

TEMA-3: INTERPRETACIÓN DE RAZONAMIENTOS LÓGICOS

MATEMÁTICAS-I. 2011-12

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA



- 3.1. Interpretación del lenguaje formal de la lógica de primer orden.
- 3.2. Evaluación semántica de fórmulas lógicas.
- 3.3. Métodos de las Tablas de verdad y del Contraejemplo.
- 3.4. Fórmula asociada a un razonamiento.
- 3.5. Estudio de la validez de un razonamiento a partir del conjunto de las fórmulas que lo conforman.
- 3.6. La regla de Resolución de Robinson.
- 3.7. Ejercicios resueltos.
- 3.8. Si quieres saber más... Bibliografía, enlaces web y lógica divertida.

Decir de lo que no es que es, o de lo que es que no es, es falso, y decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero.

Aristóteles, Metafísica

INTERÉS

La construcción de un Sistema Formal implica la definición de la noción de verdad para la interpretación de las fórmulas de dicho sistema. Se obtiene así un Sistema Formal Interpretado. En este tema vamos a ver el aspecto semántico o interpretativo de la lógica de Proposiciones y de Predicados. Con ello demostraremos si un razonamiento interpretado es correcto. Nos basaremos en estudiar si de un conjunto de premisas que son verdaderas podemos inferir una fórmula conclusión, que sea verdadera. Si esto se demuestra, se dice que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas o que las premisas implican lógicamente a la conclusión.

Con la evaluación semántica de las proposiciones atómicas se conseguirá la evaluación de las proposiciones moleculares y por ende, se obtendrá la interpretación de los razonamientos, que conformará el estudio de su validez. Con los métodos de las tablas de verdad y el del contraejemplo podremos realizar dicha labor.

OBJETIVOS

- Aprender a interpretar fórmulas lógicas y razonamientos.
- Estudiar la validez de razonamientos con el método de las tablas de verdad y el del contraejemplo.
- Demostrar si un conjunto de fórmulas escritas en forma clausal es insatisfacible.

Palabras clave: interpretación, valor de verdad, tautología, tabla de verdad, contraejemplo, forma clausal, resolución.

● Problema a resolver

Interpretar cada una de las componentes del razonamiento $R: P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow Q$ y comprobar si sucede lo siguiente: cada vez que interpretemos las premisas como verdaderas, la conclusión también se interpreta a verdadera. Esto lo llevaremos a cabo de la siguiente forma:

1º.- Aplicando el método de las tablas de verdad y el método del contraejemplo.

2º.- Comprobando si el conjunto de cláusulas $C = \{P_i, \neg Q\}$, $(i=1 \dots n)$, es insatisfacible, mediante la regla de resolución.

3.1. Interpretación del lenguaje formal de la lógica de primer orden

Interpretar las fórmulas lógicas obtenidas de la formalización de sentencias del lenguaje natural mediante el lenguaje de la lógica de primer orden se refiere a concretar el significado (la semántica) de cada uno de los símbolos que las conforman, en un dominio de referencia, lo llamaremos D . Una vez interpretados los símbolos que forman parte de una fórmula lógica ésta quedará interpretada y con ello se podrá determinar la validez del razonamiento del que forman parte.

El axioma fundamental en el que se basa la semántica lógica es conocido como “Axioma de bivalencia o tercero excluido” que dice:

“ Toda proposición es cierta o falsa, pero no ambas cosas a la vez”.

Este criterio, que se debe a Aristóteles, se ha mantenido hasta el presente siglo en el que se han planteado otras interpretaciones de las proposiciones debido a nuevas propuestas aparecidas en las “lógicas no clásicas”. Al trabajar con la lógica de primer orden tendremos en cuenta el axioma anterior y usaremos el símbolo “V” o “1”, para denotar el valor de verdad “cierto o verdadero”, y “F” o “0”, para denotar el valor de verdad falso. El concepto de valor de verdad procede de Peirce y Frege. A partir de los valores de verdad V y F, se pueden interpretar todas las fórmulas de la lógica de primer orden.

Ejemplo 1 La interpretación de la sentencia: “Madrid es la capital de España” será el de su fórmula lógica. Para ello, formalizamos la sentencia con $MC = \{m: \text{Madrid es la capital de España}\}$ y obtenemos fbf: m . Esta fórmula se puede interpretar como verdadera (V) o falsa (F), según los valores de verdad que la lógica de primer orden dispone, independientemente de que conozcamos si es cierta o falsa la declaración ontológica de la sentencia (podemos no saber si Madrid es la capital de España).

>> Cuando una fórmula A toma el valor de verdad V se dice que la fórmula A se interpreta como verdadera y cuando toma el valor F se dice que la fórmula A se interpreta como falsa.

Def-1: Sea el conjunto $\Gamma = \{\text{fórmulas atómicas}\}$. Una **interpretación** de una fórmula del conjunto Γ es una función de la forma:

$$v : \Gamma \rightarrow \{V, F\}$$

Ejemplo 2 Si $\Gamma = \{p, q\}$ todas las posibles interpretaciones de las fórmulas de Γ son:

1ª interpretación: $v(p)=V$ y $v(q)=V$;

2ª interpretación: $v(p)=V$ y $v(q)=F$;

3ª interpretación: $v(p)=F$ y $v(q)=V$;

4ª interpretación: $v(p)=F$ y $v(q)=F$;

Ejemplo 3 Si $\Gamma = \{P(a), Q(a,b)\}$ todas las posibles interpretaciones de las fórmulas de Γ son:

1ª interpretación: $v(P(a))=V$ y $v(Q(a,b))=V$;

2ª interpretación: $v(P(a))=V$ y $v(Q(a,b))=F$;

3ª interpretación: $v(P(a))=F$ y $v(Q(a,b))=V$;

4ª interpretación: $v(P(a))=F$ y $v(Q(a,b))=F$;

3.2. Evaluación semántica de fórmulas lógicas

Cuando una fórmula lógica se interpreta para todas las posibles interpretaciones de sus componentes, se dice que se realiza la evaluación semántica de dicha fórmula. La evaluación semántica de una fórmula atómica será de V o F, según los dos valores de verdad que dicha fórmula puede tomar. Pero la evaluación semántica de una fórmula molecular será, o bien de V o F si se interpreta para una sola interpretación de sus componentes o bien será evaluada

como tautología, contradicción o contingencia, si se interpreta para todas las posibles interpretaciones de sus componentes. Estudiamos a continuación cómo obtener dicha evaluación semántica.

3.2.1. Evaluación semántica de fórmulas atómicas

La evaluación semántica de una fórmula atómica, ya sea una variable proposicional (predicado de aridad cero) o formada por un predicado de aridad n , $n \geq 1$, con argumentos constantes, es de verdadera (V) o falsa (F). Decimos entonces, que el número de interpretaciones de una fórmula atómica es 2^n .

Ejemplo 4 La interpretación lógica de la proposición: "Luis no es mi novio" será la de su fórmula lógica. Si consideramos $MC = \{p: \text{Luis es mi novio}\}$, la fbf: $\neg p$, es una fbf atómica que tiene 2 interpretaciones: $v(\neg p) = V$ y $v(\neg p) = F$.

3.2.2. Evaluación semántica de fórmulas moleculares

La evaluación semántica de una fórmula molecular estará en función de las componentes lógicas que aparecen en dicha fórmula. Para ello se debe tener en cuenta la función v y se deben conocer cómo se interpretan, o se definen semánticamente, las variables proposicionales, las conectivas lógicas, los predicados y sus argumentos, y los cuantificadores. Una vez que conozcamos cómo se valora cada uno de estos elementos podremos realizar el estudio semántico de una fórmula molecular y por ende podremos abordar la demostración de la validez de un razonamiento.

En primer lugar, es necesario conocer de cuántas formas puedo interpretar una determinada fórmula molecular. Esto se calcula conociendo los siguientes datos:

- El número de fórmulas atómicas diferentes que aparecen en la fórmula. Si es n tenemos del orden de 2^n interpretaciones.
- La aridad de los predicados y de las funciones, si aparecen, y el número de elementos del conjunto de referencia D , donde está definido el problema (donde los argumentos variables de los predicados y funciones toman valores). Por lo cual, para un predicado P de aridad n , y un dominio D de m elementos, tenemos del orden de 2^d interpretaciones, siendo $d = m^n$. El número de interpretaciones de la fórmula molecular se obtendrá multiplicando el número de predicados por el número de interpretaciones que tiene dicho predicado.

Denotaremos por I_i ($i=1...2^n$) al conjunto formado por una combinación de todas las interpretaciones posibles de las subfórmulas atómicas diferentes que conforman una fórmula molecular.

Ejemplo 5 Sea la fbf: $p \wedge \neg q$; El número de interpretaciones de la fórmula es de 2^2 . Una de ellas es, por ejemplo, $I_3 = \{p=V, q=V\}$.

Def-2: Diremos que I es una **interpretación modelo** de una fbf A , si $v(A)_I = V$.

Ejemplo 6 La interpretación $I_1 = \{p=V, q=V\}$ es un modelo de la fbf: $p \wedge q$, pues al interpretar esta fbf con los valores del conjunto I_1 obtenemos $v(p \wedge q) = V$

Def-3: Diremos que I es una interpretación **contraejemplo** de una **fbf** A , si $v(A)_I = F$.

Ejemplo 7 La interpretación $I_2 = \{p=F, q=V\}$ es un contraejemplo de la fbf: $p \wedge q$, pues al interpretar esta fbf con los valores del conjunto I_2 , obtenemos $v(p \wedge q) = F$.

>> El concepto de interpretación contraejemplo, se puede extender a razonamientos.

Def-4: Una interpretación I es un **contraejemplo** de un **razonamiento** $R: P_1, \dots, P_n \Rightarrow Q$, si bajo I las fórmulas premisas P_i ($i=1...n$) se interpretan como verdaderas y la fórmula conclusión Q como falsa, es decir si $I = \{v(P_i) = V, \forall i = 1...n, v(Q) = F\}$

• Interpretación de las conectivas

Cada una de las conectivas lógicas tiene una interpretación que estará en función de cada una de las interpretaciones de sus fórmulas atómicas, generadas por la función v . Se considera el siguiente criterio, siendo A y B fórmulas lógicas cualesquiera:

- 1º.- $v(\neg A) = V$ si, y sólo si, $v(A) = F$.
- 2º.- $v(A \wedge B) = V$ si, y sólo si, $v(A) = V$ y $v(B) = V$, si no, F.
- 3º.- $v(A \vee B) = F$ si, y sólo si, $v(A) = F$ y $v(B) = F$, si no, V.
- 4º.- $v(A \rightarrow B) = F$ si, y sólo si, $v(A) = V$ y $v(B) = F$, si no, V.
- 5º.- $v(A \leftrightarrow B) = V$ si, y sólo si, $v(A) = v(B)$, si no, F.

Mostramos estos resultados en la siguiente tabla:

| A | B | $\neg A$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \rightarrow B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| V | V | F | V | V | V | V |
| | F | | F | V | F | F |
| F | V | V | F | V | V | F |
| | F | | F | F | V | V |

Para los ejemplos 8, 9 y 10 consideramos el marco conceptual, $MC = \{p: \text{Luis es mi novio}; q: \text{Ana estudia matemáticas}\}$.

Ejemplo 8 La interpretación lógica de la proposición molecular: “Luis es mi novio y María estudia matemáticas” será la de su fbf: $p \wedge q$. Como es una fbf molecular con 2 variables proposicionales tenemos 2^2 interpretaciones. La conectiva es la conjunción, luego las interpretaciones de la fbf son:

- Si $v(p) = V$ y $v(q) = V$ entonces $v(p \wedge q) = V$, o bien, la interpretación $I_1 = \{p=V, q=V\}$ es un modelo de la fbf: $p \wedge q$ ya que $v(p \wedge q)_{I_1} = V$.
- Si $v(p) = V$ y $v(q) = F$ entonces $v(p \wedge q) = F$, o bien, la interpretación $I_2 = \{p=V, q=F\}$ es un contraejemplo de la fbf: $p \wedge q$ ya que $v(p \wedge q)_{I_2} = F$.
- Si $v(p) = F$ y $v(q) = V$ entonces $v(p \wedge q) = F$, o bien, la interpretación $I_3 = \{p=F, q=V\}$ es un contraejemplo de la fbf: $p \wedge q$ ya que $v(p \wedge q)_{I_3} = F$.
- Si $v(p) = F$ y $v(q) = F$ entonces $v(p \wedge q) = F$, o bien, la interpretación $I_4 = \{p=F, q=F\}$ es un contraejemplo de la fbf: $p \wedge q$ ya que $v(p \wedge q)_{I_4} = F$.

Ejemplo 9 ¿Cómo se interpreta la proposición Prop1: “Luis no es mi novio o María estudia matemáticas”, si la proposición Prop2: “María estudia matemáticas” es falsa?

Formalizamos Prop1 y Prop2 según MC.

Fbf-Prop1: $\neg p \vee q$

Fbf-Prop2: q

Como la Prop2 es falsa, es decir, $v(q) = F$ y la Prop1 una disyunción, no podemos interpretar la fbf-Prop1: $\neg p \vee q$ como verdadera ni como falsa, ya que necesitamos saber cómo se interpreta p. Para que una disyunción sea falsa todas sus componentes deben ser falsas.

Ejemplo 10 ¿Cuál es la interpretación de la proposición Prop1: “Si Luis es mi novio entonces María estudia matemáticas”, si la proposición Prop2: “María estudia matemáticas” es falsa?

Formalizamos Prop1 y Prop2 según MC.

Fbf-Prop1: $p \rightarrow q$

Fbf-Prop2: q

La interpretación de la fbf: Prop1 dependerá de la interpretación de la fbf: p. Como $v(q) = F$ entonces:

- 1º.- Si $v(p) = V$ entonces $v(p \rightarrow q) = F$.
- 2º.- Si $v(p) = F$ entonces $v(p \rightarrow q) = V$.

• Interpretación de fórmulas predicativas

○ Interpretación de los términos que son los argumentos de un predicado o de una función

Una fórmula predicativa se identifica por el nombre de un predicado (de propiedad o relación) y su número de argumentos (aridad del predicado). También una función, que puede aparecer como argumento de un predicado, se identifica por su nombre y aridad. Los argumentos pueden ser términos constantes, variables o de función. Para interpretar una fórmula predicativa tenemos que interpretar el predicado y sus argumentos en un conjunto de referencia $D = \{\text{sujetos constantes}\}$ donde se encuentran definidos. Los términos se interpretan como:

- Constantes y funciones: por un elemento concreto de D .
- Variables: por un elemento cualquiera de D .

Ejemplo 11 Sea la función $f(x)$ definida en el dominio $D = \{a,b,c\}$, es decir $x \in D$. Para interpretar la función f se debe interpretar el término variable x , con cada uno de los elementos de D . En la tabla podemos ver dicha interpretación. La función f , para cada valor constante de su argumento x , tomará uno de los valores del dominio D (ya que una función siempre devuelve un valor constante), es decir, $f: D \rightarrow D$. El número de interpretaciones de $f(x)$ es de 2^d , con $d=3^1$, es decir, 2^3 . Una de esas interpretaciones puede ser la siguiente:

| x | f(x) |
|---|------|
| a | b |
| b | c |
| c | b |

○ Interpretación de los predicados de aridad n

Un predicado P de aridad n se interpreta en el dominio de referencia D mediante una correspondencia entre el conjunto de todas las n -tuplas de elementos del dominio D (D^n) y el conjunto $\{V, F\}$:

$$P: D^n \rightarrow \{V, F\}$$

Ejemplo 12 Sea el predicado $P(x)$, el dominio $D = \{a,b,c\}$, con $x \in D$. El número total de interpretaciones es: 2^d , donde $d = 3^1 = 3$, luego tenemos en total 8 interpretaciones. Una de ellas es:

| x | P(x) |
|---|------|
| a | V |
| b | F |
| c | V |

Ejemplo 13 Sea el predicado $P(x, y)$ y el dominio $D = \{a,b,c\}$, $x, y \in D$. El número total de interpretaciones es: 2^d , donde $d = 3^2 = 9$, luego tenemos en total 2^9 interpretaciones. Una de ellas es:

| x | y | P(x, y) |
|---|---|---------|
| a | a | V |
| | b | V |
| | c | F |
| b | a | V |
| | b | V |
| | c | F |
| c | a | V |
| | b | V |
| | c | F |

¡OJO! No es lo mismo interpretar una función que un predicado. Por ejemplo la función $f(x)$ se interpreta con un valor constante del dominio D , para un valor constante de su argumento variable x , sin embargo un predicado, por ejemplo, $P(x)$ se interpreta a V o F según el valor que tome x en el dominio D .

• Interpretación de los cuantificadores

Los **cuantificadores** se interpretan en un dominio de referencia D de la siguiente forma:

- a) Una fórmula cuantificada universalmente respecto a x es V si para cualquier elemento del dominio D asignado a x la fórmula es V. F en otro caso (en dominio D finito se trata como la conjunción).
- b) Una fórmula cuantificada existencialmente respecto de x es V si para algún elemento del dominio asignado a x la fbf es V. F si todos son falsos (en dominio D finito se trata como la disyunción).

Ejemplo 14 En el dominio D={a,b,c} se define la siguiente interpretación para **P(x, y)** y **Q(x)**, con x,y ∈ D:

| x | y | P(x, y) | Q(x) |
|---|---|---------|------|
| a | a | F | V |
| | b | V | |
| | c | V | |
| b | a | V | V |
| | b | V | |
| | c | V | |
| c | a | F | F |
| | b | F | |
| | c | V | |

Con la interpretación anterior interpretamos las siguientes fbfs:

- a) $v(\forall x Q(x)) = F$
- b) $v(\exists y Q(y)) = V$
- c) $v(\forall y P(b,y)) = V$
- d) $v(\forall x \exists y P(x,y)) = V$
- e) $v(\forall x \forall y P(x,y)) = F$
- f) $v(\exists x \forall y P(x,y)) = V$ (cuando x=b)
- g) $v(\exists y \forall x P(x,y)) = V$ (cuando y=c)

• Clasificación semántica de fórmulas moleculares atendiendo a todas sus interpretaciones posibles

Una fórmula molecular A se puede clasificar semánticamente como:

- > **Tautología (válida)**: si la fórmula A es verdadera para toda interpretación I (toda I es modelo de A).
- > **Contradicción**: si la fórmula A no es verdadera bajo ninguna interpretación (toda I es contraejemplo de A).
- > **Contingencia o Indeterminación**: cuando existe al menos una interpretación que hace que la fórmula A se interprete como verdadera y, al menos, otra interpretación que la haga falsa (algunas I son modelos y otras son contraejemplo).

Tautologías importantes: las implicaciones y las equivalencias lógicas.

Def-5: Si A y B son dos expresiones lógicas y si $A \rightarrow B$ es una tautología, decimos que A **implica lógicamente** a B.

Def-6: Decimos que A y B son **lógicamente equivalentes** si $A \leftrightarrow B$ es una tautología.

Las equivalencias lógicas se utilizan para simplificar fórmulas o para transformarlas en otras equivalentes. Dados dos esquemas de fórmulas A y B, se establecen las siguientes equivalencias lógicas:

- a) $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ (Definición del implicador \rightarrow mediante la conectiva disyunción \vee).
- b) $A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$ (Definición del implicador \rightarrow mediante la conectiva conjunción \wedge).
- c) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$; $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (leyes de De Morgan).

Ejemplo 15 Obtener fórmulas equivalentes a la dada: $P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_3 \rightarrow Q))$

La primera fórmula equivalente es: $\neg P_1 \vee (\neg P_2 \vee (\neg P_3 \vee Q))$ que se obtiene aplicando la regla a) a los 3 implicadores. Otra fórmula equivalente es: $\neg (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \neg Q)$ aplicando la regla c) a la fórmula anterior..

>> Otras equivalencias lógicas son:

Ley del Tercero Excluido: $P \vee \neg P \equiv V$

Regla de contradicción: $P \wedge \neg P \equiv F$

Otras:

$$F \vee P \equiv P$$

$$V \vee P \equiv V$$

$$F \wedge P \equiv F$$

$$V \wedge P \equiv P$$

• Interpretación de un razonamiento. Concepto de consecuencia lógica

Def-7: Sean P_1, P_2, \dots, P_n y Q fórmulas lógicas. Se dice que Q es una **consecuencia lógica** de P_1, P_2, \dots, P_n , si y sólo si, para cualquier interpretación en la que P_1, P_2, \dots, P_n , son verdaderas, la fórmula Q también lo es.

¡OJO! Una fórmula tautológica es consecuencia lógica de cualquier conjunto de premisas, incluso del conjunto vacío.

Def-8: Un razonamiento (estructura deductiva): $P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow Q$ donde P_i ($i=1, \dots, n$) son las fórmulas premisas y Q la fórmula conclusión **es correcto** cuando la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

¡OJO! El argumento "Juan es hombre" \Rightarrow "Juan no es inmortal" no es correcto. Ya que aunque se entiende que "Juan no es inmortal" es una consecuencia de ser hombre, no es sin embargo una consecuencia lógica. Si formalizamos dicho argumento en $MC = \{ho: \text{Juan es hombre}; in: \text{Juan es inmortal}\}$ el argumento formalizado sería $ho \Rightarrow in$. Está claro que podemos interpretar $v(ho)=V$ y $v(in)=F$, luego como existe una interpretación que hace la premisa V y la conclusión F , el argumento no es correcto y por lo tanto "in" no es consecuencia lógica de "ho".

3.3. Métodos de las tablas de verdad y del contraejemplo

De la misma forma que las funciones matemáticas pueden ser representadas mediante tablas, también se puede realizar la evaluación semántica de las fórmulas moleculares y de los razonamientos mediante las llamadas: Tablas de Verdad.

• Método de las Tablas de verdad

Una tabla de verdad es una tabla que muestra el valor semántico de una fbf molecular a partir de todas las combinaciones de valores de verdad que se puedan asignar a sus componentes lógicas. Dicho valor semántico aparece en la última columna de la tabla.

Usada para estudiar la validez de un razonamiento la tabla permite comprobar cómo se interpreta la conclusión cuando todas las premisas son verdaderas.

Fue desarrollada por Charles Sanders Peirce por los años 1880, pero el formato más popular es el que introdujo Ludwig Wittgenstein en su "Tractatus logico-philosophicus", publicado en 1921.

o Tabla de verdad de una fbf molecular

Para hacer la tabla de verdad de una fbf molecular se debe tener en cuenta lo siguiente:

1º.- El número de interpretaciones de la fbf dada, ya que dicho número será el número de filas que tenga la tabla.

2º.- La jerarquía de cada subfórmula que aparece en la fbf dada. Según el orden establecido se creará una columna para cada subfórmula.

Una vez establecidos los puntos 1 y 2 se representará la tabla mediante un cuadro de doble entrada que tendrá tantas filas como interpretaciones disponga la fbf dada y tantas columnas como conectivas haya que interpretar, más tantas columnas como fórmulas atómicas diferentes haya en la fbf inicial (éstas se ponen al principio de la tabla).

Para rellenar las columnas de las fbf atómicas se deben considerar todas las combinaciones posibles de valores de verdad de dichas fbf. Para asegurarnos de que aparecen todas las combinaciones podemos rellenar cada columna de la siguiente forma, si tenemos n fbf atómicas diferentes, tendremos 2^n interpretaciones o filas:

1ª columna, fbf atómica 1: $2^n / 2$ valores V seguidos de $2^n / 2$ valores de F; hasta 2^n .

2ª columna, fbf atómica 2: $2^n / 2^2$ valores V seguidos de $2^n / 2^2$ valores de F; hasta 2^n .

...

nª columna, fbf atómica n: $2^n / 2^n$ valores V seguidos de $2^n / 2^n$ valores de F; hasta 2^n .

Ejemplo 16 Usando tablas de verdad se estudia el valor semántico de la fbf: $(p \vee q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$

| p | q | $\neg p$ | $p \vee q$ | $\neg p \rightarrow q$ | $(p \vee q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$ |
|---|---|----------|------------|------------------------|--|
| V | V | F | V | V | V |
| V | F | F | V | V | V |
| F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | F | F | F |

La fórmula es una contingencia ya que en la columna donde se encuentra la conectiva principal, aparecen valores V y F.

o **Tabla de verdad para estudiar la validez de un razonamiento**

La tabla de verdad que nos permite estudiar la validez de un razonamiento se construye teniendo en cuenta los pasos anteriores para construir la de una fbf molecular. Después se deben observar sólo las filas o interrelaciones donde todas las premisas sean verdaderas y comprobar cómo se interpreta la conclusión. Si ésta también se interpreta como verdadera el argumento será correcto, si en algún caso se interpreta como falsa, el argumento no será correcto.

Ejemplo 17 Usando tablas de verdad se demuestra que el siguiente **razonamiento es correcto**, es decir, que la fórmula Q es consecuencia lógica de P_1 y P_2

P1: $p \rightarrow q$

P2: $q \rightarrow r$

Q: $p \rightarrow r$

Como $n = 3$ el número de interpretaciones es de 8, luego la tabla tendrá 8 filas.

Tabla de verdad:

| | p | q | r | P1 | P2 | Q |
|---|---|---|---|-------------------|-------------------|-------------------|
| | p | q | r | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow r$ | $p \rightarrow r$ |
| 1 | V | V | V | V | V | V |
| 2 | V | V | F | V | F | F |
| 3 | V | F | V | F | V | V |
| 4 | V | F | F | F | V | F |
| 5 | F | V | V | V | V | V |
| 6 | F | V | F | V | F | V |
| 7 | F | F | V | V | V | V |
| 8 | F | F | F | F | F | F |

Como podemos observar cuando todas las premisas se interpretan como verdaderas (ver filas 1, 5 y 7) la conclusión Q también, luego el argumento es correcto y por lo tanto Q es consecuencia lógica de las premisas P_1 y P_2 . Las demás filas no nos interesan.

• **Método del contraejemplo**

En general, se entiende por contraejemplo a un ejemplo que prueba la falsedad de un enunciado, es decir, es una excepción a una regla general propuesta.

Por ejemplo: “La suma de dos números compuestos es un número compuesto”¹. Tenemos que: $4 + 4 = 8$; $4 + 8 = 12$... estos ejemplos “demuestran” que el enunciado es cierto. Un contraejemplo de dicho enunciado es: $8 + 9 = 17$ (17 primo). Este ejemplo demuestra que el enunciado no es cierto para todos los casos (hay dos números compuestos el 8 y el 9 que suman un número que no es compuesto, el 17).

En lógica, un contraejemplo de una fbf lógica o de un razonamiento es una interpretación de sus componentes que demuestra que la fbf es falsa o que el argumento no es correcto, respectivamente. Para comprobar si una fbf o razonamiento tienen un contraejemplo se supone la existencia del mismo y se estudia si dicha suposición es correcta o por el contrario nos lleva a una contradicción. Lo vemos con unos ejemplos:

Ejemplo 18 Comprobar si la fbf: $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ tiene un contraejemplo que demuestre que no es una tautología.

Si la fbf dada es una tautología entonces para cualquier interpretación de sus componentes básicas la fbf se interpreta como verdadera. Si existiera un contraejemplo, la fbf se interpretaría como falsa para dicha interpretación y entonces la fbf no será tautología. Suponemos la existencia de un contraejemplo y lo simbolizamos poniendo el valor F debajo de la conectiva principal de la fbf. Ante esta hipótesis, comprobamos cómo se interpretan las demás componentes de la fórmula.

| | $[(p \wedge q) \rightarrow r]$ | \rightarrow | $[p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ |
|---|--------------------------------|---------------|-------------------------------------|
| 1 | | F | |
| 2 | V | | F |
| 3 | | | V |
| 4 | V | V | F |
| 5 | V | F | |
| 6 | F # | | |

Aparece una contradicción (#) en la fila 6 con respecto al valor semántico que tiene la fórmula $p \wedge q \rightarrow r$ en la fila 2. Luego nuestra hipótesis no es cierta, no existe ninguna interpretación contraejemplo de la fbf, luego la fbf es una tautología.

¡Ojo! Si la conectiva principal es una conjunción, tenemos que tener en cuenta que puede ser F por 3 combinaciones diferentes. Sólo podremos afirmar que la fbf es tautología si se llega a una contradicción para todas ellas.

El método del contraejemplo usado para **demostrar la validez de un razonamiento** se basa en la definición de argumento correcto: “un argumento es correcto si no existe una interpretación en el que las premisas se interpreten como verdaderas y la conclusión como falsa”. Según esto, el contraejemplo vendría dado por una interpretación que tuviera las características anteriores. Por ello, esta suposición es la que se propone como inicio de la demostración y se debe valorar si aparece o no, una contradicción en dicha suposición.

Ejemplo 19 Estudiar la validez del siguiente razonamiento aplicando el método del **contraejemplo**:

$$\neg ap, es \rightarrow ap \Rightarrow \neg es$$

| P1: $\neg ap$ | P2: $es \rightarrow ap$ | Q: $\neg es$ |
|------------------------|-------------------------|--------------|
| V | V | F |
| ap:F | ap:V | es:V |
| # CONTRADICCIÓN | | |

¹ Todo número natural no primo, a excepción del 1, se denomina compuesto, es decir, tiene uno o más divisores distintos a 1 y a sí mismo.

• Relación entre el condicional y un razonamiento

En nuestra vida ordinaria una expresión del tipo “si A entonces B”, lleva aparejadas connotaciones muy diversas, tal vez de causalidad, temporalidad, que en el cálculo lógico no se dan y que debemos tener en cuenta para no confundirnos a la hora de demostrar. Por ejemplo, “Si tienes sed, hay agua fresca en el frigorífico”, no nos lleva a pensar que si no hay agua fresca en el frigorífico entonces es que no tienes sed, pero en lógica es posible. “Si tú eres diputado, yo soy obispo” es un modo de significar la convicción de que no eres diputado, y se acerca más al significado adoptado en lógica para el “si A entonces B” puesto que dicha expresión sólo es falsa cuando tú eres diputado, ya que yo no soy obispo.

En otras ocasiones sucede que interpretamos mal el condicional del lenguaje ordinario porque nos inclinamos a sobrentender lo que no está dicho: “si llueve me quedo en casa”. Si resulta que estás en casa, pensamos que es porque llueve. Mal hecho. Si resulta que no estás en casa, pensamos que es porque no llueve, esto si está bien.

Otros modos del condicional muy frecuentes en todos los ámbitos son las expresiones:

A es suficiente para B: “Es suficiente que estudies para que apruebes”.

A es necesario para B: “Es necesario que estudies para que apruebes”.

A es necesario y suficiente para B: “Para que apruebes es necesario y suficiente que estudies”.

¡Ojo! Hoy día se usa más la expresión: A si, y sólo si, B.

Mostraremos el significado y tratamiento de estas expresiones desde el punto de vista de la lógica, ignorando el significado causal, cuyo uso normal, algunas veces de manera engañosa, lleva a resultados inciertos. Sean A y B metavariabes que representan a proposiciones cualesquiera.

• Condición suficiente

$A \rightarrow B \equiv$ “A es suficiente para B” \equiv “Si es cierto A entonces es cierto B” \equiv “Si no es cierto B no es cierto A”

En una proposición condicional $A \rightarrow B$ se dice que la proposición A es una condición suficiente para que sea cierta la proposición B. En el cálculo lógico significa que sólo cuando sea verdadero A podremos asegurar que B también lo es. De manera similar podemos decir, que B es consecuencia lógica de A o que B se deduce de A.

Ejemplo 20 P: “Para entrar en la piscina es suficiente llevar el DNI”.

MC = {p: llevar el DNI, q: entrar en la piscina}, fbf-P: $p \rightarrow q$.

La subfórmula “p” es condición suficiente para la subfórmula “q” sea cierta. Si nos afirman la verdad de p, se puede aceptar la verdad de q. Si no se conoce la verdad de p no se puede aceptar ni la verdad ni la falsedad de q.

En un razonamiento las condiciones suficientes son las premisas.

• Condición necesaria:

$A \rightarrow B \equiv$ “B es necesaria para que sea cierta A” \equiv “Sólo si es cierto B, es cierto A” \equiv “No es cierto A a menos que lo sea B”

En una proposición condicional $A \rightarrow B$ se dice que la proposición B es una condición necesaria de la proposición A. En el cálculo lógico significa que sólo cuando nos confirmen que B es falso podremos asegurar que A también lo es.

Ejemplo 21 P: “Para entrar en la piscina es necesario llevar el DNI”.

Con el conjunto MC del ejemplo anterior, ahora formalizamos fbf-P: $q \rightarrow p$.

La fbf: p es condición necesaria para la fbf: q. Si nos afirman la falsedad de p, se puede aceptar la falsedad de q. Si no se conoce la falsedad de p no se puede aceptar ni la verdad ni la falsedad de q.

En un razonamiento la condición necesaria es la conclusión.

• **Condición necesaria y suficiente**

Decir que A es *necesaria y suficiente* para B, es decir que:

1. A es necesaria para B y
 2. A es suficiente para B.
- $$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

Ejemplo 22 P: “Para entrar en la piscina es necesario y suficiente llevar el DNI”.

Con el conjunto MC anterior, ahora formalizamos fbf-P: $p \leftrightarrow q$.

Si se asegura la verdad de la subfórmula “p”, se puede aceptar la verdad de la subfórmula “q”, o si se asegura la falsedad de la subfórmula “p” se puede aceptar la falsedad de la subfórmula “q”. En el caso de que no se conozca la falsedad o verdad de p no se puede aceptar ni la falsedad ni la verdad de q y viceversa.

3.4. **Fórmula asociada a un razonamiento**

Un razonamiento $P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow Q$ se corresponde con la fórmula condicional: $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$, siendo n un entero positivo. A partir de la fbf asociada al razonamiento se puede estudiar la validez de éste, ya que un razonamiento es correcto si la conclusión Q es verdadera cada vez que lo sea la conjunción de las premisas, es decir, si la fbf condicional: $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$ es una tautología. Esto nos permite aceptar como válido el razonamiento en el caso de que alguna de las premisas sea falsa. En efecto, si alguna de las P_i , $i = 1, 2, \dots, n$ es falsa, entonces $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ será falsa, luego el condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$ es verdadero, independientemente del valor de verdad de la conclusión Q.

Aplicando las reglas de equivalencia entre fórmulas tenemos que:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q \equiv \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \dots \vee \neg P_n \vee Q \equiv \neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \neg Q).$$

Para demostrar si la fbf $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$, o sus formas equivalentes, es una tautología, podemos usar el método de las tablas de verdad o el del contraejemplo. Otra forma de estudiar la validez de un razonamiento es considerar el conjunto de fbf que lo componen, como podemos ver en la siguiente sección.

3.5. **Estudio de la validez de un razonamiento a partir del conjunto de fórmulas que lo conforman**

Para demostrar la validez de un razonamiento nos basaremos en el siguiente resultado:

Teorema 1 Un razonamiento $R: P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow Q$ es correcto si y sólo si, el conjunto de fórmulas $C = \{P_1, P_2, \dots, P_n, \neg Q\}$ es insatisfacible.

Dem: $P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow Q$ es correcto
 $\Rightarrow Q$ es consecuencia lógica de P_1, P_2, \dots, P_n
 \Rightarrow La fbf: $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$ es tautología
 $\Rightarrow \neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \neg Q)$ es tautología (por equivalencias)
 $\Rightarrow (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \neg Q)$ es insatisfacible $\equiv C = \{P_1, P_2, \dots, P_n, \neg Q\}$ es insatisfacible.

• **Fórmula y conjunto de fórmulas satisfacible e insatisfacible**

Def-9: Una fórmula lógica es **satisfacible** (consistente) si existe alguna interpretación de sus componentes que la hace verdadera.

Def-10: Una fórmula lógica es **insatisfacible** si y sólo si, es falsa para todas sus interpretaciones.

La noción de satisfacibilidad se puede extender a conjuntos de fórmulas. Una interpretación $I: P \rightarrow \{V, F\}$ satisface, a un conjunto de fórmulas P siempre y cuando I hace verdadera a cada una de las fórmulas del conjunto P . Se dice que la interpretación I satisface a P . Satisfacer a un conjunto de fórmulas es equivalente a satisfacer a la conjunción de las fórmulas del conjunto.

Def-11: Un conjunto de fórmulas Γ es **satisfacible** si existe una interpretación que es un modelo para todas las fórmulas de Γ .

En Inteligencia Artificial los conjuntos de fórmulas lógicas constituyen una base de conocimiento que describen las propiedades fundamentales del universo modelado (una teoría del universo). La noción de satisfacibilidad restringe los estados posibles del universo y permite deducir hechos elementales a partir de otros hechos conocidos. Puede darse el caso de la existencia de mundos que satisfagan un determinado conjunto de fórmulas.

Def-12: Un conjunto de fórmulas Γ es **insatisfacible** si no existe ninguna interpretación que sea modelo para todas las fórmulas de Γ .

• Estudio del conjunto fórmulas aplicando la regla de resolución

Para demostrar la validez de un razonamiento $R: P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow Q$ podemos demostrar que el conjunto $C = \{P_1, P_2, \dots, P_n, \neg Q\}$ es insatisfacible aplicando la regla de resolución. Para ello hacemos:

→ Aplicamos la regla de resolución a las fórmulas del conjunto C hasta obtener dos fórmulas contradictorias. Esto significará que C es insatisfacible.

→ La regla de resolución se aplica sólo a fórmulas escritas en forma clausal. Luego antes de su aplicación debemos obtener la forma clausal de la premisas y de la negación de la conclusión que conforman el conjunto C .

• Forma clausal de una fórmula

Las leyes de equivalencia permiten transformar fórmulas en otras fórmulas más simples de evaluar, en especial, por un computador. Dichas fórmulas se caracterizan por la inexistencia del implicador, ya que desde el punto de vista computacional, es engorroso. En especial si escribimos una fórmula mediante su forma clausal (FC) tendremos mayor accesibilidad al mundo de la Programación Lógica. Decimos que una fórmula está escrita en forma clausal si dicha fórmula está representada por su conjunto de cláusulas.

Def-13: Una **cláusula** es una disyunción de literales.

Ejemplo 23 La fbf: $p \vee \neg q$ es una cláusula.

Def-14: Un **literal** es una fórmula atómica afirmada o negada.

Ejemplo 24 En la fbf: $p \vee \neg q$, las fórmulas p y $\neg q$ son literales.

Def-15: Una **Cláusula vacía** es una cláusula sin literales. Se representa por $[\]$ y su valor es siempre contradicción.

• Proceso para obtener la forma clausal de una fórmula

Aplicar, si es el caso, cada uno de los siguientes pasos a una fórmula dada:

Paso 1. Eliminar implicadores y coimplicadores mediante la aplicación de la regla:

$$\circ \quad A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

Paso 2. Normalizar negadores mediante la aplicación de las reglas.

$$\circ \quad \text{Leyes de De Morgan: } \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B; \quad \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B.$$

$$\circ \quad \text{Ley del doble negador: } \neg\neg A \equiv A$$

Paso 3. En fórmulas cuantificadas, renombrar variables, si es necesario, para que dos cuantificadores no coincidan en el nombre de variable que cuantifican.

- Paso 4. Eliminar cuantificadores existenciales aplicando el criterio de Skolem (ver a continuación).
- Paso 5. Poner los cuantificadores universales a la cabeza de la fórmula y no volver a escribirlos en los pasos sucesivos, ya que llegados a este punto todas las variables de la fórmula están cuantificadas universalmente, por lo que no es necesario especificarlo.
- Paso 6. Aplicar, si es necesario, la regla distributiva: $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ para obtener una fórmula cuya conectiva principal sea la conjunción. Reducir y simplificar la fórmula aplicando reglas de equivalencia
- Paso 7. Extraer las cláusulas de la fórmula que serán cada una de las disyunciones de la fórmula obtenida en el paso anterior.
- Paso 8. Las cláusulas no pueden coincidir en los nombres de los argumentos variables, luego cambiar, si es necesario, los nombres de dichos argumentos variables coincidentes. Las constantes pueden coincidir.

• **Criterio de Skolem para eliminar cuantificadores existenciales**

> Si el *cuantificador existencial se encuentra en el ámbito de un cuantificador universal*, entonces la variable de dicho cuantificador depende del valor de la variable afectada por el cuantificador universal. El cuantificador existencial se suprime sustituyendo su variable adosada por una función que contiene un argumento con la variable cuantificada universalmente.

Ejemplo 25 Fbf-A: $\forall y \exists x P(x,y)$. El cuantificador $\exists x$ se encuentra en el ámbito de $\forall y$, luego la variable x se sustituye por una función dependiente de la variable y.

$$x = f(y); \text{ la fbf-A quedaría: } \forall y P(f(y),y).$$

> Si el *cuantificador existencial no se encuentra en el ámbito de ningún cuantificador universal*, sustituimos la variable cuantificada existencialmente por una constante que no se encuentre en la fórmula.

Ejemplo 26 Fbf-A: $\exists x \forall y P(x,y,a)$. El cuantificador $\exists x$ no se encuentra en el ámbito de $\forall y$, luego la variable x se sustituye por una constante.

$$x = b; \text{ la fbf-A quedaría } \forall y P(b, y, a).$$

Ejemplo 27 Obtener la FC de la fórmula: $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge p$.

La fórmula se encuentra en el paso 8 luego extraemos las cláusulas que denotamos por Ci:

$$C1: \neg p \vee q; \quad C2: \neg p \vee q \vee \neg r; \quad C3: p.$$

Ejemplo 28 Obtener la FC de la fórmula: $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

Paso 1: Eliminar implicadores:

$$\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee r) \vee ((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r))$$

Paso 2: Normalizar negadores:

$$(\neg\neg(\neg p \vee q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)) \\ ((\neg p \vee q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r))$$

Paso 6: Aplicar la regla distributiva y simplificar aplicando reglas de equivalencia:

$$[(\neg p \vee q) \wedge \neg r] \vee (\neg p \vee r) \wedge [(\neg p \vee q) \wedge \neg r] \vee (\neg q \vee r) \\ [(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)] \wedge [\neg r \vee (\neg p \vee r)] \wedge [\neg p \vee q \vee (\neg q \vee r)] \wedge [\neg r \vee (\neg q \vee r)] \\ [\neg p \vee q \vee \neg p \vee r] \wedge [\neg r \vee \neg p \vee r] \wedge [\neg p \vee q \vee \neg q \vee r] \wedge [\neg r \vee \neg q \vee r] \\ \neg p \vee q \vee r$$

Paso 7: Extraer cláusulas

$$\text{Sólo obtenemos una cláusula } C1 : \neg p \vee q \vee r$$

Ejemplo 29 Obtener la FC de la fórmula: $\forall x \forall y [\text{sobre}(x, y) \rightarrow \text{encimaDe}(x, y)]$

Paso 1: Eliminar implicadores y coimplicadores:

$$\forall x \forall y [\neg \text{sobre}(x, y) \vee \text{encimaDe}(x, y)]$$

Paso 7: Extracción de cláusulas. Sólo obtenemos una cláusula:

$$C1: \neg \text{sobre}(x, y) \vee \text{encimaDe}(x, y)$$

3.6. La regla de Resolución de Robinson

El método de resolución es un algoritmo propuesto por J.A. Robinson en 1965, con el que se comprueba si un conjunto de cláusulas es insatisfacible. Esta prueba es fundamental en los sistemas deductivos automáticos, como el sistema Prolog.

• Regla de Resolución Proposicional

La regla de resolución para una fórmula proposicional obtiene para dos cláusulas C1 y C2, una nueva cláusula C3 llamada resolvente de C1 y C2 que resulta ser una consecuencia lógica de ellas. Para ello, debe suceder lo siguiente: C1 debe contener, al menos, un literal L y C2, al menos, un literal $\neg L$. La cláusula C3 será la disyunción de todos los literales de C1 y de C2 menos los literales L y $\neg L$.

El resolvente de dos cláusulas es una cláusula que es consecuencia lógica de ellas.

$$[L \vee A1 \vee A2 \vee \dots \vee An] \quad \text{y} \quad [\neg L \vee B1 \vee B2 \vee \dots \vee Bm]$$

⇓

$$\text{Cláusula Resolvente} \quad [A1 \vee \dots \vee An \vee B1 \vee \dots \vee Bm]$$

Ejemplo 30 Comprobar que la proposición Q es resolvente de P1 y P2.

P1: "O gana o pierde o empata";

P2: "Si gana entonces da una fiesta o se va de viaje".

Q: "O pierde o empata o da una fiesta o va de viaje".

Elegimos el siguiente marco conceptual:

MC = {ga: gana; pi: pierde; em: empata; vi: va de viaje; fi: hace una fiesta}

Fbf-P1: $ga \vee pi \vee em$;

Fbf-P2: $ga \rightarrow fi \vee vi$

Fbf-Q: $pi \vee em \vee fi \vee vi$

Obtenemos la FC de P1 y P2:

C1: $ga \vee pi \vee em$

C2: $\neg ga \vee fi \vee vi$

Aplicamos la regla de resolución proposicional:

La cláusula resolvente de C1 y C2, es la cláusula C3: $pi \vee em \vee fi \vee vi$, que resulta ser la fbf-Q.

| Ejemplo 31 | Cláusulas resolubles | Resolvente | |
|------------|--|---|--|
| | $P \vee \neg P \vee Q$ | Q | Silogismo Disyuntivo |
| | $P \vee Q \vee \neg P \vee Q$ | Q | |
| | $P \vee Q \vee \neg P \vee \neg Q$ dos posibles: | 1º.- $Q \vee \neg Q$; 2º.- $P \vee \neg P$ | |
| | $\neg P \vee P$ | NADA | La cláusula vacía indica contradicción |
| | $P \vee Q \vee \neg P \vee R$ | $Q \vee R$ | |

¡OJO! Cuando se aplica la regla de resolución a dos cláusulas que son contradictorias, $C1: B$, $C2: \neg B$, la cláusula resolvente de ambas es la cláusula vacía.

• **Algoritmo de Resolución Proposicional**

| |
|--|
| <p>Entrada: Conjunto de cláusulas C.</p> <p>Salida: Demuestra que C es insatisfacible.</p> |
| <p>1º.- En el conjunto C buscar dos cláusulas $C1, C2$, que contengan algún literal complementario, $L \in C1$ y $\neg L \in C2$.</p> <p>2º.- Si se encuentran:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Calcular la cláusula resolvente de $C1$ y $C2$ y añadirla al conjunto C. - Si la cláusula resolvente es la cláusula vacía: Fin \rightarrow C es insatisfacible. - Si no, volver a 1. <p>3º.- Si no se encuentran cláusulas resolventes: Salir \rightarrow C no es insatisfacible.</p> |

Ejemplo 32 Demostrar por resolución si el conjunto $C = \{p, \neg p \vee q, \neg r, \neg p \vee q \vee r\}$ es insatisfacible.

- Cláusula resolvente de las cláusulas $C3: \neg r$ y $C4: \neg p \vee q \vee r$, es $C5: \neg p \vee q$.
 - Cláusula resolvente de las cláusulas $C5$ y $C2: \neg p \vee q$, es $C6: \neg p$.
 - Cláusula resolvente de las cláusulas $C6$ y $C1$, es la cláusula vacía $[\]$.
- Luego, C es insatisfacible.

Ejemplo 33 Demostrar por resolución si el razonamiento $p \wedge q \rightarrow r \wedge s \Rightarrow \neg p \vee \neg q$ es correcto

Obtenemos el conjunto C formado por las cláusulas de las premisas y las de la negación de la conclusión.

$$C = \{\neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee s, \neg p \vee \neg s, p, q\}$$

Aplicando el algoritmo de resolución:

- Se resuelve $C2: \neg p \vee \neg q \vee s$ con $C3: \neg p \vee \neg s$, obteniendo $C6: \neg p \vee \neg q$
- Se resuelve $C6$ con $C4: p$ obteniendo $C7: \neg q$
- Se resuelve $C7$ con $C5$ y se llega a la cláusula vacía $[\]$

Luego, el conjunto de cláusulas C es insatisfacible y el razonamiento dado es correcto.

• **Regla de Resolución en fórmulas predicativas**

Seguimos con la misma idea de resolución de la lógica de proposiciones pero añadimos un concepto que es necesario para poder aplicar la regla de resolución en fórmulas predicativas.

Def-16: Una **sustitución** es el proceso por el cual se sustituyen las variables (v_1, v_2, \dots, v_n), que son argumentos de un predicado, por términos (t_1, t_2, \dots, t_n) que pueden ser términos constantes, variables o de función. La sustitución se representa por un conjunto finito de pares ordenados:

$$s = \{ t_1/v_1, t_2/v_2, \dots, t_n/v_n \}$$

¡OJO!

- “Ordenado” significa que las sustituciones se realizan en el orden en que aparecen en el conjunto.
- Cuando se hace una sustitución de una variable en una cláusula, deben ser sustituidas todas las variables del mismo nombre en la cláusula.
- No se pueden sustituir los nombres de constantes ni las funciones por ningún otro tipo de término.
- Las variables se pueden sustituir por otras variables.

Ejemplo 34 Obtener la cláusula resolvente de las siguientes: $[P(x, y) \vee Q(x)]$ y $[-Q(a) \vee R(z)]$

Estas dos cláusulas no tienen literales complementarios pues $Q(x)$ y $\neg Q(a)$ no lo son ya que los términos no coinciden; para que dichas subfórmulas sean literales complementarios se debe sustituir la variable x por la constante a . Después de la sustitución los literales: $Q(a)$ y $\neg Q(a)$ son complementarios. La sustitución de “ x ” por “ a ” se representa por $\{a/x\}$.

De esta forma las cláusulas:

$$[P(x, y) \vee Q(x)] \quad \{a/x\} \quad [-Q(a) \vee R(z)]$$

se resuelven en $[P(a,y) \vee R(z)]$

Observar que también se sustituye la variable x de la subfórmula $P(x,y)$.

Ejemplo 35

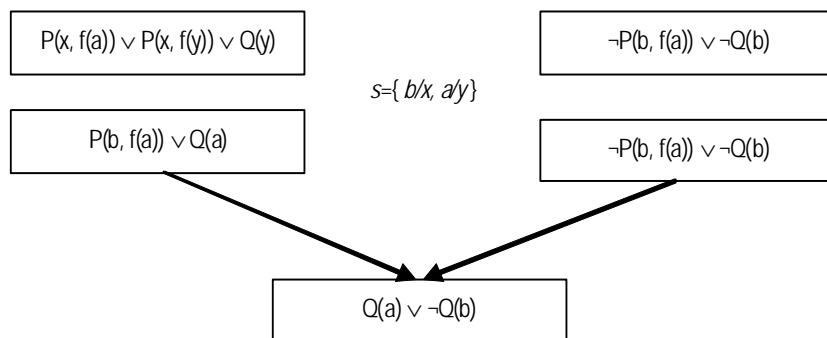
| <u>Cláusula</u> | <u>Cláusula</u> | <u>Resolvente</u> | <u>Sustitución</u> |
|----------------------|-------------------------|--------------------|--------------------|
| $P(x) \vee Q(a)$ | $\neg Q(a) \vee R(z)$ | $P(x) \vee R(z)$ | |
| $Q(x)$ | $\neg Q(a)$ | $[]$ | $\{a/x\}$ |
| $P(x,y) \vee Q(x,b)$ | $\neg Q(a,y) \vee R(y)$ | $P(a,b) \vee R(b)$ | $\{a/x, b/y\}$ |

Para hacer la resolución de dos cláusulas es importante elegir:

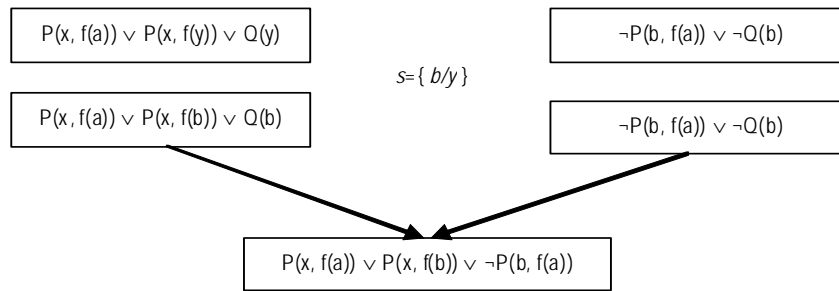
- las cláusulas a unificar y
- los literales a resolver dentro de esas cláusulas.

Ejemplo 36 Resolver las cláusulas:
 $[P(x, f(a)) \vee P(x, f(y)) \vee Q(y)]$ y $[-P(b, f(a)) \vee \neg Q(b)]$

Por resolución obtengo la cláusula resolvente: $Q(a) \vee \neg Q(b)$ con la sustitución $S = \{b/x, a/y\}$. Gráficamente quedaría:



Si el literal a unificar hubiese sido el predicado Q tendríamos:



3.7. Ejercicios resueltos

Se debe estudiar la validez de los siguientes razonamientos aplicando el método del **contraejemplo**. Para ello en cada ejercicio supondremos la existencia de una interpretación $I = \{v(P1)=V, v(P2)=V, \dots, v(Pn)=V, v(Q)=F\}$, siendo P_i las premisas y Q la conclusión, y bajo esta suposición demostraremos cómo se interpretan las fórmulas del razonamiento. Si la suposición es errónea aparecerá una contradicción que lo demuestra.

Ejercicio.1. “Si deja de llover jugaremos fútbol, como ha dejado de llover jugaremos al fútbol”.

Solución 1 Elegimos el siguiente marco conceptual del lenguaje proposicional:

MC = { ll: llueve; fb: jugaremos al futbol }

Formalización:

Fbf-P1: $\neg ll \rightarrow fb$

Fbf-P2: $\neg ll$

Fbf-Q: fb

$\neg ll \rightarrow fb, \neg ll \Rightarrow fb$

Aplicación del método del **contraejemplo**:

| P1: $\neg ll \rightarrow fb$ | P2: $\neg ll$ | Q: fb |
|------------------------------|---------------|-------|
| V | V | F |
| V F | | |
| F # CONTRADICCIÓN | | |

Aparece una contradicción en la premisa P1, por lo tanto, el razonamiento no admite contraejemplo y por lo tanto es correcto, es decir, Q es consecuencia lógica de las premisas P1 y P2.

Ejercicio.2. “Si llueve mucho el patio se inunda. Luego si el patio se inunda entonces llueve mucho”.

Solución 2 Elegimos el siguiente marco conceptual del lenguaje proposicional:

MC = { mu: Llueve mucho; in: El patio se inunda }

Formalización:

Fbf-P1: $m \rightarrow in$

Fbf-Q: $in \rightarrow m$

$m \rightarrow in \Rightarrow in \rightarrow m$

Aplicación del método del **contraejemplo**:

| | |
|--|---|
| P1: $m \rightarrow in$ | Q: $in \rightarrow m$ |
| V | F |
| | V F |
| F V No existe # CONTRADICCIÓN | |

El argumento admite una interpretación contraejemplo luego el razonamiento **NO es correcto**.

- Ejercicio.3.** **P1:** Voy a la facultad o me quedo en casa.
P2: Para que vaya a la facultad es necesario que vaya a clase de Lógica.
P3: Para que estudie Cálculo es suficiente que me quede en casa.
Q: Estudio Cálculo.

Solución 3 Elegimos el siguiente marco conceptual del lenguaje proposicional:

MC = {ca: Me quedo en casa; fc: Voy a la Facultad; lo: Voy a clase de Lógica; cl: Estudio Cálculo }

Formalización:

Fbf-P1: $fc \vee ca$

Fbf-P2: $fc \rightarrow lo$

Fbf-P3: $ca \rightarrow cl$

Fbf-Q: cl

$fc \vee ca, fc \rightarrow lo, ca \rightarrow cl \Rightarrow cl$

Aplicación del método del **contraejemplo**:

| | | | |
|---|---|---|---------------------------|
| P1: $fc \rightarrow ca$ | P2: $fc \rightarrow lo$ | P3: $ca \rightarrow cl$ | Q: cl |
| V | V | V | F |
| | | ca= F F | |
| F fc= F | | | |
| | F | | |
| No existe # CONTRADICCIÓN | | | |

El argumento admite una interpretación contraejemplo, luego **no** es correcto.

- Ejercicio.4.** “Aprobarás el examen de Lógica sólo si te animas a estudiar Cálculo. Para que seas un buen matemático es suficiente que te animes a estudiar Cálculo. Luego, si apruebas el examen de Lógica serás un buen matemático”

Solución 4 Elegimos el siguiente marco conceptual del lenguaje proposicional:

MC = {lo: Apruebas el examen de Lógica; ac: Te animas a estudiar Cálculo; mt: Eres un buen matemático}

Formalización:

Fbf-P1: $lo \rightarrow ac$

Fbf-P2: $ac \rightarrow mt$

Fbf-Q: $lo \rightarrow mt$

$lo \rightarrow ac, ac \rightarrow mt \Rightarrow lo \rightarrow mt$

Aplicación del método del **contraejemplo**:

| P1: lo → ac | P2: ac → mt | Q: lo → mt |
|--|-------------|------------|
| V | V | F |
| | | lo=V; mt=F |
| | ac=F | |
| lo=F | | |
| Existe CONTRADICCIÓN entre P1 y Q | | |

Ejercicio.5. Proponer **una** sentencia Q que sea consecuencia lógica de las siguientes premisas y demostrarlo usando el método del **contraejemplo**.

P1: “Para que aprendas Lógica es necesario que seas inteligente”.

P2: “Para que entiendas a las mujeres es suficiente con que seas inteligente”.

Solución 5 Elegimos el siguiente marco conceptual del lenguaje proposicional:

MC = {lo: Aprendes Lógica; in: Eres inteligente; mj: Entiendes a las mujeres }

Formalización

Fbf-P1: lo → in

Fbf-P2: in → mj

Propuesta de conclusión: Q: Si aprendes Lógica entiendes a las mujeres

Fbf-Q: lo → mj

Demostración de que Q es consecuencia lógica de P1 y P2 mediante el M. del **contraejemplo**

| P1: lo → in | P2: in → mj | Q: lo → mj |
|--------------------------|-------------|------------|
| V | V | F |
| | | V F |
| V F | F F | |
| F # CONTRADICCIÓN | | |

Aparece contradicción luego Q es consecuencia lógica de P1 y P2.

Ejercicio.6. Dadas las sentencias:

S1: “Las prácticas se realizan en el laboratorio de arriba o en el de abajo pero no en ambos”.

S2: “Para que las prácticas se realicen en el laboratorio de abajo es suficiente que el de arriba esté ocupado”.

S3: “Para que las prácticas se realicen en el laboratorio de arriba es necesario que éste esté ocupado”.

S4: “Para que el laboratorio de arriba no esté ocupado es suficiente que las prácticas se realicen en él”.

Demostrar si las sentencias S3 y S4 son consecuencia lógica de S1 y S2 usando el método del **contraejemplo**.

Solución 6

MC = { la: Las prácticas se realizan en el laboratorio de arriba;
 lb: Las prácticas se realizan en el laboratorio de abajo;
 ac: El laboratorio de arriba está ocupado;
 bc: El laboratorio de abajo está ocupado }

Formalización:

- Fbf-S1: $(la \vee lb) \wedge \neg(la \wedge lb)$.
- Fbf-S2: $ac \rightarrow lb$
- Fbf-S3: $la \rightarrow ac$
- Fbf-S4: $la \rightarrow \neg ac$

> Se demuestra si S3 es consecuencia lógica de S1 y S2 aplicando el M. del **contraejemplo**, que equivale a:

* Estudiar la **Validez del argumento S1, S2 \Rightarrow S3**

| S1: $(la \vee lb) \wedge \neg(la \wedge lb)$ | S2: $ac \rightarrow lb$ | S3: $la \rightarrow ac$ |
|--|-------------------------|-------------------------|
| V | V | F |
| | | V F |
| V V | F V/F | |
| V V V V V F F F | | |
| V | | |
| # No hay CONTRADICCIÓN | | |

El argumento admite una interpretación contraejemplo, por ejemplo $I = \{ la=V, lb = V, ac = F \}$ que interpreta a las premisas como verdaderas y a la conclusión como falsa. Luego S3 no es **consecuencia lógica** de S1 y S2.

> Se demuestra si S4 es consecuencia lógica de S1 y S2 aplicando el M. del **contraejemplo**, que equivale a:

* Estudiar la **Validez del argumento S1, S2 \Rightarrow S4**

| S1: $(la \vee lb) \wedge \neg(la \wedge lb)$ | S2: $ac \rightarrow lb$ | S4: $la \rightarrow \neg ac$ |
|--|-------------------------|--|
| V | V | F |
| | | V F \Rightarrow ac=V |
| V V V F V V V | V V | |
| F | | |
| # CONTRADICCIÓN | | |

El argumento no admite interpretación contraejemplo, luego S4 es **consecuencia lógica** de S1 y S2, es decir, el argumento S1, S2 \Rightarrow S4 es correcto.

Ejercicio.7. Estudiar la validez del siguiente razonamiento mediante **Tablas de Verdad**.

P1: Para que hoy salga a caminar es suficiente que haga sol

P2: Hoy no hace sol.

Conclusión-Q1: No salgo a caminar.

Conclusión-Q2: Salgo a caminar.

Conclusión-Q3: es falso que salga a caminar y que no salga.

Solución 7

MC = {ca: Hoy salgo a caminar; so: Hace sol }

Formalización:

Fbf-P1: $so \rightarrow ca$

Fbf-P2: $\neg so$

Fbf-Q1: $\neg ca$

Fbf-Q2: ca

Fbf-Q3: $\neg(ca \wedge \neg ca)$

Raz-Q1 : $so \rightarrow ca, \neg so \Rightarrow \neg ca$

Raz-Q2: $so \rightarrow ca, \neg so \Rightarrow ca$

Raz-Q3: $so \rightarrow ca, \neg so \Rightarrow \neg(ca \wedge \neg ca)$

Tabla de Verdad:

| P1 | | | P2 | | Q1 | | Q2 | Q3 | | | | |
|----|---------------|----|--------|----|--------|----|----|--------|-----|----------|--------|-----|
| so | \rightarrow | ca | \neg | so | \neg | ca | ca | \neg | (ca | \wedge | \neg | ca) |
| V | V | V | F | V | F | V | V | V | V | F | F | V |
| V | F | F | F | V | V | F | F | V | F | F | V | F |
| F | V | V | V | F | F | V | V | V | V | F | F | V |
| F | V | F | V | F | V | F | F | V | F | F | V | F |

Los razonamientos Raz-Q1 y Raz-Q2 **NO** son correctos porque aparece una interpretación contraejemplo. Para Raz-Q1 en la fila 3 y para Raz-Q2 en la fila 4. La estructura argumental Raz-Q3 **SÍ** es correcta porque no tiene ninguna interpretación contraejemplo.

Ejercicio.8. Obtener la **Forma Clausal** de la siguiente fórmula predicativa:

$$\forall x \forall y \forall z [encimaDe(x, y) \wedge encimaDe(y, z) \rightarrow encimaDe(x, z)]$$

Solución 8

Paso 1. Eliminar implicador:

$$\forall x \forall y \forall z [\neg [encimaDe(x, y) \wedge encimaDe(y, z)] \vee encimaDe(x, z)]$$

Paso 2. Normalizar negadores:

$$\forall x \forall y \forall z [\neg encimaDe(x, y) \vee \neg encimaDe(y, z) \vee encimaDe(x, z)]$$

Paso 7. Extracción de cláusulas

$$C_1: \neg encimaDe(x, y) \vee \neg encimaDe(y, z) \vee encimaDe(x, z)$$

Ejercicio.9. Obtener la **Forma Clausal** de la siguiente fórmula predicativa:

$$\forall x \forall y \{ encimaDe(x, y) \wedge \neg sobre(x, y) \rightarrow \exists z [encimaDe(x, z) \wedge encimaDe(z, y)] \}$$

Solución 9

Paso 1. Eliminar implicador:

$$\forall x \forall y \{ \neg [encimaDe(x, y) \wedge \neg sobre(x, y)] \vee \exists z [encimaDe(x, z) \wedge encimaDe(z, y)] \}$$

Paso 2. Normalizar negadores:

$$\forall x \forall y \{ [\neg encimaDe(x, y) \vee \neg \neg sobre(x, y)] \vee \exists z [encimaDe(x, z) \wedge encimaDe(z, y)] \}$$

$$\forall x \forall y \{ [\neg encimaDe(x, y) \vee sobre(x, y)] \vee \exists z [encimaDe(x, z) \wedge encimaDe(z, y)] \}$$

Paso 4. Eliminar cuantificador existencial:

Como $\exists z$ está dentro del ámbito de los cuantificadores $\forall x \forall y$ se sustituye la variable $z = f(x, y)$:

$$\forall x \forall y \{ [\neg encimaDe(x, y) \vee sobre(x, y)] \vee [encimaDe(x, f(x, y)) \wedge encimaDe(f(x, y), y)] \}$$

Paso 6. Aplicar distributiva:

$$\forall x \forall y \{ [\neg encimaDe(x, y) \vee sobre(x, y) \vee encimaDe(x, f(x, y))] \wedge [\neg encimaDe(x, y) \vee sobre(x, y) \vee encimaDe(f(x, y), y)] \}$$

Paso 7. Extracción de cláusulas:

$$C_1: \neg encimaDe(x_1, y_1) \vee sobre(x_1, y_1) \vee encimaDe(x_1, f(x_1, y_1))$$

$$C_2: \neg encimaDe(x_2, y_2) \vee sobre(x_2, y_2) \vee encimaDe(f(x_2, y_2), y_2)$$

Ejercicio.10. Demuestra la validez del siguiente razonamiento basándote en los resultados del Teorema 1 y en la regla de resolución:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r, \neg p \vee q \Rightarrow r$$

Solución 10

1º.- Obtenemos el conjunto C formado por las cláusulas de las premisas y la negación de la conclusión:

Fbf(P1): $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

Paso 1. Eliminar implicadores: $(p \wedge \neg q) \vee r$

Paso 6. Distributiva: $(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

Paso 7. Extracción de cláusulas: C1: $\neg p \vee r$; C2: $\neg q \vee r$;

Fbf(P2): $\neg p \vee q$

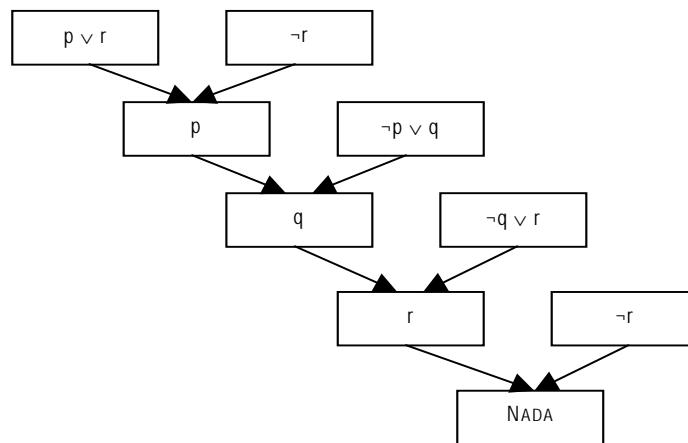
Paso 7. Extracción de cláusulas: C3: $\neg p \vee q$;

Fbf($\neg Q$): $\neg r$

Paso 7. Extracción de cláusulas: C4: $\neg r$;

Demostremos que C es insatisfacible aplicando la regla de resolución hasta encontrar una resolvente que sea la cláusula vacía:

$C = \{ \neg p \vee r; \neg q \vee r; \neg p \vee q, \neg r \}$. Escribimos la resolución en forma de árbol:



Al obtener la cláusula NADA, podemos concluir que el conjunto C es insatisfacible, luego el argumento dado es correcto.

Ejercicio.11. Demuestra la validez del siguiente argumento estudiando si el conjunto C formado por las cláusulas de las premisas y las de la negación de la conclusión, es insatisfacible. Para ello aplica la regla de resolución:

P1: Cualquiera que tenga sentido del humor es cantante.

P2: Los pájaros no son cantantes.

P3: Algún pájaro tiene buena voz.

Q: Luego, alguien que tiene buena voz no es cantante.

Solución 11

MC = { S(x): x tiene sentido del humor; C(x): x es cantante; P(x): x es pájaro; V(x): x tiene buena voz }

Fbf-P1: $\forall x [S(x) \rightarrow C(x)]$

Fbf-P2: $\forall x [P(x) \rightarrow \neg C(x)]$

Fbf-P3: $\exists x [P(x) \wedge V(x)]$

$$\text{Fbf-Q: } \exists x [V(x) \wedge \neg C(x)]$$

1º.- Obtenemos el conjunto C formado por las cláusulas de las premisas y la negación de la conclusión:

$$\text{Fbf(P1): } \forall x [S(x) \rightarrow C(x)]$$

Paso 1. Eliminar implicador: $\forall x [\neg S(x) \vee C(x)]$

Paso 7: Extraer las cláusulas C1: $\neg S(x) \vee C(x)$

$$\text{Fbf(P2): } \forall x [P(x) \rightarrow \neg C(x)]$$

Paso 1: Eliminar implicador: $\forall x [\neg P(x) \vee \neg C(x)]$

Paso 7: Extraer las cláusulas C2: $\neg P(x) \vee \neg C(x)$

$$\text{Fbf(P3): } \exists x [P(x) \wedge V(x)]$$

Paso 4. Eliminar existencial: $P(a) \wedge V(a)$

Paso 7: Extraer las cláusulas C3: $P(a)$; C4: $V(a)$

$$\text{Fbf(-Q): } \neg \exists x [V(x) \wedge \neg C(x)] \equiv \forall x \neg [V(x) \wedge \neg C(x)] \equiv \forall x [\neg V(x) \vee C(x)]$$

Paso 7: Extraer las cláusulas C5: $\neg V(x) \vee C(x)$

$$C = \{ \begin{array}{ll} C_1. & \neg S(x_1) \vee C(x_1) \\ C_2. & \neg P(x_2) \vee \neg C(x_2) \\ C_3. & P(a) \\ C_4. & V(a) \\ C_5. & \neg V(x_3) \vee C(x_3) \end{array} \}$$

Aplicando Resolución vamos obteniendo las siguientes nuevas cláusulas:

$$\begin{array}{lll} C_6. & \neg C(a) & \text{de 2 y 3 con } \{ a/x_2 \} \\ C_7. & C(a) & \text{de 4 y 5 con } \{ a/x_3 \} \\ C_8. & \text{NADA} & \text{de 6 y 6} \end{array}$$

Luego el conjunto $C = \{ C_1, \dots, C_5 \}$ es insatisfacible, por lo que el argumento dado es correcto.

3.8. Si quieres saber más...

- **Libros**

“Lógica de Primer Orden”. Castel M^a J. y Llorens F. DCCIA, U.A. 1999.

“Introducción a la Lógica Formal”. Deaño, A. Alianza U.Textos, 1992.

“Lógica Simbólica” Garrido, M. Ed. Tecnos, S.A., 2ªed. 1991

“Matemática Discreta y Lógica. Una perspectiva desde la C. C”. Grassmann, W.K. y Tremblay. Ed. Prentice Hall, 1996.

- **Enlaces web**

http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/libros/Filosofia/intro_logica/1_parte.pdf

http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%B3gica_proposicional



• **Lógica divertida**

1. **Razona...**

En un juicio el abogado fiscal argumenta:

“Si el acusado es culpable entonces tenía un cómplice, su amigo Rudolf”.

A ello, el abogado defensor responde inmediatamente: **“Eso es falso”.**

El acusado, sorprendido, decide cambiar de abogado. ¿Por qué crees que lo hace?

- a) Porque el abogado defiende a su cómplice pero a él lo inculpa
 - b) Porque le está acusando directamente
 - c) Porque está inculcando a su amigo Rudolf
 - d) Porque no tenía un cómplice y era inocente
2. Bertrand Russell estaba tratando sobre los enunciados condicionales y sosteniendo que un enunciado falso implica cualquier cosa. Un filósofo escéptico le preguntó:
- ¿Quiere usted decir que si $2+2=5$, entonces es usted el Papa?
Russell contesto afirmativamente y dio la divertida “prueba” que sigue:
- Si suponemos que $2+2=5$, entonces seguramente estará usted de acuerdo en que si restamos 2 de cada lado de la ecuación, nos da $2=3$. Invertiendo los términos, tenemos $3=2$ y restando 1 de cada lado de la ecuación, nos da $2=1$. De modo que, como el Papa y yo somos dos personas, y $2=1$, entonces el Papa y yo somos uno. Luego, yo soy el Papa.
3. ¿Qué valor de verdad le darías a la frase: “Esta oración es falsa”? Supongamos que el enunciado sea verdadero, por tanto por lo que dice, la frase es falsa, ¡y nosotros habíamos supuesto que es verdadero! Por otro lado, si el enunciado fuese falso, por lo que dice, la oración no sería falsa, es decir, ¡la frase debería ser verdadera y hemos supuesto que es falsa!
4. En la antigüedad se sostenía una interesante discusión; Filón de Megara afirmaba la implicación material siguiente: *“para que dos proposiciones se impliquen basta con que no se dé el caso de que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, sin importar el contenido de las mismas”*. Con esto, los antiguos filósofos no estaban muy de acuerdo porque, entonces, la siguiente afirmación:

«Si es de noche, entonces discuto»

es verdadera cuando: - sea de día aunque no discuta (implicación con antecedente F).

- discuto aunque no sea de noche (implicación con consecuente V).

Diodoro Crono, maestro de Filón, no aceptaba este punto de vista, porque le parecía absurdo que la proposición condicional “si es de noche, entonces discuto” se convirtiese circunstancialmente en verdadera durante el día. Para Diodoro si una proposición es verdadera lo tiene que ser siempre, esto es, es imposible que se dé el caso de que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso (implicación material estricta). La implicación diodórica se conoce como implicación formal.