La regla de la cadena

Proposición 9.3.9 (Regla de cadena). *Si f es derivable en c y g es derivable en $f(c)$, entonces $g\circ f$ es derivable en c y*

$$(g\circ f)'(c) = \Big(g\big(f(c)\big)\Big)' = g'\big(f(c)\big)f'(c).$$

Ejemplo 9.3.10. Sea $h(x)=\sin(x^2+x+\pi)$. Calcular $h'(0)$ y $h'(x)$.

Para aplicar la regla de la cadena, tomemos $f(x)=x^2+x+\pi$, $g(y)=\sin(y)$. Así, tenemos $h(x)=g\big(f(x)\big)=(g\circ f)(x)$.

Por tanto:

$$h'(0)=(g\circ f)'(0)=g'\big(f(0)\big)f'(0)=g'(0^2+0+\pi)f'(0)$$

Como $f'(x)=2x+1$ y $g'(y)=\cos(y)$, tenemos

$$h'(0)=(g\circ f)'(0)=\cos(\pi)\cdot(2\cdot 0+1)=(-1)\cdot 1=-1.$$

En general, tenemos:

$$
\begin{aligned}
h'(x)=\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' &= g'\big(f(x)\big)f'(x)=[\cos(x^2+x+\pi)](2x+1)\\
&=(2x+1)\cos(x^2+x+\pi)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 9.3.11. Sea $h(x)=e^{\sin(x)}$. Calcular $h'(0)$ y $h'(x)$.

Tomamos $f(x)=\sin(x)$, $g(y)=e^y$. Tenemos:

$$f'(x)=\cos(x) \qquad g'(y)=e^y$$

Por tanto:

$$h'(x)=\Big(g\big(f(x)\big)\Big)'=g'\big(f(x)\big)f'(x)=e^{\sin(x)}\cos(x).$$

En particular,

$$h'(0)=e^{\sin(0)}\cos(0)=e^0\cdot 1=1\cdot 1=1.$$

Proposición 9.3.12.

- $$\Big(\sin\big(u(x)\big)\Big)' = \big[\cos\big(u(x)\big)\big]\cdot u'(x)$$

- $$\Big(e^{u(x)}\Big)' = e^{u(x)}\cdot u'(x)$$

Ejemplo 9.3.13. Calcular las derivadas de las funciones

$f(x) = \mathrm{tg}(7x^2+9x)$, $g(x) = \cos^4(x^3+2x)$ y $h(x) = e^{(x^2+3x)^5}$.

En el primer caso, utilizamos que $\big(\mathrm{tg}(x)\big)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
Por tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} f\,'(x) = \mathrm{tg}'(7x^2+9x)\cdot(7x^2+9x)' &= \frac{1}{\cos^2(7x^2+9x)\cdot(14x+9)} \\ &= \frac{14x+9}{\cos^2(7x^2+9x)} \end{aligned}$$

Para la función g utilizamos que $(x^4)' = 4x^3$:

$$g'(x) = 4\cos^3(x^3+2x)[\cos(x^3+2x)]'.$$

Ahora tenemos que seguir derivando $\cos(x^3+2x)$. Utilizamos el mismo argumento (teniendo en cuenta ahora que $\big(\cos(x)\big)'$). Así, tenemos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4\cos^3(x^3+2x)[-\sin(x^3+2x)](x^3+2x)' \\ &= -4\cos^3(x^3+2x)[\sin(x^3+2x)](3x^2+2) \\ &= -4(3x^2+2)\sin(x^3+2x)\cos^3(x^3+2x) \end{aligned}$$

Finalmente, para h, como $(e^x)' = e^x$, tenemos:

$$h'(x) = e^{(x^2+3x)^5}\big((x^2+3x)^5\big)'$$

Por tanto

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{(x^2+3x)^5}\big((x^2+3x)^5\big)' = e^{(x^2+3x)^5}\big(5(x^2+3x)^4(x^2+3x)'\big) \\ &= e^{(x^2+3x)^5}\big(5(x^2+3x)^4(2x+3)\big) \\ &= 5(2x+3)(x^2+3x)^4 e^{(x^2+3x)^5}. \end{aligned}$$

9.3.4. Funciones inversas

Proposición 9.3.14. *La función g es **inversa** de f si y sólo si se cumple*

$$g \circ f(x) = x \quad (f \text{ inyectiva}) \quad y \quad f \circ g(y) = y \ (f \text{ sobreyectiva})$$

para todo $x \in D(f)$ y para todo $y \in D(g)$. En tal caso se denota $g = f^{-1}$.

Observación 9.3.15.

1) Tenemos que trabajar en un dominio en el que distintos valores de x den distintos valores de $f(x)$ (f inyectiva), así, eliminamos el problema siguiente:

   Sea $f(x) = x^2$. Dado $y = 4$, tanto $x = 2$ como $x = -2$ satisfacen $f(x) = 4$.

2) Hay puntos y para los que no existe ningún x tal que $f(x) = y$. En el ejemplo $f(x) = x^2$, basta tomar $y = -1$.

   En general, el dominio de f^{-1} no es toda la recta real (f no es sobreyectiva).

Observación 9.3.16. *Usamos las letras x para la variable de la función f e y para su inversa f^{-1}, con el fin de subrayar que la inversa f^{-1} está definida en los valores que toma la función f, y viceversa.*

Proposición 9.3.17. *La gráfica de la inversa f^{-1} es simétrica de la gráfica de f respecto a la recta $y = x$.*

Ejemplo 9.3.18.

Proposición 9.3.19.

- ⧫ *Si f es continua en c, entonces la inversa f^{-1} es continua en $f(c)$.*
- ⧫ *Si f es derivable en c, $f'(c) \neq 0$ entonces la inversa f^{-1} es derivable en $f(c)$.*

Teorema 9.3.20. *Si f es derivable en $x \in D(f)$, $f'(x) \neq 0$, entonces la inversa f^{-1} es derivable en $f(x)$ y*

$$\big(f^{-1}\big)'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)}.$$

O bien, denotando $f(x) = y$, es decir, $x = f^{-1}(y)$

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}.$$

Ejemplo 9.3.21.

Ejemplo 9.3.22. Calcular la derivada de $\ln(y)$.

La función $\ln(y)$ es inversa de $f(x) = e^x$, con $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) = e^x$, para cada $y > 0$ tenemos:

$$\big(\ln(y)\big)' = \frac{1}{f'\big(\ln(y)\big)} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

Ejemplo 9.3.23. Calcular la derivada de $\arcsin(y)$.

La función que tenemos que derivar es la inversa de $f(x) = \sin(x)$, donde $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Como $f'(x) = \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$, para cada $y \in (-1, 1)$ tenemos:

$$\begin{aligned}\big(\arcsin(y)\big)' = \frac{1}{f'\big(\arcsin(y)\big)} &= \frac{1}{\cos\big(\arcsin(y)\big)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\big(\arcsin(y)\big)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\end{aligned}$$

Ejemplo 9.3.24. Calcular la derivada de $\arccos(y)$.

La función que tenemos que derivar es la inversa de $f(x) = \cos(x)$, donde $x \in (0, \pi)$.

Como $f'(x) = -\sin(x) = -\sqrt{1-\cos^2(x)}$, para cada $y \in (-1,1)$ tenemos:

$$\begin{aligned}\big(\arccos(y)\big)' &= \frac{1}{f'\big(\arccos(y)\big)} = -\frac{1}{\sin\big(\arccos(y)\big)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\big(\arccos(y)\big)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\end{aligned}$$

Ejemplo 9.3.25. Calcular las derivadas de las funciones x^a, a^x y x^x, donde $a, x > 0$.

Recordemos que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha > 0$, se tiene $\alpha^\beta = e^{\beta \ln(\alpha)}$.

Por la regla de cadena, tenemos:

- $$\begin{aligned}(x^a)' &= \big(e^{a\ln(x)}\big)' = e^{a\ln(x)}\big(a\ln(x)\big)' = x^a a\big(\ln(x)\big)' \\ &= x^a a\Big(\frac{1}{x}\Big) = ax^{a-1}\end{aligned}$$

- $$(x^a)' = \big(e^{x\ln(a)}\big)' = e^{x\ln(a)}\big(x\ln(a)\big)' = a^x\ln(a)$$

- $$\begin{aligned}(x^x)' &= \big(e^{x\ln(x)}\big)' = e^{x\ln(x)}\big(x\ln(x)\big)' = x^x\Big[(x)'\ln(x) + x\big(\ln(x)\big)'\Big] \\ &= x^x\Big[\ln(x) + x\frac{1}{x}\Big] = \big(1+\ln(x)\big)x^x\end{aligned}$$

9.3.5. Derivadas de funciones definidas "a trozos"

Nota 9.3.26. *Si una función no es continua en un punto, entonces no puede ser derivable en dicho punto.*

Ejemplo 9.3.27. Estudiar la derivabilidad y calcular la derivada, donde exista, de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ \\ |x^2 - 1| & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad lo más recomendable es expresar la función sin valor absoluto.

Como $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, entonces:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 & \text{si } \ x \in (-\infty - 1] \cup [1, +\infty) \\ \\ x^2 - 1 \leq 0 & \text{si } \ x \in [-1, 1] \end{cases}$$

Por tanto

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 1 & \text{si} \;\; x < 0 \\ -(x^2 - 1) & \text{si} \;\; 0 \le x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \;\; x \ge 1 \end{cases}$$

- Para $x < 0$, $f'(x) = (x^3 + x^2 + 1)' = 3x^2 + 2x$.
- Para $0 < x < 1$, $f'(x) = (1 - x^2)' = -2x$.
- Para $x > 1$, $f'(x) = (x^2 - 1)' = 2x$.

Falta estudiar qué ocurre en los puntos “de empalme”: 0 y 1. En primer lugar, se prueba fácilmente que la función es continua en ambos:

- Para $x = 1$,

  si $x > 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} &= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^+} (x + 1) = 2 \end{aligned}$$

  Análogamente, si $x < 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x^2 - 1) - 0}{x - 1} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^-} -(x + 1) = -2 \end{aligned}$$

  Estos límites laterales no coinciden, luego no existe

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

  Por tanto, f no es derivable en 1.

- Para $x = 0$,

  si $x > 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-(x^2 - 1) - 1}{x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 \end{aligned}$$

si $x < 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+x^2+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+x^2}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-}(x^2+x) = 0\end{aligned}$$

Esto nos dice que f es derivable en 0 y que $f'(0) = 0$.

En resumen, f es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$, y

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x & \text{si } \; x < 0 \\ -2x & \text{si } \; 0 \le x < 1 \\ 2x & \text{si } \; x > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 9.3.28. Estudiar la derivabilidad y calcular la derivada, donde exista, de la función

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para $x \neq 0$, f es claramente derivable, y con las reglas de derivación tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = (x)'\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

En cuanto a la derivabilidad en $x = 0$, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

pero ya vimos que este límite no existe. Por tanto, f no es derivable en $x = 0$.

9.4. El Teorema del Valor Medio

9.4.1. Teorema de Rolle

Teorema 9.4.1 (Rolle). *Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a)=f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c)=0$$

Observación 9.4.2. *Geométricamente el Teorema de Rolle dice que en algún punto $(c, f(c))$ de la gráfica de f, siendo c intermedio entre a y b, la tangente es horizontal y paralela, al segmento que une los extremos de la gráfica.*

9.4.2. Teorema del Valor Medio

El siguiente resultado constituye una generalización del Teorema de Rolle.

Teorema 9.4.3 (Lagrange o Valor Medio o incrementos finitos). *Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Observación 9.4.4. *Geométricamente el Teorema de Valor Medio dice que cuando unimos los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ mediante una gráfica suave, en algún punto la tangente a la gráfica es paralela, al segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.*

9.4.3. Aplicaciones del Teorema del Valor Medio

Ejemplo 9.4.5. Demostrar que $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ para cualquier par de números reales x, y. Deducir el valor de

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sin\left(\sqrt{n+1}\right) - \sin\left(\sqrt{n}\right) \Big).$$

Sean x, y números reales.

Si $x = y$, la desigualdad es trivialmente cierta (tenemos el valor 0 en ambos lados).

Si $x \neq y$, supongamos, por ejemplo, $x < y$ (el otro caso es igual). Apliquemos el Teorema del Valor Medio a la función $f(t) = \sin(t)$ en el intervalo $[x, y]$. Deducimos que existe $c \in (x, y)$ tal que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x} = f'(c) = \cos(c)$$

Tomando valor absoluto y recordando que $|\cos(t)| \leq 1$ para todo t, tenemos:

$$\left| \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x} \right| = \frac{\left|\sin(y) - \sin(x)\right|}{|y - x|} = \left|\cos(c)\right| \leq 1$$

Así que,

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

que es la desigualdad que queríamos demostrar.

En cuanto al límite, utilizando la desigualdad anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left| \sin\left(\sqrt{n+1}\right) - \sin\left(\sqrt{n}\right) \right| &\leq \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n + 1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} = \Big(\sin\left(\sqrt{n+1}\right) - \sin\left(\sqrt{n}\right) \Big) = 0.$$

Ejemplo 9.4.6. Demostrar que $\operatorname{arc\,tg}(x) < x$ para todo $x > 0$.

Sea $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$. Como $f(0) = \operatorname{arc\,tg}(0) = 0$, resulta que

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = f(x) - f(0).$$

Tomemos $x > 0$ y apliquemos el teorema del Valor Medio en el intervalo $[0, x]$. Existe $c \in (0, x)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

Pero $f'(c) = \frac{1}{1+c^2} < 1$. Por tanto,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1+c^2} < 1 \Longrightarrow \operatorname{arc\,tg}(x) = f(x) < x.$$

Ejemplo 9.4.7. Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}\right)$.

Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Tenemos $\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n} = f(n+2) - f(n)$. Para cada n, vamos a aplicar el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[n, n+2]$.

Deducimos que existe $c_n \in (n, n+2)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{f(n+2) - f(n)}{n+2-n} = \frac{f(n+2) - f(n)}{2} &= f'(c_n) \\ \Longrightarrow f(n+2) - f(n) &= 2f'(c_n) \end{aligned}$$

Como $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, y $n < c_n$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n} &= f(n+2) - f(n) = 2f'(c_n) \\ &= \frac{2}{3\sqrt[3]{c_n^2}} < \frac{2}{3\sqrt[3]{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Por el criterio del sandwich, obtenemos el resultado:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}\right) = 0.$$

Veamos ahora las dos consecuencias del Teorema de valor Medio que anunciábamos antes.

Proposición 9.4.8. *Sea f una función derivable en un intervalo I. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f es constante.*

Proposición 9.4.9. *Sean f, g funciones derivables en un intervalo I tales que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$. Entonces existe una constante α tal que*

$$f(x) = g(x) + \alpha$$

para todo $x \in I$.

Ejemplo 9.4.10. Demostrar que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para todo número real x.
Consideremos $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$. Tenemos

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)\big(-\sin(x)\big) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, gracias a la primera de las proposiciones anteriores, f es constante en todo la recta real.

Para saber cuál es la constante, evaluamos f en un punto sencillo, por ejemplo en $x = 0$. Tenemos

$$f(0) = \sin^2(0) + \cos^2(0) = 0^2 + 1^2 = 1$$

De lo que se deduce

$$f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

para todo número real x.

Ejemplo 9.4.11. Comprobar que $\ln(x^9) = 9\ln(x)$ para todo $x > 0$.
Sea $f(x) = \ln(x^9)$ y $g(x) = 9\ln(x)$. Tenemos

$$f'(x) = \frac{9x^8}{x^9} = \frac{9}{x} \quad \text{y} \quad g'(x) = 9\frac{1}{x}$$

Como f y g tienen la misma derivada en $(0, +\infty)$, difieren en una constante, esto es, existe α tal que

$$f(x) = \ln(x^9) = g(x) + \alpha = 9\ln(x) + \alpha$$

para todo $x > 0$. Pero, además, tomando $x = 1$, tenemos

$$f(1) = \ln(1^9) = \ln(1) = 0 \quad \text{y} \quad g(1) = 9\ln(1) = 9 \cdot 0 = 0.$$

Con lo cual,

$$f(1) = g(1) + \alpha = 0 + \alpha = \alpha \Longrightarrow \alpha = 0.$$

Luego $\ln(x^9) = 9\ln(x)$ para todo $x > 0$.

9.5. Teorema de Cauchy

El siguiente resultado generaliza el Teorema del Valor Medio, tiene interés principalmente por sus aplicaciones.

Teorema 9.5.1 (Cauchy). *Sean f y g funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Nota 9.5.2. *El Teorema de Cauchy es el instrumento básico que usaremos a menudo para el cálculo de límites de la forma:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde $a \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

Ejemplo 9.5.3. Calcular

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)}}{\sin(x)-\cos(x)}.$$

Hagamos: $x = \frac{\pi}{4} + t$, si $x \to \frac{\pi}{4}$, $t \to 0$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)}}{\sin(x)-\cos(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)} - e^{\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)} - e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}$$

Aplicando el Teorema de Cauchy a las funciones $f(x) = e^{\sin(x)}$, $g(x) = \sin(x)$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}-t, \frac{\pi}{4}+t\right]$, obtenemos que existe $c \in \left(\frac{\pi}{4}-t, \frac{\pi}{4}+t\right)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)} - e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$= \frac{e^{\sin(c)}\cdot\cos(c)}{\cos(c)} = e^{\sin(c)}$$

Puesto que $c \in \left(\frac{\pi}{4}-t, \frac{\pi}{4}+t\right)$, tenemos que, si $t \to 0$, $c \to \frac{\pi}{4}$:
De aquí se deduce:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)}}{\sin(x)-\cos(x)} = \lim_{c\to\frac{\pi}{4}} e^{\sin(c)} = e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

9.5.1. Regla de L'Hôpital (caso $\frac{0}{0}$)

Proposición 9.5.4 (L'Hôpital). *Sean f y g funciones derivables en el intervalo (a,b) y supongamos que g y g' no se anulan en (a,b). Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

donde l puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 9.5.5. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$.

Observemos que el límite pedido es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Apliquemos la regla de L'Hôpital.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0} \\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\big(\sin(x)\big)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

9.5.2. Regla de L'Hôpital (caso $\frac{\infty}{\infty}$)

Proposición 9.5.6 (L'Hôpital). *Sean f y g funciones derivables en el intervalo (a,b) y supongamos que g y g' no se anulan en (a,b). Si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

donde l puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 9.5.7. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\big(\sin(x)\big)}{\frac{1}{x}}$.

Tenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Apliquemos la regla de L'Hôpital. Se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\big(\sin(x)\big)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{-1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\cos(x)}{\sin(x)} \\ &= -\big(\lim_{x\to 0^+} x\cos(x)\big) \cdot \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin(x)}\right) \\ &= -\big(\lim_{x\to 0^+} x\cos(x)\big) \cdot \left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}}\right) = -0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Observación 9.5.8. *La regla de L'Hôpital no solo es válida para límites por la derecha, sino que lo es para todo tipo de límites de funciones: cuando $x \longrightarrow a^+$, $x \longrightarrow a^-$, $x \longrightarrow a$, $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.*

Nota 9.5.9.

1) *La condición "g y g' no se anula en (a, b) es para que tenga sentido hablar de las funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

2) *Si no tenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, en general,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x+4}{2x} = \frac{7}{2} \neq \lim_{x\to 1} \frac{(3x+4)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 9.5.10. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$.

Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Nota 9.5.11. *No es raro que tengamos que aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez.*

Ejemplo 9.5.12. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$.

Es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{3x^2}.$$

Y llegamos de nuevo a una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital dos veces más:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Observación 9.5.13. *Muchas veces, indeterminaciones de la forma $\infty - \infty$ o $0 \cdot (\pm\infty)$, se pueden expresar, mediante alguna sencilla manipulación, de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Esto nos permite utilizar L'Hôpital. Otras veces, utilizando la igualdad $\alpha^\beta = e^{\beta \ln(\alpha)}$, podemos trabajar con indeterminaciones de la forma 0^0, 1^∞ o ∞^0.*

Ejemplo 9.5.14. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$, $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Son tres indeterminaciones de la forma 0^0, 1^∞ y ∞^0, respectivamente.

En el primer caso, tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1.$$

Procedemos de igual forma con los otros dos límites:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}}$$

Ahora, por L'Hôpital, tenemos

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Luego

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

En el último,

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to +\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Pero, por L'Hôpital

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = e^1 = e.$$

Proposición 9.5.15. *Supongamos que f es derivable en $(a, a+\delta)$. Si existe $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$, entonces f es derivable por la derecha en a y se tiene*

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$

Demostración. Obsérvese que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

es una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(a+h)}{1} = \lim_{h\to 0^+} f'(a+h)$$

Hagamos: $x = a+h$, si $h \longrightarrow 0^+$, $x \longrightarrow a^+$. Por tanto

$$\lim_{h\to 0^+} f'(a+h) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

Así que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(a+h)}{1} = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

lo que prueba el resultado. □

Observación 9.5.16. *El resultado análogo para calcular derivadas por la izquierda* (*o derivadas*)*, también es cierto.*

Ejemplo 9.5.17. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = \sin|x|$.

Lo primero que debemos hacer es estudiar la continuidad, teniendo en cuenta que las funciones $g(x) = |x|$ y $h(x) = \sin(x)$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, se deduce que $f = g \circ h$ es continua.

Para estudiar la derivabilidad es conveniente escribir

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ \sin(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

puesto que la función seno es derivable, se deduce que f es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y que se tiene

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x > 0 \\ -\cos(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para la derivabilidad en cero aplicamos el resultado anterior, para lo que usamos

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \big(-\cos(x)\big) = -1.$$

Por tanto, f derivable por la derecha y la izquierda en el punto 0 y se tiene,

$$f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1.$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en 0.

Observación 9.5.18. *A la hora de aplicar el resultado anterior, hay que tener cuidado ya que puede ocurrir que no exista el límite*

$$\lim_{x\to a^+} f'(x).$$

y sin embargo la función sí sea derivable por la derecha. (*La existencia de* $f'_+(a)$ *no garantiza la de* $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$, *es decir,*

$$\exists \lim_{x\to a^+} f'(x) \Longrightarrow \exists f'_+(a)$$
$$\exists f'_+(a) \not\Longrightarrow \exists \lim_{x\to a^+} f'(x)\Big).$$

El problema análogo también se puede presentar por la izquierda. Para evitar esto es mejor estudiar la existencia de derivadas laterales directamente por la definición.

Ejemplo 9.5.19. Estudiar la derivabilidad en cero de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } \ x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

Comenzamos estudiando la continuidad en cero, para ello teniendo en cuenta que

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1, \quad \forall\, x \neq 0$$

y que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0), \quad (\bigstar)$$

por tanto f es continua en 0.

Para la derivabilidad en 0 podemos tratar de aplicar el resultado anterior para lo cual usamos

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

para todo $x \neq 0$.

Observamos que análogamente a ($\bigstar$), obtenemos

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

La función $x \longrightarrow \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en cambio no tiene límite cuando x tiende a cero, ni por la izquierda ni por la derecha ya que lo que hace es oscilar entre -1 y 1. Esto implica que no puede existir ninguno de los límites

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x), \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

Veamos que sin embargo, aunque no existe ninguno de los límites laterales de f' en cero, la función f es derivable en 0 y su derivada es cero. Usamos la definición de derivada que nos da

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0 = f'(0).$$

9.6. Derivadas de orden superior

Definición 9.6.1. *Sea f una función derivable en todos los puntos de un intervalo I. Si f' es derivable en $c \in I$, es decir, si existe y es finito*

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c},$$

éste se designa $f''(c)$ y se llama la derivada segunda de f en c.

*De igual forma se define la derivada tercera, cuarta, etc., que denotamos f''' o $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, etc. (**derivadas sucesivas**).*

En general, la derivada $n-$ésima, $f^{(n)}$, donde n es un número natural.

Nota 9.6.2. *Las derivadas sucesivas de una función nos permiten aproximar localmente la función por un polinomio.*

9.6.1. Desarrollo de Taylor

Definición 9.6.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea f una función n veces derivable en un punto a. Llamamos **polinomio de Taylor de orden n en a** al polinomio*

$$P_n(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n\,!} f^{(n)}(a).$$

Ejemplo 9.6.4. Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de $\ln(x)$ en el punto 1.

Por la definición, si denotamos $f(x) = \ln(x)$, el polinomio pedido es

$$P_3(x) = f(1) + \frac{(x-1)}{1!} f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2\,!} f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3\,!} f^{(3)}(1).$$

Por tanto, solamente tenemos que calcular las tres primera derivadas de $\ln(x)$ y evaluarlas en $x = 1$. Tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Con lo cual,

$$f(1) = \ln(1) = 0, \quad f'(1) = \frac{1}{1}, \quad f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1, \quad f^{(3)}(1) = \frac{2}{1^3} = 2.$$

Así que,

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} 2 \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3. \end{aligned}$$

Observación 9.6.5. *El polinomio de Taylor de orden n de f en a es el único polinomio de grado menor o igual que n que coincide con f en a hasta la derivada $n-$ésima, es decir, que cumple*

$$\begin{aligned} P_n(a) &= f(a) \\ P_n'(a) &= f'(a) \\ P_n''(a) &= f''(a) \\ P_n^{(3)}(a) &= f^{(3)}(a) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

Nota 9.6.6. *El polinomio de Taylor de orden n de f en a "normalmente" tiene grado n, pero no siempre: si $f^{(n)}(a) = 0$, entonces su grado es estrictamente menor que n (ver el ejemplo siguiente).*

Ejemplo 9.6.7. Calcular el polinomio de Taylor de orden 5 de $\cos(x)$ en el punto 0.

Denotamos $g(x) = \cos(x)$, tenemos

$$g'(x) = -\sin(x), \quad g''(x) = -\cos(x), \quad g^{(3)}(x) = \sin(x),$$
$$g^{(4)}(x) = \cos(x), \quad g^{(5)}(x) = -\sin(x).$$

Por tanto,

$$\begin{array}{ll} g(0) = \cos(0) = 1, & g'(0) = -\sin(0) = 0, \\ g''(0) = -\cos(0) = -1, & g^{(3)}(0) = \sin(0) = 0, \\ g^{(4)}(0) = \cos(0) = 1, & g^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0. \end{array}$$

Así, el polinomio de Taylor de orden 5 de $\cos(x)$ en 0 es el polinomio

$$\begin{aligned} P_5(x) = g(0) &+ \frac{(x-0)}{1!}g'(0) + \frac{(x-0)^2}{2\,!}g''(0) + \frac{(x-0)^3}{3\,!}g^{(3)}(0) \\ &+ \frac{(x-0)^4}{4\,!}g^{(4)}(0) + \frac{(x-0)^5}{5\,!}g^{(5)}(0). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$P_5(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2\,!}x^2 + \frac{0}{3\,!}x^3 + \frac{1}{4\,!}x^4 + \frac{0}{5\,!}x^5 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Teorema 9.6.8 (Taylor). *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Sea $a \in I$ y sea P_n el polinomio de Taylor de orden n de f en el punto a. Entonces, dado $x \in I$, $x \neq a$, existe un punto c entre a y x tal que*

$$f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(c).$$

Observación 9.6.9. *El Teorema de Taylor nos dice que el error que cometemos al sustituir $f(x)$ por $P_n(x)$ es*

$$E(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(c).$$

En general, no sabemos exactamente cuál es el punto c. Por ello, tampoco podemos saber cuál es exactamente el valor de $E(x)$.

Lo que haremos normalmente es acotar $|E(x)|$ y así lo que tendremos es una cota del error que estamos cometiendo.

En efecto: Sea K el máximo valor de $|f^{(n+1)}(t)|$ para t entre a y x. Entonces

$$|E(x)| \leq \frac{K|x-a|^{n+1}}{(n+1)\,!}.$$

Otras formas de la fórmula de Taylor.

Proposición 9.6.10 (Taylor). *Si en el Teorema de Taylor anterior hacemos $x = a+h$, entonces existe $\theta \in (0,1)$ $(c = a + \theta h)$ tal que*

$$f(a+h) - P_n(a+h) = f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k\,!} f^{(k)}(a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Además

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(a+h)}{|h|^n} = 0.$$

Si $a = 0$ $(x = h)$,

$$f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} f^{(k)}(0) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(\theta h).$$

Esta última fórmula se conoce como la fórmula Mac-Laurin.

Ejemplo 9.6.11. Dar una cota del error que cometemos al considerar que el valor del número e es

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}. \qquad \left(e=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k\,!}\right).$$

Observamos que $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}$ es exactamente $P_5(1)$, donde $P_5(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 5 de $f(x)=e^x$ en el punto 0. Por tanto se trata de acotar $|f(1)-P_5(1)|$.

Por el Teorema de Taylor sabemos que existe $c \in (0,1)$ tal que

$$f(1)-P_5(1)=\frac{f^{(6)}(c)}{6!}(1-0)^6$$

Por tanto, teniendo en cuenta que todas las derivadas de e^x coinciden con e^x, y que como $0<c<1$ tenemos $1<e^c<e<3$, deducimos

$$\begin{aligned}|f(1)-P_5(1)| &= \left|e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\right)\right| \\ &= \left|\frac{f^{(6)}(c)}{6!}(1-0)^6\right| = \left|\frac{e^c}{6!}\right| < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} \approx 0,004\end{aligned}$$

9.6.2. Teorema de Cauchy generalizado

Teorema 9.6.12 (Cauchy). *Sean f y g funciones derivables con continuidad hasta el orden n en $[a,b]$ y tales que $f^{(n+1)}(x)$ y $g^{(n+1)}(x)$ existen para todo $x \in (a,b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}=\frac{f(b)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k\,!}f^{(k)}(a)}{g(b)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k\,!}g^{(k)}(a)}$$

9.7. Funciones crecientes y decrecientes

Definición 9.7.1. *Sea f una función definida en un intervalo I.*

1) *Se dice que f es* ***creciente*** *en I si para cualquier par de puntos x_1, x_2 en I tales que $x_1<x_2$ se tiene*

$$f(x_1)\le f(x_2)$$

2) *Se dice que f es* ***estrictamente creciente*** *en I si para cualquier par de puntos x_1, x_2 en I tales que $x_1<x_2$ se tiene*

$$f(x_1)<f(x_2)$$

3) *Se dice que f es **decreciente** en I si para cualquier par de puntos x_1, x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene*

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

4) *Se dice que f es **estrictamente decreciente** en I si para cualquier par de puntos x_1, x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene*

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Ejemplo 9.7.2. La función $f(x) = x^2$ es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, +\infty)$.

Nota 9.7.3. *Las funciones constantes son tanto crecientes como decrecientes.*

9.7.1. Una condición suficiente para crecimiento y decrecimiento

Gracias al Teorema del Valor Medio, las derivadas nos ayudan a averiguar si una función es creciente o decreciente, como se muestra en el siguiente resultado:

Proposición 9.7.4. *Sea f una función derivable en un intervalo I. Se tiene:*

1) *Si $f'(x) \geq 0$ para todo x de I, entonces f es creciente en I.*

2) *Si $f'(x) \leq 0$ para todo x de I, entonces f es decreciente en I.*

Observación 9.7.5. *Si $f'(x) > 0$ para todo x de I, entonces f es estrictamente creciente en I (análogo cuando $f'(x) < 0$).*

Ejemplo 9.7.6. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $2x = \cos^2(x)$?

Consideremos la función $f(x) = 2x - \cos^2(x)$. Se trata de contar cuántos ceros tiene.

Como f es continua en toda la recta real y

$$f(0) = -1 < 0 < \pi = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

sabemos, por el teorema de Bolzano, que, al menos, se anula en un punto $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Estudiando el crecimiento y decrecimiento de f, podemos ir más lejos: podemos decir exactamente en cuántos puntos se anula.

Tenemos

$$f'(x) = 2 - 2\big(\cos(x)\big) \cdot \big(-\sin(x)\big) = 2 + 2\cos(x)\sin(x) = 2 + \sin(2x).$$

Por otra parte,

$$-1 \leq \sin(2x) \leq 1 \Longrightarrow 1 \leq f'(x) = 2 + \sin(2x) \leq 3$$

Así que, $f'(x) > 0$ para todo x. Luego f es estrictamente creciente en $(-\infty, +\infty)$.
Deducimos que la ecuación tiene una solución que, de hecho, pertenece al intervalo $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

9.7.2. ¿Dónde es positiva y dónde es negativa una función?

Ejemplo 9.7.7. Determinar dónde es positivo y dónde es negativo la función

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 9}$$

Calculando las raíces del numerador (que son $0, -2$ y 1) y del denominador (que son 3 y -3), deducimos:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 9} = \frac{x(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-3)}$$

Así, para determinar el signo f solamente tenemos que contar el número de factores negativos que aparecen tanto en numerador como en el denominador: el signo de f será positivo si y solamente si dicho número es para. Esto es lo que hacemos en la tabla siguiente:

x	$-\infty$ -3	-3 -2	-2 0	0 1	1 3	3 $+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

En conclusión, $f(x)$ es negativa en $(-\infty, -3) \cup (-2, 0) \cup (1, 3)$ y positiva en $(-3, -2) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$.

9.8. Convexidad y concavidad

Definición 9.8.1. *Diremos que un subconjunto C de $\mathbb{R}$ es* ***convexo*** *si para todo $x, y \in C$, el segmento que une x con y está contenido en C, es decir, si $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.*

Ejemplo 9.8.2.

- ▶ Si C es un intervalo de $\mathbb{R}$, entonces C es un conjunto convexo
- ▶ El conjunto $C = [-1, 2] \cup [3, 4]$ no es convexo.

Definición 9.8.3. *Sea D un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función:*

- *Se dice que f es* ***convexa*** *si para cada $x, y \in D$ y cada $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que*

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

- *Se dice que f es* ***convexa*** *si para $a, x, y \in D$ con $a < x < y$ se tiene*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

- *La función f se dice* ***estrictamente convexa*** *si*

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

para cada $x, y \in D$ con $x \neq y$, para cada $\lambda \in (0, 1)$

Ejemplo 9.8.4.

Nota 9.8.5.

- ⧫ *La noción de función convexa tiene su origen en la de conjuntos convexos.*
- ⧫ *La funciones convexas son aquellas tales que el recinto del plano que queda encima de su gráfica es un conjunto convexo (véase la figura anterior).*

Proposición 9.8.6. *La función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si su epigrafo*

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} : \ f(x) \leq y\}$$

es convexo en $D \times \mathbb{R}$.

Cuando la función f es derivable, las derivadas son muy útiles para estudiar la convexidad.

Proposición 9.8.7. *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1) *f es convexa en el intervalo I.*

2) *$f\,'$ es creciente en el intervalo I.*

3) *$f'' \geq 0$ en el intervalo I.*

4) *Las rectas tangentes a la gráfica de f, en el intervalo I, se mantienen "debajo" de la gráfica, esto significa que para cada $x_0 \in I$*

$$f\,'(x_0)(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)$$

para cada $x \in I$.

La siguiente figura ilustra el significado de estas afirmaciones:

Ejemplo 9.8.8. Comprobara que $f(x) = x^3$ es convexa en $(0, +\infty)$ y deducir que si $a, b > 0$ entonces:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3}{2} + \frac{b^3}{2}.$$

Derivando tenemos $f\,'(x) = 3X^2$, $f''(x) = 6x$. Por tanto, $f''(x) = 6x > 0$ si $x \in (0, +\infty)$. Esto implica que f es convexa en $(0, +\infty)$.

Por la segunda parte, dados dos números $a, b > 0$, por ser f convexa,

$$f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

para todo $\lambda \in [0,1]$. En particular, tomando $\lambda = \frac{1}{2}$, tenemos

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)$$

es decir,

$$\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^3 \leq \frac{a^3}{2} + \frac{b^3}{2}.$$

El concepto “simétrico” al de convexidad es el de concavidad.

Definición 9.8.9. *La función f es* ***cóncava*** *en el intervalo I si para cada par de puntos $x, y \in I$, se tiene:*

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

para todo $\lambda \in [0,1]$.

Proposición 9.8.10. *La función f es cóncava en I si y solo si $-f$ es convexa en I.*

Naturalmente, la concavidad tiene un comportamiento análogo al de la convexidad.

Proposición 9.8.11. *Si la función f es derivable, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1) *f es cóncava en el intervalo I.*

2) *f' es decreciente en el intervalo I.*

3) *$f'' \leq 0$ en el intervalo I.*

4) *Las rectas tangentes a la gráfica de f, en el intervalo I, se mantienen “encima” de la gráfica, esto significa que para cada $x_0 \in I$*

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq f(x) - f(x_0)$$

para cada $x \in I$.

La siguiente figura ilustra el significado de estas afirmaciones:

Ejemplo 9.8.12. Comprobar que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es cóncava en el intervalo $(0, +\infty)$ y deducir, a partir de la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, f(1))$, que

$$\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$$

para todo $x > 0$.

En primer lugar, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$. Así, $f''(x) < 0$ si $x \in (0, +\infty)$, luego f es cóncava en $(0, +\infty)$.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, f(1)) = (1, 1)$ es:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

que, sustituyendo $f'(1)$ y $f(1)$ por sus valores, se transforma en la siguiente ecuación:

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + 1.$$

Como f es cóncava en $(0, +\infty)$, esta recta tangente está por encima de la gráfica de f. Por tanto,

$$f(x) \leq \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{x+2}{2}$$

para todo $x > 0$, luego

$$\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$$

para todo $x > 0$.

Definición 9.8.13. *Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$. Se dice que f tiene un* ***punto de inflexión*** *en c si existe $\delta > 0$ tal que*

o bien f es convexa en $(c - \delta, c)$ y cóncava en $(c, c + \delta)$

o bien f es cóncava en $(c - \delta, c)$ y convexa en $(c, c + \delta)$.

Nota 9.8.14. *Los puntos puntos de inflexión, son los puntos en los que la función pasa de ser cóncava a ser convexa, o viceversa.*

Como consecuencia del punto 3 de las caracterizaciones de convexidad y concavidad, tenemos La condición necesaria para la existencia de punto de inflexión siguiente:

Proposición 9.8.15. *Si c es un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$.*

Ejemplo 9.8.16. Estudiar la convexidad y la concavidad de $f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$.

Tenemos $f'(x) = 4x^3 - 16x$ y $f''(x) = 12x^2 - 16$.

Así,

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 12x^2 - 16 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{16}{12} \Longleftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{o} \quad x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Además,

$$f'' \leq 0 \;\text{ en }\; \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \Longrightarrow f \;\text{ es cóncava en }\; \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\begin{aligned} f'' \geq 0 \;\text{ en }\; &\left(-\infty, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \\ &\Longrightarrow f \;\text{ es convexa en }\; \left(-\infty, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right). \end{aligned}$$

Claramente, los puntos $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ son puntos de inflexión.

9.9. Máximos y Mínimos locales

Definición 9.9.1. *Sea f una función definida en un intervalo I, $c \in I$.*

*Se dice que f alcanza un **máximo local** (**o relativo**) en c si existe algún $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) \leq f(c), \quad \text{para todo} \quad x \in (c-\delta, c+\delta) \subset I.$$

*(c es un **máximo local** de f en I).*

*Análogamente, se dice que f alcanza un **mínimo local** en c si existe algún $\delta > 0$ tal que*

$$f(c) \leq f(x), \quad \text{para todo} \quad x \in (c-\delta, c+\delta) \subset I.$$

*(c es un **mínimo local** de f en I).*

Definición 9.9.2. *Se dice que $c \in I$ es un **extremo local o (relativo)** de una función f si c es un máximo local o un mínimo local de f en I.*

9.9.1. Condición necesaria de extremos locales

La derivada es una herramienta excelente para encontrar los extremos locales, gracias al Teorema del Valor Medio, obtenemos el resultado siguiente:

Proposición 9.9.3 (Primer orden). *Sea f una función definida en un intervalo I y derivable en el punto $c \in I$.*

Si c es un extremo local de f, entonces $f'(c) = 0$.

Nota 9.9.4. *Si una función es derivable en I y queremos encontrar sus extremos locales, solo tenemos que buscarlos entre los ceros de la derivada.*

Teorema 9.9.5. *Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto y convexo. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y derivable en un punto $c \in D$. Entonces,*
la función f admite un mínimo local en c si y sólo si $f'(c) = 0$

Definición 9.9.6. *Decimos que $c \in I$ es un* ***punto crítico*** *de f, si $f'(c) = 0$.*

Observación 9.9.7. ¡OJO! *Un punto crítico puede no ser extremo (por ejemplo el punto $x = 0$ para la función $f(x) = x^3$).*

Proposición 9.9.8 (Segundo orden). *Sea f una función definida en un intervalo I, dos veces derivable en $c \in I$, donde $c \in I$ un punto crítico de f.*

1) *Si f tiene un mínimo local en c, entonces $f''(c) \geq 0$.*

2) *Si f tiene un máximo local en c, entonces $f''(c) \leq 0$.*

Ejemplo 9.9.9.

Dada la función $f(x) = \cos(x)$ definida en el intervalo $[0, \pi]$. Sabemos que f alcanza su máximo en $c = 0$ y su mínimo en $c' = \pi$, puesto que $|\cos(x)| \leq 1$.
Como $f'(x) = -\sin(x)$ y $f''(x) = -\cos(x)$, se tiene que

$$f''(0) = -1 \leq 0 \quad \text{y} \quad f''(\pi) = 1 \geq 0.$$

Observación 9.9.10. *Si f tiene (por ejemplo) un máximo local en c y $f''(c)$ existe, esto no garantiza que $f''(c)$ sea negativa ($f''(c) < 0$), ya que podría perfectamente anularse ($f''(c) = 0$).*
Por ejemplo, con la función dada por $f(x) = -x^4$, ($c = 0$).

9.9.2. Condición suficiente de extremos locales

Proposición 9.9.11. *Sea f una función definida en un intervalo I, sean a, b, c puntos de I tales que $a < c < b$. Tenemos:*

$$\left.\begin{array}{lll} f & \text{decreciente en} & (a, c] \\ & & \\ f & \text{creciente en} & [c, b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f \quad \text{tiene un mínimo local en} \quad c$$

$$\left.\begin{array}{lll} f & \text{creciente en} & (a, c] \\ & & \\ f & \text{decreciente en} & [c, b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f \quad \text{tiene un máximo local en} \quad c$$

Ejemplo 9.9.12. Encontrar intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

La función es un polinomio, por tanto, es continua y derivable en toda la recta real. Calculemos su derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

El signo de f' nos indica dónde crece y dónde decrece la función f.

- Puntos críticos de f: 0 y 2
- $f' \geq 0$ en $(-\infty, 0] \Longrightarrow f$ creciente en $(-\infty, 0]$
- $f' \leq 0$ en $[0, 2] \Longrightarrow f$ decreciente en $[0, 2]$
- $f' \geq 0$ en $[2, +\infty) \Longrightarrow f$ creciente en $[2, +\infty)$

Podemos representar la información que tenemos del siguiente modo:

Vemos claramente cuáles son los extremos locales:

$$\left.\begin{array}{lll} f & \text{creciente en} & (-\infty, 0] \\ \\ f & \text{decreciente en} & [0, 2] \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f \ \text{ tiene un máximo local en } \ 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} f & \text{decreciente en} & [0, 2] \\ \\ f & \text{creciente en} & [2, +\infty) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f \ \text{ tiene un mínimo local en } \ 2$$

Ahora sustituimos para calcular $f(0)$ y $f(2)$. Obtenemos $f(0) = 3$ y $f(2) = -1$.

Ejemplo 9.9.13. Encontrar los intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos locales de la función $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.

La función $f(x)$ es una función racional (es un cociente de polinomios), por tanto, continua y derivable en su dominio, que es toda la recta real excepto los puntos 2 y -2 (las raíces del denominador). Es decir, su dominio es $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

Calculemos la derivada de f:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}.$$

La función f' tiene el mismo dominio de definición que f, es decir,

$$(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$$

y también es continua.

Observamos que:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longleftrightarrow -2x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Luego el único punto crítico de f es 0.

Analizando el signo de f' tenemos:

- $f' \geq 0$ en $(-\infty,-2) \Longrightarrow f$ creciente en $(-\infty,-2)$
- $f' \geq 0$ en $(-2,0] \Longrightarrow f$ creciente en $(-2,0]$
- $f' \leq 0$ en $[0,2) \Longrightarrow f$ decreciente en $[0,2)$
- $f' \leq 0$ en $(2,+\infty) \Longrightarrow f$ decreciente en $(2,+\infty)$

Esquemáticamente, recogemos la información obtenida hasta ahora en el siguiente gráfico:

En visto de esto:

$$\left.\begin{array}{lll} f & \text{creciente en} & (-2,0] \\ & & \\ f & \text{decreciente en} & [0,2) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \ \text{ tiene un máximo local en } \ 0$$

Sabemos que la función f es creciente en $(-\infty,-2)$, pero para saber qué valores toma, hemos de calcular el límite de f en los extremos del intervalo, es decir, debemos calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$. Lo mismo hemos de hacer en los otros intervalos.

Tenemos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0} \quad \text{(indeterminación)}$$

Analicemos con cuidado el límite anterior. Tenemos $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$, por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} (x^2-4) = 0 \\ \\ x^2 - 4 > 0 \ \text{ si } \ x < -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-2^-} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$$

Análogamente,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^+} (x^2-4) = 0 \\ \\ x^2 - 4 < 0 \ \text{ si } \ -2 < x < 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-2^+} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$$

De igual forma,

$$\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$$

Por último,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Recogemos esquemáticamente esta información en el siguiente gráfico:

Proposición 9.9.14. *Sea f una función definida en un intervalo I, dos veces derivable en $c \in I$, donde $c \in I$ un punto crítico de f.*

1) *Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene en c un mínimo local.*

2) *Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene en c un máximo local.*

Nota 9.9.15. *Si en algún momento olvidamos si se da el mínimo con* $f''(c) > 0$ *o con* $f''(c) < 0$*, una forma fácil de recordar es pensado en la función* $f(x) = x^2$*. Evidentemente, tiene un mínimo en* $x = 0$ *y* $f'' \equiv 2 > 0$*.*

Observación 9.9.16. *La* Proposición 9.9.11 *es más simple de usar ya que no se calcula la derivada segunda, además evita el problema siguiente: ¿qué ocurre si* $f''(c) = 0$*?.*

Proposición 9.9.17. *Sea* f *una función con derivada de orden* n *en un intervalo* I *en cuyo interior está el punto* a *y tal que* $f^{(n)}$ *es continua en* a*,* $f^{(n)}(a) \neq 0$ *y* $f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$*. Entonces:*

1) *Si* $f'(a) = 0$*,* $f^{(n)}(a) > 0$ *y* n *es par, entonces* f *tiene en* a *un mínimo local.*

2) *Si* $f'(a) = 0$*,* $f^{(n)}(a) < 0$ *y* n *es par, entonces* f *tiene en* a *un máximo local.*

3) *Si* n *es impar* $(f^{(n)}(a) \neq 0)$*, entonces* f *tiene en* a *un punto de inflexión.*

Es decir:

$$f'(a) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} f''(a) > 0 & \textit{mínimo local} \\ f''(a) < 0 & \textit{máximo local} \\ f''(a) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} f'''(a) \neq 0 & \textit{punto de inflexión} \\ f'''(a) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} f^{(4)}(a) > 0 & \textit{mínimo local} \\ f^{(4)}(a) < 0 & \textit{máximo local} \\ f^{(4)}(a) = 0 & \cdots\cdots \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

9.10. Extremos absolutos

Definición 9.10.1. *Sea* f *una función definida en un conjunto* D *que contiene al número* c*. Entonces*

1) *f tiene un **máximo global** (**o absoluto**) en $x = c$ si*

$$f(x) \leq f(c) \quad \textit{para todo} \quad x \in D$$

2) *f tiene un **mínimo global** (**o absoluto**) en $x = c$ si*

$$f(c) \leq f(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in D$$

Los máximos y mínimos absolutos, denominados colectivamente ***extremos absolutos****, especialmente cuando queremos evitar toda posible confusión con los* ***extremos relativos****.*

Ejemplo 9.10.2. La función $f(x) = x^2$ tiene en $x = 0$ un mínimo absoluto, pues

$$0 = f(0) \leq f(x) = x^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, f no tiene máximo absoluto, ya que no está acotada superiormente.

En el intervalo $[-2, 2]$ la función f sí tiene un máximo absoluto. Está claro que:

$$f(x) = x^2 \leq 4 = f(-2) = f(2)$$

para todo $x \in [-2, 2]$. Esto nos dice que, en el intervalo $[-2, 2]$, la función f alcanza su máximo absoluto en los puntos -2 y 2.

9.10.1. ¿Cómo determinar los extremos absolutos en un intervalo I?

Supongamos que f tiene un extremo absoluto en c.

Si c no es punto extremo del intervalo I (por ejemplo, $I = [a, b]$, $c \notin \{a, b\}$), entonces f tiene también un extremo local en c.

Por tanto según la Proposición 9.9.3, si f es derivable en c se debe cumplir $f'(c) = 0$.

Nota 9.10.3. *En el argumento anterior es importante el hecho de que c no sea un extremo del intervalo I. Nótese que en el* Ejemplo 9.10.2 *la función tiene extremos absolutos en* -2 *y en* 2 $(I = [-2, 2])$ *y, sin embargo, no son puntos críticos.*

Como se ve, la derivada es una herramienta excelente para encontrar los extremos absolutos de una función. *Solamente hay un caso en que no nos puede ayudar: cuando no existe.*

Nota 9.10.4. *Dada una función f en un intervalo I, para encontrar sus extremos absolutos debemos buscar entre:*

1) *Los puntos críticos* (*aquellos puntos en que la función es derivable y su derivada es* 0).

2) *Los extremos del intervalo I* (*si pertenecen a I, por supuesto*).

3) *Los puntos en que la función f no es derivable* (*si es que existe alguno*).

Observación 9.10.5. ¡Ojo! *Hemos dicho que tenemos que buscar los extremos "entre" estos puntos, esto es, de los demás podemos olvidarnos, pero en ningún momento hemos dicho que estos puntos tengan necesariamente que ser extremos: pueden serlo o no.*

Ejemplo 9.10.6. Hallar el máximo y el mínimo de la función $f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}$ en el intervalo $[-3, 3]$.

En primer lugar, notemos que la existencia de máximos y mínimos está garantizada puesto que f es una función continua en el intervalo cerrado y acotado $[-3, 3]$ (véase el Teorema de Weierstrass 8.5.1).

Para saber qué valor toman y dónde se alcanzan estos extremos, utilizamos la derivada.

Observemos que

$$f(x) = \frac{|x-1|}{e^x} = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & \text{si } x \in [-3, 1] \\ \frac{x-1}{e^x} & \text{si } x \in [1, 3] \end{cases}$$

Por tanto, f es derivable en todos los puntos salvo, quizá, en $x = 1$. Calculamos $f\,'$. Tenemos:

$$f\,'(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{e^x} & \text{si } x \in [-3, 1) \\ \frac{2-x}{e^x} & \text{si } x \in (1, 3] \end{cases}$$

Así, el único punto crítico es $x = 2$. Por tanto, tenemos que los extremos absolutos de f se tienen que alcanzan en alguno de los puntos siguientes:

- El punto $x = 2$ (punto crítico de f).
- El punto $x = 1$ (punto en el que quizás la función f no sea derivable).
- Los puntos $x = -3$ y $x = 3$ (extremos del intervalo).

Evaluemos f en esos puntos:

$$f(2) = \frac{1}{e^2}, \quad f(1) = 0, \quad f(-3) = 4e^4 \ \text{ y } \ f(3) = \frac{2}{e^3}.$$

El máximo de estos valores es $f(-3) = 4e^4$ y el mínimo, $f(1) = 0$. Por tanto, estos son los valores máximos y mínimos de la función f en el intervalo $[-3, 3]$, y se alcanzan en los puntos $x = -3$ y $x = 1$, respectivamente.

Ejemplo 9.10.7. Hallar, si existen, los extremos absolutos de $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

La función f está definida y es derivable en el intervalo abierto $(0, +\infty)$. Por tanto, si tiene algún extremo absoluto, lo alcanza en un punto crítico.

Tenemos:

$$f'(x) = \frac{\big(\ln(x)\big)'x - \big(\ln(x)\big)(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

De modo que

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \iff \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 &\iff 1 - \ln(x) = 0 \\ &\iff 1 = \ln(x) \iff x = e. \end{aligned}$$

Luego el único posible punto de extremo absoluto es e.

Como el intervalo no es un cerrado y acotado, no podemos utilizar el Teorema de Weierstrass 8.5.1. Con lo cual, en principio, no tenemos asegurado que f alcance máximo o mínimo. No queda más remedio que estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función.

Como f' es continua y solo se anula en e, su signo es constante en los intervalos $(0, e)$ y $(e, +\infty)$ (Teorema de Bolzano). Evaluando en algún punto de cada uno de estos intervalos, por ejemplo en $x = 1$ y $x = e^2$, deducimos que:

$$f' \geq 0 \ \text{ en } \ (0, e] \ \text{ y } \ f' \leq 0 \ \text{ en } \ [e, +\infty)$$

Por tanto,

$$\left.\begin{array}{ll} f \text{ creciente en} & (0, e] \\ f \text{ decreciente en} & [e, +\infty) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un máximo absoluto en } \ x = e$$

Luego

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \leq f(e) = \frac{1}{e}$$

para todo $x \in (0, +\infty)$.

Por otra parte, f no tiene mínimo absoluto, ya que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Teorema 9.10.8. *Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto convexo.*

Si la función $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa y $c \in D$ es un mínimo local de f, entonces c es mínimo global de f.

Además, si la función f es estrictamente convexa, el mínimo es único.

Proposición 9.10.9. *Sean D un abierto convexo de $\mathbb{R}$, y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa. Supongamos que f es derivable en $c \in D$, y que $f'(c) = 0$. Entonces f tiene un mínimo absoluto en c.*

Nota 9.10.10. *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces f es continua.*

Si I es cerrado, la convexidad no implica la continuidad sobre I, ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{si } \ x \in [-1, 1] - \{0\} \\ \\ 1 & \textit{si } \ x = 0 \end{cases}$$

Proposición 9.10.11. *Sea $D \subset \mathbb{R}$ un convexo cerrado no vacío y $f\colon D \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ una función convexa, continua y $f \not\equiv +\infty$ tal que*

$$\lim_{\substack{x \in D \\ |x| \to \infty}} f(x) = +\infty \quad (\textit{ninguna hipótesis si } D \textit{ es acotado}).$$

Entonces f alcanza su mínimo sobre D.

9.10.2. Aplicaciones: "Maximizar" y "Minimizar"

Hemos aprendido a localizar extremos absolutos. Esto tiene gran cantidad de aplicaciones, pues muchos problemas prácticos se formulan en términos de máximos y mínimos. Pensemos, por ejemplo, que habitualmente se quiere "maximizar" los beneficios y "minimizar" los costes.

Ejemplo 9.10.12. Un fabricante hace latas de aluminio de forma cilíndrica, de 16 cm^3 de volumen. Hallar las dimensiones de la lata para que la cantidad de material empleada sea mínima.

Denotemos r al radio de la base y h a su altura. El volumen será:

$$V(r) = 16 = \pi r^2 h$$

y su superficie (la de tapas más la superficie lateral)

$$S(r) = 2(\pi r^2) + 2\pi r h$$

Si despejamos h en la primera igualdad, tenemos

$$16 = \pi r^2 h \Longleftrightarrow h = \frac{16}{\pi r^2}$$

Sustituyendo h en la expresión de la superficie, nos queda

$$S(r) = 2(\pi r^2) + 2\pi r \frac{16}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{32}{r}$$

Por tanto, se trata de encontrar el mínimo de la función

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{32}{r},$$

donde, naturalmente, $r \in (0, +\infty)$.
Calculemos la derivada:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{32}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 32}{r^2}.$$

Por tanto,

$$S'(r) = 0 \Longleftrightarrow \frac{4\pi r^3 - 32}{r^2} = 0 \Longleftrightarrow 4\pi r^3 = 32 \Longleftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}$$

Luego, si S tiene mínimo absoluto en $(0, +\infty)$, solamente puede alcanzarlo en $r_0 = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}$. A partir del signo de S' confirmamos que, efectivamente, S alcanza su máximo en $r_0 = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}$, pues $S' < 0$ en $(0, r_0)$ y $S' > 0$ en $(r_0, +\infty)$. La altura correspondiente es

$$h_0 = \frac{16}{\pi r_0^2} = \frac{16}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}$$

Luego la lata tendrá las dimensiones siguientes:

radio de la base:

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}} \text{ cm} \approx 1,36 \text{ cm}$$

altura:

$$h_0 = 2\sqrt[3]{\frac{8}{\pi}} \text{ cm} \approx 2,72 \text{ cm}$$

Ejemplo 9.10.13. Una ventana de forma rectangular, rematada por un arco de medio punto, tiene u perímetro de 12 metros. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que su superficie sea lo mayor posible?

Denotemos x al ancho de la ventana e y a la altura del rectángulo. El perímetro es

$$12 = \frac{2\pi\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + 2y + x$$

y su área

$$A(x) = xy + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}.$$

Si despejamos y en la primera igualdad, obtenemos

$$12 = \pi\frac{x}{2} + 2y + x \Longrightarrow y = \frac{1}{2}\left(12 - x - \pi\frac{x}{2}\right) = 6 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x.$$

Por tanto, sustituyendo y en la expresión del área, vemos que lo que queremos es obtener el máximo de la función

$$A(x) = x\left(6 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x\right) + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = 6x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2$$

donde, naturalmente, $x \in (0, +\infty)$. La gráfica de A es una parábola "hacia abajo", luego alcanza su máximo en su único punto crítico. Vamos a calcularlo:

$$A'(x) = 6 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x.$$

Por tanto,

$$A'(x) = 0 \Longleftrightarrow 6 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{6}{2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{24}{4+\pi} \approx 3,36.$$

Con lo que $x_0 = \frac{24}{4+\pi} \approx 3,36$ ha de ser el ancho de la ventana (en metros).

La altura del rectángulo correspondiente es:

$$y_0 = 6 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x_0 = 6 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{24}{4+\pi} = \frac{12}{4+\pi} \approx 1,68.$$

De modo que la ventana debe tener las dimensiones siguientes:

Ancho:

$$x_0 = \frac{24}{4+\pi} \approx 3,36 \text{ m}$$

Altura:

$$y_0 = \frac{12}{4+\pi} \approx 1,68 \text{ m}$$

9.11. Asíntotas

Definición 9.11.1. *Una asíntota es una recta a la que se va aproximando una curva. Hay tres tipos de asíntotas:*

1) *Decimos que la recta* $\boldsymbol{x = a}$ *es una* ***asíntota vertical*** *de la gráfica de la función* f *si se cumple alguna de las igualdades siguientes:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

(*o ambas igualdades a la vez*).

2) *Decimos que la recta* $\boldsymbol{y = l}$ *es una* ***asíntota horizontal*** *de la gráfica de la función* f *si*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \quad o \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = l$$

3) *Decimos que la recta* $\boldsymbol{y = mx + b}$ *es una* ***asíntota oblicua*** *de la gráfica de la función* f *si*

$$\lim_{x\to +\infty} \big[f(x) - (mx+b)\big] = 0 \quad o \quad \lim_{x\to -\infty} \big[f(x) - (mx+b)\big] = 0$$

Nota 9.11.2. *Si una función admite una asíntota oblicua, entonces* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *Pero esto no basta, por ejemplo,* $f(x) = x^2$ *verifica la igualdad anterior y no tiene asíntotas oblicuas.*

Proposición 9.11.3. *La recta* $y = mx + b$ *es asíntota de la gráfica de* f *en* $+\infty$ *si y solamente si*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - mx\big] = b$$

Análogamente, para $-\infty$.

Ejemplo 9.11.4. Hallar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{3x^2-x+2}{x-1}$.

La función es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Estudiemos los límites en los extremos de los intervalos.

$$\lim_{x\to1^-} \frac{3x^2 - x + 2}{x - 1} = \frac{4}{0} \ \text{(indeterminación)}.$$

Como $x - 1 < 0$ si $x < 1$, tenemos

$$\lim_{x\to1^-} \frac{3x^2 - x + 2}{x - 1} = -\infty.$$

Luego $x = 1$ es una asíntota vertical. Análogamente,

$$\lim_{x\to1^+} \frac{3x^2 - x + 2}{x - 1} = +\infty.$$

Luego $x = 1$ es también una asíntota vertical cuando "nos acercamos a $x = 1$ desde la derecha", pero observemos que ahora acercamos "al otro extremo de la recta".

Veamos qué ocurre en $+\infty$ y en $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x - 1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{3(+\infty) - 1 + 0}{1 - 0} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x - 1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{3(-\infty) - 1 + 0}{1 - 0} = -\infty.$$

Como los límites de f cuando $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$ son infinitos, no hay asíntotas horizontales. ¿Habrá asíntotas oblicuas?. Tenemos que calcular el límite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

▶ En $+\infty$, tenemos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+2}{x(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=3$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\big[f(x)-3x\big]&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-x+2}{x-1}-3x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+2}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)=2\end{aligned}$$

Luego $y=3x+2$ es una asíntota de f cuando $x\longrightarrow+\infty$.

▶ Análogamente se comprueba que también es una asíntota de f cuando $x\longrightarrow-\infty$.

Ejemplo 9.11.5. Estudiar si la gráfica de $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ tiene asíntotas.

La función f está definida y continua en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Hallemos el límite en los extremos de estos intervalos. Tenemos:

$$\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)}=e^{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)}=e^{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)}=e^{0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}e^{-\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)}=e^{0}=1$$

Por tanto, $x=0$ es una asíntota vertical e $y=1$ una asíntota horizontal.

9.12. Esquema-Resumen para la representación gráfica de funciones

1) Determinar el dominio de f y expresarlo como unión de intervalos.

2) Estudiar si la gráfica de f tiene algún tipo de simetría (véase Nota al final).

3) Estudiar la continuidad de f y ver qué ocurre en los puntos de discontinuidad.

4) Estudiar el comportamiento de f al acercarnos a los extremos de los intervalos que componen su dominio. En particular, en $+\infty$ y $-\infty$. Asíntotas.

5) Determinar los puntos de corte con los ejes ($f(0)$ y soluciones de $f(x) = 0$).

6) Si f es una función definida a trozos, estudiarla en cada trozo. Hay que ser especialmente cuidados en los "empalmes".

7) Estudiar f': ¿dónde existe?, ¿qué signo tiene?, puntos críticos ... Esto permite obtener:
   - Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
   - Extremos locales.

8) Estudiar f'': ¿dónde existe?, ¿qué signo tiene?, ¿dónde se anula?. Esto permite:
   - Saber si los puntos críticos son máximos o mínimos locales.
   - Obtener los intervalos de convexidad y concavidad.
   - Encontrar los puntos de inflexión.

9) Elaborar una tabla resumiendo la información obtenida y evaluando f en algunos puntos clave (extremos locales, puntos de inflexión ...).

10) Dibujar la gráfica.

Nota 9.12.1. *Hay dos simetrías muy conocidas:*

1) *Si f es par, es decir, $f(x) = f(-x)$ para todo x, entonces la gráfica f es simétrica respecto del eje OY (por ejemplo, los polinomios que tiene solamente exponentes pares, o la función coseno).*

2) *Si f es impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$ para todo x, entonces la gráfica de f es simétrica respecto del origen (por ejemplo, los polinomios que tienen solamente exponentes impares, o la función seno).*

Capítulo 10

Integración

10.1. ¿Qué es la integral de una función?

La integral es una herramienta matemática que sirve, principalmente, para determinar áreas y volúmenes.

Por geometría elemental sabemos cuál es el área de algunas figuras del plano, como por ejemplo, la de un rectángulo, la de un triángulo, la de un círculo, etc. Pero si tenemos una figura plana distinta de estas, ¿cómo determinar su área? Aquí es donde aparece la integral. Ella nos da la respuesta.

Definición 10.1.1. *Sea f una función continua que toma valores mayores o iguales que 0, definida en un intervalo $[a, b]$. Llamaremos R al recinto del plano que queda limitado por la gráfica de f, el eje OX, y las rectas verticales que pasan por los puntos $(a, 0)$ y $(b, 0)$.*

Lo que nos da la integral es precisamente el área de R. Es decir, ***la integral entre a y b de la función f es el área de R:***

$$\text{Área}(R) = \int_a^b f(x)dx.$$

10.2. La regla de Barrow

Proposición 10.2.1. *Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, y F es una función derivable en el intervalo $[a, b]$ cuya derivada es f, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Observación 10.2.2. *Si f toma valores positivos y negativos en $[a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \acute{A}rea(R^+) - \acute{A}rea(R^-)$$

donde R^+ es la parte del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX, y las rectas verticales que pasan por $(a,0)$ y $(b,0)$, y que queda por encima del eje OX, y R^- es la parte de dicho recinto que queda por debajo del eje OX.

10.3. Cálculo de primitivas

10.3.1. Notaciones y cuestiones básicas

Definición 10.3.1. *Se dice que la función derivable F es una* ***primitiva*** *de la función f si $F' = f$, utilizándose la notación*

$$\int f(x)dx = F(x).$$

Nota 10.3.2. $\int f(x)dx = F(x)$ *significa que* $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo 10.3.3.

- $\int x^2dx = \frac{x^3}{3}$ pues $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.
- sea $C \in \mathbb{R}$, tenemos $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.
  Luego x^2 no tiene una sola primitiva sino muchas: todas las funciones de la forma
  $$\frac{x^3}{3} + C$$

Observación 10.3.4. *Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en algún intervalo de la recta real, entonces las funciones de la forma $F(x) + C$, (donde C es una constante) son también primitivas de $f(x)$, y son las únicas, es decir,*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

en vez de

$$\int f(x)dx = F(x).$$

En general, nosotros escribiremos simplemente esto último, pero es importante no olvidar lo que acabamos de comentar.

Terminología 1. *Para resaltar la diferencia entre*

$$\int_a^b f(x)dx,$$

que es un número (un área), y la expresión

$$\int f(x)dx,$$

que se usa para referirnos a funciones, a la primera expresión (con límites de integración), se llama ***integral definida****, y a la segunda (sin límites de integración),* ***integral indefinida****.*

10.3.2. Integrales inmediatas

Recordemos que ya conocemos unas cuantas primitivas. Basta con que nos fijemos en una tabla de derivadas y "la miramos al revés". Así es como aparecen las que llamamos **integrales inmediatas**.

- $\displaystyle\int a\ dx = ax$
- $\displaystyle\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x|$
- $\displaystyle\int e^x\ dx = e^x$
- $\displaystyle\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln(a)}$
- $\displaystyle\int \sin(x)\ dx = -\cos(x)$
- $\displaystyle\int \cos(x)\ dx = \sin(x)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx = \operatorname{tg}(x)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)}\ dx = -\operatorname{cotg}(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \operatorname{arc\,tg}(x)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin(x)$

Ejemplos 10.3.5.

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \int 9 \; dx = 9x \\
&2) \quad \int x^3 \; dx = \frac{x^4}{4} \\
&3) \quad \int x^{-5} \; dx \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{1}{4}x^{-4} \\
&4) \quad \int 2^x \; dx = \int e^{x\ln(2)} \; dx = \frac{e^{x\ln(2)}}{\ln(2)} = \frac{2^x}{\ln(2)} \\
&5) \quad \int x^{\frac{2}{3}} \; dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} \\
&6) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} \; dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \; dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}
\end{aligned}
$$

10.3.3. Propiedades básicas de la integral indefinida

Nota 10.3.6. *Toda regla de derivación proporciona una regla para el cálculo de primitivas.*

Proposición 10.3.7.

- $\displaystyle \int \big(f(x) + g(x)\big) \; dx = \int f(x) \; dx + \int g(x) \; dx$
- $\displaystyle \int \big(f(x) - g(x)\big) \; dx = \int f(x) \; dx - \int g(x) \; dx$
- $\displaystyle \int \alpha f(x) \; dx = \alpha \int f(x) \; dx$

Ejemplo 10.3.8. Calcular $\int (3x^4 - 2x^3 + 5) \; dx$.

$$
\begin{aligned}
\int (3x^4 - 2x^3 + 5) \; dx &= \int 3x^4 \; dx - \int 2x^3 \; dx + \int 5 \; dx \\
&= 3\int x^4 \; dx - 2\int x^3 \; dx + \int 5 \int dx \\
&= 3\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + 5x = \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 5x
\end{aligned}
$$

Ejemplo 10.3.9. Calcular $\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2^x}\right)\, dx$

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2^x}\right) dx &= \int \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx - \int \frac{1}{2^x}\, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx - \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx \\
&= \int x^{-\frac{3}{2}}\, dx - \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx \\
&= \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{1}{-\ln(2)} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2^x}\frac{1}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 10.3.10. Calcular $\int \frac{1}{1-\sin(x)}\, dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-\sin(x)}\, dx &= \int \frac{1+\sin(x)}{\big(1-\sin(x)\big)\big(1+\sin(x)\big)}\, dx = \int \frac{1+\sin(x)}{1-\sin^2(x)}\, dx \\
&= \int \frac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx + \int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\, dx \\
&= \operatorname{tg}(x) + \sec(x) = \operatorname{tg}(x) + \frac{1}{\cos(x)}.
\end{aligned}$$

Nota 10.3.11. *Para que una primitiva sea útil debe ser primitiva en todo un intervalo.*

10.3.4. La integración por partes

Teorema 10.3.12 (Integración por partes). *Si f y g son funciones derivables y sus derivadas f' y g' son integrables, entonces*

$$\int \big[f(x)g'(x)\big]\, dx = f(x)g(x) - \int \big[f'(x)g(x)\big]\, dx$$

Ejemplo 10.3.13. Calcular $\int xe^x\, dx$.

Por la integración por partes, tenemos

$$\int xe^x\, dx = \int \underbrace{x}_{f}\ \underbrace{e^x}_{g'}\, dx$$

Tenemos

$$\begin{cases} f(x) = x & \Longrightarrow \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x & \Longrightarrow \quad g(x) = e^x \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x$$

Ejemplo 10.3.14. Calcular $\int x \sin(x)\ dx$.

$$\int x \sin(x)\ dx = \int \underbrace{x}_{f}\ \underbrace{\sin(x)}_{g'}\ dx$$

Tenemos

$$\begin{cases} f(x) = x & \Longrightarrow \quad f\,'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin(x) & \Longrightarrow \quad g(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int x \sin(x)\ dx &= x\big(-\cos(x)\big) - \int \big(-\cos(x)\big)\ dx \\ &= -x\cos(x) + \int \cos(x)\ dx = -x\cos(x) + \sin(x). \end{aligned}$$

Ejemplo 10.3.15. Calcular $\int \ln(x)\ dx$.

$$\int \ln(x)\ dx = \int \big(\ln(x)\big)1\ dx = \int \underbrace{\big(\ln(x)\big)}_{f}\ \underbrace{1}_{g'}\ dx.$$

Tenemos

$$\begin{cases} f(x) = \ln(x) & \Longrightarrow \quad f\,'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & \Longrightarrow \quad g(x) = x \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \ln(x)\ dx = \int \big(\ln(x)\big)1\ dx &= \big(\ln(x)\big)x - \int \frac{1}{x} x\ dx \\ &= x\big(\ln(x)\big) - \int 1\ dx = x\big(\ln(x)\big) - x = x\big(\ln(x) - 1\big) \end{aligned}$$

Observación 10.3.16. *En algunos casos, como en el siguiente ejemplo, conviene aplicar dos o más veces la integración por partes.*

Ejemplo 10.3.17. Calcular $\int \frac{x^2}{e^x}\ dx$.

$$\int \frac{x^2}{e^x}\ dx = \int x^2 e^{-x}\ dx = \int \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{e^{-x}}_{g'}\ dx$$

Tenemos

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \Longrightarrow \quad f\,'(x) = 2x \\ g'(x) = e^{-x} & \Longrightarrow \quad g(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\int x^2e^{-x}\ dx = -x^2e^{-x} - \int 2x(-e^{-x})\ dx = -x^2e^{-x} + 2\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-x}}_{v'}\ dx$$

Se tiene que

$$\begin{cases} u(x) = x & \Longrightarrow \quad u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} & \Longrightarrow \quad v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}\ dx &= -x^2e^{-x} + 2\Big(- xe^{-x} - \int -e^{-x}\ dx\Big) \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\ dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}\end{aligned}$$

Nota 10.3.18. *Puede ocurrir que, aplicando la integración por partes dos o más veces, nos aparezca de nuevo la integral del principio. En este caso, basta despejar.*

Ejemplo 10.3.19. Calcular $\int e^x \cos(x)\ dx$.

$$\int e^x\cos(x)\ dx = \int \underbrace{e^x}_{g'}\underbrace{\cos x}_{f}\ dx$$

Tenemos

$$\begin{cases} f(x) = \cos(x) & \Longrightarrow \quad f'(x) = -\sin(x) \\ g'(x) = e^x & \Longrightarrow \quad g(x) = e^x \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int e^x\cos(x)\ dx &= e^x\cos(x) - \int e^x\big(- \sin(x)\big)\ dx \\ &= e^x\cos(x) + \int \underbrace{e^x}_{v'}\underbrace{\sin x}_{u}\ dx\end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) & \Longrightarrow \quad u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = e^x & \Longrightarrow \quad v(x) = e^x \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned}\int e^x\cos(x)\ dx &= e^x\cos(x) + \int e^x\sin x\ dx \\ &= e^x\cos(x) + \Big(e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\ dx\Big) \\ &= e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\ dx\end{aligned}$$

Por tanto, despejando, resolvemos nuestro problema:

$$2\int e^x \cos(x)\ dx = e^x\cos(x) + e^x \sin(x)$$

Así que

$$\int e^x \cos(x)\ dx = \frac{1}{2}e^x\big(\cos(x)+\sin(x)\big)$$

Nota 10.3.20. *A veces nos interesa la fórmula de integración por partes para la integral definida. Es la siguiente:*

$$\int_a^b \Big(f(x)g'(x)\Big)\ dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx$$

Ejemplo 10.3.21. Calcular $\int_1^e x\ln(x)\ dx$.

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln(x)\ dx &= \Big[\frac{x^2}{2}\ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e \Big(\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\Big)\ dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2}\\ &= \frac{e^2}{2} - \Big[\frac{x^2}{4}\Big]_1^e = \frac{e^2}{2} - \Big(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\Big) = \frac{e^2-1}{4}.\end{aligned}$$

10.3.5. Cambio de variable

Supongamos que queremos integrar una función $\Psi(x)$ que podemos expresar de la forma

$$\Psi(x) = f\big(u(x)\big)u'(x),$$

donde f es una función cuya primitiva F conocemos.

Basta aplicar la regla de la cadena para deducir que $F\big(u(x)\big)$ es primitiva de $\Psi(x) = f\big(u(x)\big)u'(x)$, pues su derivada es

$$\Big(F\big(u(x)\big)\Big)' = F'\big(u(x)\big)u'(x) = f\big(u(x)\big)u'(x) = \Psi(x).$$

Esto se puede resumir escribiendo:

Proposición 10.3.22.

$$\textit{Si}\quad \int f(t)\ dt = F(t),\ \textit{entonces}\quad \int f\big(u(x)\big)u'(x)\ dx = F\big(u(x)\big).$$

De esta forma, obtenemos las integrales siguientes: basta reemplazar x por $u(x)$ y dx por $u'(x)\ dx$ en la tabla de integrales inmediatas.

- $\displaystyle\int au'(x)\ dx = au(x)$
- $\displaystyle\int u(x)^n u'(x)\ dx = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1} \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\ dx = \ln|u(x)|$
- $\displaystyle\int e^{u(x)}u'(x)\ dx = e^{u(x)}$
- $\displaystyle\int a^{u(x)}u'(x)\ dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln(a)}$
- $\displaystyle\int u'(x)\sin(u(x))\ dx = -\cos\big(u(x)\big)$
- $\displaystyle\int u'(x)\cos(u(x))\ dx = \sin\big(u(x)\big)$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\cos^2\big(u(x)\big)}\ dx = \operatorname{tg}\big(u(x)\big)$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sin^2\big(u(x)\big)}\ dx = -\operatorname{cotg}\big(u(x)\big) = -\frac{\cos\big(u(x)\big)}{\sin\big(u(x)\big)}$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}\ dx = \operatorname{arc\,tg}\big(u'(x)\big)$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}\ dx = \arcsin\big(u(x)\big)$

Ejemplo 10.3.23. Calcular $\int \frac{4x^3+4x}{x^4+2x^2+7}\ dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^3+4x}{x^4+2x^2+7}\ dx &= \int \frac{(x^4+2x^2+7)'}{x^4+2x^2+7}\ dx = \ln|x^4+2x^2+7| \\ &= \ln(x^4+2x^2+7)\end{aligned}$$

Ejemplo 10.3.24. Calcular $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\ dx \\ &= \frac{1}{2}\arcsin\big(x^2\big)\end{aligned}$$

Nota 10.3.25. *Para integrar la función*

$$\Psi(x) = f\big(u(x)\big)u'(x),$$

reemplacemos $u(x)$ por t y $u'(x)\ dx$ por dt. De esta manera escribimos

$$\int \Psi(x)\ dx = \int f\big(u(x)\big)u'(x)\ dx = \int f(t)\ dt.$$

Ahora lo que tenemos que hacer es encontrar una primitiva de $f(t)$, y una vez que la calculemos volveremos a escribir $u(x)$ en vez de t. Es decir, el esquema sería el siguiente:

$$\int \Psi(x)\ dx = \int f\big(u(x)\big)u'(x)\ dx \overset{(*)}{=} \int f(t)\ dt \overset{(**)}{=} F(t) \overset{(***)}{=} F\big(u(x)\big).$$

Donde

$(*)$	*Aquí ponemos $u(x) = t$ y $u'(x)\ dx = dt$*
$(**)$	*Aquí calculamos la primitiva F de f.*
$(***)$	*Aquí "deshacemos" el cambio, es decir, sustituimos t por $u(x)$.*

Resumen:

1)	Sustituimos $u(x) = t$ y $u'(x)\ dx = dt$
2)	Resolvemos la integral resultante (en la variable t).
3)	"Deshacemos" el cambio, es decir, sustituimos t por $u(x)$.

Ejemplo 10.3.26. Calcular $\int \cos^5(x)\ dx$.

Gracias a la identidad trigonométrica fundamental

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

podemos escribir

$$\cos^5(x) = \cos^4(x)\cos(x) = \big(1 - \sin^2(x)\big)^2 \cos(x)$$

Esto nos sugiere tomar $\sin(x) = t$, con lo que $\cos(x)\ dx = dt$.

Así tenemos

$$\begin{aligned}\int \cos^5(x)\ dx &= \int \big(1 - \sin^2(x)\big)^2 \cos(x)\ dx = \int (1-t^2)^2\ dt \\ &= \int (1 - 2t^2 + t^4)\ dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \\ &= \frac{1}{5}\sin^5(x) - \frac{2}{3}\sin^3(x) + \sin(x)\end{aligned}$$

Nota 10.3.27. *Para simplificar la integral de una función, a veces hacemos el cambio $x = g(t)$, en vez de hacer $u(x) = t$. En este caso ponemos*

$$dx = g'(t)\ dt$$

Ejemplo 10.3.28. Calcular $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\ dx$.

Hacemos $x = t^6$. Así $dx = 6t^5\ dt$ y $t = \sqrt[6]{x}$, con lo cual

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\ dx &= \int \frac{6t^5}{t^2+t^3}\ dt = 6\int \frac{t^2t^3}{t^2(1+t)}\ dt = 6\int \frac{t^3}{1+t}\ dt \\
&\overset{(*)}{=} 6\int \Big(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\Big)\ dt \\
&= 6\Big(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln(1+t)\Big) \\
&= 6\Big(\frac{1}{3}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - \ln\big(1+\sqrt[6]{x}\big)\Big)
\end{aligned}$$

$(*)$ Hemos dividido el polinomio t^3 entre $1+t$.

Ejemplo 10.3.29. Calcular $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$.

Hacemos $x = \sin(t)$, así $dx = \cos(t)\ dt$ y $t = \arcsin(x)$, con lo cual, utilizando

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1+\cos(2x)\big) \quad \text{y} \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\ dx &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\ dt = \int \cos(t)\cos(t)\ dt \\
&= \int \cos^2(t)\ dt = \int \frac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big)\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos(2t)\ dt \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int 2\cos(2t)\ dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}2\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin(t)\sqrt{1-\sin^2(t)} \\
&= \frac{1}{2}\big(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\big).
\end{aligned}$$

Observación 10.3.30. *Cuando hacemos el cambio $x = g(t)$ suponemos que g es una función que tiene una inversa h, o sobreentendemos que estamos trabajando en algún intervalo en el que esto es cierto.*

Proposición 10.3.31. *Sea $\Phi(x)$ una función continua y $g(t)$ una función derivable con derivada continua. Supongamos además que $g(t)$ tiene una función inversa $h(x)$.*

Si $G(t)$ es una primitiva de $\Phi\big(g(t)\big)g'(t)$, entonces $G\big(h(x)\big)$ es una primitiva de $\Phi(x)$.

Resumen: Tanto si hacemos $u(x) = t$ como si hacemos $x = g(t)$, el procedimiento es el siguiente:

1)	Sustituimos $u(x) = t$ y $u'(x)\ dx = dt$ (o sustituimos $x = g(t)$ y $dx = g'(t)dt$)
2)	Resolvemos la integral resultante (en la variable t).
3)	"Deshacemos" el cambio.

Ejemplo 10.3.32. Calcular $\int x\sqrt{x-7}dx$.

Hacemos $t = \sqrt{x-7}$, despejamos x en la función de t, y derivamos:

$$t = \sqrt{x-7} \implies t^2 = x - 7 \implies x = t^2 + 7 \implies dx = 2t\,dt$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-7}dx &= \int (t^2+7)t2t\ dt = 2\int (t^4 + 7t^2)\ dt \\ &= \int t^4\ dt + 14\int t^2\ dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{14}{3}t^3 \\ &= \frac{2}{5}\big(\sqrt{x-7}\big)^5 + \frac{14}{3}\big(\sqrt{x-7}\big)^3\end{aligned}$$

Capítulo 11

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

11.1. Concepto de ecuación diferencial ordinaria

Definición 11.1.1. *Se llama* ***ecuación diferencial ordinaria*** (*en adelante* E.D.O.) *a una relación entre la variable independiente $t \in \mathbb{R}$, la función desconocida $y(t)$ y sus derivadas sucesivas $y'(t)$, $y''(t)$, …, $y^{(n)}$; es decir, a una expresión de la forma*

$$f\big(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)\big) = 0.$$

Ejemplos 11.1.2.

$$\begin{array}{ll} 1) & y''(t) - 3y'(t) + \cos\big(y(t)\big) - \sin(t) = 0; \\ 2) & y'(t) + \ln(t) = 0, \end{array}$$

son E.D.O. en las que función desconocida es $y(t)$.

Definición 11.1.3. *Se denomina* ***orden*** *de una ecuación diferencial al mayor orden de derivación de la función $y(t)$ que aparece en la ecuación diferencial.*

11.2. Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Definición 11.2.1. *Sean*

$$f\big(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)\big) = 0. \tag{11.1}$$

una E.D.O. *y* (a, b) *un intervalo de* $\mathbb{R}$. *Diremos que una función* $y(t)$ *es* ***solución*** *de la* E.D.O. *en el intervalo* (a, b) *si y sólo si, para todo* $t \in (a, b)$, *la función* $y(t)$ *y sus derivadas sucesivas verifican la ecuación*

$$f\big(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)\big) = 0.$$

Ejemplo 11.2.2. La solución de

$$y'(t) - 3t^2 y(t) = t^2$$

es

$$y(t) = e^{t^3} - \frac{1}{3}.$$

11.2.1. Solución general de una ecuación diferencial ordinaria

Definición 11.2.3. *Sean* $C_1, C_2, \dots, C_n$ *parámetros en* $\mathbb{R}$. *La función*

$$y(t) = g(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

es la ***solución general*** *de la* E.D.O. (11.1) *en el intervalo* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *si y sólo si sustituida en la ecuación diferencial, ésta se verifica para todo* $t \in (a, b)$.

Ejemplo 11.2.4. La ecuación diferencial ordinaria

$$y''(t) - 25y(t) = 0$$

tiene como solución general

$$y(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-5t}$$

donde C_1 y C_2 son números reales.

Observación 11.2.5. *La solución general de una* E.D.O. *depende de tantos parámetros como indica su orden.*

11.2.2. Solución particular de una ecuación diferencial ordinaria

Definición 11.2.6. *Sean* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, con* $t_0 \in (a,b) \subset \mathbb{R}$*, y sea*

$$y(t) = g(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

la solución general de la E.D.O. (11.1) *en el intervalo* (a,b)*.*

Dados $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0 \in \mathbb{R}$*, diremos que*

$$y_p(t) = g(t, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0)$$

es una ***solución particular*** *de la* E.D.O. (11.1)*, que pasa por el punto* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, si y sólo si se verifica que*

$$y_p(t_0) = g(t_0, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0).$$

El punto $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *se denomina* ***condición inicial*** *de la* E.D.O. (11.1)*.*

Ejemplo 11.2.7. La ecuación diferencial ordinaria

$$y'(t) = 6t^2 - 5$$

tiene como solución general

$$y(t) = 2t^3 - 5t + C$$

para todo número real C. Se obtiene una solución particular asignando valores específicos a C. Por ejemplo, tomando $C = 0$ se obtiene la solución particular

$$y(t) = 2t^3 - 5t.$$

Nota 11.2.8. *Gráficamente, una solución particular es una de las curvas de la familia que define la solución general; se trata, en concreto, de la curva que pasa por el punto* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*.*

11.3. Ecuaciones diferenciales de variables separables de primer orden

Definición 11.3.1. *Una* E.D.O. *de primer orden se llama de* ***variables separables*** *si y sólo si es de la forma*

$$y'(t)P\big(y(t)\big) = Q(t), \quad \text{o bien } P(y)dy = Q(t)dt \tag{11.2}$$

donde P *y* Q *son funciones continuas.*

Proposición 11.3.2. *La solución general de la* E.D.O. (11.2), *se obtiene integrando ambas partes de la igualdad, es decir,*

$$\int P(y)dy = \int Q(t)dt + C$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 11.3.3. Resolver la ecuación diferencial

$$y^4(t)e^{2t} + y'(t) = 0.$$

Solución 11.3.4. *Tenemos*

$$y^4(t)e^{2t} + \frac{dy}{dt} = 0.$$

Entonces

$$y^4(t)e^{2t}dt + dy = 0.$$

Si $y \neq 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *se tiene que*

$$e^{2t}dt + \frac{1}{y^4}dy = 0.$$

Integrando cada término, obtenemos la solución

$$\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{3y^3} = C.$$

Por tanto

$$y(t) = \Big(\frac{2}{3e^{2t} - 6C}\Big)^{\frac{1}{3}}.$$

11.4. Ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden

Definición 11.4.1. *Una* E.D.O. *de primer orden se llama* ***ecuación diferencial homogénea*** *si se puede poner de la forma*

$$y'(t) = P\left(\frac{y(t)}{t}\right) \tag{11.3}$$

donde P *es una función continua.*

Proposición 11.4.2. *La solución general de la* E.D.O. (11.5)*, se calcula haciendo el cambio de variable*

$$y(t) = tu(t),$$

con lo que la ecuación inicial se convierte en

$$tu'(t) + u(t) = P\big(u(t)\big),$$

que es una ecuación de variables separables.

Ejemplo 11.4.3. Resolver la ecuación diferencial homogénea

$$4t - 3y(t) + y'(t)(2y(t) - 3t) = 0.$$

Solución 11.4.4. *La ecuación se puede poner de la forma*

$$y'(t) = \frac{4\frac{t}{y(t)} - 3}{3\frac{t}{y(t)} - 2}.$$

Realizando la sustitución $y(t) = tu(t)$, se tiene que

$$4t - 3tu(t) + \big(tu'(t) + u(t)\big)\big(2u(t)t - 3t\big) = 0,$$

y dividiendo por t queda

$$4 - 3u(t) + \big(tu'(t) + u(t)\big)\big(2u(t) - 3\big) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$u'(t)t = \frac{3u(t) - 4 - 2u^2(t) + 3u(t)}{2u(t) - 3}$$

que es una ecuación de variables separables.

Integrando, se tiene:

$$\int \frac{2u - 3}{-2u^2 + 6u - 4} du = \int \frac{dt}{t},$$

es decir

$$-\frac{1}{2} \ln \left|u^2 - 3u + 2\right| = \ln |t| + C.$$

Deshaciendo el cambio de variable y operando se obtiene

$$y^2(t) - 3ty(t) + 2t^2 = K,$$

que es la solución general.

11.5. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Definición 11.5.1. *Una* ***ecuación diferencial lineal de primer orden*** *es una ecuación de la forma*

$$y'(t) + P(t)y(t) = Q(t)$$

donde P y Q son funciones continuas.

Proposición 11.5.2. *La solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden es*

$$y(t) = e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + C\right)$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 11.5.3. Resolver la ecuación diferencial

$$y'(t) - 3t^2y(t) = t^2.$$

Solución 11.5.4. *La ecuación diferencial es lineal de primer orden con*

$$P(t) = -3t^2 \quad y \quad Q(t) = t^2.$$

Según la proposición anterior tenemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\int 3t^2dt}\left(\int t^2e^{\int -3t^2dt}dt + C\right) = e^{t^3}\left(\int t^2e^{-t^3dt}dt + C\right) \\ &= e^{t^3}\left(-\frac{1}{3}e^{-t^3} + C\right) = -\frac{1}{3} + Ce^{t^3}. \end{aligned}$$

11.6. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Definición 11.6.1. *Una* ***ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes*** *es una ecuación de la forma*

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = h(t) \tag{11.4}$$

donde b y c son constantes en $\mathbb{R}$ y h es una función de una variable.

Si $h(t) = 0$ para todo t, se dice que la ecuación es ***homogénea****.*

Si $h(t) \neq 0$ para algún t, se dice que la ecuación es ***no homogénea****.*

Ejemplo 11.6.2.

$$1)\ \ y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0, \qquad 2)\ \ y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 8e^{-2t}.$$

Proposición 11.6.3. *Si $y_h(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea*

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0,$$

y si $y_p(t)$ es una solución particular de

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = h(t),$$

entonces la solución general de (11.4) *es*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

11.6.1. Cálculo de la solución general de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

Definición 11.6.4. *Se llama **ecuación característica** asociada a la* E.D.O. *lineal homogénea con coeficientes constantes reales*

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \tag{11.5}$$

a la ecuación polinómica

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{11.6}$$

Proposición 11.6.5. *Para cada raíz de la ecuación característica, λ_i, con $i \in \{1, 2\}$, se obtiene una función*

$$y_{\lambda_i}(t)$$

que será solución particular de la E.D.O. *lineal homogénea. Por tanto la soluciones general de la* E.D.O. *lineal homogénea es de la forma*

$$y(t) = C_1 y_{\lambda_1}(t) + C_2 y_{\lambda_2}(t)$$

donde C_1 y C_2 son números reales.

Observación 11.6.6. *La expresión concreta de cada $y_{\lambda_i}(t)$ dependerá de cómo sean las raíces de la ecuación característica.*

Proposición 11.6.7. *La solución general de* (11.5) *tiene las formas siguientes:*

1) Raíces reales simples de la ecuación (11.6).

Si las raíces λ_1 *y* λ_2 *de la ecuación característica* (11.6) *son reales y distintas, entonces la solución general de la ecuación* (11.5) *es*

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

donde C_1 *y* C_2 *son números reales.*

2) Raíz real múltiple de la ecuación (11.6).

Si la ecuación característica (11.6) *tiene una raíz doble* λ*, entonces la solución general de de la ecuación* (11.5) *es*

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

donde C_1 *y* C_2 *son números reales.*

3) Raíces imaginarias simples de la ecuación (11.6).

Si la ecuación característica (11.6) *tiene dos raíces complejas distintas* $\alpha + \beta i$ *y* $\alpha - \beta i$*, entonces la solución general de de la ecuación* (11.5) *es*

$$y(t) = e^{\alpha t}\Big(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)\Big)$$

donde C_1 *y* C_2 *son números reales.*

Ejemplo 11.6.8. Resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) - 3y'(t) - 10y(t) = 0.$$

Solución 11.6.9. *La ecuación característica es*

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0.$$

Como las raíces $\lambda_1 = 5$ *y* $\lambda_2 = -2$ *son reales y distintas, resulta del caso* 1) *de la proposición anterior que la solución general es*

$$y(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 11.6.10. Resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0.$$

Solución 11.6.11. *La ecuación característica*

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

tiene una raíz doble, 3*. Por tanto, según el caso* 2) *de la proposición anterior, la solución general es*

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$*.*

Ejemplo 11.6.12. Resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) - 10y'(t) + 41y(t) = 0.$$

Solución 11.6.13. *Las raíces de la ecuación característica*

$$\lambda^2 - 10\lambda + 41 = 0$$

son

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 164}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{10 \pm 8i}{2} = 5 \pm 4i.$$

De acuerdo con el caso 3) *de la proposición anterior, la solución general de la ecuación diferencial es*

$$y(t) = e^{5t}\Big(C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t)\Big)$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$*.*

11.6.2. Cálculo de la solución particular de la ecuación diferencial completa de segundo orden con coeficientes constantes

Para determinar una solución particular de (11.4), ecuación diferencial lineal completa de segundo orden, deberá tenerse en cuenta la forma que tenga la función $h(t)$.

El siguiente esquema muestra una estrategia de búsqueda de la solución particular.

1) Si $h(t)$ un polinomio de grado m.

   $1 \cdot 1)$ Si 0 no es raíz de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial homogénea; entonces una solución particular es un polinomio de grado m de la forma

   $$y_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m,$$

   siendo $a_0, a_1, \ldots, a_m$ los parámetros a determinar sustituyendo la solución particular $y_p(t)$, y sus derivadas sucesivas, en la ecuación diferencial.

$1 \cdot 2)$ Si 0 es una raíz de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial homogénea, con multiplicidad k; entonces una solución particular es de la forma

$$y_p(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m) \cdot t^k,$$

siendo $a_0, a_1, \ldots, a_m$ los parámetros a determinar.

2) Si la función $h(t)$ es de la forma:

$$h(t) = (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_m t^m) \cdot e^{\alpha t},$$

deberán distinguirse dos posibilidades:

$2 \cdot 1)$ Si α no es raíz de la ecuación característica; entonces una solución particular es de la forma

$$y_p(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m) \cdot e^{\alpha t},$$

siendo $a_0, a_1, \ldots, a_m$ los parámetros a determinar.

$2 \cdot 2)$ Si α es raíz de multiplicidad k de la ecuación característica; entonces una solución particular es de la forma

$$y_p(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m) \cdot e^{\alpha t} \cdot t^k,$$

siendo $a_0, a_1, \ldots, a_m$ los parámetros a determinar.

3) Si la función $h(t)$ es de la forma:

$$h(t) = e^{\alpha t}\Big(P_l(t)\cos(\beta t) + Q_m(t)\sin(\beta t)\Big),$$

con $P_l(t)$ y $Q_m(t)$ son polinomios de grado l y m respectivamente. Deberán distinguirse dos posibilidades:

$3 \cdot 1)$ Si $\alpha \pm \beta i$ no es raíz de la ecuación característica, una solución particular es de la forma

$$y_p(t) = e^{\alpha t}\Big(T_r(t)\cos(\beta t) + S_r(t)\sin(\beta t)\Big),$$

donde $T_r(t)$, $S_r(t)$ son polinomios de grado $r = \max\{l, m\}$.

$3 \cdot 2)$ Si $\alpha \pm \beta i$ es raíz de multiplicidad k de la ecuación característica, una solución particular es de la forma

$$y_p(t) = t^k \cdot e^{\alpha t}\Big(T_r(t)\cos(\beta t) + S_r(t)\sin(\beta t)\Big),$$

donde $T_r(t)$, $S_r(t)$ son polinomios de grado $r = \max\{l, m\}$.

Ejemplo 11.6.14. Resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) - 4y(t) = 6t - 4t^2.$$

Solución 11.6.15. *Resolvamos en primer lugar la ecuación homogénea*

$$y''(t) - 4y(t) = 0.$$

La ecuación característica asociada es

$$\lambda^2 - 4 = 0,$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}.$$

Puesto que 0 *no es raíz de la ecuación característica, entones calculamos una solución particular de la forma*

$$y_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2.$$

Como

$$y''(t) - 4y(t) = 2a_2 - 4a_0 - 4a_1 t - 4a_2 t^2,$$

debe ser

$$(2a_2 - 4a_0) - 4a_1 t - 4a_2 t^2 = 6t - 4t^2.$$

Identificando coeficientes se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2a_2 - 4a_0 & = 0 \\ \quad -4a_1 & = 6 \\ \quad -4a_2 & = -4 \end{cases}$$

cuya solución es

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = -\frac{3}{2}, \quad a_2 = 1.$$

Así pues, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t + t^2 + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}.$$

Ejemplo 11.6.16. Resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) - y'(t) = 2t + 3t^2.$$

Solución 11.6.17. *Resolvamos en primer lugar la ecuación homogénea*

$$y''(t) - y'(t) = 0.$$

La ecuación característica asociada es

$$\lambda^2 - \lambda = 0,$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = C_1 + C_2 e^t.$$

Puesto que 0 *es raíz de la ecuación característica, con multiplicidad* 1*, entones calculamos una solución particular de la forma*

$$y_p(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \cdot t.$$

Como

$$y''(t) - y'(t) = 2a_1 - a_0 + (6a_2 - 2a_1)t - 3a_2 t^2,$$

debe ser

$$2a_1 - a_0 + (6a_2 - 2a_1)t - 3a_2 t^2 = 2t + 3t^2.$$

Identificando coeficientes se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2a_1 - a_0 & = 0 \\ 6a_2 - 2a_1 & = 2 \\ -3a_2 & = 3 \end{cases}$$

cuya solución es

$$a_0 = -8, \quad a_1 = -4, \quad a_2 = -1.$$

Así pues, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = -8t - 4t^2 - t^3 + C_1 + C_2 e^t.$$

Ejemplo 11.6.18. Resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = (4t + 1)e^{2t}$$

Solución 11.6.19. *La ecuación característica es*

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2.$$

La solución general de la ecuación homogénea asociada, será:

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$$

Como 2 no es raíz de la ecuación característica; entonces una solución particular es de la forma

$$y_p(t) = (a_0 + a_1 t) \cdot e^{2t},$$

Sustituyendo:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = (4a_0 + 5a_1 + 4a_1 t)e^{2t} = (4t + 1)e^{2t}.$$

Igualando coeficientes

$$\left\{ \begin{array}{rl} 4a_1 & = 4 \\ 4a_0 + 5a_1 & = 1 \end{array} \right.$$

resulta:

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 1.$$

La solución general de la ecuación diferencial completa es:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} + (-1 + t)e^{2t}.$$

Ejemplo 11.6.20. Resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (t + 1)e^{2t}$$

Solución 11.6.21. *La ecuación característica asociada a la ecuación homogénea es*

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

que tiene como raíz, doble,

$$\lambda = 2.$$

Por tanto la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$$

Puesto que 2 es raíz de multiplicidad 2 de la ecuación característica; entonces una solución particular es de la forma

$$y_p(t) = (a_0 + a_1 t) \cdot e^{2t} \cdot t^2,$$

Sustituyendo:

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (2a_0 + 6a_1 t)e^{2t} = (t+1)e^{2t}$$

Igualando coeficientes

$$\begin{cases} 6a_1 & = 1 \\ 2a_0 & = 1 \end{cases}$$

resulta:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{6}.$$

La solución general de la ecuación diferencial completa es:

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3\right) \cdot e^{2t}.$$

Ejemplo 11.6.22. Resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 25e^t \sin(t).$$

Solución 11.6.23. *La ecuación característica asociada a la ecuación homogénea, es*

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0,$$

cuya única raíz (*doble*) *es*

$$\lambda = 3.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}.$$

Tenemos $\alpha = \beta = 1$. *Como* $1 \pm i$ *no es raíz de la ecuación característica, entonces una solución particular es de la forma*

$$y_p(t) = e^t \Big(T_r(t)\cos(t) + S_r(t)\sin(t)\Big)$$

donde

$$T_r(t) = a \in \mathbb{R}, \quad S_r(t) = b \in \mathbb{R}$$

ya que

$$r = \text{máx}\{l = 0, m = 0\}.$$

Imponiendo que $y_p(t)$ *sea solución de la ecuación completa inicial, se obtiene*

$$\begin{aligned} e^t\big(2b\cos(t) - 2a\sin(t)\big) &- 6e^t\big(a+b)\cos(t) + (b-a)\sin(t)\big) \\ &+ 9e^t\Big(a\cos(t) + b\sin(t)\Big) \\ &= 25e^t \sin(t), \end{aligned}$$

por tanto

$$(3a-4b)\cos(t)+(4a-3b-25)\sin(t)=0.$$

Como el sistema $\{\sin(t),\cos(t)\}$ *es linealmente independiente, se sigue que*

$$\begin{cases} 3a-4b & =0 \\ 4a-3b-25 & =0 \end{cases}$$

de donde

$$a=4, \quad b=3.$$

Así pues la solución general buscada es

$$y(t)=e^t\big(4\cos(t)+3\sin(t)\big)+C_1e^{3t}+C_2te^{3t}.$$

Ejemplo 11.6.24. Resolver la ecuación diferencial

$$y''(t)-2y'(t)+2y(t)=e^t\cos(t).$$

Solución 11.6.25. *La ecuación característica asociada a la ecuación homogénea, es*

$$\lambda^2-2\lambda+2=0.$$

La solución general de de la ecuación homogénea es

$$y_h(t)=e^t\Big(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)\Big)$$

Como $1\pm i$ *es raíz de multiplicidad* 1 *de la ecuación característica, una solución particular es de la forma*

$$y_p(t)=t\cdot e^t\Big(T_r(t)\cos(t)+S_r(t)\sin(t)\Big),$$

donde $T_r(t)$, $S_r(t)$ *son polinomios de grado* $r=\max\{l=0,m=0\}$, *es decir,*

$$y_p(t)=t\cdot e^t\Big(a\cos(t)+b\sin(t)\Big)$$

Imponiendo que $y_p(t)$ *sea solución de la ecuación completa inicial, se obtiene*

$$-2a\sin(t)+(2b-1)\cos(t)=0.$$

Como el sistema $\{\sin(t),\cos(t)\}$ *es linealmente independiente, se sigue que*

$$\begin{cases} -2a & =0 \\ 2b-1 & =0 \end{cases}$$

de donde

$$a=0, \quad b=\frac{1}{2}.$$

Así pues la solución general buscada es

$$y(t)=e^t\Big(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)\Big)+\frac{1}{2}\sin(t)\cdot te^t.$$