EJERCICIOS RESUELTOS

ESTUDIO DE LA VALIDEZ DE RAZONAMIENTOS CON LÓGICA DE PRIMER ORDEN

MATEMÁTICAS-I. 2011-12

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA

Colección de ejercicios resueltos sobre el estudio de la validez de razonamientos: P1, P2,…Pn $\Rightarrow$ Q, donde Pi son las proposiciones premisas y Q la conclusión, o lo que es lo mismo, sobre demostrar que la proposición Q es consecuencia lógica de las premisas.

PROPÓSITO

- Aprender a demostrar la validez de un razonamiento usando los métodos de las tablas de verdad y del contraejemplo.

RECUERDA QUE:

- El método de la **Tabla de Verdad** consiste en hacer una tabla en donde se interpreta cada fórmula del razonamiento a partir de sus componentes básicas. Cada fila de la tabla es una interpretación. Se buscan filas en donde las premisas sean verdaderas y se comprueba cómo se interpreta la conclusión. Si la conclusión se interpreta como verdadera el argumento es correcto, si la conclusión es falsa, el argumento es no correcto. Las otras interpretaciones no nos interesan.

- El método del **contraejemplo** supone que el razonamiento dado no es correcto admitiendo la existencia de una interpretación que interprete a las fórmulas premisas como verdaderas y a la fórmula conclusión como falsa; con esta hipótesis se interpretan todas las subfómulas del razonamiento. Si no aparece ninguna contradicción al interpretarlas el razonamiento admite una interpretación contraejemplo y por lo tanto no es correcto, por el contrario, si aparece contradicción el razonamiento es correcto (no admite la hipótesis del contraejemplo).

PASOS QUE SE DEBEN SEGUIR EN LA RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS:

1º.- Detectar premisas y conclusión del razonamiento.

2º.- Formalización del problema en el lenguaje formal elegido.

3º.- Aplicación del método elegido.

4º.- Explicación de resultados.

MC (marco conceptual): conjunto de símbolos del lenguaje usados en la formalización de las sentencias.

Pi: proposición premisa Pi (i =1,… n).

Q: proposición conclusión.

Fbf-S: fórmula bien formada de la sentencia S.

>> Para Raz-1 hasta Raz-6 usar el siguiente marco conceptual:

MC = {es: estudias; ap: apruebas; co: haces los controles; fe: eres feliz}

Raz-1: **"Si estudias, apruebas y eres feliz. Como no has aprobado, deduzco que no has estudiado".**

Método de demostración**: tablas de verdad.**

Solución.1.

1º.- Detectar premisas y conclusión.

Si estudias, apruebas y eres feliz **(P1)**. Como no has aprobado **(P2)**, deduzco que no has estudiado **(Q)**.

2º.- Formalización: **es → ap ∧ fe, ¬ap ⇒ ¬es**

3º.- Aplicación del método**:**

			P1					P2	Q
es	**ap**	**fe**	**es**	→	**ap**	∧	**fe**	**¬ap**	**¬es**
V	V	V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F	F	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	**V**	F	F	V	**V**	**V**
F	F	F	F	**V**	F	F	F	**V**	**V**

4º.- Explicación de resultados.
En las filas 7 y 8 se interpretan las premisas y la conclusión como verdaderas. Luego Raz-1 es correcto.

Raz-2: **"Sólo si estudias, apruebas. No has estudiado, puesto que no has aprobado aunque eres feliz".**

Método de demostración**: tablas de verdad**

Solución.2.

1º.- Detectar premisas y conclusión.

Sólo si estudias, apruebas (P1). No has estudiado (Q) puesto que no has aprobado aunque eres feliz (P2).

2º.- Formalización: ap → es, ¬ap ∧ fe ⇒ ¬es

3º.- Aplicación del método:

			P1			P2			Q
es	**ap**	**fe**	**ap**	$\rightarrow$	**es**	**¬ap**	$\wedge$	**fe**	**¬es**
V	V	V	V	**V**	V	V	**V**	V	**F**
V	V	F	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F	F	F	V	F
V	F	F	V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F	F	F	F	V

4º.- Explicación de resultados.

En la fila 1 las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, luego Raz-2 NO es correcto.

Raz-3: **"Está claro que no has estudiado y no has hecho los controles ya que has suspendido y no eres feliz, y para aprobar y ser feliz era necesario que estudiaras y que hicieras los controles".**

Método de demostración**: Contraejemplo.**

Solución.3.

1º.- Detectar premisas y conclusión.

Está claro que no has estudiado y no has hecho los controles **(Q)** ya que has suspendido y no eres feliz **(P1)**, y para aprobar y ser feliz era necesario que estudiaras y que hicieras los controles **(P2)**.

2º.- Formalización: $\mathbf{ap \wedge fe \rightarrow es \wedge co,\ \neg ap \wedge \neg fe \Rightarrow\ \neg es \wedge \neg co}$

3º.- Aplicación del método:

P1: ap $\wedge$ fe $\rightarrow$ es $\wedge$ co	**P2: ¬ap $\wedge$ ¬fe**	**Q: ¬es $\wedge$ ¬co**
V	V	F
	¬ap=V, ¬fe=V ap=F, fe=F	
ap $\wedge$ fe=F $\Rightarrow$ es $\wedge$ co=V/F		
No existe # CONTRADICCIÓN		

4º.- Explicación de resultados.

Con la interpretación: I = {ap=F, fe=F, es=V, co=V}, podemos interpretar las premisas P1 y P2 como verdaderas y Q como falsa, luego Raz-3 admite un contraejemplo por lo que NO es correcto.

Raz-4: **"Para que apruebes y seas feliz no es suficiente que estudies, es necesario. No has aprobado ni eres feliz puesto que no has estudiado".**

Método de demostración**: Tablas de verdad**

Solución.4.

1º.- Detectar premisas y conclusión.

Para que apruebes y seas feliz no es suficiente que estudies **(P1)**, es necesario **(P2)**. No has aprobado ni eres feliz **(Q)** puesto que no has estudiado **(P3)**.

2º.- Formalización: $\neg(\text{es} \rightarrow \text{ap} \wedge \text{fe}),\ \text{ap} \wedge \text{fe} \rightarrow \text{es},\ \neg\text{es} \Rightarrow \neg\text{ap} \wedge \neg\text{fe}$

3º.- Aplicación del método:

			P1						P2					P3	Q		
es	**ap**	**fe**	**¬(**	**es**	**→**	**ap**	**∧**	**fe)**	**ap**	**∧**	**fe**	**→**	**es**	**¬es**	**¬ap**	**∧**	**¬fe**
V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	V	V	F	V	F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F	V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F	F	F	F	F	F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F	F	V	F	F	V	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V

4º.- Explicación de resultados.

No existe ninguna fila con premisas verdaderas y conclusión falsa, luego Raz-4 correcto.

Raz-5: **"No apruebas a menos que estudies o hagas todos los controles. No sucede que no apruebes o hagas los controles. Deduzco que has aprobado y que no eres feliz aunque hayas estudiado, puesto que no has estudiado ni has hecho los controles".**

Método de demostración**: Contraejemplo**

Solución.5.

1º.- Detectar premisas y conclusión.

No apruebas a menos que estudies o hagas todos los controles **(P1)**. No sucede que, no apruebes o hagas los controles **(P2).** Deduzco que has aprobado y que no eres feliz aunque hayas estudiado **(Q),** puesto que no has estudiado ni has hecho los controles (**P3)**.

2º.- Formalización: $\text{ap} \rightarrow \text{es} \vee \text{co},\ \neg(\neg\text{ap} \vee \text{co}),\ \neg\text{es} \wedge \neg\text{co} \Rightarrow \text{ap} \wedge \neg\text{fe} \wedge \text{es}$

3º.- Aplicación del método:

P1: ap → es ∨ co	**P2: ¬(¬ap ∨ co)**	**P3: ¬es ∧ ¬co**	**Q: ap ∧ ¬fe ∧ es**
V	V	V	V
			ap=V, ¬fe=V, es=V
		Si es=V (en Q) ⇒ ¬es=F ⇒ ¬es ∧ ¬co =F # Contradicción por suponer P1=V	

4º.- Explicación de **resultados**.

El razonamiento Raz-5 no admite contraejemplo, luego es correcto.

Raz-6: **"Apruebas y eres feliz a menos que no estudies ni hagas todos los controles. Sólo si no haces los controles no apruebas, pero si estudias, si. Has aprobado y eres feliz, ya que has estudiado y has hecho los controles".**

Método de demostración**: Contraejemplo.**

Solución.6.

1º.- Detectar premisas y conclusión.

Apruebas y eres feliz a menos que no estudies ni hagas todos los controles **(P1)**. Sólo si no haces los controles no apruebas, pero si estudias, si **(P2)** Has aprobado y eres feliz **(Q)**, ya que has estudiado y has hecho los controles (**P3)**.

2º.- Formalización: $\neg(\mathbf{ap} \wedge \mathbf{fe}) \rightarrow \neg\mathbf{es} \wedge \neg\mathbf{co}$, $\neg\mathbf{ap} \rightarrow \neg\mathbf{co}$, $\mathbf{es} \rightarrow \mathbf{ap}$, $\mathbf{es} \wedge \mathbf{co} \Rightarrow \mathbf{ap} \wedge \mathbf{fe}$

3º.- Aplicación del método:

P1: $\neg(ap \wedge fe) \rightarrow \neg es \wedge \neg co$	**P2: $\neg ap \rightarrow \neg co$**	**P3: $es \rightarrow ap$**	**P4: $es \wedge co$**	**Q: $ap \wedge fe$**
V	V	V	V	V
			es=V,co=V	ap=V, fe=V
		Si es=V (por P4) $\Rightarrow$ ap=V		
Si ap=V (por P3) y fe=V $\Rightarrow \neg(ap \wedge fe)$=F $\Rightarrow$ P1=V	Si ap=V (por P3) $\Rightarrow \neg ap$=F $\Rightarrow$ P2=V			

4º.- Explicación de resultados.

Con la interpretación: I = {ap=V, fe=V, es=V, co=V}, podemos interpretar las premisas P1, P2, P3 y P4 como verdaderas y Q como falsa, luego Raz-6 admite un contraejemplo por lo que NO es correcto.

Raz-7: **"Aprobarás el examen de mates sólo si te animas a estudiar los domingos. Para que seas un buen informático es suficiente que te animes a estudiar los domingos, sin embargo no es necesario que apruebes el examen de mates. Por lo que, o no apruebas el examen de mates o eres un buen informático".**

Define el marco conceptual en el lenguaje de proposiciones.

Método de demostración**: Tablas de verdad**

Solución.7.

1º.- Detectar premisas y conclusión. Ver tabla

2º.- Formalización. Ver tabla.

MC = { ap: apruebas examen mates; in: eres buen informático; do: te animas a estudiar los domingos }	
Fbf-P1	$\mathbf{ap} \rightarrow \mathbf{do}$
Fbf-P2	$(\mathbf{do} \rightarrow \mathbf{in}) \wedge \neg(\mathbf{in} \rightarrow \mathbf{ap})$
Fbf-Q	$\neg\mathbf{ap} \vee \mathbf{in}$

3º.- Aplicación del método:

			P1			P2								Q
ap	**do**	**in**	**ap**	**→**	**do**	**(do**	**→**	**in)**	**∧**	**¬**	**(in**	**→**	**ap)**	**¬ap ∨ in**
V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	F	F	F	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	F	F	V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	**V**	V	V	V	V	**V**	V	V	F	F	**V**
F	V	F	F	V	V	V	F	F	F	F	F	V	F	V
F	F	V	F	**V**	F	F	V	V	**V**	V	V	F	F	**V**
F	F	F	F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V

4º.- Explicación de resultados.

En las filas 5 y 7 las premisas y la conclusión son verdaderas, luego Raz-7 es correcto.

Raz-8: **"El profesor Lógicus se enfurruña a no ser que (a menos que) la profesora Chusita apruebe a los alumnos. O la profesora Chusita no aprueba a los alumnos o éstos no hacen gansadas. Luego, el profesor Lógicus se enfurruña a menos que la profesora Chusita apruebe a los alumnos o éstos no hagan gansadas".**

Define el marco conceptual en el lenguaje de proposiciones.

Método de demostración**: Tablas de verdad**

Solución.8.

1º.- Detectar premisas y conclusión. Ver tabla.

2º.- Formalización. Ver tabla.

MC = { en: profesor lógicus se enfurruña; ap: profesora Chusita aprueba a los alumnos ga: los alumnos hacen gansadas }	
Fbf-P1	**¬en → ap**
Fbf-P2	**¬ap ∨ ¬ ga**
Fbf-Q	**¬en → ap ∨ ¬ga**

3º.- Aplicación del método:

			P1			P2			Q				
en	**ap**	**ga**	**¬en**	**→**	**ap**	**¬ap**	**∨**	**¬ga**	**¬en**	**→**	**ap**	**∨**	**¬ga**
V	V	V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	F
V	V	F	F	**V**	V	F	**V**	V	F	**V**	V	V	V
V	F	V	F	**V**	F	V	**V**	F	F	**V**	F	F	F
V	F	F	F	**V**	F	V	**V**	V	F	**V**	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V	F
F	V	F	V	**V**	V	F	**V**	V	V	**V**	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V

4º.- Explicación de resultados.

En las filas 2, 3, 4 y 6 las premisas y la conclusión son verdaderas luego Raz-8 es correcto.

Raz-9: **“Para que MariPuri sea belleza del Foc de Alcoyciti es necesario que su padre no sea el alcalde, sin embargo sí que es necesario que su padre sea el alcalde para que su madre salga en la comparsa vestida de mora. Si los concejales no protestan entonces Luisita será la belleza del Foc. Los concejales no protestan a menos que la mujer del alcalde salga en la comparsa vestida de mora. Luego al menos una de las dos, MariPuri o Luisita, será la belleza del Foc del Alcoyciti, pero no ambas”**.

Define el marco conceptual en el lenguaje de proposiciones.

Método de demostración**: Contraejemplo**

Solución.9.

1º.- Detectar premisas y conclusión. Ver tabla.

2º.- Formalización. Ver tabla.

MC = {mp: Maripuri es belleza del foc; al: padre Maripiuri es alcalde; ma: madre Maripiuri sale comparsa vestida mora; co: concejales protestan; lu: Luisita belleza del foc }	
Fbf-P1	**$mp \rightarrow \neg al$**
Fbf-P2	**$ma \rightarrow al$**
Fbf-P3	**$\neg co \rightarrow lu$**
Fbf-P4	**$co \rightarrow ma$**
Fbf-Q	**$(mp \vee lu) \wedge \neg(mp \wedge lu)$**

3º Aplicación del método:

P1: $mp \rightarrow \neg al$	**P2: $ma \rightarrow al$**	**P3: $\neg co \rightarrow lu$**	**P4: $co \rightarrow ma$**	**Q: $(mp \vee lu) \wedge \neg(mp \wedge lu)$**
V	V	V	V	F
No existe # CONTRADICCIÓN				

4º.- Explicación de resultados.

Con la siguiente interpretación: I = {mp=F, lu=F, co=V, ma=V, al=F}, podemos interpretar las premisas como verdaderas y Q como falsa, luego Raz-9 admite un contraejemplo por lo que NO es correcto.

Raz-10: **“Voy a la facultad o me quedo en casa pero no ambas cosas. Para que vaya a la facultad es necesario que vaya a clase de mates. Para que estudie lógica es suficiente que me quede en casa. Estudio lógica ya que no voy a clase de mates”**.

Define el marco conceptual en el lenguaje de proposiciones.

Método de demostración**: Contraejemplo**

Solución.10.

1º.- Detectar premisas y conclusión. Ver tabla.

2º.- Formalización. Ver tabla.

MC = { fa: voy a la facultad; ca: me quedo en casa; ma: voy a clase de mates; lo: estudio lógica }	
Fbf-P1	**$(fa \vee ca) \wedge \neg(fa \wedge ca)$**
Fbf-P2	**$fa \rightarrow ma$**
Fbf-P3	**$ca \rightarrow lo$**
Fbf-P4	**$\neg ma$**
Fbf-Q	**lo**

3º Aplicación del método:

P1: $(fa \vee ca) \wedge \neg(fa \wedge ca)$	**P2: $fa \rightarrow ma$**	**P3: $ca \rightarrow lo$**	**P4: $\neg ma$**	**Q: lo**
V	V	V	V	F
		Si lo=F (por Q) $\Rightarrow$ ca=F (para que P3=V)	ma=F	
	Si ma=F (por P4) $\Rightarrow$ fa=F (para que P2=V)			
Si ca=F (por P3) y fa=F (por P2) $\Rightarrow$ $fa \vee ca$=F $\Rightarrow$ P1=F # CONTRADICCIÓN				

4º.- Explicación de resultados.

El razonamiento Raz-10 no admite contraejemplo luego es correcto.

Raz-11: **"Aprobarás el examen de mates sólo si te animas a estudiar los domingos y no te duermes en clase. Para que seas un buen informático es suficiente que no te animes a estudiar los domingos aunque te duermas en clase. Por lo que, o no apruebas el examen de mates o eres un buen informático"**.

Define el marco conceptual en el lenguaje de proposiciones.

Método de demostración**: Contraejemplo.**

Solución.11.

1º.- Detectar premisas y conclusión. Ver tabla.

2º.- Formalización. Ver tabla.

MC = { ap: apruebas examen de mates; es: animas a estudiar los domingos; du: duermes en clase; if: eres buen informático }	
Fbf-P1	**$ap \rightarrow es \wedge \neg du$**
Fbf-P2	**$\neg es \wedge du \rightarrow if$**
Fbf-Q	**$\neg ap \vee if$**

3º Aplicación del método:

P1: ap → es ∧ ¬du	**P2: ¬es ∧ du → if**	**Q: ¬ap ∨ if**
V	V	F
		¬ap=F y if=F
Si ap=V (por Q) ⇒ es ∧¬du=V (para que P1=V) ⇒ es=V y ¬du=V ⇒ du=F		
	Si if=F (por Q) ⇒ ¬es ∧ du=F (para que P2=V) es=V (por P1) ⇒ ¬es=F	

4º.- Explicación de resultados.

Con la siguiente interpretación: I = {es=V, du=F, if=F, ap=V}, podemos interpretar las premisas P1 y P2 como verdaderas y Q como falsa, luego Raz-11 admite un contraejemplo por lo que NO es correcto.

Raz-12: La sentencia S: **"Es necesario que sea cierta A o B para que sea cierta C"** se **interpreta** como:

a)	Falsa, si es cierta A y B pero es falsa C
b)	Verdadera, si no es cierta A o B a menos que sea cierta C
c)	Verdadera, si es cierta B y falsa A
d)	Falsa, si es cierta A o B o C

Encuentra la respuesta correcta haciendo la **tabla de verdad y marca la(s) fila(s)** que proporcionan dicha respuesta.

			Fbf-S:	**Fbf-S falsa:**	**Fbf- a)**	**Fbf- b)**	**Fbf- c)**	**Fbf- d)**
a	**b**	**c**	**c → a ∨ b**	**¬(c → a ∨ b)**	**a ∧ b ∧ ¬c**	**a ∨ b → c**	**b ∧ ¬a**	**a ∨ b ∨ c**
V	V	V	V	F	F	V	F	V
V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V
F	V	V	**V**	F	F	V	**V**	V
F	V	F	**V**	F	F	V	**V**	V
F	F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	F	F	V	F	F

Raz-13: La sentencia S: **"Es falsa A o es falsa B"** se **interpreta** como:

a)	Verdadera, si es cierta A
b)	Verdadera, si es falsa la conjunción A y B
c)	Falsa, si es cierta B y falsa A
d)	Falsa, si no sucede que, si es cierta A sea cierta B

Encuentra la respuesta correcta haciendo la **tabla de verdad y marca la(s) fila(s)** que proporcionan dicha respuesta.

		Fbf-S:	Fbf-S falsa:	Fbf- a)	Fbf- b)	Fbf- c)	Fbf- d)
a	**b**	$\neg a \vee \neg b$	$\neg(\neg a \vee \neg b)$	**a**	$\neg(a \wedge b)$	$b \wedge \neg a$	$\neg(a \rightarrow b)$
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F	F

Raz-14: Demostrar por el método del **contraejemplo** que la expresión: "**Es suficiente que sea cierta A para que no lo sea B**" es falsa cuando **"es cierta B y falsa A":**

Premisa		Expresión
$b \wedge \neg a$	$\Rightarrow$	$\neg(a \rightarrow \neg b)$
V		F
$b=V \Rightarrow \neg b=F$ $\neg a=V \Rightarrow a=F$		$a \rightarrow \neg b = V$
La interpretación I={a=F, b=V} es un contraejemplo que interpreta la premisa como V y la conclusión como F, luego el **argumento no es correcto**		