



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

Modelos armónicos no lineales  
para series temporales geodéticas

Non-linear harmonic models for  
geodetic time series

Pedro Antonio Martínez Ortiz



Tesis

**Doctorales**

[www.eltallerdigital.com](http://www.eltallerdigital.com)

UNIVERSIDAD de ALICANTE



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR  
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

# Modelos armónicos no lineales para series temporales geodéticas

---

## Non-linear harmonic models for geodetic time series

MEMORIA PRESENTADA POR  
PEDRO ANTONIO MARTÍNEZ ORTIZ  
PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICAS

DIRIGIDA POR JOSÉ MANUEL FERRÁNDIZ LEAL

Alicante, 2011





**Estudia el pasado si quieres pronosticar el futuro.**

Confucio (551 AC-478 AC)

Filósofo chino.

**El gran libro de la naturaleza está escrito en símbolos matemáticos.**

Galileo Galilei (1564-1642)

Físico y astrónomo italiano.

**El pasado es un prólogo.**

William Shakespeare (1564-1616)

Escritor británico.



---

# Agradecimientos

Durante estos años han sido muchas las personas que han participado de alguna forma en este trabajo de investigación y a quienes quiero expresar mi gratitud por el apoyo, el estímulo y la confianza que me han brindado de forma desinteresada.

En primer lugar me gustaría mostrar el más sincero agradecimiento a mi director, el *Dr. José Manuel Ferrándiz Leal*, bajo cuya supervisión inicié esta andadura. Quiero darle las gracias por tenerme siempre presente, por su sabio asesoramiento, sus relevantes aportes, su paciencia y su acertada orientación. Sin duda alguna, su experiencia en el campo de la investigación, de la que tanto he aprendido, ha sido imprescindible durante estos años de doctorado.

Cómo no, me gustaría dar las gracias al *Laboratoire de Recherche en Géodésie* por su extraordinaria acogida y constante atención. En especial quiero agradecer al *Dr. Zuheir Altamimi* por su confianza en mí, su enorme profesionalidad siempre acompañada de buenos consejos y por dedicarme parte de su tiempo aún a pesar de sus múltiples obligaciones. Es imposible olvidarme del *Dr. Xavier Collilieux*, para quien sólo tengo palabras de completa gratitud por su paciencia, gentileza, humildad e inestimable ayuda. Sin vuestra valiosa colaboración este trabajo no habría sido posible.

Asimismo, agradezco a la *Generalitat Valenciana* por la concesión de la beca de formación de personal investigador BFPI/2007/036 y la beca de estancia en el extranjero BEFPI /2010/021 que junto con la financiación recibida en 2005-2006 por el *Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Alicante* asociada al

proyecto de investigación “*Geodesia Espacial y Dinámica Espacial*”, hicieron posible aventurarme en esta travesía.

Existen otras personas que, aunque no hayan participado de forma directa en la realización de este trabajo de investigación, resultan ser piezas fundamentales sin las cuales no habría podido llegar hasta aquí y por tanto merecen mi muestra de gratitud.

A mis amigos, por su compañía y apoyo moral cuando más lo he necesitado. Porque estando a vuestro lado las alegrías tienden a infinito y las angustias se reducen a conjuntos de medida nula. Me gustaría mencionaros a todos pero temo olvidar a alguien y eso no me lo perdonaría en la vida.

También quiero dar las gracias a toda mi familia por el apoyo, cariño y comprensión que jamás han dejado de regalarme. Todos sois importantes para mí pero, en esta ocasión, me gustaría dedicar unas líneas a algunos de vosotros. Papá, mamá . . . siempre os estaré agradecido porque por vosotros soy quien soy y estoy donde quiero estar. Mil gracias por educarme en igualdad, en respecto y muchos otros valores, pero sobre todo en libertad. A mi hermana, a la que tanto quiero y con la que he compartido tantísimos momentos de mi vida. Y a ti, Julián, porque siempre me haces ver el lado positivo de las cosas y nunca has dudado en ayudarme; espero algún día poder devolverte todo lo que haces por mí.

Terminaré dando las gracias a quienes sientan que parte de ellos ha contribuido en la realización de este trabajo. A aquellas personas que, por azar o destino, he encontrado a lo largo de mi vida porque todas, sin excepción, me habéis hecho crecer en algún sentido. Una vez más, gracias.

Pedro Antonio Martínez Ortiz

---

# Resumen

El trabajo de investigación aborda el desarrollo de nuevos métodos y software para el análisis espectral de series de tiempo escalares o vectoriales, con énfasis en aplicaciones de interés geodésico. El punto de partida puede ubicarse en el método introducido por Harada y Fukushima para el análisis no lineal de series temporales, que permite detectar recursivamente las frecuencias, sus amplitudes y fases asociadas, así como términos seculares mixtos de Fourier cuando éstos se encuentran en la señal. Este método se extiende de diferentes maneras permitiendo el tratamiento de series (regular o irregularmente espaciadas) afectadas por un ruido de autocorrelación de ley potencial. Esto se hace tanto a nivel de detección de frecuencias como de ajuste no lineal. Una reducción del tiempo de cómputo es también obtenida.

El trabajo teórico viene acompañado por el desarrollo de un software completo y especializado para el análisis armónico no lineal de series de tiempo utilizando el lenguaje de programación MATLAB. Gran parte de las herramientas que encontramos hoy en día para el análisis de series temporales periódicas son válidas sólo para ciertos tipos de éstas, mientras que los programas que se presentan en este trabajo pueden ser aplicados a series irregularmente espaciadas e influenciadas por una componente residual fruto, por ejemplo, de una combinación de ruido blanco y parpadeante.

Los nuevos métodos y rutinas se utilizan para analizar algunas series interesantes como aquellas que describen las perturbaciones del polo celeste, las variaciones del geocentro debidas a la redistribución de la masa de agua en la superficie terrestre, el exceso de la duración del día, el flujo de agua continental y las posiciones de estaciones GPS, entre otros. Los modelos armónicos no lineales estimados permiten explicar cada uno de estos fenómenos en el dominio temporal considerado y extraer conclusiones de su comportamiento.



---

# Abstract

The dissertation addresses the development of new methods and software for the spectral analysis of scalar or vectorial time series, with emphasis in the applications of geodetic interest. The starting point can be placed in the method introduced by Harada and Fukushima for the non-linear analysis of time series, which allows the recursive detection of frequencies and their associated amplitudes and phases as well as the secular mixed Fourier terms when found in the signal. That method is extended in different ways, allowing the treatment of series affected by auto correlated noise with a power law, either evenly or unevenly spaced. This is made both at the level of frequency detection and non-linear fitting. Reduction of the computational overhead is also obtained.

The theoretical work is accompanied by the developing of comprehensive and specialized software for such non-linear harmonic analysis of time series using the MATLAB programming language. Much of the tools we can find today for analyzing these periodic time series are valid only for certain types whereas the programs in the thesis can be applied to oddly spaced series in the presence of combinations of white and flicker noise.

The new methods and routines are used for analyzing some interesting series as those ones describing the celestial pole offsets, the geocentre variations due to the redistribution of water mass on the Earth's surface, the excess of the length of day, continental water flux and the positions of GPS stations, among others. We estimate harmonic models that explain each one of these phenomena in the considered time domain and allow us to draw conclusions of their behavior.

---

# Índice general

|  |          |
|--|----------|
| Agradecimientos  | v        |
| Resumen  | vii      |
| Abstract   | viii     |
| <b>I MODELOS ARMÓNICOS NO LINEALES PARA SERIES TEMPORALES GEODÉTICAS</b> | <b>1</b> |
| <b>1. Introducción</b>   | <b>3</b> |
| 1.1. Objetivos y metodología . . . . .                                   | 4        |
| 1.2. Contenidos . . . . .  | 6        |
| <b>2. El problema de la detección de señales</b>                         | <b>9</b> |
| 2.1. Definición de serie temporal . . . . .                              | 9        |
| 2.1.1. Componentes de una serie temporal . . . . .                       | 11       |
| 2.1.2. Componente de ruido . . . . .                                     | 15       |
| 2.2. Técnicas para el estudio de series temporales . . . . .             | 16       |
| 2.2.1. Análisis clásico . . . . .  | 17       |
| 2.2.2. Análisis espectral . . . . .                                      | 20       |
| 2.2.3. Análisis wavelet . . . . .  | 23       |
| 2.3. El problema de la detección de señales . . . . .                    | 25       |
| 2.3.1. Periodograma de Lomb . . . . .                                    | 28       |
| 2.3.2. Dominio de frecuencia . . . . .                                   | 32       |
|  | ix       |

|   |            |
|---|------------|
| <b>3. Análisis armónico no lineal</b>   | <b>35</b>  |
| 3.1. Introducción . . . . .   | 35         |
| 3.2. Descripción del método . . . . .   | 39         |
| 3.2.1. Función objetivo y funciones base . . . . .  | 39         |
| 3.2.2. Solución mínimo cuadrática . . . . .   | 43         |
| 3.2.3. Optimización no lineal: Algoritmo BFGS . . . . .   | 46         |
| 3.2.4. Extracción de frecuencias . . . . .  | 47         |
| 3.3. Incertidumbre . . . . .  | 51         |
| 3.4. Generalización . . . . .   | 54         |
| 3.5. Tratamiento de los términos periódicos de corta frecuencia . . . . .                           | 58         |
| <b>4. Variaciones del polo celeste</b>  | <b>61</b>  |
| 4.1. Modelo de precesión-nutación IAU1980 . . . . .   | 61         |
| 4.1.1. Introducción . . . . .   | 61         |
| 4.1.2. Descripción de los datos . . . . .   | 64         |
| 4.1.3. Características del análisis y resultados . . . . .  | 66         |
| 4.1.4. Conclusiones . . . . .   | 75         |
| 4.2. Modelo de precesión-nutación IAU2000 . . . . .   | 77         |
| 4.2.1. Introducción . . . . .   | 77         |
| 4.2.2. Descripción de los datos . . . . .   | 79         |
| 4.2.3. Características del análisis y resultados . . . . .  | 79         |
| 4.2.4. Conclusiones . . . . .   | 80         |
| 4.3. Modelos dinámicos para la predicción a corto plazo de $(\delta\psi, \delta\epsilon)$ . . . . . | 91         |
| <b>5. Variaciones geocéntricas causadas por el flujo de agua continental</b>                        | <b>101</b> |
| 5.1. Introducción . . . . .   | 101        |
| 5.2. Descripción de los datos . . . . .   | 103        |
| 5.3. Características del análisis y resultados . . . . .  | 106        |
| 5.4. Conclusiones . . . . .   | 117        |
| <b>6. Modelos espacio-temporales para el flujo de agua continental</b>                              | <b>121</b> |
| 6.1. Introducción . . . . .   | 121        |
| 6.2. Descripción de datos . . . . .   | 126        |
| 6.3. Características del análisis . . . . .   | 127        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 6.4.      | Resultados . . . . .  | 129        |
| 6.5.      | Conclusiones . . . . .  | 143        |
| <b>7.</b> | <b>Estudio armónico del exceso en la duración del día</b>   | <b>149</b> |
| 7.1.      | Introducción . . . . .  | 149        |
| 7.2.      | Descripción de los datos . . . . .  | 151        |
| 7.3.      | Características del análisis y resultados . . . . .   | 157        |
| 7.4.      | Conclusiones . . . . .  | 157        |
| <b>8.</b> | <b>Ruido</b>  | <b>165</b> |
| 8.1.      | Tipología básica . . . . .  | 166        |
| 8.2.      | Matrices de covarianza . . . . .  | 168        |
| 8.2.1.    | Matriz de covarianzas para un ruido blanco . . . . .  | 170        |
| 8.2.2.    | Matriz de covarianzas para un ruido parpadeante . . . . .   | 170        |
| 8.2.3.    | Matriz de covarianzas para un paseo aleatorio . . . . .   | 170        |
| 8.3.      | Relación ruido-periodograma . . . . .   | 172        |
| 8.4.      | Ruido en las observaciones GPS . . . . .  | 173        |
| <b>9.</b> | <b>Algoritmo FFAST</b>  | <b>177</b> |
| 9.1.      | Introducción . . . . .  | 177        |
| 9.2.      | Función objetivo . . . . .  | 180        |
| 9.3.      | Modelo estocástico . . . . .  | 181        |
| 9.3.1.    | Estimación de un índice espectral . . . . .   | 181        |
| 9.3.2.    | Componente residual como combinación de varios ruidos. Estimación de la frecuencia de transición. . . . . | 184        |
| 9.4.      | Modelo funcional . . . . .  | 186        |
| 9.5.      | Estimación de la componente de varianza . . . . .   | 187        |
| 9.5.1.    | Condición de no negatividad . . . . .   | 189        |
| 9.6.      | Extensión del periodograma . . . . .  | 192        |
| 9.6.1.    | Aceleración del cálculo del periodograma . . . . .  | 196        |
| 9.7.      | Incertidumbre . . . . .   | 198        |
| 9.7.1.    | Parámetros lineales y no lineales del modelo funcional . . . . .  | 198        |
| 9.7.2.    | Parámetros del modelo estocástico . . . . .   | 199        |
| 9.8.      | Criterios de parada algorítmica . . . . .   | 200        |

|             |  |            |
|-------------|--|------------|
| 9.9.        | Entramado algorítmico . . . . .  | 201        |
| 9.10.       | Simulación . . . . .   | 203        |
| <b>10.</b>  | <b>Estudio de las series de posiciones de estaciones GPS</b>                 | <b>213</b> |
| 10.1.       | Introducción . . . . .   | 213        |
| 10.1.1.     | Sistemas y marcos de Referencia Terrestres . . . . .                         | 213        |
| 10.1.2.     | Relación entre dos sistemas de referencia terrestre . . . . .                | 217        |
| 10.1.3.     | Series temporales residuales de posiciones de estaciones GPS . . . . .       | 218        |
| 10.2.       | Análisis de las series temporales residuales . . . . .                       | 219        |
| 10.3.       | Resultados y discusión . . . . .   | 221        |
| 10.4.       | Conclusiones . . . . .   | 260        |
| <b>11.</b>  | <b>Conclusiones y perspectivas</b>   | <b>263</b> |
| 11.1.       | Conclusiones . . . . .   | 263        |
| 11.2.       | Perspectivas . . . . .   | 268        |
| 11.2.1.     | Frecuencia de transición. Ruido combinado . . . . .                          | 269        |
| 11.2.2.     | Análisis conjunto de series de posición GPS y VLBI . . . . .                 | 270        |
| 11.2.3.     | Aceleración computacional . . . . .  | 271        |
| <b>II</b>   | <b>EXTENDED SUMMARY: NON-LINEAR HARMONIC MODELS FOR GEODETIC TIME SERIES</b> | <b>281</b> |
| <b>S.1.</b> | <b>Introduction</b>  | <b>283</b> |
| S.1.1.      | Objectives and methodology . . . . .   | 284        |
| S.1.2.      | Contents . . . . .   | 286        |
| <b>S.2.</b> | <b>The signal detection problem</b>  | <b>289</b> |
| S.2.1.      | Definition of time series . . . . .  | 289        |
| S.2.1.1.    | Components of a time series . . . . .  | 290        |
| S.2.1.2.    | Noise component . . . . .  | 291        |
| S.2.2.      | Spectral analysis . . . . .  | 292        |
| S.2.3.      | The signal detection problem . . . . .                                       | 293        |
| <b>S.3.</b> | <b>Non-linear harmonic analysis</b>  | <b>295</b> |

|   |            |
|---|------------|
| <b>S.4. Celestial Pole Offsets</b>  | <b>301</b> |
| S.4.1. IAU1980 Pole Offsets . . . . .   | 301        |
| S.4.1.1. Data . . . . .   | 301        |
| S.4.1.2. Analysis and results . . . . .                                       | 301        |
| S.4.1.3. Conclusions . . . . .  | 302        |
| S.4.2. IAU2000 Pole Offsets . . . . .   | 304        |
| S.4.2.1. Data . . . . .   | 304        |
| S.4.2.2. Analysis and results . . . . .                                       | 305        |
| S.4.2.3. Conclusions . . . . .  | 305        |
| S.4.3. Dynamic models for $(\delta\psi, \delta\epsilon)$ prediction . . . . . | 307        |
| <b>S.5. Geocenter variations caused by continental water flux</b>             | <b>309</b> |
| S.5.1. Introduction . . . . .   | 309        |
| S.5.2. Data . . . . .   | 310        |
| S.5.3. Analysis and results . . . . .   | 310        |
| S.5.4. Conclusions . . . . .  | 311        |
| <b>S.6. Spatio-temporal models for continental water flux</b>                 | <b>315</b> |
| S.6.1. Introduction . . . . .   | 315        |
| S.6.2. Data . . . . .   | 318        |
| S.6.3. Methods . . . . .  | 319        |
| S.6.4. Results . . . . .  | 321        |
| S.6.5. Conclusions . . . . .  | 325        |
| <b>S.7. Harmonic study of the length of day</b>                               | <b>329</b> |
| S.7.1. Introduction . . . . .   | 329        |
| S.7.2. Data . . . . .   | 330        |
| S.7.3. Analysis and results . . . . .   | 330        |
| S.7.4. Conclusions . . . . .  | 331        |
| <b>S.8. Noise</b>   | <b>335</b> |
| S.8.1. Typology . . . . .   | 335        |
| S.8.2. Covariance matrices . . . . .  | 336        |
| S.8.3. Relationship noise-periodogram . . . . .                               | 337        |

|  |            |
|--|------------|
| S.8.4. Noise in GPS observations . . . . .                                 | 338        |
| <b>S.9. FFAST algorithm</b>  | <b>339</b> |
| S.9.1. Introduction . . . . .  | 339        |
| S.9.2. Stochastic model . . . . .  | 340        |
| S.9.3. Functional model . . . . .  | 341        |
| S.9.4. Component variance estimation . . . . .                             | 342        |
| S.9.5. Modification of the periodogram . . . . .                           | 343        |
| S.9.5.1. A faster estimation of the periodogram . . . . .                  | 343        |
| S.9.6. Stop criteria . . . . .   | 344        |
| S.9.7. Algorithm . . . . .   | 345        |
| <b>S.10. Study of the position time series of GPS stations</b>             | <b>349</b> |
| S.10.1. Introduction . . . . .   | 349        |
| S.10.2. Analysis and results . . . . .                                     | 351        |
| S.10.3. Conclusions . . . . .  | 355        |
| <b>S.11. Conclusions and outlook</b>                                       | <b>357</b> |
| S.11.1. Conclusions . . . . .  | 357        |
| S.11.2. Outlook . . . . .  | 361        |
| S.11.2.1. Crossover frequency. Combined noise . . . . .                    | 362        |
| S.11.2.2. Combined analysis of GPS and VLBI position time series . . . . . | 363        |
| S.11.2.3. Patched periodogram . . . . .                                    | 363        |
| <b>III APÉNDICES</b>   | <b>367</b> |
| <b>A. Ley de propagación del error</b>                                     | <b>369</b> |
| <b>B. Acrónimos, abreviaturas y unidades</b>                               | <b>375</b> |
| <b>C. Modelos armónicos no lineales de algunas estaciones GPS</b>          | <b>379</b> |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>393</b> |

---

# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 2.1. Descomposición de una serie temporal en sus componentes principales. (a) Serie temporal, (b) componente de tendencia, (c) componente cíclica, (d) componente estacional, (e) componente periódica (cíclica+estacional) y (f) componente residual o ruido. . . . .   | 13 |
| 2.2. Representación gráfica de la wavelet de Haar . . . . .  | 24 |
| 2.3. Fenómeno de fuga espectral . . . . .  | 26 |
| 3.1. Algoritmo principal. Método armónico no lineal. . . . .   | 40 |
| 3.2. Representación gráfica de la relación contemplada en (3.20). Puede compararse la diferencia de sinusoides de misma amplitud y similar frecuencia (en azul) frente al término secular aproximante (en verde). Los valores asumidos en la expresión (3.20) han sido: $a = 5$ unidades, $\omega = 2\pi \cdot 0.01$ y $\omega' = 2\pi \cdot 0.0101$ . . . . . | 43 |
| 3.3. Peridograma de Lomb y periodograma extendido para una señal simple $d = \sin(\omega_0 t)$ (arriba) y para una señal secular de la forma $d = t \cdot \sin(\omega_0 t)$ (abajo). La frecuencia angular $\omega_0$ es la misma para ambas señales, $\omega_0 = 2\pi \cdot 0.01$ . . . . .   | 49 |
| 3.4. Ajuste parabólico del periodograma en un entorno del pico de frecuencia. . . . .  | 51 |
| 3.5. Extracción de frecuencias y asignación de funciones base. Algoritmo. . . . .  | 52 |
| 4.1. Movimiento del polo desde 2001 hasta 2006. Imagen extraída del sitio web del IERS. . . . .  | 63 |
| 4.2. Esquema gráfico sobre el movimiento de precesión-nutación del polo celeste. . . . .   | 64 |



|  |    |
|--|----|
| 4.3. Serie temporal para las variaciones en la posición del polo celeste: (a) Desplazamientos en longitud ( $\delta\psi$ ) y (b) en oblicuidad ( $\delta\epsilon$ ) de la eclíptica.   | 68 |
| 4.4. Modelos armónicos no lineales estimados para (a) el desplazamiento en longitud y (b) en oblicuidad de la eclíptica. . . . .   | 69 |
| 4.5. Residuales generados por el modelo armónico no lineal estimado correspondientes al desplazamiento (a) en longitud y (b) en oblicuidad.  | 72 |
| 4.6. Valor del WRMS en función del número de parámetros que se añaden al modelo durante el proceso de ajuste: (a) desplazamientos en longitud y (b) en oblicuidad. . . . .   | 73 |
| 4.7. Serie temporal del desplazamiento del polo celeste a través de las variaciones en (a) la coordenada X ( $\delta X$ ) y (b) la coordenada Y ( $\delta Y$ ), según el modelo de precesión-nutación IAU2000A. . . . .  | 81 |
| 4.8. Modelos armónicos no lineales estimados para (a) $\delta X$ y (b) $\delta Y$ . . . .  | 82 |
| 4.9. Residuales generados por el modelo armónico no lineal correspondientes a las variaciones en (a) la coordenada X y (b) en la coordenada Y. . . . .   | 86 |
| 4.10. Reducción del WRMS en función del número de parámetros añadidos al modelo durante el proceso de ajuste para las variaciones en (a) la coordenada X y (b) en la coordenada Y del vector de posición del polo celeste. . . . .   | 87 |
| 4.11. Modelo ( $\delta X$ , $\delta Y$ ) para el periodo de tiempo desde 23 de septiembre de 2000 hasta 23 de septiembre de 2010. Reducción del WRMS en función del número de parámetros añadidos al modelo durante el proceso de ajuste para $\delta X$ (en rojo) y $\delta Y$ (en púrpura). . . . .            | 91 |
| 4.12. Serie temporal $\delta X$ desde 23 de septiembre de 2000 hasta 23 de septiembre de 2010. (a) Serie original, (b) modelo estimado y (c) residuales.   | 92 |
| 4.13. Serie temporal $\delta Y$ desde 23 de septiembre de 2000 hasta 23 de septiembre de 2010. (a) Serie original, (b) modelo estimado y (c) residuales.   | 93 |
| 4.14. Error absoluto ( <i>mas</i> ) de la predicción con el modelo vectorial para (a) $\delta\psi$ y (b) $\delta\epsilon$ . En el eje vertical aparecen representados los días predichos en el futuro. Por su parte, el eje horizontal indica el orden-etiqueta del modelo armónico no lineal utilizado. . . . . | 98 |

|   |     |
|---|-----|
| 4.15. Error absoluto ( <i>mas</i> ) de la predicción con el modelo escalar para (a) $\delta\psi$ y (b) $\delta\epsilon$ . En el eje vertical aparecen representados los días predichos en el futuro. Por su parte, el eje horizontal indica el orden del modelo armónico no lineal utilizado. . . . .   | 99  |
| 4.16. Modelo vectorial. Degradación del RMS ( <i>mas</i> ) a lo largo del tiempo. (a) Componente $\delta\psi$ y (b) componente $\delta\epsilon$ . . . . .   | 100 |
| 4.17. Modelo escalar. Degradación del RMS ( <i>mas</i> ) a lo largo del tiempo. (a) Componente $\delta\psi$ y (b) componente $\delta\epsilon$ . . . . .   | 100 |
| 5.1. Esquema gráfico de la serie multidimensional para el almacenamiento de agua continental. . . . .   | 104 |
| 5.2. Resultados gráficos para el modelo de ajuste correspondiente a las variaciones en la coordenada X del geocentro. En esta figura se muestran: (a) Peridograma de Lomb, (b) periodograma extendido, (c) serie temporal original (en azul) y componente de tendencia estimada (en rojo), (d) modelo armónico estimado, (e) residuales generados por el ajuste y (f) reducción del RMS en función del número de parámetros contenidos en el modelo durante el proceso de ajuste. . . . . | 109 |
| 5.3. Resultados gráficos para el modelo de ajuste correspondiente a las variaciones en la coordenada Y del geocentro. En esta figura se muestran: (a) Peridograma de Lomb, (b) periodograma extendido, (c) serie temporal original (en azul) y componente de tendencia estimada (en rojo), (d) modelo armónico estimado, (e) residuales generados por el ajuste y (f) reducción del RMS en función del número de parámetros contenidos en el modelo durante el proceso de ajuste. . . . . | 111 |
| 5.4. Resultados gráficos para el modelo de ajuste correspondiente a las variaciones en la coordenada Z del geocentro. En esta figura se muestran: (a) Peridograma de Lomb, (b) periodograma extendido, (c) serie temporal original (en azul) y componente de tendencia estimada (en rojo), (d) modelo armónico estimado, (e) residuales generados por el ajuste y (f) reducción del RMS en función del número de parámetros contenidos en el modelo durante el proceso de ajuste. . . . . | 113 |

|   |     |
|---|-----|
| 6.1. Zonas climáticas (extraído de Echarri, 1998). . . . .  | 122 |
| 6.2. Peridograma para la serie temporal vectorial formada por las series<br>escalares de cada malla de la red que contiene los datos del CWF. . . | 129 |
| 6.3. Mapa de armónicos para el flujo de agua continental. Periodo (meses)<br>extraído en primer lugar. . . . .                                    | 132 |
| 6.4. Mapa de armónicos para el flujo de agua continental. Periodo (meses)<br>extraído en segundo lugar. . . . .                                   | 133 |
| 6.5. Mapa de armónicos para el flujo de agua continental. Periodo (meses)<br>extraído en tercer lugar. . . . .                                    | 133 |
| 6.6. Modelo NLHM. Amplitud para la frecuencia anual (en $g/cm^2$ ). . . . .   | 134 |
| 6.7. Modelo NLHM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia anual. . .  | 134 |
| 6.8. Modelo NLHM. Amplitud para la frecuencia semianual (en $g/cm^2$ ). . .   | 135 |
| 6.9. Modelo NLHM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia semianual.  | 135 |
| 6.10. Modelo NLHM. Amplitud para la frecuencia teranual (en $g/cm^2$ ). . .   | 136 |
| 6.11. Modelo NLHM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia asociada<br>a un periodo de 4 meses. . . . .   | 136 |
| 6.12. Modelo NLHM. Amplitud para la frecuencia trimestral (en $g/cm^2$ ). . .   | 137 |
| 6.13. Modelo NLHM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia asociada<br>a un periodo de 3 meses. . . . .   | 137 |
| 6.14. Modelo FFM. Amplitud para la frecuencia anual (en $g/cm^2$ ). . . . .   | 138 |
| 6.15. Modelo FFM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia anual. . .  | 138 |
| 6.16. Modelo FFM. Amplitud para la frecuencia semianual (en $g/cm^2$ ). . .   | 139 |
| 6.17. Modelo FFM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia semianual.  | 139 |
| 6.18. Modelo FFM. Amplitud para la frecuencia teranual (en $g/cm^2$ ). . . .  | 140 |
| 6.19. Modelo FFM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia asociada a<br>un periodo de 4 meses. . . . .  | 140 |
| 6.20. Porcentaje de varianza explicada por el modelo NLHM. . . . .  | 144 |
| 6.21. Porcentaje de varianza explicada por el modelo FFM. . . . .   | 144 |
| 6.22. RMS ( $g/cm^2$ ) para la predicción realizada mediante el modelo NLHM<br>en función de la región considerada. . . . .                       | 145 |
| 6.23. RMS ( $g/cm^2$ ) para la predicción realizada mediante el modelo FFM<br>en función de la región considerada. . . . .                        | 145 |

|  |     |
|--|-----|
| 6.24. RMS ( $g/cm^2$ ) del ajuste para la serie multidimensional del flujo de agua continental según el modelo FFM (en rojo) y el modelo NLHM (en azul). . . . .   | 146 |
| 6.25. RMS ( $g/cm^2$ ) de la predicción para el año 1998 según el modelo FFM (en rojo) y el modelo NLHM (en azul). . . . .   | 146 |
| 7.1. Modelo para las variaciones mareométricas, $\delta\Delta$ . . . . .   | 153 |
| 7.2. Periodograma en escala logarítmica del modelo $\delta\Delta$ . La frecuencia se recoge en ciclos por día. . . . .   | 154 |
| 7.3. Observaciones del LOD establecidas mediante la técnica VLBI (en negro), modelo de variaciones mareométricas $\delta\Delta$ (en azul) y la diferencia entre ambas series $\hat{\Delta}$ (en verde). . . . .  | 154 |
| 7.4. Serie $\hat{\Delta}$ junto con la tendencia estimada (a) cuadrática y (b) lineal. . . . .   | 158 |
| 7.5. (a) Modelo de tendencia cuadrática para $\hat{\Delta}$ y (b) residuales generados por éste. . . . .   | 158 |
| 8.1. Periodograma en escala logarítmica de una componente de ruido con índice espectral (a) $\alpha = 0$ , (b) $\alpha = -1$ y (c) $\alpha = -2$ . La frecuencia se recoge en ciclos por unidad de tiempo. . . . .   | 174 |
| 9.1. Peridograma de Lomb (azul) y estimación del índice espectral (rojo) para una señal (a) con tendencia y (b) sin tendencia. La señal contiene un total de $N = 2001$ observaciones equiespaciadas y viene dada por $d_n = 0.1 - 0.2t_n + 0.1t_n^2 + 0.5 \cos(\omega t_n) - \sin(\omega t_n) + \epsilon_n$ siendo $\omega = 2\pi \cdot 0.2$ y $\epsilon_n$ un ruido parpadeante ( $\alpha = -1$ ) de amplitud $\sigma = 1$ unidades. Las estimaciones del índice espectral $\alpha$ a partir del periodograma son: (a) $\alpha = -1.778$ y (b) $\alpha = -1.006$ . . . . . | 183 |
| 9.2. Algoritmo simbólico para la implementación del proceso LS-VCE no lineal. . . . .  | 193 |
| 9.3. Peridograma de Lomb para la serie temporal definida en la expresión (9.28) según: (a) la ecuación (3.66) y (b) la ecuación (9.33). . . . .  | 194 |
| 9.4. Periodograma de la señal sintética $d^{\tilde{\omega}_i}$ recogida en la ecuación (9.37) con $\tilde{\omega}_i = 2\pi \cdot 0.1$ para un vector de observaciones no equiespaciado en el tiempo. . . . .   | 197 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 9.5.  | Algoritmo simbólico para la implementación del proceso FFAST. . .  | 204 |
| 9.6.  | (a) Representación gráfica de la serie simulada sin la componente de ruido; (b) Representación gráfica de la serie temporal simulada con un ruido parpadeante de amplitud $\sigma = 0.62 \text{ mm}$ . . . . .   | 206 |
| 9.7.  | Comparación de la serie temporal simulada (en azul) con el modelo funcional (en rojo) obtenido con (a) el análisis de <i>Harada y Fukushima</i> y (b) el algoritmo FFAST. . . . .  | 210 |
| 9.8.  | Comparación de la serie temporal simulada sin ruido (en azul) con el modelo funcional para la serie con ruido (en rojo) obtenido mediante (a) el análisis de <i>Harada y Fukushima</i> y (b) el algoritmo FFAST. . .   | 211 |
| 10.1. | Estaciones ITRF2005. La estrella roja, el cuadrado naranja y el triángulo verde indican la posición de áreas dotadas de cuatro, tres y dos técnicas de observación, respectivamente. Los puntos azules, verdes, negros y rojos hacen referencia a zonas donde únicamente se dispone de técnica de GPS, DORIS, SLR y VLBI, respectivamente. Imagen extraída del sitio web del ITRF: <a href="http://itrf.ensg.ign.fr/">http://itrf.ensg.ign.fr/</a> . . . . . | 216 |
| 10.2. | Campo de velocidades ITRF2008. Imagen extraída del sitio web del ITRF: <a href="http://itrf.ensg.ign.fr/">http://itrf.ensg.ign.fr/</a> . . . . .   | 217 |
| 10.3. | Histogramas del contenido armónico para las series residuales de posiciones de estaciones GPS. (a) Componente este, (b) componente norte y (c) componente vertical. La amplitud de cada barra es de 0.1 ciclos por frecuencia. . . . .   | 222 |
| 10.4. | Histogramas del índice espectral para las series residuales de posiciones de estaciones GPS. (a) Componente este, (b) componente norte y (c) componente vertical. . . . .  | 249 |
| 10.5. | Gráfica de probabilidad normal de los valores estimados para el índice espectral. El símbolo + representa las estimaciones y la línea roja une el primer y tercer cuartil. (a) Componente este, (b) componente norte y (c) componente vertical. . . . .  | 250 |

|  |     |
|--|-----|
| 10.6. Histogramas del contenido armónico para las series residuales de posiciones de estaciones GPS. (a) Componente este, (b) componente norte y (c) componente vertical. La amplitud de cada barra es de 0.02 ciclos por frecuencia. . . . .  | 262 |
| 11.1. Proceso de parcheado para la serie sintética cuyo contenido armónico aparece detallado en la Tabla 11.1. Cada subfigura hace referencia a una etapa: (a) Etapa 1: Periodograma de Lomb, (b) etapa 2: primer parcheado del periodograma de Lomb, (c) etapa 3: segundo parcheado, (d) etapa 4: tercer parcheado, (e) etapa 5: cuarto parcheado, y finalmente (f) la representación del periodograma tras los parcheados necesarios para la extracción de los armónicos que definen la serie sintética. . . . . | 276 |
| S.3.1.Non-linear harmonic scheme. . . . .  | 298 |
| S.9.1.Symbolic algorithm for the FFAST process. . . . .  | 348 |
| C.1. Estaciones BAR1 y BRAZ. . . . .   | 380 |
| C.2. Estaciones BREW y BRMU. . . . .   | 381 |
| C.3. Estaciones BUE2 y CHA1. . . . .   | 382 |
| C.4. Estaciones DAEJ y DUBO. . . . .   | 383 |
| C.5. Estaciones ELRO y FAIR. . . . .   | 384 |
| C.6. Estaciones GENO y GOUG. . . . .   | 385 |
| C.7. Estaciones MADR y PLO3. . . . .   | 386 |
| C.8. Estaciones RIOG y SOL1. . . . .   | 387 |
| C.9. Estaciones THU3 y TIDB. . . . .   | 388 |
| C.10.Estaciones UNIV y USNA. . . . .   | 389 |
| C.11.Estaciones WDC2 y WILL. . . . .   | 390 |
| C.12.Estaciones YAR1 y YSSK. . . . .   | 391 |



---

# Índice de tablas

|   |    |
|---|----|
| 4.1. Términos de Fourier. Descomposición armónica para $\delta\psi$ según el modelo de precesión-nutación IAU1980. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por día), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por día), periodo (días) y coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente. . . . .                            | 70 |
| 4.2. Igual que la Tabla 4.1 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (días) y coeficientes (en microarcesegundos, $\mu\text{as}$ ) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente. . . . .   | 70 |
| 4.3. Términos de Fourier. Descomposición armónica para $\delta\epsilon$ según el modelo de precesión-nutación IAU1980. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por día), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por día), periodo (días) y coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente. . . . .                        | 71 |
| 4.4. Igual que la Tabla 4.3 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (días) y coeficientes ( $\mu\text{as}$ ) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente. . . . .  | 71 |
| 4.5. Amplitud y fase de las frecuencias asociadas al modelo armónico para los desplazamientos en longitud y oblicuidad de la eclíptica según la ecuación (4.3). Las columnas hacen referencia al orden de extracción de la frecuencia, periodo (días), amplitud (mas) y fase (en grados) para $\delta\psi$ , y las estimaciones análogas para $\delta\epsilon$ , respectivamente. . . . . | 74 |



- 4.6. Términos de Fourier. Descomposición armónica de  $\delta X$  según el modelo de precesión-nutación IAU2000. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por día), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por día), periodo (días) y coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente. . . . . 83
- 4.7. Igual que la Tabla 4.6 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (días) y coeficientes ( $\mu\text{as}$ ) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente. . . . . 83
- 4.8. Términos de Fourier. Descomposición armónica de  $\delta Y$  según el modelo de precesión-nutación IAU2000. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por día), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por día), periodo (días) y coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente. . . . . 84
- 4.9. Igual que la Tabla 4.8 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (días) y coeficientes ( $\mu\text{as}$ ) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente. . . . . 84
- 4.10. Amplitud y fase de las frecuencias asociadas al modelo armónico para las variaciones  $\delta X$  y  $\delta Y$  del vector de posición del polo celeste, según la ecuación (4.3). Las columnas hacen referencia al orden de extracción de la frecuencia, periodo (días), amplitud (mas) y fase (grados) para  $\delta X$  y  $\delta Y$ , respectivamente. . . . . 85
- 4.11. Términos de Fourier. Descomposición armónica de  $(\delta X, \delta Y)$  (periodo 23/09/2000 al 23/09/2010) según el modelo de precesión-nutación IAU2000. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, periodo (días), coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta X$ , y los coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta Y$ , respectivamente. . . . . 94
- 4.12. Igual que la Tabla 4.11 pero para los términos seculares mixtos correspondientes al modelo asociado a las variaciones en la coordenada X. Se muestra, respectivamente, el orden de extracción de la frecuencia, periodo (días) y los coeficientes ( $\mu\text{as}$ ) asociados a los términos en seno y coseno. . . . . 94

|  |     |
|--|-----|
| 4.13. Igual que la Tabla 4.12 pero para el modelo correspondiente a las variaciones en la coordenada Y. . . . .  | 95  |
| 5.1. Términos de Fourier. Descomposición armónica para las variaciones de la coordenada X del geocentro. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por mes), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por mes), periodo (meses) y coeficientes (cm) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente. . . . . | 108 |
| 5.2. Igual que la Tabla 5.1 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (meses) y coeficientes (cm) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente. . . . .  | 108 |
| 5.3. Términos de Fourier. Descomposición armónica para las variaciones de la coordenada Y del geocentro. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por mes), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por mes), periodo (meses) y coeficiente (cm) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente. . . . .  | 110 |
| 5.4. Igual que la Tabla 5.3 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (meses) y coeficientes (cm) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente. . . . .  | 110 |
| 5.5. Términos de Fourier. Descomposición armónica para las variaciones de la coordenada Z. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por mes), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por mes), periodo (meses) y coeficiente (cm) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente. . . . .                | 112 |
| 5.6. Igual que la Tabla 5.5 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (meses) y coeficientes (cm) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente. . . . .  | 112 |
| 5.7. Amplitud y fase para las frecuencias asociadas al modelo armónico de la coordenada X según el modelo (4.3). Las columnas hacen referencia, respectivamente, al orden de extracción de la frecuencia, periodo (meses), amplitud (cm) y fase (en grados) . . . . .  | 114 |

|   |     |
|---|-----|
| 5.8. Amplitud y fase para las frecuencias asociadas al modelo armónico de la coordenada Y según el modelo (4.3). Las columnas hacen referencia, respectivamente, al orden de extracción de la frecuencia, periodo (meses), amplitud (cm) y fase (en grados) . . . . .   | 115 |
| 5.9. Amplitud y fase para las frecuencias asociadas al modelo armónico de la coordenada Z según el modelo (4.3). Las columnas hacen referencia, respectivamente, al orden de extracción de la frecuencia, periodo (meses), amplitud (cm) y fase (en grados) . . . . .   | 116 |
| 6.1. Porcentaje de regiones en la red con el mismo nivel de significación $\alpha$ . Las frecuencias han sido consideradas como grados de libertad. . . . .   | 141 |
| 6.2. RMS global para cada año que interviene en la creación de los modelos armónicos. Los valores se recogen en $g/cm^2$ . . . . .  | 142 |
| 7.1. Variaciones mareométricas. Las primeras cinco columnas contienen los argumentos $\alpha_j$ y las dos últimas representan los coeficientes regularizados (en $10^{-5}$ segundos) que intervienen en la ecuación (7.2) para $\delta\Delta$ . La columna encabezada con $\Pi$ proporciona el valor del periodo aproximado (con signo negativo o positivo para indicar si el movimiento es retrógrado o no). . . . . | 155 |
| 7.2. Términos de Fourier. Descomposición armónica para $\hat{\Delta}$ . Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por día), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por día), periodo (días) y coeficientes (ms) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente.  | 159 |
| 7.3. Términos seculares mixtos. Descomposición armónica para $\hat{\Delta}$ . Las columnas hacen referencia al orden de extracción, periodo (días) y coeficientes (en microsegundos, $\mu s$ ) asociados a los términos seculares mixtos en seno y coseno, respectivamente. . . . .   | 159 |
| 7.4. Amplitud y fase, según la ecuación (4.3), de las frecuencias contenidas en el modelo armónico estimado para $\hat{\Delta}$ . Las columnas hacen referencia al orden de extracción de la frecuencia, periodo (días), amplitud (ms) y fase (en grados). . . . .  | 160 |

|  |     |
|--|-----|
| 9.1. Frecuencias fundamentales (ciclos por semana) y coeficientes asignados al modelo funcional armónico medidos en mm. . . . .  | 205 |
| 9.2. Coeficientes de Fourier para las frecuencias detectadas (con $SNR > 3$ ) mediante el algoritmo de <i>Harada</i> y <i>Fukushima</i> . Las columnas representan, por este orden, la estimación de la frecuencia (ciclos por semana), el coeficiente para el término en seno (mm), el coeficiente para el término en coseno (mm) y el valor del SNR. . . . .                     | 207 |
| 9.3. Coeficientes de los términos seculares mixtos para las frecuencias detectadas (con $SNR > 3$ ) mediante el algoritmo de <i>Harada</i> y <i>Fukushima</i> . Las columnas representan, por este orden, la estimación de la frecuencia (ciclos por semana), el coeficiente secular para el término en seno (mm) y el coeficiente secular para el término en coseno (mm). . . . . | 207 |
| 9.4. Coeficientes de Fourier para las frecuencias detectadas (con $SNR > 3$ ) mediante el algoritmo de FFAST. Las columnas representan, por este orden, la estimación de la frecuencia (ciclos por semana), el coeficiente para el término en seno (mm), el coeficiente para el término en coseno (mm) y el valor del SNR. . . . .   | 208 |
| 9.5. Coeficientes de los términos seculares mixtos para las frecuencias detectadas (con $SNR > 3$ ) mediante el algoritmo FFAST. Las columnas representan, por este orden, la estimación de la frecuencia (ciclos por semana), el coeficiente secular para el término en seno (mm) y el coeficiente secular para el término en coseno (mm). . . . .                                | 209 |
| 10.1. Media y mediana muestral de las amplitudes estimadas para las líneas espectrales más significativas. . . . .   | 225 |
| 10.2. Porcentaje de estaciones para las líneas espectrales más significativas en cada componente. . . . .  | 226 |
| 10.3. Amplitud y fase de la frecuencia anual para la componente este. Las columnas hacen referencia, por este orden, al nombre de la estación, frecuencia, incertidumbre de la frecuencia, amplitud de la señal, incertidumbre de la amplitud, fase (día de máxima señal contado desde el 1 de enero de 2000) e incertidumbre asociada a la fase. . . . .                          | 227 |

- 10.4. Amplitud y fase de la frecuencia anual para la componente norte. Las columnas hacen referencia, por este orden, al nombre de la estación, frecuencia, incertidumbre de la frecuencia, amplitud de la señal, incertidumbre de la amplitud, fase (día de máxima señal contado desde el 1 de enero de 2000) e incertidumbre asociada a la fase. . . . . 232
- 10.5. Amplitud y fase de la frecuencia anual para la componente vertical. Las columnas hacen referencia, por este orden, al nombre de la estación, frecuencia, incertidumbre de la frecuencia, amplitud de la señal, incertidumbre de la amplitud, fase (día de máxima señal contado desde el 1 de enero de 2000) e incertidumbre asociada a la fase. . . . . 238
- 10.6. Componente este. Frecuencias asociadas a largos periodos comprendidos entre 4 y 10 años. Se muestran (en este orden): el identificador de la estación, la frecuencia fundamental, incertidumbre de la frecuencia, periodo, amplitud, incertidumbre de la amplitud, fase e incertidumbre de la fase. . . . . 246
- 10.7. Componente norte. Frecuencias asociadas a largos periodos comprendidos entre 4 y 10 años. Se muestran (en este orden): el identificador de la estación, la frecuencia fundamental, incertidumbre de la frecuencia, periodo, amplitud, incertidumbre de la amplitud, fase e incertidumbre de la fase. . . . . 247
- 10.8. Componente vertical. Frecuencias asociadas a largos periodos comprendidos entre 4 y 10 años. Se muestran (en este orden): el identificador de la estación, la frecuencia fundamental, incertidumbre de la frecuencia, periodo, amplitud, incertidumbre de la amplitud, fase e incertidumbre de la fase. . . . . 247
- 10.9. Estimación de la media y desviación típica de la distribución normal ajustada a las estimaciones de los índices espectrales de las estaciones. También se presentan los intervalos de confianza al 95 %. . . . . 248
- 10.10. Índice espectral y el valor de su componente de varianza ( $mm^2$ ) para cada una de las estaciones analizadas. . . . . 251

- 11.1. Contenido armónico de la serie temporal sintética. Las columnas hacen referencia (por este orden) a la etiqueta de la línea espectral, frecuencia (ciclos por unidad de tiempo), coeficientes de Fourier en seno y coseno y finalmente coeficientes asociados a términos seculares mixtos en seno y coseno, respectivamente. . . . . 274
- 11.2. Contenido armónico estimado para la serie temporal sintética mediante el uso del periodograma parcheado. Las columnas hacen referencia (por este orden) a la etiqueta de la línea espectral, frecuencia (ciclos por unidad de tiempo), coeficientes de Fourier en seno y coseno y finalmente coeficientes asociados a términos seculares mixtos en seno y coseno, respectivamente. . . . . 274
- 11.3. Términos de Fourier. Descomposición armónica de  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$  (periodo 23/09/2000 al 23/09/2010) según el modelo de precesión-nutación IAU1980. Las columnas hacen referencia al orden de extracción del periodo, periodo (días), coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\psi$ , y los coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\epsilon$ , respectivamente. . . . . 278
- 11.4. Igual que la Tabla 11.3 pero para los términos seculares mixtos. Las columnas hacen referencia al orden de extracción del periodo, periodo (días), coeficientes ( $\mu as$ ) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\psi$ , y los coeficientes ( $\mu as$ ) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\epsilon$ , respectivamente. . . . . 278
- 11.5. Igual que la Tabla 11.3 pero para el análisis llevado a cabo mediante la utilización del periodograma parcheado con corrección. Las columnas hacen referencia al orden de extracción del periodo, posición del periodo de la Tabla 11.3 con el que se corresponde, periodo (días), coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\psi$ , y los coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\epsilon$ , respectivamente. . . . . 279

|   |     |
|---|-----|
| 11.6. Igual que la Tabla 11.5 pero para los términos seculares mixtos. Las columnas hacen referencia al orden de extracción del periodo, periodo (días), coeficientes ( $\mu as$ ) asociados a los términos en seno y coseno para $\delta\psi$ , y los coeficientes ( $\mu as$ ) asociados a los términos en seno y coseno para $\delta\epsilon$ , respectivamente. . . . . | 279 |
| B.1. Acrónimos . . . . .  | 375 |



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

Parte I

**MODELOS ARMÓNICOS NO  
LINEALES PARA SERIES  
TEMPORALES GEODÉTICAS**

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante





---

# Capítulo 1

## Introducción

Desde su origen, el ser humano ha observado todo lo que le rodea. Se dio cuenta de cómo ciertos fenómenos que tenían lugar en su entorno manifestaban un comportamiento que se repetía cada cierto periodo de tiempo: el transcurso del día y la noche, las estaciones, algunos fenómenos atmosféricos, las épocas propicias para la siembra y recolección, las migraciones de ciertas aves, las crecidas en ríos, los eclipses, las fases lunares... No cabe duda de que este estudio, llevado a cabo a través de la simple observación, hizo posible nuestra evolución. A partir del análisis empírico de estos fenómenos, el ser humano fue capaz de adelantarse a su llegada y aprovechar el conocimiento que dicho estudio les proporcionaba para la supervivencia. Permitted concebir el concepto de tiempo, medirlo y derivar muchas de las teorías que hoy conocemos.

En la actualidad, seguimos mirando al horizonte y todo aquello que acontece a nuestro alrededor pero lo hacemos de un modo mucho más preciso. Hemos podido comprobar que todos aquellos acontecimientos que a nuestros antepasados se les antojaban periódicos, en realidad, no completan ciclos de duración constante sino que manifiestan variaciones, en algunos casos, muy sutiles.

Para hacernos una ligera idea, una *serie temporal* no es más que una secuencia de datos o mediciones (ordenadas cronológicamente) realizadas durante un periodo de tiempo en determinados instantes. Una serie temporal proporciona útil información sobre el sistema físico, biológico, socioeconómico o de cualquier otra índole que la produce. Básicamente, el propósito de su análisis es determinar y cuantificar algunas

de las claves o aspectos del fenómeno que representa: comportamiento a largo y corto plazo, periodicidades, irregularidades, etc. Estas propiedades pueden, más tarde, ayudar a entender y predecir el comportamiento futuro del sistema (Ghil et al., 2002).

Ante estas evidencias, que no hacen más que poner de manifiesto la importancia del estudio de series temporales, nos sumergimos en la elaboración de un trabajo de investigación centrado, principalmente, en el análisis armónico de series temporales de carácter geodético con la intención de aportar más información sobre ciertos fenómenos que tienen lugar en nuestro planeta. Así pues, esta memoria supone un compendio de los resultados obtenidos durante este proceso de investigación realizado en el *Departamento de Matemática Aplicada* bajo la dirección y supervisión del Dr. *José Manuel Ferrándiz Leal*; y en el *Laboratorio de Investigación en Geodesia (LAREG)* del *Instituto Geográfico Nacional IGN* (París) junto al Dr. *Zuheir Altamimi* y el Dr. *Xavier Collilieux*.

En las secciones restantes de este primer capítulo se especifican los objetivos que pretenden alcanzarse con este estudio, así como la metodología empleada en la labor y una breve descripción de los contenidos incluidos en la memoria.

## 1.1. Objetivos y metodología

Uno de los principales objetivos de este trabajo de investigación consiste en la obtención de un software completo y especializado para el análisis de series temporales. En la actualidad, pueden encontrarse herramientas informáticas que permiten establecer un tipo de análisis clásico y básico en la mayoría de las ocasiones. Muchas de las series temporales obtenidas en cualquier ámbito presentan un comportamiento que parece repetirse a intervalos de tiempo más o menos regulares. El análisis armónico es un tipo de análisis de series temporales que permite conocer y determinar, de algún modo, dicho comportamiento periódico.

Gran parte de las técnicas disponibles hoy en día para el análisis de estas series temporales periódicas se limita a un tipo concreto de series con ciertas propiedades específicas como la homogeneidad. Según se verá más adelante, una serie temporal *homogénea* es aquella cuyas observaciones son tomadas o establecidas en intervalos

regulares de tiempo. No obstante, la existencia de estas series sólo tiene sentido a nivel teórico. Todo tipo de medición u observación de fenómenos está influenciada por un factor humano que, en mayor o menor medida, impide recabar datos del suceso cada cierto periodo de tiempo constante. En la realidad, lo habitual es encontrarse con series temporales no homogéneas, también llamadas *heterogéneas*. A pesar de ello, relajando un poco el concepto de homogeneidad de una serie temporal, existirían series heterogéneas que podrían tratarse como homogéneas.

Así pues, y en principio, se propone la implementación de un paquete informático capaz de estudiar una serie temporal cualquiera, independientemente de su carácter homogéneo o heterogéneo y de si se encuentra afectada por errores sistemáticos de algún tipo o no. También sería deseable que dichas rutinas fueran aptas para series temporales procedentes de cualquier ámbito científico o económico. Una vez creado un software de estas características básicas, se estaría interesado en su aplicación para el estudio de algunas series temporales de carácter geodético (primordialmente). De este modo, otro de los objetivos establecidos consistiría en la obtención de modelos armónicos para dichas series temporales, permitiendo de esta forma un conocimiento de su comportamiento periódico y la posibilidad de predecir el estado del fenómeno al que la serie hace referencia. En ningún momento nos centraremos en una investigación profunda del origen o causa de los posibles patrones de repetición que presentan estas series temporales, aunque en la mayoría de los casos podremos llegar a sugerir un posible factor *candidato*.

Marcados los objetivos básicos, nos planteamos qué herramienta utilizar para la elaboración de los paquetes informáticos destinados al análisis de series temporales. Tras considerar algunas opciones, nos decantamos finalmente por MATLAB como herramienta principal para el desarrollo de nuestro trabajo. Los motivos que nos llevaron a optar por este programa son varios:

1. El lenguaje de programación MATLAB es un lenguaje de muy alto nivel y fácil de aprender, lo que permite una programación sencilla y de alcance público.
2. Permite obtener gráficas de alta calidad y dispone de instalaciones de visualización integradas. Pueden realizarse representaciones gráficas en 2 y 3 dimensiones fácilmente.

3. Posee un entorno con numerosas funciones propias para trabajar con números y matrices. Es una herramienta de cálculos matemáticos interactivos.
4. Su interfaz interactiva hace posible una rápida experimentación y depuración de programas.
5. Es un recurso comúnmente extendido en el estudio de ingenierías o ciencias en todas las universidades importantes del mundo. Además tiene infinitas aplicaciones en electrónica, química, inteligencia artificial, biología, medicina, geodesia espacial, etc.
6. Finalmente, los archivos y rutinas creadas en MATLAB son portátiles en diferentes plataformas (Linux, Apple, Windows) y transformables en otros lenguajes de programación como C++.

## 1.2. Contenidos

Esta memoria consta de 11 capítulos, entre los cuales se incluye dicha introducción. Los capítulos 2, 3, 8 y 9 son sustancialmente teóricos y describen una serie de procedimientos que serán utilizados para el análisis de diversas series temporales. Los capítulos 4–7 y 10 muestran, concretamente, el estudio de cinco tipos de series temporales diferentes de considerable importancia en el campo de la geofísica. A continuación detallaremos muy brevemente el contenido de cada uno de estos capítulos:

- El capítulo 2 trata sobre el problema de la detección de señales. Principalmente, incluye las definiciones y conceptos básicos, característicos y habituales, del argot propio del análisis de series temporales y que serán útiles para la correcta comprensión de la memoria.
- El capítulo 3 está centrado en la descripción de un método armónico no lineal propuesto por *Wataru Harada* y *Toshio Fukushima* (Harada, 2003). Este método será la base de gran parte del estudio de series temporales llevado a cabo.

- Por su parte, el capítulo 4 contiene el análisis de la serie temporal descrita por las variaciones del polo celeste según dos modelos de precesión-nutación (IAU1980 e IAU2000A). Además, se analiza la capacidad de predicción a corto plazo de alguno de dichos modelos.
- Los capítulos 5 y 6 están íntimamente relacionados con el flujo de agua continental del planeta. En el primero de ellos se estudiará cómo las variaciones de agua almacenada sobre los continentes afectan a la posición del centro de masas terrestre. En el segundo capítulo mencionado estudiaremos el contenido espectral de la serie multidimensional descrita por el flujo de agua continental. Este análisis se llevará a cabo mediante la creación de dos modelos armónicos distintos y será estudiada la capacidad de predicción de ambos.
- En el capítulo 7 propondremos un modelo armónico no lineal para las variaciones en la duración del día una vez eliminados los efectos mareométricos.
- El capítulo 8 contiene una breve introducción al concepto de ruido espectral, el cual será de considerable importancia para posteriores estudios. En él se detalla la tipología de interés y algunas de sus características más destacables.
- El último de los capítulos teóricos (capítulo 9) describe el algoritmo FHAST, fruto de la combinación del método armónico no lineal incluido en el capítulo 3 y de un proceso de estimación de modelos estocásticos (LS-VCE) propuesto por Amiri-Simkooei (2007).
- En el capítulo 10 se realiza un estudio sobre las series temporales de posiciones de estaciones GPS (*Global Positioning System*) que forman parte del ITRF2008. Para ello se establecen modelos armónicos no lineales y estocásticos siguiendo el procedimiento descrito en el capítulo 9.
- Finalmente, el capítulo 11 proporciona conclusiones globales y plantea posibles futuras vías de investigación.



---

## Capítulo 2

# El problema de la detección de señales

### 2.1. Definición de serie temporal

Son múltiples las acepciones disponibles para el término *serie temporal*. Dependiendo del autor, el ámbito científico donde se trabaja o las pretensiones a alcanzar en la investigación se asumen ciertos matices o puntualizaciones sobre el concepto básico. En general, puede entenderse por *serie temporal estadística* toda señal o función dependiente del tiempo que exhibe propiedades aleatorias o fluctuantes (Jenkins and Watts, 1968). Incluso esta simple definición carece, en cierto modo, de generalidad ya que el término *tiempo* utilizado es un concepto bastante débil en el sentido de que podría hacer referencia a cualquier otro tipo de parámetro físico como el espacio. De hecho, podemos encontrar series temporales dependientes de varios parámetros físicos; son las llamadas series temporales *multidimensionales* (Jenkins and Watts, 1968). Así, por ejemplo, las fluctuaciones locales del campo magnético terrestre en diversos puntos del planeta a medida que transcurre el tiempo podrían considerarse como una serie temporal multidimensional donde los parámetros físicos son espacio y tiempo. Algunos científicos consideran la propiedad de continuidad como inherente al concepto de serie temporal; otros, por el contrario, le atribuyen una naturaleza discreta debido a que en muchas ocasiones las mediciones que conforman la señal se recogen en determinados instantes de tiempo.



Ante tanta diversidad conceptual, resulta necesario disponer de una definición formal del término en cuestión que nos permita abarcar adecuadamente el estudio que aquí se pretende desarrollar. Así pues, en lo sucesivo, entenderemos por *serie temporal* de longitud  $N \in \mathbb{N}$  toda secuencia de datos  $\{d(t_1), d(t_2), \dots, d(t_N)\}$  obtenida al estimar o medir una determinada magnitud  $d$  en un conjunto discreto de instantes de tiempo  $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  donde  $t_i \neq t_j$  para todo  $i, j = 1, 2, \dots, N$ . Al conjunto finito  $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  se le denomina comúnmente *dominio temporal* de la serie. Existen diversas formas de denotar una serie temporal. En nuestro caso lo haremos mediante la escritura  $\{t_n, d(t_n)\}_{n=1,2,\dots,N}$ , o de forma más compacta  $\{t_n, d_n\}_{n=1,2,\dots,N}$ . Consideraremos, además, que los tiempos de observación están ordenados cronológicamente, por lo que  $t_i < t_{i+1}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Las series temporales pueden ser clasificadas atendiendo a diversos aspectos: propiedades de la magnitud medida, características del dominio temporal o incluso su ámbito de ocurrencia. Resulta difícil imaginar una rama de la ciencia en la que no aparezcan secuencias de datos que puedan ser tratados como series temporales y que por tanto concuerdan con la definición proporcionada anteriormente. Así pues, encontramos series temporales relacionadas con el ámbito económico, físico, químico, biológico, geofísico, astronómico, demográfico, del marketing, de las telecomunicaciones . . . El abanico es tan amplio como el de ciencias o áreas del conocimiento que estudian propiedades susceptibles de observación.

Por otro lado, la propiedad física  $d$  sujeta a observación puede referirse tanto a una magnitud escalar como a una vectorial. Según este carácter, hablaremos de serie temporal *escalar* o *univariante* y serie temporal *vectorial* o *multivariante*, respectivamente. Algunos ejemplos de series temporales escalares serían: el número de individuos de una especie animal en un área determinada en distintas épocas, el flujo de agua en una región concreta a lo largo de un periodo de tiempo, una secuencia que nos indica la diferencia de duración de un día con respecto al anterior durante un año, etc. Entre las series temporales vectoriales puede mencionarse: la variación en la posición de alguna partícula en el plano o el espacio durante un periodo de tiempo concreto, velocidad del centro de masas de un conjunto determinado de partículas a lo largo del tiempo, etc. Toda serie temporal vectorial puede considerarse como un conjunto de series temporales escalares cuyo dominio temporal es idéntico. Así pues,

a la hora de estudiar una serie temporal vectorial, muchos autores tratan de dar solución al problema que se plantea en relación a si resulta más adecuado un análisis multivariante de la serie temporal o si por el contrario es mejor establecer un estudio individual de cada una de las componentes o series temporales escalares que la conforman. No existe una respuesta unificada universalmente aceptada, y en la mayoría de las ocasiones la elección entre un análisis multivariante o univariante radica en criterios subjetivos que se apoyan en ciertos aspectos o propiedades de la magnitud estudiada.

Como se ha dicho, una serie temporal también puede ser clasificada atendiendo a las características de su dominio temporal. De este modo, se hará referencia a series temporales *homogéneas* o *equiespaciadas* cuando los tiempos de observación que conforman el dominio temporal verifiquen la siguiente propiedad:

$$t_i = t_1 + (i - 1) \cdot \Delta t \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \text{ y } \Delta t \neq 0 \quad (2.1)$$

En caso contrario, la serie temporal se denomina *heterogénea* o *no equiespaciada*. Esta clasificación basada en el dominio temporal posee ciertas connotaciones filosóficas. La mayor parte de las series temporales que se disponen, no se construyen mediante observaciones equiespaciadas en el tiempo. El principal motivo se debe a la imposibilidad de adquirir observaciones de una magnitud determinada a intervalos de tiempo de idéntica duración. Incluso asumiendo un proceso mecanizado en su obtención, siempre existirá un desfase o error sistemático/mecánico que impida la construcción de una serie temporal homogénea. No obstante, esta crítica es un tanto extrema. En la mayoría de los casos el estudio de una serie temporal apenas se ve significativamente afectado por este tipo de error, motivo por el cual la clasificación anterior así como las técnicas destinadas al estudio de cada uno de estos tipos de series temporales es totalmente viable.

### 2.1.1. Componentes de una serie temporal

La experiencia basada en muchos estudios ha revelado la presencia de ciertas componentes características de una serie temporal (Visauta and Batallé, 1991). Tradicionalmente, una serie temporal puede ser descompuesta en cuatro componentes

distintas, a saber: *tendencia*, *estacionalidad*, *ciclicidad* y *ruido*. A continuación se procederá a describir brevemente cada una de ellas.

1. **Tendencia.** Generalmente hace referencia a movimientos seculares y puede ser definida como aquella componente que explica el comportamiento de la serie temporal a largo plazo. Para poder detectarla adecuadamente es deseable disponer de un número considerable de mediciones de la magnitud en cuestión. De esta manera, será mucho más fiable la determinación de una ley de crecimiento, decrecimiento o estabilidad global que afecta al fenómeno que pretende estudiarse. Esta componente de tendencia puede modelizarse según diversos perfiles. Puede asumirse una tendencia de carácter lineal, parabólico, polinomial, exponencial, logarítmico, etc. La elección de un patrón u otro deberá establecerse a partir de un estudio inicial sobre la serie temporal mediando, si fuera necesario, la representación gráfica de la misma y la información disponible sobre el proceso físico que representa.
2. **Estacionalidad.** Hace referencia a aquellos movimientos regulares de la serie que se producen o tienen lugar de forma periódica y a escala semanal, mensual, trimestral, semianual o incluso diaria. Son fluctuaciones que se repiten de un cierto periodo de tiempo a otro siguiendo una pauta estable.
3. **Ciclicidad.** Es una componente de fluctuación sobre la componente secular. Así pues, puede considerarse como un factor oscilante de media-larga duración alrededor de la curva de tendencia el cual puede o no ser periódico. En general los movimientos se consideran cíclicos si estos se producen en un intervalo de tiempo superior al año. Cada ciclo se caracteriza por un periodo de supertensión, donde la magnitud estimada pasa de un estado máximo a otro mínimo, y un periodo de reanimación, donde la transacción es en sentido contrario.
4. **Ruido.** Esta componente no corresponde a ningún patrón de comportamiento de la serie temporal. Suele estar asociada a factores fortuitos o aleatorios que inciden de forma aislada o permanente en una serie temporal. En la mayoría de las ocasiones la componente de ruido se deriva del mecanismo o procedimiento de obtención de datos que introduce, de algún modo, cierto sesgo en

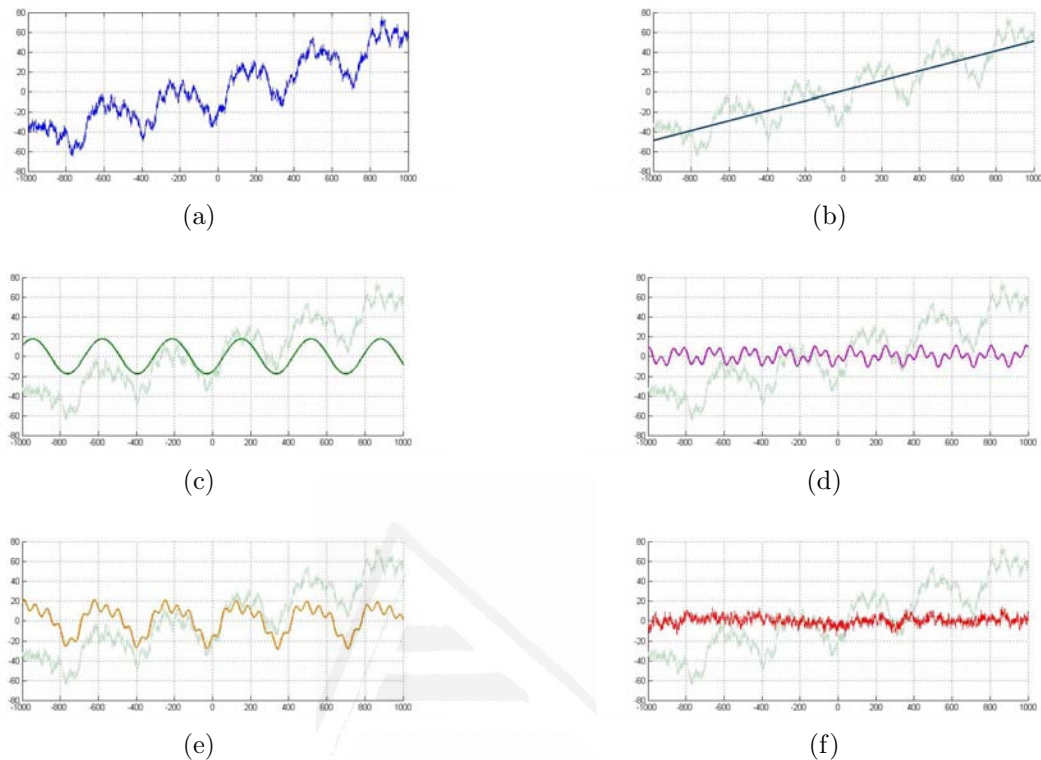


Figura 2.1: Descomposición de una serie temporal en sus componentes principales. (a) Serie temporal, (b) componente de tendencia, (c) componente cíclica, (d) componente estacional, (e) componente periódica (cíclica+estacional) y (f) componente residual o ruido.

las mediciones de la magnitud. Su acción suele ser difícil de medir y resulta prácticamente imposible de aislar.

Dependiendo del tipo de series temporales que se estudien, algunos autores optan por agrupar las componentes de estacionalidad y ciclicidad en una única componente denominada, comúnmente, *componente periódica*. En el presente trabajo, debido al carácter de las series temporales que estudiaremos y a los objetivos que pretendemos alcanzar, consideraremos toda serie temporal como la interrelación existente entre una componente secular o de tendencia (generalmente lineal y en ocasiones cuadrática), una componente periódica y finalmente, una componente de ruido.

De la propia definición de serie temporal dada se deduce el carácter discreto de la misma. No obstante, y en muchas ocasiones, estas series temporales vienen a

representar un fenómeno que se manifiesta de forma continua. Mediante la obtención y acopio de datos, lo que se consigue es captar parte del verdadero comportamiento del fenómeno en cuestión. Esto nos lleva a pensar en la posibilidad de modelar una serie temporal mediante el uso de una función continua (o en su defecto, continua a trozos),  $F$ , dependiente del tiempo y capaz de proporcionar el valor de la magnitud estimada de forma sistemática con tan sólo disponer del instante de tiempo que nos interesa. Esta función  $F$  puede considerarse dependiente de las cuatro componentes básicas en las que se descompone una serie temporal, las cuales dependerán del parámetro físico *tiempo* ( $t$ ): tendencia ( $T(t)$ ), estacionalidad ( $S(t)$ ), ciclicidad ( $C(t)$ ) y ruido ( $R(t)$ ). En definitiva:

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto F(T(t), S(t), C(t), R(t)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

siendo  $m \in \mathbb{N}$  la dimensión de la magnitud observada. Así pues, el análisis de una serie temporal implicará, en líneas generales, la determinación u obtención de un modelo temporal para cada una de sus componentes. De esta forma, obtendremos una función  $F$  que explicará el comportamiento de la serie temporal en cuestión. Atendiendo al modo en que estas componentes interactúan dando forma a  $F(t)$ , se habla de tres modelos clásicos para la modelización de series temporales:

- Modelo aditivo:  $F(t) = T(t) + S(t) + C(t) + R(t)$
- Modelo multiplicativo:  $F(t) = T(t) \cdot S(t) \cdot C(t) \cdot R(t)$
- Modelo mixto:  $F(t) = T(t) \cdot S(t) \cdot C(t) + R(t)$

¿Cómo seleccionar el modelo adecuado para el tratamiento de una serie? No existe una norma o pauta establecida al respecto. En el ámbito de la economía, a la hora de estudiar ciertas series temporales, es habitual considerar un modelo multiplicativo mientras que en el campo de la física o la geofísica, por ejemplo, es más común considerar el modelo aditivo. La selección de un modelo u otro radica en las características que presente la serie temporal y debe apoyarse en un estudio previo del fenómeno que se intenta estudiar. Como veremos en este trabajo, todas las series temporales que analizaremos serán explicadas a través de un modelo aditivo.

### 2.1.2. Componente de ruido

El estudio de la componente de ruido en una serie temporal es uno de los aspectos que más interés ha suscitado en los últimos años ya que su caracterización permite, entre otras cosas, obtener estimaciones más precisas de las restantes componentes y de las incertidumbres asociadas a cada uno de los parámetros estimados. Como ya se ha mencionado, el ruido es un proceso aleatorio que, como tal, no es perfectamente predecible. Incluso si la regla que genera la serie temporal fuese completamente conocida, éste tendría una naturaleza estocástica. A pesar de ello, ciertas técnicas empleadas en la medición de una magnitud están sometidas a un comportamiento errático similar que ayuda en ciertas ocasiones a establecer mejores modelos para la serie temporal que se estudia.

Existe una amplia tipología de ruidos, una pequeña parte de la cual estudiaremos más adelante (ruido parpadeante, paseo aleatorio, turbulencia de Kolmogorov, ...). Sin embargo, existe una clase concreta de ruido que tiene especial interés. Hablamos del denominado *ruido blanco*. Un ruido,  $R(t)$ , es un ruido blanco si y sólo si consiste en una sucesión de variables aleatorias incorreladas e idénticamente distribuidas cumpliendo las siguientes propiedades (ver Peña, 1989):

$$E(R(t_i)) = 0 \quad (2.3)$$

$$V(R(t_i)) = \sigma^2 < \infty \quad (2.4)$$

$$Cov(R(t_i), R(t_j)) = 0 \quad \text{con } i \neq j \quad (2.5)$$

para  $i, j = 1, 2, \dots, N$  y donde  $E$  denota la esperanza matemática,  $V$  la varianza, y  $Cov$  la covarianza. En el estudio de una serie temporal es deseable que ésta no esté afectada por ningún tipo de ruido, o a lo sumo por un ruido blanco ya que éste no introduciría correlación alguna en las observaciones. Sin embargo, no siempre encontraremos series cuyo contenido residual verifique las propiedades (2.3)–(2.5). Como veremos, existen señales derivadas de técnicas geodéticas que contienen una componente de ruido, el cual (lejos de ser blanco) introduce correlaciones en los datos. No obstante, en primera instancia y hasta que se diga lo contrario, asumiremos que las series temporales tratadas están afectadas por un ruido blanco o, en su defecto, que las observaciones son incorreladas.

## 2.2. Técnicas para el estudio de series temporales

El análisis de una serie temporal puede tener distintas motivaciones. Antes de realizar cualquier tipo de análisis se deben tener claros los resultados que queremos obtener. El tipo de análisis, así como los modelos en los que basaremos el estudio, dependerán en gran medida del tipo de preguntas que queremos responder. Por ejemplo, cuando las observaciones corresponden a una única variable, el análisis de series temporales suele tener como objetivo construir un modelo para explicar la estructura (descripción) y prever la evolución (predicción) de la variable de interés. Cuando se observa simultáneamente un grupo de variables, el objetivo que se persigue consiste generalmente en analizar las posibles relaciones entre las variables observadas: estudio del impacto que una cierta decisión ha tenido sobre la evolución de la variable en estudio, análisis de la influencia que una variable (o un grupo de variables) tiene sobre la evolución de otra variable de interés, análisis de la evolución conjunta de las variables, ... A continuación se exponen más detalladamente los principales objetivos que se persiguen cuando se lleva a cabo el estudio de una serie temporal.

**Objetivo descriptivo** Análisis del comportamiento de la variable durante el periodo de observación. Ajuste de modelos descriptivos para explicar la estructura y evolución que ha experimentado la serie.

**Objetivo predictivo** Predicción del comportamiento futuro de la variable observada. Basándonos en datos históricos se trata de construir un modelo para explicar la estructura y prever la evolución de la variable. Este objetivo no sólo es el más común, sino que ha sido el causante del auge que el análisis de series temporales ha tenido en las últimas décadas. En la actualidad las decisiones económicas ya no se toman basándose únicamente en la intuición, dada por el conocimiento del tema y la experiencia de las personas involucradas en la toma de dichas decisiones; sino que se toman llevando a cabo un profundo estudio de la situación, estudio que involucra en la toma de decisiones a un amplio espectro de profesionales. En lo que se refiere al análisis de series temporales, su aportación es la de predecir las circunstancias que afectan a dicha decisión.

**Objetivo centrado en establecer relaciones entre variables** Tras observar simultáneamente varias variables, nos preguntamos si existe una relación es-

tadísticamente significativa entre ellas. Este objetivo, generalmente, no suele ser el fin último del estudio que se está llevando a cabo, sino que se trata de un paso intermedio necesario para alcanzar el objetivo que se describe seguidamente

**Objetivo centrado en el control de la serie** En numerosas ocasiones se está interesado en controlar la evolución de una cierta variable cuyo control directo se escapa a nuestras posibilidades. Piénsese por ejemplo en la tasa de inflación o la tasa de desempleados. En tal caso, sería conveniente analizar la relación que dichas variables guardan con otras variables cuyo control directo sea posible. Por ejemplo, el tipo de interés. Así, una vez establecida la relación existente entre las variables que son controlables y la variable objeto de interés, se podrían establecer las medidas de control indirecto oportunas sobre la variable de interés (a través de acciones sobre las variables controlables)

**Objetivo transversal** En ocasiones mediante el estudio de una determinada variable y el análisis de la misma a lo largo del tiempo es posible establecer conclusiones y resultados sobre otra variable no medida pero que se encuentra íntimamente ligada a la estudiada.

Desde el nacimiento de las series temporales, han surgido múltiples y diversas técnicas para el estudio de las mismas que permiten alcanzar todos o algunos de los objetivos señalados con anterioridad. Éstas parten de las más sencillas y llegan hasta otras más complejas donde el contenido matemático es mucho más denso. En esta sección describiremos algunas de las herramientas de análisis de series temporales más importantes y utilizadas, sin entrar en un exhaustivo detalle.

### 2.2.1. Análisis clásico

Un modelo para una serie temporal es una descripción matemática explícita que se obtiene con la intención de describir un proceso físico en términos sencillos. A menudo, estos modelos conllevan la participación de un reducido número de parámetros, cuyos valores son determinados a partir de una o varias series temporales que representan el mismo fenómeno.



Supondremos inicialmente que deseamos estudiar una serie temporal como realización de un proceso aleatorio estacionario. Entenderemos por *serie estacionaria* aquella que cumple las siguientes características:

1. No tiene tendencia ni ciclos estacionales.
2. Es *homocedástica* o lo que es igual, los errores de las observaciones presentan la misma varianza.
3. La estructura de dependencia se mantiene constante, es decir, si una observación influye sobre la posterior, ésta última lo hará sobre la siguiente y así sucesivamente.
4. La influencia de las observaciones sobre las posteriores decrece con el tiempo.

Existen deficiones más formales de *serie temporal estacionaria* (ver Scargle, 1981), pero para nuestras pretensiones bastará con tener un conocimiento práctico y sencillo del concepto, por lo cual la definición dada será suficiente.

Uno de los modelos clásicos para series estacionarias es el llamado modelo de *Medias Móviles (MA)*. Un proceso MA para una serie estacionaria  $d$ , es aquel que puede ser escrito de la forma (ver Scargle, 1981):

$$d_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot R(t_{n-k}) \quad (2.6)$$

donde  $R(t)$  es un proceso de ruido blanco incorrelado:

$$E \{ [R(t_i) - \bar{R}] \cdot [R(t_j) - \bar{R}] \} = \sigma^2 \cdot \delta_{i,j} \quad \text{siendo } \bar{R} = E[R(t_i)] \quad (2.7)$$

y donde  $C_k$  son constantes que verifican la denominada *propiedad de estabilidad*, es decir:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^2 < \infty \quad (2.8)$$

Aquello que viene a establecer un modelo MA es que cada observación puede ser expresada como combinación lineal de los valores de un proceso de ruido blanco en instantes anteriores y posteriores al tiempo de interés. En definitiva, un proceso

MA es un proceso con capacidad de memoria pasada y futura. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones y sobre todo en series temporales que se refieren a un ámbito físico, geofísico o astrofísico es habitual añadir la restricción de *causalidad*, es decir  $C_k = 0$  para  $k < 0$ . Dicha condición obliga al proceso a no depender en cada instante de los valores posteriores al instante en cuestión, o lo que es igual se consigue que el proceso tenga memoria pero no capacidad de premonición. Por otra parte, las series temporales consideradas son, por definición, de longitud finita. Ello implica la existencia de un origen de la señal y por tanto es viable hablar de un *MA de orden  $q$* , ( $MA(q)$ ) cuando

$$d_n = \sum_{k=0}^q C_k \cdot R(t_{n-k}) \quad (2.9)$$

Aparte del MA, existen otros modelos clásicos dotados de una propiedad de memoria, como aquellos que suponen que el propio proceso recuerda su comportamiento en previos instantes de tiempo. Así pues, un *proceso autorregresivo de orden  $p$* ,  $AR(p)$ , es aquel que puede ser modelado como (ver Scargle, 1981):

$$d_n = \sum_{k=1}^p A_k \cdot d_{n-k} \quad (2.10)$$

donde  $A_k$  son constantes que verifican la propiedad de estabilidad (2.8). Ambos procesos, MA y AR, están relacionados entre sí de tal forma que, bajo ciertas condiciones (ver Scargle, 1981), cualquier modelo AR puede transformarse en un modelo AM y viceversa.

Una generalización obvia de estos dos modelos consiste en considerar cada observación de una serie temporal estacionaria como elementos dependientes tanto de observaciones previas como de un proceso de ruido blanco en otros instantes de tiempo:

$$d_n = \sum_{k=1}^p A_k \cdot d_{n-k} + \sum_{k=0}^q C_k \cdot R(t_{n-k}) \quad (2.11)$$

donde  $R(t)$  es un proceso de ruido blanco incorrelado (ecuación (2.7)) y los coeficientes  $A_k$  y  $C_k$  son constantes que verifican la propiedad de estabilidad (2.8). En este caso diremos que el proceso puede describirse a través de un modelo *autorregresivo de medias móviles* de orden  $p$  y  $q$ , y se denota por  $ARMA(p, q)$ .

Estos modelos clásicos son generalmente utilizados para el estudio de procesos estacionarios. Existen otros modelos más complejos que son útiles en el análisis de series temporales no estacionarias, como pueden ser el *paseo aleatorio* y los *modelos autorregresivos de media móvil integrada* (ARIMA). Simplemente mencionaremos su existencia pero no entraremos en detalle debido a que no son el foco de interés de este estudio. No obstante, si se desea conocer más sobre este tipo de modelos, se encontrará información útil en Jenkins and Watts (1968); Peña (1989) y Scargle (1981).

### 2.2.2. Análisis espectral

Estrictamente hablando, el *análisis de Fourier* o *análisis espectral* de una serie temporal consiste en la descomposición de ésta como combinación lineal de funciones sinusoidales. Sin embargo, este término suele ser utilizado en un sentido más amplio para describir cualquier tipo de procedimiento capaz de explicar o medir las fluctuaciones de series temporales mediante su comparación con funciones sinusoidales. Para conocer el origen de este tipo de análisis, debemos remontarnos al siglo *XVIII*. Según Gibert (1997), fue Prony quien, en 1795, estableció el primer modelo de representación de una señal mediante una suma de sinusoides. Sin embargo, la estimación de sus parámetros suponía un problema de inversión de carácter no lineal y por tanto, complejo. Más tarde, Schuster (1851-1934) propuso una simplificación lineal del problema, que consistía en la representación de señales mediante polinomios trigonométricos, donde los argumentos de las funciones sinusoidales serían fijados a priori.

En el análisis espectral se manejan una serie de conceptos que forman parte del argot característico de este ámbito. Consideremos un fenómeno o serie temporal periódica cualquiera. Se define un *ciclo* o revolución como el patrón de estados adoptados o devenidos por el fenómeno y que se repite sucesivamente cada cierto periodo de tiempo. Asociado a este concepto, se encuentra la frecuencia fundamental. La *frecuencia fundamental* o *línea espectral* asociada a un comportamiento periódico no es más que el número de ciclos o revoluciones que el fenómeno realiza por unidad de tiempo. Evidentemente, un fenómeno periódico puede poseer más de una frecuencia fundamental, dependiendo del número de patrones o ciclos distintos que sea capaz

de contener. En ocasiones, el término de frecuencia fundamental se aparca a un lado para hablar de *frecuencia angular* o circular. Ambas miden de alguna manera la velocidad con la que un fenómeno es capaz de repetir un ciclo. La relación entre ambas es sencilla. Mientras que la frecuencia fundamental mide las revoluciones por unidad de tiempo, la frecuencia angular mide los radianes recorridos por unidad de tiempo. Así pues:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (2.12)$$

donde  $\omega$  denota la frecuencia angular, y  $f$  la frecuencia fundamental. Otro elemento importante a la hora de trabajar con funciones armónicas es el periodo. Frecuencia fundamental y periodo son conceptos que guardan una relación inversa. Es decir, el *periodo*,  $\Pi$ , es el tiempo que el fenómeno emplea en completar un ciclo:

$$f = \frac{1}{\Pi} \quad (2.13)$$

En lo sucesivo, entenderemos por *altas (bajas) frecuencias* aquellas líneas espectrales asociadas a cortos (largos) periodos de tiempo.

Conocido el valor de todas las frecuencias fundamentales que conforman el contenido armónico de un fenómeno, se podría fácilmente aproximar su comportamiento. Se ha utilizado el término *aproximar* y no *reproducir* porque para la obtención del modelo armónico se habrá empleado un número determinado de observaciones del propio fenómeno, las cuales difícilmente están exentas de error. Así pues, el objetivo básico que pretende alcanzarse con el análisis espectral consiste en representar una serie temporal dada como suma de una señal y unos errores aleatorios observacionales:

$$d_n = h_n + R_n \quad (2.14)$$

donde  $h_n$  es fruto de la combinación lineal de funciones armónicas

$$h_n = \sum_{i=1}^L S_i \sin(\omega_i t_n) + C_i \cos(\omega_i t_n) \quad (2.15)$$

con  $L \in \mathbb{N}$  y donde  $R_n$  representa la componente de ruido. Si la serie temporal analizada está dotada de una componente de tendencia, ésta podría incluirse en  $h_n$

aunque, como sabemos, la tendencia no posea un carácter periódico. Los coeficientes  $\{(S_i, C_i)\}_{i=1, \dots, L}$  que aparecen en  $h_n$  deben interpretarse como una medida relativa de cómo las funciones armónicas (a las que multiplican) se adaptan a las observaciones. Por otra parte, es habitual asumir ciertas condiciones en relación a la variable de error aleatorio, como por ejemplo suponer que se trata de un ruido blanco incorrelado. En cualquier caso, el problema espectral se centra en el reconocimiento de la señal  $h_n$  a partir de las observaciones y a pesar de la presencia de la componente de ruido. Dicho procedimiento es conocido en la literatura como *detección de señales*. Con el paso del tiempo, el problema de la detección de señales se ha especializado y centrado en la estimación del contenido armónico. Para llevar a cabo un estudio espectral se han ideado múltiples herramientas matemáticas entre las cuales cabe destacar el *periodograma de Lomb* (Lomb, 1976), que será tratado con detalle en la sección 2.3.1.

Podríamos pensar que la utilización de funciones trigonométricas para el análisis espectral de una serie es arbitraria, pero nada más lejos de la realidad. El uso de funciones armónicas ha sido históricamente justificado por el hecho de que gran parte de los fenómenos estudiados en física (y otras disciplinas) verifican ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son funciones donde intervienen senos y cosenos (Collinieux, 2008). Además, son funciones que poseen la propiedad de periodicidad, por lo que resultan ideales para el estudio de fenómenos que manifiestan un mismo estado, el cual se repite cada cierto periodo de tiempo. Una de las propiedades básicas que hacen a las funciones sinusoidales aptas para el análisis de series temporales es su sencillo comportamiento frente a cambios en la escala temporal (Bloomfield, 1976). Supongamos que disponemos de un senoide de frecuencia angular  $\omega$ , el cual puede ser escrito como:

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

donde  $A$  es la amplitud y  $\theta$  es la fase. Si modificamos la variable temporal  $t$  aplicando un cambio de escala y una traslación,

$$u = (t - a) / b \quad \text{donde } a \in \mathbb{R} \text{ y } b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

se tiene que:

$$f(u) = A \cdot \cos(\omega b u + \theta + \omega a) = A \cdot \cos(\omega' u + \theta') \quad (2.16)$$

donde  $\omega' = \omega b$  y  $\theta' = \theta + \omega a$ . Como vemos, la amplitud del senoide no se ve alterada, la frecuencia aparece multiplicada por la inversa del factor de escala y la fase se ve afectada por una cantidad que hace referencia al cambio de origen y la frecuencia del senoide. Dado que el origen del vector de tiempo suele ser en general arbitrario, esta propiedad resulta considerablemente útil. En particular, dado que la amplitud del senoide no depende del origen ni de la escala temporal, ésta puede ser considerada como una cantidad absoluta carente de arbitrariedad en su definición. Obsérvese también que si la modificación de la variable temporal sólo conlleva una traslación, la propiedad (2.16), nos dice que la frecuencia y amplitud del senoide no se ve alterada en absoluto, es decir, un cambio de origen sólo implica un cambio en fase. Así pues, por todas estas razones analíticas e históricas mencionadas es por lo que las funciones sinusoidales son las funciones base empleadas tradicionalmente en el análisis espectral.

### 2.2.3. Análisis wavelet

Las familias de funciones armónicas utilizadas en el análisis espectral son funciones ortogonales en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , ya que el producto bajo el signo integral de dos miembros diferentes de la familia es cero, mientras que su cuadrado es integrable y no nulo. Sin embargo, no son las únicas funciones con esta propiedad. Existen otras familias de funciones ortogonales como por ejemplo los *polinomios de Legendre*, de *Hermite* o de *Tchebicheff* que, aunque son menos populares, no por ello son menos útiles. Durante los últimos años se ha puesto en boga el uso de las denominadas “*wavelets*” en el análisis de señales y series temporales (Percival and Walden, 2000). Las *wavelets* son familias de funciones ortogonales, o cuasi-ortogonales, que tienen en general formas más irregulares que las funciones seno y coseno, y que por tanto deberían acomodarse mejor a señales con discontinuidades o saltos abruptos.

Una *wavelet*,  $\xi(t)$ , es una función de medida nula

$$\int_0^{\infty} \xi(t) dt = 0 \quad (2.17)$$

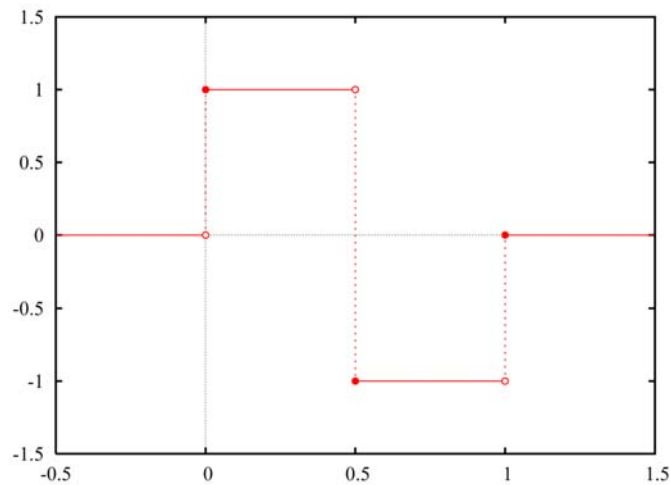


Figura 2.2: Representación gráfica de la wavelet de Haar

cuyo cuadrado es integrable en el intervalo finito de longitud  $L$

$$\int_0^L \xi^2(t) dt = a \in \mathbb{R}^+ < \infty \quad (2.18)$$

Una de las wavelets más conocidas es la *wavelet de Haar* (Figura 2.2). Ésta es una onda cuadrada de amplitud y longitud unitaria formada por dos bloques anexos de orientación invertida. Su expresión analítica viene dada por la ecuación:

$$\xi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.19)$$

Tras ésta, nacieron otras familias de wavelets que son muy utilizadas en la actualidad incluso a nivel geofísico (como las *Daubechies* (Foufoula-Georgiou and Kumar, 1994) o la *wavelet de Morlet* (Foster, 1996)), creando un amplio abanico de herramientas para el análisis de señales y series temporales. Sin embargo, a pesar del gran potencial que contienen, presentan también ciertas desventajas que en algunos casos hacen preferible el análisis espectral para el estudio de determinadas series temporales. Entre estas desventajas encontramos, por ejemplo, que no podemos hablar de frecuencia cuando utilizamos wavelets porque, a pesar de ser ortogonales, no son

funciones periódicas. Esto supone un gran contratiempo si lo que pretendemos es obtener información armónica de la serie. Para suplir esta carencia suele recurrirse a un análisis temporal de los coeficientes asociados a estas wavelets para la correspondiente serie temporal, pero resulta un estudio mucho más tedioso y complejo de interpretar en comparación con el análisis espectral.

## 2.3. El problema de la detección de señales

En muchas disciplinas, ocasionalmente, es necesario analizar y buscar periodicidades desconocidas. Para datos obtenidos en tiempos equiespaciados existen métodos estándares que permiten su análisis, como por ejemplo los métodos de Fourier basados en la *Transformada Rápida de Fourier* (FFT) y el *Método de Máxima Entropía* (MEM). Una herramienta básica para el análisis espectral es la *Transformada Discreta de Fourier* (DFT). Dada una serie temporal de longitud  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\{t_n, d_n\}_{n=1, \dots, N}$ , ésta se define como:

$$FT_d(\omega) = \sum_{n=1}^N d_n \cdot \exp(-i \omega t_n) \quad (2.20)$$

donde  $\omega$  denota la frecuencia angular e  $i = \sqrt{-1}$ . A partir de aquí, se define el *periodograma clásico* como:

$$\begin{aligned} P_d(\omega) &= \frac{1}{N} |FT_d(\omega)|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N d_n \exp(-i \omega t_n) \right|^2 \\ &= \frac{1}{N} \left[ \left( \sum_{n=1}^N d_n \sin(\omega t_n) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N d_n \cos(\omega t_n) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

que es utilizado para identificar aquellas líneas espectrales que mejor explican la variabilidad de los datos. Esta expresión puede ser evaluada para cualquier valor de frecuencia angular  $\omega$ , aunque tradicionalmente suele hacerse únicamente en un rango de frecuencias equiespaciadas. No obstante, el empleo del periodograma clásico ha sido poco a poco abandonado por la presencia de dos problemas en su utilización: dificultades estadísticas y la presencia de picos espectrales secundarios. El principal problema estadístico es que la función  $P_d(\omega)$  es muy ruidosa incluso cuando los datos



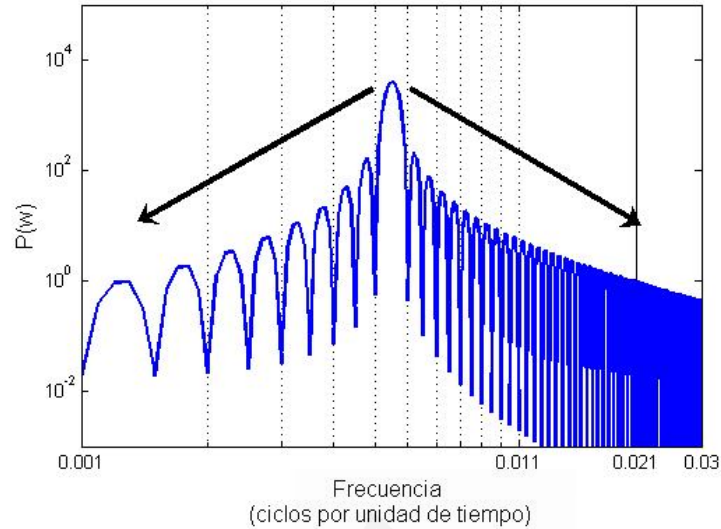


Figura 2.3: Fenómeno de fuga espectral

observados apenas contienen una ligera componente de ruido. Además, este ruido no disminuye en amplitud si se incrementa el tamaño de la serie temporal. El segundo de los inconvenientes se refiere a lo que comúnmente se conoce como *escape* o *fuga espectral* (ver Figura 2.3). Debido a este problema, la potencia de una simple señal sinusoidal de frecuencia angular  $\omega_0$  se escapa parcialmente a otras frecuencias que no tienen nada que ver con la naturaleza de la señal, mostrando así un periodograma con más de un pico de potencia. Existen diversos tipos de fuga espectral. La fuga de energía a frecuencias próximas a las frecuencia real y la fuga de energía a frecuencias alejadas de la frecuencia real. El primer tipo está ligado a la longitud finita del dominio temporal de la serie y el segundo de ellos al intervalo de tiempo finito entre la toma de muestras. En particular, el fenómeno de fuga espectral más conocido es el de *aliasing* que consiste en el escape de energía de altas frecuencias a bajas frecuencias.

En definitiva, el uso del periodograma clásico para detectar periodicidades ocultas en los datos no es una herramienta adecuada para nuestros propósitos ya que requiere de datos equidistantes y además tiene baja resolución espectral (es decir, no podemos hacer un espectro con una resolución menor que  $\Delta f = \frac{1}{N \cdot \Delta t}$ ). Además presenta los dos problemas señalados anteriormente. Si bien es cierto que el problema de la fuga

espectral puede paliarse en cierto modo mediante el uso de ventanas o suavizados, hemos de señalar que el uso de los mismos introduce un grado de libertad que afecta los resultados, deteriorando aún más la resolución espectral.

Durante muchos años se han ido ideando nuevas técnicas y alternativas para el tratamiento espectral de series temporales. El ya mencionado método MEM (Ulrych and Bishop, 1975) es una alternativa al uso del periodograma clásico que tiene mayor resolución en frecuencia, aunque requiere de datos equidistantes y no proporciona información sobre la amplitud y fase.

El método denominado *Análisis Espectral Singular* (SSA) (Vautard and Ghil, 1989) requiere también de datos equidistantes. SSA calcula filtros adaptativos que descomponen los datos en series temporales ortogonales entre sí. Sin embargo, estos filtros son difíciles de interpretar debido a la cantidad y al mutuo solapamiento de sus bandas de transmisión.

Desafortunadamente, como se comentó al inicio de este capítulo, en muchas de las disciplinas es impracticable conseguir series temporales que puedan ser consideradas homogéneas. Las observaciones están en ocasiones limitadas o se encuentran supeditadas a ciertos factores externos. Uno podría pensar en utilizar estas técnicas mencionadas salvando el problema de la no equidistancia mediante el método de la interpolación (lineal, spline cúbico, etc), si bien dicha actuación puede afectar al espectro, especialmente en las altas frecuencias. Se requiere por tanto de algún tipo de herramienta matemática que permita salvar de alguna forma estos problemas relacionados con la creación de falsos picos de frecuencia y la propiedad de heterogeneidad. Una de las técnicas que logran hacer frente a toda esta problemática está basada en la utilización del periodograma de Lomb. El periodograma de Lomb es una herramienta del análisis espectral que puede aplicarse a series temporales no equiespaciadas, aunque no resuelve la creación de falsas líneas espectrales. Sin embargo, puede evitarse la inclusión de estas frecuencias secundarias en el análisis espectral de una serie si las líneas espectrales son extraídas a partir del periodograma de Lomb de forma iterativa. En cada iteración se calculan los parámetros asociados al pico de máxima frecuencia en el periodograma. Tras ello se resta a los datos la combinación lineal armónica (de senos y cosenos) correspondiente a la frecuencia extraída. Los residuos obtenidos serán utilizados en la siguiente iteración, con los

cuales se calcula un nuevo periodograma repitiendo así el proceso descrito hasta que los picos de frecuencia seleccionados tengan una amplitud insignificante. La idea de este cálculo espectral iterativo es la base de los métodos algorítmicos que se tratarán en este trabajo, y con ellos se pretende evitar el efecto causado por la interferencia de las líneas espectrales más importantes sobre las restantes. Al eliminar uno a uno los armónicos de la serie original, no sólo conseguimos eliminar el correspondiente pico de frecuencia sino que también desaparecen los picos secundarios generados por el primero.

### 2.3.1. Periodograma de Lomb

El periodograma de Lomb es una herramienta matemática que permite el análisis espectral de una serie temporal en busca de periodicidades desconocidas. Fue propuesto por Lomb (1976) y Scargle (1982) siguiendo vías diferentes. Ésta herramienta resuelve los dos principales problemas del periodograma clásico. Se caracteriza por ignorar la heterogeneidad de la serie temporal y calcular el espectro de frecuencia como si los datos fueran equiespaciados en el tiempo, sin necesidad de recurrir al algoritmo de la FFT. El periodograma de Lomb es capaz de proporcionar una aproximación razonable del espectro, el cual se obtiene a partir del ajuste de los datos mediante funciones sinusoidales utilizando la conocida *técnica de mínimos cuadrados* (LSM). Este periodograma basado en la técnica LSM proporciona la mejor medida de la potencia aportada por las diferentes frecuencias sobre la varianza total de los datos y podría considerarse como la extensión natural de los métodos de Fourier para series heterogéneas (Lomb, 1976).

Dada una serie temporal de longitud  $N$  sin tendencia y media nula,  $\{t_n, d_n\}_{n=1, \dots, N}$ , queremos construir un modelo explicativo  $h_n$  tal que:

$$d_n = h_n + \varepsilon_n = a \cdot \sin(\omega t_n) + b \cdot \cos(\omega t_n) + \varepsilon_n \quad (2.22)$$

donde  $\varepsilon_n$  es la componente de ruido representando variables independientes, de media nula e idéntica varianza  $\sigma^2$ ;  $a$  y  $b$  son valores reales desconocidos y  $\omega$  es la frecuencia angular. El problema consiste en seleccionar aquella frecuencia angular que mejor explique el comportamiento de los datos, es decir, aquella que sea capaz de reducir

en mayor cantidad el error cuadrático y además, determinar el valor de los coeficientes lineales  $a$  y  $b$ . Para resolver este dilema, supondremos inicialmente que conocemos el valor de la frecuencia angular que minimiza la suma de los cuadrados de los errores y nos centraremos simplemente en estimar los coeficientes lineales. En este caso, el problema se reduce a:

$$\begin{aligned} \min_{a,b \in \mathbb{R}} E(a,b) &= \min_{a,b \in \mathbb{R}} \sum_{n=1}^N \varepsilon_n^2 = \min_{a,b \in \mathbb{R}} \sum_{n=1}^N (d_n - h_n)^2 = \\ &= \min_{a,b \in \mathbb{R}} \sum_{n=1}^N (d_n - a \cdot \sin(\omega t_n) - b \cdot \cos(\omega t_n))^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Como vemos, se trata de un simple problema de mínimos cuadrados que es posible resolver sin dificultad. Calculamos la derivada parcial de la función objetivo respecto de  $a$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} E(a,b) &= 2 \cdot \sum_{n=1}^N \cos(\omega t_n) \cdot [d_n - a \cdot \sin(\omega t_n) - b \cdot \cos(\omega t_n)] = \\ &= 2 \cdot \sum_{n=1}^N [d_n \cos(\omega t_n) - a \cdot \cos^2(\omega t_n) - b \cdot \sin(\omega t_n) \cos(\omega t_n)] = \\ &= 2 \cdot \left[ \sum_{n=1}^N d_n \cos(\omega t_n) - a \cdot \sum_{n=1}^N \cos^2(\omega t_n) - b \cdot \sum_{n=1}^N \sin(\omega t_n) \cos(\omega t_n) \right] \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene la expresión de la derivada parcial respecto a  $b$ :

$$\frac{\partial}{\partial b} E(a,b) = 2 \cdot \left[ \sum_{n=1}^N d_n \sin(\omega t_n) - a \cdot \sum_{n=1}^N \sin(\omega t_n) \cos(\omega t_n) - b \cdot \sum_{n=1}^N \sin^2(\omega t_n) \right]$$

Lo que nos lleva a establecer el sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} E(a,b) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} E(a,b) &= 0 \end{aligned} \right\} \iff \left. \begin{aligned} a \cdot CC + b \cdot SC &= DC \\ a \cdot SC + b \cdot SS &= DS \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

donde se ha adoptado la siguiente notación para facilitar la captación del sistema:

$$CC = \sum_{n=1}^N \cos^2(\omega t_n), \quad SS = \sum_{n=1}^N \sin^2(\omega t_n), \quad DC = \sum_{n=1}^N d_n \cos(\omega t_n)$$

$$DS = \sum_{n=1}^N d_n \sin(\omega t_n), \quad SC = \sum_{n=1}^N \sin(\omega t_n) \cos(\omega t_n)$$

El sistema (2.24) puede expresarse matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} CC & SC \\ SC & SS \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DC \\ DS \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

la solución del cual vendrá dada por:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CC & SC \\ SC & SS \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} DC \\ DS \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Una vez conocida la estimación de los coeficientes lineales  $a$  y  $b$  en función de  $\omega$ , podemos considerar la suma de los cuadrados de los errores como una función que depende únicamente de la frecuencia angular:

$$E[a(\omega), b(\omega)] = E_{MIN}(\omega)$$

Para conocer aquella frecuencia que mejor explique la serie temporal inicial, deberá averiguarse qué frecuencia angular minimiza esta suma de cuadrados de los errores, o lo que es igual:

$$\min_{\omega} E_{MIN}(\omega) = \max_{\omega} [-E_{MIN}(\omega)] \quad (2.27)$$

Dado que la energía o potencia explicada por la frecuencia angular  $\omega$  no puede ser mayor que la potencia total contenida en los datos, es decir:

$$\sum_{n=1}^N d_n^2 > E_{MIN}(\omega)$$

podemos transformar el problema (2.27) en otro donde la función objetivo sea siempre positiva:

$$\max_{\omega} [-E_{MIN}(\omega)] = \max_{\omega} \left[ \sum_{n=1}^N d_n^2 - E_{MIN}(\omega) \right] = \max_{\omega} \Delta E(\omega) \quad (2.28)$$

Desarrollando  $\Delta E(\omega)$  se obtiene que (ver Scargle, 1982):

$$\begin{aligned} \Delta E(\omega) &= \begin{pmatrix} DC & DS \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CC & SC \\ SC & SS \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} DC \\ DS \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{M} \cdot \begin{pmatrix} DC & DS \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} SS & -SC \\ -SC & CC \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} DC \\ DS \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde  $M = CC \cdot SS - SC^2$ . La expresión (2.29) se corresponde con el periodograma de Lomb. La fórmula podría simplificarse si en lugar de considerar el modelo dado en (2.22) hacemos que:

$$d_n = a \cdot \sin[\omega(t_n - \tau)] + b \cdot \cos[\omega(t_n - \tau)] + \varepsilon_n \quad (2.30)$$

donde  $\tau$  es un valor tal que haga  $SC = 0$ , es decir, que cumpla:

$$\tan(2\omega\tau) = \frac{\sum_{n=1}^N \sin(2\omega t_n)}{\sum_{n=1}^N \cos(2\omega t_n)} \quad (2.31)$$

Bajo estas condiciones tenemos que:

$$\Delta E(\omega) = \frac{1}{CC \cdot SS} \cdot \begin{pmatrix} DC & DS \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} SS & 0 \\ 0 & CC \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} DC \\ DS \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

siendo en esta ocasión:

$$\begin{aligned} CC &= \sum_{n=1}^N \cos^2[\omega(t_n - \tau)], & SS &= \sum_{n=1}^N \sin^2[\omega(t_n - \tau)] \\ DS &= \sum_{n=1}^N d_n \sin[\omega(t_n - \tau)], & DC &= \sum_{n=1}^N d_n \cos[\omega(t_n - \tau)] \end{aligned}$$

Así pues, se tiene que:

$$\Delta E(\omega) = \frac{\left\{ \sum_{n=1}^N d_n \sin[\omega(t_n - \tau)] \right\}^2}{\sum_{n=1}^N \sin^2[\omega(t_n - \tau)]} + \frac{\left\{ \sum_{n=1}^N d_n \cos[\omega(t_n - \tau)] \right\}^2}{\sum_{n=1}^N \cos^2[\omega(t_n - \tau)]} \quad (2.33)$$

El parámetro  $\tau$  no es más que un valor que evita la aparición de términos cruzados de senos y cosenos y además, dota al periodograma de invarianza temporal. No obstante, cuando se trata simplemente de reconocer aquellas frecuencias que maximizan la reducción en la suma de cuadrados de las observaciones originales, puede prescindirse de dicho parámetro como consecuencia de la propiedad (2.16) de las funciones sinusoidales.

Así pues, la ecuación para el periodograma de Lomb que será considerada en esta primera parte de la presente memoria, vendrá dada por la expresión:

$$P(\omega) = \frac{\left[ \sum_{n=1}^N d_n \cdot \sin(\omega t_n) \right]^2}{\sum_{n=1}^N \sin^2(\omega t_n)} + \frac{\left[ \sum_{n=1}^N d_n \cdot \cos(\omega t_n) \right]^2}{\sum_{n=1}^N \cos^2(\omega t_n)} \quad (2.34)$$

En la práctica, es imposible evaluar el periodograma en un conjunto continuo de frecuencias, por lo que debemos resignarnos a su estimación en un conjunto discreto. Ahora bien, ¿cómo determinar qué frecuencias debemos considerar sin arriesgarnos a descartar armónicos que describen potencialmente los datos?

### 2.3.2. Dominio de frecuencia

En la práctica, uno se enfrenta al problema de seleccionar un conjunto finito de frecuencias sobre el cual evaluar el periodograma, al cual nos referiremos como *dominio de frecuencia*. Para el caso de series temporales homogéneas existe un conjunto natural conocido de frecuencias, definido por:

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad \text{para } n = \frac{-N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad (2.35)$$

donde  $T$  es el rango del dominio temporal abarcado por la serie. La significatividad de este conjunto de líneas espectrales es tal que, el periodograma de Lomb evaluado en estas frecuencias, contiene la información necesaria para recuperar los datos

originales. Ahora bien, este rango de frecuencias puede reducirse considerablemente gracias a la propiedad de simetría que posee el periodograma de Lomb. Dado que para cualquier frecuencia angular  $\omega$  se tiene que  $P(\omega) = P(-\omega)$ , podemos afirmar que toda la información necesaria para explicar el comportamiento de una serie estará contenida en las frecuencias positivas. La evaluación en frecuencias intermedias sólo proporcionaría un suavizado del periodograma pero no añadiría información. Además, las variables aleatorias  $P(\omega_n)$  son independientes unas de otras mientras que  $P(\omega)$  para frecuencias intermedias resultan ser variables dependientes. Sin embargo, en ocasiones, puede desearse realizar un suavizado del periodograma con la intención de establecer un ajuste parabólico en un entorno del pico máximo de frecuencia para obtener un valor más real de la frecuencia óptima.

Una forma intuitiva de encontrar sentido a este conjunto de frecuencias para series homogéneas se basa en observar que la frecuencia  $\omega_1 = 2\pi/T$  se corresponde con una onda sinusoidal de periodo igual al intervalo de tiempo completo abarcado por la serie temporal, es decir,  $T$ . Ésta es aproximadamente la frecuencia más pequeña que puede contener información sobre los datos. Por otro lado, la denominada *frecuencia de Nyquist*:

$$\omega_N = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\Delta t} \quad \text{siendo } \Delta t = \frac{T}{N} \quad (2.36)$$

se corresponde aproximadamente con la máxima frecuencia que contiene información sobre la serie temporal, ya que hace referencia al intervalo de tiempo más pequeño entre dos observaciones cualesquiera. Si la serie temporal es heterogénea, las frecuencias son básicamente las mismas por lo que respecta a valor y significado, teniendo en cuenta que en esta ocasión  $T = \max(t_n) - \min(t_n)$ . Sin embargo, la interpretación de la frecuencia de Nyquist cambia, siendo ahora algo más complicada. Ante la propiedad de heterogeneidad del dominio temporal, la máxima frecuencia que contiene información sobre la serie se correspondería con:

$$\omega = \frac{\pi}{\Delta t_{MIN}} \quad \text{donde } \Delta t_{MIN} = \min(t_{n+1} - t_n) \quad (2.37)$$

A lo largo de esta memoria tomaremos habitualmente una red regular y equiespaciada de frecuencias sobre la cual evaluar el periodograma de Lomb. Esta red se iniciará en una frecuencia de valor menor o igual a la línea espectral correspondiente al periodo



más largo que es posible detectar a partir de la serie (es decir su rango temporal). El extremo superior para el dominio de frecuencias se seleccionará en función de las características de la serie que se estudie, salvo que sea homogénea, en cuyo caso optaremos por la frecuencia de Nyquist. El resto de armónicos serán aquellos que cubren el segmento de frecuencias indicado con un tamaño de paso adecuado para la serie temporal que se estudia.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

# Capítulo 3

## Análisis armónico no lineal

### 3.1. Introducción

Como hemos señalado en el capítulo anterior, el análisis espectral o armónico es una de las múltiples técnicas que permiten abarcar el problema de la detección de señales para series temporales. De todas las técnicas espectrales disponibles, una de las más utilizadas es el denominado *método armónico lineal* basado en el estudio del periodograma de Lomb. Esta técnica permite detectar periodicidades ocultas en series temporales (independientemente de su carácter homogéneo o heterogéneo) y obtener un modelo de ajuste. Dada una serie temporal cualquiera,  $\{t_n, d_n\}_{n=1, \dots, N}$  con  $N \in \mathbb{N}$ , el primer paso de dicho método consiste en estimar el periodograma para un rango de frecuencias adecuado y a partir de éste establecer aquellas frecuencias angulares,  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$  con  $K \in \mathbb{N}$ , que son susceptibles de explicar el comportamiento de los datos. Una vez realizado el estudio del espectro de potencia se construye una función de la forma:

$$h(t_n) = h_n = \sum_{j=1}^K [a_{2j-1} \cdot \varphi_{2j-1}(t_n) + a_{2j} \cdot \varphi_{2j}(t_n)] \quad (3.1)$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_{2K} \in \mathbb{R}$  y

$$\varphi_{2j-1}(t_n) = \sin(\omega_j \cdot t_n) \quad (3.2)$$

$$\varphi_{2j}(t_n) = \cos(\omega_j \cdot t_n) \quad (3.3)$$

Acto seguido, se procede al ajuste de las observaciones mediante dicha función. Dado que las frecuencias son consideradas constantes conocidas, la cuestión se reduce a un simple problema de optimización lineal que puede resolverse fácilmente por la técnica de mínimos cuadrados, donde las incógnitas a determinar son los coeficientes lineales  $\{a_1, a_2, \dots, a_{2K}\}$ . La función objetivo a minimizar vendría dada por la suma de las diferencias al cuadrado entre las observaciones y el modelo para cada instante de tiempo:

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{n=1}^N [d_n - h_n]^2 = \sum_{n=1}^N \left\{ d_n - \sum_{j=1}^K [a_{2j-1} \cdot \varphi_{2j-1}(t_n) + a_{2j} \cdot \varphi_{2j}(t_n)] \right\}^2 \\ &= \sum_{n=1}^N \left[ d_n - \sum_{q=1}^{2K} a_q \cdot \varphi_q(t_n) \right]^2\end{aligned}\quad (3.4)$$

Derivando (3.4) respecto de los parámetros lineales, obtendremos las ecuaciones que nos proporcionan la estimación para los coeficientes  $\{a_1, a_2, \dots, a_{2K}\}$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_p} = -2 \sum_{n=1}^N \varphi_p(t_n) \cdot \left[ d_n - \sum_{q=1}^{2K} a_q \cdot \varphi_q(t_n) \right] = 0 \quad (3.5)$$

para todo  $p = 1, 2, \dots, 2K$ . Equivalentemente, éstas pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N d_n \cdot \varphi_p(t_n) - \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^{2K} a_q \cdot \varphi_p(t_n) \cdot \varphi_q(t_n) &= 0 \\ \sum_{q=1}^{2K} a_q \cdot \sum_{n=1}^N \varphi_p(t_n) \cdot \varphi_q(t_n) &= \sum_{n=1}^N d_n \cdot \varphi_p(t_n)\end{aligned}\quad (3.6)$$

para todo  $p = 1, 2, \dots, 2K$ . No obstante, es más cómodo y sencillo expresarlas mediante una ecuación matricial de la forma:

$$A \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad (3.7)$$

siendo  $\vec{a} \in \mathbb{R}^{2K}$ ,  $A = (A_{pq})_{p,q=1,\dots,2K} \in \mathbb{M}_{2K \times 2K}(\mathbb{R})$  y  $\vec{b} = (b_p)_{p=1,\dots,2K} \in \mathbb{R}^{2K}$  tales que:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{2K})^T \quad (3.8)$$

$$A_{pq} = \sum_{n=1}^N \varphi_p(t_n) \cdot \varphi_q(t_n) \quad (3.9)$$

$$b_p = \sum_{n=1}^N d_n \cdot \varphi_p(t_n) \quad (3.10)$$

El problema de mínimos cuadrados quedará resuelto una vez obtenida la solución de la ecuación normal (3.7) :

$$\vec{a} = A^{-1} \cdot \vec{b} \quad (3.11)$$

Además, el método presenta la ventaja de que al emplear el procedimiento de mínimos cuadrados, podemos calcular fácilmente una estimación de la incertidumbre asociada a los coeficientes lineales.

A pesar de que la técnica descrita se antoja sencilla, en realidad presenta diversas dificultades o inconvenientes que la hacen cuestionable o, cuanto menos, mejorable. Uno de los primeros dilemas con el que hemos de lidiar es aquel que se refiere a la selección de frecuencias. Tras estimar el periodograma de Lomb para la serie temporal, el investigador debe seleccionar un conjunto de señales armónicas con la finalidad de construir la función que deberá posteriormente ajustar a los datos. Ahora bien, ¿cuántas frecuencias deben incluirse en el modelo? En muchas ocasiones, esta selección se realiza por inspección gráfica del periodograma. El investigador contempla cuales son los picos de frecuencia más destacables y considera el valor de la línea espectral donde cada máximo es alcanzado. Esta tarea, en ocasiones, se realiza con el cálculo de un único periodograma correspondiente a los datos observados. De este espectro de potencia se selecciona el conjunto final de frecuencias que serán consideradas en el modelo de ajuste. La selección está, a veces, basada en razones subjetivas o aspectos particulares del fenómeno que se estudia. La siguiente cuestión lógica es: ¿Cómo podemos saber si la frecuencia seleccionada es la adecuada para explicar el comportamiento del fenómeno? Debido al efecto de escape o fuga espectral, puede

sucedir que el periodograma marque un pico de frecuencia que en realidad no hace referencia a la naturaleza del fenómeno o que, simplemente, no es adecuado para explicar su comportamiento. ¿Cómo podemos evitar caer en errores como consecuencia del problema de la fuga espectral y el denominado efecto *aliasing*? ¿Cómo evitar seleccionar falsas frecuencias que no explican los datos y que son consecuencia del ruido inmerso en la serie? La respuesta a estas preguntas no es única. Existen diversas técnicas que permiten abarcar estas cuestiones, como por ejemplo: *el ventaneo del espectro*, *el establecimiento de una probabilidad de falsa alarma*, etc. Sin embargo, estos procedimientos no siempre consiguen paliar todos los problemas. Algunos de ellos son específicos, es decir, se requiere de unas condiciones por parte de los datos observados para su correcta y viable aplicación, por lo que no son estándares. Así, por ejemplo, el establecimiento de una probabilidad de falsa alarma está basado en el comportamiento estadístico del periodograma, para el cual se supone que los datos observados están sometidos al efecto de un ruido blanco, lo cual no siempre es así.

Otra de las cuestiones que plantea el método armónico lineal hace referencia a la inmutabilidad de las frecuencias extraídas del periodograma de Lomb. Es decir, resultaría mucho más adecuado considerar un modelo donde las frecuencias de las funciones sinusoidales que lo componen no fueran fijas y pudieran ser modificadas con la finalidad de conseguir un mejor ajuste.

El *método de análisis armónico no lineal* que se describe en este capítulo, intenta resolver todas las cuestiones planteadas. Este procedimiento fue desarrollado y utilizado, con éxito, por *Wataru Harada* y *Toshio Fukushima* en sus múltiples investigaciones relacionadas con el estudio de series temporales de carácter astronómico. Algunas de estas series estudiadas son la serie temporal descrita por las efemérides o la serie temporal que hace referencia a los movimientos de la eclíptica y el *plano de Laplace* (para más información ver Harada, 2003). Este algoritmo permite determinar tres aspectos básicos de una serie temporal cualquiera:

1. Los coeficientes de una tendencia polinomial cuadrática, así como otros coeficientes lineales que intervienen en el modelo de ajuste mediante el uso de la técnica de mínimos cuadrados.
2. Las frecuencias asociadas a los términos de Fourier y otros parámetros no line-

ales mediante el algoritmo del método quasi-Newton BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) (Broyden, 1967; Press et al., 1967)

3. Y el número de parámetros no lineales a considerar en el modelo, incrementando dicha cantidad paulatinamente, de uno en uno, hasta que *el error cuadrático medio* (RMS) sea menor que un cierto nivel (asociado al tipo de ruido en los datos) o hasta que su razón de decrecimiento sea despreciable.

## 3.2. Descripción del método

El algoritmo que se describe a continuación consta de diversas etapas. Para la completa comprensión y captación del método se recomienda seguir el esquema global que se muestra en la Figura 3.1 donde se recogen cada una de las fases de las que consta el procedimiento. Con la finalidad de facilitar aun más la descripción del método de análisis armónico no lineal, supondremos inicialmente que disponemos de una serie temporal escalar. Más adelante se extenderá el algoritmo para series temporales vectoriales.

### 3.2.1. Función objetivo y funciones base

Considérese la serie temporal dada a través de una secuencia de datos escalares  $\{t_n, d_n\}_{n=1, \dots, N}$  para un dominio temporal  $\{t_n\}_{n=1, \dots, N}$  siendo  $N \in \mathbb{N}$  el número total de observaciones. Como es de esperar, nuestras pretensiones consisten en emplear el método de mínimos cuadrados para ajustar la serie temporal observada,  $\{t_n, d_n\}_{n=1, \dots, N}$ , a un modelo de serie aproximada:

$$h_n = \sum_{l=1}^L a_l \cdot \varphi_l(t_n) \quad (3.12)$$

siendo  $L \in \mathbb{N}$  el número de *funciones base* reales de variable real,  $\{\varphi_l\}_{l=1, 2, \dots, L}$ , cuya combinación lineal genera el modelo de ajuste y  $\{a_l\}_{l=1, 2, \dots, L}$  son constantes reales. Así pues, del mismo modo que en el método armónico lineal, nuestra *función objetivo*

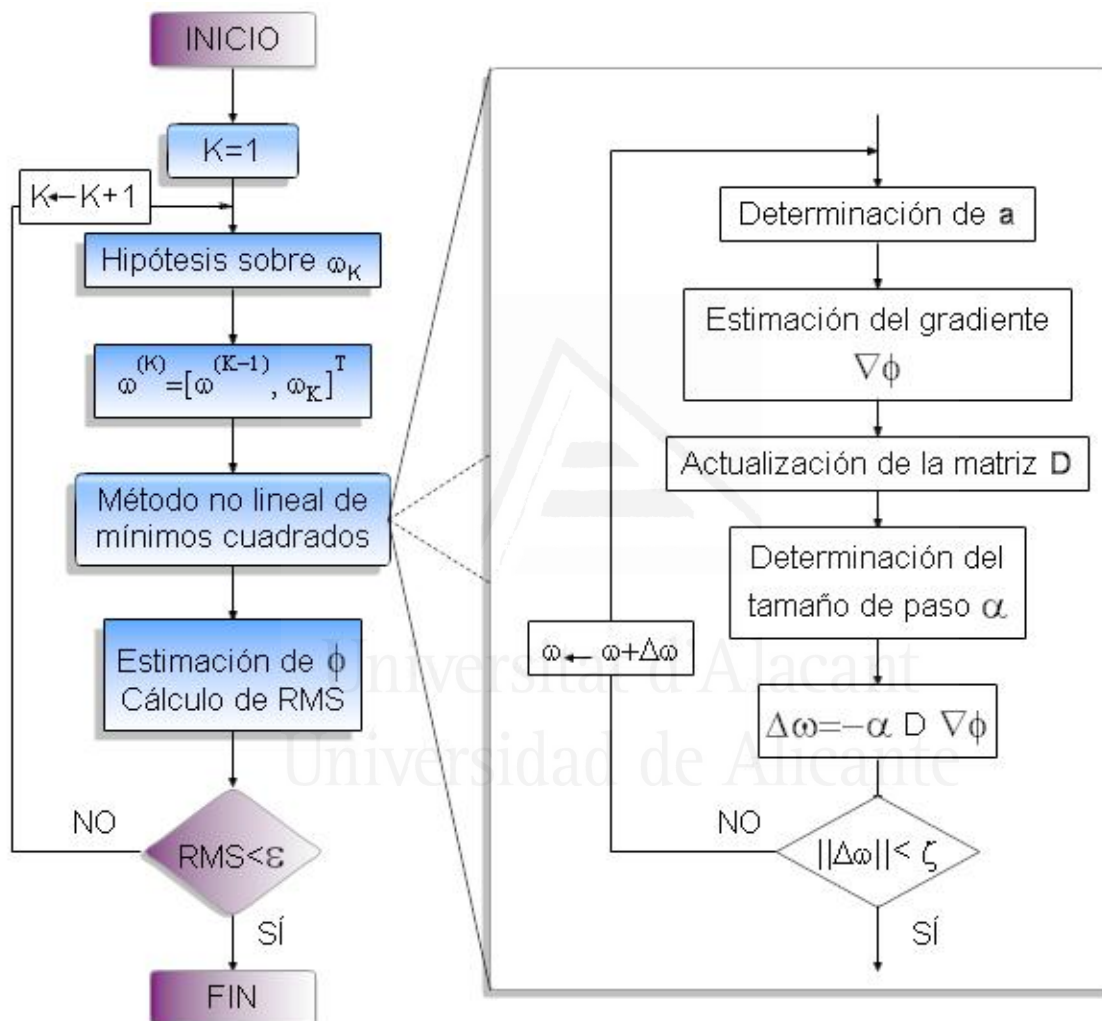


Figura 3.1: Algoritmo principal. Método armónico no lineal.

consistirá en minimizar la suma de los cuadrados de los residuos generados:

$$\phi = \sum_{n=1}^N [d_n - h_n]^2 = \sum_{n=1}^N \left[ d_n - \sum_{l=1}^L a_l \cdot \varphi_l(t_n) \right]^2 \quad (3.13)$$

donde los coeficientes  $\{a_l\}_{l=1,2,\dots,L}$  son los valores, a priori desconocidos, que deben determinarse.

A continuación describiremos el conjunto de *funciones base*  $\{\varphi_l\}_{l=1,2,\dots,L}$  que constituye el modelo de ajuste a utilizar. Estas funciones pueden clasificarse en tres grupos claramente diferenciados:

1. **Funciones polinomiales:** El modelo podrá contener hasta un máximo de tres funciones base polinómicas de grado no superior a dos, a saber: 1,  $t$  y  $t^2$ . La combinación lineal de éstas determinará, asimismo, la componente de tendencia de la serie temporal que se analiza. No obstante, para facilitar el cálculo de los coeficientes lineales, se procede a una ortogonalización de dichas funciones polinómicas (Harada, 2003) de modo que, finalmente, las tres primeras funciones base a considerar resultan ser:

$$\varphi_1(\tau) = 1 \quad (3.14)$$

$$\varphi_2(\tau) = \frac{4\tau}{T} \quad (3.15)$$

$$\varphi_3(\tau) = \left[ \frac{3 \cdot (N-1)}{4 \cdot (N+1)} \right] \cdot \varphi_2^2(\tau) - 1 \quad (3.16)$$

siendo  $T = t_N - t_1$ , el rango del dominio temporal para la serie estudiada y donde:

$$\tau = t - \frac{t_1 + t_N}{2} = t - t_1 - \frac{T}{2} \quad (3.17)$$

Esta última operación consiste simplemente en una translación temporal con la finalidad de centralizar en el origen los tiempos de observación.

2. **Dos términos de Fourier** para cada una de las frecuencias angulares ex-



traídas de los datos. Éstas responden a la siguiente formulación e indexación:

$$\varphi_{2k+2}(\tau) = \sin(\omega_k \tau) \quad (3.18)$$

$$\varphi_{2k+3}(\tau) = \cos(\omega_k \tau) \quad (3.19)$$

para  $k = 1, 2, \dots, K$  con  $K \in \mathbb{N}$  y siendo  $W^{(K)} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$  el conjunto de frecuencias consideradas en el modelo de ajuste.

3. **Dos términos seculares mixtos.** Estas funciones base no aparecen, necesariamente, para todas las frecuencias angulares seleccionadas. La inclusión de términos seculares mixtos se realiza con la intención de abarcar parte de la problemática generada por el fenómeno de fuga espectral que manifiesta el espectro de algunas series temporales. Como sabemos, cuando se produce una fuga espectral, una parte de la potencia de aquellas frecuencias que explican el fenómeno se reparte entre otras líneas espectrales que nada tienen que ver con la naturaleza periódica de la serie. Un tipo de fuga espectral consistía en la transferencia de potencia a líneas espectrales cercanas. Así pues, si estamos frente a frecuencias angulares próximas,  $\omega$  y  $\omega'$ , con amplitudes prácticamente idénticas pero de signo opuesto, se observa que la combinación lineal de sus términos de Fourier pueden aproximarse como (ver Harada, 2003):

$$a \cdot \sin(\omega' \cdot t) - a \cdot \sin(\omega \cdot t) \approx \frac{a \cdot |\omega - \omega'|}{2} \cdot t \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3.20)$$

Sólo para aquellas frecuencias que sean susceptibles de presentar este tipo de fuga espectral consideraremos términos seculares mixtos asociados. Así pues, supóngase que el modelo requiere de un total de  $S \in \mathbb{N}$  frecuencias,

$$W' = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \dots, \omega_{k_S}\} \subseteq W^{(K)}$$

asociadas a términos seculares mixtos. Entonces, para dichas frecuencias, se considerarán las funciones base, adicionales, dadas por:

$$\varphi_{2K+2i+2}(\tau) = \tau \cdot \sin(\omega_{k_i} \tau) \quad (3.21)$$

$$\varphi_{2K+2i+3}(\tau) = \tau \cdot \cos(\omega_{k_i} \tau) \quad (3.22)$$

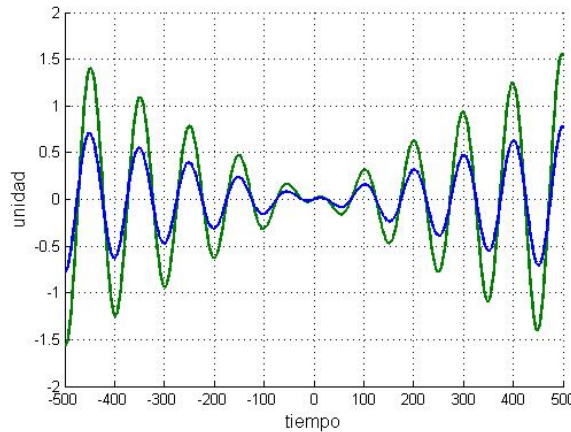


Figura 3.2: Representación gráfica de la relación contemplada en (3.20). Puede compararse la diferencia de sinusoides de misma amplitud y similar frecuencia (en azul) frente al término secular aproximante (en verde). Los valores asumidos en la expresión (3.20) han sido:  $a = 5$  unidades,  $\omega = 2\pi \cdot 0.01$  y  $\omega' = 2\pi \cdot 0.0101$

para  $i = 1, 2, \dots, S$ . El criterio que permitirá dilucidar si una determinada frecuencia está o no ligada a términos seculares mixtos de Fourier se especifica en la sección 3.2.4.

### 3.2.2. Solución mínimo cuadrática

Una vez descritas las funciones base cuya combinación lineal determina el modelo de ajuste, nos centraremos en resolver el problema de mínimos cuadrados asociado. Supongamos que conocemos el vector de frecuencias angulares que explican la serie temporal que pretendemos estudiar,  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K)^T$  con  $K \in \mathbb{N}$ . Sería deseable obtener a continuación los valores  $\{a_l\}_{l=1,2,\dots,L}$  que minimicen la función objetivo (3.13). Evidentemente, esto implica resolver las ecuaciones:

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i} = 0 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, L \quad (3.23)$$

que como sabemos, conducen a la ecuación normal (3.7), siendo en este caso  $\vec{a} \in \mathbb{R}^L$ ,  $A = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,L} \in \mathbb{M}_{L \times L}(\mathbb{R})$  y  $\vec{b} = (b_i)_{i=1,\dots,L} \in \mathbb{R}^L$  tales que:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_L)^T \quad (3.24)$$

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^N \varphi_i(\tau_n) \cdot \varphi_j(\tau_n) \quad (3.25)$$

$$b_i = \sum_{n=1}^N d_n \cdot \varphi_i(\tau_n) \quad (3.26)$$

Obsérvese que la matriz  $A$  es una matriz simétrica y definida positiva, por lo que a nivel teórico es posible emplear la *descomposición de Cholesky* (Press et al., 1967) para el cálculo de los parámetros lineales. Así pues, resolviendo la ecuación normal anterior, se consigue determinar el valor del vector  $\vec{a}$  como función de las frecuencias angulares almacenadas en  $\vec{\omega}$

$$\vec{a} = \hat{a}(\vec{\omega}) \quad (3.27)$$

Por tanto, una vez determinados los valores de los coeficientes  $\{a_l\}_{l=1,\dots,L}$ , la reflexión recogida en la ecuación anterior permite considerar la función objetivo como una función dependiente únicamente de las frecuencias angulares, es decir:

$$\phi(\vec{a}, \vec{\omega}) = \hat{\phi}(\vec{\omega}) \quad (3.28)$$

De este modo, el problema se reduce ahora a un problema de minimización en el espacio de frecuencias con parámetros no lineales. Entre las múltiples técnicas que existen para el tratamiento de este tipo de problemas, se ha optado por el uso de una de las implementaciones del método cuasi-Newton, concretamente el algoritmo Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) (Harada, 2003; Press et al., 1967). El motivo de esta elección se basa en la robustez de la variante frente a errores de redondeo y la rapidez en convergencia.

Aunque teóricamente todo parece perfecto, cuando abarcamos el problema a nivel computacional se presentan diversas dificultades que deben resolverse. Uno de estos problemas es aquel que concierne al carácter definido positivo de la matriz  $A$  que interviene en la ecuación normal (3.7). Puede ocurrir, debido a la magnitud o escala de los datos observados que la matriz  $A$  pierda, a nivel computacional, este carácter

y en consecuencia nos impida invertirla usando su descomposición de Cholesky. Para evitar esta problemática, el usuario podrá decidir si desea emplear la descomposición de Cholesky o el denominado *método del gradiente biconjugado estabilizado*. Este método iterativo es utilizado en el campo del álgebra lineal numérica para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales no simétricos. Fue propuesto por *H.A. Van der Vorst* y es una variante del conocido método del gradiente biconjugado que permite una convergencia más rápida y suave. Exponemos a continuación, brevemente, el procedimiento algorítmico. Pretendemos, pues, resolver el sistema de ecuaciones dado por (3.7). El método del gradiente biconjugado estabilizado, requiere de los siguientes pasos o estadíos (ver Babaoglu, 2003):

1. Elegir un valor inicial para  $\vec{a} = \vec{a}_0$  y calcular  $r_0 = \vec{b} - A \cdot \vec{a}_0$
2. Asignamos:  $r'_0 = r_0$ ,  $p_0 = q_0 = 0$ ,  $\rho_0 = \alpha_1 = \gamma_0 = 1$
3. Calcular iterativamente, para  $k = 1, 2, \dots$ :

$$\rho_{k+1} = r'_0 \cdot r_k \quad (3.29)$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} \cdot \frac{\alpha_{k+1}}{\gamma_k} \quad (3.30)$$

$$p_{k+1} = r_k + \beta_{k+1} \cdot (p_k - \gamma_k \cdot q_k) \quad (3.31)$$

$$q_{k+1} = A \cdot p_{k+1} \quad (3.32)$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{r'_0 \cdot q_{k+1}} \quad (3.33)$$

$$s_{k+1} = r_k - \alpha_{k+1} \cdot q_{k+1} \quad (3.34)$$

$$t_{k+1} = A \cdot s_{k+1} \quad (3.35)$$

$$\gamma_{k+1} = \frac{t_{k+1} \cdot s_{k+1}}{t_{k+1} \cdot t_{k+1}} \quad (3.36)$$

$$a_{k+1} = a_k + \alpha_{k+1} \cdot p_{k+1} + \gamma_{k+1} \cdot s_{k+1} \quad (3.37)$$

$$r_{k+1} = s_{k+1} + \gamma_{k+1} \cdot t_{k+1} \quad (3.38)$$

hasta que se satisfaga la condición de parada o se alcance un número máximo de iteraciones determinado.

### 3.2.3. Optimización no lineal: Algoritmo BFGS

Los métodos cuasi-Newton son métodos del gradiente, iterativos, basados en la actualización:

$$\vec{\omega}_{k+1} = \vec{\omega}_k + \alpha_k \cdot \vec{u}_k \quad \text{para } \alpha_k \in \mathbb{R} \quad (3.39)$$

siendo

$$\vec{u}_k = -D_k \cdot \nabla \phi(\vec{\omega}_k) \quad (3.40)$$

donde  $\nabla \phi(\vec{\omega}_k)$  denota el gradiente de la función objetivo recogida en (3.13) evaluada para  $\vec{\omega}_k$ :

$$\nabla \phi(\vec{\omega}_k) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \vec{\omega}} \right|_{\vec{\omega}=\vec{\omega}_k} \quad (3.41)$$

y donde  $D_k$  es una matriz simétrica definida positiva que se aproxima en cada iteración a la inversa de la matriz hessiana:

$$(\nabla^2 \phi)_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, K \quad (3.42)$$

En consecuencia, la dirección  $\vec{u}_k$  se aproxima progresivamente a la dirección de Newton. La convergencia del algoritmo suele ser rápida y evita cálculos relativos a las segundas derivadas asociadas al método de Newton. No obstante requiere del almacenamiento de la matriz  $D_k$  y de los elementos restantes que intervienen en la obtención de  $D_{k+1}$  a partir de  $D_k$ . Esta actualización se consigue a través de la ecuación (ver Harada, 2003):

$$D_{k+1} = D_k + \frac{\vec{p}_k \vec{p}_k^T}{\vec{p}_k^T \vec{q}_k} - \frac{D_k \vec{q}_k \vec{q}_k^T D_k}{\vec{q}_k^T D_k \vec{q}_k} + \rho_k \vec{\gamma}_k \vec{\gamma}_k^T \quad (3.43)$$

donde

$$\vec{p}_k = \vec{\omega}_{k+1} - \vec{\omega}_k \quad (3.44)$$

$$\vec{q}_k = \nabla \phi(\vec{\omega}_{k+1}) - \nabla \phi(\vec{\omega}_k) \quad (3.45)$$

$$\vec{\gamma}_k = \frac{\vec{p}_k}{\vec{p}_k^T \vec{q}_k} - \frac{D_k \vec{q}_k}{\vec{\rho}_k} \quad (3.46)$$

$$\vec{\rho}_k = \vec{q}_k^T D_k \vec{q}_k \quad (3.47)$$

Obviamente, será necesaria una matriz  $D_0$  para iniciar el proceso iterativo. Dicha matriz  $D_0$  debe ser simétrica y definida positiva. En este caso, hemos considerado  $D_0 = I_K$ , siendo  $I_K$  la matriz identidad de dimensión  $K \times K$ .

Al mismo tiempo, el algoritmo BFGS requiere del cálculo de un tamaño de paso  $\alpha_k$  en la dirección del vector  $\vec{u}_k$ . La elección del valor  $\alpha_k$  debe ser tal que garantice el carácter definido positivo de las matrices  $D_k$  generadas por (3.43), asegurando de este modo que la dirección de búsqueda  $\vec{u}_k$  sea de descenso. Esto se consigue fácilmente determinando  $\alpha_k$  mediante una minimización de la función objetivo sobre la línea  $\{\vec{\omega}_k + \alpha_k \vec{u}_k \mid \alpha_k \geq 0\}$ .

### 3.2.4. Extracción de frecuencias

Como puede intuirse, la efectividad del algoritmo no lineal descrito en el apartado anterior depende en gran medida de los valores iniciales adoptados por las frecuencias angulares. Se requiere, por tanto, de un poderoso mecanismo que proporcione de antemano valores precisos para las frecuencias angulares contenidas en la serie observada. Con la finalidad de abarcar este aspecto, se recurre al uso del periodograma de Lomb (Lomb, 1976).

Como vimos en el capítulo anterior, el espectro de frecuencias obtenido mediante el periodograma de Lomb viene dado por:

$$P(\omega) = \frac{\left[ \sum_{n=1}^N d_n \cdot \sin(\omega\tau_n) \right]^2}{\sum_{n=1}^N \sin^2(\omega\tau_n)} + \frac{\left[ \sum_{n=1}^N d_n \cdot \cos(\omega\tau_n) \right]^2}{\sum_{n=1}^N \cos^2(\omega\tau_n)} \quad (3.48)$$

Esta expresión permite conocer la potencia que una frecuencia cualquiera representa para una serie temporal dada. Así pues, los picos o máximos de (3.48) nos informan sobre qué frecuencias angulares son más adecuadas, significativas o influyentes para explicar el comportamiento de los datos muestrales. A nivel computacional, se hace inviable la evaluación del periodograma para un continuo de frecuencias angulares por lo que hemos de conformarnos con la estimación de (3.48) en un conjunto finito. Dotar al periodograma de un carácter discreto conlleva ciertas imprecisiones que pueden verse reflejadas en la elección de las frecuencias explicativas para el fenómeno que se estudia. Con la finalidad de obtener una mejor aproximación de las

frecuencias angulares a seleccionar, se procederá a hacer uso de un ajuste parabólico en un entorno del correspondiente pico de frecuencia. Es decir, tras calcular el periodograma de Lomb para la serie temporal, y una vez localizado su máximo, que denotaremos por  $(\omega_{max}, P(\omega_{max}))$ , consideraremos el intervalo  $[\omega_{max} - \varepsilon, \omega_{max} + \varepsilon]$  con  $\varepsilon > 0$ . Tras ello se procederá a la discretización de dicho intervalo. El siguiente paso se reduce a la construcción de una función parabólica mediante un nuevo ajuste, por mínimos cuadrados, de los valores adoptados por el periodograma para dichas frecuencias del intervalo discretizado. Finalmente, la abcisa del vértice de la función parabólica será considerada como el valor aproximado de la frecuencia angular más representativa de los datos.

Uno de los aspectos de mayor importancia es aquel que hace referencia a la cantidad óptima de frecuencias angulares que sería deseable emplear en el ajuste de la serie temporal que se estudie. En general, es difícil saber de antemano el valor de  $K$ . Sin embargo, el algoritmo que proponen *Harada* y *Fukushima*, aborda y resuelve esta cuestión adoptando una política consistente en incrementar, de uno en uno, el número de frecuencias angulares, de forma sucesiva, hasta que el ajuste alcance la precisión o condiciones deseadas.

Tal como se indicó en la sección previa, cada una de las frecuencias angulares extraídas o seleccionadas  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$  está asociada a dos términos de Fourier (ecuaciones (3.18)–(3.19)). No obstante, además de estas funciones base, podría ocurrir que alguna de ellas estuviera asociada a términos seculares mixtos (ecuaciones (3.21)–(3.22)). La pregunta que se plantea ahora es es cómo detectar aquellas frecuencias angulares que deben aparecer ligadas a funciones de este tipo. Con la finalidad de responder a esta cuestión, se construye el denominado periodograma extendido (*Harada*, 2003), cuya expresión analítica viene dada por:

$$Q(\omega) = \frac{\left[ \sum_{n=1}^N d_n \tau_n \cdot \sin(\omega \tau_n) \right]^2}{\sum_{n=1}^N \tau_n^2 \sin^2(\omega \tau_n)} + \frac{\left[ \sum_{n=1}^N d_n \tau_n \cdot \cos(\omega \tau_n) \right]^2}{\sum_{n=1}^N \tau_n^2 \cos^2(\omega \tau_n)} \quad (3.49)$$

Por simplicidad, se asume que la amplitud de cualquier término de Fourier es mayor que la correspondiente al término mixto de igual frecuencia. El motivo de este supuesto se debe a que la diferencia de frecuencias  $|\omega - \omega'|$  en la ecuación (3.20), es muy pequeña en general y esto implica a su vez, que las amplitudes de los términos

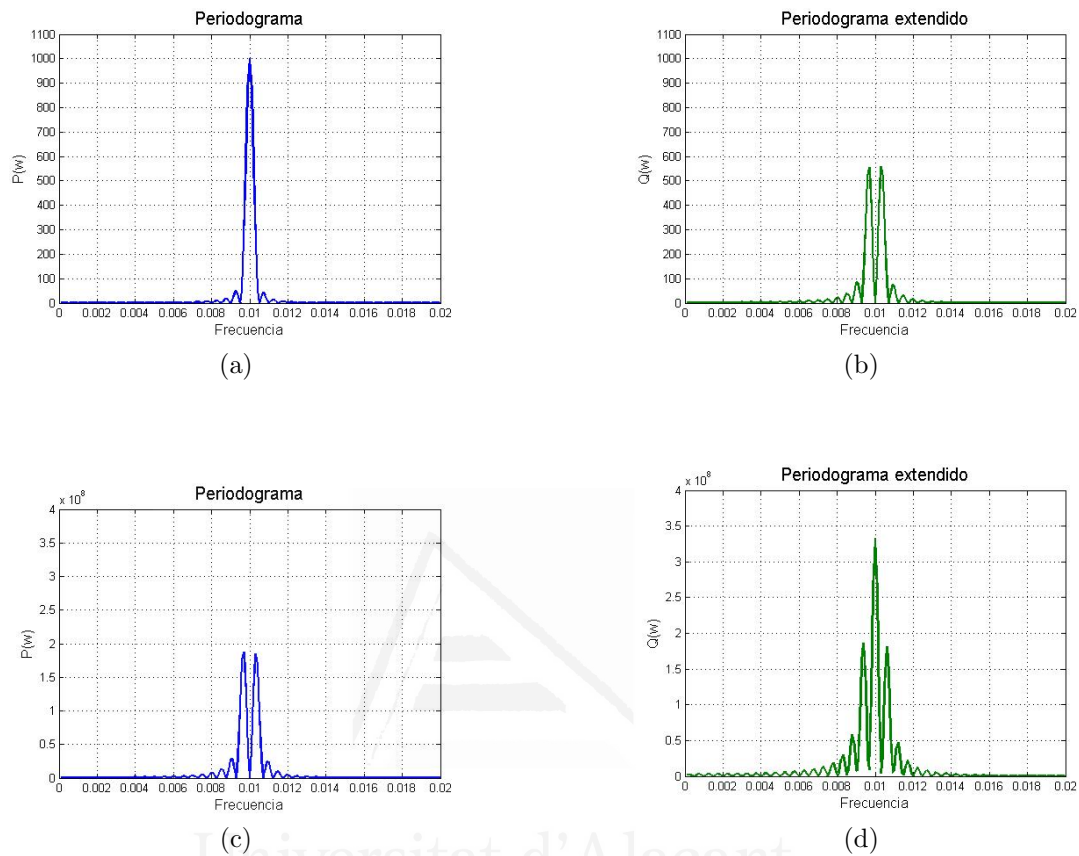


Figura 3.3: Periodograma de Lomb y periodograma extendido para una señal simple  $d = \sin(\omega_0 t)$  (arriba) y para una señal secular de la forma  $d = t \cdot \sin(\omega_0 t)$  (abajo). La frecuencia angular  $\omega_0$  es la misma para ambas señales,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 0.01$

seculares mixtos no serán elevadas en comparación con las de los términos de Fourier para la misma frecuencia angular (ver Figura 3.3). Este hecho ayudará a determinar el criterio de asignación de términos seculares mixtos a las frecuencias extraídas.

En definitiva, dada una serie temporal cualquiera, el proceso de extracción de frecuencias abarca los siguientes estadios:

1. **Estudio del periodograma de Lomb:** Se construye el espectro  $P(\omega)$  según (3.48) y se determina su máximo,  $(\omega_{max}, P(\omega_{max}))$ , para un conjunto discreto de frecuencias angulares que abarque uniformemente el dominio de frecuencias de interés.



2. **Estudio del periodograma extendido:** Para el mismo dominio de frecuencia utilizado en el paso anterior, se calcula el espectro  $Q(\omega)$  según (3.49). Asimismo seleccionaremos su máximo,  $(\tilde{\omega}_{max}, Q(\tilde{\omega}_{max}))$
3. **Determinación de la frecuencia y las funciones base asignadas:** Si la potencia del periodograma extendido resulta ser mayor que la correspondiente al periodograma de Lomb, es decir, si  $Q(\tilde{\omega}_{max}) > P(\omega_{max})$ , entonces se seleccionará  $\tilde{\omega}_{max}$  como frecuencia angular a incluir en el modelo de ajuste, la cual estará a su vez asociada a términos seculares mixtos. En caso contrario, la frecuencia  $\omega_{max}$  será la frecuencia a considerar y únicamente estará ligada a términos de Fourier.
4. **Ajuste parabólico de la frecuencia seleccionada:** Para una mejor estimación de la frecuencia, susceptible de explicar la serie temporal, se procede al ajuste parabólico del periodograma correspondiente en un entorno discreto de la frecuencia seleccionada en el paso anterior (Figura 3.4). Para ello se tiene en cuenta la evaluación del periodograma en un intervalo de frecuencias más denso que el considerado en los dos primeros pasos.
5. **Proceso de deconvolución:** A medida que se extrae una frecuencia angular y se calculan los coeficientes lineales  $\{a_l\}_{l=1, \dots, L}$ , se iniciará un proceso de deconvolución de los datos observados. Supongamos que se han extraído un total de  $k$  frecuencias, a partir de las cuales se genera un modelo que requiere de  $L_k$  funciones base y coeficientes lineales. La deconvolución de los datos, tras extraer estas  $k$  frecuencias, consiste en eliminar de la serie temporal la influencia causada por el modelo de ajuste estimado *hasta el momento*, obteniendo así dos señales que denotaremos por:

$$h^k(\tau) = \sum_{l=1}^{L_k} a_l \varphi_l(\tau) \quad (3.50)$$

$$r^k(\tau) = d(\tau) - h^k(\tau) = d(\tau) - \sum_{l=1}^{L_k} a_l \varphi_l(\tau) \quad (3.51)$$

La nueva frecuencia que se incluirá en el modelo será extraída de la señal resi-

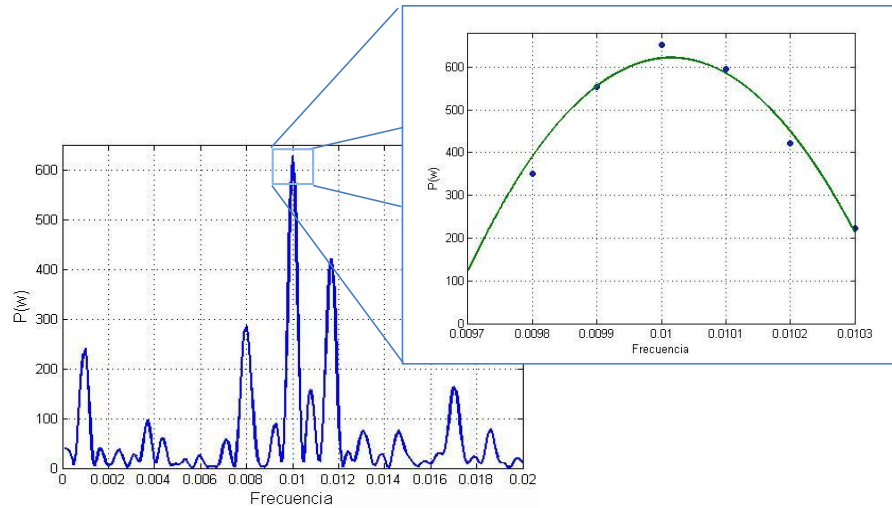


Figura 3.4: Ajuste parabólico del periodograma en un entorno del pico de frecuencia.

dual  $r^k(\tau)$  (mediante los cuatro pasos previos), de tal forma que a cada nueva iteración, el modelo  $h^k(\tau)$  se aproxima progresivamente a la serie temporal original  $\{\tau_n, d(\tau_n)\}_{n=1, \dots, N}$ .

Para una mejor captación de lo explicado en esta sección se remite a la Figura 3.5 donde se muestra un esquema del procedimiento descrito.

### 3.3. Incertidumbre

Cuando se da a conocer el resultado de la medición de una cierta magnitud física, es indispensable dar una indicación cuantitativa de la calidad del resultado, para que pueda tenerse una idea de su confiabilidad. Sin esto es imposible hacer comparaciones de dichos resultados, ya sea entre ellos mismos o con valores de referencia. Por ello debe existir un procedimiento comprensible y aceptado generalmente que lleve a una evaluación y expresión apropiada de la incertidumbre. Así pues, tanto los coeficientes lineales de nuestro modelo de ajuste como las frecuencias angulares que lo determinan deberán estar asociadas a una cantidad que nos informe de la posible variación a la que la estimación pertinente puede verse sometida. En esta sección nos limitaremos

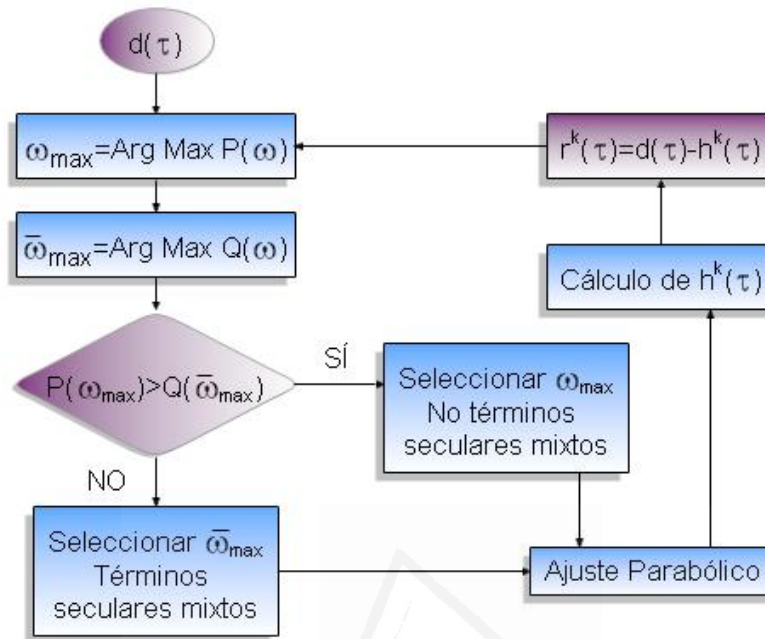


Figura 3.5: Extracción de frecuencias y asignación de funciones base. Algoritmo.

únicamente a proporcionar las herramientas y ecuaciones básicas, necesarias para el cálculo de estas incertidumbres. Cabe señalar que todas las fórmulas y expresiones matemáticas contenidas en esta sección han sido extraídas de la tesis de Harada (2003).

Si se conociera de antemano el comportamiento estadístico de la serie temporal que se estudia, es decir, la desviación estandar  $\{\sigma_n\}_{n=1,\dots,N}$  del conjunto de datos, entonces la suma de los cuadrados de los residuos podría transformarse en una chi-cuadrado de la siguiente manera:

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\left[ \sum_{l=1}^L a_l \varphi_l(\tau) \right] - d_n}{\sigma_n} \right\}^2 \quad (3.52)$$

y consecuentemente las incertidumbres para los parámetros lineales y no lineales

vendrían dadas, respectivamente, por:

$$\sigma_{a_i} = \sqrt{(A_\sigma^{-1})_{ii}} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, L \quad (3.53)$$

$$\sigma_{\omega_j} = \sqrt{(H_\sigma^{-1})_{jj}} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, K \quad (3.54)$$

donde  $A_\sigma$  y  $H_\sigma$  son las matrices hessianas de (3.52) respecto de los parámetros lineales y no lineales, en este mismo orden, es decir:

$$(A_\sigma)_{ij} = \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_i \partial a_j} \quad (3.55)$$

$$(H_\sigma)_{ij} = \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \quad (3.56)$$

No obstante, este cálculo está totalmente alejado de una posibilidad práctica pues en los casos más habituales, el comportamiento estadístico de la serie temporal será desconocido. Así pues, se opta por considerar una aproximación de la desviación estándar tras el ajuste llevado a cabo mediante mínimos cuadrados:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\phi(\tau; a, \vec{\omega})}{N - J}} \quad (3.57)$$

siendo  $J = L + K$  el número total de parámetros que intervienen en el modelo y donde  $\phi$  es la suma de los cuadrados de los errores generados por éste. De esta forma, la incertidumbre para cada parámetro se obtendrá mediante las siguientes expresiones:

$$\sigma_{a_i} = \sqrt{\frac{\phi(\tau; a, \vec{\omega}) (A^{-1})_{ii}}{N - J}} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, L \quad (3.58)$$

$$\sigma_{\omega_j} = \sqrt{\frac{\phi(\tau; a, \vec{\omega}) (D_k)_{jj}}{N - J}} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, K \quad (3.59)$$

donde  $A$  es la matriz dada en (3.25) y  $D_k$  es la aproximación de la matriz hessiana dada en (3.43), obtenida durante la ejecución del algoritmo cuasi-Newton BFGS.

### 3.4. Generalización

Hasta ahora, se ha descrito el procedimiento que será utilizado para tratar series temporales escalares pero, ¿qué ocurriría si los datos de interés constituyen una serie temporal vectorial? En la naturaleza encontramos multitud de fenómenos que pueden describirse mediante series temporales vectoriales. La posición del centro de masas terrestre, el momento angular lunar, el momento angular atmosférico, la posición y velocidad de las estaciones de GPS a lo largo del tiempo, son algunos ejemplos de series temporales vectoriales. Cada uno de ellos está determinado por la observación simultánea de varias componentes o series temporales escalares que, en los ejemplos anteriores, se corresponden con sus respectivas coordenadas espaciales. A la hora de establecer un análisis de este tipo de datos, bien podríamos limitarnos al estudio individual de cada una de las componentes que constituyen cada fenómeno multi-dimensional. Todo depende de las pretensiones de nuestro estudio. En ocasiones no nos querremos conformar con un simple análisis de las series temporales escalares, sino que desharemos conocer las posibles relaciones existentes entre las mismas. Por tanto, sería interesante poder aplicar el método de análisis armónico no lineal, descrito en este capítulo, para el caso de series temporales vectoriales. Por otro lado, cabe también la posibilidad de que las observaciones disponibles no tengan la misma trascendencia a la hora de representar el fenómeno del cual se derivan. En este caso, resultaría más adecuado establecer un análisis donde se reflejara la trascendencia de cada observación mediante la inclusión, por ejemplo, de factores de peso. Así pues, lo que se pretende en esta sección es abordar, brevemente, la adaptación de método armónico no lineal para el caso de series temporales vectoriales, así como la posibilidad de dotar de un factor de peso cada una de las observaciones recogidas.

Sea pues, la serie temporal vectorial  $\{t_n, \vec{d}_n\}_{n=1, \dots, N}$  con  $N \in \mathbb{N}$ , donde la magnitud vectorial  $\vec{d}_n \in \mathbb{R}^M$  viene dada por:

$$\vec{d}_n = (d_{nm})_{m=1, \dots, M} = (d_{n1}, d_{n2}, \dots, d_{nM})^T \quad \text{con } M \in \mathbb{N}$$

Así pues, en lo sucesivo,  $d_{nm}$  representará el valor de la  $m$ -ésima componente en el  $n$ -ésimo instante de tiempo. El modelo de ajuste para los datos observados es similar

al propuesto para el caso escalar. Éste viene dado por:

$$h_{nm} = \sum_{l=1}^L a_{lm} \cdot \varphi_l(t_n) \quad (3.60)$$

donde  $L \in \mathbb{N}$  es el número de funciones base  $\{\varphi_l\}_{l=1,\dots,L}$  (definidas en la sección 3.2.1) y  $\{a_{lm}\}$  son valores reales para  $l = 1, \dots, L$  y  $m = 1, \dots, M$ . Es importante observar cómo el conjunto de funciones base es el mismo para todas las componentes de las que consta la serie temporal vectorial. Sin embargo, los factores reales que afectan a dichas funciones  $\{\varphi_l\}_{l=1,\dots,L}$  pueden ser distintos según la componente escalar. Se trata de modelos para series temporales vectoriales con *idéntico contenido armónico* pero distinta amplitud para cada línea espectral en cada componente escalar.

Al igual que en el caso escalar, consideraremos la translación  $\{\tau_n\}_{n=1,\dots,N}$  del dominio temporal  $\{t_n\}_{n=1,\dots,N}$  según (3.17). Teniendo esto presente, y una vez conocido el modelo de ajuste, es posible determinar la función objetivo que, para el caso vectorial con pesos, adquiere la siguiente forma:

$$\phi = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mu_{nm} \left[ d_{nm} - \sum_{l=1}^L a_{lm} \cdot \varphi_l(\tau_n) \right]^2 \quad (3.61)$$

siendo  $\mu_{nm} > 0$  el peso asignado a la observación  $d_{nm}$ . Aplicando ahora el procedimiento de optimización por mínimos cuadrados obtenemos  $M$  ecuaciones normales de la forma (3.7), una para cada componente de la serie temporal vectorial:

$$A_m \vec{a}_m = \vec{b}_m \quad \text{con } m = 1, \dots, M \quad (3.62)$$

siendo  $\vec{a}_m \in \mathbb{R}^L$ ,  $A_m = \left( \{A_m\}_{ij} \right)_{i,j=1,\dots,L} \in \mathbb{M}_{L \times L}(\mathbb{R})$  y  $\vec{b}_m = (b_{im})_{i=1,\dots,L} \in \mathbb{R}^L$  tales que:

$$\vec{a}_m = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{Lm})^T \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, M \quad (3.63)$$

$$\{A_m\}_{ij} = \sum_{n=1}^N \mu_{nm} \cdot \varphi_i(\tau_n) \cdot \varphi_j(\tau_n) \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, M \quad (3.64)$$

$$b_{im} = \sum_{n=1}^N \mu_{nm} \cdot d_n \cdot \varphi_i(\tau_n) \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, M \quad (3.65)$$

Recordemos que tras resolver el problema de mínimos cuadrados, se procedía a la aplicación de un proceso de optimización no lineal en el espacio de frecuencias mediante la utilización del método cuasi-Newton BFGS. En este sentido, no es necesaria ninguna ampliación, por lo que se procederá de la misma forma que se indicó para el caso escalar. Asimismo, el conjunto de funciones base que constituye el modelo de ajuste está formado también por el mismo tipo de funciones que el descrito en la sección 3.2.1. No obstante, y a pesar de ello, el proceso de extracción de frecuencias no es exactamente idéntico. En este caso, resulta indispensable la definición de nuevos periodogramas. Estos deben ayudar a determinar las frecuencias angulares significativas capaces de explicar simultáneamente el comportamiento de las coordenadas escalares de la serie temporal vectorial. La expresión del periodograma (3.48) puede extenderse fácilmente para el caso vectorial con pesos, adquiriendo la siguiente forma (ver Harada, 2003):

$$P(\omega) = \sum_{m=1}^M \left[ \frac{X_m V_m^2 + Y_m U_m^2 - 2Z_m U_m V_m}{X_m Y_m - Z_m^2} \right] \quad (3.66)$$

donde

$$X_m = \sum_{n=1}^N \mu_{nm} \cdot \sin^2(\omega\tau_n) \quad (3.67)$$

$$Y_m = \sum_{n=1}^N \mu_{nm} \cdot \cos^2(\omega\tau_n) \quad (3.68)$$

$$Z_m = \sum_{n=1}^N \mu_{nm} \cdot \sin(\omega\tau_n) \cdot \cos(\omega\tau_n) \quad (3.69)$$

$$U_m = \sum_{n=1}^N \mu_{nm} \cdot r_{nm} \cdot \sin(\omega\tau_n) \quad (3.70)$$

$$V_m = \sum_{n=1}^N \mu_{nm} \cdot r_{nm} \cdot \cos(\omega\tau_n) \quad (3.71)$$

siendo  $r_{nm}$  la  $m$ -ésima componente de la señal residual en el instante  $\tau_n$ , es decir:

$$r_{nm} = d_{nm} - h_{nm} = d_{nm} - \left[ \sum_{l=1}^L a_{lm} \cdot \varphi_l(\tau_n) \right] \quad (3.72)$$

De forma similar, la expresión que generaliza el concepto de periodograma extendido (3.49) viene dada por (ver Harada, 2003):

$$Q(\omega) = \sum_{m=1}^M \left[ \frac{\bar{X}_m \bar{V}_m^2 + \bar{Y}_m \bar{U}_m^2 - 2\bar{Z}_m \bar{U}_m \bar{V}_m}{\bar{X}_m \bar{Y}_m - \bar{Z}_m^2} \right] \quad (3.73)$$

que como vemos, es idéntica a la del periodograma recogido en (3.66) con la salvedad de que, en este caso:

$$\bar{X}_m = \sum_{n=1}^N \mu_{nm} \cdot \tau_n^2 \cdot \sin^2(\omega\tau_n) \quad (3.74)$$

$$\bar{Y}_m = \sum_{n=1}^N \mu_{nm} \cdot \tau_n^2 \cdot \cos^2(\omega\tau_n) \quad (3.75)$$

$$\bar{Z}_m = \sum_{n=1}^N \mu_{nm} \cdot \tau_n^2 \cdot \sin(\omega\tau_n) \cdot \cos(\omega\tau_n) \quad (3.76)$$

$$\bar{U}_m = \sum_{n=1}^N \mu_{nm} \cdot \tau_n \cdot r_{nm} \cdot \sin(\omega\tau_n) \quad (3.77)$$

$$\bar{V}_m = \sum_{n=1}^N \mu_{nm} \cdot \tau_n \cdot r_{nm} \cdot \cos(\omega\tau_n) \quad (3.78)$$

Finalmente, señalaremos que en el caso de que el análisis armónico no lineal asocie pesos a las observaciones, el uso del RMS en el algoritmo descrito será sustituido por el *error cuadrático medio ponderado* (WRMS) cuya expresión viene dada por:

$$WRMS = \sqrt{\frac{\phi}{\Upsilon}} \quad (3.79)$$

siendo  $\phi$  el valor de la función objetivo que aparece en la expresión (3.61) y  $\Upsilon$  la



suma total de los pesos asignados a cada observación:

$$\Upsilon = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mu_{nm} \quad (3.80)$$

donde  $N$  es el número de observaciones y  $M$  es el número de magnitudes observables.

### 3.5. Tratamiento de los términos periódicos de corta frecuencia

El método armónico no lineal descrito en este capítulo no es el más adecuado para analizar datos que contienen términos de Fourier de corta frecuencia, entendiéndose por ello, aquellas frecuencias asociadas a periodos mucho más grandes que el rango temporal abarcado por la serie. Esto se debe a que el efecto de dichos armónicos puede ser absorbido por la componente de tendencia. Así pues, la estimación de los coeficientes polinomiales podrían diferir de los valores reales. Por tanto, hemos de tener presente que para series temporales de largo periodo cuyo rango temporal es inferior a dicho valor, la componente de tendencia puede contener información no sólo del comportamiento de la serie a largo plazo sino también sobre el comportamiento periódico para muy cortas frecuencias. Si dispusiéramos, con antelación, de información sobre los términos de largo periodo, sería adecuada la estimación de su efecto sobre los coeficientes polinomiales expandiendo dichos términos como series de Taylor. Es decir, supongamos que disponemos de una serie temporal escalar  $\{t_n, d_n\}_{n=1, \dots, N}$ , la cual se ha analizado mediante el método armónico no lineal descrito. Como resultado se ha obtenido una componente de tendencia dada por la expresión:

$$p(t_n) = a_1 + a_2 \cdot t_n + a_3 \cdot t_n^2 \quad \text{con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \quad (3.81)$$

Se conoce, por estudios realizados previamente, que el fenómeno representado por la serie temporal posee un comportamiento periódico de muy baja frecuencia. Esto nos lleva a pensar que quizá la estimación de los coeficientes de tendencia no sea demasiado buena. Sin embargo, es imposible detectar el armónico en cuestión debido a la insuficiencia de datos. Supongamos que dicho comportamiento periódico ha sido

estimado mediante otra técnica y que éste puede explicarse a través de la combinación lineal de términos de Fourier siguiente:

$$g(t_n) = A \cdot \sin(\omega t_n) + B \cdot \cos(\omega t_n) \quad (3.82)$$

Si disponemos de dicha información, podemos realizar una corrección sobre la componente de tendencia estimada mediante el método de análisis armónico no lineal. Para ello disponemos de varias opciones. Una de ellas consiste en expandir los términos de Fourier como polinomios de Taylor:

$$\begin{aligned} g(t_n) &= A \cdot \sin(\omega t_n) + B \cdot \cos(\omega t_n) = A \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q+1)!} (\omega t_n)^{2q+1} + \\ &= + B \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q)!} (\omega t_n)^{2q} \approx B + (A \cdot \omega) t_n - \left(\frac{B}{2} \omega^2\right) t_n^2 \end{aligned} \quad (3.83)$$

Obteniendo así una aproximación del efecto producido sobre la tendencia a consecuencia de los términos (3.82). Otra posibilidad consiste en realizar un ajuste parabólico de los términos de largo periodo en el dominio temporal de la serie en cuestión. La función obtenida como resultado sería en este caso la aproximación del efecto. En caso de que el armónico de corta frecuencia esté asociado a términos seculares mixtos de cualquier orden, el procedimiento sería el mismo. De esta forma, se obtendrían estimaciones más fidedignas de los coeficientes lineales de la tendencia obtenida mediante el método armónico no lineal propuesto.



---

# Capítulo 4

## Variaciones del polo celeste

En los siguientes capítulos (del 4 al 7) nos centraremos en el análisis de algunas series temporales mediante el uso del método armónico no lineal descrito en el capítulo anterior. Las variaciones en longitud y oblicuidad terrestre según el modelo de precesión-nutación IAU1980 serán las primeras series que analizaremos en este capítulo que ahora nos ocupa. Dichas series serán tratadas como una observación vectorial debido a la evidente conexión existente entre ambas magnitudes. Tras ello, realizaremos un estudio similar para las variaciones sufridas en las coordenadas del vector de posición del polo celeste según un modelo más actual de precesión-nutación, IAU2000. Finalmente, se llevará a cabo un breve estudio sobre la capacidad predictiva de ciertos modelos armónicos no lineales para las variaciones en longitud y oblicuidad terrestre (IAU1980). En cada caso, se discutirá el contenido armónico resultante intentando dilucidar la procedencia de cada línea espectral.

### 4.1. Modelo de precesión-nutación IAU1980

#### 4.1.1. Introducción

Según la astrometría moderna, nuestro planeta es una plataforma oscilante e inestable desde la cual podemos observar el cielo. En efecto, la Tierra es un sistema dinámico en constante movimiento. La masa atribuible a nuestro planeta transita de un lugar a otro adoptando diversos estados y ocupando distintos lugares como

consecuencia de multitud de fenómenos entre los cuales podemos señalar: las mareas, los seísmos, las erupciones volcánicas, el movimiento atmosférico, el flujo de agua continental, la erosión, el movimiento del núcleo y la corteza terrestre, etc. Todo ello afecta, como es lógico, al movimiento del sistema, en particular a la rotación del planeta. Debido a estos y otros factores, la tasa de rotación terrestre no es uniforme, el eje de rotación no permanece fijo en el espacio y además, su forma y posición relativa en la superficie terrestre tampoco es inmutable. Desde antaño, el ser humano ha estudiado el movimiento rotatorio de la Tierra, realizando día a día nuevas y constantes incursiones hasta llegar al modelo de rotación que conocemos en la actualidad.

Por razones prácticas, además de históricas, la variabilidad temporal de la dirección de los ejes de rotación terrestre se divide en cuatro componentes: precesión, nutación, movimiento del polo (Figura 4.1) y las variaciones de éste con respecto a los modelos teóricos establecidos. Por definición, la precesión y nutación se encuentran matemáticamente determinadas a través de una serie de ecuaciones que explican su comportamiento. Sin embargo, no ocurre así con las otras componentes restantes.

Como sabemos, ni el plano de la órbita terrestre (conocido como eclíptica) ni el plano ecuatorial terrestre son elementos fijos o estables. Al contrario, estos se encuentran sometidos a perturbaciones que dificultan el modelado de su comportamiento. El fenómeno de la precesión y la nutación consiste en el movimiento periódico que poseen los ejes ligados a la Tierra alrededor del eje perpendicular al plano de la eclíptica (Navarro, 2001). El movimiento dominante se corresponde con el *movimiento de precesión* del eje polar terrestre alrededor del polo eclíptico y es debido principalmente a las fuerzas atractivas ejercidas sobre la Tierra por parte del Sol y la Luna. El eje de rotación terrestre describe un ángulo medio de aproximadamente 23.5 grados en unos 26000 años. Ahora bien, los momentos originados sobre la Tierra por los diferentes cuerpos celestes presentan distintas direcciones y varían a medida que los cuerpos se mueven los unos con respecto a los otros. Esto hace que el momento total no sea constante en el tiempo y genere irregularidades en el movimiento de precesión. Estas irregularidades se conocen como *nutaciones* (Navarro, 2001). La nutación es perceptible en escalas de tiempo no superiores a 300 años y podría considerarse como una corrección de primer orden para el movimiento de precesión. Los cuatro

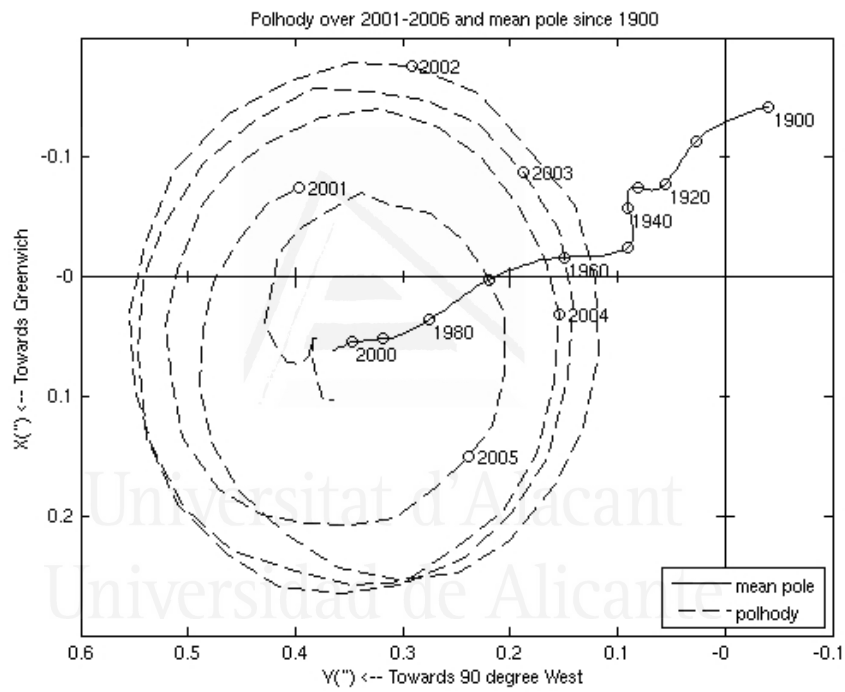


Figura 4.1: Movimiento del polo desde 2001 hasta 2006. Imagen extraída del sitio web del IERS.

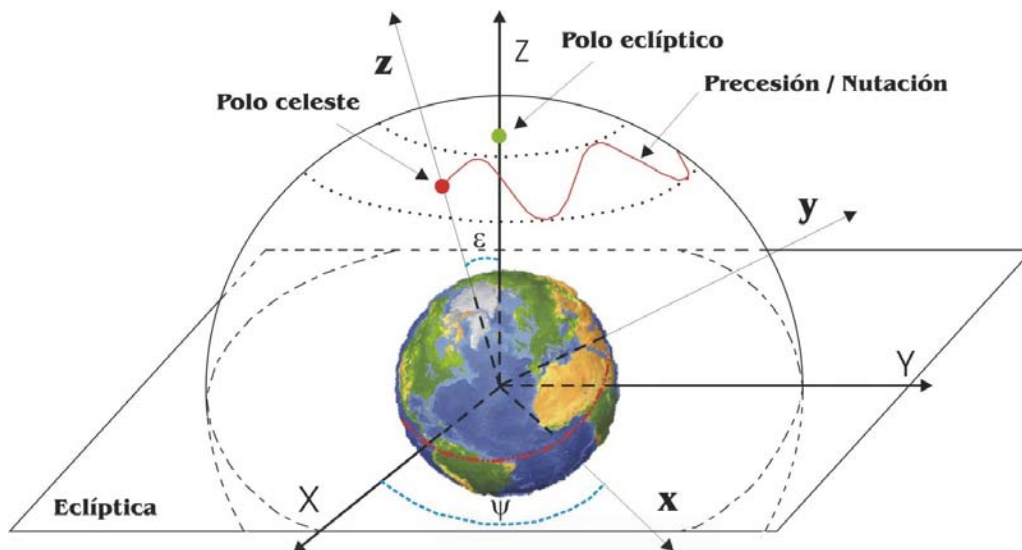


Figura 4.2: Esquema gráfico sobre el movimiento de precesión-nutación del polo celeste.

periodos dominantes de la nutación terrestre son de 18.6 años (periodo de precesión de la órbita lunar), 182.6 días (periodo semianual), 13.7 días (periodo semimensual) y 9.3 años (que se corresponde con el periodo de rotación del perigeo lunar).

A partir de los *modelos de precesión-nutación* se conciben las variaciones del polo celeste como aquellas variaciones en longitud y oblicuidad respecto de su posición definida a través del modelo teórico. En el caso que nos ocupa, los modelos a considerar son los propuestos por la *Unión Internacional Astronómica* (IAU). Las variaciones observadas reflejan la diferencia del movimiento real del polo celeste con el predicho por los modelos de precesión-nutación establecidos en las convenciones de la IAU.

#### 4.1.2. Descripción de los datos

Los *Parámetros de Orientación Terrestre* (EOP) describen las irregularidades de la rotación terrestre con respecto a un marco de referencia no rotacional (Bizouard and Gambis). Aunque en principio, la orientación terrestre puede describirse a través de tres ángulos independientes (ángulos de Euler), se recurre a la evaluación de cinco parámetros para determinar el movimiento del eje de rotación en la Tierra y en el espacio. Dos de estos parámetros ( $\delta\psi$ ,  $\delta\epsilon$ ) corrigen el modelo de precesión-nutación

del polo celeste, un parámetro ( $UT1 - UTC$ ) proporciona las irregularidades en el ángulo de rotación, y los dos últimos ( $X, Y$ ) describen el movimiento polar respecto a la corteza terrestre (Bizouard and Gambis). Todos ellos en conjunto ofrecen una completa transformación entre el *Marco Internacional de Referencia Terrestre* (ITRF) y el *Marco Internacional de Referencia Celeste* (ICRF).

El *Centro de Orientación Terrestre* (EOC) del *Servicio Internacional de Rotación Terrestre y Sistemas de Referencia* (IERS) se encarga de crear y publicar dos veces por semana los valores actualizados de los parámetros de orientación terrestre a través del sitio web, <http://www.iers.org/>. Estas actualizaciones se llevan a cabo cada martes y jueves, y recogen los valores de seis magnitudes junto con sus respectivas incertidumbres. Existen varios conjuntos de datos dependiendo del modelo de precesión-nutación que deseemos utilizar. En este caso, se ha considerado la solución *EOP C04 05* que proporciona las estimaciones de los parámetros de orientación terrestre según el modelo de precesión-nutación IAU1980 y que además es consistente con el ITRF2005. Estas series temporales son computadas por el EOC, ubicado en el Observatorio de París, a través de la combinación de series operacionales obtenidas mediante el uso de diversas técnicas astro-geodéticas: LLR (*Lunar Laser Ranging*), SLR (*Satellite Laser Ranging*), VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*) y más recientemente GPS y DORIS (*Dopler Orbitography and Radio-positioning Integrated by Satellites*). Como resultado de la combinación, se obtienen series temporales dadas en intervalos regulares diarios para cada uno de estos parámetros. Para más información sobre el proceso de combinación de la solución C04 se remite al informe de *Bizouard y Gambis*.

El fichero de datos<sup>1</sup> utilizado, “*EOP C04.05 series for 1962-2010 (IAU1980)*”, contiene los valores combinados diarios para los parámetros de orientación terrestre desde el 1 de enero de 1962 hasta hoy. Las series temporales que estudiaremos en esta sección, serán aquellas que hacen referencia a las variaciones en longitud y oblicuidad del polo celeste, es decir ( $\delta\psi, \delta\epsilon$ ), las cuales vienen recogidas en segundos.

---

<sup>1</sup>Ubicado en <http://www.iers.org> (Sección *Earth Orientation data*)



### 4.1.3. Características del análisis y resultados

Con la finalidad de estudiar su comportamiento periódico y poner a prueba el método armónico no lineal descrito en el capítulo 3, se someterá a análisis la serie vectorial definida por los desplazamientos en longitud y oblicuidad del polo celeste. Debido a problemas de capacidad computacional, no es posible abarcar el estudio de un periodo de tiempo tan extenso como el contenido en el fichero de datos descargado. En consecuencia, el dominio temporal analizado comprenderá un periodo de 25 años, desde el 23 de septiembre de 1985 hasta el 23 de septiembre de 2010, a través de un total de  $N = 9132$  tiempos de observación. Asimismo, se asignará a toda medición un peso que caracterice la fiabilidad de la misma. Para ello, recurriremos al uso de las incertidumbres, que también aparecen detalladas en el fichero de datos mencionado. A cada observación  $d_{nm}$  se le asociará un peso,  $\mu_{nm}$ , equivalente a la inversa del cuadrado de su incertidumbre,  $\sigma_{nm}$  ( $\mu_{nm} = 1/\sigma_{nm}^2$ ) donde  $n = 1, \dots, N$  y  $m = 1, 2$ .

Para el análisis armónico no lineal se procede a la extracción de hasta un máximo de 20 frecuencias fundamentales considerando una cota para el WRMS de 0.1 mili-arcosegundos ( $mas = 0.001''$ ). Dado que la serie temporal vectorial es homogénea, se ha considerado el dominio de frecuencias comprendido entre 0.0001 y 0.5 ciclos por día. Este intervalo se ha discretizado utilizando un tamaño de paso de 0.0001 ciclos por día. En cada una de las frecuencias de dicha discretización es donde se ha evaluado el periodograma de Lomb y el periodograma extendido. El error asumido para el módulo de la diferencia entre dos soluciones consecutivas durante el proceso de optimización no lineal se ha fijado en 0.0001 unidades. Por otra parte, se ha procedido al modelado de una componente de tendencia de grado uno. Inicialmente, la tendencia fue considerada cuadrática pero la absorción de frecuencias de largo periodo por parte de ésta obligó a considerar un modelo de tendencia lineal.

Una vez realizado el análisis mediante los programas creados para ello y que están incluidos en el paquete WNLH<sup>2</sup>, se obtienen los siguientes resultados. Por lo que respecta a la componente de tendencia, ésta viene dada por las ecuaciones:

$$T_{\delta\psi}(\tau_n) = (-46.3174 \pm 0.0066) + (-14.7026 \pm 0.0120) \cdot \varphi_2(\tau_n) \quad (4.1)$$

$$T_{\delta\epsilon}(\tau_n) = (-5.4833 \pm 0.0035) + (-1.1254 \pm 0.0063) \cdot \varphi_2(\tau_n) \quad (4.2)$$

---

<sup>2</sup>Ver descripción en el capítulo 11.

donde  $\tau_n = t_n - t_c$  es una traslación temporal centrada en el día juliano modificado  $t_c = 50896.5$  *MJD* que se corresponde, en este caso, con el 24 de marzo de 1998 y donde  $\varphi_2(\tau_n)$  es la función base definida en (3.15). La estimación para los coeficientes de tendencia y sus incertidumbres está expresada en *mas*.

El contenido armónico para ambas magnitudes aparece detallado en las Tablas 4.1–4.4. En ellas se muestran las frecuencias fundamentales dispuestas en el mismo orden en que fueron extraídas de los datos y añadidas al modelo. Aparecen también los valores estimados para los coeficientes (en *mas*) asociados tanto a términos de Fourier como a términos seculares mixtos. Además, se proporciona la incertidumbre correspondiente a cada uno de los parámetros estimados. Para poder comparar de forma visual las diferencias existentes entre las series temporales originales y el modelo estimado, se ha procedido a la representación gráfica de los datos analizados (Figura 4.3) y las aproximaciones (Figura 4.4), así como de los residuales generados por éstas (Figura 4.5). Finalmente, podemos conocer el porcentaje de varianza explicada por cada frecuencia a través de las gráficas contenidas en la Figura 4.6, donde aparece representada la reducción del estadístico WRMS a medida que se añaden nuevos parámetros al modelo de ajuste.

Como aliciente, la Tabla 4.5 refleja el valor de la *amplitud*,  $A$ , y *fase*,  $\theta$ , de cada señal para los desplazamientos en longitud y oblicuidad del polo celeste, siguiendo el modelo definido por:

$$S \cdot \sin(\omega\tau_n) + C \cdot \cos(\omega\tau_n) = A \cdot \cos[\omega(\tau_n - \theta)] \quad (4.3)$$

donde  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  es la frecuencia angular correspondiente a la frecuencia fundamental  $f$ . La relación que guardan la amplitud y fase con respecto a los coeficientes de Fourier puede obtenerse por comparación de términos:

$$A = \sqrt{S^2 + C^2} \quad (4.4)$$

$$\theta = \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{S}{C}\right) \quad (4.5)$$

De esta manera, será posible observar fácilmente el efecto que cada señal ejerce sobre la serie temporal pertinente, así como el momento en el que dicho efecto se hace máximo.

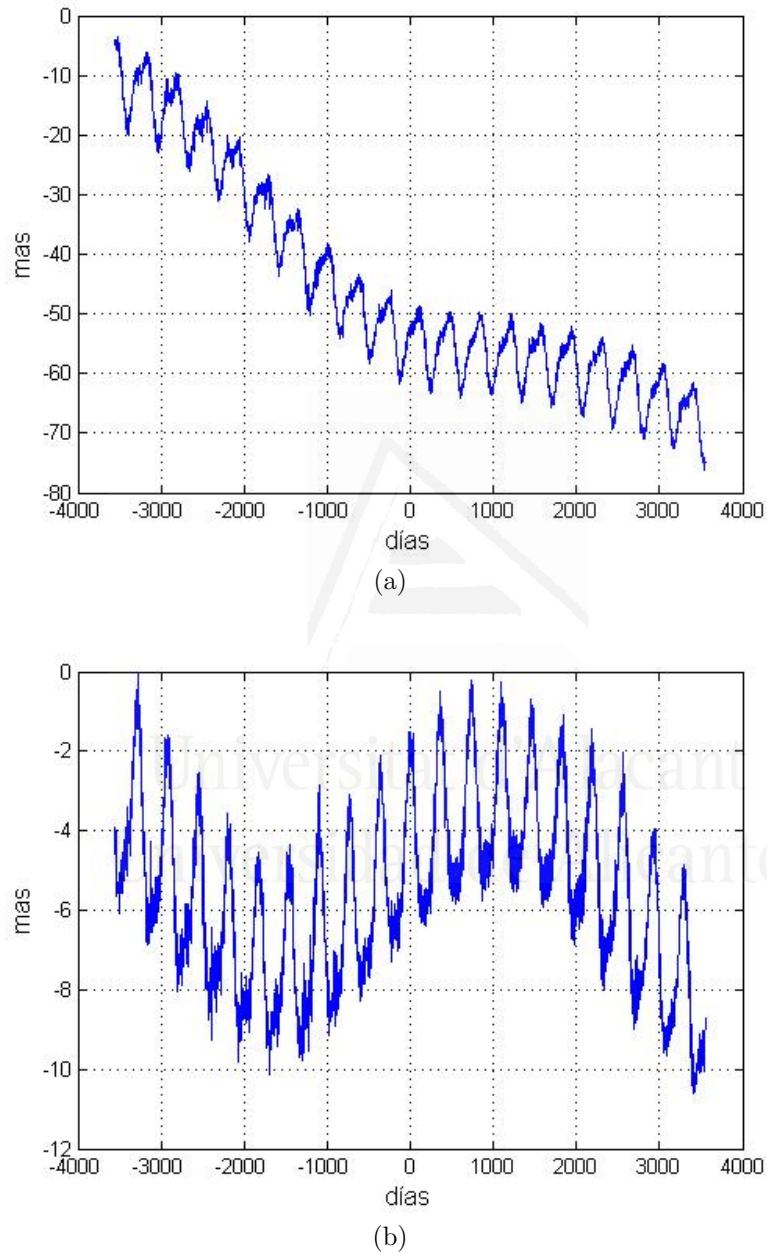
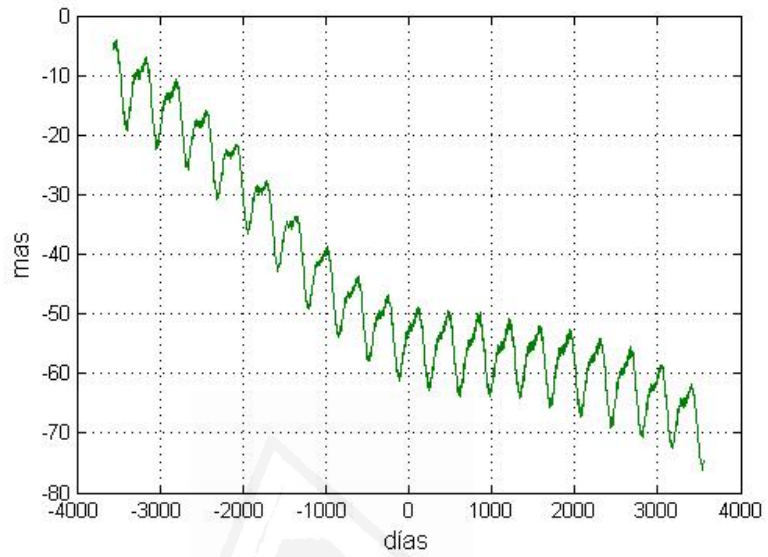
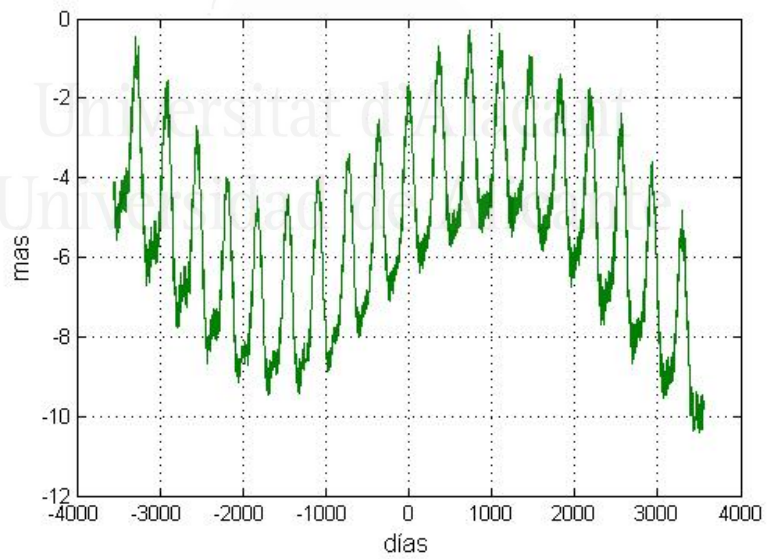


Figura 4.3: Serie temporal para las variaciones en la posición del polo celeste: (a) Desplazamientos en longitud ( $\delta\psi$ ) y (b) en oblicuidad ( $\delta\epsilon$ ) de la eclíptica.



(a)



(b)

Figura 4.4: Modelos armónicos no lineales estimados para (a) el desplazamiento en longitud y (b) en oblicuidad de la eclíptica.

Tabla 4.1: Términos de Fourier. Descomposición armónica para  $\delta\psi$  según el modelo de precesión-nutación IAU1980. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por día), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por día), periodo (días) y coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | <i>f</i>  | $\sigma_f$            | $\Pi$        | <i>S</i>        | <i>C</i>        |
|------------|-----------|-----------------------|--------------|-----------------|-----------------|
| 1          | 0.0027373 | $0.02 \times 10^{-5}$ | 365.32±0.03  | 5.1180± 0.0085  | 1.0735± 0.0085  |
| 2          | 0.0001527 | $0.00 \times 10^{-5}$ | 6549.53±1.02 | 1.7887± 0.0153  | -7.5607± 0.0100 |
| 3          | 0.0054796 | $0.05 \times 10^{-5}$ | 182.49±0.02  | -1.9954± 0.0089 | 0.6131± 0.0089  |
| 4          | 0.0732023 | $0.26 \times 10^{-5}$ | 13.66±0.00   | -0.2388± 0.0083 | 0.3441± 0.0083  |
| 5          | 0.0003052 | $0.04 \times 10^{-5}$ | 3276.08±4.44 | 0.8779± 0.0108  | -0.3685± 0.0087 |
| 6          | 0.0023063 | $0.73 \times 10^{-5}$ | 433.60±1.37  | 0.0001± 0.0093  | 0.0983± 0.0091  |
| 7          | 0.0733783 | $0.67 \times 10^{-5}$ | 13.63±0.00   | 0.1132± 0.0083  | 0.1119± 0.0083  |
| 8          | 0.0314244 | $0.65 \times 10^{-5}$ | 31.82±0.01   | -0.0985± 0.0078 | 0.1457± 0.0077  |
| 9          | 0.0363659 | $0.84 \times 10^{-5}$ | 27.50±0.01   | 0.0160± 0.0087  | 0.1174± 0.0088  |
| 10         | 0.0056198 | $0.73 \times 10^{-5}$ | 177.94±0.23  | 0.0018± 0.0087  | -0.1105± 0.0091 |
| 11         | 0.0370606 | $0.33 \times 10^{-5}$ | 26.98±0.00   | -0.0472± 0.0084 | 0.0356± 0.0083  |
| 12         | 0.1046623 | $1.02 \times 10^{-5}$ | 9.55±0.00    | 0.0783± 0.0077  | 0.0656± 0.0077  |
| 13         | 0.1095657 | $0.85 \times 10^{-5}$ | 9.13±0.00    | 0.0464± 0.0085  | -0.0205± 0.0086 |
| 14         | 0.0445234 | $3.04 \times 10^{-5}$ | 22.46±0.02   | 0.0487± 0.0078  | -0.0104± 0.0077 |
| 15         | 0.0677718 | $1.89 \times 10^{-5}$ | 14.76±0.00   | 0.0186± 0.0078  | -0.0067± 0.0077 |
| 16         | 0.0020734 | $2.10 \times 10^{-5}$ | 482.29±4.87  | -0.1055± 0.0087 | 0.1241± 0.0092  |
| 17         | 0.0053084 | $0.65 \times 10^{-5}$ | 188.38±0.23  | 0.0510± 0.0087  | -0.1439± 0.0086 |
| 18         | 0.0016820 | $0.52 \times 10^{-5}$ | 594.55±1.82  | 0.0694± 0.0091  | -0.1379± 0.0086 |
| 19         | 0.0049120 | $8.95 \times 10^{-5}$ | 203.58±3.71  | 0.0226± 0.0085  | 0.0471± 0.0085  |
| 20         | 0.1360918 | $2.31 \times 10^{-5}$ | 7.35±0.00    | -0.0122± 0.0077 | -0.0471± 0.0077 |

Tabla 4.2: Igual que la Tabla 4.1 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (días) y coeficientes (en microarcosegundos,  $\mu\text{as}$ ) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | $\Pi$       | <i>SS</i>                       | <i>CC</i>                        |
|------------|-------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 6          | 433.60±1.37 | $0.1454 \pm 5.1 \times 10^{-3}$ | $0.0733 \pm 5.0 \times 10^{-3}$  |
| 9          | 27.50±0.01  | $0.0513 \pm 4.9 \times 10^{-3}$ | $0.0200 \pm 4.9 \times 10^{-3}$  |
| 13         | 9.13±0.00   | $0.0220 \pm 4.9 \times 10^{-3}$ | $-0.0147 \pm 4.8 \times 10^{-3}$ |

Tabla 4.3: Términos de Fourier. Descomposición armónica para  $\delta\epsilon$  según el modelo de precesión-nutación IAU1980. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por día), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por día), periodo (días) y coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | <i>f</i>  | $\sigma_f$            | $\Pi$              | <i>S</i>             | <i>C</i>             |
|------------|-----------|-----------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| 1          | 0.0027373 | $0.02 \times 10^{-5}$ | $365.32 \pm 0.03$  | $-0.1556 \pm 0.0046$ | $2.0634 \pm 0.0046$  |
| 2          | 0.0001527 | $0.00 \times 10^{-5}$ | $6549.53 \pm 1.02$ | $2.8519 \pm 0.0086$  | $0.6719 \pm 0.0049$  |
| 3          | 0.0054796 | $0.05 \times 10^{-5}$ | $182.49 \pm 0.02$  | $0.1830 \pm 0.0049$  | $0.6792 \pm 0.0049$  |
| 4          | 0.0732023 | $0.26 \times 10^{-5}$ | $13.66 \pm 0.00$   | $0.1988 \pm 0.0045$  | $0.0850 \pm 0.0046$  |
| 5          | 0.0003052 | $0.04 \times 10^{-5}$ | $3276.08 \pm 4.44$ | $0.0851 \pm 0.0055$  | $0.2113 \pm 0.0047$  |
| 6          | 0.0023063 | $0.73 \times 10^{-5}$ | $433.60 \pm 1.37$  | $-0.0487 \pm 0.0046$ | $0.0619 \pm 0.0045$  |
| 7          | 0.0733783 | $0.67 \times 10^{-5}$ | $13.63 \pm 0.00$   | $0.0121 \pm 0.0046$  | $-0.0883 \pm 0.0045$ |
| 8          | 0.0314244 | $0.65 \times 10^{-5}$ | $31.82 \pm 0.01$   | $-0.0235 \pm 0.0045$ | $-0.0261 \pm 0.0045$ |
| 9          | 0.0363659 | $0.84 \times 10^{-5}$ | $27.50 \pm 0.01$   | $0.0094 \pm 0.0045$  | $-0.0132 \pm 0.0045$ |
| 10         | 0.0056198 | $0.73 \times 10^{-5}$ | $177.94 \pm 0.23$  | $-0.1213 \pm 0.0047$ | $-0.0244 \pm 0.0049$ |
| 11         | 0.0370606 | $0.33 \times 10^{-5}$ | $26.98 \pm 0.00$   | $0.0341 \pm 0.0046$  | $-0.0786 \pm 0.0044$ |
| 12         | 0.1046623 | $1.02 \times 10^{-5}$ | $9.55 \pm 0.00$    | $-0.0409 \pm 0.0045$ | $-0.0127 \pm 0.0045$ |
| 13         | 0.1095657 | $0.85 \times 10^{-5}$ | $9.13 \pm 0.00$    | $0.0112 \pm 0.0045$  | $0.0031 \pm 0.0045$  |
| 14         | 0.0445234 | $3.04 \times 10^{-5}$ | $22.46 \pm 0.02$   | $-0.0559 \pm 0.0045$ | $0.0099 \pm 0.0045$  |
| 15         | 0.0677718 | $1.89 \times 10^{-5}$ | $14.76 \pm 0.00$   | $-0.0192 \pm 0.0045$ | $-0.0652 \pm 0.0045$ |
| 16         | 0.0020734 | $2.10 \times 10^{-5}$ | $482.29 \pm 4.87$  | $-0.0393 \pm 0.0045$ | $-0.0262 \pm 0.0046$ |
| 17         | 0.0053084 | $0.65 \times 10^{-5}$ | $188.38 \pm 0.23$  | $-0.0107 \pm 0.0047$ | $-0.0062 \pm 0.0046$ |
| 18         | 0.0016820 | $0.52 \times 10^{-5}$ | $594.55 \pm 1.82$  | $-0.0001 \pm 0.0046$ | $-0.0139 \pm 0.0045$ |
| 19         | 0.0049120 | $8.95 \times 10^{-5}$ | $203.58 \pm 3.71$  | $-0.0334 \pm 0.0046$ | $-0.0491 \pm 0.0045$ |
| 20         | 0.1360918 | $2.31 \times 10^{-5}$ | $7.35 \pm 0.00$    | $-0.0225 \pm 0.0045$ | $0.0504 \pm 0.0045$  |

Tabla 4.4: Igual que la Tabla 4.3 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (días) y coeficientes ( $\mu\text{as}$ ) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | $\Pi$             | <i>SS</i>                        | <i>CC</i>                       |
|------------|-------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 6          | $433.60 \pm 1.37$ | $-0.0653 \pm 2.9 \times 10^{-3}$ | $0.0428 \pm 2.9 \times 10^{-3}$ |
| 9          | $27.50 \pm 0.01$  | $-0.0448 \pm 2.8 \times 10^{-3}$ | $0.0240 \pm 2.8 \times 10^{-3}$ |
| 13         | $9.13 \pm 0.00$   | $-0.0245 \pm 2.8 \times 10^{-3}$ | $0.0349 \pm 2.8 \times 10^{-3}$ |

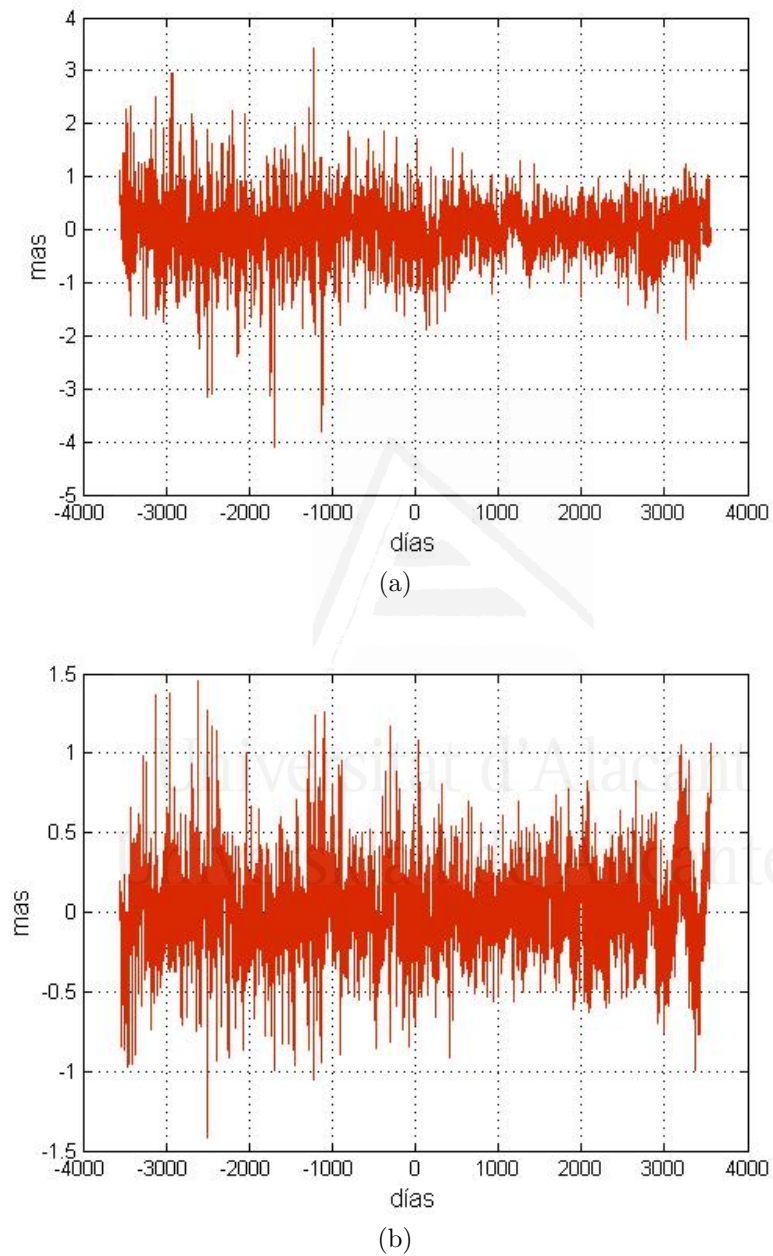
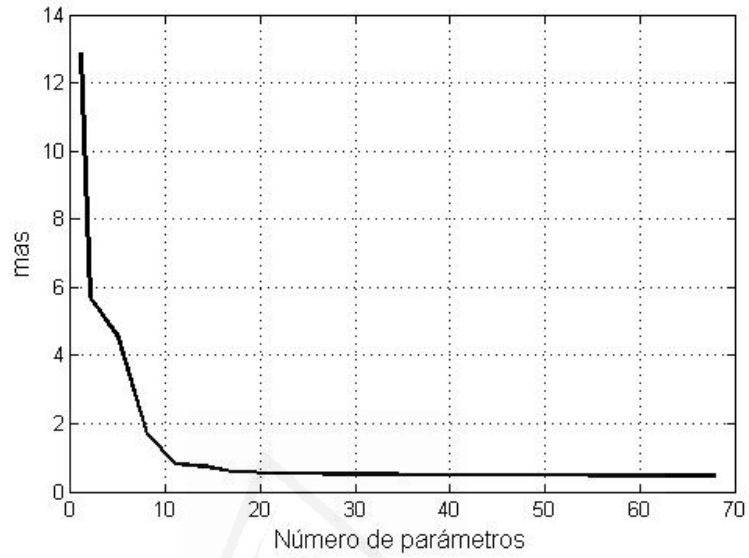
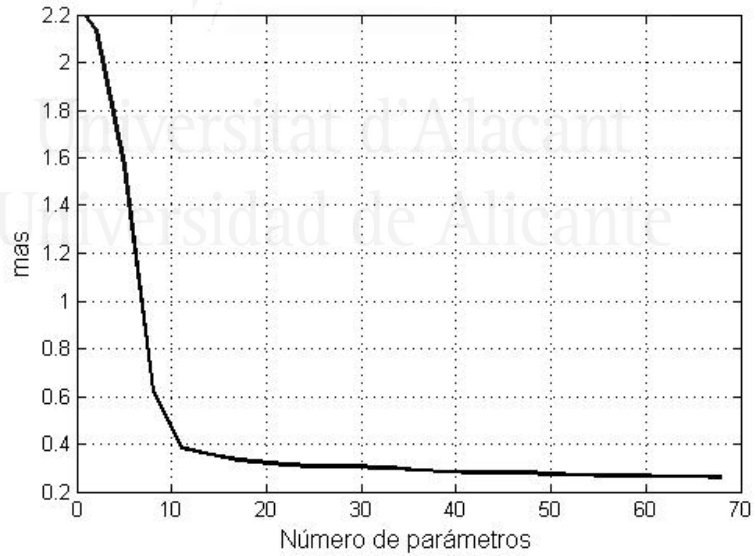


Figura 4.5: Residuales generados por el modelo armónico no lineal estimado correspondientes al desplazamiento (a) en longitud y (b) en oblicuidad.



(a)



(b)

Figura 4.6: Valor del WRMS en función del número de parámetros que se añaden al modelo durante el proceso de ajuste: (a) desplazamientos en longitud y (b) en oblicuidad.



Tabla 4.5: Amplitud y fase de las frecuencias asociadas al modelo armónico para los desplazamientos en longitud y oblicuidad de la eclíptica según la ecuación (4.3). Las columnas hacen referencia al orden de extracción de la frecuencia, periodo (días), amplitud (mas) y fase (en grados) para  $\delta\psi$ , y las estimaciones análogas para  $\delta\epsilon$ , respectivamente.

| No. | $\Pi$        | $A_\psi$  | $\theta_\psi$ | $A_\epsilon$ | $\theta_\epsilon$ |
|-----|--------------|-----------|---------------|--------------|-------------------|
| 1   | 365.32±0.03  | 5.23±0.01 | 224.04± 0.09  | 2.07±0.00    | 160.46± 0.13      |
| 2   | 6549.53±1.02 | 7.77±0.01 | 235.59± 2.02  | 2.93±0.01    | 75.95± 1.84       |
| 3   | 182.49±0.02  | 2.09±0.01 | 58.19± 0.12   | 0.70±0.00    | 78.05± 0.20       |
| 4   | 13.66±0.00   | 0.42±0.01 | 347.13± 0.04  | 0.22±0.00    | 145.34± 0.05      |
| 5   | 3276.08±4.44 | 0.95±0.01 | 118.59± 4.97  | 0.23±0.00    | 272.34±12.33      |
| 6   | 433.60±1.37  | 0.10±0.01 | 4.11± 6.54    | 0.08±0.00    | 248.18± 4.01      |
| 7   | 13.63±0.00   | 0.16±0.01 | 98.34± 0.11   | 0.09±0.00    | 13.45± 0.11       |
| 8   | 31.82±0.01   | 0.18±0.01 | 210.82± 0.22  | 0.04±0.00    | 44.60± 0.65       |
| 9   | 27.50±0.01   | 0.12±0.01 | 33.86± 0.32   | 0.02±0.00    | 272.41± 1.21      |
| 10  | 177.94±0.23  | 0.11±0.01 | 31.93± 2.23   | 0.12±0.00    | 124.53± 1.12      |
| 11  | 26.98±0.00   | 0.06±0.01 | 238.58± 0.60  | 0.09±0.00    | 312.36± 0.23      |
| 12  | 9.55±0.00    | 0.10±0.01 | 76.11± 0.12   | 0.04±0.00    | 24.37± 0.16       |
| 13  | 9.13±0.00    | 0.05±0.01 | 165.37± 0.24  | 0.01±0.00    | 108.23± 0.56      |
| 14  | 22.46±0.02   | 0.05±0.01 | 4.85± 0.55    | 0.06±0.00    | 281.20± 0.28      |
| 15  | 14.76±0.00   | 0.02±0.01 | 257.89± 0.92  | 0.07±0.00    | 101.17± 0.15      |
| 16  | 482.29±4.87  | 0.16±0.01 | 56.27± 4.20   | 0.05±0.00    | 143.54± 7.47      |
| 17  | 188.38±0.23  | 0.15±0.01 | 131.00± 1.71  | 0.01±0.00    | 2.21±11.21        |
| 18  | 594.55±1.82  | 0.15±0.01 | 105.99± 5.50  | 0.01±0.00    | 165.15±30.99      |
| 19  | 203.58±3.71  | 0.05±0.01 | 109.10± 5.27  | 0.06±0.00    | 101.76± 2.49      |
| 20  | 7.35±0.00    | 0.05±0.01 | 227.53± 0.19  | 0.06±0.00    | 32.80± 0.09       |

#### 4.1.4. Conclusiones

A la vista de los resultados, y tras comparar las series temporales originales con los modelos estimados, podría decirse que el ajuste establecido es satisfactorio en el sentido de que éste se adapta de forma notoria a las observaciones disponibles. Mediante los modelos creados, se alcanza un valor del estadístico WRMS de 0.4604 *mas* para el desplazamiento en longitud y de 0.2596 *mas* para el de oblicuidad. Estos valores se transcriben en una reducción del error cuadrático medio ponderado de aproximadamente un 96.43 % y un 88.16 % para  $\delta\psi$  y  $\delta\epsilon$ , respectivamente (tomando como punto de partida la burda aproximación dada por la media ponderada de la serie temporal).

Como es de esperar, la componente de tendencia lineal explica un gran porcentaje de la varianza ponderada, aunque éste es mucho más notorio para la serie de los desplazamientos en longitud, lo cual resulta lógico ya que, claramente,  $\delta\psi$  manifiesta un comportamiento decreciente a largo plazo más acusado que para los desplazamientos en oblicuidad.

Tal como muestran las Tablas 4.1 y 4.3, la primera frecuencia fundamental extraída se corresponde con el periodo anual. Esta señal tiene una amplitud estimada de  $5.23 \pm 0.01$  *mas* para el desplazamiento en longitud y  $2.07 \pm 0.00$  *mas* para las variaciones en oblicuidad. Asimismo, como se aprecia en la Tabla 4.5, el máximo de la señal anual se alcanza para ángulos de  $224.04^\circ \pm 0.09^\circ$  y  $160.46^\circ \pm 0.13^\circ$  en el caso de  $\delta\psi$  y  $\delta\epsilon$ , respectivamente. Expresando estos valores en términos temporales, se concluye que estas fases de máxima señal se corresponden con mediados de noviembre y la primera quincena de septiembre, en cada caso.

Cabe señalar también la presencia de una línea espectral ligada al periodo semi-anual. Ésta es la tercera frecuencia fundamental incluida en el modelo armónico y posee una amplitud cuya magnitud no supera la mitad de la anual en ambas series temporales. Además, expresando la fase en unidades de tiempo, se tiene que el máximo efecto causado por esta señal se produce a finales de abril y octubre para  $\delta\psi$  y durante la primera quincena de mayo y noviembre para  $\delta\epsilon$ .

Resulta interesante la inclusión de la segunda frecuencia, 6549.53 días, que se corresponde con un periodo de aproximadamente 17.9 años. Sorprendentemente, esta señal logra reducir el valor del WRMS en una cantidad ligeramente mayor que la

frecuencia anual. Además, como puede comprobarse a través de la Tabla 4.5, la amplitud de este término es mayor que la del periodo de 365.32 días, tanto para los desplazamientos en longitud como en oblicuidad. Su procedencia no es del todo clara aunque, a juzgar por la gran variabilidad que explica en ambas series temporales y su proximidad al periodo de 18 años, podría pensarse que su origen se encuentra en la libración lunar (*ciclo de Saros*) (ver Gutzwiller, 1998). Como sabemos, la órbita de la luna está inclinada aproximadamente cinco grados respecto de la eclíptica, a la que corta en dos puntos llamados nodos. Lejos de permanecer fijos, estos puntos siguen un movimiento retrógrado, realizando un ciclo completo cada 18 años. Relacionado con este armónico se encuentra el periodo denominado *estación de eclipses*, el cual hace referencia al intervalo de tiempo que transcurre entre dos alineaciones de los nodos lunares con el Sol. Este periodo equivale a 173.31 días aproximadamente, valor semejante a la décima frecuencia detectada en el modelo armónico (177.94 días) por lo que podría estar asociada a dicho fenómeno. En cualquier caso, parece ser que el efecto de nuestro satélite natural sobre la posición del polo celeste no se limitaría a la influencia derivada de su ciclo de precesión, sino que también manifestaría otro tipo de participación. Sin ir más lejos, la frecuencia extraída en cuarto lugar se corresponde con el periodo semidraconítico de 13.66 días. Dicha señal es la mitad del tiempo empleado por la Luna en completar el proceso de translación alrededor de la Tierra (27.3 días), periodo de tiempo que, por otro lado, aparece también incluido en el modelo en novena posición. Esta última línea espectral asociada al periodo orbital sideral de la luna, además de estar asociada a términos seculares mixtos, posee una amplitud estimada de  $0.12 \pm 0.01$  y  $0.02 \pm 0.00$  *mas* para  $\delta\psi$  y  $\delta\epsilon$ , respectivamente.

Ahora bien, éstas no son las únicas frecuencias que aparentan estar asociadas a la influencia que otros cuerpos celestes ejercen sobre nuestro planeta. Los dos puntos en el espacio en los que la Luna se encuentra más próxima y más alejada de la Tierra se conocen con el nombre de *perigeo* y *apogeo*, respectivamente. Debido a la excentricidad orbital, estos puntos se mueven siguiendo una dirección opuesta a los nodos lunares. Este hecho, provoca que el apogeo y perigeo realicen un ciclo completo sobre la órbita lunar cada 8.8 años (S.Chapman and Lindzen, 1970). Dicho periodo se corresponde precisamente con la quinta frecuencia incluida en el modelo para los desplazamientos en longitud y oblicuidad del polo celeste. Ahora bien, este periodo

de 8.8 años aparentemente causado por la Luna, también se deriva del Sol pues, es precisamente a consecuencia de dicho astro que la velocidad de translación lunar se ralentiza de tal forma que el mes sideral dura una hora más de lo que duraría si el Sol no existiera. Todo ello hace pensar que esta línea espectral asociada a un periodo de 3276.08 días podría tener una procedencia derivada de la influencia lunar y solar sobre nuestro planeta, cuyo efecto no estaría completamente recogido en el correspondiente modelo de precesión-nutación.

El contenido armónico de estos dos modelos estimados, incluye otras frecuencias fundamentales fácilmente reconocibles como puede ser la asociada al periodo mensual (frecuencia extraída No. 8) o el famoso periodo de Chandler detectado en sexto lugar (433.60 días), siendo una de las tres frecuencias asociadas a términos seculares mixtos. La *perturbación de Chandler* (CW) varía ligeramente entre un periodo de 416 y 433 días. La naturaleza de esta fuerza es todavía una incógnita. Existen diversas explicaciones para el CW, las cuales implican la participación de varios factores como vientos atmosféricos, diferencias en la presión atmosférica, cambios en los niveles de agua de los lagos, ríos, así como la interacción del núcleo con el manto terrestre o los movimientos sísmicos. Sin embargo, ninguna de las hipótesis establecidas ha sido probada de forma satisfactoria. Por otra parte, es sabido que una de las principales componentes de la *nutación libre del núcleo líquido terrestre* (FCN) posee un periodo nominal retrógrado de aproximadamente 430.3 días, por lo que la línea espectral detectada de 433.60 días podría estar relacionada con la nutación del núcleo terrestre.

Para finalizar, señalaremos la presencia de un periodo aproximado de 9.55 y 594.55 días. Si bien ambas frecuencias no tienen un origen claro, el periodo de 594.55 días guarda cierta similitud con el periodo orbital sinódico de Venus (583.92 días), por lo que podría derivarse de la influencia de dicho planeta sobre la Tierra. No obstante, no se dispone de evidencias suficientes que confirmen dicha apreciación.

## 4.2. Modelo de precesión-nutación IAU2000

### 4.2.1. Introducción

En el año 2000 se llevó a cabo la Asamblea General IAU 2000 en la cual se estableció el nuevo modelo de precesión-nutación bautizado como IAU2000A. En él se

define de forma más precisa el concepto de polo celeste y además se proporciona una nueva definición del UT1 en términos de un ángulo que mide directamente la rotación terrestre respecto al sistema de referencia celeste. El modelo fue desarrollado por Mathews et al. (2002) y se denota por MHB2000. Estas nuevas incursiones representaron mayormente un cambio sustancial en el modo de calcular la orientación instantánea del planeta. El modelo MHB2000 mejora la teoría de nutación IAU1980 considerando el efecto de la inelasticidad del manto, las mareas oceánicas y los acoplamientos electromagnéticos producidos entre el núcleo líquido externo y el manto, así como entre el núcleo sólido y el núcleo líquido externo (Buffet et al., 2002). También se consideran términos no lineales los cuales hasta ahora habían sido ignorados en este tipo de formulación. Los ejes de referencia son los ejes de máximo momento de inercia de la Tierra ignorando las deformaciones dependientes del tiempo.

Entre los conjunto de datos que el IERS ha publicado siguiendo las recomendaciones establecidas, se encuentran las variaciones del polo celeste,  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$ , que como sabemos, representan la diferencia angular entre la posición del polo celestial observada y su correspondiente valor modelado, expresado en términos de cambios en longitud y oblicuidad de la eclíptica. Estos parámetros son simplemente las formas diferenciales de los ángulos  $(\Delta\psi, \Delta\epsilon)$  utilizados para representar la posición del polo celeste en el marco de la teoría de precesión-nutación IAU1980 (Lieske et al., 1977; Warh, 1979). Ahora bien, aparte de  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$ , el IERS publica también las variaciones del polo celeste con respecto al modelo IAU2000A. Éstas vienen dadas a través de los parámetros  $\delta X$  y  $\delta Y$ , los cuales representan pequeños cambios en las componentes del vector unitario que describe la posición del polo celeste. La producción de estos nuevos parámetros es parte del convenio que se estableció en la Asamblea General IAU 2000, a través del cual la posición del polo se expresa mediante el uso de coordenadas rectangulares  $(X, Y, Z)$  con respecto a los ejes del sistema de referencia celeste geocéntrico, donde:

$$Z = \sqrt{1 - X^2 - Y^2} \approx 1$$

Es importante tener presente que la utilización de los parámetros  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$  para la medición de las variaciones en la posición del polo celeste está en proceso de extinción, en beneficio del uso de  $\delta X$  y  $\delta Y$ . No obstante, todavía, hoy en día, ambos grupos de parámetros siguen siendo producidos ya que están íntimamente relacionados y es

posible pasar de unos valores a otros mediante el uso de una serie de ecuaciones que aparecen detalladas, por ejemplo, en el capítulo 5 del *IERS Convention 2010* (Petit and Luzum, 2010) o en el artículo de Kaplan (2005).

Este cambio en la producción de los parámetros de orientación terrestre consigue que el modelo de precesión-nutación IAU2000A se ajuste en gran medida a las observaciones realizadas mediante la técnica de VLBI, consiguiendo así un error de  $\pm 0.001$  segundos para las variaciones del polo celeste. Debido a estas mejoras, sería interesante construir un modelo armónico no lineal que intentara explicar estos desplazamientos y que nos ayudara a entender la procedencia o causa de su existencia. Así pues, a continuación se realizará un estudio similar al establecido en la sección previa pero considerando, esta vez, la serie temporal descrita por  $\delta X$  y  $\delta Y$ .

### 4.2.2. Descripción de los datos

Los datos manejados proceden de la solución *EOP C04 05* publicada por el IERS que proporciona las estimaciones de los parámetros de orientación terrestre según el modelo de precesión-nutación IAU2000A (también consistente con el ITRF2005). El documento está registrado bajo el nombre de “*EOP C04\_05 series for 1962-2010 (IAU2000)*”. En él aparecen las series temporales computadas por el EOC que se corresponden con los parámetros de orientación terrestre. El periodo de tiempo abarcado por los datos comprende (al igual que la versión del modelo IAU1980) desde el 1 de enero de 1962 hasta la actualidad. El dominio temporal es equiespaciado, y existe una producción de los EOP diaria. Para el estudio que se pretende llevar a cabo en esta ocasión, únicamente nos interesarán aquellas columnas que hacen referencia a los parámetros  $\delta X$  y  $\delta Y$ , así como a sus respectivos errores o incertidumbres. Estos valores vienen recogidos en segundos (aunque por comodidad, serán expresados en *mas* para la realización del análisis).

### 4.2.3. Características del análisis y resultados

Con la intención de establecer una comparación entre el análisis de las series temporales  $(\delta X, \delta Y)$  y  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$ , en cuanto a contenido armónico se refiere, conservaremos los mismos criterios y valores de los argumentos computacionales que se utilizaron

en la sección 4.1. Es decir, se realizará un análisis de la serie temporal vectorial extrayendo hasta un máximo de 20 frecuencias fundamentales. La cota para el WRMS será de 0.0001 *mas*, y además se mantendrá el dominio de frecuencias comprendido entre 0.0001 y 0.5 ciclos por día, el cual será discretizado mediante el uso de un tamaño de paso de 0.0001 ciclos por día. Por supuesto, la tendencia que se ajustará a los datos será lineal.

Una vez realizado el análisis armónico, se obtiene que la estimación de la componente de tendencia lineal vendría dada por:

$$T_{\delta X}(\tau_n) = (0.0350 \pm 0.0019) + (0.0447 \pm 0.0018) \cdot \varphi_2(\tau_n) \quad (4.6)$$

$$T_{\delta Y}(\tau_n) = (-0.0741 \pm 0.0024) + (-0.0377 \pm 0.0026) \cdot \varphi_2(\tau_n) \quad (4.7)$$

donde  $\tau_n = t_n - t_c$  es la misma traslación asumida para el estudio de  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$  centrada en  $t_c = 50896.5$  *MJD* (24 de marzo de 1998) y donde  $\varphi_2(\tau_n)$  es la función base definida en (3.15). Las incertidumbres y coeficientes estimados en las expresiones (4.6) y (4.7) vienen dados en *mas*.

Como paso previo a la disertación de los resultados, en las siguientes páginas se exponen las Tablas 4.6–4.9 que contienen la información referente a la componente periódica del modelo estimado. También se representan gráficamente las series temporales originales (Figura 4.7), así como las aproximaciones (Figura 4.8) y las series residuales generadas por éstas (Figura 4.9). Del mismo modo que se hizo en la sección 4.1.3, se muestra el decrecimiento del WRMS de los datos a medida que nuevas frecuencias y coeficientes se añaden al modelo explicativo (Figura 4.10). Para una mejor captación de la amplitud de cada frecuencia y de la época en la que cada señal alcanza su máximo grado de influencia, la Tabla 4.10 contiene el valor de la amplitud y fase según la ecuación (4.3).

#### 4.2.4. Conclusiones

En este caso, con los modelos estimados, se logra alcanzar un valor del estadístico WRMS de 0.1406 *mas* y 0.1774 *mas* para las variaciones en las coordenadas X e Y del vector de posición del polo celeste, respectivamente. Esta cantidad se transcribe en un 27.61 % y un 14.79 % de varianza ponderada explicada, en cada caso.

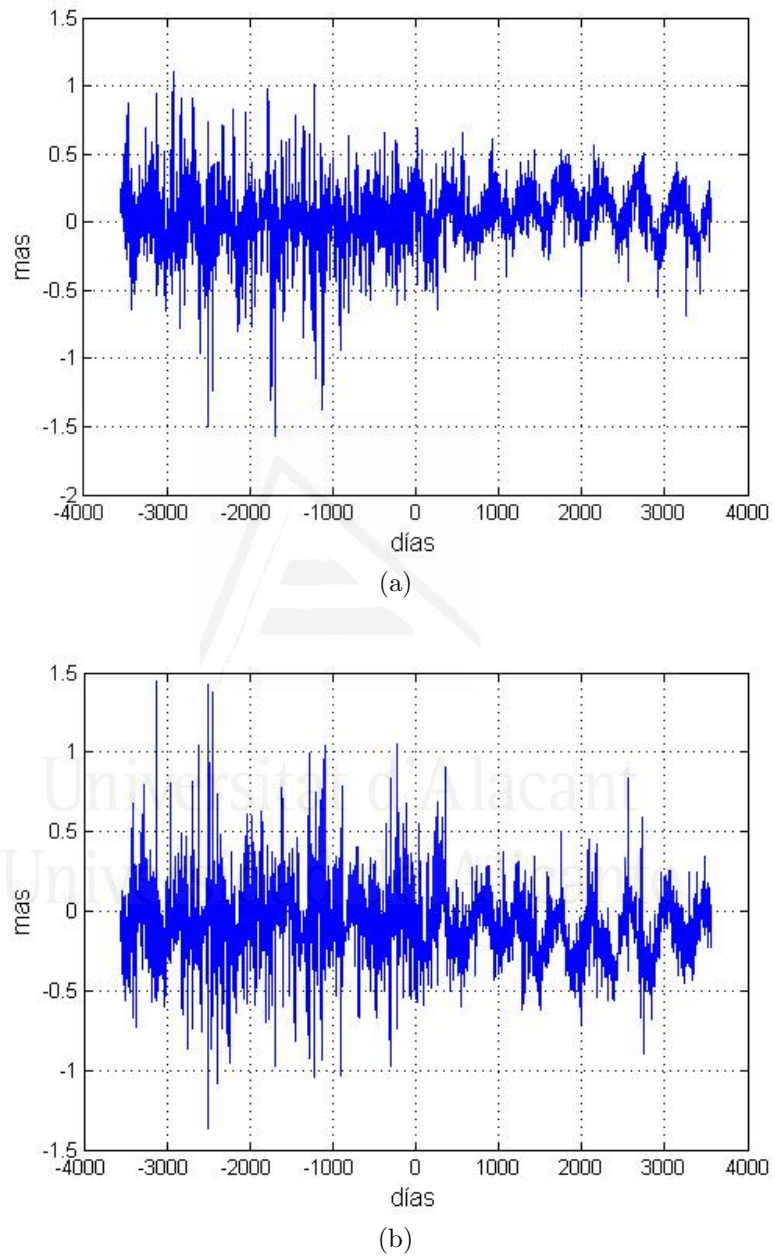
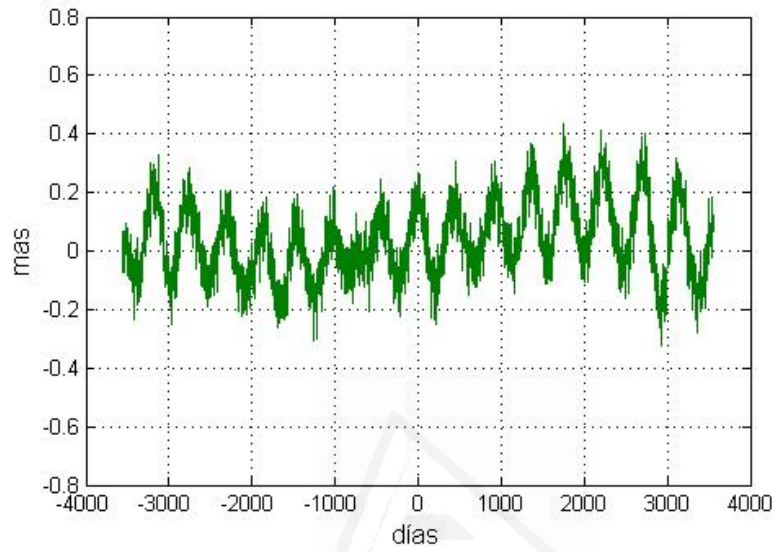
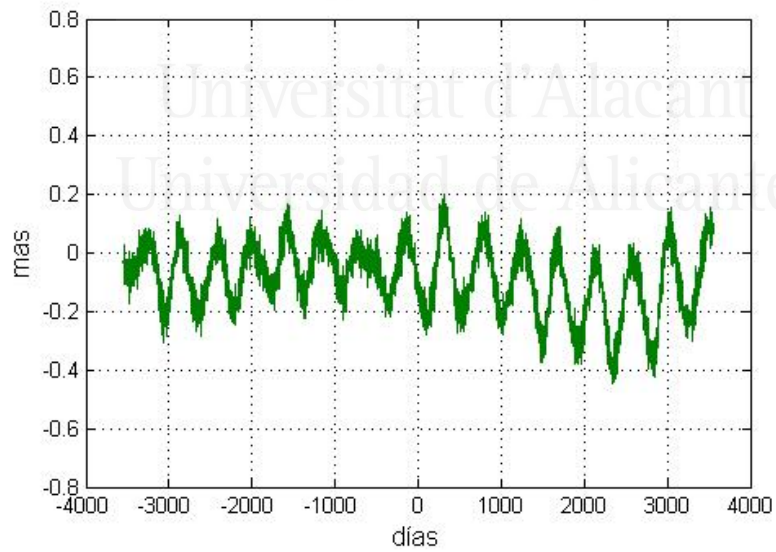


Figura 4.7: Serie temporal del desplazamiento del polo celeste a través de las variaciones en (a) la coordenada X ( $\delta X$ ) y (b) la coordenada Y ( $\delta Y$ ), según el modelo de precesión-nutación IAU2000A.





(a)



(b)

Figura 4.8: Modelos armónicos no lineales estimados para (a)  $\delta X$  y (b)  $\delta Y$ .

Tabla 4.6: Términos de Fourier. Descomposición armónica de  $\delta X$  según el modelo de precesión-nutación IAU2000. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por día), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por día), periodo (días) y coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente.

| No. | $f$       | $\sigma_f$            | $\Pi$               | $S$                  | $C$                  |
|-----|-----------|-----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| 1   | 0.0021845 | $0.25 \times 10^{-5}$ | $457.77 \pm 0.53$   | $-0.0333 \pm 0.0044$ | $0.1195 \pm 0.0044$  |
| 2   | 0.0003054 | $0.49 \times 10^{-5}$ | $3274.45 \pm 52.96$ | $0.0151 \pm 0.0028$  | $-0.0048 \pm 0.0026$ |
| 3   | 0.0024252 | $0.81 \times 10^{-5}$ | $412.33 \pm 1.37$   | $0.0384 \pm 0.0027$  | $-0.0183 \pm 0.0027$ |
| 4   | 0.0732179 | $2.57 \times 10^{-5}$ | $13.66 \pm 0.00$    | $-0.0312 \pm 0.0022$ | $-0.0078 \pm 0.0022$ |
| 5   | 0.0018697 | $0.91 \times 10^{-5}$ | $534.84 \pm 2.61$   | $-0.0038 \pm 0.0028$ | $0.0222 \pm 0.0028$  |
| 6   | 0.1430522 | $2.34 \times 10^{-5}$ | $6.99 \pm 0.00$     | $0.0141 \pm 0.0023$  | $0.0238 \pm 0.0022$  |
| 7   | 0.0028429 | $0.30 \times 10^{-5}$ | $351.75 \pm 0.37$   | $-0.0200 \pm 0.0026$ | $0.0300 \pm 0.0026$  |
| 8   | 0.0026015 | $0.62 \times 10^{-5}$ | $384.39 \pm 0.92$   | $0.0007 \pm 0.0026$  | $0.0230 \pm 0.0027$  |
| 9   | 0.0184024 | $2.78 \times 10^{-5}$ | $54.34 \pm 0.08$    | $0.0193 \pm 0.0022$  | $-0.0139 \pm 0.0023$ |
| 10  | 0.1220195 | $2.58 \times 10^{-5}$ | $8.20 \pm 0.00$     | $-0.0093 \pm 0.0022$ | $-0.0204 \pm 0.0022$ |
| 11  | 0.0396868 | $3.67 \times 10^{-5}$ | $25.20 \pm 0.02$    | $-0.0192 \pm 0.0022$ | $-0.0120 \pm 0.0022$ |
| 12  | 0.0561051 | $2.82 \times 10^{-5}$ | $17.82 \pm 0.01$    | $-0.0031 \pm 0.0022$ | $-0.0046 \pm 0.0022$ |
| 13  | 0.0971935 | $9.58 \times 10^{-5}$ | $10.29 \pm 0.01$    | $-0.0133 \pm 0.0022$ | $-0.0114 \pm 0.0022$ |
| 14  | 0.0037403 | $2.76 \times 10^{-5}$ | $267.36 \pm 1.97$   | $0.0120 \pm 0.0025$  | $-0.0021 \pm 0.0024$ |
| 15  | 0.0159428 | $2.65 \times 10^{-5}$ | $62.72 \pm 0.10$    | $0.0023 \pm 0.0023$  | $0.0224 \pm 0.0022$  |
| 16  | 0.0020632 | $0.70 \times 10^{-5}$ | $484.68 \pm 1.65$   | $-0.0151 \pm 0.0030$ | $-0.0192 \pm 0.0031$ |
| 17  | 0.0533169 | $2.01 \times 10^{-5}$ | $18.76 \pm 0.01$    | $-0.0136 \pm 0.0023$ | $0.0097 \pm 0.0022$  |
| 18  | 0.0456668 | $5.91 \times 10^{-5}$ | $21.90 \pm 0.03$    | $0.0144 \pm 0.0022$  | $0.0024 \pm 0.0023$  |
| 19  | 0.0108936 | $6.48 \times 10^{-5}$ | $91.80 \pm 0.55$    | $0.0045 \pm 0.0022$  | $0.0191 \pm 0.0023$  |
| 20  | 0.0929985 | $6.24 \times 10^{-5}$ | $10.75 \pm 0.01$    | $-0.0088 \pm 0.0022$ | $0.0143 \pm 0.0022$  |

Tabla 4.7: Igual que la Tabla 4.6 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (días) y coeficientes ( $\mu\text{as}$ ) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente.

| No. | $\Pi$               | $SS$                             | $CC$                             |
|-----|---------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 2   | $3274.45 \pm 52.96$ | $-0.0104 \pm 1.6 \times 10^{-3}$ | $-0.0302 \pm 1.4 \times 10^{-3}$ |
| 16  | $484.68 \pm 1.65$   | $0.0097 \pm 2.4 \times 10^{-3}$  | $-0.0111 \pm 2.6 \times 10^{-3}$ |

Tabla 4.8: Términos de Fourier. Descomposición armónica de  $\delta Y$  según el modelo de precesión-nutación IAU2000. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por día), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por día), periodo (días) y coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente.

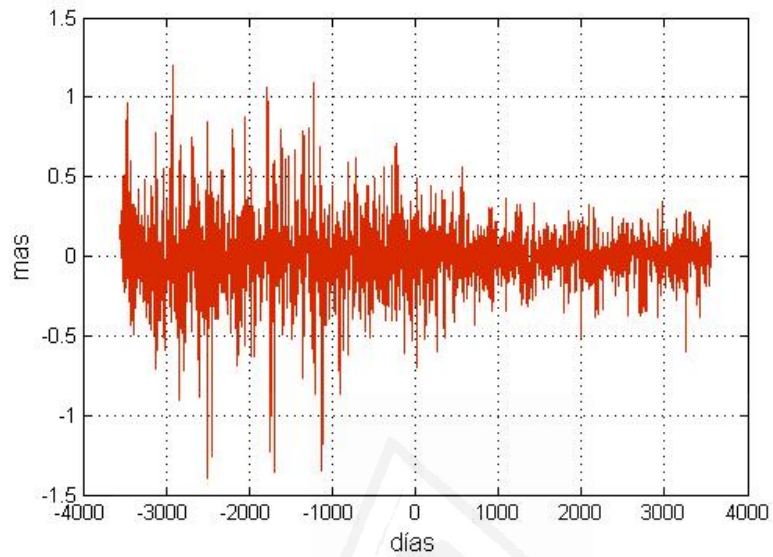
| <i>No.</i> | <i>f</i>  | $\sigma_f$            | $\Pi$               | <i>S</i>             | <i>C</i>             |
|------------|-----------|-----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| 1          | 0.0021845 | $0.25 \times 10^{-5}$ | $457.77 \pm 0.53$   | $-0.1128 \pm 0.0056$ | $-0.0233 \pm 0.0056$ |
| 2          | 0.0003054 | $0.49 \times 10^{-5}$ | $3274.45 \pm 52.96$ | $0.0027 \pm 0.0033$  | $0.0119 \pm 0.0034$  |
| 3          | 0.0024252 | $0.81 \times 10^{-5}$ | $412.33 \pm 1.37$   | $0.0203 \pm 0.0034$  | $0.0340 \pm 0.0034$  |
| 4          | 0.0732179 | $2.57 \times 10^{-5}$ | $13.66 \pm 0.00$    | $0.0163 \pm 0.0033$  | $-0.0087 \pm 0.0033$ |
| 5          | 0.0018697 | $0.91 \times 10^{-5}$ | $534.84 \pm 2.61$   | $-0.0157 \pm 0.0037$ | $-0.0209 \pm 0.0036$ |
| 6          | 0.1430522 | $2.34 \times 10^{-5}$ | $6.99 \pm 0.00$     | $0.0043 \pm 0.0033$  | $0.0064 \pm 0.0033$  |
| 7          | 0.0028429 | $0.30 \times 10^{-5}$ | $351.75 \pm 0.37$   | $-0.0186 \pm 0.0033$ | $-0.0001 \pm 0.0033$ |
| 8          | 0.0026015 | $0.62 \times 10^{-5}$ | $384.39 \pm 0.92$   | $-0.0311 \pm 0.0034$ | $-0.0025 \pm 0.0034$ |
| 9          | 0.0184024 | $2.78 \times 10^{-5}$ | $54.34 \pm 0.08$    | $-0.0013 \pm 0.0033$ | $-0.0029 \pm 0.0033$ |
| 10         | 0.1220195 | $2.58 \times 10^{-5}$ | $8.20 \pm 0.00$     | $0.0009 \pm 0.0033$  | $-0.0024 \pm 0.0033$ |
| 11         | 0.0396868 | $3.67 \times 10^{-5}$ | $25.20 \pm 0.02$    | $0.0013 \pm 0.0033$  | $-0.0005 \pm 0.0032$ |
| 12         | 0.0561051 | $2.82 \times 10^{-5}$ | $17.82 \pm 0.01$    | $-0.0044 \pm 0.0033$ | $0.0317 \pm 0.0032$  |
| 13         | 0.0971935 | $9.58 \times 10^{-5}$ | $10.29 \pm 0.01$    | $-0.0137 \pm 0.0033$ | $-0.0147 \pm 0.0033$ |
| 14         | 0.0037403 | $2.76 \times 10^{-5}$ | $267.36 \pm 1.97$   | $0.0209 \pm 0.0033$  | $0.0120 \pm 0.0033$  |
| 15         | 0.0159428 | $2.65 \times 10^{-5}$ | $62.72 \pm 0.10$    | $-0.0008 \pm 0.0033$ | $-0.0014 \pm 0.0032$ |
| 16         | 0.0020632 | $0.70 \times 10^{-5}$ | $484.68 \pm 1.65$   | $0.0090 \pm 0.0041$  | $-0.0433 \pm 0.0042$ |
| 17         | 0.0533169 | $2.01 \times 10^{-5}$ | $18.76 \pm 0.01$    | $0.0007 \pm 0.0033$  | $-0.0151 \pm 0.0033$ |
| 18         | 0.0456668 | $5.91 \times 10^{-5}$ | $21.90 \pm 0.03$    | $0.0205 \pm 0.0033$  | $0.0062 \pm 0.0033$  |
| 19         | 0.0108936 | $6.48 \times 10^{-5}$ | $91.80 \pm 0.55$    | $-0.0038 \pm 0.0033$ | $-0.0007 \pm 0.0033$ |
| 20         | 0.0929985 | $6.24 \times 10^{-5}$ | $10.75 \pm 0.01$    | $-0.0024 \pm 0.0033$ | $-0.0125 \pm 0.0032$ |

Tabla 4.9: Igual que la Tabla 4.8 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (días) y coeficientes ( $\mu\text{as}$ ) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente.

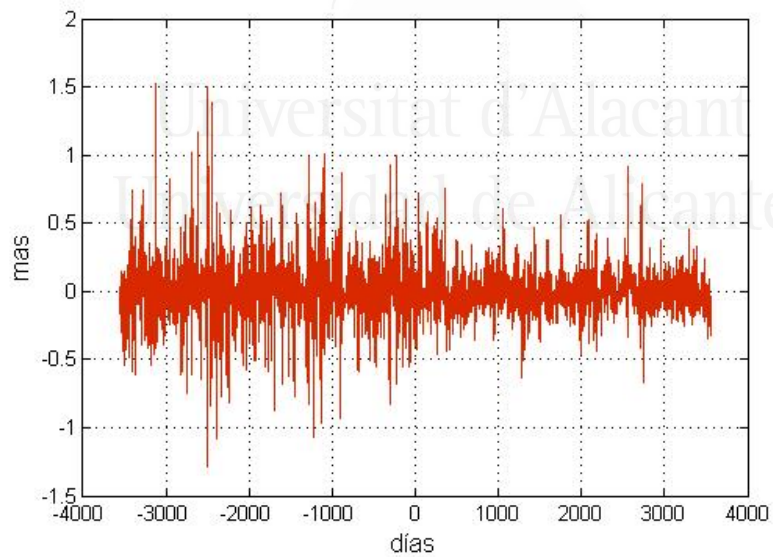
| <i>No.</i> | $\Pi$               | <i>SS</i>                       | <i>CC</i>                       |
|------------|---------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 2          | $3274.45 \pm 52.96$ | $0.0266 \pm 2.2 \times 10^{-3}$ | $0.0157 \pm 2.0 \times 10^{-3}$ |
| 16         | $484.68 \pm 1.65$   | $0.0114 \pm 3.2 \times 10^{-3}$ | $0.0116 \pm 3.4 \times 10^{-3}$ |

Tabla 4.10: Amplitud y fase de las frecuencias asociadas al modelo armónico para las variaciones  $\delta X$  y  $\delta Y$  del vector de posición del polo celeste, según la ecuación (4.3). Las columnas hacen referencia al orden de extracción de la frecuencia, periodo (días), amplitud (mas) y fase (grados) para  $\delta X$  y  $\delta Y$ , respectivamente.

| No. | $\Pi$         | $A_X$          | $\theta_X$   | $A_Y$         | $\theta_Y$     |
|-----|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|
| 1   | 457.77± 0.53  | 0.1241± 0.0044 | 254.97± 2.60 | 0.1151±0.0056 | 100.28± 3.54   |
| 2   | 3274.45±52.96 | 0.0158± 0.0028 | 217.73±85.26 | 0.0122±0.0034 | 233.72± 139.78 |
| 3   | 412.33± 1.37  | 0.0426± 0.0027 | 15.50± 4.09  | 0.0396±0.0034 | 219.72± 5.62   |
| 4   | 13.66± 0.00   | 0.0321± 0.0022 | 196.43± 0.15 | 0.0185±0.0033 | 257.05± 0.38   |
| 5   | 534.84± 2.61  | 0.0225± 0.0028 | 300.27±10.75 | 0.0261±0.0036 | 107.30± 11.91  |
| 6   | 6.99± 0.00    | 0.0277± 0.0022 | 34.11± 0.09  | 0.0077±0.0033 | 37.54± 0.47    |
| 7   | 351.75± 0.37  | 0.0361± 0.0026 | 269.36± 4.04 | 0.0186±0.0033 | 334.07± 9.89   |
| 8   | 384.39± 0.92  | 0.0230± 0.0027 | 113.98± 6.93 | 0.0312±0.0034 | 36.36± 6.64    |
| 9   | 54.34± 0.08   | 0.0238± 0.0023 | 6.78± 0.82   | 0.0031±0.0033 | 326.21± 9.03   |
| 10  | 8.20± 0.00    | 0.0224± 0.0022 | 266.68± 0.13 | 0.0026±0.0033 | 207.39± 1.62   |
| 11  | 25.20± 0.02   | 0.0226± 0.0022 | 234.72± 0.40 | 0.0014±0.0033 | 89.95± 9.46    |
| 12  | 17.82± 0.01   | 0.0055± 0.0022 | 247.27± 1.15 | 0.0320±0.0032 | 278.72± 0.29   |
| 13  | 10.29± 0.01   | 0.0176± 0.0022 | 15.58± 0.21  | 0.0201±0.0033 | 5.06± 0.27     |
| 14  | 267.36± 1.97  | 0.0121± 0.0025 | 289.36± 8.44 | 0.0241±0.0033 | 36.92± 5.81    |
| 15  | 62.72± 0.10   | 0.0225± 0.0022 | 59.43± 1.03  | 0.0016±0.0033 | 300.57± 20.35  |
| 16  | 484.68± 1.65  | 0.0244± 0.0031 | 267.50± 9.62 | 0.0442±0.0042 | 17.06± 7.14    |
| 17  | 18.76± 0.01   | 0.0167± 0.0022 | 192.06± 0.40 | 0.0151±0.0033 | 169.38± 0.65   |
| 18  | 21.90± 0.03   | 0.0146± 0.0022 | 280.55± 0.54 | 0.0215±0.0033 | 254.76± 0.54   |
| 19  | 91.80± 0.55   | 0.0196± 0.0023 | 195.57± 1.64 | 0.0039±0.0033 | 203.98± 12.32  |
| 20  | 10.75± 0.01   | 0.0168± 0.0022 | 202.34± 0.23 | 0.0127±0.0032 | 326.63± 0.44   |



(a)



(b)

Figura 4.9: Residuales generados por el modelo armónico no lineal correspondientes a las variaciones en (a) la coordenada X y (b) en la coordenada Y.

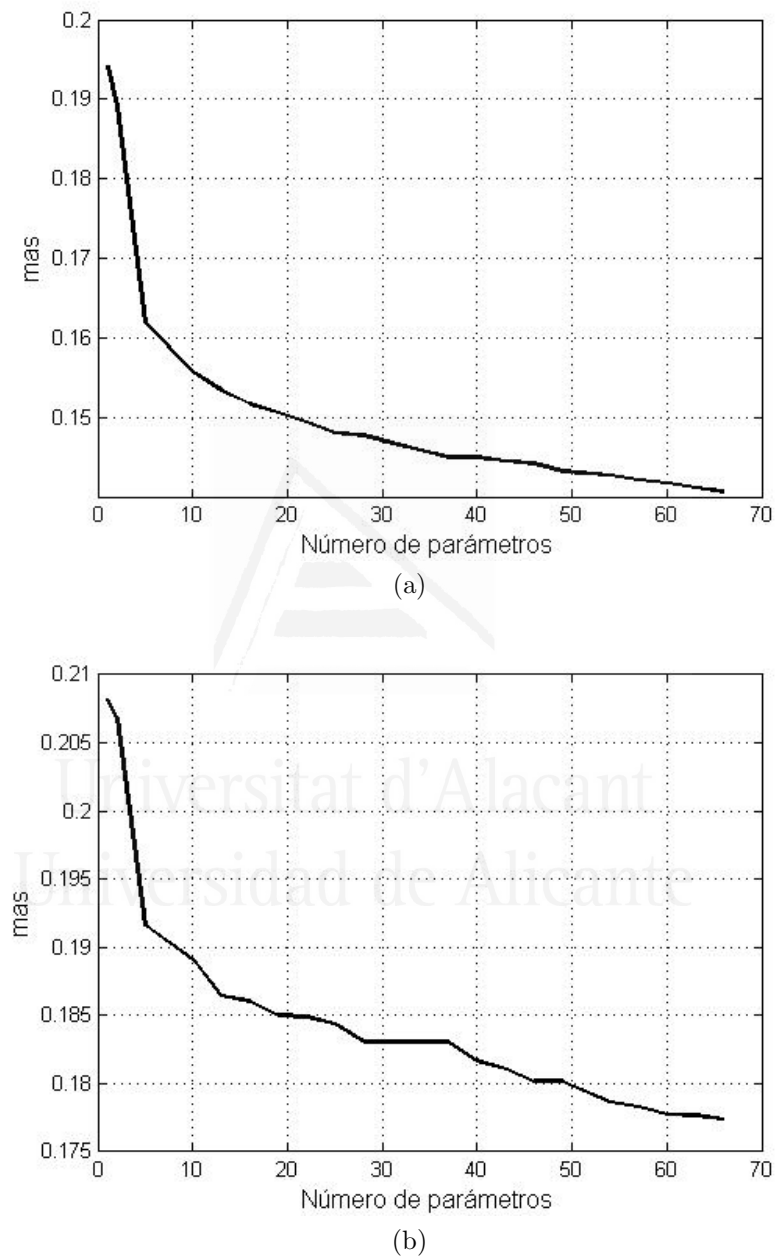


Figura 4.10: Reducción del WRMS en función del número de parámetros añadidos al modelo durante el proceso de ajuste para las variaciones en (a) la coordenada X y (b) en la coordenada Y del vector de posición del polo celeste.

Parece un tímido porcentaje si consideramos el número de parámetros incluidos, sin embargo, no lo es tanto si tenemos presente que el modelo ha otorgado una mayor significatividad a los datos más recientes, los cuales se encuentran sometidos a una incertidumbre menor y por tanto son más fiables. Ello conlleva un mejor modelado de las observaciones recientes en detrimento de un peor ajuste de los datos más lejanos en el tiempo, lo que se traduce en una reducción del WRMS moderada. Sería interesante en un futuro realizar un análisis de estas series temporales teniendo en cuenta un dominio temporal que parta, por ejemplo, del año 2000. En cualquier caso, el ajuste parece adecuarse a las observaciones más fiables de forma fidedigna y lo que es más, parece describir lo que sería su comportamiento en el periodo de tiempo previo al año 1998, el cual recoge observaciones poco fiables (ver Figuras 4.7–4.9).

En cuanto al contenido armónico, puede establecerse una comparación con respecto al modelo obtenido para los desplazamientos en longitud y oblicuidad de la eclíptica según el modelo IAU1980. En ambos ajustes encontramos frecuencias fundamentales similares y otras distintas que merece la pena comentar. En el grupo de frecuencias similares encontramos, por ejemplo, el semiperiodo de rotación sideral lunar (cuarta frecuencia, 13.66 días) y el periodo de 3274.45 días (asociado a términos seculares mixtos) cuyo origen puede estar relacionado con el periodo de los nodos lunares (ver sección 4.1.4).

Además de estas señales, parece haber cierta similitud entre la primera línea espectral detectada para  $(\delta X, \delta Y)$  (457.77 días) y la sexta frecuencia incluida en el modelo para  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$  (433.60 días). Aunque difieren en unos días, no resultaría descabellado pensar que ambas comparten un origen común. En concreto, parece plausible una procedencia debida a la nutación del núcleo líquido de la Tierra. Según un estudio llevado a cabo por Gubanov (2009), la principal componente de la FNC de 430.3 días, no es un periodo estable en el tiempo. Éste varía con los años, al igual que su amplitud. De dicho estudio se deriva que después del año 2000, el proceso FNC se estabilizó gradualmente en amplitud y fase (tras la llamada *catástrofe nutacional*<sup>3</sup>) alcanzando al mismo tiempo un nuevo periodo de  $445.5 \pm 0.5$  días. Este

---

<sup>3</sup>Se conoce como catástrofe nutacional al periodo de tiempo comprendido entre 1998 y 2000 durante el cual la amplitud del proceso FNC se redujo casi a cero y el periodo se incrementó hasta

valor está más próximo a la estimación del armónico detectado para  $(\delta X, \delta Y)$ . Por otra parte, algunos autores que estudian el proceso FNC, como *Malkin y Terentev* (ver Malkin and Terentev, 2003) o *Schmidt* (ver Schmidt et al., 2005), apuntan la presencia de una segunda frecuencia que oscila entre 410 y 420 días la cual puede ser explicada mediante la consideración de un modelo complejo de dos capas para el núcleo líquido terrestre (Krasinsky, 2006; Krasinsky and Vasilyev, 2006). Con respecto a esta última observación, cabe señalar la presencia de una señal asociada a un periodo de 412.33 días, la cual posee una amplitud destacable (la segunda mayor después de la correspondiente al periodo de 457.77 días) y que guarda similitud con este periodo de 410–420 días.

Para las variaciones en las coordenadas del vector de posición del polo celeste, aparece una señal cuyo periodo ronda alrededor de 62.72 días, es decir, un periodo de aproximadamente 2 meses. Este armónico no se detecta como tal para las series  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$ , pero sí cabe recordar que se extrajo un periodo mensual. Por otra parte, algo que sorprende con simplemente observar las Tablas 4.6 y 4.8 es que no se pone de manifiesto una señal asociada claramente al periodo anual. La más similar que podría encontrarse se corresponde con 351.75 días (que es prácticamente 14 días menor que el periodo anual) o la de 384.39 (20 días mayor que el periodo anual). Por otro lado, también resulta extraña la posición en la que dichas frecuencias son extraídas (No. 7 y 8), aunque esto puede ser debido a los errores asociados a las observaciones más antiguas de las series temporales.

Existen otras líneas espectrales interesantes en el modelo para  $(\delta X, \delta Y)$ , como la asociada a un periodo semanal (en sexta posición) con una amplitud de  $0.0277 \pm 0.0022$  mas y  $0.0077 \pm 0.0033$  mas para  $\delta X$  y  $\delta Y$ , respectivamente. También se pone de manifiesto un periodo trimestral estimado en 91.80 días, aunque su amplitud es débil en comparación con otros picos de frecuencia contemplados.

No podemos aventurar hasta qué punto los errores en las observaciones pueden derivar en la creación de falsas frecuencias. Periodos como el de 412.33, 534.88, 351.75

---

alcanzar los 639 días.



o 384.39 días, por mencionar algunos, son de difícil interpretación y podrían tratarse de periodos asociados a falsas líneas espectrales. Sería ideal disponer de una serie temporal para  $(\delta X, \delta Y)$  de igual o mayor longitud que la analizada y cuyas observaciones no estuvieran sujetas a errores relativamente grandes. Dado que en este momento no disponemos de una secuencia de datos de tales características, nos conformaremos con ver qué ocurre si deseamos las observaciones previas al año 2000 y realizamos el mismo análisis armónico para el periodo de tiempo comprendido entre el 23 de septiembre de 2000 y el 23 de septiembre de 2010. En esta ocasión el WRMS se reduce en un 42.69 % y 33.49 % en las componentes  $\delta X$  y  $\delta Y$ , respectivamente (valor que prácticamente se duplica con respecto al porcentaje para la serie larga). Por otro lado, la componente de tendencia lineal estimada ahora es:

$$T_{\delta X}(\tau_n) = (0.0815 \pm 0.0017) + (-0.0141 \pm 0.0026) \cdot \varphi_2(\tau_n) \quad (4.8)$$

$$T_{\delta Y}(\tau_n) = (-0.1207 \pm 0.0030) + (-0.0119 \pm 0.0036) \cdot \varphi_2(\tau_n) \quad (4.9)$$

donde  $\tau_n = t_n - t_c$  siendo  $t_c = 53636$  *MJD* (23 de septiembre de 2005), y donde  $\varphi_2(\tau_n)$  es la función base definida en (3.15). Nuevamente, la estimación para los coeficientes de tendencia y sus incertidumbres está expresada en *mas*.

Las Figuras 4.11, 4.12 y 4.13 muestran los resultados gráficos del estudio y en las Tablas 4.11–4.13 se recogen las estimaciones obtenidas. Comparando estos resultados con los de las series temporales que parten del 23 de septiembre de 1985, es posible apreciar notables diferencias. Ya no aparecen periodos como el de 412.33 ó 534.84 días, cuya posible procedencia era difícil de determinar. Por otra parte, se ponen de manifiesto otras líneas espectrales que anteriormente no se detectaban entre las 20 primeras frecuencias. Tal es el caso, por ejemplo, de un periodo semianual (de aproximadamente 182.16 días) y otro de 650.44 días. Finalmente, otras muchas señales aparecen en ambos modelos (o al menos mantienen una relación de semejanza notable) como es el caso de la frecuencia posiblemente relacionada con el periodo asociado al movimiento FCN, la señal ligada a la duración del ciclo que describen los nodos lunares, la señal trimestral e incluso la bimestral, entre otras. Podría esperarse que estos armónicos compartidos se correspondan con verdaderas líneas espectrales de las variaciones  $(\delta X, \delta Y)$ , sin embargo no disponemos de evidencias suficientes como

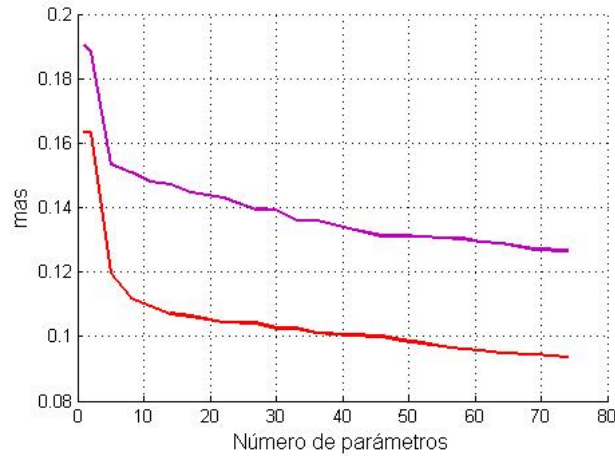


Figura 4.11: Modelo  $(\delta X, \delta Y)$  para el periodo de tiempo desde 23 de septiembre de 2000 hasta 23 de septiembre de 2010. Reducción del WRMS en función del número de parámetros añadidos al modelo durante el proceso de ajuste para  $\delta X$  (en rojo) y  $\delta Y$  (en púrpura).

para establecer una conclusión. Todas estas conjeturas deberán ser corroboradas en un futuro mediante un análisis armónico de la serie temporal  $(\delta X, \delta Y)$  en cuanto se disponga de más observaciones.

### 4.3. Modelos dinámicos para la predicción a corto plazo de $(\delta\psi, \delta\epsilon)$

En esta sección indagaremos de forma somera, sin entrar en mucho detalle, la capacidad predictiva de modelos armónicos *dinámicos* creados para explicar el comportamiento de las desviaciones en longitud y oblicuidad del polo celeste con respecto a una teoría de referencia (en este ejemplo IAU1980).

Los modelos armónicos no lineales desarrollados en las secciones anteriores comparten la ventaja de que pueden ser fácilmente *re-estimados* cuando se dispone de nuevas observaciones. De esta forma, el contenido armónico del modelo puede *transformarse* y adaptarse a los nuevos datos añadidos con la finalidad de captar una posible evolución del fenómeno que se estudia. Estos modelos dinámicos pueden ser

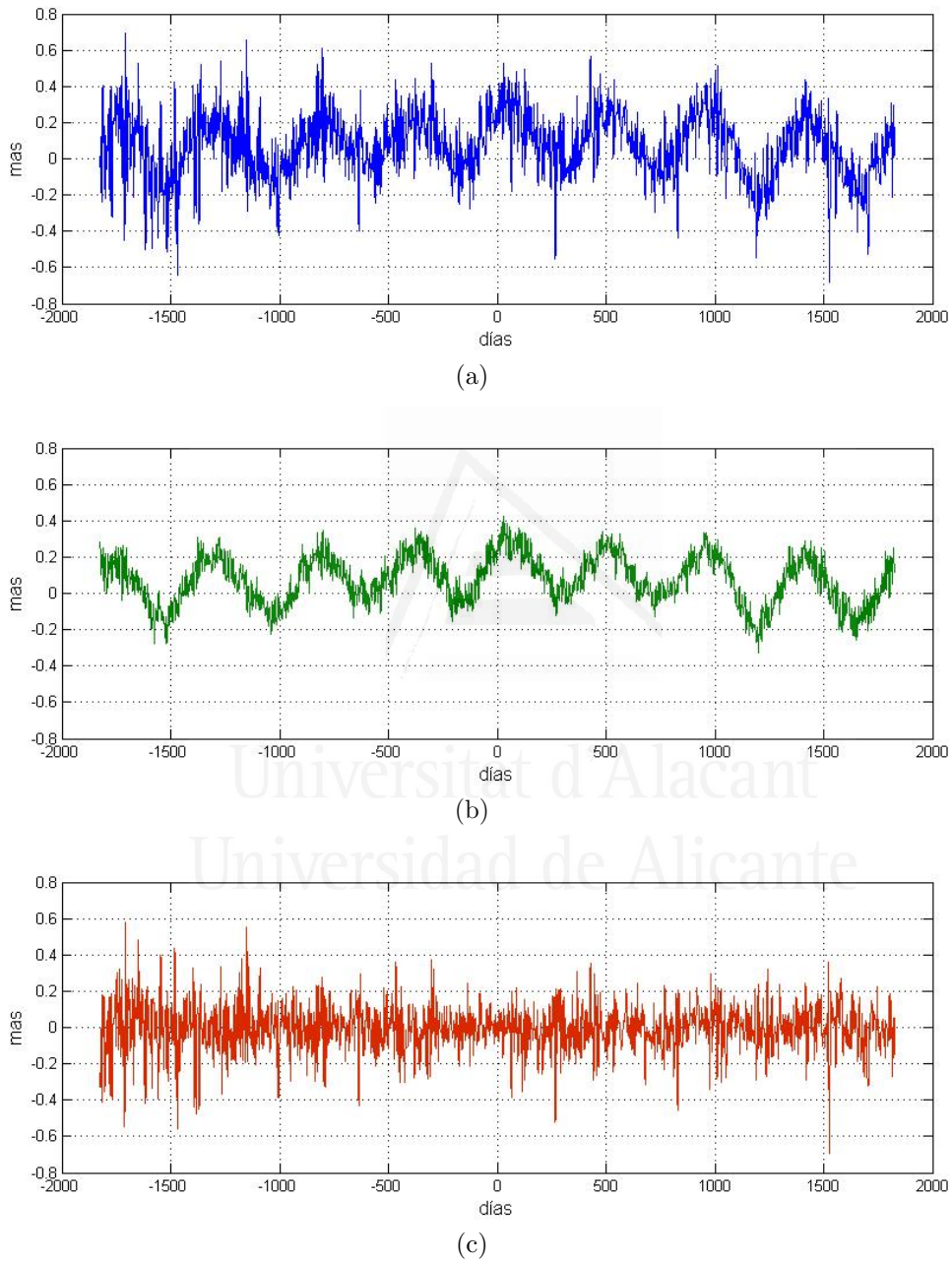


Figura 4.12: Serie temporal  $\delta X$  desde 23 de septiembre de 2000 hasta 23 de septiembre de 2010. (a) Serie original, (b) modelo estimado y (c) residuales.

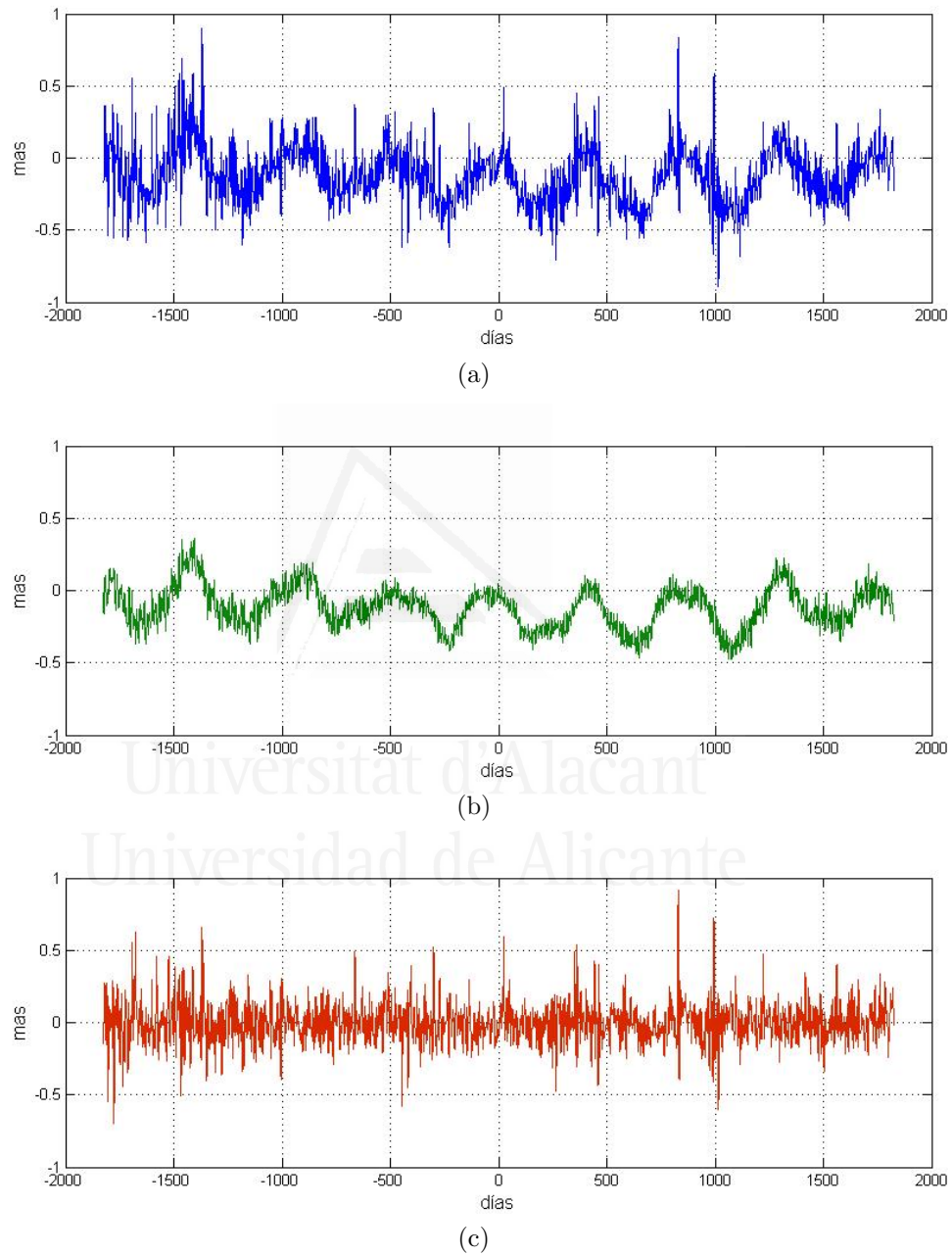


Figura 4.13: Serie temporal  $\delta Y$  desde 23 de septiembre de 2000 hasta 23 de septiembre de 2010. (a) Serie original, (b) modelo estimado y (c) residuales.

Tabla 4.11: Términos de Fourier. Descomposición armónica de  $(\delta X, \delta Y)$  (periodo 23/09/2000 al 23/09/2010) según el modelo de precesión-nutación IAU2000. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, periodo (días), coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta X$ , y los coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta Y$ , respectivamente.

| No. | $\Pi$         | $S_{\delta X}$ | $C_{\delta X}$ | $S_{\delta Y}$ | $C_{\delta Y}$ |
|-----|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1   | 446.89± 0.67  | 0.1150±0.0025  | 0.0896±0.0024  | -0.0843±0.0040 | 0.1293±0.0038  |
| 2   | 3265.60±88.54 | 0.0241±0.0040  | 0.0600±0.0022  | -0.0358±0.0053 | -0.0438±0.0042 |
| 3   | 13.66± 0.00   | 0.0305±0.0021  | -0.0159±0.0020 | 0.0070±0.0035  | 0.0432±0.0034  |
| 4   | 6.99± 0.00    | 0.0249±0.0022  | 0.0155±0.0022  | 0.0139±0.0036  | 0.0013±0.0036  |
| 5   | 268.96± 1.27  | -0.0140±0.0025 | 0.0130±0.0024  | -0.0340±0.0036 | -0.0142±0.0034 |
| 6   | 650.44± 5.51  | 0.0113±0.0026  | 0.0131±0.0026  | 0.0014±0.0042  | -0.0034±0.0040 |
| 7   | 17.75± 0.00   | -0.0036±0.0020 | -0.0035±0.0021 | -0.0059±0.0040 | 0.0060±0.0041  |
| 8   | 92.91± 0.29   | 0.0204±0.0021  | -0.0086±0.0020 | -0.0055±0.0035 | 0.0073±0.0035  |
| 9   | 182.16± 0.79  | -0.0007±0.0022 | 0.0079±0.0021  | 0.0405±0.0035  | 0.0030±0.0034  |
| 10  | 54.53± 0.13   | -0.0083±0.0021 | -0.0223±0.0020 | 0.0038±0.0035  | -0.0012±0.0034 |
| 11  | 379.19± 2.20  | 0.0012±0.0024  | 0.0045±0.0024  | 0.0237±0.0042  | 0.0140±0.0043  |
| 12  | 11.47± 0.00   | 0.0081±0.0021  | 0.0079±0.0021  | 0.0059±0.0040  | -0.0060±0.0040 |
| 13  | 25.16± 0.02   | 0.0158±0.0020  | 0.0119±0.0020  | -0.0015±0.0035 | -0.0021±0.0034 |
| 14  | 66.03± 0.11   | 0.0065±0.0021  | -0.0186±0.0020 | 0.0055±0.0035  | 0.0110±0.0034  |
| 15  | 11.75± 0.00   | -0.0106±0.0021 | 0.0154±0.0021  | -0.0113±0.0034 | -0.0013±0.0034 |
| 16  | 8.18± 0.00    | -0.0041±0.0020 | 0.0188±0.0020  | -0.0120±0.0034 | -0.0021±0.0034 |
| 17  | 7.02± 0.00    | 0.0164±0.0022  | -0.0041±0.0022 | -0.0237±0.0036 | 0.0045±0.0036  |
| 18  | 7.77± 0.00    | -0.0176±0.0020 | -0.0035±0.0020 | -0.0076±0.0034 | -0.0111±0.0034 |
| 19  | 46.79± 0.06   | 0.0045±0.0021  | 0.0082±0.0021  | -0.0121±0.0041 | 0.0003±0.0040  |
| 20  | 12.22± 0.00   | -0.0047±0.0020 | -0.0053±0.0021 | -0.0080±0.0041 | -0.0055±0.0040 |

Tabla 4.12: Igual que la Tabla 4.11 pero para los términos seculares mixtos correspondientes al modelo asociado a las variaciones en la coordenada X. Se muestra, respectivamente, el orden de extracción de la frecuencia, periodo (días) y los coeficientes ( $\mu$ as) asociados a los términos en seno y coseno.

| No. | $\Pi$        | $SS_{\delta X}$              | $CC_{\delta X}$              |
|-----|--------------|------------------------------|------------------------------|
| 6   | 650.44± 5.51 | 0.0142±2.8×10 <sup>-3</sup>  | -0.0324±2.8×10 <sup>-3</sup> |
| 7   | 17.75± 0.00  | 0.0000±2.7×10 <sup>-3</sup>  | 0.0027±2.8×10 <sup>-3</sup>  |
| 11  | 379.19± 2.20 | -0.0249±2.7×10 <sup>-3</sup> | -0.0037±2.9×10 <sup>-3</sup> |
| 12  | 11.47± 0.00  | -0.0068±2.7×10 <sup>-3</sup> | 0.0006±2.8×10 <sup>-3</sup>  |
| 19  | 46.79± 0.06  | 0.0076±2.7×10 <sup>-3</sup>  | -0.0010±2.7×10 <sup>-3</sup> |
| 20  | 12.22± 0.00  | 0.0007±2.8×10 <sup>-3</sup>  | 0.0221±2.7×10 <sup>-3</sup>  |

Tabla 4.13: Igual que la Tabla 4.12 pero para el modelo correspondiente a las variaciones en la coordenada Y.

| No. | $\Pi$             | $SS_{\delta Y}$                  | $CC_{\delta Y}$                  |
|-----|-------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 6   | $650.44 \pm 5.51$ | $0.0379 \pm 4.0 \times 10^{-3}$  | $0.0123 \pm 4.0 \times 10^{-3}$  |
| 7   | $17.75 \pm 0.00$  | $0.0327 \pm 3.7 \times 10^{-3}$  | $-0.0069 \pm 3.9 \times 10^{-3}$ |
| 11  | $379.19 \pm 2.20$ | $-0.0064 \pm 3.9 \times 10^{-3}$ | $-0.0259 \pm 4.2 \times 10^{-3}$ |
| 12  | $11.47 \pm 0.00$  | $-0.0111 \pm 3.8 \times 10^{-3}$ | $0.0275 \pm 3.8 \times 10^{-3}$  |
| 19  | $46.79 \pm 0.06$  | $0.0205 \pm 3.8 \times 10^{-3}$  | $-0.0082 \pm 3.8 \times 10^{-3}$ |
| 20  | $12.22 \pm 0.00$  | $-0.0115 \pm 3.9 \times 10^{-3}$ | $0.0063 \pm 3.7 \times 10^{-3}$  |

también útiles para la realización de predicciones. Consideremos la serie temporal vectorial  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$  estudiada en la sección 4.1. Lo que haremos a continuación será utilizar una rutina programada en MATLAB que permite crear un modelo armónico no lineal del tipo descrito en el capítulo 3 y establecer la predicción del fenómeno para el mes siguiente. El primero de los modelos se construye considerando únicamente los datos comprendidos entre el 23 de septiembre de 2000 y el 23 de septiembre de 2005. Utilizando el modelo estimado, se establece una predicción para los 31 días siguientes. Dado que disponemos de los verdaderos valores que adoptan  $\delta\psi$  y  $\delta\epsilon$ , podemos calcular el valor absoluto de los errores cometidos en la predicción. Este modelo se va actualizando y re-estimando semanalmente, estableciendo nuevamente la predicción para los 31 días siguientes. De esta manera, cada 7 nuevas observaciones obtenemos una modificación del modelo previo y una nueva predicción que avanza semanalmente en el tiempo. Estos modelos tienen las mismas características que los desarrollados en la sección 4.1, es decir, están formados por una tendencia lineal y un contenido armónico que consta de 20 frecuencias fundamentales extraídas a partir de un análisis de la serie vectorial  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$ .

Los errores cometidos en las predicciones diarias pueden disponerse matricialmente de forma que:

- Cada fila haga referencia al número de días transcurridos (en el futuro) a partir del último incluido en la estimación del modelo.
- Cada columna represente el orden o etiqueta del modelo obtenido tras añadir

7 observaciones más al conjunto de datos con respecto al modelo anterior.

La Figura 4.14 muestra los valores absolutos de estos errores. Como podemos apreciar, los mapas de errores presentan una distribución bastante uniforme con valores que oscilan, mayormente, entre 0 y 0.4 *mas*. No obstante existen rangos temporales donde la precisión de las predicciones disminuye un poco. Así pues, en el caso de  $\delta\psi$  destacan las predicciones para el año 2008-2009, mediante el uso de los modelos numerados 140–180. En este rango se muestra una mancha que abarca errores mayores que 0.4 *mas* en algunos casos. Estas imprecisiones, que afectan principalmente a las previsiones para finales de 2008, no parecen empeorar a medida que la predicción se aleja del último dato incluido en el modelo utilizado. Una vez las observaciones correspondientes a 2008 se han incluido en el conjunto de datos empleados a la estimación del modelo, esta mancha desaparece prácticamente. No obstante, a partir del modelo dinámico n°220 vuelven a surgir ciertas imprecisiones en la predicción para los últimos meses de 2009 (septiembre-diciembre) y principios de 2010. Este aumento del error es mucho más acusado para el caso de los desplazamientos en oblicuidad que, en esta ocasión, afecta principalmente a las predicciones para finales del 2006 y de manera más persistente a las correspondientes al año 2008 (Figura 4.14b).

Para estudiar el comportamiento que estos modelos dinámicos manifiestan frente a las predicciones podemos estimar el RMS cometido a medida que avanzamos en el futuro. Es decir, evaluaremos de algún modo el error que podemos esperar al establecer una predicción a una distancia determinada en el tiempo. Para ello utilizaremos:

$$RMSE(h) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\delta\psi^{(i)}(t^{(i)} + h) - \delta\psi(t^{(i)} + h))^2} \quad (4.10)$$

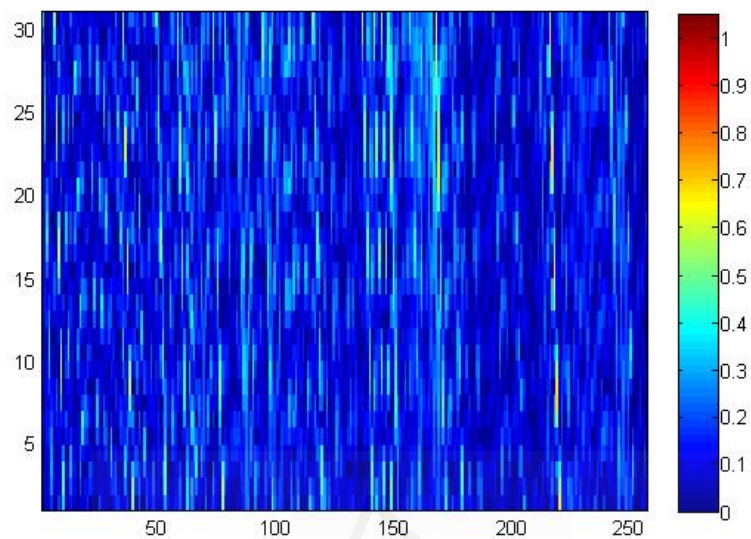
con  $h = 1, 2, \dots, 31$  y donde  $\delta\psi^{(i)}(t^{(i)} + h)$  es la predicción establecida mediante el modelo  $i$ -ésimo tras  $h$  días desde la última observación ( $t^{(i)}$ ) considerada en la estimación del modelo,  $M$  es número de modelos dinámicos construidos y  $\delta\psi(t^{(i)} + h)$  es el valor real adoptado por  $\delta\psi$  en el instante  $t^{(i)} + h$ . La expresión para  $\delta\epsilon$  es análoga. En definitiva, estos valores se corresponden con el RMS por filas de los errores contenidos en la matriz correspondiente representada en la Figura 4.14. Los valores para

el  $RMSE(h)$  aparecen representados en la Figura 4.16. Aquí puede contemplarse el crecimiento del error en la predicción a medida que ésta hace referencia a un futuro más lejano. A la vista de las gráficas, podemos observar como el  $RMSE(h)$  muestra una tasa de crecimiento global positiva, aunque en el caso de  $\delta\epsilon$  ésta parece más estable.

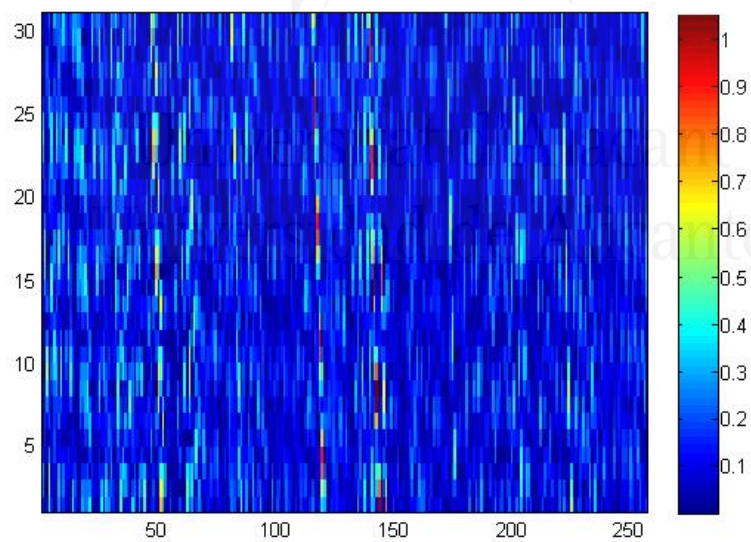
Tras observar estos resultados nos preguntamos si los errores en la predicción se deben a la inclusión de frecuencias procedentes de un análisis vectorial. Así pues, para establecer una comparación en cuanto a calidad predictiva, calculamos los modelos dinámicos escalares para cada componente. Los resultados obtenidos generan unos mapas de errores absolutos y una evolución del  $RMSE(h)$  que aparecen representados en las Figuras 4.15 y 4.17. Si comparamos los mapas de color que contienen los errores en los casos escalar y vectorial, se observa que para  $\delta\psi$  apenas existen diferencias sustanciales salvo una leve mejora en las predicciones del 2009–2010. Las diferencias son mucho más sustanciales en el caso de  $\delta\epsilon$ , donde se muestran muchas más líneas degradadas hacia tonalidades cálidas (asociadas, por tanto, a peores predicciones) que en el caso del modelo dinámico vectorial (sobre todo durante 2009 y 2010). Comparando la evolución del  $RMSE(h)$ , apenas encontramos diferencias para el caso de  $\delta\psi$ , donde el patrón de crecimiento es muy similar. Contrariamente, para  $\delta\epsilon$  la variación del  $RMSE(h)$  en el caso escalar presenta una tendencia positiva bastante más notable que en el vectorial.

Ante los resultados obtenidos podría decirse que el modelo dinámico vectorial proporciona mejores estimaciones. Para el caso de  $\delta\psi$ , los modelos escalar y vectorial son bastante similares pero en cuanto al caso de los desplazamientos en oblicuidad,  $\delta\epsilon$ , puede decirse que el modelo vectorial es preferible. Los errores más acusados (producidos principalmente en el año 2008-2009) podrían derivar de algún fenómeno como *El Niño-Southern Oscillation* (ENSO), el cual tuvo lugar en este periodo y que afecta a la rotación terrestre (Niedzielski and Kosek, 2008). Sería interesante continuar analizando y estudiando estos modelos dinámicos a medida que se disponen de más datos sobre  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$ . Se ha propuesto también el análisis de la variación del contenido armónico de estos modelos, así como de las amplitudes asociadas a cada línea espectral, en busca de alguna pauta que ayude a comprender mejor el comportamiento de  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$  en el futuro.



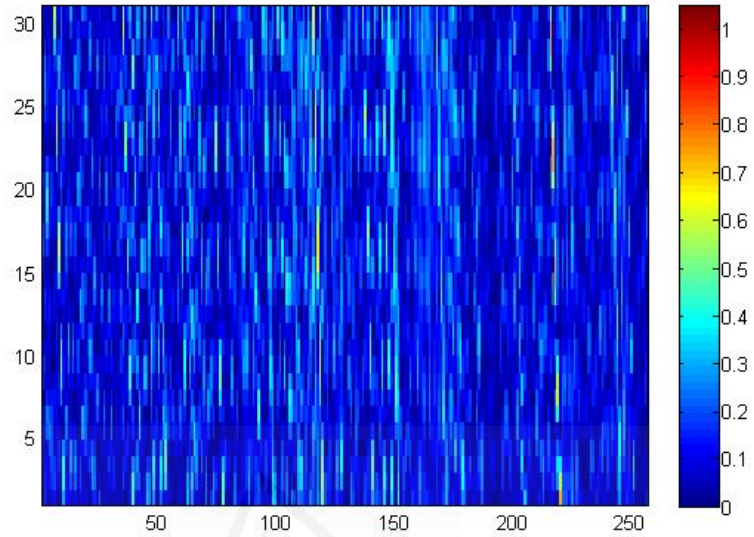


(a)

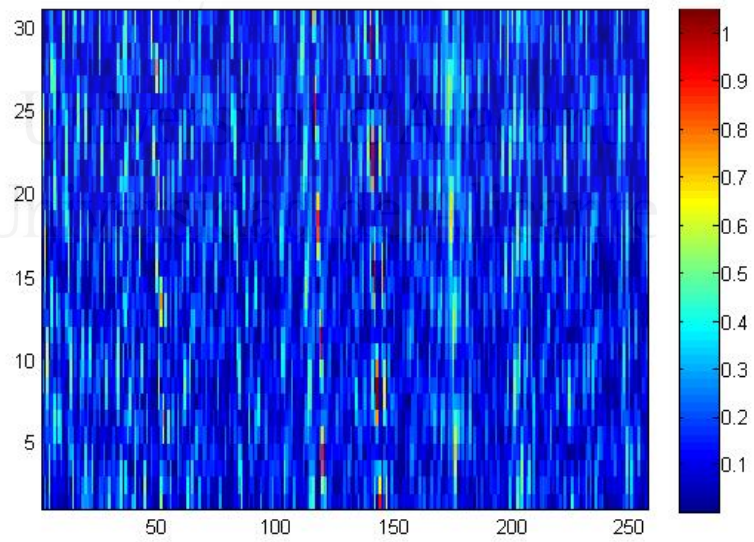


(b)

Figura 4.14: Error absoluto (*mas*) de la predicción con el modelo vectorial para (a)  $\delta\psi$  y (b)  $\delta\epsilon$ . En el eje vertical aparecen representados los días predichos en el futuro. Por su parte, el eje horizontal indica el orden-etiqueta del modelo armónico no lineal utilizado.

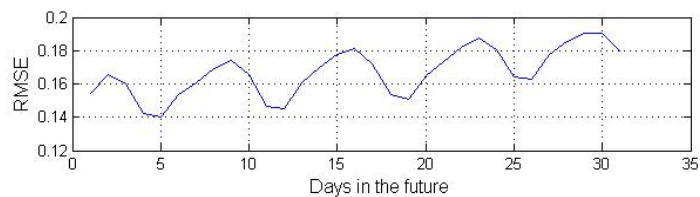


(a)

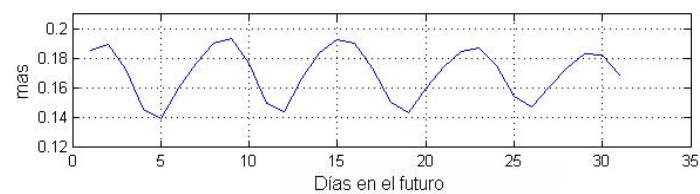


(b)

Figura 4.15: Error absoluto (*mas*) de la predicción con el modelo escalar para (a)  $\delta\psi$  y (b)  $\delta\epsilon$ . En el eje vertical aparecen representados los días predichos en el futuro. Por su parte, el eje horizontal indica el orden del modelo armónico no lineal utilizado.

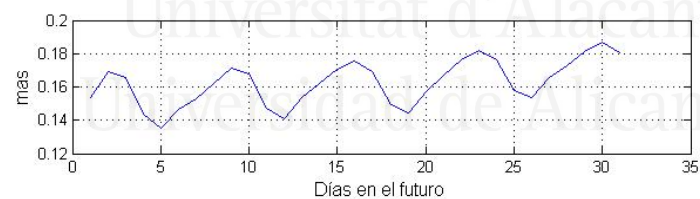


(a)



(b)

Figura 4.16: Modelo vectorial. Degradación del RMS (*mas*) a lo largo del tiempo. (a) Componente  $\delta\psi$  y (b) componente  $\delta\epsilon$ .



(a)



(b)

Figura 4.17: Modelo escalar. Degradación del RMS (*mas*) a lo largo del tiempo. (a) Componente  $\delta\psi$  y (b) componente  $\delta\epsilon$ .

---

## Capítulo 5

# Variaciones geocéntricas causadas por el flujo de agua continental

### 5.1. Introducción

Se define *geocentro* como el centro de masas del sistema terrestre formado por la tierra sólida, océanos, agua continental y atmósfera (Chen et al., 1999). En un marco de referencia ligado a la Tierra sólida, definido mediante un conjunto de coordenadas medias de estaciones geodéticas, el centro de masas del sistema terrestre se mueve debido a la redistribución de masa del propio sistema (Bouillé et al., 2000).

A niveles intraestacional e interanual, la redistribución de masa se debe básicamente al desplazamiento de fluidos en la atmósfera, océanos, aguas continentales, capas de hielo, y al intercambio de masa entre ellos (Bouillé et al., 2000). Ahora bien, ¿hasta qué punto puede afectar esta redistribución de masa a la posición del geocentro? Importantes estudios se han realizado en relación a dicha cuestión (Chen et al., 1999; Dong et al., 1997), concluyendo que la contribución de la presión atmosférica, la masa oceánica y las aguas continentales producen una variación anual de dicho movimiento no mayor de 5 milímetros (*mm*).

Hoy en día, gracias a las nuevas técnicas geodésicas es posible conocer, de forma más o menos precisa, el movimiento del centro de masas del sistema terrestre. ¿Cómo podemos determinar este movimiento del geocentro? Disponemos básicamente de dos técnicas:

1. Mediante el **estudio de las variaciones temporales de los coeficientes de Stokes de primer grado para el potencial terrestre**: Teóricamente, la órbita de los satélites se describe en un marco de referencia inercial cuyo centro es el centro de masas del sistema terrestre. En este sistema inercial se cumple que los coeficientes de primer grado para el potencial terrestre ( $C_{11}, S_{11}, C_{10}$ ) son nulos. El geocentro está, por tanto, fijo en el espacio. Sin embargo, en un marco de referencia ligado a la Tierra sólida, definido mediante las coordenadas medias de las posiciones de estaciones geodéticas, el geocentro adquiere una posición variable. Además, para dicho marco de referencia (cuyo centro se denomina *centro geométrico*) se tiene que los coeficientes de primer grado para el geopotencial no son nulos. De hecho, sus valores están relacionados con las coordenadas del geocentro a través de las ecuaciones (ver Bouillé et al., 2000; Chen et al., 1999):

$$X = R_E C_{11} \quad (5.1)$$

$$Y = R_E S_{11} \quad (5.2)$$

$$Z = R_E C_{10} \quad (5.3)$$

donde  $(X, Y, Z)$  son las coordenadas cartesianas del geocentro en el marco de referencia terrestre y  $R_E$  es el radio medio de la Tierra. Así pues, como vemos, el cálculo de la órbita del satélite con respecto al marco de referencia terrestre permite determinar los coeficientes de primer grado del geopotencial y estos, a su vez, las coordenadas del geocentro.

2. **Determinando las variaciones temporales de las coordenadas de estaciones geodéticas**: En este caso, se asume que los coeficientes de primer grado del geopotencial son nulos, lo cual es equivalente a calcular la posición de los satélites en un marco de referencia inercial. En una computación de órbitas dinámica, en la cual las posiciones para los satélites y las estaciones se calculan simultáneamente, las coordenadas de las estaciones están también expresadas en un *marco de referencia instantáneo* cuyo centro se correspondería con el *geocentro instantáneo*. Estimando la media de las coordenadas de las posiciones de las estaciones sobre un periodo de tiempo considerable de varios

años, uno puede definir lo que denominaríamos el *geocentro medio*, que coincidiría con un centro de masas medio de la Tierra sólida, es decir con el centro geométrico. Comparando las coordenadas instantáneas de las estaciones con las coordenadas medias puede obtenerse una medida de las variaciones “*geocentro instantáneo – centro geométrico*” en función del tiempo.

Estas técnicas proporcionan la variación global del geocentro en función del tiempo, pero ¿cómo podríamos evaluar qué parte de esta variación es debida a la redistribución de masa atmosférica, oceánica o de agua continental? Para responder a esta cuestión, el investigador puede hacer uso de datos climatológicos o hidrológicos que recojan el comportamiento de dichos subsistemas y a partir de ellos estudiar la variación temporal del centro de masas. En este capítulo que nos ocupa, nos centraremos en el estudio del comportamiento del geocentro debido a la redistribución del agua continental. Hoy día existen multitud de modelos climatológicos/hidrológicos a partir de los cuales estimar estas variaciones, no obstante, se ha considerado oportuno utilizar la base de datos del modelo LDAS (*Land Data Assimilation System*) producido por el *Centro de Predicción Climatológica* (CPC) de NOAA (*National Oceanic and Atmospheric Administration*) por varios motivos: primero porque abarca un periodo de tiempo más amplio que otros modelos publicados y en segundo lugar porque los datos están recogidos mensualmente lo cual es ideal para nuestras pretensiones, que son conocer el contenido armónico tanto a nivel interanual como intranual dejando a un lado aquellas variaciones que tienen lugar a escalas inferiores a un mes.

## 5.2. Descripción de los datos

Para el análisis de las variaciones producidas en el geocentro debidas a la carga de agua continental, se ha considerado el modelo de superficie terrestre conocido por el acrónimo LDAS y desarrollado por el CPC en NOAA. Este modelo proporciona la temperatura y humedad del suelo teniendo en cuenta hasta cuatro capas bajo tierra. Para ello, LDAS recurre a la observación y toma de datos relacionados con las precipitaciones, radiación solar, presión de la superficie, humedad y velocidad del viento, entre otros factores. De este modelo, consideraremos únicamente aquella información referente a la cantidad media de agua continental almacenada en la superficie. Los

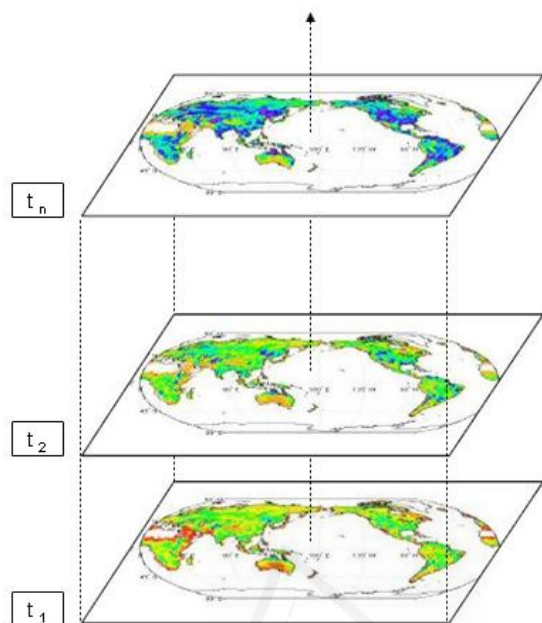


Figura 5.1: Esquema gráfico de la serie multidimensional para el almacenamiento de agua continental.

datos utilizados<sup>1</sup> se distribuyen en redes formadas por mallas o cuadrículas de 1x1 grado y cubren toda la superficie del planeta, aunque cabe señalar que no se proporcionan estimaciones sobre la Antártida. En cada una de estas mallas que componen la red o mapa, se almacena el valor medio estimado de agua medida en *centímetros (cm) de agua equivalente*. En definitiva, se dispone exactamente de una red con 180x360 regiones para cada mes del periodo de tiempo comprendido entre enero de 1970 y diciembre de 2007. Ello se transcribe en un total de 456 observaciones por cada malla de 1x1 grado en la red.

Como se ha dicho anteriormente, estos datos contienen la información referente a la cantidad de agua existente en una determinada región del planeta, para un mes determinado. Sin embargo, si lo que pretendemos es estudiar en qué sentido afecta esta distribución de la masa de agua continental a la posición del geocentro, deberemos transformar dicha información de tal forma que podamos realizar una lectura adecuada de la misma conforme a nuestras pretensiones. Así pues, se consi-

<sup>1</sup>Disponibles en el sitio web <http://www.csr.utexas.edu/research/ggfc/>, más concretamente en la página <ftp://ftp.crs.utexas.edu/pub/ggfc/water/CPC/>

derará cada red de datos como un sistema de partículas, donde cada una de ellas se corresponde con una cuadrícula de 1x1 grado y cuya masa se asigna en función de su área y de la cantidad de agua registrada en la misma. A partir de aquí podemos calcular fácilmente las coordenadas del centro de masas para dicho sistema. Repitiendo este proceso con cada uno de los mapas disponibles, conseguimos construir una serie temporal que describe la evolución y variación en la posición del geocentro debido a la redistribución de la carga de agua continental. Como sabemos, las coordenadas cartesianas del vector de posición del geocentro para un sistema de masas (como el formado por el agua en superficie) viene dado por (ver Chen et al., 1999):

$$X = \frac{R_E}{M_E} \sum_{\phi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{\lambda=0}^{2\pi} \cos \phi \cos \lambda \cdot L(\phi, \lambda) \cdot \Delta s = R_E \cdot C_{1,1} \quad (5.4)$$

$$Y = \frac{R_E}{M_E} \sum_{\phi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{\lambda=0}^{2\pi} \cos \phi \sin \lambda \cdot L(\phi, \lambda) \cdot \Delta s = R_E \cdot S_{1,1} \quad (5.5)$$

$$Z = \frac{R_E}{M_E} \sum_{\phi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{\lambda=0}^{2\pi} \sin \phi \cdot L(\phi, \lambda) \cdot \Delta s = R_E \cdot C_{1,0} \quad (5.6)$$

donde  $\phi$  es la latitud,  $\lambda$  la longitud Este (ambas dadas en radianes),  $M_E = 5.9742 \times 10^{27}$  es la masa del planeta Tierra (en gramos),  $L(\phi, \lambda)$  representa la carga total de agua (expresada en cm de agua equivalente) en la cuadrícula que contiene las coordenadas  $(\phi, \lambda)$ ,  $R_E = 6.371 \times 10^8$  es el radio medio de la Tierra (en *cm*) y  $\Delta s$  es el área de la superficie asociada a la carga  $L(\phi, \lambda)$  y que viene dada aproximadamente por:

$$\Delta s = R_E^2 \cos \phi \cdot \Delta \phi \cdot \Delta \lambda \quad (5.7)$$

Utilizando las ecuaciones (5.4)–(5.6) y los datos que contienen el almacenamiento de agua continental en distintas regiones del planeta, se construyen las series temporales que serán analizadas mediante el método armónico no lineal descrito en el capítulo 3. Crearemos, así, un modelo que proporcione información sobre las variaciones en el vector de posición del geocentro debido a la fluctuación de la capa de agua continental.



### 5.3. Características del análisis y resultados

Antes de proceder a un análisis de las series temporales  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , hemos de plantearnos si debemos considerar los datos como una única serie multidimensional o si, por el contrario, es preferible el estudio independiente de tres series temporales escalares. Dado que cada componente representa una dirección en el sistema de referencia terrestre, puede resultar interesante realizar un estudio individual de cada serie temporal para poder más tarde interpretar los resultados e intentar dilucidar las causas de dichas variaciones.

Así pues, se ha realizado el consecuente estudio de cada una de las tres series temporales escalares construidas,  $X$ ,  $Y$ , y  $Z$ , que hacen referencia a las coordenadas cartesianas del centro de masas de la capa de agua continental. Todas ellas disponen de un total de 456 observaciones distribuidas de forma regular en el tiempo, mensualmente, desde enero de 1970 hasta diciembre de 2007. Se han extraído hasta un máximo de 15 líneas espectrales por componente en un dominio de frecuencias comprendido entre 0.0001 y 0.5 ciclos por mes. Para la evaluación de los periodogramas se ha considerado una discretización del dominio de frecuencias que emplea un tamaño de paso de 0.0001 ciclos por mes. Obsérvese que el valor del tamaño de paso es suficiente para este estudio, ya que permite detectar sin problema periodos equivalentes al rango temporal disponible. La cota establecida para el módulo del vector de frecuencias que aparece durante la fase de optimización no lineal fue de 0.0001 unidades. Del mismo modo, la cota para el RMS fue fijada en 0.0001 *cm*. Dado que en esta ocasión no se dispone de las incertidumbres o errores asociados a los datos, se ha otorgado la misma importancia a todas las observaciones en el ajuste, es decir, el problema se reduce a un problema de *mínimos cuadrados no ponderados*. Tras una primera representación gráfica de las series temporales, se decide optar por la extracción de una tendencia lineal en lugar de cuadrática.

Una vez ejecutado el análisis mediante las rutinas algorítmicas programadas en MATLAB, se obtienen los resultados que a continuación se exponen. Comencemos por la estimación de la componente de tendencia. Ésta aparece representada gráficamente, para cada coordenada, en las Figuras 5.2c, 5.3c y 5.4c. Sus expresiones

analíticas vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$T_X(\tau_n) = (0.7550 \pm 0.0006) + (-0.0190 \pm 0.0006) \cdot \varphi_2(\tau_n) \quad (5.8)$$

$$T_Y(\tau_n) = (0.2299 \pm 0.0006) + (0.0056 \pm 0.0005) \cdot \varphi_2(\tau_n) \quad (5.9)$$

$$T_Z(\tau_n) = (1.3795 \pm 0.0004) + (-0.0181 \pm 0.0004) \cdot \varphi_2(\tau_n) \quad (5.10)$$

donde  $\tau_n = t_n - t_c$  es una traslación temporal centrada en  $t_c$  que se corresponde con mediados de enero de 1989, y donde  $\varphi_2(\tau_n)$  es la función base definida en (3.15). Los valores estimados, tanto de los coeficientes como de las incertidumbres, vienen expresados en *cm*.

En cuanto al contenido armónico de cada modelo, pueden observarse ciertas similitudes y algunas diferencias sustanciales. Como se aprecia en la representación de los periodogramas de Lomb para cada coordenada (Figuras 5.2a, 5.3a y 5.4a), todos ellos señalan la frecuencia anual como aquella que explica la mayor variabilidad del comportamiento. Además, comparando este espectro con el periodograma extendido, se observa que la frecuencia anual no está asociada a términos seculares mixtos en ninguno de los casos ya que el pico de frecuencia tiene menos potencia que su homólogo en el periodograma de Lomb. En las Tablas 5.1, 5.3 y 5.5 se recogen todas las frecuencias fundamentales extraídas de los datos así como los coeficientes asociados a los términos de Fourier y las incertidumbres de cada parámetro. Por otro lado, todas las coordenadas poseen alguna frecuencia fundamental asociada a términos seculares mixtos. Éstas aparecen detalladas en las Tablas 5.2, 5.4 y 5.6. Para una mejor captación de la componente armónica, se ha procedido a la representación gráfica del modelo (Figuras 5.2d, 5.3d, 5.4d) y los residuales derivados del ajuste para cada coordenada (Figuras 5.2e, 5.3e, 5.4e). Además, en las Figuras 5.2f, 5.3f, 5.4f se muestra la reducción del error cuadrático medio, RMS, en función del número de parámetros que se han ido introduciendo durante el ajuste hasta alcanzar el modelo armónico no lineal final.

Las Tablas 5.7, 5.8 y 5.9 contienen el valor de la amplitud,  $A$ , y fase,  $\theta$ , de cada señal para cada coordenada según el modelo dado por la ecuación (4.3). En este caso, hemos dispuesto la amplitud en *cm* y la fase indica el ángulo de máxima señal.

Tabla 5.1: Términos de Fourier. Descomposición armónica para las variaciones de la coordenada X del geocentro. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por mes), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por mes), periodo (meses) y coeficientes (cm) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | <i>f</i> | $\sigma_f$            | $\Pi$       | <i>S</i>       | <i>C</i>       |
|------------|----------|-----------------------|-------------|----------------|----------------|
| 1          | 0.083429 | $0.16 \times 10^{-4}$ | 11.99±0.00  | 0.0644±0.0008  | 0.0086±0.0008  |
| 2          | 0.009690 | $0.43 \times 10^{-4}$ | 103.20±0.46 | -0.0186±0.0009 | 0.0162±0.0009  |
| 3          | 0.005511 | $0.43 \times 10^{-4}$ | 181.44±1.40 | 0.0087±0.0009  | -0.0047±0.0009 |
| 4          | 0.031854 | $0.48 \times 10^{-4}$ | 31.39±0.05  | -0.0013±0.0009 | 0.0014±0.0009  |
| 5          | 0.023275 | $0.84 \times 10^{-4}$ | 42.97±0.15  | 0.0093±0.0009  | 0.0110±0.0009  |
| 6          | 0.020115 | $1.03 \times 10^{-4}$ | 49.71±0.25  | 0.0110±0.0009  | 0.0010±0.0009  |
| 7          | 0.049815 | $0.78 \times 10^{-4}$ | 20.07±0.03  | 0.0056±0.0009  | -0.0120±0.0009 |
| 8          | 0.055741 | $0.99 \times 10^{-4}$ | 17.94±0.03  | -0.0109±0.0009 | 0.0063±0.0009  |
| 9          | 0.249955 | $1.02 \times 10^{-4}$ | 4.00±0.00   | 0.0021±0.0008  | 0.0097±0.0008  |
| 10         | 0.027124 | $0.96 \times 10^{-4}$ | 36.87±0.13  | -0.0078±0.0009 | 0.0080±0.0009  |
| 11         | 0.039632 | $0.94 \times 10^{-4}$ | 25.23±0.06  | 0.0058±0.0009  | 0.0080±0.0008  |
| 12         | 0.093058 | $1.04 \times 10^{-4}$ | 10.75±0.01  | 0.0022±0.0008  | 0.0037±0.0008  |
| 13         | 0.062207 | $0.91 \times 10^{-4}$ | 16.08±0.02  | 0.0013±0.0008  | -0.0029±0.0008 |
| 14         | 0.016199 | $1.26 \times 10^{-4}$ | 61.73±0.48  | -0.0040±0.0009 | -0.0073±0.0009 |
| 15         | 0.123874 | $1.14 \times 10^{-4}$ | 8.07±0.01   | -0.0008±0.0008 | 0.0001±0.0008  |

Tabla 5.2: Igual que la Tabla 5.1 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (meses) y coeficientes (cm) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | $\Pi$       | <i>SS</i>                                      | <i>CC</i>                                     |
|------------|-------------|--|---|
| 3          | 181.44±1.40 | $-1.485 \times 10^{-4} \pm 7.0 \times 10^{-6}$ | $4.93 \times 10^{-5} \pm 8.0 \times 10^{-6}$  |
| 4          | 31.39±0.05  | $1.074 \times 10^{-4} \pm 6.6 \times 10^{-6}$  | $7.58 \times 10^{-5} \pm 6.9 \times 10^{-6}$  |
| 12         | 10.75±0.01  | $4.75 \times 10^{-5} \pm 6.4 \times 10^{-6}$   | $-2.83 \times 10^{-5} \pm 6.4 \times 10^{-6}$ |
| 13         | 16.08±0.02  | $7.4 \times 10^{-6} \pm 6.6 \times 10^{-6}$    | $-6.40 \times 10^{-5} \pm 6.6 \times 10^{-6}$ |
| 15         | 8.07±0.01   | $-3.97 \times 10^{-5} \pm 6.4 \times 10^{-6}$  | $-3.96 \times 10^{-5} \pm 6.4 \times 10^{-6}$ |

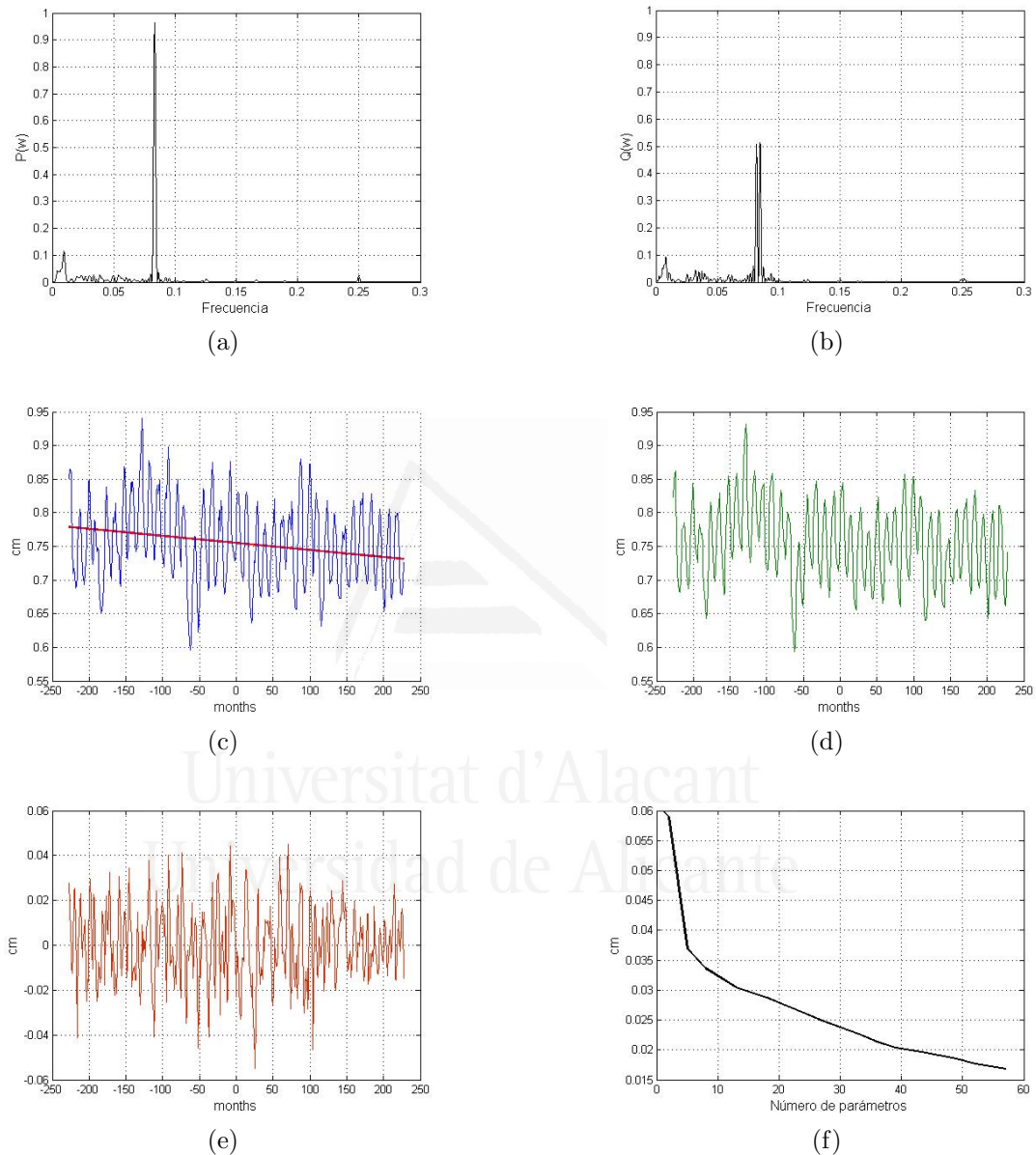


Figura 5.2: Resultados gráficos para el modelo de ajuste correspondiente a las variaciones en la coordenada X del geocentro. En esta figura se muestran: (a) Peridograma de Lomb, (b) periodograma extendido, (c) serie temporal original (en azul) y componente de tendencia estimada (en rojo), (d) modelo armónico estimado, (e) residuales generados por el ajuste y (f) reducción del RMS en función del número de parámetros contenidos en el modelo durante el proceso de ajuste.

Tabla 5.3: Términos de Fourier. Descomposición armónica para las variaciones de la coordenada Y del geocentro. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por mes), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por mes), periodo (meses) y coeficiente (cm) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | <i>f</i> | $\sigma_f$            | $\Pi$             | <i>S</i>             | <i>C</i>             |
|------------|----------|-----------------------|-------------------|----------------------|----------------------|
| 1          | 0.083343 | $0.09 \times 10^{-4}$ | $12.00 \pm 0.00$  | $-0.1061 \pm 0.0008$ | $-0.0174 \pm 0.0008$ |
| 2          | 0.166688 | $0.30 \times 10^{-4}$ | $6.00 \pm 0.00$   | $0.0272 \pm 0.0008$  | $-0.0146 \pm 0.0008$ |
| 3          | 0.008098 | $0.48 \times 10^{-4}$ | $123.49 \pm 0.73$ | $-0.0079 \pm 0.0008$ | $0.0186 \pm 0.0008$  |
| 4          | 0.011226 | $0.54 \times 10^{-4}$ | $89.08 \pm 0.43$  | $0.0136 \pm 0.0008$  | $0.0147 \pm 0.0008$  |
| 5          | 0.033622 | $0.61 \times 10^{-4}$ | $29.74 \pm 0.05$  | $-0.0098 \pm 0.0008$ | $0.0138 \pm 0.0008$  |
| 6          | 0.003636 | $0.74 \times 10^{-4}$ | $275.02 \pm 5.56$ | $0.0089 \pm 0.0008$  | $-0.0101 \pm 0.0008$ |
| 7          | 0.023732 | $0.51 \times 10^{-4}$ | $42.14 \pm 0.09$  | $-0.0048 \pm 0.0008$ | $0.0054 \pm 0.0008$  |
| 8          | 0.040596 | $0.75 \times 10^{-4}$ | $24.63 \pm 0.05$  | $0.0013 \pm 0.0008$  | $-0.0009 \pm 0.0008$ |
| 9          | 0.018081 | $0.77 \times 10^{-4}$ | $55.31 \pm 0.23$  | $0.0083 \pm 0.0008$  | $0.0100 \pm 0.0008$  |
| 10         | 0.013789 | $0.98 \times 10^{-4}$ | $72.52 \pm 0.51$  | $0.0006 \pm 0.0008$  | $0.0115 \pm 0.0008$  |
| 11         | 0.077288 | $1.11 \times 10^{-4}$ | $12.94 \pm 0.02$  | $0.0073 \pm 0.0008$  | $0.0006 \pm 0.0008$  |
| 12         | 0.045162 | $1.11 \times 10^{-4}$ | $22.14 \pm 0.05$  | $0.0089 \pm 0.0008$  | $-0.0015 \pm 0.0008$ |
| 13         | 0.036035 | $1.14 \times 10^{-4}$ | $27.75 \pm 0.09$  | $-0.0079 \pm 0.0008$ | $-0.0024 \pm 0.0008$ |
| 14         | 0.102659 | $1.43 \times 10^{-4}$ | $9.74 \pm 0.01$   | $-0.0015 \pm 0.0008$ | $-0.0066 \pm 0.0008$ |
| 15         | 0.050884 | $1.67 \times 10^{-4}$ | $19.65 \pm 0.06$  | $-0.0060 \pm 0.0008$ | $0.0031 \pm 0.0008$  |

Tabla 5.4: Igual que la Tabla 5.3 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (meses) y coeficientes (cm) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | $\Pi$            | <i>SS</i>                                    | <i>CC</i>                                     |
|------------|------------------|--|---|
| 7          | $42.14 \pm 0.09$ | $8.11 \times 10^{-5} \pm 5.8 \times 10^{-6}$ | $-5.88 \times 10^{-5} \pm 6.0 \times 10^{-6}$ |
| 8          | $24.63 \pm 0.05$ | $7.46 \times 10^{-5} \pm 6.3 \times 10^{-6}$ | $-6.1 \times 10^{-6} \pm 6.4 \times 10^{-6}$  |

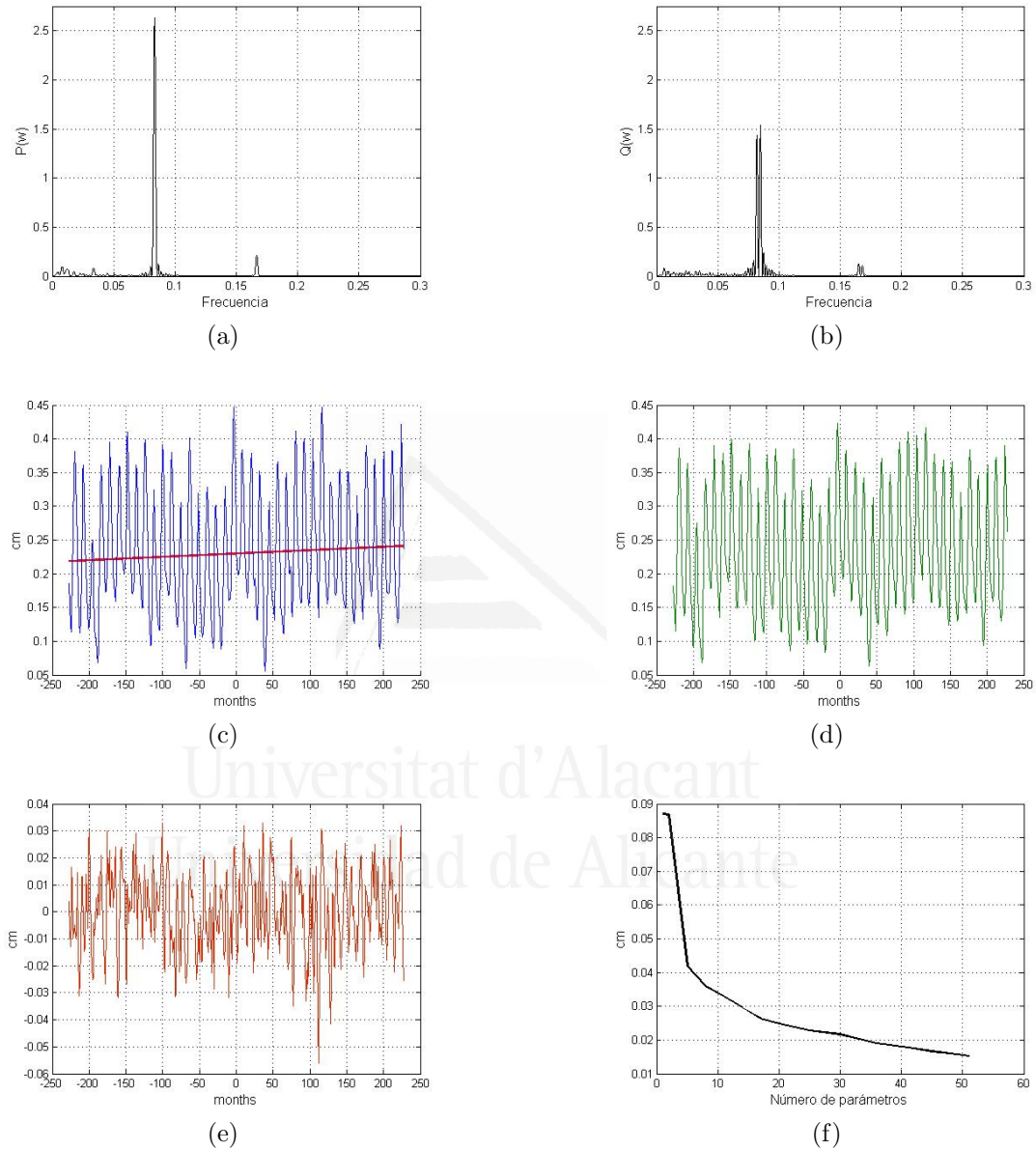


Figura 5.3: Resultados gráficos para el modelo de ajuste correspondiente a las variaciones en la coordenada Y del geocentro. En esta figura se muestran: (a) Peridograma de Lomb, (b) periodograma extendido, (c) serie temporal original (en azul) y componente de tendencia estimada (en rojo), (d) modelo armónico estimado, (e) residuales generados por el ajuste y (f) reducción del RMS en función del número de parámetros contenidos en el modelo durante el proceso de ajuste.

Tabla 5.5: Términos de Fourier. Descomposición armónica para las variaciones de la coordenada Z. Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por mes), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por mes), periodo (meses) y coeficiente (cm) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | <i>f</i> | $\sigma_f$            | $\Pi$             | <i>S</i>             | <i>C</i>             |
|------------|----------|-----------------------|-------------------|----------------------|----------------------|
| 1          | 0.083337 | $0.09 \times 10^{-4}$ | $12.00 \pm 0.00$  | $-0.0534 \pm 0.0006$ | $0.0626 \pm 0.0006$  |
| 2          | 0.005061 | $0.17 \times 10^{-4}$ | $197.59 \pm 0.66$ | $-0.0019 \pm 0.0006$ | $-0.0052 \pm 0.0006$ |
| 3          | 0.014783 | $0.44 \times 10^{-4}$ | $67.65 \pm 0.20$  | $-0.0041 \pm 0.0006$ | $0.0025 \pm 0.0006$  |
| 4          | 0.021570 | $0.58 \times 10^{-4}$ | $46.36 \pm 0.13$  | $0.0081 \pm 0.0006$  | $-0.0114 \pm 0.0006$ |
| 5          | 0.166726 | $0.62 \times 10^{-4}$ | $6.00 \pm 0.00$   | $-0.0103 \pm 0.0006$ | $-0.0040 \pm 0.0006$ |
| 6          | 0.032726 | $0.51 \times 10^{-4}$ | $30.56 \pm 0.05$  | $-0.0144 \pm 0.0007$ | $-0.0058 \pm 0.0007$ |
| 7          | 0.030539 | $0.48 \times 10^{-4}$ | $32.74 \pm 0.05$  | $-0.0026 \pm 0.0006$ | $0.0044 \pm 0.0006$  |
| 8          | 0.055593 | $0.82 \times 10^{-4}$ | $17.99 \pm 0.03$  | $-0.0015 \pm 0.0006$ | $0.0035 \pm 0.0006$  |
| 9          | 0.042804 | $1.14 \times 10^{-4}$ | $23.36 \pm 0.06$  | $0.0069 \pm 0.0006$  | $0.0022 \pm 0.0006$  |
| 10         | 0.011200 | $0.98 \times 10^{-4}$ | $89.29 \pm 0.78$  | $-0.0059 \pm 0.0006$ | $0.0059 \pm 0.0006$  |
| 11         | 0.107123 | $0.95 \times 10^{-4}$ | $9.34 \pm 0.01$   | $0.0002 \pm 0.0006$  | $-0.0008 \pm 0.0006$ |
| 12         | 0.061892 | $1.23 \times 10^{-4}$ | $16.16 \pm 0.03$  | $-0.0055 \pm 0.0006$ | $0.0008 \pm 0.0006$  |
| 13         | 0.090079 | $1.02 \times 10^{-4}$ | $11.10 \pm 0.01$  | $-0.0026 \pm 0.0006$ | $-0.0019 \pm 0.0006$ |
| 14         | 0.026472 | $1.25 \times 10^{-4}$ | $37.78 \pm 0.18$  | $-0.0029 \pm 0.0006$ | $0.0055 \pm 0.0006$  |
| 15         | 0.068766 | $1.83 \times 10^{-4}$ | $14.54 \pm 0.04$  | $-0.0032 \pm 0.0006$ | $0.0040 \pm 0.0006$  |

Tabla 5.6: Igual que la Tabla 5.5 pero para los términos seculares mixtos. Se muestra el orden de extracción, periodo (meses) y coeficientes (cm) asociados al término mixto en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | $\Pi$             | <i>SS</i>                                      | <i>CC</i>                                     |
|------------|-------------------|--|---|
| 2          | $197.59 \pm 0.66$ | $2.249 \times 10^{-4} \pm 5.3 \times 10^{-6}$  | $1.117 \times 10^{-4} \pm 4.9 \times 10^{-6}$ |
| 3          | $67.65 \pm 0.20$  | $-1.030 \times 10^{-4} \pm 4.7 \times 10^{-6}$ | $-3.69 \times 10^{-5} \pm 4.9 \times 10^{-6}$ |
| 7          | $32.74 \pm 0.05$  | $-7.80 \times 10^{-5} \pm 5.8 \times 10^{-6}$  | $4.75 \times 10^{-5} \pm 5.9 \times 10^{-6}$  |
| 8          | $17.99 \pm 0.03$  | $4.01 \times 10^{-5} \pm 4.6 \times 10^{-6}$   | $3.30 \times 10^{-5} \pm 4.6 \times 10^{-6}$  |
| 11         | $9.34 \pm 0.01$   | $1.13 \times 10^{-5} \pm 4.5 \times 10^{-6}$   | $4.51 \times 10^{-5} \pm 4.5 \times 10^{-6}$  |
| 13         | $11.10 \pm 0.01$  | $4.05 \times 10^{-5} \pm 4.6 \times 10^{-6}$   | $1.20 \times 10^{-5} \pm 4.5 \times 10^{-6}$  |

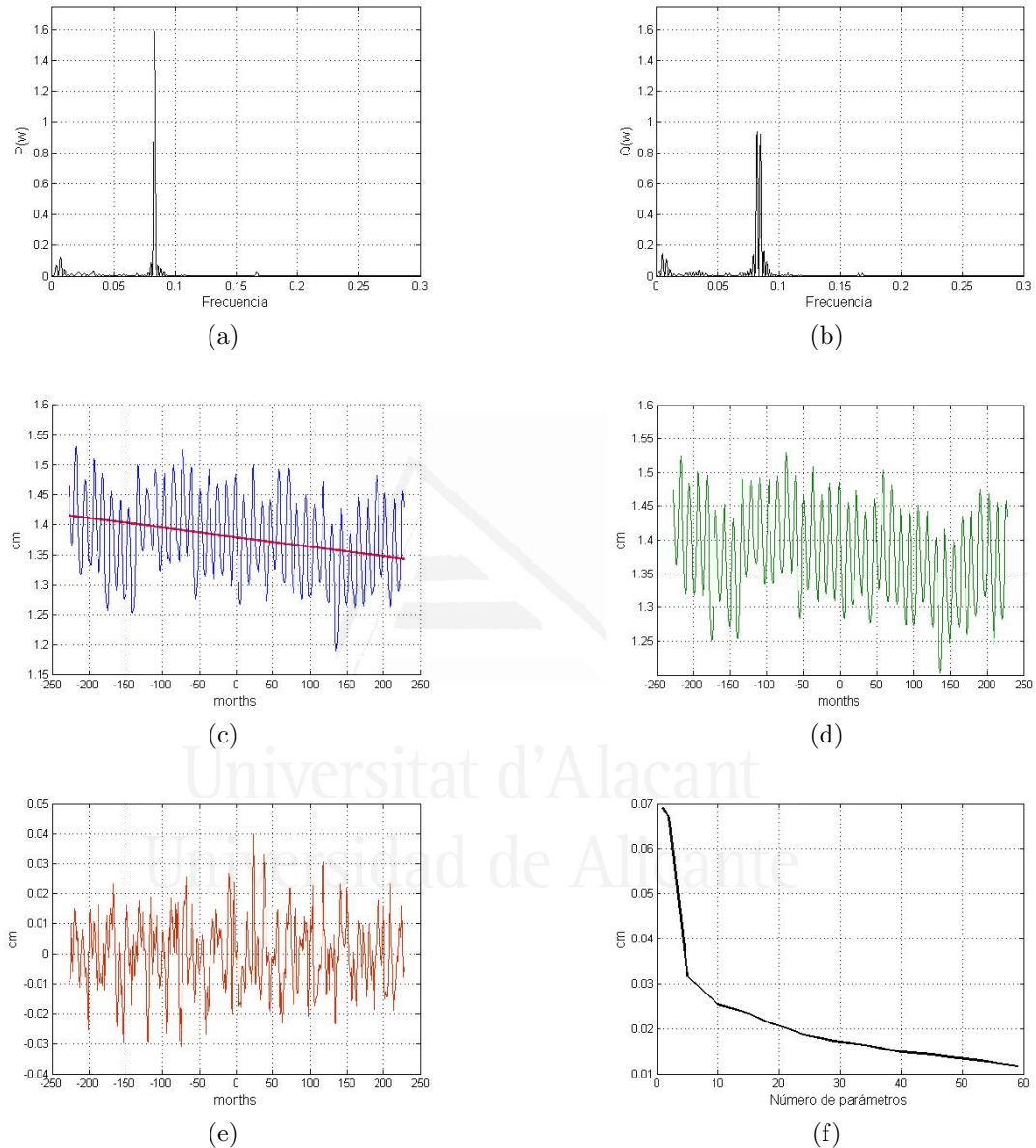


Figura 5.4: Resultados gráficos para el modelo de ajuste correspondiente a las variaciones en la coordenada  $Z$  del geocentro. En esta figura se muestran: (a) Peridograma de Lomb, (b) periodograma extendido, (c) serie temporal original (en azul) y componente de tendencia estimada (en rojo), (d) modelo armónico estimado, (e) residuales generados por el ajuste y (f) reducción del RMS en función del número de parámetros contenidos en el modelo durante el proceso de ajuste.



Tabla 5.7: Amplitud y fase para las frecuencias asociadas al modelo armónico de la coordenada X según el modelo (4.3). Las columnas hacen referencia, respectivamente, al orden de extracción de la frecuencia, periodo (meses), amplitud (cm) y fase (en grados)

| <i>No.</i> | $\Pi$       | $A$           | $\theta$    |
|------------|-------------|---------------|-------------|
| 1          | 11.99±0.00  | 0.0650±0.0008 | 157.18±0.02 |
| 2          | 103.20±0.46 | 0.0246±0.0009 | 68.75±0.60  |
| 3          | 181.44±1.40 | 0.0099±0.0009 | 183.15±2.53 |
| 4          | 31.39±0.05  | 0.0019±0.0009 | 140.07±2.24 |
| 5          | 42.97±0.15  | 0.0144±0.0009 | 275.96±0.42 |
| 6          | 49.71±0.25  | 0.0111±0.0009 | 309.61±0.63 |
| 7          | 20.07±0.03  | 0.0132±0.0009 | 135.42±0.21 |
| 8          | 17.94±0.03  | 0.0126±0.0009 | 136.23±0.20 |
| 9          | 4.00±0.00   | 0.0100±0.0008 | 7.83±0.05   |
| 10         | 36.87±0.13  | 0.0112±0.0009 | 51.44±0.47  |
| 11         | 25.23±0.06  | 0.0099±0.0009 | 143.41±0.35 |
| 12         | 10.75±0.01  | 0.0043±0.0008 | 52.06±0.34  |
| 13         | 16.08±0.02  | 0.0032±0.0008 | 36.81±0.68  |
| 14         | 61.73±0.48  | 0.0083±0.0009 | 247.04±1.03 |
| 15         | 8.07±0.01   | 0.0008±0.0008 | 355.96±1.31 |

Tabla 5.8: Amplitud y fase para las frecuencias asociadas al modelo armónico de la coordenada Y según el modelo (4.3). Las columnas hacen referencia, respectivamente, al orden de extracción de la frecuencia, periodo (meses), amplitud (cm) y fase (en grados)

| <i>No.</i> | $\Pi$       | $A$           | $\theta$     |
|------------|-------------|---------------|--------------|
| 1          | 12.00±0.00  | 0.1075±0.0008 | 137.83± 0.01 |
| 2          | 6.00±0.00   | 0.0309±0.0008 | 112.84± 0.02 |
| 3          | 123.49±0.73 | 0.0202±0.0008 | 142.91± 0.76 |
| 4          | 89.08±0.43  | 0.0200±0.0008 | 244.83± 0.56 |
| 5          | 29.74±0.05  | 0.0169±0.0008 | 96.95± 0.22  |
| 6          | 275.02±5.56 | 0.0135±0.0008 | 304.35± 2.58 |
| 7          | 42.14±0.09  | 0.0072±0.0008 | 333.39± 0.72 |
| 8          | 24.63±0.05  | 0.0016±0.0008 | 131.42± 1.90 |
| 9          | 55.31±0.23  | 0.0130±0.0008 | 350.04± 0.52 |
| 10         | 72.52±0.51  | 0.0115±0.0008 | 32.51± 0.79  |
| 11         | 12.94±0.02  | 0.0074±0.0008 | 175.87± 0.21 |
| 12         | 22.14±0.05  | 0.0090±0.0008 | 350.79± 0.31 |
| 13         | 27.75±0.09  | 0.0082±0.0008 | 38.24± 0.42  |
| 14         | 9.74±0.01   | 0.0068±0.0008 | 298.61± 0.17 |
| 15         | 19.65±0.06  | 0.0067±0.0008 | 209.30± 0.36 |

Tabla 5.9: Amplitud y fase para las frecuencias asociadas al modelo armónico de la coordenada Z según el modelo (4.3). Las columnas hacen referencia, respectivamente, al orden de extracción de la frecuencia, periodo (meses), amplitud (cm) y fase (en grados)

| <i>No.</i> | $\Pi$       | $A$           | $\theta$     |
|------------|-------------|---------------|--------------|
| 1          | 12.00±0.00  | 0.0823±0.0006 | 250.20± 0.01 |
| 2          | 197.59±0.66 | 0.0055±0.0006 | 173.68± 3.62 |
| 3          | 67.65±0.20  | 0.0048±0.0006 | 10.37± 1.38  |
| 4          | 46.36±0.13  | 0.0140±0.0006 | 347.78± 0.32 |
| 5          | 6.00±0.00   | 0.0111±0.0006 | 237.51± 0.05 |
| 6          | 30.56±0.05  | 0.0155±0.0007 | 125.45± 0.23 |
| 7          | 32.74±0.05  | 0.0051±0.0006 | 277.18± 0.61 |
| 8          | 17.99±0.03  | 0.0038±0.0006 | 244.13± 0.44 |
| 9          | 23.36±0.06  | 0.0072±0.0006 | 269.51± 0.31 |
| 10         | 89.29±0.78  | 0.0083±0.0006 | 158.84± 1.06 |
| 11         | 9.34±0.01   | 0.0009±0.0006 | 247.13± 1.00 |
| 12         | 16.16±0.03  | 0.0056±0.0006 | 355.40± 0.28 |
| 13         | 11.10±0.01  | 0.0033±0.0006 | 53.45± 0.32  |
| 14         | 37.78±0.18  | 0.0063±0.0006 | 196.56± 0.60 |
| 15         | 14.54±0.04  | 0.0051±0.0006 | 24.54± 0.27  |

## 5.4. Conclusiones

Mediante los tres modelos armónicos estimados, se consigue reducir el valor del estadístico RMS a  $0.0168\text{ cm}$ ,  $0.0153\text{ cm}$  y  $0.0117\text{ cm}$  para las coordenadas X, Y y Z del centro de masas de la capa de agua continental, respectivamente. Ahora bien, como consecuencia de considerar un análisis escalar, no todos los modelos están formados por el mismo número de parámetros ni por el mismo contenido armónico. Así pues, mientras que el modelo estimado para la coordenada X utiliza un total de 57 parámetros, el modelo asignado a la coordenada Y hace uso de 51, siendo el correspondiente a la coordenada Z aquel que incluye un mayor número de parámetros hasta un total de 59. Con todo ello, los modelos logran explicar un 71.92 %, 82.48 % y 83.05 % de la variabilidad de los datos para las coordenadas X, Y y Z, respectivamente.

Como podría esperarse por la representación gráfica de las series temporales, la componente de tendencia en este caso no contiene una importante cantidad de información sobre el fenómeno. Ello puede apreciarse en el pequeño valor de los coeficientes de tendencia y en el porcentaje de variabilidad explicada por ésta (1.63 %, 0.32 % y 2.84 % para las coordenadas X, Y y Z, respectivamente).

En este estudio, merece especial atención la frecuencia correspondiente al periodo anual. Dicha señal es detectada en todas y cada una de las coordenadas del geocentro, y además, siempre en primer lugar. Por otro lado, dicha frecuencia es la que explica siempre el mayor porcentaje de variabilidad (con considerable diferencia) respecto al resto de armónicos (hablamos concretamente de un 36.76 %, 51.46 % y 51.11 % para las coordenadas X, Y y Z, respectivamente). Puede observarse (a través de las Tablas 5.7–5.9) cómo, para la frecuencia anual, la mayor contribución se localiza en la componente Y con un ciclo anual de  $1.07\text{ mm}$ , alcanzando su máximo entre finales de abril/principios de mayo. El ciclo anual para las coordenadas restantes manifiesta una amplitud menor, siendo la componente X aquella que aporta la contribución más débil ( $0.65\text{ mm}$ ). Cabe señalar que estos resultados están en consonancia con otros modelos y estudios realizados sobre el tema. Bouillé et al. (2000) establecen para la amplitud anual unos valores similares a los obtenidos en este estudio, mostrando concordancia también respecto a qué componentes presentan un mayor valor en amplitud. La única diferencia sustancial radica en el mes de máxima actividad de la

señal. Así pues, por ejemplo, Bouillé et al. (2000) estiman que, para la coordenada Y, la máxima manifestación de la frecuencia anual se establece a principios de octubre, mientras que este estudio la ubica a principios de mayo.

El periodo semianual, aparece claramente en las coordenadas Z e Y con amplitudes de 0.11 *mm* y 0.31 *mm*, respectivamente. No obstante, dicha frecuencia no se detecta, como tal, para la componente X. Las fluctuaciones más similares que encontramos en este caso se corresponden con periodos de 4 meses (0.0999 *mm* de amplitud) y 8 meses (0.0083 *mm* de amplitud). Esto se debe a que la amplitud asociada al periodo semianual para la componente X posee un valor menor que 0.0083 *mm* (correspondiente a la última frecuencia considerada en su modelo estimado). De hecho, si realizamos un análisis armónico con un mayor número de frecuencias o consideramos el estudio de la serie vectorial ( $X, Y, Z$ ), la frecuencia semianual aparece como parte del contenido armónico y además lo hace con una amplitud en torno a 0.0061 *mm*. Teniendo presente este hecho, se observa como la amplitud para la frecuencia anual y la correspondiente a la fluctuación semianual mantienen una relación aproximada de 1 a 10 para la coordenada Y y de 1 a 100 para las otras dos componentes.

Se hace presente la manifestación de numerosas frecuencias asociadas a periodos interanuales. Entre ellas encontramos una frecuencia próxima al periodo bienal, rondando los 23–25 meses. Esta señal adquiere una amplitud de 0.099 *mm*, 0.016 *mm* y 0.072 *mm* para los modelos correspondientes a las coordenadas X, Y y Z, respectivamente. Determinar el origen de dicha fluctuación es complejo, aunque podría estar asociada a la denominada *Oscilación Cuasi Bienal* (Alexander and Weickman, 1995) (QBO). Dicho fenómeno consiste en una oscilación atmosférica que tiene lugar, aproximadamente, cada 20–36 meses y entre sus múltiples efectos destaca la alteración de las lluvias monzónicas, lo cual afecta directamente a la distribución de agua continental.

Otra de las frecuencias interanuales que aparecen en el contenido armónico de las tres coordenadas es la que se corresponde con un periodo de 3.5–3.8 años (42–46 meses). Esta señal fue también detectada por Huang et al. (1996), aunque el valor de la amplitud estimado difiera del presentado en este capítulo. Su origen, al igual que el de la señal entre 55 y 68 meses (4.5–5.5 años), es desconocido aunque podría

llegar a atribuirse al fenómeno climatológico ENSO que se repite en ciclos irregulares de 3–7 años (con una media aproximada de 5 años).

Existen también fluctuaciones asociadas a largos periodos de tiempo comprendidos entre 123 y 198 meses. Así pues, la coordenada X parece afectada por una señal de amplitud  $0.099 \text{ mm}$  cuyo periodo ronda los 15.12 años; la componente Y presenta una fluctuación de  $0.2 \text{ mm}$  asociada a un periodo de 10.3 años y finalmente, la coordenada Z manifiesta un periodo de 16.47 años cuya amplitud sería de  $0.055 \text{ mm}$ , aproximadamente. Estas señales son unas de las más importantes en los modelos debido a que explican un porcentaje considerable de la variabilidad de los datos y poseen una amplitud notable en comparación con otros armónicos. Su origen no es nada claro. Se desconoce hasta qué punto el hecho de disponer de una serie de datos mensuales puede afectar a la estimación de las líneas espectrales, ya que el tiempo entre un mes y otro no es exactamente el mismo. Aceptando cierta transferencia de error en la estimación espectral, estas señales que rondan los 10–16 años están próximas al periodo y semiperiodo del nodo lunar (18.6 y 9.3 años). Quizá, en este fenómeno es donde se ubica la causa de dichas periodicidades o puede ocurrir que se derive de alguna influencia astronómica modificada por otros factores desconocidos.

Para finalizar, señalaremos que, junto a estos armónicos, aparecen otros de menor periodo abarcando 80–100 meses (7–8 años, aproximadamente). En principio, se desconoce cuál podría ser la razón de este tipo de variaciones periódicas, por lo que sería interesante indagar en un futuro sobre el contenido armónico de importantes fenómenos climatológicos en busca de algunas respuestas.



---

## Capítulo 6

# Modelos espacio-temporales para el flujo de agua continental

### 6.1. Introducción

La *carga o masa de agua continental* (CWS) se define como la cantidad de agua, en cualquiera de sus formas, almacenada sobre y bajo la superficie terrestre (Syed et al., 2008). Teniendo en cuenta dicha definición, es posible entender, de forma global, a qué nos referimos cuando se hace uso del concepto CWS. Con este término se alude al agua de los pantanos, lagos, ríos y embalses, así como nieve, humedad, aguas subterráneas e incluso el agua contenida en la propia vegetación (Güntner et al., 2007).

Como resultará evidente, la cantidad de agua almacenada en una determinada zona del planeta no es constante. A medida que pasa el tiempo, la masa de agua que podemos encontrar repartida en las distintas capas de la superficie terrestre varía debido a diversas causas o fenómenos y depende también del lugar en cuestión. Las lluvias, la evapotranspiración, la temperatura, la afluencia y filtración de agua en ríos, y el consumo humano son algunos pocos ejemplos de factores que influyen en las variaciones de la masa de agua continental. Además, estos cambios en la CWS, como cabe esperar, no son uniformes en el espacio y mucho menos en el tiempo. De hecho, varía bastante entre las distintas zonas climáticas, siendo las áreas tropicales y de mayor latitud los lugares donde se producen las fluctuaciones más



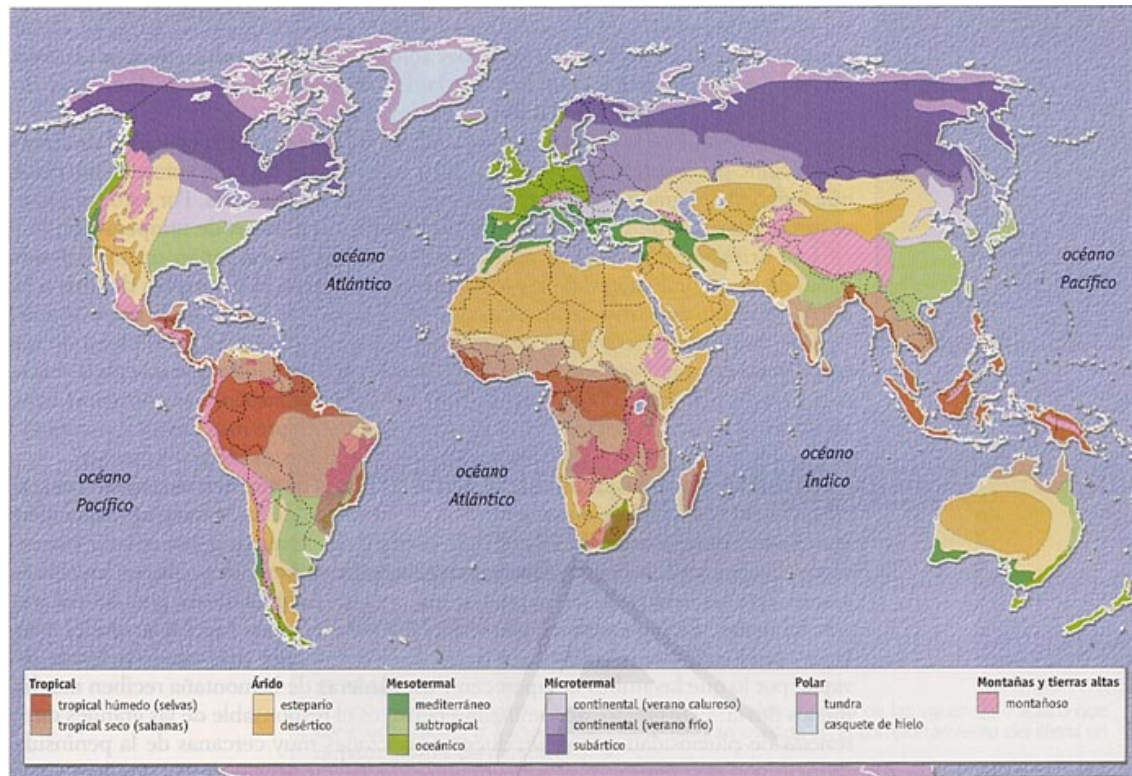


Figura 6.1: Zonas climáticas (extraído de Echarri, 1998).

significativas (Güntner et al., 2007). Pero esto no es todo, los cambios y variaciones son, obviamente, diferentes para cada zona climática por lo que resultaría interesante analizar el comportamiento espacio-temporal del *flujo de agua continental* (CWF) con la intención de construir un modelo capaz de ayudar a entender mejor el fenómeno y sus consecuencias.

Debido al importante papel que juega dentro del sistema dinámico terrestre, sería deseable disponer de un modelo sencillo, fácil de utilizar y capaz de explicar el contenido armónico del flujo de agua continental como un primer paso hacia su mejor comprensión. Estas variaciones afectan al clima, la tierra y varios fenómenos geofísicos. De hecho, el CWF implica transporte y redistribución de masa en la Tierra, la cual está directamente relacionada con los cambios en el campo gravitatorio terrestre, la rotación planetaria, el movimiento del polo y también las oscilaciones elásticas de la superficie terrestre. A pesar de que los científicos no están totalmente de acuerdo de qué manera y cantidad la carga de agua continental contribuye al

movimiento del polo (Chao and O'Connor, 1998; Hinnove and Wilson, 1987; Kuehne and Wilson, 1991; Lei and Gao, 1992; van Hylckama, 1970), resulta innegable que lo afecta de alguna forma.

Por otro lado, el flujo de agua continental es una cuestión esencial para poder entender el proceso hidrológico global, el ciclo de energía y multitud de fenómenos bioquímicos. Es especialmente importante para la existencia de una enorme variedad de ecosistemas y permite al ser humano cubrir sus necesidades básicas, incluyendo el agua para la agricultura, para la industria y por supuesto, para el uso doméstico. Por lo tanto, la CWS y el CWF tienen implicaciones tanto en las ciencias naturales como físicas, pero también son significativos para la esfera económica. Como puede deducirse, la presencia de agua en nuestros continentes implica vida y calidad de vida. No existen muchos ámbitos en los que el agua no juegue un papel esencial. Allá donde vayamos, allá donde miremos, encontramos agua en cualquiera de sus formas, y esto es sólo una pequeña muestra de su transcendencia.

Una vez se es consciente de estos hechos, puede entenderse mejor la importancia de ofrecer un modelo que explique no sólo como se comporta el flujo de agua continental en el presente o pasado, sino también en el futuro. Tradicionalmente, existen dos tipos diferentes de modelos. Los *modelos empíricos* consisten en un entramado relacional expresado matemáticamente entre todos los factores que intervienen o causan el fenómeno que se estudia. Así pues, estos modelos permiten obtener estimaciones del fenómeno a partir de las observaciones de otras magnitudes *causales*. Por otro lado, encontramos los *modelos de series temporales* que proporcionan estimaciones y predicciones teniendo en cuenta el comportamiento pasado del fenómeno en cuestión. Ahora bien, aunque distintos, estos dos tipos de modelo están íntimamente ligados entre sí ya que los últimos se derivan, generalmente, de observaciones o de estimaciones proporcionadas por modelos empíricos.

En este capítulo se muestra un estudio realizado durante los últimos años y que complementa recientes investigaciones como las llevadas a cabo por Güntner et al. (2007), Syed et al. (2008) y Schmidt et al. (2008), entre otros. Nuestra aproximación difiere de las anteriormente mencionadas en varios aspectos que conciernen, principalmente, al modelo, periodo de tiempo considerado y pretensiones. Algunos trabajos realizados con anterioridad abarcan básicamente un estudio global de las

variaciones en la carga del agua continental para una región particular del planeta (mayores zonas climáticas, zonas próximas a los ríos de mayor cuenca, etc.) y analizan el comportamiento de variaciones que tienen lugar en periodos anuales y semianuales. Estos estudios, generalmente cualitativos, analizan las variaciones de la CWS que tienen lugar en determinadas áreas considerando un modelo hidrológico para ciertos periodos de tiempo predeterminados (Syed et al., 2008) o para los periodos más influyentes detectados mediante el uso de *Funciones Ortogonales Empíricas* (EOF) (Güntner et al., 2007).

Por un lado, este estudio proporciona un modelo matemático de series temporales con carácter armónico y dependiente del tiempo que hace posible conocer la estimación del flujo de agua continental en un instante determinado para una región continental específica representada en un mapa de 1x1 grado que cubre toda la superficie terrestre. Por otra parte, mentiríamos si no dijéramos que existen estudios donde también consideran este tipo de modelos temporales analíticos, como el sugerido por Schmidt et al. (2008), sin embargo, podemos encontrar diferencias sustanciales entre éstos y los modelos aquí propuestos. Si comparamos brevemente el estudio llevado a cabo por Schmidt et al. (2008) y el aquí presentado, observamos que:

1. Primeramente, utilizan datos mensuales proporcionados por GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) de las zonas próximas a los ríos de mayor caudal. Aunque la elección es oportuna, posee ciertas limitaciones. Por una parte, únicamente disponen de tres años de datos, desde febrero de 2003 hasta diciembre de 2006. Además, la serie temporal presenta vacíos observacionales desde junio de 2003 hasta enero de 2004. Por el contrario, nuestro estudio se basa en las estimaciones de la carga de agua continental proporcionada por los centros NCEP (*National Centers for Environmental Prediction*) y NCAR (*National Center for Atmospheric Research*) según el modelo conocido como CDAS-1 (*Climate Data Assimilation System I*) abarcando un periodo de tiempo comprendido desde enero de 1993 hasta diciembre de 1998, a través de observaciones mensuales. Además, no nos limitamos al análisis de unas zonas concretas, sino que cubrimos toda el área continental mediante una red con mallas de 1x1 grado.

2. Schmidt et al. (2008) seleccionan frecuencias utilizando el conocido análisis de EOF's y determinan el modelo basándose en las ideas propuestas por *Mautz* y *Petrovic* (ver Mautz and Petrovic, 2005). Sin embargo, el presente estudio hace uso del análisis armónico no lineal descrito en el capítulo 3 para conocer las frecuencias inmersas en los datos, el cual nunca antes fue utilizado para el estudio del flujo de agua continental. Como sabemos, este método consta de una etapa de optimización no lineal sobre el espacio de frecuencias durante la cual las líneas espectrales seleccionadas pueden verse modificadas en detrimento de un mejor ajuste. Esto no es descabellado si tenemos en cuenta que un fenómeno físico o natural podría variar o alterar su contenido armónico. Basta considerar cualquier fenómeno geofísico para darse cuenta que éste resulta ser un sistema dinámico sujeto a perturbaciones naturales, especialmente en su comportamiento periódico. Un efecto de la no linealidad es que la respuesta a una frecuencia perturbada dada raramente conserva el mismo periodo de la perturbación por lo que manifiesta ciertos cambios aunque sean difíciles de calcular en muchos casos (Giacaglia, 1972; Nayfeh, 1973; Sanders and Verhulst, 1985). Existen, por tanto, razones más allá de la reducción de los residuales para considerar que las frecuencias incluidas en los modelos armónicos puedan variar. Así pues, en este estudio difícilmente encontraremos un modelo donde aparezcan periodos anuales o semianuales exactos ya que esto no reflejaría completamente la realidad y el fundamento teórico de los sistemas dinámicos.
3. También existen diferencias en cuanto a la constitución del modelo. Mientras que Schmidt et al. (2008) consideran una componente de tendencia lineal, este estudio considera una componente de tendencia polinomial cuadrática. Por otro lado, aquí construimos un modelo que incluye términos seculares mixtos, los cuales no se contemplan en el modelo de *Schmidt et al.*

Como podrá observarse, las estimaciones que se obtienen tras el análisis armónico no lineal del CWF difieren de las presentadas por Schmidt et al. (2008). No obstante, no son resultados comparables ya que hacen referencia a distintos periodos de tiempo y además utilizan distintas fuentes de datos.

## 6.2. Descripción de datos

Durante las próximas secciones se llevará a cabo la construcción de algunos modelos armónicos con la finalidad de explicar parte del comportamiento periódico del CWF según el modelo CDAS-1. El archivo que contiene la información numérica que será utilizada fue extraído del sitio web del IERS<sup>1</sup> y contiene la estimación media del CWF para cada mes desde enero de 1993 hasta diciembre de 1998. Los datos mensuales aparecen almacenados en una matriz donde cada entrada se interpreta como el flujo medio de agua correspondiente a un área determinada de la superficie terrestre. Ésta aparece dividida o cubierta por una red con mallas de 1x1 grado de tal forma que cada una de las matrices mencionadas contiene un total de 65160 elementos. Estamos hablando, por tanto, de una *serie temporal multidimensional* cuyos parámetros físicos son el *tiempo* y el *espacio*, por lo que para cada región de la red dispondremos de una serie temporal escalar. Sin embargo, debido a diversos motivos, no todos los puntos de la red serán analizados. Aquellas cuadrículas que se corresponden con regiones pertenecientes a océanos, mares o lagos han sido evidentemente obviadas ya que sólo estamos interesados en el flujo de agua *continental*. Además, existen localizaciones continentales que recogen varios meses consecutivos de flujo nulo, constituyendo así áreas no aptas para el análisis armónico. Estas regiones se corresponden, generalmente, con zonas áridas como es el caso de grandes desiertos. Así pues, en realidad, el número total de series temporales escalares que conforman esta serie temporal multidimensional es de 17155.

Para la elaboración de los datos del flujo de agua continental es necesaria la previa estimación de la CWS. Los valores medios mensuales de la CWS se calculan a partir de los datos de humedad del terreno y nieve acumulada. La humedad del terreno considerada abarca dos capas terrestres adjuntas: la primera y más externa de ellas se corresponde con los 10 primeros *cm* de suelo, mientras que la segunda capa se extiende a lo largo de 190 *cm* después de la primera. La humedad contenida a profundidades superiores a 2 metros no es tenida en consideración. Por lo que respecta a la acumulación de nieve señalaremos simplemente que ésta viene expresada en su equivalente en agua (medida en gramos por centímetro cuadrado,  $g/cm^2$ ) y es considerada constante en la Antártida (a pesar de que no lo sea en realidad).

---

<sup>1</sup><http://www.iers.org/MainDisp.csl?pid=43-25750> (Sección *Geophysical Fluids Data*)

La carga media de agua continental se calcula sumando la masa media de agua y nieve almacenada en la superficie. Por tanto, el *flujo medio de agua mensual* se determina restando a la carga de agua de cada mes la correspondiente al mes previo:

$$f_{ij}(t) = w_{ij}(t) - w_{ij}(t - 1) \quad (6.1)$$

donde  $f_{ij}(t)$  y  $w_{ij}(t)$  representan la estimación del CWF y la CWS, respectivamente para el instante  $t$  en la región que contiene al punto de latitud  $i$  y longitud  $j$ , con  $i = 0^\circ, \dots, 359^\circ$  y  $j = -90^\circ, \dots, 90^\circ$ .

### 6.3. Características del análisis

Los datos disponibles serán divididos en dos partes para su posterior utilización. Por un lado consideraremos el CWF desde enero de 1993 hasta diciembre de 1997 con la intención de crear dos tipos de modelos armónicos utilizando el *paquete NLHA*<sup>2</sup> implementado en MATLAB para la ocasión. Por otro lado, los datos concernientes a 1998 serán utilizados a posteriori para comparar y evaluar la bondad de las predicciones generadas por los modelos estimados a partir del primer grupo de datos.

Tal como acaba de señalarse, se estimarán dos tipos de modelos armónicos distintos, cada uno de los cuales está formado por dos componentes básicas: una tendencia polinomial cuadrática y una componente periódica. Además, el dominio temporal de ambos estará centrado en junio de 1995. Como podrá comprobarse, la principal diferencia entre ambos modelos radica en el método o proceso de estimación.

El primero de los modelos armónicos (al que nos referiremos en lo sucesivo como modelo *NLHM*) se construirá mediante el procedimiento de análisis descrito en el capítulo 3. Debido a que el dominio temporal no es muy amplio, este modelo contendrá un máximo de tres frecuencias fundamentales las cuales serán, por otro lado, propias de cada región o malla de 1x1 grado de la red imaginaria que cubre la superficie terrestre.

El segundo procedimiento consiste en el ajuste de cada una de las series tempo-

---

<sup>2</sup>Ver descripción en el capítulo 11.

rales escalares utilizando una función de la forma:

$$f(\tau_n, \omega_1, \dots, \omega_K) = \sum_{p=1}^3 a_p \varphi_p(\tau_n) + \sum_{k=1}^K [a_{2k+2} \sin(\omega_k \tau_n) + a_{2k+3} \cos(\omega_k \tau_n)] \quad (6.2)$$

donde  $\{\omega_k\}_{k=1,2,\dots,K}$  son un conjunto de frecuencias angulares *prefijadas* que queremos que formen parte del modelo,  $\{\varphi_p\}_{p=1,2,3}$  son las funciones base definidas por las ecuaciones (3.14)-(3.16),  $\tau_n$  es la translación del dominio temporal para centrarlo en junio de 1995 (ver ecuación (3.17)) y  $\{a_l\}_{l=1,2,\dots,2K+3}$  son los coeficientes que deberán ser estimados mediante la técnica de mínimos cuadrados. De aquí en adelante, para referirnos a este modelo de frecuencias fijas utilizaremos las siglas *FFM*. El primer paso para determinar las frecuencias que formarán parte de dicho modelo consiste en el estudio del periodograma de Lomb para la serie temporal vectorial formada por el conjunto de todas las series escalares, cada una de las cuales está asociada a una malla o cuadrícula de la red que cubre la superficie terrestre (Figura 6.2). Aquellas frecuencias que alcancen el mayor valor potencial del periodograma serán seleccionadas como contenido armónico del modelo. Para este estudio, consideraremos un modelo con  $K = 3$  frecuencias fijas, de forma que el contenido armónico de los dos tipos de modelo que pretenden estimarse tengan un mismo número de líneas espectrales. Estas frecuencias angulares (medidas en ciclos por mes) son:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{6}, \quad \omega_3 = \frac{2\pi}{4} \quad (6.3)$$

las cuales se corresponden con los periodos anual, semianual y teranual (4 meses), respectivamente. El modelo de frecuencias fijas contendrá las mismas líneas espectrales para cada una de las series temporales escalares (asociadas a cada malla de 1x1 grado).

A continuación se exponen las principales diferencias entre el modelo NLHM y el modelo FFM, para tener así una visión práctica de los alcances de cada uno de ellos:

1. El contenido armónico para el modelo NLHM *puede ser* distinto para cada una de las regiones de 1x1 grado, mientras que el modelo FFM contiene líneas espectrales idénticas para todas ellas.
2. El modelo NLHM incluye un proceso de optimización no lineal (en el espacio

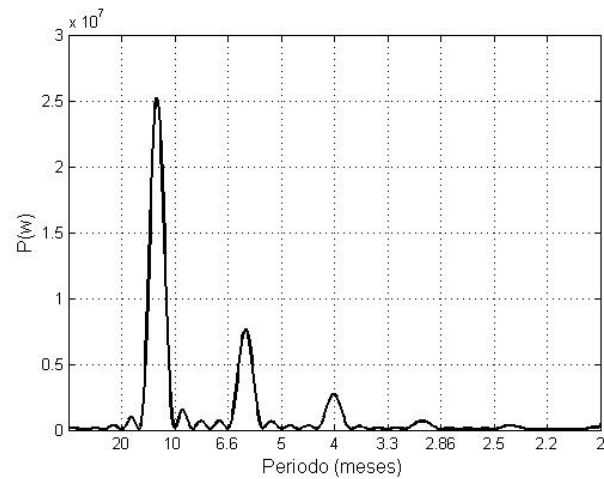


Figura 6.2: Peridograma para la serie temporal vectorial formada por las series escalares de cada malla de la red que contiene los datos del CWF.

de frecuencias) mientras que el modelo FFM se obtiene simplemente a partir de un ajuste por mínimos cuadrados.

3. El modelo NLHM puede contener frecuencias asociadas a términos seculares mixtos mientras que la componente periódica del modelo FFM consiste simplemente en una combinación lineal de términos de Fourier.

## 6.4. Resultados

En esta sección se detallará, en la medida de lo posible, los resultados y modelos estimados para el flujo de agua continental. Para describir completamente los modelos NLHM y FFM sería necesario dar a conocer cada uno de los coeficientes lineales que multiplican cada una de las funciones base, además del contenido armónico particular para el caso del modelo NLHM. Sin embargo, por motivos de espacio, esto resulta imposible. Así pues, deberemos conformarnos con una discusión general de los resultados mediando un conjunto de mapas que ayudarán a la captación de estos modelos.

Describir el modelo NLHM estimado es una empresa compleja ya que, como sabemos, cada malla de la red manejada tiene su propio contenido armónico. Podemos hacernos una idea global de las líneas espectrales incluidas mediante la construcción



de un mapa de color donde cada tonalidad representa el valor del armónico considerado en el punto de la red que se observe. Estos mapas de frecuencias se muestran en las Figuras 6.3–6.5. Por otro lado, las Figuras 6.6–6.13 informan sobre la amplitud y fase (según el modelo dado por la ecuación (4.3)) de algunas de las frecuencias más importantes (anual, semianual, teranual y trimestral).

Centrémonos primero en el contenido armónico de cada modelo NLHM. En la Figura 6.3 es posible apreciar la presencia de una frecuencia anual claramente dominante. En ciertas áreas, como es el caso de algunas regiones del centro de Arabia y el noroeste de América, esta frecuencia deriva en periodos de 13 y 14 meses, aunque no es nada destacable. En cualquier caso, la frecuencia anual (raramente asociada a términos seculares mixtos) está presente en el contenido armónico del modelo NLHM de prácticamente todas las áreas analizadas, aunque no lo haga con la misma intensidad en cada una de ellas. Esto puede comprobarse a través del mapa presentado en la Figura 6.6, el cual recoge la amplitud de la frecuencia anual en aquellos recintos donde es detectada. En él destacan, por ejemplo: la meseta de Lunda, el Gran Valle del Rift y la zona central de África, la costa este de Madagascar, la meseta del Decán (India), la península de Indochina, la Estepa Kirguiz (Kazakhtan), la Meseta Brasileña, la meseta de Bolivia y las Montañas Rocosas, con una amplitud que oscila entre los 14 y 18  $g/cm^2$ . El mes donde esta señal alcanza su máxima influencia se muestra en el mapa de la Figura 6.7. Como puede apreciarse, los meses de febrero-mayo son los que poseen una mayor representación.

Continuando con la descripción del contenido armónico para el modelo NLHM, a partir de la Figura 6.4 podemos apuntar a una línea espectral semianual como la segunda frecuencia más importante detectada, aunque ésta comparte cierto protagonismo con un periodo teranual. El armónico de dos ciclos por año también aparecía como primera frecuencia extraída para algunas áreas tales como aquellas cercanas al curso del Mississippi, las zonas más próximas al Polo Norte, la región tibetana y el noreste de la costa africana, con una amplitud mayor que la propia frecuencia anual en estos casos. La Figura 6.8, que contiene la amplitud para la señal semianual, nos permite destacar zonas (con valores entre 9 y 14  $g/cm^2$ ) como el Congo, las Montañas de Cristal y las zonas próximas al curso del río Zambeze (África), la meseta del Decán o la meseta de Mongolia. En la mayor parte de estas regiones mencionadas,

la señal semianual alcanza su máxima contribución a mediados de las estaciones de verano e invierno (ver Figura 6.9 para conocer la fase asociada al periodo de dos ciclos por año en cada una de las regiones donde fue detectada).

Por otro lado, el mapa de la Figura 6.5 muestra la tercera y última frecuencia extraída para el modelo en cada malla de la red. En ella pueden verse localizaciones con periodos que varían de dos a tres meses pero, sobre todo, se intuye una frecuencia teranual como la tercera línea espectral más importante de las extraídas. Las zonas donde esta señal es más notable (Figura 6.10) son la costa este de la península de Indonesia, la Estepa Kirguiz y la meseta de Mongolia, con valores de 6 a 8  $g/cm^2$ , aproximadamente. La Figura 6.11 muestra el mes de máxima amplitud para dicha señal teranual.

Para terminar con la descripción del modelo NLHM se han incluido los mapas de amplitud y fase para una frecuencia trimestral (cuatro ciclos por año). Esta línea espectral es la cuarta frecuencia más detectada en los datos, aunque no se manifiesta en la misma proporción que las señales anteriormente mencionadas. Las zonas que consideran dicho armónico aparecen bastante aisladas, aunque pueden destacarse ciertas regiones como la zona desértica australiana, el sureste de América del Sur y África, Japón, las áreas próximas al curso del río Tigris y Éufrates, entre otras. En general, su amplitud apenas supera los 3  $g/cm^2$ , salvo en ciertas áreas como Bangladesh (al sur de Himalaya) donde este valor oscila entre los 4 y 5  $g/cm^2$ . Finalmente, no es muy frecuente detectar frecuencias que se correspondan con periodos interanuales, pero existen ciertas regiones con señales periódicas de largo rango.

En cuanto al modelo FFM, su descripción es más sencilla ya que el contenido espectral ha sido fijado con antelación y es idéntico para todas las regiones de la malla. Así pues, sólo restaría conocer, de algún modo, la amplitud y fase donde cada línea espectral alcanza su máxima influencia. Estos valores se muestran, una vez más, a través de mapas (Figuras 6.14–6.19). Estos mapas de color no difieren mucho de los obtenidos para el caso del modelo NLHM, de hecho, las zonas donde las frecuencias anual, semianual y teranual son más destacables coinciden en ambos casos.

Como se ha podido comprobar, el contenido armónico de ambos modelos es similar en muchas regiones de la red. Ahora bien, el modelo NLHM considera términos seculares mixtos por lo que cabría esperar ciertas diferencias en cuanto a bondad del

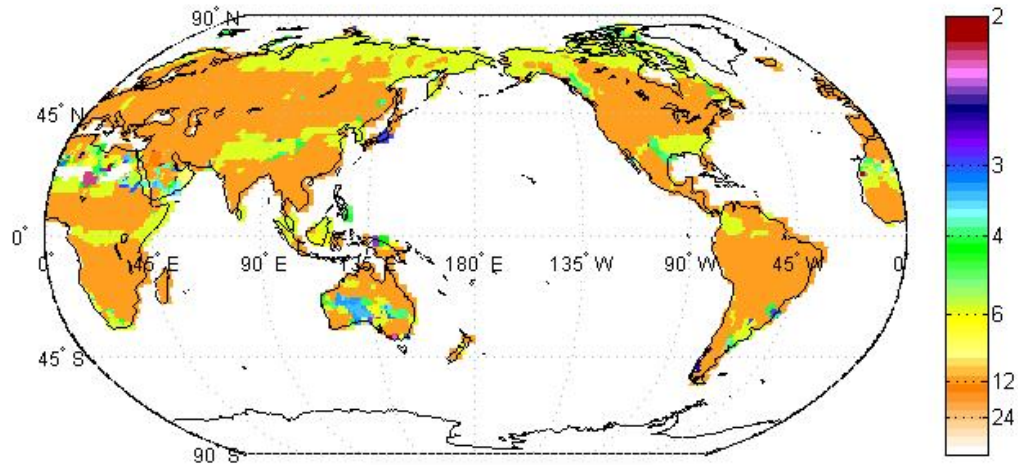


Figura 6.3: Mapa de armónicos para el flujo de agua continental. Periodo (meses) extraído en primer lugar.

ajuste se refiere. Utilizando estos modelos se ha reproducido el CWF desde enero de 1993 hasta diciembre de 1997, a la vez que se han estimado los errores mensuales cometidos en cada malla de la red, los cuales son almacenados nuevamente en mapas, uno por mes. De esta forma, cada uno de estos mapas de residuales tendrá asociado un valor del estadístico RMS para los errores incluidos en el mismo.

Por otro lado, conocidos los residuos generados por los respectivos modelos es posible estimar la bondad de cada ajuste en cada uno de los puntos de la red. Para ello se recurre a la utilización de un *F-test* considerando distintos niveles de significación  $\alpha = 0.001, 0.05, 0.1, 0.15$ . De esta forma podemos evaluar de forma objetiva hasta qué punto las observaciones y las estimaciones generadas a partir de los modelos se asemejan entre sí. Los resultados permiten concluir que el ajuste mediante el modelo NLHM resulta ser significativo en todos los puntos donde lo es el modelo FFM, aunque no ocurre lo contrario. En la Tabla 6.1 se muestra el porcentaje de puntos que tienen el mismo rango de significación para ambos modelos.

A la luz de los resultados, podemos decir que el modelo NLHM permite explicar el comportamiento de la serie temporal en el dominio analizado (1993-1997) mejor que el modelo FFM. Éste último no es capaz de ajustarse adecuadamente en según

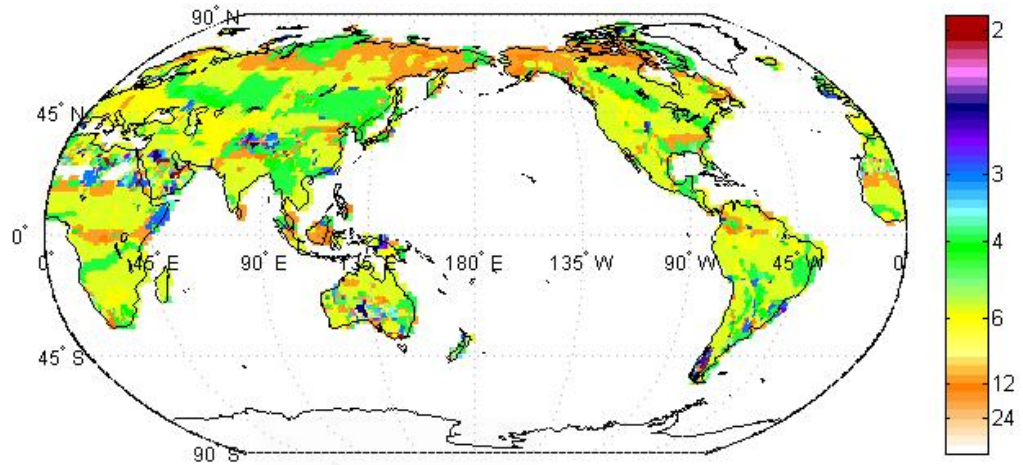


Figura 6.4: Mapa de armónicos para el flujo de agua continental. Periodo (meses) extraído en segundo lugar.

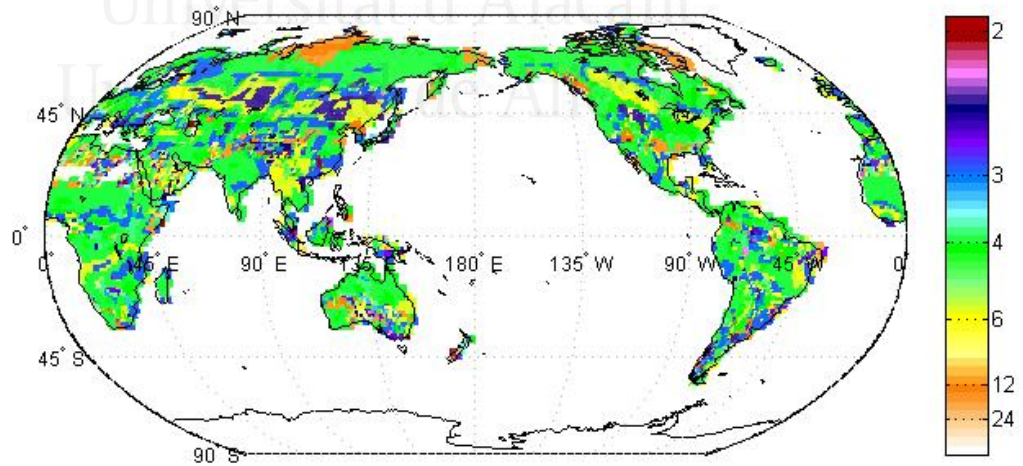


Figura 6.5: Mapa de armónicos para el flujo de agua continental. Periodo (meses) extraído en tercer lugar.

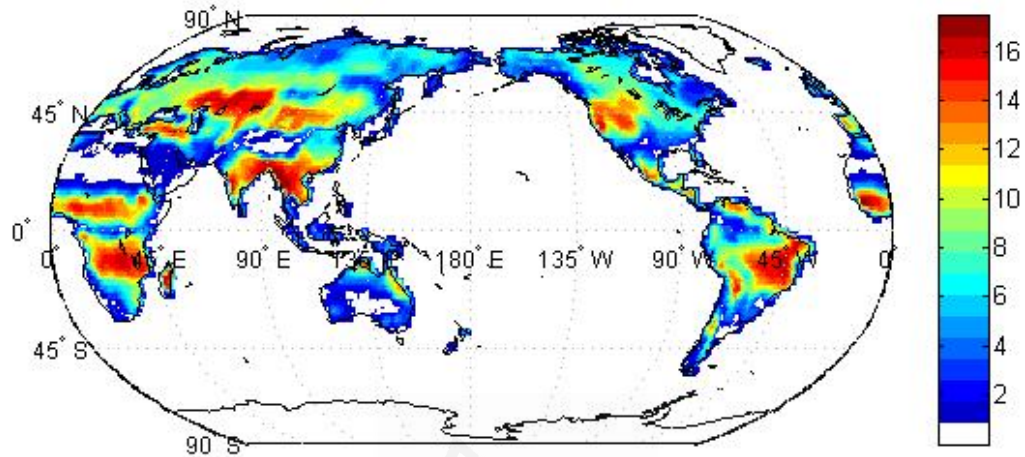


Figura 6.6: Modelo NLHM. Amplitud para la frecuencia anual (en  $g/cm^2$ ).

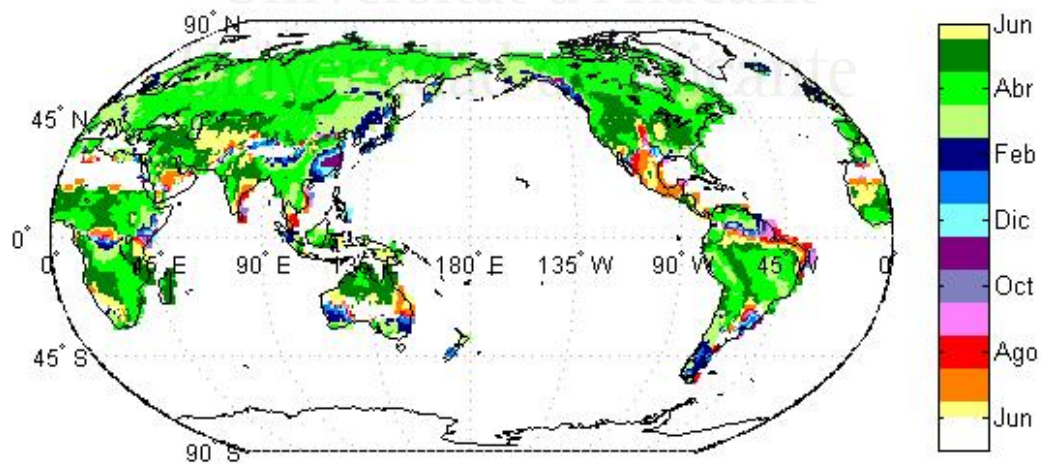


Figura 6.7: Modelo NLHM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia anual.

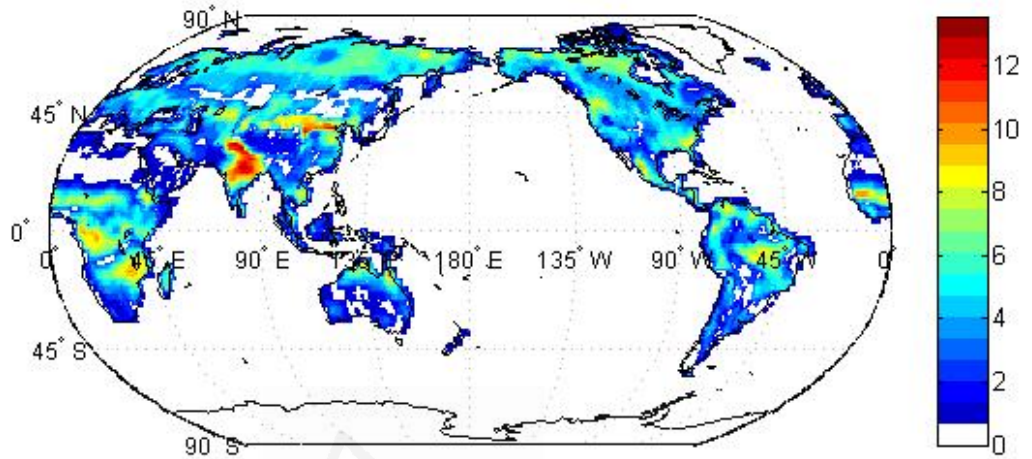


Figura 6.8: Modelo NLHM. Amplitud para la frecuencia semianual (en  $g/cm^2$ ).

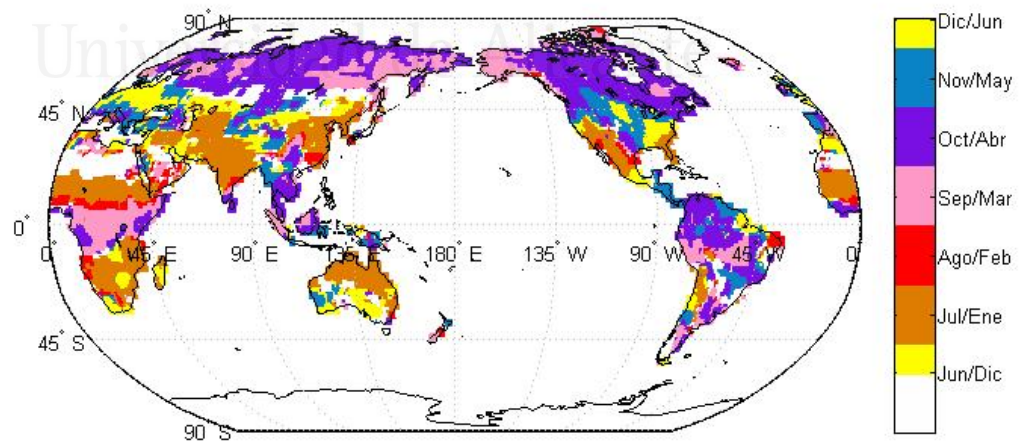


Figura 6.9: Modelo NLHM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia semianual.

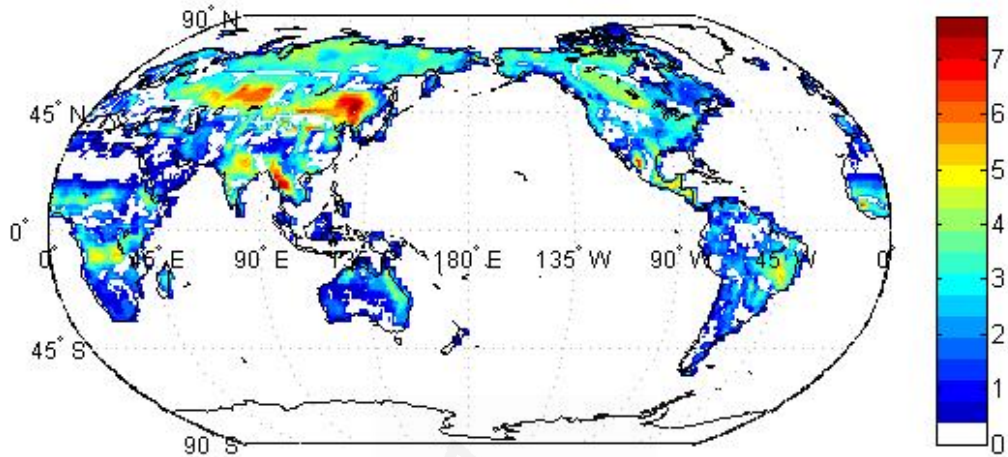


Figura 6.10: Modelo NLHM. Amplitud para la frecuencia teranual (en  $g/cm^2$ ).

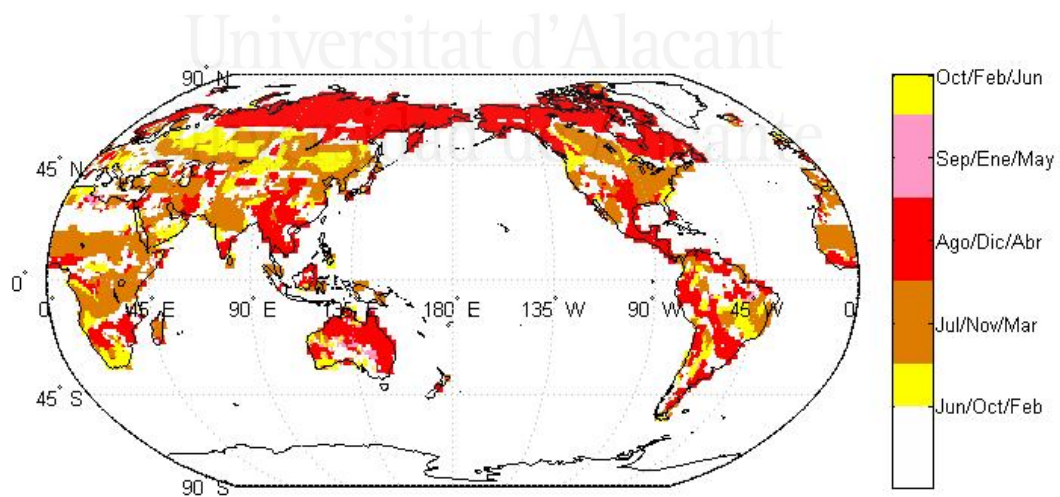


Figura 6.11: Modelo NLHM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia asociada a un periodo de 4 meses.

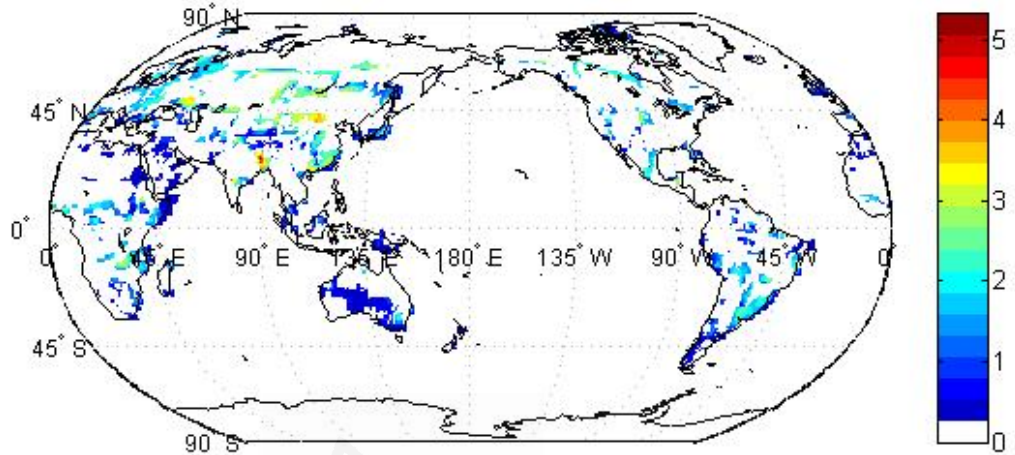


Figura 6.12: Modelo NLHM. Amplitud para la frecuencia trimestral (en  $g/cm^2$ ).

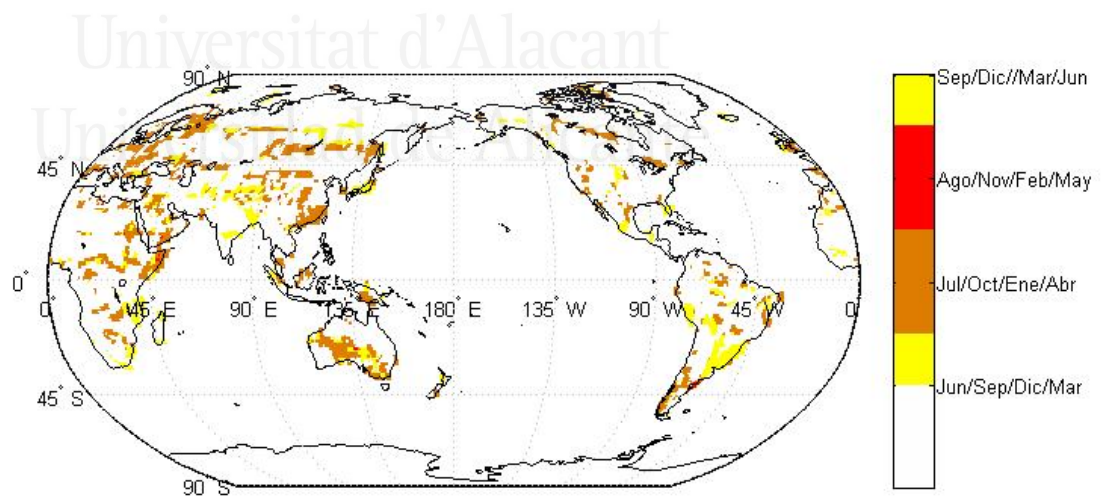


Figura 6.13: Modelo NLHM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia asociada a un periodo de 3 meses.



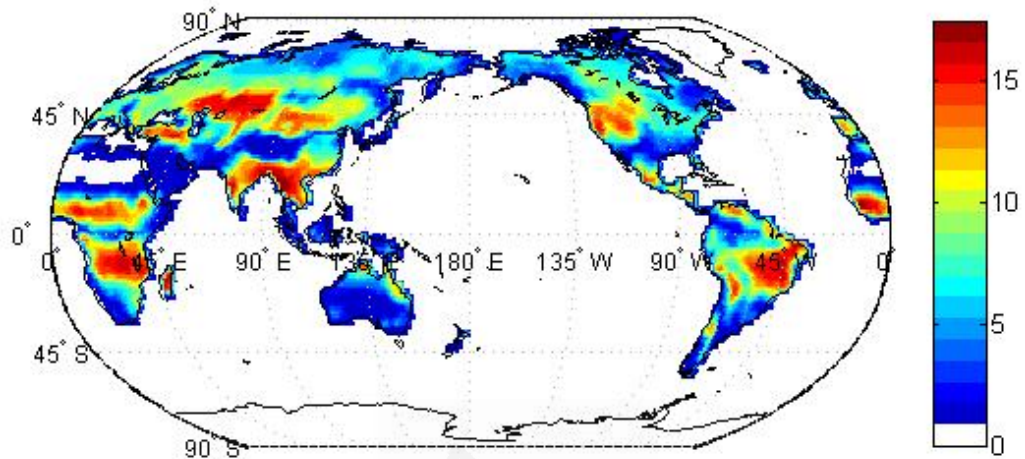


Figura 6.14: Modelo FFM. Amplitud para la frecuencia anual (en  $g/cm^2$ ).

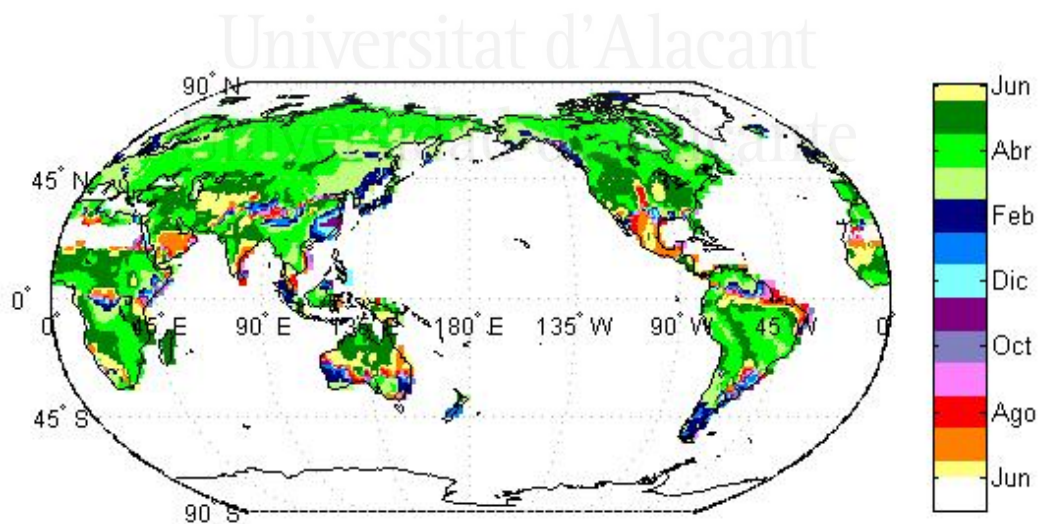


Figura 6.15: Modelo FFM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia anual.

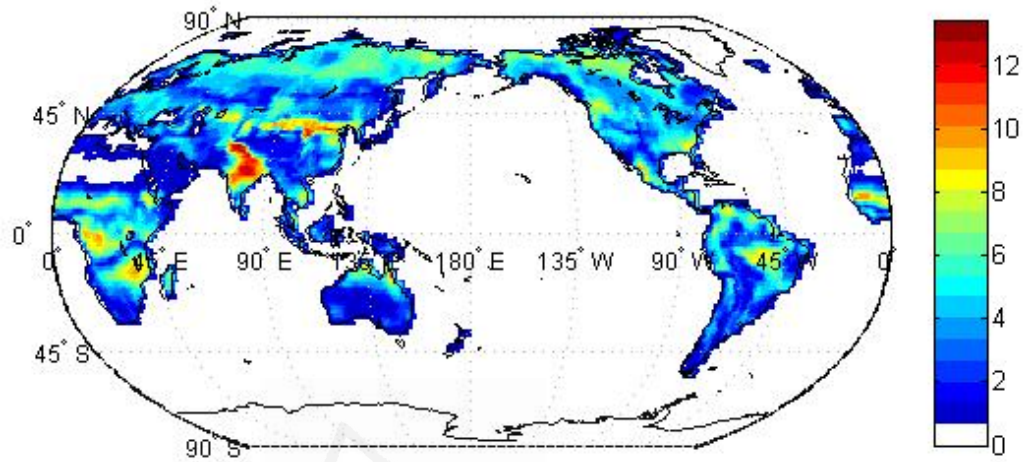


Figura 6.16: Modelo FFM. Amplitud para la frecuencia semianual (en  $g/cm^2$ ).

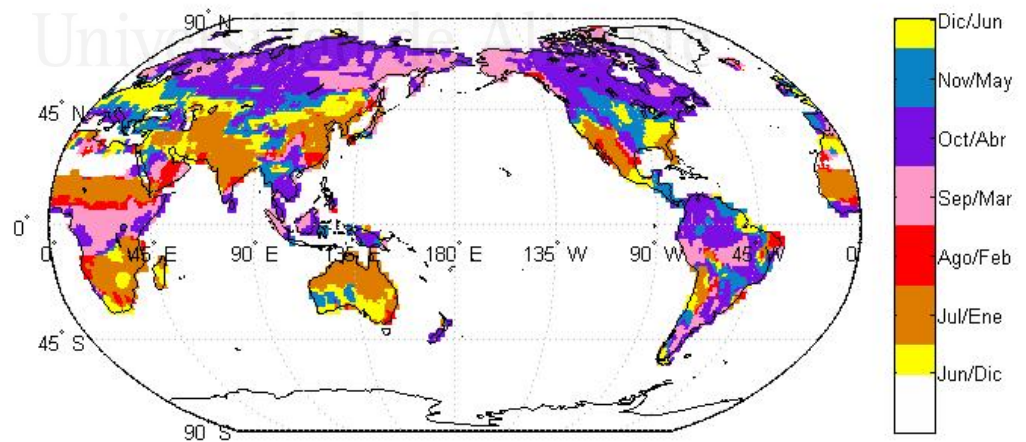


Figura 6.17: Modelo FFM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia semianual.

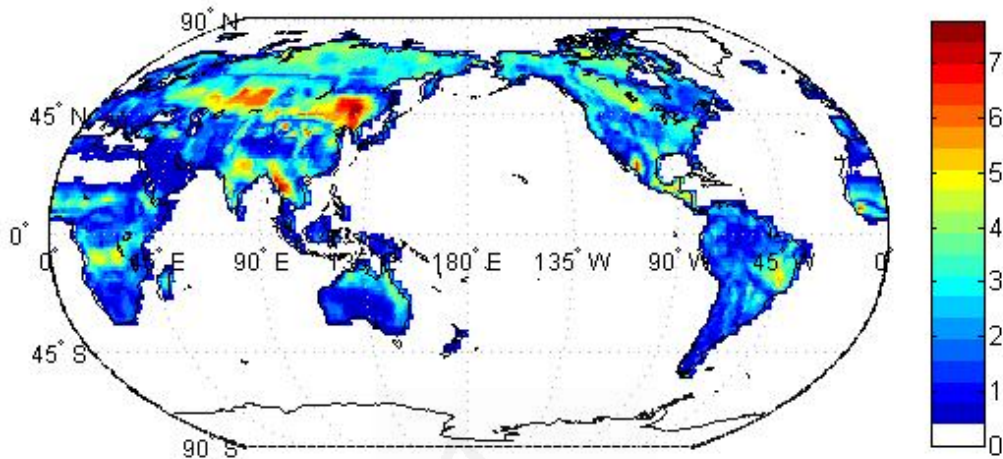


Figura 6.18: Modelo FFM. Amplitud para la frecuencia teranual (en  $g/cm^2$ ).

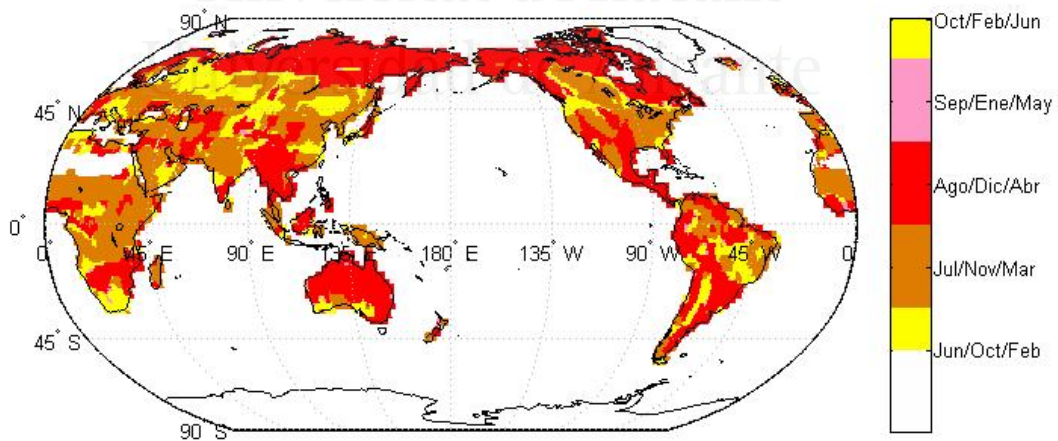


Figura 6.19: Modelo FFM. Mes de máxima amplitud para la frecuencia asociada a un periodo de 4 meses.

Tabla 6.1: Porcentaje de regiones en la red con el mismo nivel de significación  $\alpha$ . Las frecuencias han sido consideradas como grados de libertad.

|      | Niveles de confianza $100(1 - \alpha) \%$ |             |             |             |        |
|------|---|-------------|-------------|-------------|--------|
|      | 99 %                                      | 99 % – 95 % | 95 % – 90 % | 90 % – 85 % | < 85 % |
| NLHM | 99.29                                     | 0.43        | 0.22        | 0.018       | 0.048  |
| FFM  | 94.57                                     | 1.37        | 0.86        | 0.5         | 2.7    |

qué regiones (como es el caso de las zonas desérticas de Australia, África o Arabia) debido a la carencia de datos no nulos en ellas o a un registro errático del comportamiento que no puede ser descrito por las frecuencias contenidas en el modelo FFM. Este hecho puede también observarse mediante la comparación de los valores del RMS mensual correspondientes a cada modelo (Figura 6.24). Los valores del RMS para el modelo FFM son siempre mayores que los correspondientes al modelo NLHM, aunque ambos siguen un comportamiento y monotonía similar a lo largo del tiempo. La Tabla 6.2, que muestra el valor del RMS anual para la red completa desde 1993 hasta 1997, aporta más evidencias. Para complementar estas apreciaciones podemos calcular la varianza explicada por cada uno de los modelos. Los resultados se muestran como un mapa de porcentajes en las Figuras 6.20–6.21. Tras haber observado y evaluado estos mapas, no sería erróneo afirmar que ambos modelos, FFM y NLHM, explican una gran proporción de la varianza contenida en los datos, pero el segundo de ellos resulta ser ligeramente mejor en este aspecto. De hecho, el modelo NLHM alcanza mayores porcentajes en todos los puntos analizados de la malla, especialmente en aquellos problemáticos como desiertos y zonas de alta montaña (*Himalaya*, el *Monte Fuji* y las cordilleras del sudeste de América del Sur, entre otros). Además, si calculamos la varianza global media explicada por los modelos finales podemos observar como el modelo NLHM explica un 86.4% de la varianza mientras que el modelo FFM explica un 82.9%.

Por lo que respecta a la predicción del año 1998, los resultados son ligeramente diferentes. Mediante los modelos estimados, uno es capaz de ofrecer dos predicciones

Tabla 6.2: RMS global para cada año que interviene en la creación de los modelos armónicos. Los valores se recogen en  $g/cm^2$ .

|      | Año    |        |        |        |        |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|
|      | 1993   | 1994   | 1995   | 1996   | 1997   |
| NLHM | 1.5188 | 1.5810 | 1.5563 | 1.5391 | 1.5034 |
| FFM  | 1.6952 | 1.6843 | 1.6209 | 1.6446 | 1.6882 |

distintas del flujo de agua continental para cada mes en cada malla de la red. Así pues, considérense los datos recogidos para 1998 y calculemos el RMS de las predicciones a lo largo del horizonte temporal para cada región de la red cuyo centro viene dado por las coordenadas  $(i, j)$  que representan latitud y longitud, respectivamente (con  $i = 0^\circ, 1^\circ, \dots, 359^\circ$  y  $j = -90^\circ, \dots, 90^\circ$ ). Asimismo, denotaremos por  $RMS_H(i, j)$  al RMS de la predicción en la región  $(i, j)$  para el modelo NLHM y por  $RMS_F(i, j)$  el correspondiente para el modelo FFM. De esta forma es posible generar dos nuevos mapas que recogen los valores de estos RMS locales para cada modelo (Figuras 6.22–6.23). Observando estos mapas, podemos deducir que el modelo FFM puede predecir el flujo de agua continental ligeramente mejor que el modelo NLHM en ciertas zonas, especialmente aquellas donde no se ajusta tan bien a la serie temporal en el pasado como el modelo NLHM. Esto puede ser debido a la escasa longitud de las series temporales escalares. En ocasiones, el número de observaciones no es suficiente para mostrar el verdadero contenido armónico de la serie por lo que el método armónico no lineal utilizado para obtener el modelo NLHM, no es capaz de capturar el verdadero comportamiento periódico del fenómeno en dichas áreas. También podría deberse a que el referenciado ajuste NLHM conduce a incluir en el modelo armónico desviaciones con respecto a un modelo real subyacente, posiblemente en gran parte estocástico. En cualquier caso, en general, la predicción global es de calidad similar. Además, ambos métodos proporcionan el mayor valor del RMS en las mismas zonas. Observando las Figuras 6.22–6.23, puede apreciarse que las regiones problemáticas (de mayor RMS) se corresponden con las Montañas Rocosas, la llanura costera y la costa noreste de América del Sur, los Andes y el desierto de Atacama, el Gran Valle

del Rift y las Montañas Mitumba, el oeste de Pamirs, la llanura de Manchuria, áreas en los alrededores de las Montañas Nan Ling, la cordillera central de Nueva Guinea, y la costa norte de Australia (Kimberley, la Tierra de Arnhem y el norte de la Gran Cordillera Divisoria).

De forma similar, podemos calcular el RMS global de los errores de predicción para la serie multidimensional fijando cada instante de tiempo (es decir, para cada mes en particular). Dispondremos así de un valor del RMS por mes y método. Denotemos por  $RMS_H(t)$  y  $RMS_F(t)$  al RMS para el  $t$ -ésimo mes según las predicciones establecidas por el modelo NLHM y FFM, respectivamente. Estos valores se muestran en la Figura 6.25. Aquí, podemos ver que  $RMS_F(t)$  es ligeramente menor que  $RMS_H(t)$ . Además, ambos alcanzan prácticamente el mismo valor durante los últimos meses predichos, aunque el  $RMS_F(t)$  es considerablemente menor que el  $RMS_H(t)$  al inicio de 1998.

Por otra parte, si calculamos el RMS total a lo largo del tiempo y el espacio para ambos modelos, es decir, el RMS de las predicciones para la serie temporal multidimensional, puede observarse que éstos difieren en  $0.16 \text{ g/cm}^2$ , aproximadamente ( $RMS_H = 2.276 \text{ g/cm}^2$  y  $RMS_F = 2.116 \text{ g/cm}^2$ ). No hay, por tanto, una gran cantidad de regiones de la red donde el modelo NLHM sea peor para predecir que el modelo FFM, y viceversa, aunque una ligera ventaja hace que queramos inclinarnos o decantarnos un poco más por este último. En concreto, el modelo FFM es preferible en la predicción para el año 1998 en un 56.4% de las áreas analizadas mientras que el modelo NLHM genera un menor RMS en el 43.6% restante.

## 6.5. Conclusiones

El paquete de rutinas en MATLAB que hemos implementado es capaz de proporcionar dos tipos de modelos armónicos distintos y puede ser utilizado para el estudio de una amplia gama de series temporales. En este capítulo se ha procedido al análisis de la serie temporal multidimensional que representa el flujo de agua continental desde enero de 1993 hasta diciembre de 1998, según el modelo CDAS-1. Utilizando estas rutinas se han creado dos tipos de modelos distintos, un modelo armónico no lineal (NLHM) y otro de frecuencias fijas (FFM).

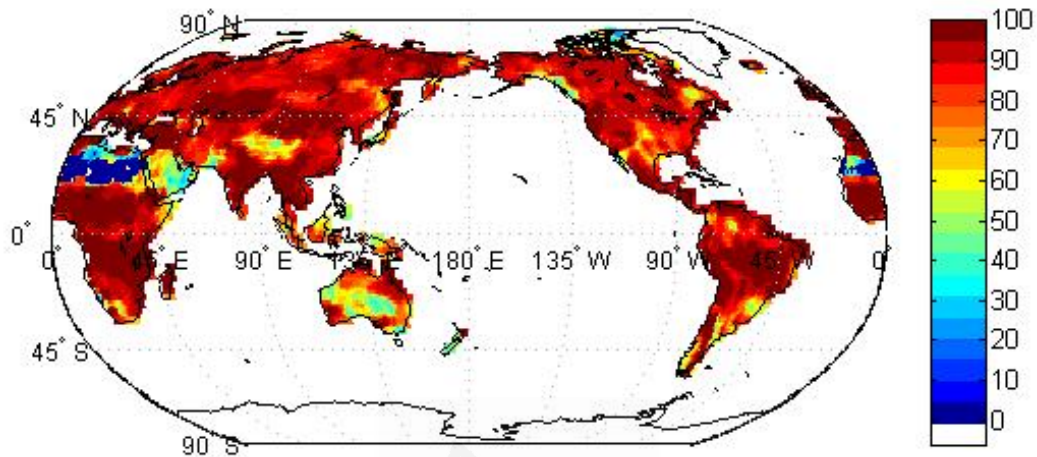


Figura 6.20: Porcentaje de varianza explicada por el modelo NLHM.

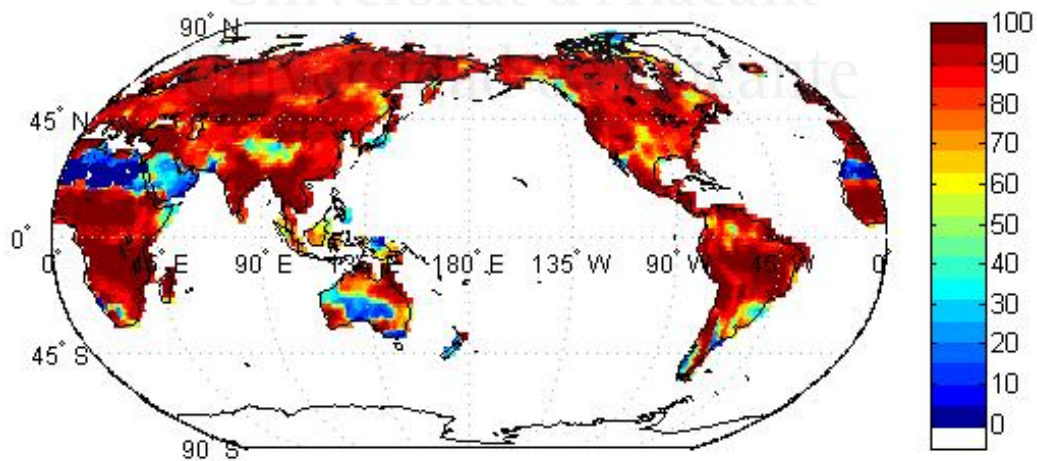


Figura 6.21: Porcentaje de varianza explicada por el modelo FFM.

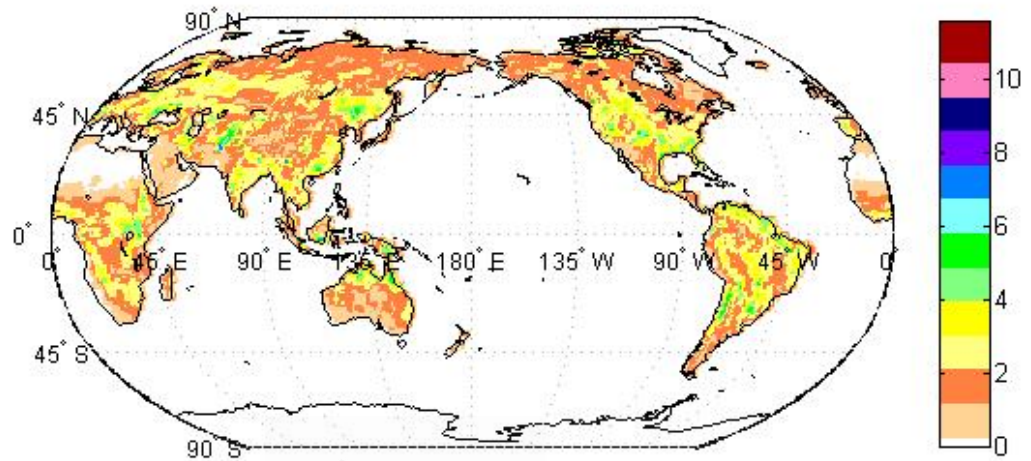


Figura 6.22: RMS ( $g/cm^2$ ) para la predicción realizada mediante el modelo NLHM en función de la región considerada.

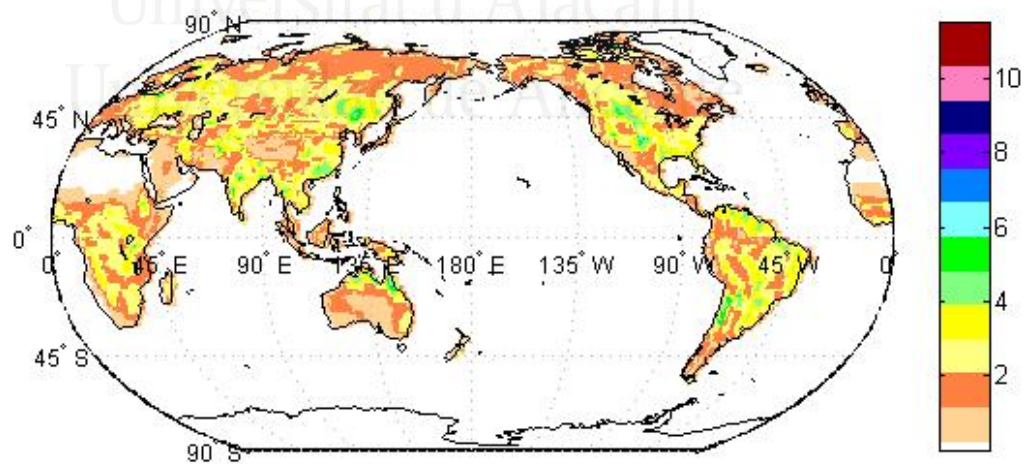


Figura 6.23: RMS ( $g/cm^2$ ) para la predicción realizada mediante el modelo FFM en función de la región considerada.



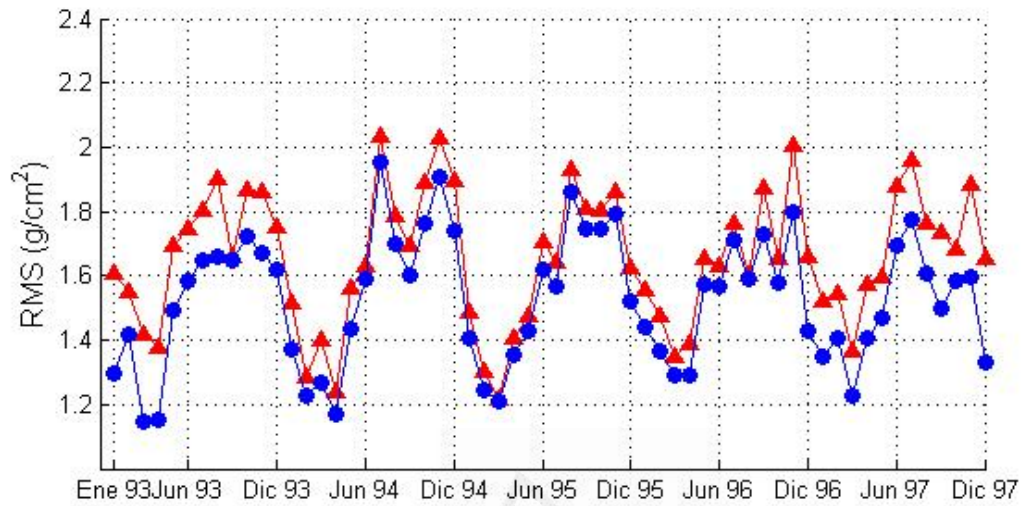


Figura 6.24: RMS ( $g/cm^2$ ) del ajuste para la serie multidimensional del flujo de agua continental según el modelo FFM (en rojo) y el modelo NLHM (en azul).

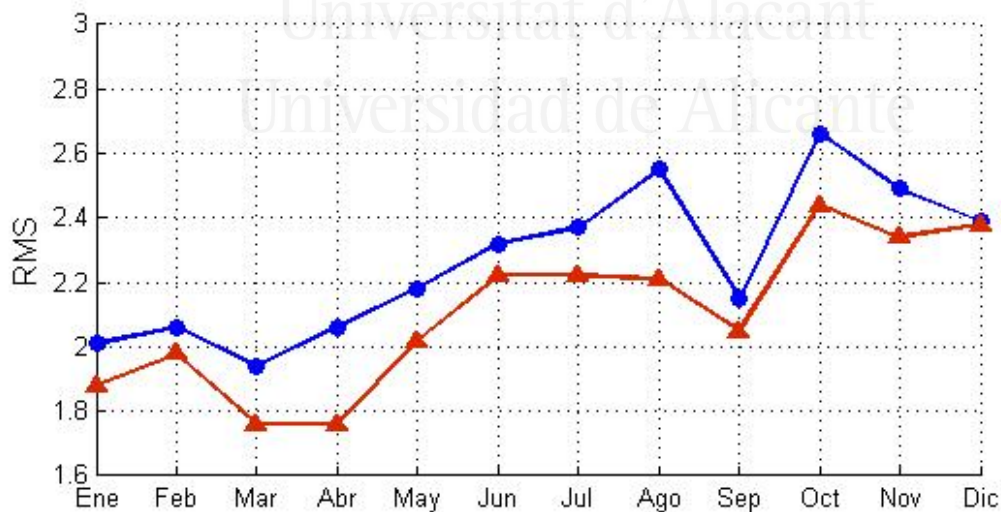


Figura 6.25: RMS ( $g/cm^2$ ) de la predicción para el año 1998 según el modelo FFM (en rojo) y el modelo NLHM (en azul).

Tras la estimación y el análisis, se procedió a comparar los resultados. En este caso, concluimos que ambos procesos conducen a modelos similares. El contenido armónico es prácticamente el mismo, salvo para aquellas regiones en las cuales la consideración de un periodo trimestral conlleva una mayor reducción de la variabilidad que si se incluye un periodo teranual. En cualquier caso, se observa como las regiones que presentan mayor amplitud para estas señales detectadas se corresponden con aquéllas dotadas de un clima tropical (ya sea húmedo o seco) característico de las selvas y las sabanas, y algunas regiones del hemisferio norte de clima estepario colindantes con otras de clima continental.

Como se esperaba, el modelo NLHM (que puede contener términos seculares mixtos para algunas de las frecuencias y es particular de la serie escalar asociada a cada región) proporciona un mejor ajuste de los datos en el dominio temporal dado, tanto a nivel global como local, aunque éste resulta ser ligeramente peor a la hora de predecir el año 1998 (datos que no fueron incluidos en el ajuste para la estimación de los modelos). Además, el modelo NLHM considera distintas frecuencias para cada malla de la red, las cuales son extraídas en función de su influencia sobre los datos. El orden de extracción de las líneas espectrales proporciona, a la vez, información cualitativa de interés sobre la importancia relativa de las mismas en la explicación del fenómeno en cada punto de la red, a diferencia del modelo armónico convencional. Para la obtención del modelo NLHM se recurre a una etapa de optimización en el espacio de frecuencias por lo que podemos pensar que podría proporcionar mejores resultados en cuanto a predicción y ajuste se refiere. Sin embargo, las predicciones obtenidas a partir de este modelo son menos precisas que las proporcionadas por el modelo FFM. La corta longitud de las series puede ser uno de los factores que influyen en el contenido armónico del modelo NLHM y debido a esto, no es capaz de capturar las verdaderas 3 frecuencias que mejor explican el comportamiento futuro de cada una de las series temporales escalares. También puede ser debido a las posibles perturbaciones o anomalías producidas por el fenómeno climatológico ENSO (que aparentemente afecta al ciclo de agua de forma irregular), el cual tuvo lugar en 1994/1995. Este fenómeno consta de dos fases, una con temperaturas anormalmente cálidas (El Niño) y una segunda con temperaturas anormalmente frías (La Niña). El cambio de las condiciones de El Niño a la Niña y viceversa dura aproximadamente

4 años. De hecho, durante 1998 aconteció la fase fría del fenómeno ENSO, por lo que las predicciones establecidas se encuentran en un marco o escenario, a priori, complejo. A pesar de ello, los modelos son capaces de predecir de forma aceptable el comportamiento del flujo de agua continental.

Con la intención de profundizar y aportar luz a este estudio, se ha propuesto el desarrollo de un análisis similar del CWF considerando otras fuentes de datos como GRACE o el modelo LDAS que es uno de los modelos de superficie terrestre desarrollados por el CPC de NOAA. Estos datos abarcan un dominio temporal más amplio y permitirá incluir un mayor número de líneas espectrales en los modelos generados.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

# Capítulo 7

## Estudio armónico del exceso en la duración del día

### 7.1. Introducción

Las variaciones de la rotación terrestre son una de las cuestiones más intrigantes en mecánica clásica y, por supuesto, en geofísica. La Tierra no sigue estrictamente un movimiento de rotación uniforme, sino que presenta fluctuaciones del orden de unos pocos milisegundos por siglo. Las técnicas más modernas de medición en geodesia espacial son capaces de proporcionar información precisa sobre la rotación terrestre a partir de la cual pueden obtenerse respuestas a cuestiones que conciernen, por ejemplo, a la interrelación del sistema *Tierra-Luna-Sol* o a las interacciones atmosféricas, oceánicas y de convección que tienen lugar en el interior del planeta (Telesca, 2007). La orientación espacial de la Tierra cambia constantemente debido, básicamente, a dos tipos de fuerzas (ver David, 1989):

1. *Fuerzas externas* derivadas de la conexión gravitatoria con el sistema lunisolar.
2. *Fuerzas internas* producidas por los procesos geofísicos dinámicos que implican redistribución de masa y momento angular.

Como ya vimos en el capítulo 4, las irregularidades de la rotación de la Tierra pueden ser descritas a través de los parámetros de orientación terrestre, a saber: las coordenadas del polo ( $X, Y$ ), el tiempo universal ( $UT1 - UTC$ ) y las correcciones

del modelo de precesión-nutación  $(\delta X, \delta Y)$ . Aparte de estos parámetros, también pueden determinarse los cambios producidos en la tasa de variación de la rotación terrestre, la cual se encuentra ligada a la duración del día. El tiempo que emplea la Tierra en completar un giro sobre sí misma no es, por tanto, constante. Su variación, que no cabe suponer aleatoria, hace que la duración del día difiera de su valor medio en unos pocos microsegundos. Así pues, el *exceso en la duración del día* (LOD) se define como la diferencia entre la duración del día determinada astronómicamente y 86400 segundos. El LOD (denotado usualmente por  $\Delta$ ) ha sido medido durante décadas como aspecto a contemplar dentro de la geodesia, de hecho, la *Asociación Internacional de Geodesia* (IAG) fue pionera en su estudio. Actualmente, el IERS contempla la estimación del LOD junto con los EOP's, cuyos valores se actualizan dos veces por semana. La relación existente entre la velocidad angular terrestre,  $\Omega_E$ , y el LOD viene dada por la siguiente ecuación (ver Aoki et al., 1982):

$$\Omega_E = \Omega_N \left( 1 - \frac{\Delta}{MSD} \right) \quad (7.1)$$

donde  $\Omega_N = 72921151.467064$  picoradianes/s es la denominada *tasa de rotación nominal* (que se corresponde con la tasa de rotación media de 1820) y MSD es la *duración del día solar medio*, es decir, 86400 segundos.

Las variaciones del LOD son consecuencia de múltiples causas particulares. De hecho, la teoría más simple para el LOD es, de por sí, compleja. Debido a la influencia de muchos factores físicos (internos y externos a la Tierra) las fluctuaciones del LOD se producen a diversas escalas, desde aquellas inferiores al día hasta otras superiores a 10 años (Buffa and Poma, 2000; GuoQing and HaiFeng, 2007; Niedzielski and Kosek, 2008; Telesca, 2007; Zhou et al., 2001). En general y básicamente, la duración del día se ve afectada ante cualquier desplazamiento de masa producido sobre o en el interior de la Tierra, afectando de esta forma al estado del momento angular del planeta. Entre estas causas podemos mencionar, por ejemplo, los cambios estacionales en los vientos y los monzones (cuyo efecto sobre el LOD es evidente), las elevaciones y hundimientos de la superficie terrestre, el deshielo de los polos, los movimientos sísmicos, el flujo y almacenamiento de agua continental, la forma de la superficie oceánica en respuesta de las masas de aire sobre ésta, etc. Para escalas de

tiempo comprendidas entre uno y diez años, la variabilidad parece ser debida a las oscilaciones oceánicas y al intercambio de momento angular entre la corteza terrestre y la atmósfera (Telesca, 2007; Zhou et al., 2001). Sin embargo, cuando hablamos de fluctuaciones inferiores al año, aproximadamente el 90 % de la variabilidad en el LOD es causada por la atmósfera (Telesca, 2007). En particular, los océanos y fenómenos hidrológicos continentales permiten explicar las variaciones más insignificantes a escalas que oscilan entre un año y unas pocas semanas (Telesca, 2007). Cada una de estas señales extraídas ayuda a desmenuzar la información grabada en las observaciones del LOD. Una a una, estas fuentes de variación mencionadas fueron en algún momento detectadas y eliminadas de los datos originales para poder proceder a la localización de nuevos factores de variabilidad. Una de las últimas fluctuaciones casi-periódicas identificadas, que acontece a intervalos de tiempo superiores a una década, parece estar relacionada con el núcleo terrestre y la interacción de éste con el manto (Telesca, 2007; Zhou et al., 2001).

En este capítulo realizaremos un estudio armónico no lineal sobre el LOD con la finalidad de obtener un modelo capaz de reproducir su comportamiento y aportar, en la medida de lo posible, nueva información espectral sobre el fenómeno.

## 7.2. Descripción de los datos

Los datos utilizados para llevar a cabo este estudio fueron proporcionados por el Laboratorio LAREG del IGN de París (Marne la Vallée). El fichero en cuestión contiene la serie temporal del LOD para un periodo de tiempo comprendido entre el 12 de abril de 1980 y el 31 de diciembre de 2008. Estos datos conforman una serie temporal heterogénea con un total de 3197 observaciones, construida mediante el uso de la técnica VLBI. Teniendo presente que el dominio temporal abarca un periodo de 28 años, la serie sólo contiene un 30.48 % de la información de que podría disponerse si ésta fuera homogénea.

Como se ha perfilado en la introducción, las variaciones en el LOD son múltiples y de distinta índole, no obstante, podemos diferenciar dos grandes grupos atendiendo a si son de origen mareomotriz o no. Las variaciones periódicas causadas por las mareas fueron derivadas por primera vez en 1981 por Yoder (ver Yoder et al., 1981). Dichas

correcciones para la rotación terrestre utilizan las denominadas *variables de Delaunay* y un contenido armónico formado por periodos que van desde 5 días hasta 18.6 años. La expresión analítica para el modelo de estas deformaciones (que denotaremos por  $\delta\Delta$ ) sobre las variaciones físicas en la rotación terrestre viene dada por las ecuaciones (ver capítulo 8 de Petit and Luzum, 2010):

$$\delta\Delta = \sum_{i=1}^{62} B_i \cos \xi_i + C_i \sin \xi_i \quad (7.2)$$

$$\xi_i = \sum_{j=1}^5 a_{ij} \alpha_j \quad (7.3)$$

donde  $B_i$  y  $C_i$  aparecen recogidos en la Tabla 7.1. Los coeficientes  $a_{ij}$  son los multiplicadores enteros de los argumentos de nutación lunisolar  $\alpha_j$  para la  $i$ -ésima fuerza, la cual viene definida por las cinco primeras columnas de la Tabla 7.1. Los argumentos  $\{\alpha_j, j = 1, \dots, 5\}$  vienen dados por (ver Williams et al., 1991):

$$\alpha_1 = l = 134.96340251^\circ + 1717915923.2178'' t + 31.8792'' t^2 + 0.051635'' t^3 - 0.00024470'' t^4 \quad (7.4)$$

$$\alpha_2 = l' = 357.52910918^\circ + 129596581.0481'' t - 0.5532'' t^2 + 0.000136'' t^3 - 0.00001149'' t^4 \quad (7.5)$$

$$\alpha_3 = F = 93.27209062^\circ + 1739527262.8478'' t - 12.7512'' t^2 - 0.001037'' t^3 + 0.00000417'' t^4 = L - \Omega \quad (7.6)$$

$$\alpha_4 = D = 297.85019547^\circ + 1602961601.2090'' t - 6.3706'' t^2 + 0.006593'' t^3 - 0.00003169'' t^4 \quad (7.7)$$

$$\alpha_5 = \Omega = 125.04455501^\circ - 6962890.5431'' t + 7.4722'' t^2 + 0.007702'' t^3 - 0.00005939'' t^4 \quad (7.8)$$

donde  $l$  es la anomalía media de la Luna,  $l'$  es la anomalía media del Sol,  $D$  es la elongación media de la Luna desde el Sol,  $\Omega$  es la longitud media del nodo ascendente de la Luna y  $L$  es la longitud media de la Luna. En estas expresiones,  $t$  es el tiempo medido en *siglos julianos*, es decir, el número de siglos transcurridos desde el 1 de

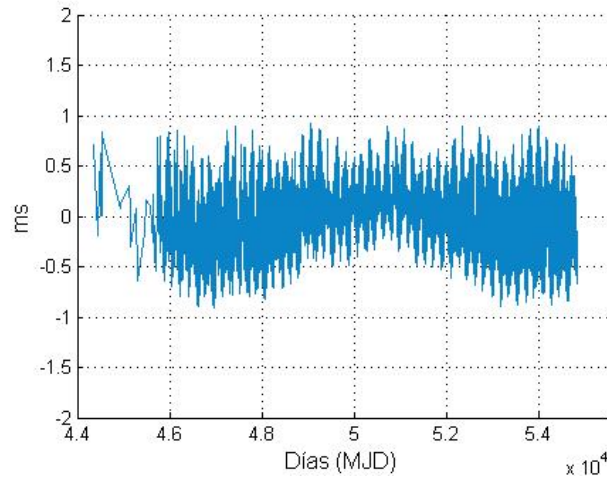


Figura 7.1: Modelo para las variaciones mareométricas,  $\delta\Delta$ .

enero de 2000 (J2000.0). Así pues, si el tiempo viene dado en días julianos ( $JD$ ):

$$t = \frac{(JD - 2451545.0)}{36525} \quad (7.9)$$

Debido a que el efecto de las mareas en el LOD puede ser modelado con una elevada precisión (Petit and Luzum, 2010), ésta contribución (Figuras 7.1 y 7.2) podría ser sustraída de la serie  $\Delta$  para obtener así otra,  $\hat{\Delta}$ , libre de dichos efectos (al menos en primer orden y salvo errores del modelo):

$$\hat{\Delta} = \Delta - \delta\Delta \quad (7.10)$$

Disponemos, por tanto, de una serie temporal que teóricamente contiene aquellas fluctuaciones que no derivan de las mareas y que afectan a la duración del día (ver Figura 7.3). Entre estas variaciones encontramos algunas con periodicidad menor o igual a 5 años que son causadas, principalmente, por el intercambio de momento angular entre atmósfera y corteza terrestre (Niedzielski and Kosek, 2008). Por otro lado, las alteraciones a escala interanual, con una amplitud menor que 2.5 milisegundos ( $ms$ ), son básicamente debidas a los cambios en el momento angular de los vientos zonales (Eubanks, 1993; Hide and Dickey, 1991; Rosen, 1993) que dependen, a su vez, del fenómeno ENSO en una considerable proporción (Philander, 1990).



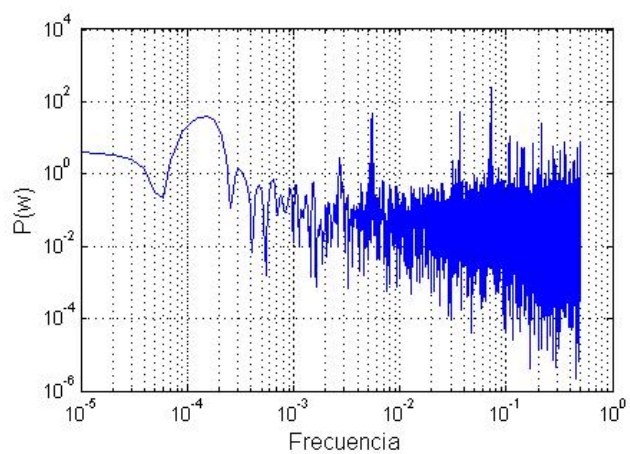


Figura 7.2: Periodograma en escala logarítmica del modelo  $\delta\Delta$ . La frecuencia se recoge en ciclos por día.

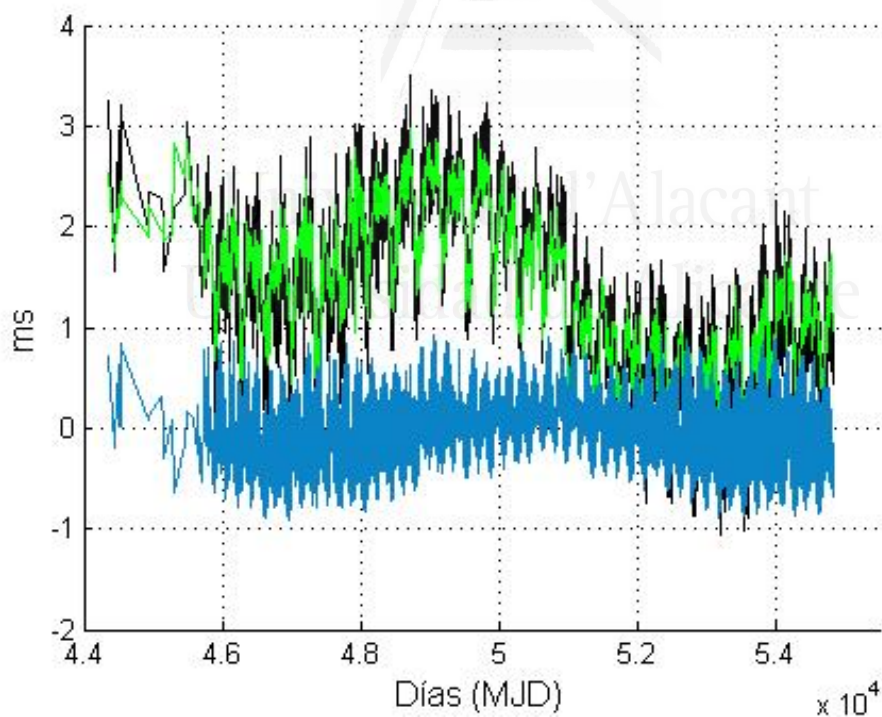


Figura 7.3: Observaciones del LOD establecidas mediante la técnica VLBI (en negro), modelo de variaciones mareométricas  $\delta\Delta$  (en azul) y la diferencia entre ambas series  $\hat{\Delta}$  (en verde).

Tabla 7.1: Variaciones mareométricas. Las primeras cinco columnas contienen los argumentos  $\alpha_j$  y las dos últimas representan los coeficientes regularizados (en  $10^{-5}$  segundos) que intervienen en la ecuación (7.2) para  $\delta\Delta$ . La columna encabezada con  $\Pi$  proporciona el valor del periodo aproximado (con signo negativo o positivo para indicar si el movimiento es retrógrado o no).

| Argumentos |      |     |     |          | $\Pi$ | $\delta\Delta$ |        |
|------------|------|-----|-----|----------|-------|----------------|--------|
| $l$        | $l'$ | $F$ | $D$ | $\Omega$ | Días  | $B_i$          | $C_i$  |
| 1          | 0    | 2   | 2   | 2        | 5.64  | 0.2617         | 0      |
| 2          | 0    | 2   | 0   | 1        | 6.85  | 0.3706         | 0      |
| 2          | 0    | 2   | 0   | 2        | 6.86  | 0.9041         | 0      |
| 0          | 0    | 2   | 2   | 1        | 7.09  | 0.4499         | 0      |
| 0          | 0    | 2   | 2   | 2        | 7.10  | 1.0904         | 0      |
| 1          | 0    | 2   | 0   | 0        | 9.11  | 0.2659         | 0      |
| 1          | 0    | 2   | 0   | 1        | 9.12  | 2.8298         | 0      |
| 1          | 0    | 2   | 0   | 2        | 9.13  | 6.8291         | 0      |
| 3          | 0    | 0   | 0   | 0        | 9.18  | 0.1222         | 0      |
| -1         | 0    | 2   | 2   | 1        | 9.54  | 0.5384         | 0      |
| -1         | 0    | 2   | 2   | 2        | 9.56  | 1.2978         | 0      |
| 1          | 0    | 0   | 2   | 0        | 9.61  | 0.4976         | 0      |
| 2          | 0    | 2   | -2  | 2        | 12.81 | -0.1060        | 0      |
| 0          | 1    | 2   | 0   | 2        | 13.17 | -0.1211        | 0      |
| 0          | 0    | 2   | 0   | 0        | 13.61 | 1.3804         | 0      |
| 0          | 0    | 2   | 0   | 1        | 13.63 | 14.6890        | 0.9266 |
| 0          | 0    | 2   | 0   | 2        | 13.66 | 36.0910        | 2.4469 |
| 2          | 0    | 0   | 0   | -1       | 13.75 | -0.0988        | 0      |
| 2          | 0    | 0   | 0   | 0        | 13.78 | 1.5433         | 0      |
| 2          | 0    | 0   | 0   | 1        | 13.81 | -0.0813        | 0      |
| 0          | -1   | 2   | 0   | 2        | 14.19 | 0.1082         | 0      |
| 0          | 0    | 0   | 2   | -1       | 14.73 | -0.2004        | 0      |
| 0          | 0    | 0   | 2   | 0        | 14.77 | 3.1240         | 0      |
| 0          | 0    | 0   | 2   | 1        | 14.80 | 0.2235         | 0      |
| 0          | -1   | 0   | 2   | 0        | 15.39 | 0.2073         | 0      |
| 1          | 0    | 2   | -2  | 1        | 23.86 | -0.1312        | 0      |
| 1          | 0    | 2   | -2  | 2        | 23.94 | -0.2640        | 0      |
| 1          | 1    | 0   | 0   | 0        | 25.62 | -0.0968        | 0      |
| -1         | 0    | 2   | 0   | 0        | 26.88 | -0.1099        | 0      |
| -1         | 0    | 2   | 0   | 1        | 26.98 | -0.4115        | 0      |
| -1         | 0    | 2   | 0   | 2        | 27.09 | -1.0093        | 0      |

Continuación Tabla 10.10

| Argumentos |      |     |     |          | $\Pi$    | $\delta\Delta$ |        |
|------------|------|-----|-----|----------|----------|----------------|--------|
| $l$        | $l'$ | $F$ | $D$ | $\Omega$ | Días     | $B_i$          | $C_i$  |
| 1          | 0    | 0   | 0   | -1       | 27.44    | -1.2224        | 0      |
| 1          | 0    | 0   | 0   | 0        | 27.56    | 19.1647        | 0.5701 |
| 1          | 0    | 0   | 0   | 1        | 27.67    | -1.2360        | 0      |
| 0          | 0    | 0   | 1   | 0        | 29.53    | -0.1000        | 0      |
| 1          | -1   | 0   | 0   | 0        | 29.80    | 0.1169         | 0      |
| -1         | 0    | 0   | 2   | -1       | 31.66    | -0.2332        | 0      |
| -1         | 0    | 0   | 2   | 0        | 31.81    | 3.6018         | 0      |
| -1         | 0    | 0   | 2   | 1        | 31.96    | -0.2587        | 0      |
| 1          | 0    | -2  | 2   | -1       | 32.61    | -0.0344        | 0      |
| -1         | -1   | 0   | 2   | 0        | 34.85    | 0.1542         | 0      |
| 0          | 2    | 2   | -2  | 2        | 91.31    | 0.0395         | 0      |
| 0          | 1    | 2   | -2  | 1        | 119.61   | -0.0173        | 0      |
| 0          | 1    | 2   | -2  | 2        | 121.75   | 0.9726         | 0      |
| 0          | 0    | 2   | -2  | 0        | 173.31   | -0.0910        | 0      |
| 0          | 0    | 2   | -2  | 1        | 177.84   | -0.4135        | 0      |
| 0          | 0    | 2   | -2  | 2        | 182.62   | 17.1056        | 0.1490 |
| 0          | 2    | 0   | 0   | 0        | 182.63   | 0.0666         | 0      |
| 2          | 0    | 0   | -2  | -1       | 199.84   | -0.0154        | 0      |
| 2          | 0    | 0   | -2  | 0        | 205.89   | 0.1670         | 0      |
| 2          | 0    | 0   | -2  | 1        | 212.32   | -0.0108        | 0      |
| 0          | -1   | 2   | -2  | 1        | 346.60   | 0.0082         | 0      |
| 0          | 1    | 0   | 0   | -1       | 346.64   | -0.0167        | 0      |
| 0          | -1   | 2   | -2  | 2        | 365.22   | -0.1425        | 0      |
| 0          | 1    | 0   | 0   | 0        | 365.26   | 2.7332         | 0.0263 |
| 0          | 1    | 0   | 0   | 1        | 386.00   | 0.0225         | 0      |
| 1          | 0    | 0   | -1  | 0        | 411.78   | -0.0053        | 0      |
| 2          | 0    | -2  | 0   | 0        | -1095.18 | -0.0079        | 0      |
| -2         | 0    | 2   | 0   | 1        | 1305.48  | -0.0203        | 0      |
| -1         | 1    | 0   | 1   | 0        | 3232.86  | 0.0008         | 0      |
| 0          | 0    | 0   | 0   | 2        | -3399.19 | 0.1460         | 0      |
| 0          | 0    | 0   | 0   | 1        | -6798.38 | -14.9471       | 0      |

### 7.3. Características del análisis y resultados

Una vez eliminado el efecto de las mareas en la serie temporal no equiespaciada del LOD, utilizamos el método armónico no lineal descrito en el capítulo 3 para su análisis. En esta ocasión, se considera un modelo de tendencia cuadrática con un contenido armónico formado por un máximo de 15 líneas espectrales. El tamaño de paso para la discretización del dominio de frecuencias será de 0.00001 ciclos por día.

La componente de tendencia estimada durante el análisis tiene por ecuación:

$$T_{LOD}(\tau_n) = (1.53931 \pm 0.00318) + (-0.45459 \pm 0.00297) \varphi_2(\tau_n) + (-0.03832 \pm 0.00406) \varphi_3(\tau_n) \quad (7.11)$$

donde  $\tau_n = t_n - t_c$  es una traslación temporal centrada en  $t_c = 49586.5$  *MJD* que se corresponde, en este caso, con el 22 de agosto de 1994 y donde  $\varphi_2(\tau_n)$  y  $\varphi_3(\tau_n)$  son las funciones base definidas en (3.15)–(3.16). La estimación para los coeficientes de tendencia y sus incertidumbres está expresada en *ms*.

Por otro lado, el contenido armónico incluido en el modelo final viene detallado en las Tablas 7.2–7.4. En ellas se muestran las frecuencias fundamentales dispuestas en el mismo orden en que fueron extraídas de los datos y añadidas al modelo. Aparecen también los valores estimados para los coeficientes asociados tanto a términos de Fourier como a términos seculares mixtos (junto con su correspondiente incertidumbre). Para una mejor captación del modelo, las Figuras 7.4a y 7.5 contienen la representación gráfica de la componente de tendencia, el modelo para  $\hat{\Delta}$  y los residuales generados, respectivamente.

### 7.4. Conclusiones

El modelo armónico no lineal estimado para la serie heterogénea  $\hat{\Delta}$  logra reducir el RMS de los datos de entrada en un 75.16%, alcanzando el valor final de  $RMS = 0.1839$  *ms*. Entre las líneas espectrales más destacadas encontramos una frecuencia asociada a un periodo de aproximadamente 16.20 años ( $5916.35 \pm 17.32$  días). Este armónico tiene una amplitud de  $0.6296 \pm 0.0037$  *ms*, casi el doble de la amplitud asociada a la segunda frecuencia más importante que se incluye, la cual

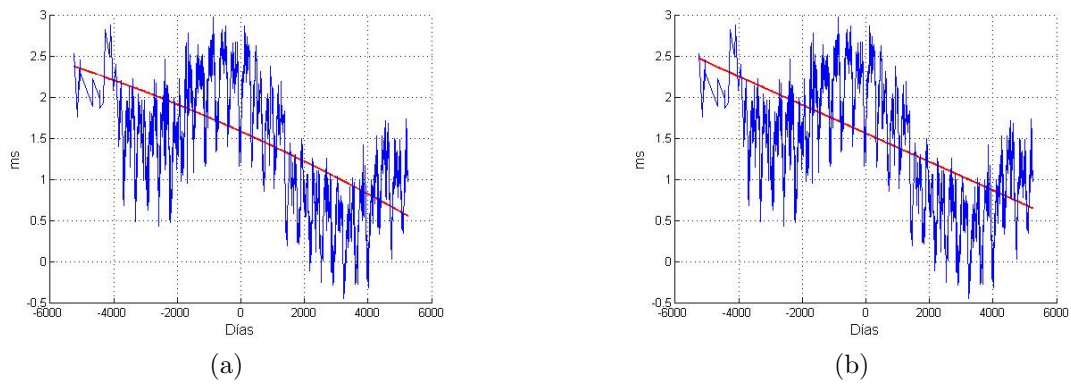


Figura 7.4: Serie  $\hat{\Delta}$  junto con la tendencia estimada (a) cuadrática y (b) lineal.

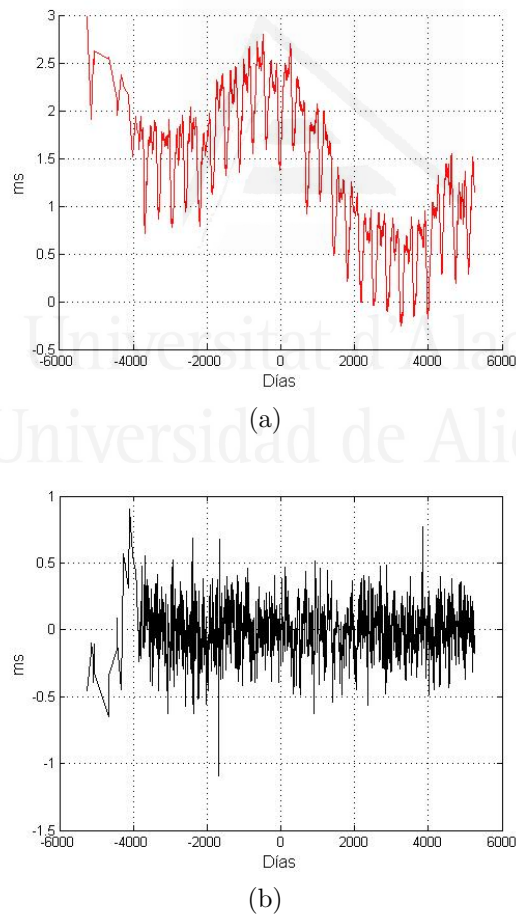


Figura 7.5: (a) Modelo de tendencia cuadrática para  $\hat{\Delta}$  y (b) residuales generados por éste.

Tabla 7.2: Términos de Fourier. Descomposición armónica para  $\hat{\Delta}$ . Las columnas hacen referencia al orden de extracción, frecuencia (ciclos por día), incertidumbre de la frecuencia (ciclos por día), periodo (días) y coeficientes (ms) asociados a los términos en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | <i>f</i>  | $\sigma_f$            | $\Pi$               | <i>S</i>             | <i>C</i>             |
|------------|-----------|-----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| 1          | 0.0001690 | $0.05 \times 10^{-5}$ | $5916.35 \pm 17.32$ | $-0.1247 \pm 0.0037$ | $0.6172 \pm 0.0037$  |
| 2          | 0.0027392 | $0.05 \times 10^{-5}$ | $365.07 \pm 0.06$   | $0.0931 \pm 0.0033$  | $-0.3455 \pm 0.0033$ |
| 3          | 0.0054726 | $0.15 \times 10^{-5}$ | $182.73 \pm 0.05$   | $0.1499 \pm 0.0033$  | $-0.2115 \pm 0.0033$ |
| 4          | 0.0011489 | $2.21 \times 10^{-5}$ | $870.38 \pm 16.77$  | $0.0893 \pm 0.0034$  | $0.0040 \pm 0.0034$  |
| 5          | 0.0006128 | $0.55 \times 10^{-5}$ | $1631.87 \pm 14.66$ | $-0.0006 \pm 0.0035$ | $-0.0050 \pm 0.0035$ |
| 6          | 0.0010188 | $3.18 \times 10^{-5}$ | $981.52 \pm 30.62$  | $0.0495 \pm 0.0033$  | $-0.0293 \pm 0.0034$ |
| 7          | 0.0082074 | $0.79 \times 10^{-5}$ | $121.84 \pm 0.12$   | $0.0419 \pm 0.0033$  | $0.0211 \pm 0.0033$  |
| 8          | 0.0014479 | $1.95 \times 10^{-5}$ | $690.65 \pm 9.31$   | $-0.0027 \pm 0.0034$ | $-0.0511 \pm 0.0034$ |
| 9          | 0.0109826 | $0.72 \times 10^{-5}$ | $91.05 \pm 0.06$    | $-0.0141 \pm 0.0033$ | $0.0424 \pm 0.0033$  |
| 10         | 0.0731994 | $0.67 \times 10^{-5}$ | $13.66 \pm 0.00$    | $0.0229 \pm 0.0033$  | $-0.0386 \pm 0.0033$ |
| 11         | 0.0012816 | $3.28 \times 10^{-5}$ | $780.28 \pm 19.96$  | $-0.0048 \pm 0.0035$ | $-0.0473 \pm 0.0034$ |
| 12         | 0.0079575 | $0.82 \times 10^{-5}$ | $125.67 \pm 0.13$   | $0.0322 \pm 0.0033$  | $0.0234 \pm 0.0033$  |
| 13         | 0.0101233 | $0.66 \times 10^{-5}$ | $98.78 \pm 0.06$    | $0.0037 \pm 0.0034$  | $-0.0070 \pm 0.0035$ |
| 14         | 0.0133011 | $0.99 \times 10^{-5}$ | $75.18 \pm 0.06$    | $-0.0037 \pm 0.0033$ | $-0.0379 \pm 0.0033$ |
| 15         | 0.0139298 | $0.64 \times 10^{-5}$ | $71.79 \pm 0.03$    | $-0.0057 \pm 0.0035$ | $0.0165 \pm 0.0035$  |

Tabla 7.3: Términos seculares mixtos. Descomposición armónica para  $\hat{\Delta}$ . Las columnas hacen referencia al orden de extracción, periodo (días) y coeficientes (en microsegundos,  $\mu s$ ) asociados a los términos seculares mixtos en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | $\Pi$               | <i>S</i>             | <i>C</i>             |
|------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| 5          | $1631.87 \pm 14.66$ | $-0.0279 \pm 0.0013$ | $-0.0072 \pm 0.0013$ |
| 13         | $98.78 \pm 0.06$    | $-0.0141 \pm 0.0013$ | $0.0041 \pm 0.0013$  |
| 15         | $71.79 \pm 0.03$    | $0.0028 \pm 0.0013$  | $-0.0147 \pm 0.0013$ |

Tabla 7.4: Amplitud y fase, según la ecuación (4.3), de las frecuencias contenidas en el modelo armónico estimado para  $\hat{\Delta}$ . Las columnas hacen referencia al orden de extracción de la frecuencia, periodo (días), amplitud (ms) y fase (en grados).

| <i>No.</i> | $\Pi$         | $A$           | $\theta$       |
|------------|---------------|---------------|----------------|
| 1          | 5916.35±17.32 | 0.6296±0.0037 | 269.81± 5.56   |
| 2          | 365.07± 0.06  | 0.3578±0.0033 | 221.84± 0.54   |
| 3          | 182.73± 0.05  | 0.2593±0.0033 | 247.41± 0.37   |
| 4          | 870.38±16.77  | 0.0894±0.0034 | 230.21± 5.26   |
| 5          | 1631.87±14.66 | 0.0051±0.0035 | 151.91± 181.56 |
| 6          | 981.52±30.62  | 0.0575±0.0033 | 117.40± 9.13   |
| 7          | 121.84± 0.12  | 0.0469±0.0033 | 146.92± 1.37   |
| 8          | 690.65± 9.31  | 0.0512±0.0034 | 321.96± 7.41   |
| 9          | 91.05± 0.06   | 0.0447±0.0033 | 269.39± 1.07   |
| 10         | 13.66± 0.00   | 0.0449±0.0033 | 324.80± 0.16   |
| 11         | 780.28±19.96  | 0.0476±0.0035 | 36.16± 9.20    |
| 12         | 125.67± 0.13  | 0.0398±0.0033 | 0.06± 1.66     |
| 13         | 98.78± 0.06   | 0.0079±0.0035 | 231.13± 6.88   |
| 14         | 75.18± 0.06   | 0.0381±0.0033 | 61.26± 1.04    |
| 15         | 71.79± 0.03   | 0.0175±0.0035 | 295.86± 2.28   |

resulta estar ligada al periodo anual. Esta frecuencia que oscila alrededor de 16 años es cuestionable. Podría tratarse de una verdadera línea espectral pero existen ciertos indicios que hacen suponer lo contrario. La longitud del dominio temporal no llega a doblar el periodo detectado por lo que su fiabilidad no es muy elevada. De hecho, podría tratarse de una señal asociada al periodo de 18.6 años que, debido a la escasa cantidad de observaciones, degenera en un valor inferior. Para apoyar esta suposición se procedió a la simulación de una serie temporal homogénea conteniendo una señal de 18.9 años y cuyo dominio temporal posee un rango de 28 años. El análisis armónico no lineal de dicha serie simulada no logra detectar la línea espectral verdadera, proporcionando en su lugar periodos inferiores. Así pues, para establecer una conclusión en cuanto a esta frecuencia de 16 años debemos esperar a disponer de un mayor número de observaciones.

Además del periodo anual, detectado en segundo lugar, podemos apreciar claramente la presencia de una frecuencia semianual con  $0.2593 \pm 0.0033$  ms de amplitud. Tanto la línea espectral de 365.07 días como la de 182.73 días son frecuencias consideradas en el modelo  $\delta\Delta$  sustraído de las observaciones VLBI del LOD. Sin embargo, a pesar de su eliminación, continúan apareciendo en el modelo armónico estimado. Esto podría ser consecuencia de un mal modelado de los efectos de la marea, no obstante, dada la considerable amplitud de dichas señales, cabría la posibilidad de que tuvieran una procedencia que no guarde relación con las mareas, como podría ser la circulación de los vientos zonales (Buffa and Poma, 2000).

Si observamos detenidamente las Tablas 7.2–7.4 podemos apreciar la presencia de varias fluctuaciones en torno a periodos de 1.8 y 2.5 años, aproximadamente (nos referimos a la cuarta, sexta, octava y décimo primera línea espectral). El origen de esta señal podría encontrarse en la oscilación QBO del sistema océano-atmósfera. El QBO fue un fenómeno bastante estudiado antes de que el ENSO se convirtiera en uno de los principales focos de interés para explicar la variabilidad interanual. Está probado que la fluctuación cuasi bienal en el LOD se debe principalmente a la influencia de los vientos zonales sobre el momento angular atmosférico terrestre (Abarca del Rio et al., 2000; Chao, 1989). Dentro de este fenómeno debemos distinguir dos partes: *la oscilación estratosférica* y *la troposférica* (S-QBO y T-QBO, respectivamente), aunque la relación existente entre ambas no está muy clara (Abarca del Rio et al., 2000).



El S-QBO es uno de los principales causantes de la variabilidad en la circulación estratosférica ecuatorial, tanto media como baja. Se caracteriza por la propagación alternante de los vientos del este y del oeste, repitiéndose de forma casi regular en intervalos de 27–28 meses, aproximadamente (Fraedrich et al., 1993). No obstante, esta periodicidad puede variar de un ciclo a otro entre los 22 y 34 meses (Angell, 1986; Quiroz, 1981; Sasi and Murthy, 1991). Por otra parte, el T-QBO (detectado desde principios de 1950) es una señal en los trópicos (de carácter lineal) que al parecer está fuertemente ligada con el fenómeno ENSO (Barnett, 1991; Lau and Sheu, 1988). Según el estudio llevado a cabo por Abarca del Rio et al. (2000) este suceso T-QBO presenta periodicidad bimodal de aproximadamente 2.1 y 1.8 años. Dada la similitud de estos periodos señalados con los detectados en análisis armónico no lineal del LOD y considerando las evidencias aportadas por múltiples investigaciones sobre el tema (ver Abarca del Rio et al., 2000; Angell, 1986; Barnett, 1991; Chao, 1989; Lau and Sheu, 1988; Quiroz, 1981; Sasi and Murthy, 1991) podríamos atribuirles un origen atmosférico ligado al QBO.

Otra de las frecuencias que llama nuestra atención es la correspondiente al periodo de 1631.87 días. Este periodo, de aproximadamente 4.47 años, podría estar íntimamente relacionado con el fenómeno ENSO. Se ha comprobado que éste contiene fluctuaciones que acontecen a escalas de 4 años (Moron et al., 1998; Torrence and Compo, 1998). Además, es sabido que existe una clara correlación entre el LOD y el fenómeno ENSO (Chao, 1984, 1989; Gross et al., 1996; Stefanick, 1982; Zhou et al., 2001). Así, la señal de El Niño puede ser detectada en los datos del LOD, que aumenta considerablemente como resultado de los vientos tropicales del Este (Niedzielski and Kosek, 2008). Además, en el modelo estimado para  $\hat{\Delta}$ , la señal asociada a esta periodicidad está ligada a términos seculares mixtos.

Aparte de estas frecuencias encontramos otras líneas espectrales conocidas, algunas de las cuales podrían tener un origen geofísico, como es el caso de la señal de 13.66 días (detectada en décimo lugar con una amplitud aproximada de 0.0449 *ms*). No aparece, por el contrario, ningún periodo entre los 6 y 11 años. Ciertas fluctuaciones producidas a esta escala fueron detectadas por Abarca del Rio et al. (2000). Esto nos hace pensar que quizá su influencia sea más débil que las incluidas en el modelo. Por ello optamos por la extracción de 15 frecuencias más. Tras el análisis, se observa

que dicha línea espectral aparece en la posición 25 (7.12 años) con una amplitud aproximada de 0.02149 *ms* y ligada a términos seculares mixtos. Sin embargo, la reducción del RMS al añadir 15 frecuencias más es de unos escasos 0.02 *ms*. La elección de uno u otro modelo residirá en el deseo de alcanzar una determinada precisión en las estimaciones o bien, disponer de un modelo sencillo (con menos parámetros).

Una vez analizado el contenido armónico del modelo, nos preguntamos acerca de la posibilidad de haber absorbido alguna señal de largo periodo debido a la inclusión de una tendencia cuadrática. Si observamos, la representación gráfica de dicha componente no parece tener un carácter cuadrático muy pronunciado, por lo que es poco probable la consideración de frecuencias más cortas que las ya detectadas. No obstante, se ha llevado a cabo el mismo tipo de análisis para la serie  $\hat{\Delta}$  pero considerando, en esta ocasión, una tendencia polinomial lineal (Figura 7.4b). Tras la estimación, se observa que el contenido armónico es muy similar, al menos no se contemplan periodos largos distintos a los que encontramos en el modelo con tendencia cuadrática. La ecuación para la componente de tendencia lineal vendría dada por:

$$T_{LOD}(\tau_n) = (1.55528 \pm 0.00262) + (-0.45420 \pm 0.00242) \varphi_2(\tau_n) \quad (7.12)$$

donde  $\tau_n = t_n - t_c$  es la misma traslación temporal que la considerada en el caso cuadrático, siendo  $t_c = 49586.5$  *MJD* (22 de agosto de 1994) y donde  $\varphi_2(\tau_n)$  es la función base definida por la expresión (3.15). Los coeficientes de tendencia y sus incertidumbres están dados en *ms*. Además, como puede verse, el comportamiento de la tendencia es muy similar al del caso cuadrático contenido en la expresión (7.11) (ver Figura 7.4). Por lo que respecta al RMS, ambos modelos (tanto el de tendencia lineal como el de tendencia cuadrática) alcanzan un valor similar aunque éste es ligeramente menor para el caso del modelo de tendencia cuadrática que posee únicamente un parámetro más que el de tendencia lineal. Nuevamente, la elección de un modelo u otro residirá en las pretensiones del investigador.



---

## Capítulo 8

# Ruido

Es sabido que cualquier medición, por más cuidadosamente que haya sido efectuada, siempre se verá afectada por errores, es decir, por desviaciones de los valores medidos respecto a los verdaderos (Bolshakov and Gaidáyev, 1989). Obtener resultados totalmente libres de error es una completa utopía. En la medición, aparte de la magnitud a medir, intervienen el observador, el instrumental, aparatos y el medio ambiente. Todo este complejo de condiciones varía incesantemente, y considerar todos estos factores de manera inequívoca resulta imposible. No obstante, a pesar de todo, aunque no sea posible eliminar estas imprecisiones, sí se podría paliar su efecto disminuyendo así la diferencia entre el valor real y el estimado. Esto puede alcanzarse, por ejemplo, mediante un aumento de la precisión de las mediciones, un perfeccionamiento en el mecanismo de los aparatos y su construcción o una mejora de la metodología utilizada en la recogida de datos.

Hasta ahora habíamos supuesto que toda serie temporal estaba afectada por una componente de ruido blanco, sin embargo esto no tiene por qué ser así. Incluso llevando a cabo actuaciones para reducir el ruido en una toma de datos, es imposible aplacarlo por completo o conseguir que se comporte de forma que no introduzca correlación alguna en las estimaciones. Si a pesar de ello se asume la presencia de un ruido blanco, la realización de un análisis armónico de la serie temporal derivaría en la obtención de un modelo que podría contener líneas espectrales que, en realidad, no explican el fenómeno observado sino la componente de ruido. Por tanto, resulta necesaria la creación de un procedimiento capaz de determinar la naturaleza del

ruido inmerso en una serie de forma que éste no influya, en la medida de lo posible, sobre la estimación de su modelo armónico. En este breve capítulo, detallaremos algunos de los aspectos más importantes relacionados con el ruido, especialmente con el tipo de ruido que suele presentarse en las mediciones de GPS o en series de carácter geodético.

## 8.1. Tipología básica

La búsqueda de señales periódicas en series temporales geodéticas puede convertirse, a veces, en un indicador para investigar posibles relaciones entre distintos procesos geofísicos (o de otra índole). Así pues, fenómenos distintos que presentan ciclos iguales podrían estar ligados entre sí como consecuencia de una relación causa-efecto. Sin embargo, este tipo de indicadores no son fiables. El análisis armónico de algunas de estas series temporales podría mostrar falsas periodicidades como consecuencia, por ejemplo, de errores sistemáticos periódicos o de una componente de ruido que introduce algún tipo de correlación temporal en los datos. El algoritmo sugerido por Harada (2003) es un poderoso método analítico capaz de descomponer series temporales heterogéneas como combinación lineal de términos periódicos pero, lamentablemente, su uso sólo es aconsejable para series afectadas, a lo sumo, por un ruido blanco.

Durante los últimos 15 años, muchos trabajos han proporcionado evidencias de la naturaleza correlada temporalmente de las series de posiciones de GPS (ver, por ejemplo, Langbein, 2008; Mao et al., 1999; Williams, 2004; Zhang et al., 1997). Concretamente, una combinación de ruido blanco y parpadeante, o ruido blanco y un proceso derivado de una ley potencial han sido los modelos preferidos para describir la componente de ruido en muchas de estas series temporales. Así pues, si estos tipos de proceso de ruido no se tienen en consideración, pueden obtenerse armónicos (especialmente interanuales) que proporcionen una interpretación errónea del fenómeno. Por otro lado, una estimación adecuada de la componente de ruido sólo puede llevarse a cabo si los armónicos reales que describen el comportamiento periódico de la serie han sido correctamente filtrados. Un método de análisis espectral capaz de estimar conjuntamente las líneas espectrales y la componente de ruido de

una serie temporal sería la mejor solución a la hora de estudiar este tipo de series temporales. Como paso previo a la extensión del algoritmo propuesto por Harada (2003) expondremos algunas de las características y aspectos más trascendentales que debemos conocer de una componente de ruido basada en una ley potencial.

El *espectro de potencia* de una gran variedad de señales de carácter geofísico puede ser descrito como una *ley potencial* dependiente de la frecuencia, tal que:

$$P(f) = P_0 \cdot \left(\frac{f}{f_0}\right)^\alpha \quad (8.1)$$

Donde  $f$  es la *frecuencia temporal o espacial*,  $P_0$  y  $f_0$  son constantes normalizadas y  $\alpha$  es el denominado *índice espectral*. Atendiendo a los distintos valores de  $\alpha$ , podemos clasificar el ruido en dos grandes grupos: *movimiento browniano fraccional* cuando  $-3 < \alpha < -1$  y *ruido blanco fraccional* cuando  $-1 < \alpha < 1$ . Dentro de esta clasificación, reciben especial interés aquellos cuyo índice espectral adopta determinados valores enteros o fraccionales. Entre los más importantes cabe destacar, por ejemplo, el denominado paseo Browniano o *paseo aleatorio* ( $\alpha = -2$ ), la *turbulencia de Kolmogorov* ( $\alpha = \frac{-5}{3}$ ), el *ruido parpadeante* ( $\alpha = -1$ ) o el *ruido blanco* ( $\alpha = 0$ ). Asimismo, todo ruido cuyo índice espectral no sea nulo se conoce comúnmente como *ruido de color* (o *correlado temporalmente*) (ver Mao et al., 1999).

El paseo browniano es un ruido que se manifiesta en los datos de forma bastante separada en el tiempo, es decir, para poder detectarlo es necesaria la disponibilidad de una gran cantidad de observaciones. Por el contrario, el ruido parpadeante, que también introduce dependencias temporales, requiere para ser detectado un menor número de datos que el paseo browniano, aunque más que el necesario para reconocer la presencia de un ruido blanco.

Cada ruido, caracterizado por su índice espectral, tiene asociada una *matriz de covarianzas* y una amplitud que determina su comportamiento. A continuación, veremos una forma de construir la matriz de covarianzas asociada a un ruido de índice espectral determinado  $\alpha$ .

## 8.2. Matrices de covarianza

Para un proceso de ruido con un índice espectral que varía entre  $-3 < \alpha < 1$ , su correspondiente matriz de covarianza puede obtenerse fácilmente mediante un método descrito por *Johnson y Wyatt* (para más detalle, ver *Johnson and Wyatt, 1994*). Así pues, consideremos un vector  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ , con  $N \in \mathbb{N}$ , de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con varianza unitaria. Mediante una transformación, representada por la matriz  $T$ , se puede construir una nueva secuencia de variables aleatorias  $d$  con matriz de covarianza  $Q(\alpha)$  de forma que:

$$d = Tx \quad (8.2)$$

Teniendo en cuenta la *ley de propagación del error*<sup>1</sup>, podemos escribir que la matriz de covarianza del nuevo vector de variables aleatorias  $d$  vendrá dada por:

$$Q(\alpha) = TQ_xT^T \quad (8.3)$$

donde  $Q_x = I_N$  es la matriz de covarianzas de las variables aleatorias contenidas en  $x$ , por lo que:

$$Q(\alpha) = TT^T \quad (8.4)$$

Así pues, para determinar la matriz de covarianzas de cualquier ruido de color bastaría con conocer la matriz de la transformación que permite convertir un vector de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con varianza uno en un vector de variables aleatorias de índice espectral  $\alpha$ . Esta matriz de transformación fue descrita por *Hosking* en 1981 utilizando el denominado método de integración-diferenciación fraccional (*Hosking, 1981*). Dicha matriz de transformación vendrá dada por:

$$T = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \eta_2 & \eta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_N & \eta_{N-1} & \eta_{N-2} & \dots & \eta_1 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

---

<sup>1</sup>Ver Apéndice A.

donde

$$\eta_j = \frac{-\frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(j - 2 - \frac{\alpha}{2}\right)}{(j-1)!} = \frac{\Gamma\left(j - 1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{(j-1)! \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N \quad (8.6)$$

Esta última relación puede aproximarse por otra expresión más sencilla cuando el número de observaciones del que dispongamos sea lo suficientemente grande:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \eta_j = \frac{(j-1)^{-1-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (8.7)$$

En general, se empleará la ecuación (8.7) cuando el número de observaciones disponible sea mayor que 160, mediante la cual se cometería un error del orden de  $10^{-5}$  unidades. Para un número menor de observaciones se usará la ecuación (8.6). En cualquier caso, la matriz  $T$  deberá ser escalada por el factor  $\Delta T_j^{-\frac{\alpha}{4}}$  donde  $\Delta T_j = |t_j - t_0|$  es la longitud entre el tiempo inicial y el instante de tiempo  $t_j$ . Esto permite asegurar que el espectro de potencia para cualquier fuente de ruido con índice espectral  $\alpha$  coincidan en la misma frecuencia dado el mismo rango temporal y la misma amplitud del ruido (Williams, 2003). Así pues, una vez construida la matriz  $T$  (mediante las ecuaciones (8.5)–(8.7)), su  $j$ -ésima columna será multiplicada por el factor:

$$\Delta T_j^{-\frac{\alpha}{4}} = |t_j - t_{j-1}|^{-\frac{\alpha}{4}} \quad (8.8)$$

En definitiva (ver Williams, 2003):

$$T = \begin{pmatrix} \eta_1 \Delta T_1^{-\frac{\alpha}{4}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \eta_2 \Delta T_1^{-\frac{\alpha}{4}} & \eta_1 \Delta T_2^{-\frac{\alpha}{4}} & 0 & \dots & 0 \\ \eta_3 \Delta T_1^{-\frac{\alpha}{4}} & \eta_2 \Delta T_2^{-\frac{\alpha}{4}} & \eta_1 \Delta T_3^{-\frac{\alpha}{4}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_N \Delta T_1^{-\frac{\alpha}{4}} & \eta_{N-1} \Delta T_2^{-\frac{\alpha}{4}} & \eta_{N-2} \Delta T_3^{-\frac{\alpha}{4}} & \dots & \eta_1 \Delta T_N^{-\frac{\alpha}{4}} \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

Dado que el instante inicial  $t_0$  es un tiempo de referencia, siempre podremos considerarlo de manera que  $\Delta T_1 = |t_1 - t_0| = 1$ , en este caso tomaremos  $t_0 = t_1 - 1$ . A continuación veremos la forma que adoptan estas matrices de covarianzas  $Q(\alpha)$  para ciertos valores concretos del índice espectral,  $\alpha$ .



### 8.2.1. Matriz de covarianzas para un ruido blanco

Como sabemos, un ruido blanco se caracteriza por un índice espectral  $\alpha = 0$  y en consecuencia, sustituyendo en la expresión (8.6) se observa que  $\eta_1 = 1$  y  $\eta_j = 0$  para  $j > 1$ . Ello nos lleva a que la matriz  $T$  para un ruido blanco coincide con la matriz identidad y por tanto:

$$Q(0) = TT^T = I \quad (8.10)$$

Además, dado que los factores de escalamiento resultan ser  $\Delta T_j^{-\frac{\alpha}{4}} = \Delta T_j^0 = 1$  podemos concluir que la matriz de covarianzas es *independiente del tiempo*.

### 8.2.2. Matriz de covarianzas para un ruido parpadeante

La matriz de covarianzas para un ruido parpadeante fue aproximada y derivada por Zhang et al. (1997):

$$\{Q(-1)\}_{i,j} = \begin{cases} \frac{9}{8} & \text{si } \Delta_{ij} = 0 \\ \frac{9}{8} \cdot \left(1 - \frac{2 + \log_2 \Delta_{ij}}{24}\right) & \text{si } \Delta_{ij} \neq 0 \end{cases} \quad (8.11)$$

siendo  $\Delta_{ij} = |t_j - t_i|$ . No obstante, esta matriz no es exactamente la misma que la propuesta en este capítulo (dada por las ecuaciones (8.4) y (8.9)). La principal diferencia entre ambas radica en un escalamiento de las amplitudes. Así pues, la amplitud para la matriz que utilizaremos es aproximadamente 1.7440 veces la amplitud para la matriz de covarianzas propuesta por *Zhang* (ver Williams, 2003).

### 8.2.3. Matriz de covarianzas para un paseo aleatorio

En este caso, el índice espectral es  $\alpha = -2$ . Sustituyendo adecuadamente en la ecuación (8.6) se observa que:

$$\eta_j = \frac{\Gamma(j-1-\frac{\alpha}{2})}{(j-1)!\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} = \frac{\Gamma(j)}{(j-1)!\Gamma(1)} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N \quad (8.12)$$

Sabiendo que  $\Gamma(1) = 1$  y que  $\Gamma(j) = (j-1)!$  para  $j \in \mathbb{N}$ , se tiene que:

$$\eta_j = \frac{\Gamma(j)}{(j-1)!\Gamma(1)} = \frac{(j-1)!}{(j-1)!\Gamma(1)} = 1 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N \quad (8.13)$$

Esto nos lleva a que la matriz  $T$  una vez escalada adopte la siguiente expresión:

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta T_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\Delta T_1} & \sqrt{\Delta T_2} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\Delta T_1} & \sqrt{\Delta T_2} & \sqrt{\Delta T_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\Delta T_1} & \sqrt{\Delta T_2} & \sqrt{\Delta T_3} & \dots & \sqrt{\Delta T_N} \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

Así pues, la matriz de covarianzas asociada a un paseo aleatorio vendrá dada por:

$$Q(-2) = TT^T = \begin{pmatrix} R_1 & R_1 & R_1 & \dots & R_1 \\ R_1 & R_2 & R_2 & \dots & R_2 \\ R_1 & R_2 & R_3 & \dots & R_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 & R_2 & R_3 & \dots & R_N \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

siendo  $R_j = \sum_{i=1}^j \Delta T_i = t_j - t_0$ . En este caso, como vemos, la matriz de covarianzas es dependiente del tiempo. Así pues, si la serie temporal es homogénea, se tiene que

$$R_j = \sum_{i=1}^j \Delta T_i = t_j - t_0 = [t_0 + j \cdot (t_j - t_0)] - t_0 = j \cdot R_1$$

y sustituyendo en (8.15) obtenemos:

$$Q(-2) = TT^T = R_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & N \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

### 8.3. Relación ruido-periodograma

Llegado este punto, ya se han caracterizado algunos de los distintos tipos de ruido que pueden presentarse en el análisis de datos geodésicos. Asimismo, se ha especificado la forma que adquiere la matriz de covarianzas asociada a cada uno de ellos en función del índice espectral que lo caracteriza y su dominio temporal, pero ¿cómo podemos averiguar el tipo de ruido derivado de una ley potencial que afecta a una determinada serie temporal? En esta sección, se describirá una sencilla técnica que permitirá, en ciertas ocasiones, determinar el tipo de ruido que subyace bajo una serie temporal dada.

Como se indicaba al inicio del capítulo, el espectro del ruido que aparece en las series temporales de carácter geodético puede ser explicado de manera aceptable como una ley potencial dependiente de la frecuencia. Supongamos pues que disponemos de una serie temporal cuyo contenido armónico y determinístico ha sido eliminado. Disponemos por tanto de una serie que representa únicamente un proceso de ruido. Sabemos entonces que su espectro podrá describirse mediante la expresión (8.1). Aplicando logaritmos a ambos términos de dicha relación obtenemos:

$$\log [P(f)] = \log (P_0) + \alpha \log \left( \frac{f}{f_0} \right) \quad (8.17)$$

Como puede apreciarse, el logaritmo del espectro de potencia puede expresarse como una función lineal dependiente del logaritmo de la frecuencia cuya pendiente se corresponde precisamente con el índice espectral. Este hecho sugiere una forma sencilla de estimar el índice espectral de un proceso de ruido contenido en una serie temporal. En primer lugar se recurriría al cálculo del periodograma de Lomb para la serie temporal residual en cuestión. Una vez se dispone del espectro, representamos el mismo en escala logarítmica para ajustarlo a una recta mediante mínimos cuadrados. La pendiente de dicha función lineal estimada será una aproximación del índice espectral que caracteriza al ruido.

De esta forma, mediante la simple observación de su periodograma de Lomb en escala logarítmica, puede obtenerse una primera idea del tipo de ruido que afecta a una serie temporal determinada. Así pues, a partir de aquí, es fácilmente deducible que el espectro de potencia de un ruido blanco debe carecer de inclinación significativa

alguna, y por tanto ha de poder aproximarse mediante una función lineal constante. En la Figura 8.1 puede observarse el periodograma de Lomb en escala logarítmica de diversos tipos de ruidos.

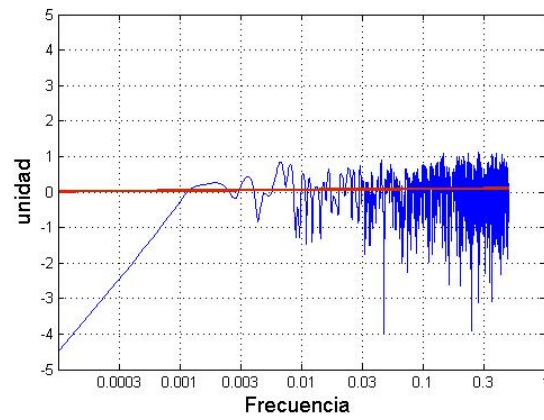
Ahora bien, en ocasiones puede interesar representar el ruido de una serie como combinación lineal de varios procesos en lugar de considerar una única e indivisible componente de color. Surge así el concepto de *frecuencia de transición*. La frecuencia de transición es aquella para la cual el espectro de potencia de dos procesos de ruido resulta indistinguible (Langbein and Johnson, 1997). Dados dos procesos de potencia con índices espectrales  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  (con  $\alpha_2 > \alpha_1$ ), su frecuencia de transición,  $f_{co}$ , puede derivarse a partir de la igualdad de sus espectros de potencia:

$$\begin{aligned} C_1 f^{\alpha_1} &= C_2 f^{\alpha_2} \quad \rightarrow \quad f^{\alpha_1} (C_1 - C_2 f^{\alpha_2 - \alpha_1}) = 0 \\ f_{co} &= \left( \frac{C_1}{C_2} \right)^{\alpha_2 - \alpha_1} \end{aligned} \quad (8.18)$$

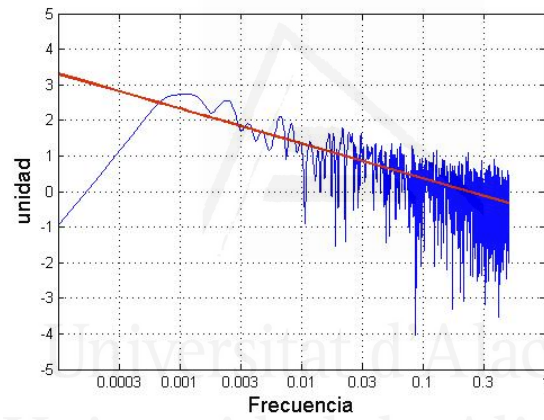
Sin embargo, no es habitual disponer de los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , por lo que la expresión anterior resulta casi impracticable. Gráficamente, para una serie temporal cualquiera, la frecuencia de transición podría entenderse como aquella frecuencia a partir de la cual el periodograma de los residuales muestra un cambio de rasante. Así pues, si fuéramos capaces de determinar la/s frecuencia/s de transición en el periodograma de una serie temporal dada, podríamos expresar su componente de ruido como combinación lineal de tantos procesos de ruido como puedan identificarse a distintas escalas. Otra posibilidad, que es la más utilizada, consiste en asumir una determinada combinación de ruidos de distinto índice espectral y estimar sus amplitudes. Si alguna de estas componentes no es adecuada para el modelo, su amplitud se estimará nula.

## 8.4. Ruido en las observaciones GPS

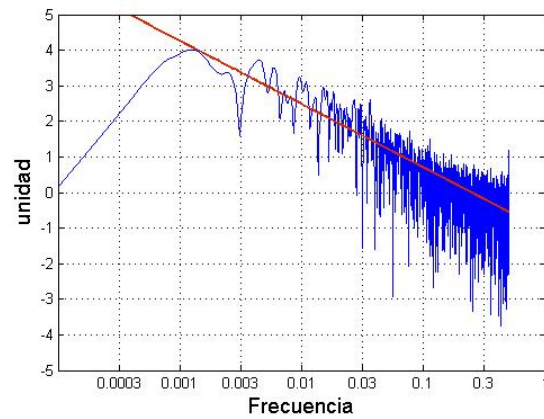
Hasta mediados de la década de los 90, los investigadores y científicos asumían que las mediciones continuas establecidas mediante técnicas geodéticas eran estadísticamente independientes. Sin embargo, en 1997, *Langbein y Johnson* lograron demostrar que esta hipótesis, comúnmente aceptada, no era correcta (ver Langbein and John-



(a)



(b)



(c)

Figura 8.1: Periodograma en escala logarítmica de una componente de ruido con índice espectral (a)  $\alpha = 0$ , (b)  $\alpha = -1$  y (c)  $\alpha = -2$ . La frecuencia se recoge en ciclos por unidad de tiempo.

son, 1997). Probaron que los datos geodéticos están generalmente contaminados por al menos dos fuentes distintas de ruido: una primera correspondiente o relacionada con la precisión instrumental y una segunda asociada con el movimiento no tectónico del monumento sobre el cual se encuentra anclado en el sistema geodético. Mientras que la primera de las fuentes se caracteriza por la introducción de un ruido blanco, la última se correspondería con un paseo aleatorio (Langbein and Johnson, 1997).

Entre todas las técnicas geodéticas, la técnica de GPS ha sido una de las más ampliamente estudiadas en busca de una correcta caracterización del ruido asociado a la misma. Es sabido que las mediciones continuas de GPS ciertamente minimizan los errores sistemáticos relacionados con las antenas ya que éstas se encuentran adecuadamente ubicadas sobre monumentos firmemente anclados a una superficie terrestre representativa de la corteza terrestre (ver Zhang et al., 1997). Sin embargo, en ocasiones, se producen reemplazamientos del equipo físico y su anclaje de forma que las observaciones pueden verse afectadas en alguna medida. Zhang et al. (1997) estudió las series temporales de posiciones de 10 estaciones de GPS ubicadas en el sur de California, las cuales presentaban un dominio temporal con una longitud de 19 meses. De esta investigación pudo concluirse que el ruido en las series de GPS podría ser caracterizado mediante un proceso de ruido blanco fraccional con un índice espectral de  $-0.4 \pm 0.2$  unidades o bien, por una combinación de un ruido blanco y otro parpadeante. Por su parte Mao et al. (1999) establecieron un análisis de las series de posiciones de GPS de 23 estaciones con un dominio temporal de 3 años. Con este estudio se concluyó que el ruido en las mediciones de las tres componentes que describen la posición de una estación (norte, este y desplazamiento vertical) podían ser modeladas siguiendo una combinación lineal de ruido blanco y parpadeante. Además, fueron capaces de establecer que la amplitud de este ruido era mucho más notable en el caso de los desplazamientos verticales de las estaciones (seguido por los desplazamientos en la componente norte). Años más tarde, Williams (2004) también realizó un estudio sobre 400 estaciones de GPS obteniendo una estimación para el índice espectral que oscilaba entre el característico de un ruido parpadeante y el de un paseo aleatorio. No obstante, dado que la mayoría de las estaciones presentaban un índice espectral muy próximo a  $-1$  no había evidencias estadísticas suficientes para descartar la combinación de un ruido parpadeante más un ruido blanco para

las altas frecuencias como el mejor modelo capaz de caracterizar la componente de ruido de las observaciones de GPS.

Para finalizar, señalaremos que otras técnicas geodéticas como VLBI o SLR fueron también estudiadas durante los últimos años, aunque en una menor proporción. En este caso, los resultados apuntan a un ruido blanco como el tipo de modelo que mejor explica el ruido introducido por estas técnicas (ver Ray et al., 2008).



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

# Capítulo 9

## Algoritmo FHAST

En los capítulos anteriores se asumía que la componente de ruido inmersa en la serie temporal que deseaba estudiarse era un ruido blanco o, al menos, se consideraba que las observaciones carecían de cualquier tipo de correlación. No obstante esta hipótesis es poco realista ya que, en la mayoría de las situaciones, encontraremos series cuyo contenido residual va mucho más allá de un simple ruido blanco. En este capítulo se considerará la posibilidad de que la serie se vea afectada por un ruido derivado de una ley de potencia y se describirá un método que permite el estudio de series temporales teniendo cuenta este aspecto. Para ello, como veremos, se combinará el método armónico no lineal descrito en el capítulo 3 con el denominado *método de mínimos cuadrados para la estimación de la componente de varianza* propuesto por *Amiri-Simkooei y Teunissen* (ver Amiri-Simkooei, 2009; Amiri-Simkooei et al., 2007; Teunissen and Amiri-Simkooei, 2008a,b). Se describirán los distintos pasos y elementos de este proceso algorítmico y se expondrá algún ejemplo para testar su funcionalidad y operatividad.

### 9.1. Introducción

La ampliación del algoritmo propuesto por *Harada y Fukushima* viene motivada por el estudio sobre los procesos de ruido inmersos en series temporales de carácter geodético, especialmente aquellas que se refieren a las posiciones de estaciones de GPS. Durante los últimos 15 años se han publicado multitud de investigaciones



sobre esta componente residual (ver, por ejemplo, Langbein, 2008; Langbein and Johnson, 1997; Mao et al., 1999; Williams, 2004; Zhang et al., 1997). Para establecer un estudio ideal de estas series temporales sería deseable que sólo contuvieran un ruido blanco y que todas sus fluctuaciones periódicas resultaran completamente detectables. No obstante, la realidad dista de ser así. Diversos estudios de series temporales geodéticas han proporcionado evidencias sobre fuentes de errores que son capaces de introducir correlaciones temporales a largo plazo en los datos. Además, la presencia de este tipo de error puede llegar a ocultar, en según qué situaciones, información sobre el contenido armónico de la serie, o lo que es peor, dar importancia a frecuencias angulares que no explican el verdadero comportamiento del fenómeno que se estudia. Recientes investigaciones concluyen que, en general, estas series de GPS se encuentran influenciadas por un ruido fruto de la suma de un ruido blanco y un ruido parpadeante, aunque algunas estaciones parecen manifestar la presencia de un paseo aleatorio.

Por todo ello, las últimas pretensiones en el estudio de estas series temporales consisten en poder obtener la estimación de un *modelo funcional* (generalmente armónico) y un *modelo estocástico* que permita explicar su comportamiento de la mejor forma posible. Así pues, dada una serie temporal escalar cualquiera,  $\{t_n, d_n\}_{n=1,2,\dots,N}$  estaremos interesados en determinar simultáneamente:

1. El conjunto de parámetros lineales y no lineales de un modelo funcional armónico:

$$E \left[ (d_1, d_2, \dots, d_N)^T \right] = (h_1, h_2, \dots, h_N)^T = B \cdot \vec{a} \quad (9.1)$$

donde  $E$  denota el *operador esperanza*,  $B$  representa la *matriz de diseño* del modelo funcional y  $\vec{a}$  es el vector de coeficientes lineales. Como se verá más adelante, la matriz de diseño depende tanto del dominio temporal de la serie como del vector de frecuencias angulares que deberá extraerse a partir del estudio armónico de los datos.

2. Un modelo estocástico que describa la componente de ruido:

$$D \left[ (d_1, d_2, \dots, d_N)^T \right] = Q_y = Q_0 + \sum_{k=1}^p \sigma_k Q_k \quad \text{con } p \in \mathbb{N} \quad (9.2)$$

donde  $D$  denota el *operador dispersión*,  $Q_y$  es la *matriz de covarianzas* expresada como combinación lineal de las *matrices cofactor*  $\{Q_k\}_{k=1,\dots,p} \in \mathbb{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ ,  $Q_0$  es la matriz conocida del modelo estocástico (si la hubiera) y  $\{\sigma_k\}_{k=1,\dots,p}$  son las *componentes de (co)varianza* que deben ser estimadas.

La pregunta que se establece ahora es cómo obtener dicho modelo estocástico. Dos técnicas han sido tradicionalmente las más empleadas para evaluar las características del ruido en series temporales geodéticas, a saber: *métodos basados en el espectro de potencia* y el *método de estimación de máxima verosimilitud* (MLE). Los primeros están destinados a examinar los datos en el dominio de frecuencia, mientras que el segundo se utiliza para examinar la matriz de covarianzas de los datos en el dominio espacial o temporal. Ahora bien, aunque el método MLE es más adecuado para estimar los parámetros de un modelo de ruido que cualquier otra técnica basada en el estudio del espectro de potencia, éste conlleva cierta dificultad en su implementación y, además, su utilización es relegada generalmente al cálculo de la cantidad de ruido blanco, parpadeante o paseo aleatorio contenido en una serie temporal. En nuestro caso, para estimar los modelos dados por las ecuaciones (9.1) y (9.2) nos valdremos del método armónico no lineal descrito en capítulos anteriores y de la técnica de *estimación mínimo cuadrática de componentes de varianza* (LS-VCE). A su favor, puede decirse que el LS-VCE es una técnica aplicable bajo cualquier contexto sin ningún tipo de restricción, independientemente de las características del ruido de potencia contenido en la serie de datos. El método presenta la ventaja de ser relativamente sencillo de implementar y permite obtener la matriz de covarianza de los estimadores que describen la incertidumbre de las componentes de (co)varianza.

En las siguientes secciones, se describe un método algorítmico que combina los aspectos más ventajosos del ya conocido análisis armónico no lineal de *Harada y Fukushima*, con la técnica LS-VCE de *Amiri-Simkooei y Teunissen* (ver Amiri-Simkooei, 2009; Amiri-Simkooei et al., 2007; Teunissen and Amiri-Simkooei, 2008a,b). En lo sucesivo, al método de análisis para series temporales surgido de esta combinación lo denominaremos *método FFAST* (*Fukushima-Harada-Amiri-Simkooei-Teunissen*).

## 9.2. Función objetivo

Hasta ahora habíamos supuesto que las series temporales se encontraban influenciadas por una componente de ruido blanco o, a lo sumo, se consideraba que las observaciones estaban incorreladas entre sí, es decir, la matriz de covarianzas del ruido era diagonal. Así pues, siempre que pretendíamos construir un modelo funcional para una serie temporal, nos centrábamos en minimizar, mediante la técnica de mínimos cuadrados, la suma de los cuadrados de las diferencias entre las observaciones y el modelo:

$$\phi = \sum_{n=1}^N \frac{1}{q_{nn}} (d_n - h_n)^2 = (d - h)^T Q_y^{-1} (d - h) \quad (9.3)$$

donde  $d = (d_1, d_2, \dots, d_N)^T$ ,  $h = (h_1, h_2, \dots, h_N)^T$ ,  $Q_y$  es la matriz de covarianzas del ruido (en este caso *diagonal*) y  $q_{nn}$  es el  $n$ -ésimo término de la diagonal principal ocupando la posición  $(n, n)$ . Es decir, si observamos atentamente la expresión (9.3) vemos que, bajo la presencia de un ruido blanco en los datos, el problema de optimización se reduce a un problema de mínimos cuadrados ponderados. A partir de éste, es posible determinar un modelo funcional armónico que ajuste los datos con relativa facilidad. La presencia de la matriz diagonal de covarianzas  $Q_y$  puede interpretarse, por tanto, como una matriz donde se almacena la incertidumbre asignada a cada una de las observaciones contenidas en la serie temporal. Esto hace posible adaptar adecuadamente el modelo de ajuste a la información real contenida en los datos, de tal forma que aquellas observaciones con mayor incertidumbre en su estimación tienen menor relevancia a la hora de construir el modelo funcional. Sin embargo, esto no es así para series temporales con otros procesos de ruido, ya que la matriz de covarianzas  $Q_y$  deja de ser diagonal (ver ecuaciones (8.4), (8.11) y (8.15)). Ello implica que la función objetivo pasa de representar una simple suma de cuadrados a poder contener como sumandos los productos mixtos de diferencias entre las observaciones y el modelo para distintos instantes de tiempo. Así pues, en lo sucesivo, y salvo que se indique lo contrario, asumiremos una función objetivo de la forma:

$$\phi = (d - h)^T Q_y^{-1} (d - h) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mu_{ij} (d_i - h_i) \cdot (d_j - h_j) \quad (9.4)$$

## 9.3. Modelo estocástico

Dado el modelo estocástico descrito en la ecuación (9.2), podemos observar que éste consta de una serie de elementos que a priori desconocemos y que en consecuencia deben ser estimados. Estamos hablando de las matrices cofactor  $Q_k$  y de las componentes de (co)varianza  $\sigma_k$ . En esta sección se describirá el procedimiento que seguiremos para *determinar las matrices cofactor*. La estimación de las componentes de (co)varianza se obtienen mediante la aplicación del método LS-VCE que se detallará más adelante.

Según (9.2), la dispersión de una serie temporal se expresa como combinación lineal de un conjunto de matrices  $Q_k$  que pueden interpretarse como las matrices de covarianza asociadas a distintos tipos de ruidos que podrían estar presentes en los datos. La forma general que adquieren dichas matrices ya la conocemos y viene dada por las ecuaciones introducidas en el capítulo anterior. Así pues, conocidos los tipos de ruido inmersos en los datos, podremos determinar de manera sencilla las matrices  $Q_k$  que intervienen en el modelo estocástico.

### 9.3.1. Estimación de un índice espectral

Supondremos, primeramente, que disponemos de una serie temporal escalar  $\{t_n, d_n\}_{n=1,2,\dots,N}$  que contiene *un único proceso de ruido* caracterizado por *un índice espectral*  $\alpha$ . En este caso sencillo, el modelo estocástico se reduciría a:

$$D(d_n) = \sigma^2 Q(\alpha) \quad (9.5)$$

siendo  $Q(\alpha)$  la matriz de covarianza del ruido y  $\sigma^2$  su correspondiente componente de varianza. Ahora bien, es conocido que el espectro de un proceso de ruido puede modelarse mediante:

$$P(f) = P_0 \left( \frac{f}{f_0} \right)^\alpha$$

donde  $f$  es la frecuencia fundamental,  $P_0$  y  $f_0$  son constantes y  $\alpha$  es el valor del índice espectral. Así pues, como vimos en el capítulo 8, tomando logaritmos en esta

expresión, obtenemos:

$$\log [P(f)] = \log (P_0) + \alpha \log \left( \frac{f}{f_0} \right)$$

Estas observaciones nos permitirán obtener una estimación del índice espectral para la componente de ruido contenida en las observaciones. Para ello, bastará calcular el periodograma de la serie temporal dada y ajustar dicho espectro a una recta. La tasa de crecimiento de dicha recta podrá considerarse como una aproximación al índice espectral del ruido en la serie.

No obstante, cabe realizar ciertas indicaciones y puntualizaciones respecto a este procedimiento. Es importante tener en cuenta que la estimación del índice espectral deberá realizarse para la serie temporal sin tendencia. La componente de tendencia de una serie puede confundirse en el periodograma con un proceso de paseo aleatorio, que recordemos induce correlación en las observaciones en largos periodos de tiempo. Así pues, si sabemos que nuestra serie temporal está influenciada por una componente de tendencia, ésta deberá estimarse y ser eliminada de las observaciones como paso previo al cálculo del periodograma. Si no se procede de este modo, el valor del verdadero índice espectral podría verse tergiversado por una estimación de mayor módulo, sobrevalorando así la componente de ruido inmersa (ver Figura 9.1).

Por otro lado, debido al problema de la fuga espectral y la presencia de numerosos picos en el periodograma de una serie temporal con ruido, es conveniente que el ajuste lineal que se realice sea *robusto*. Mediante un ajuste de estas características lo que se pretende es obtener una mejor estimación de la pendiente del espectro eliminando aquellos picos aislados de mayor potencia que contienen información funcional de la serie y que pueden considerarse *outliers*, ya que no informan sobre la componente residual o de ruido.

En definitiva, si disponemos de una serie temporal escalar afectada por un tipo de ruido de potencia y deseamos estimar el valor de su índice espectral  $\alpha$ , seguiremos los siguientes pasos:

1. **Eliminar la componente de tendencia:** Se realizará una estimación de la componente de tendencia para su posterior eliminación de la serie temporal. Esta tendencia se supondrá polinómica y a lo sumo cuadrática.

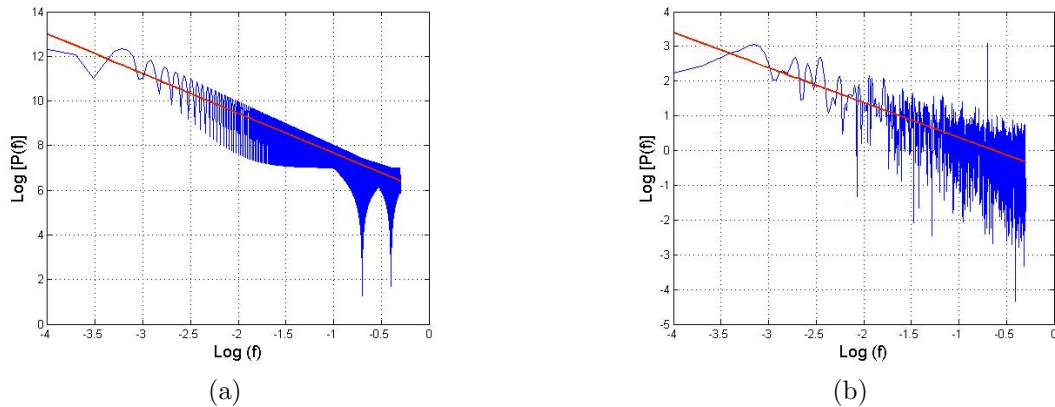


Figura 9.1: Peridograma de Lomb (azul) y estimación del índice espectral (rojo) para una señal (a) con tendencia y (b) sin tendencia. La señal contiene un total de  $N = 2001$  observaciones equiespaciadas y viene dada por  $d_n = 0.1 - 0.2t_n + 0.1t_n^2 + 0.5 \cos(\omega t_n) - \sin(\omega t_n) + \epsilon_n$  siendo  $\omega = 2\pi \cdot 0.2$  y  $\epsilon_n$  un ruido parpadeante ( $\alpha = -1$ ) de amplitud  $\sigma = 1$  unidades. Las estimaciones del índice espectral  $\alpha$  a partir del periodograma son: (a)  $\alpha = -1.778$  y (b)  $\alpha = -1.006$

2. **Calcular el periodograma de Lomb**, según la ecuación (3.66). Si las observaciones poseen incertidumbres conocidas será conveniente el empleo de pesos para el cálculo del periodograma. Cada observación tendrá asignada como peso el cuadrado de la inversa de su incertidumbre.
3. **Realizar una regresión lineal robusta**<sup>1</sup> del periodograma en escala logarítmica. Finalmente, la pendiente de dicha recta será considerada como el valor estimado para el índice espectral.

Una vez conocido el tipo de ruido inmerso en la serie temporal, podemos obtener fácilmente la matriz de covarianza asociada mediante el uso de las fórmulas detalladas en el capítulo 8 y extraídas del artículo escrito por Williams (2003).

<sup>1</sup>La regresión lineal robusta es una alternativa a la regresión por mínimos cuadrados que se utiliza cuando la serie temporal presenta diversos *outliers* u observaciones heterogéneas. Dicha técnica se basa en minimizar la suma de los cuadrados de los residuos, multiplicados por una función de ponderación o filtro que se introduce para reducir o eliminar el efecto de los residuos de valor elevado. Para más información ver Rousseeuw and Leroy (1987).

### 9.3.2. Componente residual como combinación de varios ruidos. Estimación de la frecuencia de transición.

Aunque en la mayoría de ocasiones será suficiente con estimar un tipo de error para la serie temporal, puede ocurrir que las observaciones manifiesten la presencia de una clara componente residual fruto de la combinación de varios tipos de ruidos. Si esto ocurriera, el espectro de potencia de la serie temporal se caracterizaría por la presencia de tantas regiones de escala como distintos tipos de ruido contenga. Así pues, teniendo presente lo explicado en la sección 9.3.1, podría abarcarse esta nueva situación de forma sencilla. Una vez eliminada la tendencia y calculado el periodograma de Lomb (en escala logarítmica), deberemos identificar cual es el número de regiones con cambio de rasante que aparecen. Tras ello, simplemente deberemos realizar una regresión lineal robusta del *log-log* periodograma en cada una de dichas regiones. Una vez conocidas las pendientes, podremos calcular la matriz de covarianza para cada tipo de ruido y construir así el modelo estocástico para la serie temporal.

Sin embargo, como sabemos, el espectro de potencia puede resultar bastante irregular, impidiendo detectar de forma clara las distintas regiones de escala. Además, debido a estas irregularidades, a pesar de que permitan diferenciar las regiones de escala, pueden afectar la estimación de los índices espectrales. Para resolver este dilema, puede recurrirse a la aplicación del denominado *análisis de fluctuación sin tendencia* (DFA) (Telesca, 2007). El análisis DFA evita estimaciones erróneas de los índices espectrales así como las posibles correlaciones que pueden derivarse de la presencia de tendencia o no estacionariedad de la serie. Estas tendencias pueden ser diferenciadas de las fluctuaciones intrínsecas del sistema, lo que hace posible determinar el correcto comportamiento de escala de las fluctuaciones. Así pues, dada una serie temporal escalar  $\{t_n, d_n\}_{n=1,2,\dots,N}$ , el método DFA sigue los siguientes pasos:

1. **Integración de la serie temporal:** Se calcula

$$y(p) = \sum_{n=1}^p (d_n - \bar{d}) \quad \text{para todo } p = 1, 2, \dots, N \quad (9.6)$$

siendo  $\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n$  la media de la serie temporal.

2. **Partición de la serie temporal:** Se divide la serie integrada  $\{y(p)\}_{p=1,2,\dots,N}$  en regiones disjuntas de tamaño  $m$

$$\{[y(1), y(m)], [y(m+1), y(2m)], \dots, [y(N-m+1), y(N)]\} \quad (9.7)$$

3. **Eliminación de la tendencia por segmentos:** En cada segmento de la partición (9.7) se calcula la recta de regresión  $g_m(p)$  que representará la tendencia de las observaciones del segmento que contiene a  $y(p)$ . A continuación se elimina dicha tendencia de la serie integrada en cada uno de los segmentos de la partición.

$$y_m(p) = y(p) - g_m(p) \quad \text{para todo } p = 1, 2, \dots, N \quad (9.8)$$

4. **Cálculo de la fluctuación media:**

$$F(m) = \sqrt{\sum_{p=1}^N \frac{y_m^2(p)}{N}} \quad (9.9)$$

5. Repetir el proceso con todos los tamaños posibles para los intervalos de la partición.

De esta manera, obtenemos la relación existente entre la fluctuación media  $F(m)$  y el tamaño de los elementos de la partición en (9.7). Si  $F(m)$  se comporta como una función de potencia para  $m$  se tiene que:

$$F(m) \propto m^\beta \quad (9.10)$$

Bajo estas condiciones, las fluctuaciones pueden describirse mediante el exponente de escala  $\beta$ , que representa la pendiente de la línea que ajusta el  $\log F(m)$  frente al  $\log m$ . El exponente  $\beta$  y el índice espectral  $\alpha$  están relacionados entre ellos mediante la expresión (ver Telesca, 2007):

$$\alpha = 1 - 2\beta \quad (9.11)$$



La diferenciación de tramos con distinta rasante suele ser más evidente en  $F(m)$  que en el espectro de potencia. Así pues, la presencia de diferentes regiones en  $F(m)$  con pendiente distinta implica la existencia de varios tipos de ruido de potencia en los datos. Los índices espectrales se determinan ajustando una función lineal a cada sección para calcular  $\beta$  y a partir de ahí, utilizando la expresión (9.11), obtener la estimación para  $\alpha$ . Los puntos donde las rectas aproximantes a estos tramos se intersectan determinan la posible frecuencia de transición.

## 9.4. Modelo funcional

El modelo funcional que se utilizará es exactamente el mismo que se propuso en la sección 3.2.1. Dispondremos por tanto de tres tipos de funciones base: *tres funciones polinómicas* (de grado cero, uno y dos), un par de *términos de Fourier* para cada frecuencia angular extraída de los datos, y dos *términos seculares mixtos* para algunas de estas frecuencias. El procedimiento de construcción y asignación de funciones base es idéntico al descrito en el capítulo 3. Por este motivo, no entraremos en más detalle. La única diferencia existente entre el método armónico no lineal descrito en 3.2 y el método FFAST, radica en que las expresiones de los periodogramas son distintas, si bien, dicha modificación no supone cambio alguno en cuanto al procedimiento de extracción y asignación de funciones base para las frecuencias. La ampliación del concepto de periodograma se detallará en la sección 9.6.

Conocido el modelo funcional armónico de una serie temporal, éste puede recogerse en la denominada *matriz de diseño* del modelo. Esta matriz contendrá en cada fila el valor adquirido en un determinado instante de tiempo por cada una de las funciones base incluidas en el modelo. Así pues, cada columna hará referencia a una función base y cada fila a un tiempo de observación concreto. Supongamos que la serie temporal  $\{t_n, d_n\}_{n=1, \dots, N}$  requiere de un modelo funcional con  $L$  funciones base,  $\{\varphi_l\}_{l=1, \dots, L}$ :

$$h_n = \sum_{l=1}^L a_l \cdot \varphi_l(t_n)$$

siendo  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_L)^T$  los coeficientes lineales a estimar. Entonces, la matriz de diseño del modelo vendrá dada por:

$$B = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_L(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_L(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(t_N) & \varphi_2(t_N) & \dots & \varphi_L(t_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{N \times L}(\mathbb{R}) \quad (9.12)$$

Como veremos más adelante, esta matriz jugará un papel fundamental para el cálculo del periodograma y la estimación de las componentes de varianza.

Una vez conocida la matriz de diseño del modelo, podremos estimar los coeficientes lineales mediante el uso de mínimos cuadrados tal como hacíamos en la sección 3.2.2, con la salvedad de que la función objetivo viene ahora dada por la expresión (9.4). Por tanto, la estimación mínimo cuadrática para los coeficientes lineales del modelo funcional vendrá dada por:

$$\vec{a} = W^{-1} \rho = (B^T Q_y^{-1} B)^{-1} B^T Q_y^{-1} d \quad (9.13)$$

La matriz  $W^{-1} = B^{-1} Q_y (B^T)^{-1}$  será de utilidad para determinar la precisión de las estimaciones efectuadas para los parámetros lineales.

## 9.5. Estimación de la componente de varianza

En la sección 9.3 se proporcionaron las herramientas e indicaciones necesarias para estimar las matrices cofactor que intervienen en el modelo estocástico dado por la ecuación (9.2). Sin embargo, no se describió ningún proceso por el cual se pudiera estimar la componente de (co)varianza asignada a cada una de estas matrices. Así pues, en esta sección nos centraremos en proporcionar un algoritmo para la estimación de dichas componentes de tal forma que el modelo estocástico quede finalmente determinado. El procedimiento elegido para llevar a cabo esta tarea es el método LS-VCE (Amiri-Simkooei, 2009; Amiri-Simkooei et al., 2007; Teunissen and Amiri-Simkooei, 2008a,b). Esta técnica presenta numerosas ventajas, entre las cuales cabe destacar su sencilla implementación. Proporciona la estimación de los parámetros desconocidos del modelo estocástico y además lo hace en un marco teórico basado en el ubicuo método de mínimos cuadrados. Este hecho permite que los resultados obtenidos gocen de sencilla interpretación geométrica.

Se dispone, por tanto, de una serie temporal escalar  $\{t_n, d_n\}_{n=1, \dots, N}$  para la cual se ha determinado un modelo funcional armónico representado por la matriz de diseño  $B$ . Asimismo, se han estimado las matrices cofactor  $\{Q_k\}_{k=1, \dots, p}$  que intervienen en el modelo estocástico

$$Q_y = Q_0 + \sum_{k=1}^p \sigma_k Q_k \quad \text{con } p \in \mathbb{N}$$

y se desea conocer el valor de las componentes de (co)varianza  $\{\sigma_k\}_{k=1, \dots, p}$ . El método LS-VCE es un método iterativo que nos proporcionará una estimación de estas componentes. Las diferentes etapas del proceso algorítmico son las que a continuación se describen (ver Amiri-Simkooei et al., 2007):

1. Para la implementación del método, primeramente debemos proporcionar un valor inicial de las componentes de (co)varianza  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)^T$ , que almacenaremos en el vector  $\hat{\sigma}^0 = (\hat{\sigma}_1^0, \hat{\sigma}_2^0, \dots, \hat{\sigma}_p^0)^T$ . Se requiere también de una cota de error  $\epsilon$  que será utilizada en el criterio de parada algorítmica y que representa la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas del vector de componentes.
2. Inicializamos el contador de iteraciones,  $i = 0$ .
3. Evaluamos el modelo estocástico (9.2) para los valores  $\hat{\sigma}^i = (\hat{\sigma}_1^i, \hat{\sigma}_2^i, \dots, \hat{\sigma}_p^i)^T$ .
4. Calculamos la matriz  $G = (g_{kr})_{k,r=1,2,\dots,p}$  y el vector  $v = (v_1, v_2, \dots, v_p)^T$  dados por las ecuaciones:

$$g_{kr} = \frac{1}{2} \text{tr} (Q_y^{-1} P_B Q_k Q_y^{-1} P_B Q_r) \quad (9.14)$$

$$v_k = \frac{1}{2} \hat{e}^T Q_y^{-1} Q_k Q_y^{-1} \hat{e} - \frac{1}{2} \text{tr} (Q_k Q_y^{-1} P_B Q_0 Q_y^{-1} P_B) \quad (9.15)$$

para  $k, r = 1, 2, \dots, p$ , donde  $\text{tr}(\cdot)$  representa la *función traza*,  $\hat{e} = P_B d$  es el vector de residuos de mínimos cuadrados y

$$P_B = I - B (B^T Q_y^{-1} B)^{-1} B^T Q_y^{-1} \quad (9.16)$$

representa la matriz de proyección ortogonal, siendo  $I$  la matriz *identidad*.

5. Se resuelve la ecuación  $G \cdot \hat{\sigma}^{i+1} = v$ , a partir de la cual obtenemos la nueva estimación del vector de componentes:

$$\hat{\sigma}^{i+1} = G^{-1}v \quad (9.17)$$

La matriz  $G^{-1}$  resulta ser la matriz de covarianzas para las estimaciones de las componentes, por lo que ofrece una medida de la precisión de las mismas.

6. Se evalúa la condición de parada que indicará si la estimación obtenida para las componentes de (co)varianza es adecuada según la cota de error introducida en el paso 1. Así pues, se calculará:

$$\|\hat{\sigma}^{i+1} - \hat{\sigma}^i\|_G = (\hat{\sigma}^{i+1} - \hat{\sigma}^i)^T G (\hat{\sigma}^{i+1} - \hat{\sigma}^i) \quad (9.18)$$

Si esta cantidad resulta ser menor que  $\epsilon$ , entonces habremos finalizado el proceso LS-VCE, obteniendo como estimación de las componentes de (co)varianza el valor contenido en  $\hat{\sigma}^{i+1}$ . En caso contrario, se incrementará el contador de iteraciones asignando  $i \leftarrow i + 1$  y reiteraremos el proceso desde el punto 3 hasta que se satisfaga la condición de parada.

A diferencia de otros métodos destinados a la estimación de las componentes de (co)varianza, LS-VCE proporciona estimadores no sesgados de mínima varianza y lo hace independientemente de la distribución de los datos.

### 9.5.1. Condición de no negatividad

Si observamos con detalle, en el proceso LS-VCE no existe ninguna condición que nos garantice la no negatividad de las estimaciones resultantes. Sin embargo, en ocasiones, las componentes de (co)varianza que se estimen requerirán de dicha condición, pues representarán el valor de la varianza del ruido (que por definición es no negativa). Así pues, si al ejecutar el algoritmo LS-VCE para una serie temporal se obtuvieran u obtuviesen estimaciones negativas, habría que incluir alguna restricción o modificación con la finalidad de evitar dicha situación. Esta problemática fue tratada en profundidad por Amiri-Simkooei (2007). Para asegurar la condición de no negatividad podrían incorporarse las restricciones  $\sigma \geq 0$  al modelo estocástico lineal

propuesto en la ecuación (9.2). Sin embargo, estas restricciones harán que las estimaciones derivadas dejen de ser no sesgadas. Por otro lado, sin estas restricciones se corre el riesgo de obtener estimaciones negativas. Otra alternativa consiste en *reparametrizar* el modelo de tal forma que la no negatividad de la varianza esté garantizada de antemano. Así pues, partiendo del modelo lineal estocástico, se considera:

$$\sigma_k = \exp(m_k) \quad \text{para } k = 1, \dots, p \quad (9.19)$$

En lugar de estimar las componentes de (co)varianza  $\{\sigma_k\}_{k=1, \dots, p}$  para el modelo estocástico, lo que haremos será estimar los exponentes  $\{m_k\}_{k=1, \dots, p}$ . Mediante esta reparametrización, el modelo estocástico lineal se transforma en un *modelo estocástico no lineal* dado por:

$$Q_y = Q_0 + \sum_{k=1}^p \sigma_k Q_k \implies Q_y = Q_0 + \sum_{k=1}^p \exp(m_k) Q_k = Q(m_k) \quad \text{con } p \in \mathbb{N} \quad (9.20)$$

De esta forma, se asegura la no negatividad de las estimaciones para las componentes de varianza. Sin embargo, perdemos el carácter lineal del modelo, hecho que impide la aplicación directa del algoritmo LS-VCE para su resolución. Una forma de abordar este nuevo problema consiste en la linealización del modelo dado en la ecuación (9.20) mediante desarrollos en serie de *Taylor*. Con este propósito necesitaríamos conocer el valor inicial para el vector de (co)varianzas, que denotaremos por  $\sigma_k^0 = \exp(m_k^0)$ . Estos *puntos semilla* deberán situarse lo suficientemente próximos a los verdaderos valores para evitar que el proceso diverja sin proporcionar una solución al problema. Así pues, aproximando la función exponencial por el correspondiente polinomio de Taylor centrado en  $m_k^0$ :

$$\exp(m_k) = \exp(m_k^0) + \exp(m_k^0) (m_k - m_k^0) + \dots \quad (9.21)$$

Si se limita el desarrollo hasta el término lineal, se obtiene que:

$$\exp(m_k) \approx \exp(m_k^0) (m_k - m_k^0 + 1) \quad (9.22)$$

Sustituyendo esta aproximación en la ecuación (9.20) se observa que:

$$\begin{aligned}
 Q_y &\approx Q_0 + \sum_{k=1}^p \exp(m_k^0) (m_k - m_k^0 + 1) Q_k = \\
 &= Q_0 + \sum_{k=1}^p \exp(m_k^0) Q_k - \sum_{k=1}^p m_k^0 \exp(m_k^0) Q_k + \\
 &+ \sum_{k=1}^p m_k \exp(m_k^0) Q_k
 \end{aligned} \tag{9.23}$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
 Q_y &\approx Q(m_k^0) - \sum_{k=1}^p m_k^0 \exp(m_k^0) Q_k + \sum_{k=1}^p m_k \exp(m_k^0) Q_k \\
 &= \tilde{Q}_0 + \sum_{k=1}^p m_k \tilde{Q}_k
 \end{aligned} \tag{9.24}$$

De esta forma el problema LS-VCE no lineal lo hemos transformado en otro de carácter lineal donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q}_0 &= Q(m_k^0) - \sum_{k=1}^p \left( m_k \frac{\partial Q(m_k)}{\partial m_k} \right) \Big|_{m_k^0} = \\
 &= Q(m_k^0) - \sum_{k=1}^p m_k^0 \exp(m_k^0) Q_k
 \end{aligned} \tag{9.25}$$

$$\tilde{Q}_k = \frac{\partial Q(m_k)}{\partial m_k} \Big|_{m_k^0} = \exp(m_k^0) Q_k \tag{9.26}$$

Es ahora cuando se está en condiciones de aplicar el método LS-VCE descrito al inicio de la sección 9.5. Con ello, se obtendrán los estimadores mínimo cuadráticos para  $m_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ . La estimación  $\hat{m}_k$  obtenida podrá ser considerada como nuevo punto semilla y repetir nuevamente el procedimiento hasta que las estimaciones alcanzadas no cambien más con la realización de nuevas iteraciones. Una vez conocida la estimación final para  $m_k$ , bastará con deshacer la reparametrización aplicada en la ecuación (9.19) y obtendremos la estimación correspondiente para la componente

de (co)varianza (que, evidentemente, será positiva):

$$\hat{\sigma}_k = \exp(\hat{m}_k) > 0 \quad \text{para } k = 1, \dots, p \quad (9.27)$$

Obsérvese que para el proceso LS-VCE no lineal, las matrices cofactor  $\tilde{Q}_k$  (con  $k = 1, 2, \dots, p$ ) no son fijas. Éstas se ven afectadas y modificadas con cada iteración. En la Figura 9.2 se muestra el esquema de implementación algorítmica para facilitar la comprensión del proceso LS-VCE no lineal<sup>2</sup>.

## 9.6. Extensión del periodograma

Como vimos en la sección 9.4, el modelo funcional armónico que se asume para el algoritmo FFAST no se diferencia, en su composición, del modelo funcional descrito en el capítulo 3 propuesto por *Harada y Fukushima*. Sin embargo, las herramientas que se utilizan para su construcción no son exactamente las mismas. Nos estamos refiriendo al periodograma de Lomb y al periodograma extendido. Las ecuaciones (3.66) y (3.73) permiten el cálculo de estos periodogramas bajo la hipótesis de la presencia de ruido blanco en los datos de entrada. Sin embargo, al inicio del presente capítulo se descartó esta suposición, considerando la posibilidad de que la serie temporal pudiera estar afectada por una componente de ruido con índice espectral no nulo. Así pues, las expresiones anteriores no son las apropiadas para el proceso de extracción de frecuencias en caso de que el ruido contenido en la serie temporal sea de color. Frecuencias significativas para la explicación del fenómeno observado podrían quedar opacadas por falsos picos de frecuencia que surgen debido a la presencia de una componente de ruido de color. En la Figura 9.3a aparece representado el periodograma de Lomb para la serie temporal sintética dada por:

$$\begin{aligned} d_n = & \sin(\omega_1 t_n) - 2 \cos(\omega_1 t_n) + 2 \sin(\omega_2 t_n) + \cos(\omega_2 t_n) - \\ & - 2 \sin(\omega_3 t_n) - 2 \cos(\omega_3 t_n) + \epsilon_n \end{aligned} \quad (9.28)$$

donde  $\omega_1 = 2\pi \cdot 0.05$ ,  $\omega_2 = 2\pi \cdot 0.01$ ,  $\omega_3 = 2\pi \cdot 0.02$  y  $\epsilon_n$  representa una componente de ruido con índice espectral  $\alpha = -1$  y componente de varianza  $\sigma^2 = 4$  unidades. En

<sup>2</sup>Para más detalles ver Amiri-Simkooei (2007)

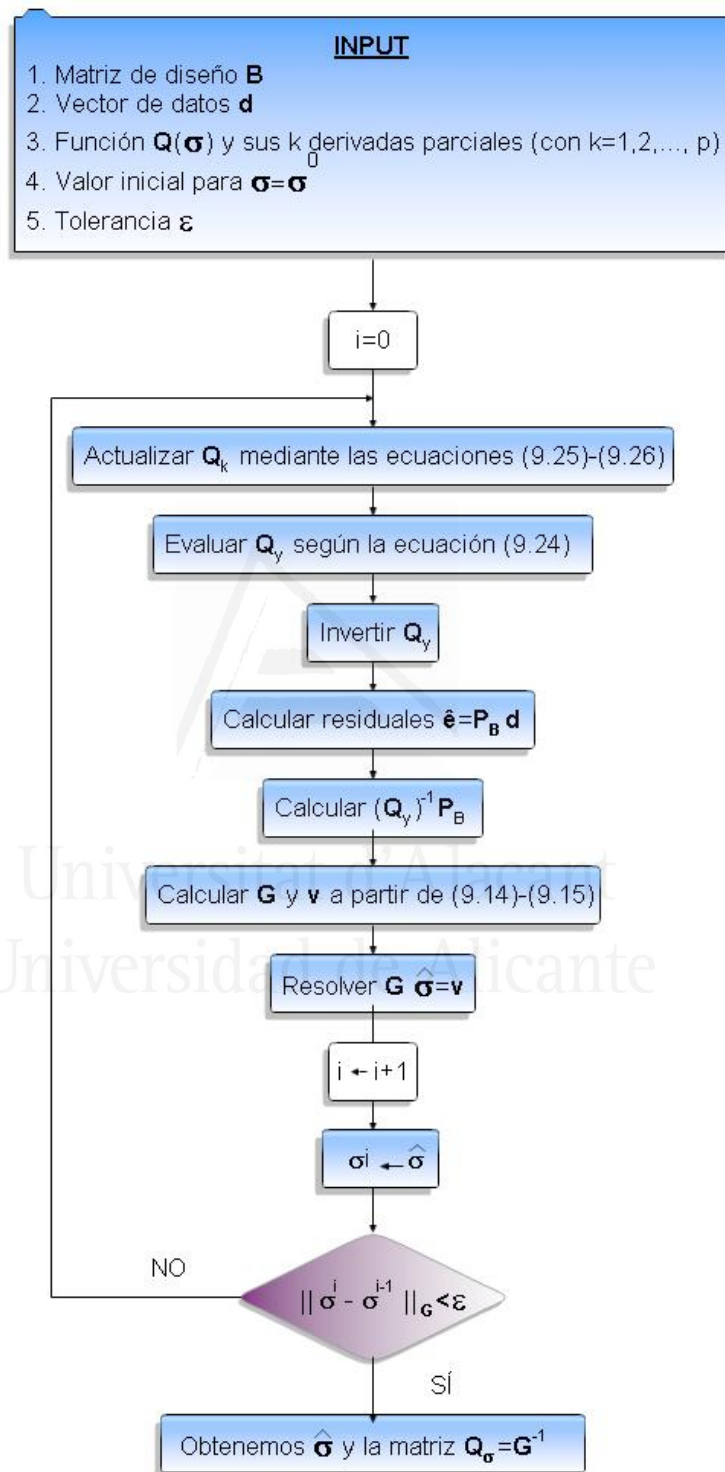


Figura 9.2: Algoritmo simbólico para la implementación del proceso LS-VCE no lineal.



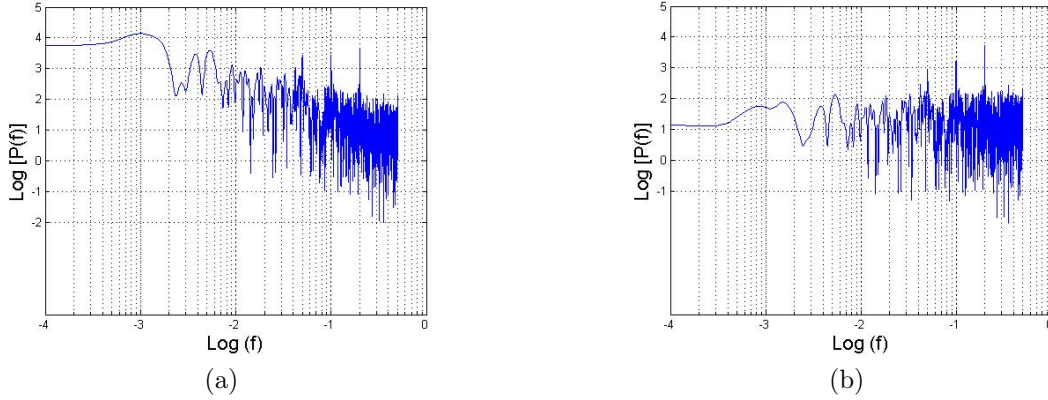


Figura 9.3: Peridograma de Lomb para la serie temporal definida en la expresión (9.28) según: (a) la ecuación (3.66) y (b) la ecuación (9.33).

dicha imagen, puede apreciarse cómo la presencia de un ruido parpadeante consigue que el periodograma de Lomb asigne más potencia a bajas frecuencias que, en realidad, no explican el comportamiento periódico de la serie. Con la nueva definición de periodograma que se propone en esta sección, se consigue un espectro donde la potencia de estas falsas frecuencias no supera la de las líneas espectrales que realmente definen el fenómeno (ver Figura 9.3b).

Como vimos en su momento, el periodograma de Lomb no es más que una función que, dada una frecuencia, nos indica cual es la cantidad de energía explicada por el modelo funcional armónico determinado por dicha frecuencia. Así pues, sus máximos apuntan a aquellas líneas espectrales que minimizan el cuadrado de la norma de los residuos del ajuste entre los datos originales y el modelo funcional armónico para dicha frecuencia:

$$\min_{\omega_j} \|\hat{e}(\omega_j)\|^2 \quad (9.29)$$

donde  $\hat{e}(\omega_j)$  son los residuos que se obtendrían si los datos fueran ajustados por un modelo armónico de frecuencia  $\omega_j$ . La norma considerada bajo la hipótesis de ruido blanco es la norma euclídea, ya que la inversa de la matriz de covarianzas del ruido resulta ser múltiplo de la matriz identidad:

$$\min_{\omega_j} \|\hat{e}(\omega_j)\|^2 = \min_{\omega_j} \|\hat{e}(\omega_j)\|_I^2 = \min_{\omega_j} \hat{e}(\omega_j)^T I \hat{e}(\omega_j) = \min_{\omega_j} \hat{e}(\omega_j)^T \hat{e}(\omega_j) \quad (9.30)$$

Sin embargo, esto no ocurre así para el caso de ruido de color. Para extender el concepto de periodograma, tal como lo conocemos, lo que haremos será considerar la norma generada por la inversa de la matriz de covarianzas  $Q_y$  de la componente de ruido en cuestión:

$$\min_{\omega_j} \|\hat{e}(\omega_j)\|_{Q_y^{-1}}^2 = \min_{\omega_j} \hat{e}(\omega_j)^T Q_y^{-1} \hat{e}(\omega_j) \quad (9.31)$$

Resolver este problema de minimización es equivalente a maximizar la energía explicada por cada frecuencia (ver Amiri-Simkooei, 2009), o lo que es equivalente:

$$\min_{\omega_j} \|\hat{e}(\omega_j)\|_{Q_y^{-1}}^2 = \max_{\omega_j} d^T Q_y^{-1} B_j (B_j^T Q_y^{-1} B_j)^{-1} B_j^T Q_y^{-1} d \quad (9.32)$$

donde  $d$  es el vector de observaciones y  $B_j$  es la parte de la matriz de diseño del modelo funcional específica de la frecuencia  $\omega_j$ .

Así pues, la nueva expresión para el periodograma de Lomb (ver Amiri-Simkooei et al., 2007) y el periodograma extendido vendrá dada por:

$$P(B_j, \omega_j) = d^T Q_y^{-1} B_j (B_j^T Q_y^{-1} B_j)^{-1} B_j^T Q_y^{-1} d \quad (9.33)$$

donde

$$B_j = \begin{pmatrix} \sin(\omega_j t_1) & \cos(\omega_j t_1) \\ \sin(\omega_j t_2) & \cos(\omega_j t_2) \\ \vdots & \vdots \\ \sin(\omega_j t_N) & \cos(\omega_j t_N) \end{pmatrix} \quad (9.34)$$

si deseamos calcular el periodograma de Lomb, y

$$B_j = \begin{pmatrix} t_1 \sin(\omega_j t_1) & t_1 \cos(\omega_j t_1) \\ t_2 \sin(\omega_j t_2) & t_2 \cos(\omega_j t_2) \\ \vdots & \vdots \\ t_N \sin(\omega_j t_N) & t_N \cos(\omega_j t_N) \end{pmatrix} \quad (9.35)$$

si lo que queremos es estimar el periodograma extendido que nos permita detectar términos seculares mixtos. Es fácil comprobar que tomando  $Q_y = I$  se obtienen las expresiones del periodograma extendido y de Lomb dadas en las ecuaciones (3.73)

y (3.66), respectivamente (utilizadas para el caso de series temporales con ruido blanco).

### 9.6.1. Aceleración del cálculo del periodograma

Un importante coste computacional recae en el cálculo del periodograma, sobre todo si la serie temporal analizada es de longitud considerable. Tanto el periodograma de Lomb como el periodograma extendido requieren de una discretización del espacio de frecuencias para su estimación:

$$\omega_i = \omega_0 + i \cdot \lambda \quad \text{con } i \in \mathbb{N} \text{ y } \lambda > 0 \quad (9.36)$$

donde  $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  denota frecuencias angulares y  $\lambda$  es el tamaño de paso de la red. Además, esta red de frecuencias deberá ser lo suficientemente densa como para detectar todas las señales que forman parte de la serie temporal sometida a estudio. El tamaño de paso para la discretización del espacio de frecuencias es, por tanto, clave para una estimación satisfactoria del periodograma.

Mignard (2005) propone un sencillo algoritmo para determinar un tamaño de paso que permita detectar las frecuencias inmersas en la serie temporal de forma adecuada y además agilizar el cálculo del periodograma. Dada una serie temporal  $\{t_n, d_n\}_{n=1, \dots, N}$ , uno puede *conocer aproximadamente* aquellas frecuencias naturales que podrían explicar parte del comportamiento del fenómeno que representa. Así, por ejemplo, para las series de posiciones de estaciones estaríamos hablando de la frecuencia anual, semianual, trimestral, etc. Al conjunto de estas frecuencias lo denotaremos por  $\Omega = \{\tilde{\omega}_i\}_{i=1, \dots, |\Omega|}$ . El cardinal de este conjunto,  $|\Omega|$ , no está determinado de forma estándar, pero se ha estimado estadísticamente que 15 frecuencias son suficientes para proporcionar una aproximación aceptable del tamaño de paso (ver Mignard, 2005). A continuación, se detallan cada una de las fases a seguir para obtener el valor de  $\lambda$ :

1. Se construyen las señales sintéticas definidas a través de la expresión:

$$d^{\tilde{\omega}_i} = \cos(\tilde{\omega}_i t) \quad \forall i = 1, 2, \dots, |\Omega| \quad (9.37)$$

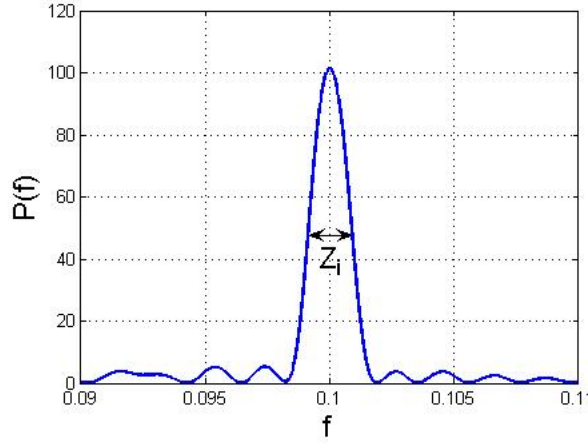


Figura 9.4: Periodograma de la señal sintética  $d^{\tilde{\omega}_i}$  recogida en la ecuación (9.37) con  $\tilde{\omega}_i = 2\pi 0.1$  para un vector de observaciones no equiespaciado en el tiempo.

siendo  $t = (t_1, t_2, \dots, t_N)^T$  el vector de tiempos de observación de la serie temporal que se estudia.

2. Para cada señal  $d^{\tilde{\omega}_i}$ , se calcula el periodograma de Lomb en un entorno suficientemente denso de la frecuencia angular  $\tilde{\omega}_i$  correspondiente.
3. A continuación, se estima la amplitud  $z_i$  del saliente o pico para cada uno de los periodogramas, aproximadamente a la mitad de su altura (ver Figura 9.4). Tras ello, se calcula la media de las amplitudes:

$$z = \sum_{i=1}^{|\Omega|} \frac{z_i}{|\Omega|} \quad (9.38)$$

4. Finalmente, la estimación del tamaño de paso,  $\lambda$ , será igual a la amplitud media (calculada en el paso anterior) dividida por tantas frecuencias como se está interesado evaluar en un saliente de dicha amplitud para el periodograma. En general, con seis frecuencias se obtienen estimaciones satisfactorias (ver Mignard, 2005).

$$\lambda = \frac{z}{6} \quad (9.39)$$

## 9.7. Incertidumbre

Durante el proceso algorítmico, se estiman cuatro conjuntos de parámetros claramente diferenciados. Dos de ellos hacen referencia al modelo funcional y los otros dos al modelo estocástico. Así pues, sería conveniente proporcionar una estimación de la incertidumbre asociada a dichas estimaciones.

### 9.7.1. Parámetros lineales y no lineales del modelo funcional

La incertidumbre asociada a las estimaciones sobre el modelo funcional se establecerá de forma similar a la detallada en la sección 3.3 cuando se describió el modelo armónico no lineal de *Harada y Fukushima*. La expresión para las incertidumbres de los parámetros lineales vendrá dada por:

$$s_{\hat{a}_i} = \sqrt{\frac{\phi \cdot (W^{-1})_{ii}}{N - J}} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, L \quad (9.40)$$

donde

$$\phi = \|d - h\|_{Q_y^{-1}} = (d - h)^T Q_y^{-1} (d - h) \quad (9.41)$$

es el valor de la función objetivo una vez determinado el modelo,  $J$  es el número de parámetros (lineales y no lineales) estimados y contenidos en el modelo funcional, y

$$W = B^T Q_y^{-1} B \quad (9.42)$$

es la matriz de coeficientes de la ecuación normal utilizada en el ajuste de mínimos cuadrados de los datos al modelo funcional.

Análogamente, la incertidumbre para las frecuencias extraídas durante el proceso, viene dada por:

$$s_{\hat{\omega}_j} = \sqrt{\frac{\phi \cdot (D_k)_{jj}}{N - J}} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, K \quad (9.43)$$

donde  $D_k$  es la inversa de la matriz hessiana obtenida durante el proceso de optimización BFGS en el espacio de frecuencias (ver sección 3.2.3).

### 9.7.2. Parámetros del modelo estocástico

En este grupo de parámetros encontramos el índice espectral y la componente de covarianza. En el caso del índice espectral, es sencillo obtener una expresión de la incertidumbre ya que éste se obtiene mediante un proceso de regresión lineal robusta del periodograma en escala *log-log*. Así pues, la incertidumbre para el índice espectral,  $s_{\hat{\alpha}}$ , vendrá dada por:

$$s_{\hat{\alpha}} = s_e \sqrt{\frac{\hat{K}}{\hat{K} \sum_{i=1}^{\hat{K}} [\log(f_i)]^2 - \left[ \sum_{i=1}^{\hat{K}} \log(f_i) \right]^2}} \quad (9.44)$$

siendo  $\hat{K}$  el número de elementos en la discretización  $\{f_i\}_{i=1, \dots, \hat{K}}$  del dominio de frecuencias para la evaluación del periodograma y donde  $s_e$  se define como:

$$s_e = \text{máx} \left\{ \hat{s}, \frac{\hat{s} + WRMS}{2} \right\} \quad (9.45)$$

En esta última expresión,

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\hat{K}} \left( \log[P(f_i)] - \hat{\alpha} \log(f_i) - \hat{b} \right)^2}{\hat{K} - 2}} \quad (9.46)$$

donde  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{b}$  son la estimación de la pendiente (índice espectral) y el término independiente del modelo lineal ajustado, mientras que el WRMS se corresponde con el error cuadrático medio ponderado de los residuales obtenidos tras un ajuste lineal ponderado (no robusto).

Por lo que respecta a la incertidumbre asociada a las estimaciones de las componentes de (co)varianza, se conoce que ésta viene dada por (ver Teunissen and Amiri-Simkooei, 2008a):

$$Q_{\hat{\sigma}} = G^{-1} \quad (9.47)$$

donde  $G$  es la matriz de la ecuación normal que se resuelve durante el proceso LS-VCE y cuyos elementos vienen dados por la expresión (9.14).

## 9.8. Criterios de parada algorítmica

Para el algoritmo FFAST se ha contemplado el uso de diversos criterios de parada algorítmica. Dependiendo de las características de la serie temporal o de las necesidades de la investigación se podrá optar por todas o algunas de las siguientes condiciones de parada:

1. *Condición basada en el RMS.* Este criterio es el que habíamos utilizado hasta ahora y que nos indica de alguna forma en qué medida el modelo funcional se ajusta a los datos. Cuanto menor es su valor, mejor es el ajuste. Así pues, el algoritmo se detendrá cuando el RMS alcance una determinada cota dada por el usuario.

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (d_n - h_n)^2}{N}} \quad (9.48)$$

2. *Condición basada en el estadístico  $T_2$ .* Este criterio está ideado para el caso en que el ruido que se estima sea un ruido blanco. Se trata de resolver el contraste de hipótesis dado por:

$H_0$  : El modelo funcional requiere de  $K-1$  frecuencias fundamentales

$H_1$  : El modelo funcional requiere de  $K$  frecuencias fundamentales

Para ello se calcula el estadístico (ver Amiri-Simkooei et al., 2007):

$$T_2 = \frac{P(f)}{2\hat{s}_f^2} \quad (9.49)$$

donde  $P(f)$  es la potencia del periodograma para la frecuencia  $f$  que quiere incluirse en el modelo y  $\hat{s}_f^2$  es un estimador de la varianza una vez se ha eliminado la línea espectral  $f$  de los residuales. Este estadístico sigue una distribución de Fisher  $F(2, N - M - 2K)$  bajo la hipótesis nula, donde  $N \in \mathbb{N}$  es el número de observaciones,  $M \in \mathbb{N}$  es el número de coeficientes lineales estimados en el modelo funcional alternativo y  $K \in \mathbb{N}$  es el número de frecuencias del modelo bajo  $H_1$ . Si la hipótesis nula es rechazada, podemos incrementar el número de frecuencias del modelo en una unidad y repetir el proceso para determinar si

es necesaria la inclusión de otra nueva frecuencia.

3. *Condición basada en la proporción señal-ruido (SNR)*. El SNR es el cociente entre el valor del periodograma para la frecuencia extraída y la media robusta del periodograma una vez eliminada de los residuales la influencia de dicha línea espectral. Así pues, si el cociente SNR asociado a una determinada frecuencia es menor que cierto umbral fijado, asumiremos que dicha fluctuación se deriva de la componente residual.
4. O bien, puede optarse por finalizar el análisis en el momento en que el modelo funcional contenga un número determinado de líneas espectrales impuesto por el usuario.

## 9.9. Entramado algorítmico

Una vez conocidos todos los procesos internos y técnicas necesarias, se puede proceder a la descripción del flujo algorítmico FFAST. Para una mejor captación del método se recomienda seguir el diagrama que aparece en la Figura 9.5.

Supongamos que disponemos de una serie temporal escalar  $\{t_n, d_n\}_{n=1, \dots, N}$  la cual contiene una componente de ruido definida por un índice espectral  $\alpha$  y una componente de varianza  $\sigma^2$ . A continuación se describe paso a paso el proceso algorítmico FFAST para el análisis de dicha serie temporal:

**Paso 1:** En primer lugar, si la serie temporal posee una clara componente de tendencia, se procederá a la eliminación de la misma mediante un ajuste mínimo cuadrático de los datos. Esta tendencia será polinómica de grado no superior a dos.

**Paso 2:** A continuación, se estimará el tamaño de paso  $\lambda$  para la discretización del dominio de frecuencias. Para ello se utilizará el proceso propuesto por *Mignard*, descrito en la sección 9.6.1.

**Paso 3:** Comenzamos el proceso de creación del modelo funcional y estocástico. Inicializamos el contador de frecuencias contenidas en el modelo funcional,  $K = 1$ .



**Paso 4:** Considerando los residuos generados por la diferencia entre las observaciones y el modelo funcional obtenido hasta el momento, se calcula el periodograma de Lomb con pesos (si los hubiera) mediante el uso de la ecuación (3.66). Una vez expresado el periodograma en escala *log-log*, se procederá al ajuste lineal del mismo para obtener una estimación del índice espectral del ruido y la matriz de covarianza asociada. Ver sección 9.3.1.

**Paso 5:** Utilizando el tamaño de paso  $\lambda$  calculado en el paso 2, se estimará el periodograma genérico de Lomb y el periodograma extendido mediante la ecuación (9.33). Una vez calculados, se procede a la extracción del mayor pico de frecuencia decidiendo si éste deberá asociarse a términos seculares mixtos o no. Dicho procedimiento, que consta incluso de ajuste parabólico en un entorno de la frecuencia de mayor potencia, es análogo al descrito en el capítulo 3.

**Paso 6:** Llegados a este punto, se dispone de la nueva frecuencia a incluir en el modelo funcional armónico. Se construye la matriz de diseño  $B$  asociada y se utiliza para la estimación de la componente de varianza  $\sigma^2$  mediante LS-VCE. Ver sección 9.5.

**Paso 7:** Una vez estimado el modelo estocástico  $Q_y$ , se estimará el modelo funcional mediante el uso de la técnica de mínimos cuadrados. Se deberá tener presente que la función objetivo para el problema mínimo cuadrático considera la norma inducida por la inversa de la matriz de covarianzas del ruido de índice  $\alpha$ . Así pues, los valores para los coeficientes lineales del modelo funcional vendrán dados por:

$$\hat{a} = (B^T Q_y^{-1} B)^{-1} B^T Q_y^{-1} d \quad (9.50)$$

**Paso 8:** Tras este ajuste, se procede a la optimización del modelo funcional en el espacio de frecuencias mediante el algoritmo cuasi-Newton BFGS. Este proceso se repite hasta que las estimaciones consecutivas para el vector de frecuencias estén suficientemente próximas entre sí.

**Paso 9:** Realizamos una reestimación del modelo funcional y estocástico considerando el nuevo vector de frecuencias.

**Paso 10:** Comprobamos si se satisface la condición de parada algorítmica. Si es así se continuará con el paso 11. En caso contrario, incrementamos el valor de  $K$  en una unidad y volvemos al paso 4.

**Paso 11:** Se realiza un depurado del modelo funcional. Una vez alcanzado el número de frecuencias máximo introducido, son eliminadas del modelo (si se desea) aquellas frecuencias que tienen un SNR menor que una cierta cota introducida (ver sección 9.8).

**Paso 12:** Considerando las frecuencias que pasaron el filtro, se realizará una estimación final del modelo funcional y estocástico.

El método puede presentar diversas variantes atendiendo a las necesidades del estudio y análisis. Así pues, el cálculo del periodograma genérico podría realizarse constantemente sobre la serie temporal original (sin tendencia) o bien, podría ir calculándose sobre los residuos. La única diferencia entre una y otra opción radica en la matriz de diseño del modelo funcional que deberá utilizarse. En el primer caso, la matriz  $B$  contendrá el modelo completo, mientras que en el segundo caso sólo deberán aparecer las columnas que hagan referencia a la nueva frecuencia que se incorpora al modelo.

## 9.10. Simulación

En esta última sección, compararemos los resultados obtenidos al analizar una serie temporal afectada por un ruido de color mediante el método propuesto por *Harada* y *Fukushima* y el algoritmo FFAST descrito en este capítulo. Para ello, construiremos una serie temporal sintética cuyo contenido armónico se recoge en la Tabla 9.1. Como vemos, las frecuencias (medidas en ciclos por semana) que explican dicha serie son:

$$f_1 = \frac{7.28}{365.25} = 0.0192 \quad f_2 = \frac{21}{365.25} = 0.0575 \quad f_3 = \frac{29.12}{365.25} = 0.0767$$

que se corresponden con 1.04, 3 y 4.16 ciclos por año, respectivamente. Supondremos que este fenómeno (medido en  $mm$ ) ha sido estimado semanalmente (a través de un

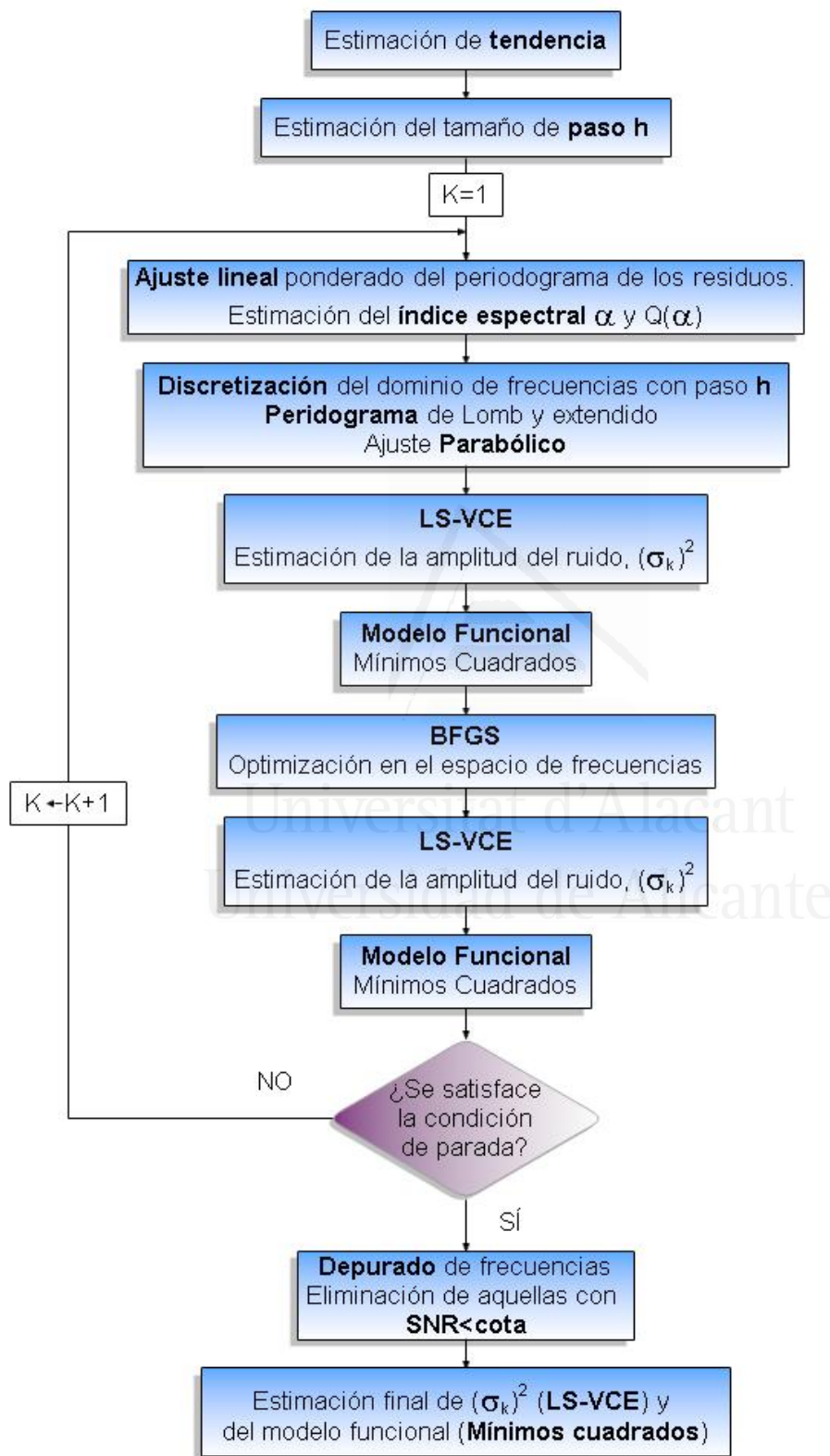


Figura 9.5: Algoritmo simbólico para la implementación del proceso FHAST.

Tabla 9.1: Frecuencias fundamentales (ciclos por semana) y coeficientes asignados al modelo funcional armónico medidos en mm.

| $f$    | $S$  | $C$  | $SS$   | $CC$  |
|--------|------|------|--------|-------|
| 0.0192 | -0.5 | 1    | 0      | 0     |
| 0.0575 | -0.5 | 0.5  | 0      | 0     |
| 0.0767 | 0    | -0.2 | -0.001 | 0.001 |

total de 1301 observaciones) mediante el uso de una instrumentación que introduce un ruido parpadeante en los datos recogidos. Este ruido parpadeante ( $\alpha = -1$ ) se caracteriza además por poseer una amplitud de  $\sigma = 0.62 \text{ mm}$ . En la Figura 9.6 puede apreciarse la representación gráfica de dicha serie temporal simulada, con y sin la componente de ruido mencionada.

Supongamos primeramente que desconocemos la presencia de la componente de ruido que tergiversa los datos. Asumimos, por tanto, que las observaciones están afectadas por un simple ruido blanco. Bajo estas suposiciones, si analizamos la serie con el algoritmo propuesto por *Harada y Fukushima*, se observa cómo el resultado obtenido no explica de forma adecuada el fenómeno. Para el estudio de la serie temporal con el algoritmo de *Harada y Fukushima* se ha considerado la extracción de hasta un máximo de 5 frecuencias en un modelo funcional con tendencia constante. Por otra parte, una vez finalizada la fase de extracción de señales, las frecuencias sufren un proceso de filtración en el que son eliminadas del modelo si poseen un SNR menor que 3 unidades. Las Tablas 9.2 y 9.3 recogen los resultados concernientes al modelo funcional estimado.

Como podemos ver, el resultado del análisis considera un par de frecuencias que no son inherentes a la naturaleza del fenómeno. Estas frecuencias se corresponden con señales de 0.003331 y 0.001540 ciclos por semana que equivalen a periodos de 5.75 y 12.44 años, respectivamente. Estos armónicos no explican el comportamiento del fenómeno y son, por tanto, falsos picos de frecuencia introducidos por el ruido parpadeante. Además, el modelo asocia una de estas frecuencias (0.003331 ciclos por semana) a términos seculares mixtos, siendo detectada incluso antes que otros

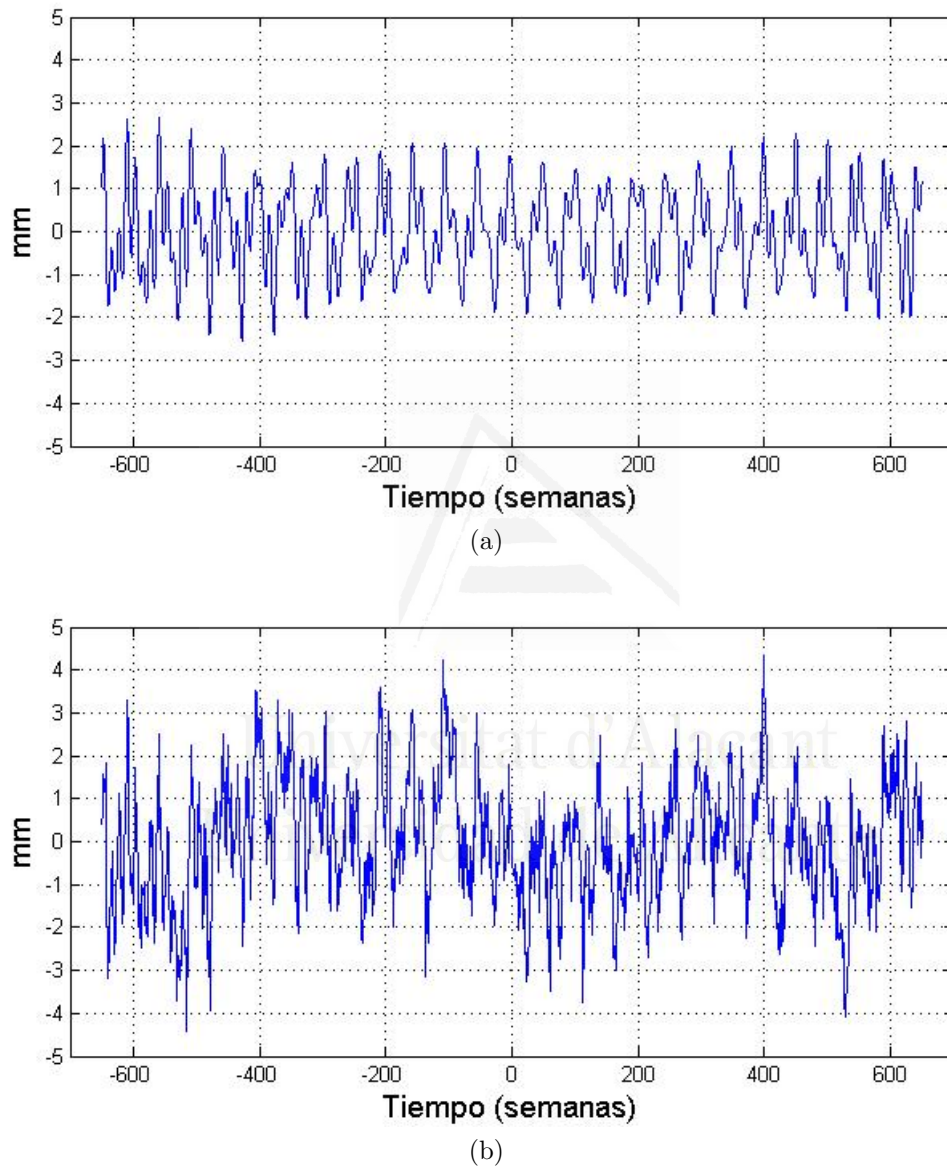


Figura 9.6: (a) Representación gráfica de la serie simulada sin la componente de ruido; (b) Representación gráfica de la serie temporal simulada con un ruido parpadeante de amplitud  $\sigma = 0.62 \text{ mm}$ .

Tabla 9.2: Coeficientes de Fourier para las frecuencias detectadas (con  $SNR > 3$ ) mediante el algoritmo de *Harada* y *Fukushima*. Las columnas representan, por este orden, la estimación de la frecuencia (ciclos por semana), el coeficiente para el término en seno (mm), el coeficiente para el término en coseno (mm) y el valor del SNR.

| $f$                               | $S$                | $C$                | $SNR$ |
|-----------------------------------|--------------------|--------------------|-------|
| $0.019895 \pm 1.0 \times 10^{-5}$ | $-0.510 \pm 0.023$ | $0.862 \pm 0.023$  | 9.13  |
| $0.057483 \pm 1.3 \times 10^{-5}$ | $-0.543 \pm 0.023$ | $0.553 \pm 0.023$  | 7.60  |
| $0.003331 \pm 1.1 \times 10^{-5}$ | $-0.198 \pm 0.023$ | $0.002 \pm 0.023$  | 7.21  |
| $0.079778 \pm 1.3 \times 10^{-5}$ | $0.038 \pm 0.023$  | $-0.215 \pm 0.023$ | 8.80  |
| $0.001540 \pm 2.9 \times 10^{-5}$ | $-0.310 \pm 0.023$ | $-0.315 \pm 0.023$ | 5.46  |

Tabla 9.3: Coeficientes de los términos seculares mixtos para las frecuencias detectadas (con  $SNR > 3$ ) mediante el algoritmo de *Harada* y *Fukushima*. Las columnas representan, por este orden, la estimación de la frecuencia (ciclos por semana), el coeficiente secular para el término en seno (mm) y el coeficiente secular para el término en coseno (mm).

| $f$                               | $SS$                               | $CC$                              |
|-----------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| $0.019895 \pm 1.0 \times 10^{-5}$ | 0                                  | 0                                 |
| $0.057483 \pm 1.3 \times 10^{-5}$ | 0                                  | 0                                 |
| $0.003331 \pm 1.1 \times 10^{-5}$ | $0.001645 \pm 6.5 \times 10^{-5}$  | $0.000869 \pm 5.8 \times 10^{-5}$ |
| $0.079778 \pm 1.3 \times 10^{-5}$ | $-0.000951 \pm 6.1 \times 10^{-5}$ | $0.001123 \pm 6.1 \times 10^{-5}$ |
| $0.001540 \pm 2.9 \times 10^{-5}$ | 0                                  | 0                                 |

Tabla 9.4: Coeficientes de Fourier para las frecuencias detectadas (con  $SNR > 3$ ) mediante el algoritmo de FFAST. Las columnas representan, por este orden, la estimación de la frecuencia (ciclos por semana), el coeficiente para el término en seno (mm), el coeficiente para el término en coseno (mm) y el valor del SNR.

| $f$                               | $S$                | $C$                | $SNR$ |
|-----------------------------------|--------------------|--------------------|-------|
| $0.057478 \pm 1.6 \times 10^{-5}$ | $-0.542 \pm 0.038$ | $0.558 \pm 0.038$  | 11.10 |
| $0.079769 \pm 1.3 \times 10^{-5}$ | $0.029 \pm 0.034$  | $-0.227 \pm 0.034$ | 11.58 |
| $0.019910 \pm 2.0 \times 10^{-5}$ | $-0.510 \pm 0.063$ | $0.852 \pm 0.063$  | 8.40  |

armónicos ligados realmente al fenómeno simulado. Aunque el modelo funcional no contiene una perfecta información sobre el comportamiento natural del fenómeno, puede ser considerado un buen ajuste siempre y cuando lo que se pretenda sea reducir considerablemente la diferencia entre las observaciones y el modelo (ver Figura 9.7a). Sin embargo, no sería un buen modelo funcional si estuviéramos interesados en conocer el comportamiento real del proceso simulado (ver Figura 9.8a).

Supóngase ahora que sospechamos de la presencia de una componente de ruido de color que influye en el valor de los datos recogidos. Veamos qué sucede si utilizamos el algoritmo FFAST propuesto. Con la intención de comparar resultados, se han preestablecido los mismos valores de parámetros y condiciones asumidas en el análisis anterior. Durante el proceso, obtenemos la estimación del índice espectral mediante un ajuste lineal robusto de la representación *log-log* del periodograma de Lomb. Además, como se describió en la sección 9.9, esta evaluación del índice espectral se realiza cada vez que una nueva frecuencia es eliminada del periodograma. A partir de esta primera estimación, se obtiene la matriz de covarianzas del modelo estocástico que será utilizada más tarde para calcular el periodograma según la ecuación (9.33), donde se tiene en cuenta la componente de ruido. En esta ocasión, el modelo funcional obtenido tras el análisis viene recogido en las Tablas 9.4 y 9.5.

Como puede apreciarse, el modelo funcional ha considerado las verdaderas frecuencias inmersas en la simulación y, además, detecta adecuadamente la señal de 4.16 ciclos por año como armónico asociado a términos seculares mixtos. Obsérvese también que el modelo no incluye ningún falso pico de frecuencia, ya que tanto la

Tabla 9.5: Coeficientes de los términos seculares mixtos para las frecuencias detectadas (con  $SNR > 3$ ) mediante el algoritmo FFAST. Las columnas representan, por este orden, la estimación de la frecuencia (ciclos por semana), el coeficiente secular para el término en seno (mm) y el coeficiente secular para el término en coseno (mm).

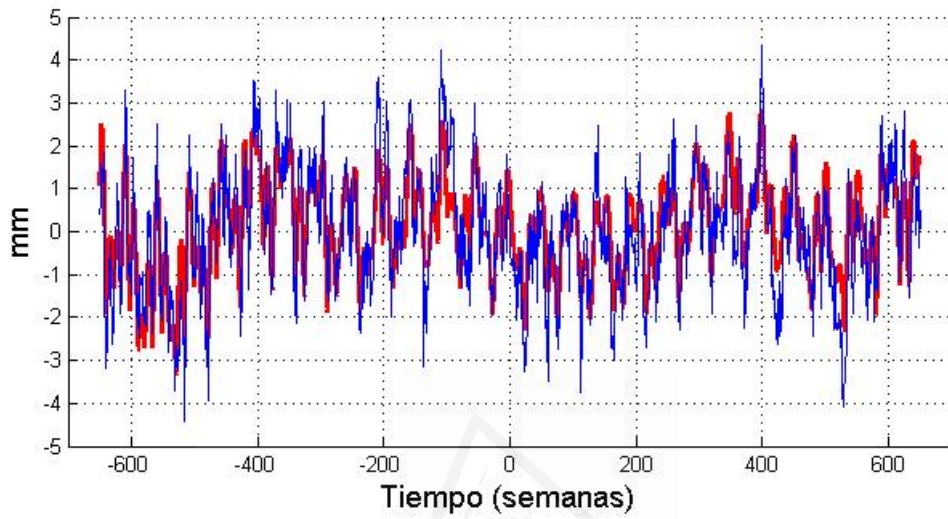
| $f$                               | $SS$                               | $CC$                              |
|-----------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| $0.057478 \pm 1.6 \times 10^{-5}$ | 0                                  | 0                                 |
| $0.079769 \pm 1.3 \times 10^{-5}$ | $-0.000960 \pm 9.0 \times 10^{-5}$ | $0.001121 \pm 9.0 \times 10^{-5}$ |
| $0.019910 \pm 2.0 \times 10^{-5}$ | 0                                  | 0                                 |

cuarta como la quinta frecuencia extraídas tenían asociadas un SNR menor que 3 unidades y fueron finalmente descartadas en la construcción del modelo. El ajuste funcional resultante puede compararse gráficamente con la serie simulada, con y sin componente residual (Figuras 9.7b y 9.8b, respectivamente), para poder así establecer conclusiones acerca del modelo estimado con el algoritmo FFAST.

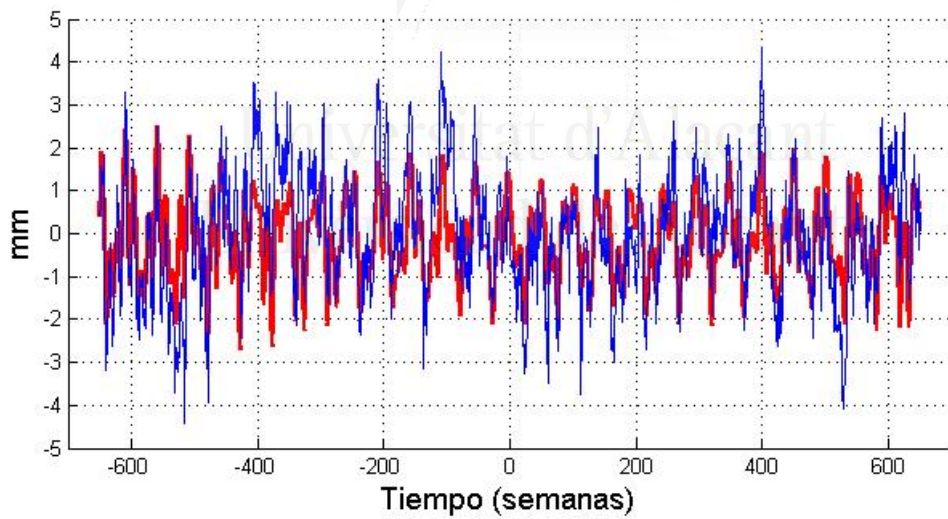
Además de sugerir un correcto modelo funcional aproximado, el algoritmo FFAST proporciona información sobre la componente de ruido que afecta a los datos a través de un modelo estocástico. La estimación del índice espectral proporcionada es de  $\hat{\alpha} = -0.959 \pm 0.017$  mientras que la componente de covarianza estimada es de  $\hat{\sigma}^2 = 0.3838 \pm 0.0152 \text{ mm}^2$ , siendo su valor real  $\sigma^2 = (0.62)^2 = 0.3844 \text{ mm}^2$ . Como puede verse, el estudio llevado a cabo con el algoritmo FFAST ha permitido caracterizar la componente de ruido de forma aproximada, algo que no es posible realizar utilizando el algoritmo descrito en el capítulo 3.

En definitiva, para series temporales susceptibles de estar afectadas por un ruido de color no es aconsejable un análisis armónico mediante el algoritmo de *Harada y Fukushima*, pues éste es apto sólo si la serie está afectada por un ruido blanco. Si aún así se opta por este método, podrían obtenerse frecuencias falsas que podrían a su vez afectar a la estimación de la tendencia y proporcionar un modelo que no nos informa adecuadamente sobre el comportamiento futuro o pasado del proceso que representa la serie temporal.



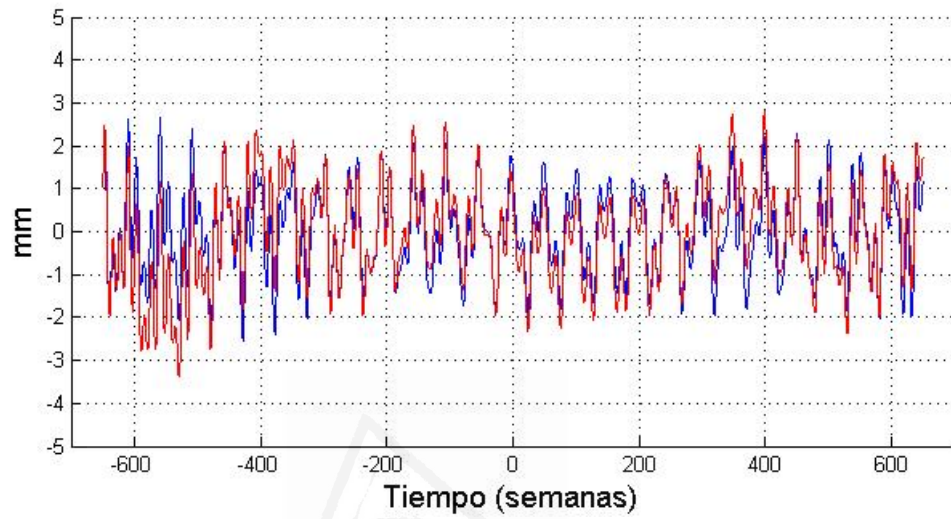


(a)

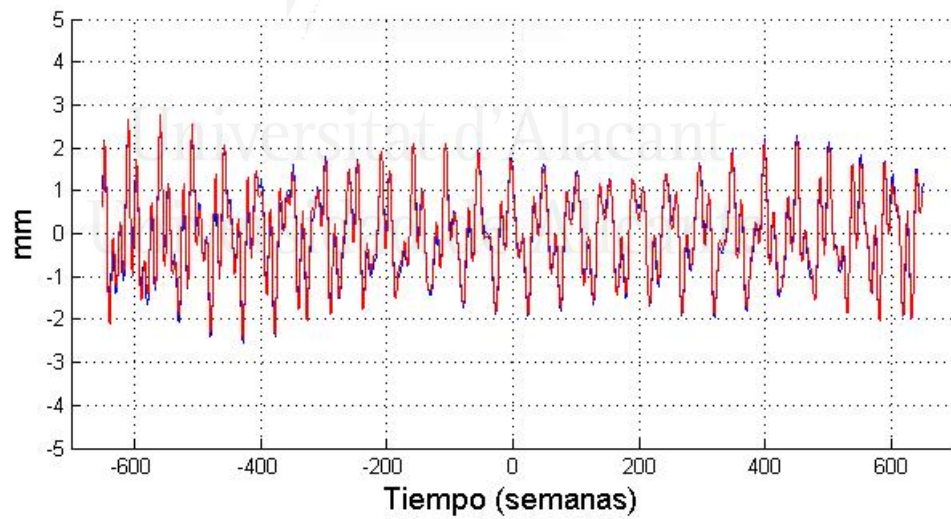


(b)

Figura 9.7: Comparación de la serie temporal simulada (en azul) con el modelo funcional (en rojo) obtenido con (a) el análisis de *Harada* y *Fukushima* y (b) el algoritmo FFAST.



(a)



(b)

Figura 9.8: Comparación de la serie temporal simulada sin ruido (en azul) con el modelo funcional para la serie con ruido (en rojo) obtenido mediante (a) el análisis de *Harada y Fukushima* y (b) el algoritmo FFAST.



---

# Capítulo 10

## Estudio de las series de posiciones de estaciones GPS

### 10.1. Introducción

Como antesala al estudio de las series residuales de posiciones de estaciones GPS, sería conveniente introducir una serie de conceptos habituales en este campo de investigación y que serán útiles para el entendimiento y captación del capítulo que nos ocupa. Se diferenciará entre los conceptos de sistema y marco de referencia terrestre, indicaremos qué técnicas se utilizan para determinar realizaciones del Sistema de Referencia Internacional y describiremos parte del proceso de obtención de las series temporales residuales de posiciones de estaciones GPS.

#### 10.1.1. Sistemas y marcos de Referencia Terrestres

La forma de la Tierra está en constante cambio. La corteza terrestre sufre una deformación continua debida principalmente a la atracción gravitatoria de los cuerpos celestes, al flujo de masa interna del planeta, y a la redistribución e intercambio de masa establecido entre la superficie terrestre, la atmósfera y los océanos. Estas deformaciones son, precisamente, uno de los fenómenos que los geofísicos desean medir y entender con mayor ahínco.

Para entrar en contexto, cuando se observa el movimiento de la corteza terrestre,

así como el movimiento de cualquier otro cuerpo en el espacio, éste debe estar expresado respecto de algún sistema de referencia. Un *sistema de referencia ideal* viene dado matemáticamente por el par  $(O, E)$  de un espacio euclídeo ortogonal donde  $O$  es un punto en el espacio denominado origen y  $E$  es una base ortogonal para la cual todos los vectores que la componen poseen la misma longitud, es decir:

$$\vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = \eta^2 \delta_{ij} \quad (10.1)$$

para  $i, j = 1, 2, 3$ , siendo  $\delta_{ij}$  la *función de Kronecker*. La longitud común de los tres vectores de la base,  $\eta$ , se denomina *escala* del sistema y el conjunto de vectores unitarios colineales a la base determinan la orientación de éste.

Particularizando un poco más, un *sistema de referencia terrestre* (TRS) es todo sistema de referencia espacial que rota conjuntamente con la Tierra en su movimiento diurno en el espacio. Considerando un TRS determinado, las posiciones de puntos sobre la superficie sólida del planeta vienen dadas por unas coordenadas que sufren pequeñas variaciones con el tiempo (causadas por diversos efectos geofísicos tales como los mencionados al inicio del capítulo). El TRS que se recomienda emplear para aplicaciones científicas relacionadas con la Tierra es el *Sistema de Referencia Terrestre Internacional* (ITRS), el cual se caracteriza por las siguientes propiedades:

1. Es un sistema geocéntrico, es decir, el origen del sistema de referencia se encuentra próximo al centro de masas del planeta (incluyendo océanos y atmósfera).
2. La unidad de longitud es el metro ( $m$ ).
3. Su orientación viene dada de forma que el eje  $OZ$  es aquel que se encuentra sobre la dirección del polo, y los otros dos ejes yacen en el plano ecuatorial.
4. La evolución temporal de la orientación está asegurada gracias al uso de una condición de no rotación de red con respecto al movimiento horizontal tectónico sobre la totalidad de la superficie terrestre.

Ahora bien, un sistema de referencia terrestre es un concepto teórico cuya utilización es impracticable. Es necesaria, por tanto, la materialización numérica de los sistemas de referencia para que éstos tengan una aplicación real. Surgen así los

denominados *marcos de referencia terrestre* (TRF), los cuales consisten en un conjunto de puntos físicos cuyas coordenadas están minuciosamente determinadas en un sistema de coordenadas específico (cartesianas, geográficas, etc.) el cual se encuentra a su vez ligado a un sistema de referencia terrestre. Se dice entonces que el TRF es una realización del TRS. La precisión y estabilidad de este marco es imprescindible para el estudio de la Tierra sólida y las deformaciones que acontecen en su superficie. El marco asociado al ITRS es conocido como *Marco de Referencia Terrestre Internacional* (ITRF). Este marco de referencia es de considerable importancia ya que puede ser utilizado para medir la tectónica de placas e incluso estudiar la rotación de la Tierra en el espacio. Este movimiento de rotación está expresado, a su vez, respecto a un marco de referencia ligado a objetos estelares denominado *marco de referencia celeste* (CRF), cuya versión internacional es el ICRF. El IERS, que fue creado en 1988 con la finalidad de estudiar la rotación terrestre, incluyó entre sus objetivos establecer y mantener tanto el ICRF como el ITRF, alegando que sin ellos sería imposible describir la rotación del planeta. Estos marcos de referencia no son independientes sino que están íntimamente ligados a través de los EOP, los cuales constituyen la clave de paso entre ambos. Todo ello permite el estudio de propiedades locales y globales de nuestro planeta como, por ejemplo, el deshielo de los polos, los cambios en el nivel del mar, el movimiento de las placas tectónicas y su deformación o las variaciones en la rotación terrestre (ver Altamimi et al., 2001).

Como ya se mencionó anteriormente, el IERS es el encargado de supervisar cada una de las realizaciones del ITRS, las cuales son elaboradas por el *centro de producción ITRS* (ITRS-PC). Los marcos de referencia terrestre internacional se construyen a partir de los resultados derivados del *Sistema Global de Navegación por Satélite* (GNSS), VLBI, SLR y DORIS. El *Servicio Internacional de GNSS* (IGS) es el responsable de proporcionar los datos GPS para el procesado del ITRF. Gracias a la incorporación de estas técnicas, su evolución y el crecimiento del rango temporal abarcado, el ITRF está en constante actualización. Desde 1988 y hasta la fecha, se han creado un total de doce realizaciones del ITRS, siendo el ITRF2008 la más actual de estas versiones. Por otro lado, además de aprovechar las ventajas que proporcionan las cuatro técnicas de observación mencionadas, el ITRF2008 (al igual que su antecesor, ITRF2005) considera los EOP con la intención de obtener un marco de

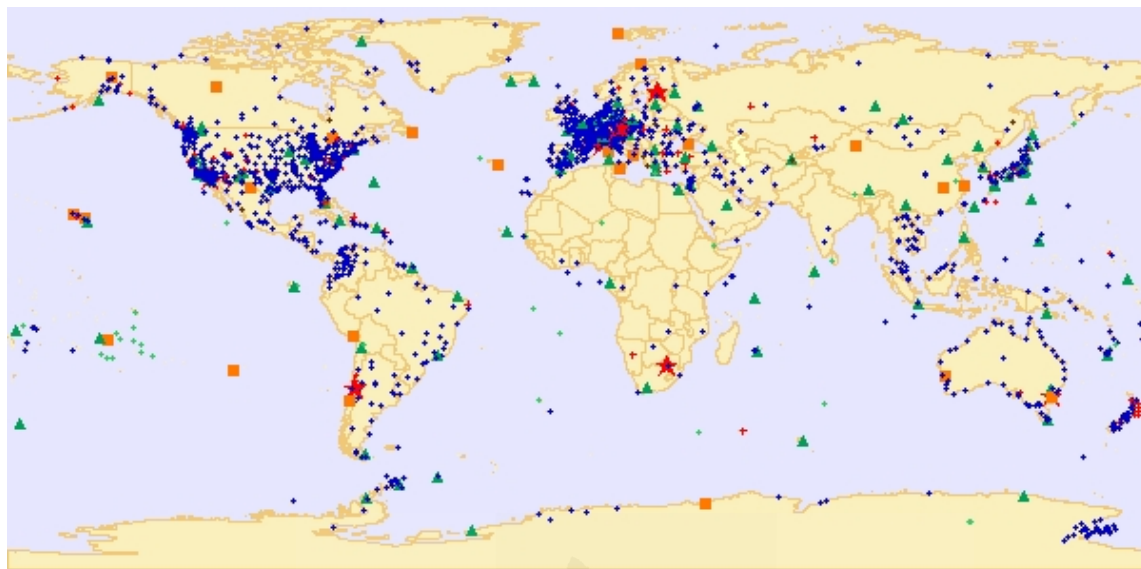


Figura 10.1: Estaciones ITRF2005. La estrella roja, el cuadrado naranja y el triángulo verde indican la posición de áreas dotadas de cuatro, tres y dos técnicas de observación, respectivamente. Los puntos azules, verdes, negros y rojos hacen referencia a zonas donde únicamente se dispone de técnica de GPS, DORIS, SLR y VLBI, respectivamente. Imagen extraída del sitio web del ITRF: <http://itrf.ensg.ign.fr/>

referencia consistente con los productos publicados por el IERS (ver Altamimi et al., 2007). Las soluciones utilizadas en la elaboración del ITRF2008 han sido analizadas por el IGN, ILRS (*International Laser Ranging Service*), el IVS (*International VLBI Service*) y el IDS (*International DORIS Service*).

El modelo de combinación utilizado para generar el ITRF está basado esencialmente en la relación de transformación de un sistema de referencia en otro. El método de combinación utiliza condiciones locales en las estaciones donde operan dos o más sistemas geodéticos. Estas condiciones se utilizan como observaciones adicionales y están provistas también de su correspondiente valor de varianza. No entraremos en más detalle al respecto porque no es necesario para entender el estudio que plantearemos en este capítulo, no obstante, si el lector está interesado se remite a los trabajos realizados por Altamimi (2006), Altamimi et al. (2002a,b), Altamimi et al. (2006) y Altamimi et al. (2007) donde encontrará información útil sobre la historia y evolución del ITRF así como una descripción más detallada de todos los conceptos y relaciones aquí soslayadas.

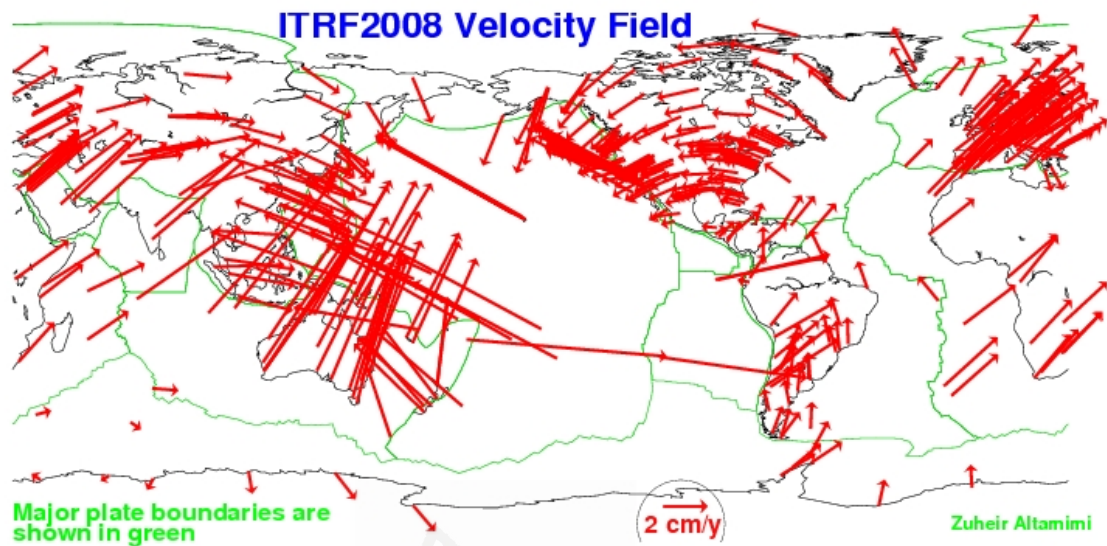


Figura 10.2: Campo de velocidades ITRF2008. Imagen extraída del sitio web del ITRF: <http://itrf.ensg.ign.fr/>

### 10.1.2. Relación entre dos sistemas de referencia terrestre

La relación estándar para la transformación entre dos sistemas de referencia consiste simplemente en una similitud euclidiana donde intervienen (para el caso tridimensional) siete parámetros, llamados *parámetros de transformación*:

1. Tres componentes de translación, designadas por  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ .
2. Un factor de escala,  $D$ .
3. Tres ángulos de rotación, a saber,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .

y sus primeras derivadas con respecto al tiempo:  $\dot{T}_1$ ,  $\dot{T}_2$ ,  $\dot{T}_3$ ,  $\dot{D}$ ,  $\dot{R}_1$ ,  $\dot{R}_2$  y  $\dot{R}_3$ , respectivamente. La transformación del vector de coordenadas cartesianas de un punto cualquiera  $X_1$ , expresado en un sistema de referencia terrestre  $TRS_1$ , en un vector de coordenadas  $X_2$ , expresado en un sistema de referencia terrestre  $TRS_2$ , vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$X_2 = X_1 + T + D \cdot X_1 + R \cdot X_1 \quad (10.2)$$



siendo:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad y \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -R3 & R2 \\ R3 & 0 & -R1 \\ -R2 & R1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

Convencionalmente se asume que la ecuación (10.2) es lineal para conjuntos de coordenadas de estaciones proporcionadas por técnicas geodéticas (para las cuales la diferencia de origen es de aproximadamente unos pocos cientos de metros, y las diferencias para la escala y orientación son del orden de  $10^{-5}$  unidades). Por lo general,  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $T$ ,  $D$  y  $R$  son funciones que dependen del tiempo. Así pues, si derivamos la ecuación (10.2) con respecto a la variable *tiempo*, obtenemos que:

$$\dot{X}_2 = \dot{X}_1 + \dot{T} + \dot{D}X_1 + D\dot{X}_1 + \dot{R}X_1 + R\dot{X}_1 \quad (10.4)$$

Ahora bien, dado que  $D$  y  $R$  son del orden de  $10^{-5}$  y  $\dot{X}$  es aproximadamente de 10 *cm* por año, los términos  $D\dot{X}_1$  y  $R\dot{X}_1$  representan un valor inferior a 0.1 *mm* por siglo y pueden considerarse despreciables. Así pues, la ecuación (10.4) podría escribirse de forma más sencilla como:

$$\dot{X}_2 = \dot{X}_1 + \dot{T} + \dot{D}X_1 + \dot{R}X_1 \quad (10.5)$$

### 10.1.3. Series temporales residuales de posiciones de estaciones GPS

El IGS contribuye a la construcción del ITRF proporcionando las posiciones de estaciones y los *Parámetros de Rotación Terrestre* (ERP). Por primera vez en la historia, estos datos utilizados en la elaboración del ITRF2008 están basados en una combinación de soluciones GPS proporcionadas y completamente reprocesadas por 11 *Centros de Análisis* (AC).

La red de estaciones permanentes de GPS es la más densa entre las cuatro técnicas que contribuyen a la elaboración del ITRF. Cada uno de los AC involucrados en la campaña de reprocesado del IGS procesa observaciones vírgenes de GPS de algunas estaciones seleccionadas atendiendo a tres aspectos: su colección histórica de datos, su localización y por supuesto, su calidad. Sin embargo, cada contribuyente es libre

de incluir las estaciones GPS que le interese de manera que cada AC procesa una red diferente. Por convenio, las posiciones de estaciones y los ERP son estimados diariamente por los AC, conjuntamente con otros parámetros que no consideraremos aquí. Más tarde, estas soluciones diarias son utilizadas para obtener las posiciones de estaciones semanales y los ERP diarios, así como sus matrices de varianza-covarianza. Cada CA proporciona estos conjuntos de datos para su propia red.

Como se ha mencionado anteriormente, exactamente once AC han contribuido al reprocesado de datos de GPS desde 1994, aunque para el ITRF2008 únicamente fueron considerados los datos desde 1997. Sus productos han sido combinados por el coordinador del marco de referencia IGS. Este coordinador proporciona una única posición semanal por estación en un único marco GPS, el cual es consistente con el ITRF2005 y se denomina IGS05. Durante este proceso de combinación, las posiciones de estaciones estimadas son cuidadosamente examinadas en busca de posibles errores como discontinuidades, falsos datos, etc., que son consecuentemente eliminados con la finalidad de conseguir un conjunto de posiciones combinadas estimadas más fiable que cualquier otra entrega individual. La solución que se obtiene se denomina IG1, la cual incluye hasta un total de 561 estaciones con más de 12 años de observaciones.

La técnica de posicionamiento de satélites de GPS es teóricamente capaz de estimar las coordenadas de estaciones respecto al centro de masas. Es posible verificar este hecho mediante la investigación de la translación de red con respecto a un marco de referencia externo el cual considera el centro de masas como origen. Sin embargo, la solución combinada IG1 ha sido explícitamente transformada al ITRF2005 lo cual implica que la información inherente del origen del TRF ha sido modificada.

Las series temporales que analizaremos en este capítulo son en realidad series residuales de posiciones de estaciones GPS. Dichas series temporales se obtienen tras eliminar la tendencia, discontinuidades y los parámetros de transformación (translación, rotación y escala) de cada una de las series originales de posición.

## 10.2. Análisis de las series temporales residuales

En esta sección estudiaremos algunas de las series temporales de posiciones de estaciones que intervienen en el ITRF2008. Estas series temporales describen las

variaciones horizontales y verticales que sufren las estaciones geodésicas donde se establecen bases de GPS. Cada una de dichas estaciones tiene asignadas, por tanto, tres series temporales, a saber: aquella que describe las variaciones en dirección norte (sur), la que recoge los movimientos en dirección este (oeste) y la que contiene la información referente a las variaciones verticales (llamadas series de alturas). En general, estas series temporales no son equiespaciadas en el tiempo, es decir, las observaciones que las forman no se obtienen regularmente cada cierto periodo de tiempo. Las series de posiciones de estaciones GPS muestran unas fuertes periodicidades estacionales que son causadas, en su mayoría, por la redistribución de masa en la superficie terrestre (ver Blewitt et al., 2001; Wu et al., 2006). Aunque estas frecuencias estacionales son dominantes, también es posible encontrar altas frecuencias relacionadas con los cambios de presión atmosférica (Petrov and Boy, 2004) o patrones interanuales ligados al flujo de agua continental (van Dam et al., 2001).

Durante los últimos años se han realizado numerosos estudios sobre el contenido armónico de las series temporales de posiciones de estaciones. Para ello se han considerado las más variopintas técnicas de análisis armónico, la mayoría de las cuales siguen unos patrones comunes:

1. Extracción un modelo funcional basado en la combinación lineal de términos de Fourier y una tendencia polinomial.
2. Asignación de pesos (a través de una matriz de covarianzas diagonal) para la realización de un ajuste por mínimos cuadrados, de tal forma que aquellas observaciones con menor incertidumbre tengan una mayor importancia en el ajuste.
3. Suponen que los datos están afectados por un ruido blanco, o a lo sumo preestablecen un tipo de ruido, considerando un índice espectral que usualmente es  $-1$  o bien, una combinación de ruido blanco y parpadeante.

Uno de los trabajos más importantes fue llevado a cabo por Collilieux (2008), quien analizó los residuos de alturas de estaciones de GPS, SLR y VLBI incluidas en el ITRF2005 con más de 150 observaciones (cuyos resultados pueden encontrarse también en Collilieux et al., 2007). Este estudio se limitaba únicamente al movimiento vertical de las estaciones y además, asumía que las observaciones no se encontra-

ban correlacionadas temporalmente, es decir, estaban afectadas simplemente por una componente de ruido blanco. Esta suposición no es descabellada para el caso de las soluciones VLBI y SLR que suelen presentar este tipo de componente de ruido. No ocurre lo mismo para las soluciones obtenidas mediante la técnica de GPS ya que, como se ha indicado en capítulos anteriores, estos datos suelen estar afectados por una componente de ruido que puede caracterizarse como un ruido blanco fraccional o bien como suma de una componente de ruido parpadeante y blanco. En consecuencia, el contenido armónico para las estaciones de GPS incluía bajas frecuencias (largos periodos). En concreto, aproximadamente un 40 % de estas series mostraban armónicos asociados a periodos superiores a 4 años, cuya presencia podría deberse a la componente de ruido inmersa en los datos.

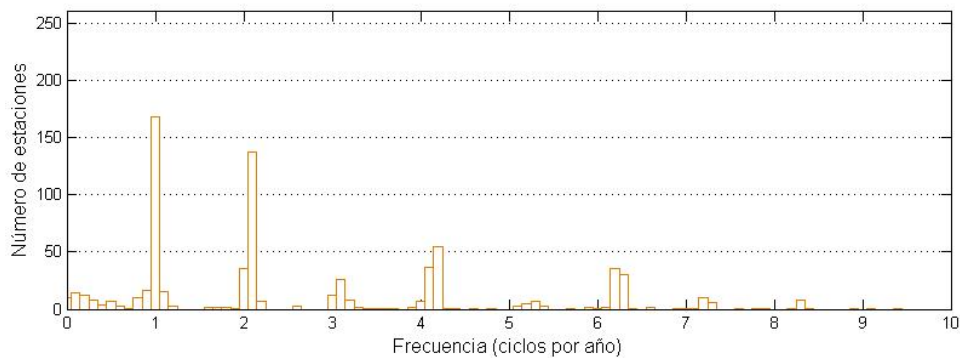
Conocer el contenido de ruido en las series de posición de GPS es importante ya que nos permite proporcionar unas incertidumbres más coherentes de los parámetros estimados a partir de estos datos. Para este estudio, se llevará a cabo un procedimiento que difiere, en algunos aspectos, del estudio tradicional que se viene realizando de este tipo de series temporales. Así pues, el modelo funcional que consideraremos será ahora fruto de:

1. una combinación lineal de términos de Fourier y términos seculares mixtos,
2. un ajuste de mínimos cuadrados para el cual se utilizará la matriz de covarianzas (no necesariamente diagonal) obtenida a través de las ecuaciones de Williams (2003),
3. y no asumiremos la presencia de una componente de ruido blanco en los datos, sino que estimaremos un índice espectral para cada serie temporal, haciendo uso de un ajuste lineal robusto del periodograma de Lomb ponderado.

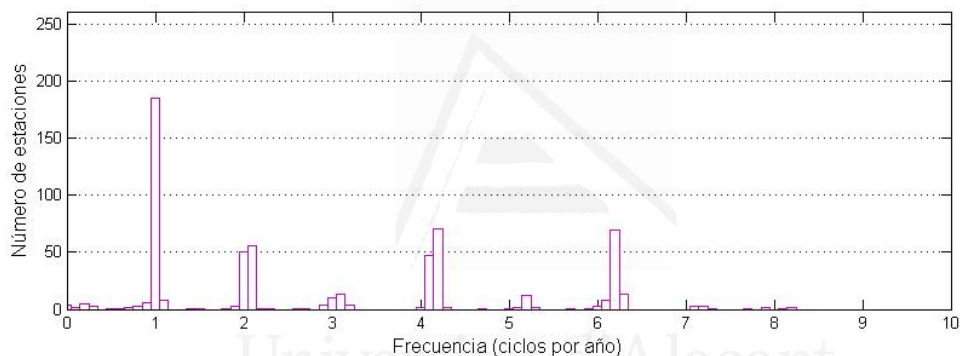
En definitiva, realizaremos un análisis armónico valiéndonos de la rutina algorítmica programada en MATLAB, descrita en el capítulo 9, *Algoritmo FHAST*.

### 10.3. Resultados y discusión

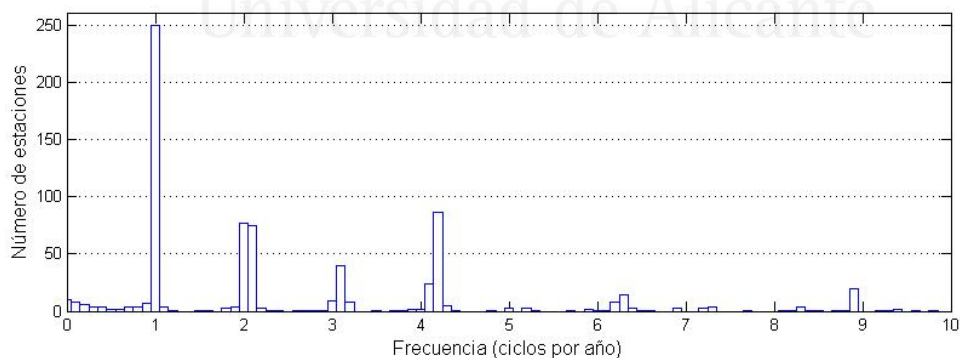
Cada una de las series de posición de estaciones ha sido analizada extrayendo hasta un máximo de 7 frecuencias significativas, y realizando un correspondiente fil-



(a)



(b)



(c)

Figura 10.3: Histogramas del contenido armónico para las series residuales de posiciones de estaciones GPS. (a) Componente este, (b) componente norte y (c) componente vertical. La amplitud de cada barra es de 0.1 ciclos por frecuencia.

trado final basado en el criterio del SNR con una cota de 3 unidades. El motivo de seleccionar un umbral de esta magnitud para el SNR reside en el hecho de que los periodogramas calculados según las ecuaciones (9.33)–(9.35) adquieren un comportamiento similar al del espectro de un ruido blanco (para el cual el SNR de cada línea espectral no es muy elevado). De hecho, una vez finalizado el análisis, creemos que habría sido más conveniente reducir, incluso, un poco más el valor de dicho umbral.

En este estudio han sido analizadas un total de 318 estaciones, cada una de las cuales se encuentra asociada a tres series temporales que describen su movimiento. En definitiva, un total de 954 series fueron sometidas a un estudio armónico mediante la utilización del algoritmo FFAST. Las frecuencias detectadas en cada componente (o dirección) fueron contabilizadas y posteriormente representadas en forma de histogramas. La Figura 10.3 contiene la información a la que se hace referencia y recoge el número de estaciones para las cuales se detecta alguna frecuencia contenida en un intervalo de valores determinado. Los rangos que determinan la partición del espacio de frecuencias en estas gráficas han sido tomados con una amplitud constante de 0.1 ciclos por año.

En general, puede decirse que la frecuencia anual es la señal más ampliamente detectada, tanto en el movimiento vertical como horizontal. No obstante, destacan también las frecuencias semianual y de 4 ciclos por año (*cpa*), aunque lo hacen en una menor proporción. El periodo semianual se manifiesta principalmente en las componentes este y vertical, mientras que para la componente norte, aunque presente, es menos común que las frecuencias de 4 y 6 *cpa*. De forma más precisa, puede comprobarse a través de la Figura 10.3, que los rangos de frecuencia con mayor representación son los correspondientes a 0.95–1.05, 2.05–2.15 y 4.15–4.25 *cpa*. Tampoco podemos dejar pasar por alto la presencia de una línea espectral ubicada en el rango de 6.15–6.25 ciclos por año, a pesar de que ésta sea más notable en el movimiento horizontal y se muestre tímidamente como contenido armónico de la componente vertical para algunas estaciones.

Se observa cómo la señal anual parece estar presente en un mayor número de estaciones cuando hacemos referencia al movimiento vertical que cuando hablamos de las componentes horizontales, si bien resulta indiscutible que dicha fluctuación es la más importante para todas y cada una de las direcciones. Ésta es detectada

en aproximadamente un 78.62 %, 58.18 % y 52.83 % de las series temporales para el movimiento vertical, norte y este, respectivamente. Como podemos ver en la Tabla 10.1, la media para la amplitud de la señal anual se encuentra alrededor de los 4.14 *mm* en la componente vertical, mientras que este valor se reduce a 1.36 *mm* para la componente norte y hasta 1.23 *mm* para el movimiento a lo largo de la dirección este.

En las Tablas 10.3-10.5 es posible observar, detalladamente, los valores de amplitud y fase estimada (así como su incertidumbre) correspondientes a la señal cuya frecuencia varía entre 0.95 y 1.05 *cpa*. Entre estas estaciones listadas destaca, por ejemplo, la estación USNA que se corresponde con aquella que manifiesta una mayor amplitud anual en sus desplazamientos horizontales, concretamente de  $5.40 \pm 0.22$  *mm* y  $5.37 \pm 0.17$  *mm* en la componente este y norte, respectivamente. Esta estación no sólo presenta una amplitud anual similar para ambas componentes sino que también el día de máxima señal parece ubicarse próximo en el tiempo, en concreto el día  $265.00 \pm 0.35$  para la componente este y el día  $258.48 \pm 0.26$  para la componente norte (en cualquier caso, finales de agosto).

En cuanto al movimiento anual vertical de mayor amplitud, podemos destacar las estaciones de NOVJ y BRAZ, quienes manifiestan un desplazamiento cuya amplitud estimada es de  $9.81 \pm 1.54$  *mm* y  $8.96 \pm 0.52$  *mm*, respectivamente. Estas estaciones experimentan su máximo efecto a principios de febrero en el caso de NOVJ y a finales de junio si se trata de la estación BRAZ. Dicho movimiento vertical parece tener una causa relacionada con el flujo de agua continental. Así pues, es posible intuir una relación entre estos movimientos verticales y los periodos de lluvias que acontecen en las zonas donde se ubican las estaciones. En el caso de BRAZ (Brasil), es sabido que la época de mayores precipitaciones tiene lugar entre los meses de abril y julio, de ahí que su máximo movimiento anual sobre la vertical se establezca a finales de junio, aproximadamente. Del mismo modo, la estación NOVJ (ubicada en Novosibirsk, Rusia) podría presentar este importante movimiento vertical como consecuencia de los implacables periodos de nieve que tienen lugar entre los meses de noviembre y enero, experimentando, en consecuencia, su máximo desplazamiento a principios de febrero. Por otro lado, las estaciones con una menor amplitud anual son NLIB, DUBO y BRMU para las componentes este, norte y vertical, respectivamente.

Tabla 10.1: Media y mediana muestral de las amplitudes estimadas para las líneas espectrales más significativas.

| Frecuencia<br>(cpa) | Este          |                 | Norte         |                 | Vertical      |                 |
|---------------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|
|                     | Media<br>(mm) | Mediana<br>(mm) | Media<br>(mm) | Mediana<br>(mm) | Media<br>(mm) | Mediana<br>(mm) |
| 0.95-1.05           | 1.2323        | 1.0894          | 1.3590        | 1.2082          | 4.1446        | 3.9530          |
| 2.05-2.15           | 0.5191        | 0.4995          | 0.4790        | 0.5054          | 1.4870        | 1.5564          |
| 4.15-4.25           | 0.3132        | 0.3406          | 0.2994        | 0.3180          | 1.1341        | 1.1402          |
| 6.15-6.25           | 0.2654        | 0.2438          | 0.4325        | 0.3701          | 1.0388        | 1.0583          |

Por lo que respecta a la señal de 2.05–2.15 *cpa*, ésta aparece en los movimientos sobre la dirección este en un mayor porcentaje (43.08 %), si los comparamos con los otros dos tipos de desplazamiento. No obstante, las mayores amplitudes semianuales son las que encontramos en la componente vertical, con una media de 1.49 *mm* aproximadamente. Las estaciones que presentan la máxima amplitud son SYDN ( $1.48 \pm 0.14$  *mm*), VENE ( $1.12 \pm 0.15$  *mm*) y DAEJ ( $3.22 \pm 1.64$  *mm*), en las componentes este, norte y vertical, respectivamente.

El siguiente grupo de frecuencias que aparece en un mayor porcentaje de estaciones es el correspondiente a 4.15–4.25 *cpa* (aproximadamente, un periodo trimestral). Su presencia en las componentes vertical y norte es similar (detectada en un 27.36 % y 22.33 %, respectivamente), disminuyendo sensiblemente para el caso de la componente este. Dicho rango de frecuencias llega a ser incluso más predominante que el periodo semianual en el caso de la componente norte. La amplitud media para esta señal viene recogida en la Tabla 10.1. Las estaciones KIRI y BUE2 son las que poseen un mayor desplazamiento horizontal (este y norte, respectivamente) en esta frecuencia, alcanzando amplitudes de  $0.86 \pm 0.17$  *mm* y  $0.85 \pm 0.16$  *mm*, en cada caso. Por otro lado, la estación PARC es la que manifiesta un mayor desplazamiento vertical trimestral, estimado en  $2.10 \pm 0.30$  *mm* siendo abril el mes donde alcanza su máxima expresión.

Finalmente, el intervalo de frecuencias bimestral (de 6.15–6.25 *cpa*) se hace notar principalmente en el movimiento horizontal de algunas estaciones. Dentro de los



Tabla 10.2: Porcentaje de estaciones para las líneas espectrales más significativas en cada componente.

| Frecuencia<br>(cpa) | Este<br>(%) | Norte<br>(%) | Vertical<br>(%) |
|---------------------|-------------|--------------|-----------------|
| 0.95-1.05           | 52.83       | 58.18        | 78.62           |
| 2.05-2.15           | 43.08       | 17.61        | 23.58           |
| 3.05-3.15           | 8.176       | 4.088        | 12.58           |
| 4.15-4.25           | 17.30       | 22.33        | 27.36           |
| 6.15-6.25           | 11.32       | 22.01        | 2.516           |

desplazamientos horizontales, ésta es más común en la componente norte (22.01 %) con una media aproximada de 0.43 *mm*. En esta ocasión, VCIO y RIOG son las estaciones de mayor amplitud asociada a este rango de frecuencia para la componente este y norte, respectivamente. Como puede observarse a través de la Figura 10.3 y la Tabla 10.2, la señal trimestral de 4.15–4.25 *cpa* tiene una presencia similar que la de 6.15–6.25 *cpa* en la componente norte, aunque la amplitud media sea distinta, adquiriendo mayor valor en el caso de las fluctuaciones bimestrales.

Existen otras señales que intentan sobresalir en el histograma de frecuencias. Hablamos de los armónicos de 3 y 25 *cpa* (correspondientes con periodos de 4 y 0.5 meses aproximadamente). No obstante, estas líneas espectrales resultan tan imperceptibles en algunos casos que no es posible establecer conclusión alguna a cerca de las mismas sin un análisis más profundo.

A pesar de haber llevado a cabo un estudio centrado principalmente en el análisis de altas frecuencias, aparecen varias series temporales de posiciones para las cuales se consideran periodos de mayor longitud (ver Tablas 10.6–10.8). Así, por ejemplo, son detectados ciclos de aproximadamente 5 años en la componente este de la estación AREQ y BAR1, además de otros periodos cercanos a 7, 8 e incluso 9 años. La presencia de este tipo de frecuencias se pone de manifiesto en todas y cada una de las direcciones, aunque son menos comunes en el estudio de la componente norte, donde el máximo periodo detectado es de 6.43 años (estación WDC2). Sin embargo, no podemos establecer ningún tipo de conclusión con respecto a la presencia de estas

frecuencias asociadas a largos periodos de tiempo debido, principalmente, a la longitud de las series temporales. Como sabemos, los datos abarcan un periodo de tiempo que, en el mejor de los casos, podría permitir detectar periodos de 7 años con relativa fiabilidad. Si no hubiéramos llevado a cabo un estudio donde se tiene en cuenta el proceso de ruido inmerso en las series, podríamos pensar que estas bajas frecuencias son consecuencia directa de la correlación temporal inducida por la componente de ruido pero, como sabemos, este no es el caso. Así pues, podría emitirse la hipótesis de que estos largos periodos detectados en algunas de las series temporales se corresponden, probablemente, con periodos reales capaces de describir el movimiento natural de las estaciones. También cabe la posibilidad de que esas señales sean producidas a causa de otros fenómenos que afectan al proceso de observación o a la propia estación. Tal es el caso, por ejemplo, de la estación AREQ que durante el periodo analizado se vio afectada por actividad sísmica, la cual genera discontinuidades que podrían influir de algún modo en el estudio espectral.

Sería interesante, por tanto, ampliar el trabajo realizado mediante el análisis de un mayor número de estaciones para las cuales se disponga de un periodo de observación mayor. Este rango temporal más amplio puede contribuir a discernir el papel que juegan las bajas frecuencias en el movimiento de las estaciones de GPS. Por otro lado, incrementar el número de estaciones estudiadas podría proporcionarnos más información acerca del papel de otras señales como las de 3.05–3.15 y 25 *cpa*, aproximadamente.

Tabla 10.3: Amplitud y fase de la frecuencia anual para la componente este. Las columnas hacen referencia, por este orden, al nombre de la estación, frecuencia, incertidumbre de la frecuencia, amplitud de la señal, incertidumbre de la amplitud, fase (día de máxima señal contado desde el 1 de enero de 2000) e incertidumbre asociada a la fase.

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| ABER     | 1.0159     | 0.0068              | 1.1247    | 0.2199             | 53.64            | 1.62                    |
| ACOR     | 0.9630     | 0.0043              | 0.7102    | 0.1111             | 287.15           | 1.38                    |
| AIS1     | 1.0081     | 0.0060              | 1.9181    | 0.2950             | 149.04           | 1.28                    |
| AJAC     | 0.9674     | 0.0041              | 0.5826    | 0.1133             | 265.94           | 1.71                    |

Continuación Tabla 10.3

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| ALIC     | 1.0318     | 0.0052              | 0.4437    | 0.0946             | 89.49            | 1.74                    |
| AMC2     | 1.0116     | 0.0026              | 1.8189    | 0.7295             | 234.51           | 3.24                    |
| AREQ     | 1.0128     | 0.0043              | 1.3354    | 0.2403             | 126.72           | 1.49                    |
| ARP3     | 1.0309     | 0.0070              | 1.2724    | 0.2196             | 245.03           | 1.42                    |
| ARTU     | 0.9949     | 0.0032              | 0.8261    | 0.1210             | 76.74            | 1.27                    |
| ASPA     | 1.0059     | 0.0044              | 1.1169    | 0.1890             | 32.81            | 1.42                    |
| AZCN     | 1.0068     | 0.0012              | 3.3546    | 0.1611             | 183.89           | 0.40                    |
| AZRY     | 1.0218     | 0.0026              | 2.7223    | 0.8578             | 198.73           | 2.56                    |
| BAKE     | 1.0042     | 0.0019              | 3.3518    | 0.2895             | 161.09           | 0.76                    |
| BBRY     | 1.0182     | 0.0048              | 1.2988    | 0.2293             | 129.87           | 1.46                    |
| BILI     | 0.9682     | 0.0026              | 0.1056    | 0.1625             | 313.81           | 13.91                   |
| BLYT     | 1.0115     | 0.0036              | 1.5822    | 0.8149             | 124.29           | 4.20                    |
| BOR1     | 1.0027     | 0.0038              | 0.5715    | 0.0796             | 297.01           | 1.16                    |
| BREW     | 1.0115     | 0.0029              | 0.8865    | 0.1089             | 320.06           | 1.04                    |
| BUE2     | 1.0250     | 0.0064              | 0.9924    | 0.2429             | 182.60           | 2.03                    |
| CAGL     | 1.0081     | 0.0019              | 1.1418    | 0.0890             | 121.65           | 0.65                    |
| CAGZ     | 1.0068     | 0.0023              | 1.3214    | 0.1471             | 78.63            | 0.93                    |
| CAS1     | 1.0047     | 0.0057              | 0.6448    | 0.1326             | 320.26           | 1.77                    |
| CAT1     | 1.0241     | 0.0047              | 1.7071    | 0.4281             | 338.62           | 2.04                    |
| CCV3     | 1.0312     | 0.0058              | 1.2350    | 0.1580             | 322.09           | 1.05                    |
| CEDU     | 0.9978     | 0.0028              | 0.2153    | 0.1426             | 179.79           | 6.03                    |
| CFAG     | 1.0185     | 0.0025              | 0.8169    | 0.3587             | 272.43           | 3.66                    |
| CHB1     | 1.0170     | 0.0065              | 0.1004    | 0.1790             | 216.96           | 14.87                   |
| CHUR     | 1.0153     | 0.0026              | 1.0572    | 0.1129             | 62.72            | 0.89                    |
| CIC1     | 1.0054     | 0.0018              | 2.0212    | 0.1260             | 184.13           | 0.52                    |
| CLAR     | 1.0245     | 0.0064              | 1.6256    | 1.1441             | 45.41            | 5.82                    |
| COSO     | 1.0292     | 0.0028              | 1.4023    | 0.1257             | 242.94           | 0.74                    |
| CRO1     | 1.0249     | 0.0025              | 1.6798    | 0.1721             | 120.56           | 0.86                    |
| DAEJ     | 1.0092     | 0.0027              | 1.1236    | 0.1281             | 51.04            | 0.95                    |
| DARW     | 0.9866     | 0.0040              | 0.8717    | 0.1588             | 202.53           | 1.57                    |
| DAV1     | 1.0283     | 0.0049              | 0.4060    | 0.0766             | 269.76           | 1.53                    |
| DRAO     | 1.0120     | 0.0021              | 1.8348    | 0.5251             | 257.61           | 2.34                    |
| DUBO     | 1.0038     | 0.0026              | 1.2738    | 0.3432             | 318.84           | 2.25                    |
| ENG1     | 0.9690     | 0.0048              | 0.9922    | 0.4372             | 102.54           | 3.84                    |
| FAIR     | 1.0176     | 0.0052              | 0.9558    | 0.1733             | 151.08           | 1.50                    |
| FORT     | 1.0112     | 0.0060              | 2.7190    | 1.1298             | 158.41           | 3.48                    |

Continuación Tabla 10.3

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| FTS1     | 1.0167     | 0.0033              | 2.5557    | 2.1804             | 349.66           | 7.05                    |
| GENO     | 1.0016     | 0.0040              | 0.4095    | 0.0695             | 64.07            | 1.44                    |
| GLSV     | 0.9776     | 0.0000              | 1.2322    | 1.3701             | 304.30           | 9.47                    |
| GOLD     | 0.9954     | 0.0028              | 1.5275    | 0.2461             | 180.84           | 1.36                    |
| GOPE     | 0.9967     | 0.0043              | 0.4794    | 0.0901             | 198.03           | 1.56                    |
| GOUG     | 1.0084     | 0.0033              | 1.8015    | 0.2155             | 359.27           | 0.99                    |
| GUAM     | 1.0128     | 0.0032              | 1.3666    | 0.2153             | 263.69           | 1.32                    |
| GUAO     | 1.0054     | 0.0025              | 1.0426    | 0.1407             | 82.97            | 1.13                    |
| GUAT     | 0.9978     | 0.0028              | 2.9323    | 0.3910             | 241.66           | 1.10                    |
| HAMM     | 1.0093     | 0.0023              | 1.5649    | 0.1716             | 64.23            | 0.94                    |
| HARB     | 0.9736     | 0.0043              | 1.5091    | 0.1973             | 162.12           | 1.11                    |
| HERS     | 0.9716     | 0.0041              | 0.6089    | 0.1196             | 5.76             | 1.71                    |
| HFLK     | 1.0017     | 0.0036              | 1.3748    | 0.1821             | 11.77            | 1.13                    |
| HIL1     | 1.0064     | 0.0021              | 1.9623    | 0.1937             | 127.95           | 0.86                    |
| HNLC     | 0.9896     | 0.0025              | 1.3748    | 0.1295             | 91.71            | 0.83                    |
| HOFN     | 1.0065     | 0.0016              | 1.4458    | 0.0940             | 113.24           | 0.55                    |
| HOLB     | 1.0141     | 0.0029              | 1.9156    | 0.1829             | 22.77            | 0.79                    |
| HRM1     | 0.9968     | 0.0027              | 0.8311    | 0.0956             | 145.09           | 0.97                    |
| HYDE     | 1.0040     | 0.0016              | 1.7976    | 0.1538             | 332.23           | 0.71                    |
| IENG     | 0.9914     | 0.0021              | 1.0583    | 0.1253             | 76.91            | 1.02                    |
| IISC     | 1.0085     | 0.0035              | 0.2566    | 0.2418             | 340.35           | 7.89                    |
| JOZE     | 1.0042     | 0.0041              | 0.6623    | 0.1138             | 64.99            | 1.46                    |
| JPLM     | 1.0039     | 0.0029              | 1.6731    | 0.6335             | 77.25            | 3.10                    |
| KARR     | 1.0061     | 0.0029              | 0.9738    | 0.1093             | 86.24            | 0.94                    |
| KELS     | 1.0011     | 0.0046              | 1.5249    | 0.2276             | 49.85            | 1.23                    |
| KERG     | 1.0292     | 0.0073              | 0.9360    | 0.2110             | 314.20           | 1.86                    |
| KIT3     | 1.0376     | 0.0021              | 0.8939    | 0.3337             | 96.74            | 2.95                    |
| KOD1     | 1.0471     | 0.0058              | 1.1873    | 0.1521             | 321.18           | 1.03                    |
| KOSG     | 1.0002     | 0.0027              | 0.8053    | 0.0838             | 228.96           | 0.88                    |
| KUNM     | 1.0228     | 0.0025              | 1.4446    | 0.1467             | 16.59            | 0.84                    |
| KYW1     | 1.0468     | 0.0074              | 1.3095    | 0.2147             | 47.06            | 1.33                    |
| LAGO     | 1.0227     | 0.0049              | 0.0920    | 0.2942             | 6.86             | 27.60                   |
| LAMP     | 0.9894     | 0.0038              | 0.5510    | 0.0904             | 23.83            | 1.38                    |
| LHAS     | 0.9780     | 0.0050              | 0.3493    | 0.2557             | 19.45            | 5.95                    |
| LHAZ     | 1.0193     | 0.0049              | 0.8433    | 0.1612             | 92.28            | 1.59                    |
| LPGS     | 1.0480     | 0.0057              | 0.6487    | 0.1105             | 145.17           | 1.41                    |

Continuación Tabla 10.3

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| MAS1     | 1.0157     | 0.0038              | 0.6797    | 0.0982             | 172.57           | 1.20                    |
| MAT1     | 0.9848     | 0.0022              | 0.6119    | 0.0735             | 79.96            | 1.03                    |
| MATE     | 1.0007     | 0.0022              | 0.8479    | 0.0830             | 79.26            | 0.84                    |
| MAW1     | 1.0371     | 0.0060              | 0.5404    | 0.1148             | 268.30           | 1.72                    |
| MDO1     | 1.0184     | 0.0032              | 1.2802    | 0.5589             | 2.00             | 3.61                    |
| MDVJ     | 1.0001     | 0.0017              | 2.0010    | 0.1741             | 323.58           | 0.74                    |
| METS     | 1.0154     | 0.0044              | 0.5292    | 0.1049             | 215.53           | 1.66                    |
| MKEA     | 0.9792     | 0.0074              | 0.6784    | 0.1257             | 157.10           | 1.59                    |
| MLF1     | 1.0400     | 0.0070              | 1.0414    | 0.1759             | 234.98           | 1.37                    |
| MOB1     | 1.0290     | 0.0043              | 1.3619    | 0.2383             | 150.20           | 1.44                    |
| MONP     | 1.0211     | 0.0030              | 1.5917    | 0.3771             | 271.47           | 1.93                    |
| MQZG     | 1.0304     | 0.0038              | 0.2300    | 0.2884             | 34.70            | 10.65                   |
| NAIN     | 1.0286     | 0.0016              | 0.8484    | 0.0783             | 76.55            | 0.76                    |
| NANO     | 1.0205     | 0.0027              | 1.6450    | 0.1347             | 356.55           | 0.68                    |
| NICO     | 1.0179     | 0.0077              | 0.6590    | 0.1560             | 309.62           | 2.07                    |
| NKLG     | 1.0422     | 0.0025              | 0.7835    | 0.0879             | 132.22           | 0.91                    |
| NLIB     | 0.9915     | 0.0035              | 0.0908    | 0.2403             | 173.40           | 22.62                   |
| NNOR     | 0.9849     | 0.0043              | 1.1053    | 0.2543             | 19.06            | 1.96                    |
| NPRI     | 1.0163     | 0.0052              | 0.5848    | 0.1156             | 78.90            | 1.61                    |
| NRC1     | 1.0318     | 0.0022              | 0.9725    | 0.0978             | 262.27           | 0.82                    |
| NRIL     | 0.9940     | 0.0027              | 0.6176    | 0.0824             | 311.38           | 1.11                    |
| NSSS     | 1.0175     | 0.0025              | 2.3605    | 0.2682             | 165.29           | 0.95                    |
| OBE2     | 1.0073     | 0.0030              | 1.0258    | 0.1270             | 263.28           | 1.04                    |
| OPMT     | 1.0115     | 0.0030              | 0.8888    | 0.1288             | 351.34           | 1.21                    |
| ORID     | 1.0028     | 0.0043              | 1.0532    | 0.2500             | 57.24            | 1.90                    |
| OSN1     | 1.0130     | 0.0023              | 1.2146    | 0.1309             | 320.41           | 0.90                    |
| OUS2     | 0.9678     | 0.0031              | 0.5108    | 0.0864             | 57.17            | 1.52                    |
| OUSD     | 0.9813     | 0.0058              | 0.8607    | 0.1699             | 106.48           | 1.71                    |
| PADO     | 1.0019     | 0.0027              | 1.5139    | 0.1958             | 49.47            | 1.09                    |
| PALM     | 0.9775     | 0.0055              | 0.4587    | 0.0979             | 266.16           | 1.83                    |
| PARC     | 0.9980     | 0.0032              | 1.3841    | 0.1695             | 264.81           | 1.04                    |
| PERT     | 1.0075     | 0.0025              | 1.0667    | 0.1119             | 86.99            | 0.88                    |
| PIMO     | 1.0165     | 0.0025              | 1.8945    | 0.1940             | 105.10           | 0.86                    |
| PIN1     | 1.0375     | 0.0037              | 1.2031    | 0.1283             | 290.77           | 0.87                    |
| PLO3     | 1.0283     | 0.0046              | 1.7538    | 0.1962             | 206.10           | 0.91                    |
| POL2     | 0.9903     | 0.0018              | 0.7805    | 0.1941             | 140.11           | 2.07                    |

Continuación Tabla 10.3

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| POLV     | 0.9917     | 0.0040              | 0.5528    | 0.0987             | 93.46            | 1.49                    |
| PRE1     | 0.9612     | 0.0055              | 0.7394    | 0.1715             | 277.74           | 2.06                    |
| PTBB     | 0.9774     | 0.0028              | 0.4688    | 0.0638             | 197.83           | 1.19                    |
| PUC1     | 1.0097     | 0.0023              | 1.9371    | 0.1954             | 46.73            | 0.82                    |
| QUI2     | 1.0041     | 0.0032              | 1.2728    | 0.1774             | 148.93           | 1.16                    |
| QUIN     | 1.0238     | 0.0041              | 1.3725    | 0.2276             | 333.08           | 1.43                    |
| RESO     | 1.0273     | 0.0026              | 3.4720    | 0.4712             | 136.80           | 1.07                    |
| REYK     | 1.0057     | 0.0024              | 1.2220    | 0.1198             | 255.67           | 0.82                    |
| REYZ     | 1.0433     | 0.0049              | 1.0831    | 0.6927             | 33.12            | 5.55                    |
| RIOG     | 1.0359     | 0.0075              | 0.6393    | 0.1317             | 252.85           | 1.65                    |
| SCUB     | 1.0277     | 0.0043              | 0.8649    | 0.1419             | 38.71            | 1.42                    |
| SEAT     | 1.0102     | 0.0028              | 2.0656    | 0.9576             | 341.75           | 3.83                    |
| SELE     | 0.9853     | 0.0028              | 0.9603    | 0.1422             | 342.83           | 1.27                    |
| SFER     | 1.0207     | 0.0063              | 0.8803    | 0.1684             | 31.27            | 1.58                    |
| SHAO     | 1.0282     | 0.0044              | 1.1144    | 0.2087             | 18.07            | 1.54                    |
| SIO3     | 1.0230     | 0.0028              | 1.5168    | 0.4708             | 342.03           | 2.55                    |
| SNI1     | 1.0154     | 0.0027              | 2.0202    | 0.5683             | 304.41           | 2.34                    |
| SPK1     | 1.0326     | 0.0046              | 1.1542    | 0.1470             | 278.61           | 1.04                    |
| STAV     | 0.9633     | 0.0032              | 0.7635    | 0.1170             | 107.37           | 1.35                    |
| STJO     | 1.0455     | 0.0036              | 0.1586    | 0.1010             | 188.24           | 5.20                    |
| SUM1     | 1.0412     | 0.0025              | 1.8372    | 0.1812             | 99.00            | 0.79                    |
| SUTM     | 0.9776     | 0.0029              | 1.9283    | 0.2274             | 265.44           | 1.00                    |
| SUWN     | 1.0141     | 0.0048              | 0.6576    | 0.1342             | 228.39           | 1.69                    |
| TEHN     | 1.0032     | 0.0005              | 4.9913    | 0.5254             | 267.75           | 0.74                    |
| THU3     | 1.0052     | 0.0034              | 0.6011    | 0.0733             | 7.75             | 1.02                    |
| TIDB     | 0.9705     | 0.0049              | 0.5893    | 0.0928             | 250.52           | 1.36                    |
| TIXI     | 0.9998     | 0.0025              | 1.2169    | 0.1285             | 362.67           | 0.88                    |
| TNML     | 0.9988     | 0.0027              | 1.4482    | 0.2107             | 270.64           | 1.20                    |
| TORP     | 0.9812     | 0.0045              | 0.8293    | 0.2159             | 220.82           | 2.16                    |
| TRAB     | 1.0139     | 0.0029              | 0.8063    | 0.0867             | 357.74           | 0.88                    |
| TUCU     | 1.0002     | 0.0019              | 2.2653    | 0.1759             | 21.44            | 0.62                    |
| UCLU     | 1.0153     | 0.0032              | 1.9531    | 0.2011             | 43.39            | 0.85                    |
| UNIV     | 1.0455     | 0.0044              | 0.8189    | 0.1690             | 342.42           | 1.66                    |
| URUM     | 1.0233     | 0.0028              | 1.4547    | 0.1882             | 65.21            | 1.07                    |
| USNA     | 0.9963     | 0.0017              | 5.4028    | 0.2221             | 265.00           | 0.35                    |
| VBCA     | 1.0261     | 0.0051              | 2.9680    | 0.4442             | 163.57           | 1.19                    |

Continuación Tabla 10.3

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| VENE     | 1.0029     | 0.0018              | 2.1875    | 0.1387             | 175.13           | 0.52                    |
| VIL0     | 0.9806     | 0.0031              | 0.4215    | 0.1763             | 164.94           | 3.59                    |
| VILL     | 1.0009     | 0.0033              | 0.6083    | 0.0904             | 213.58           | 1.27                    |
| VNDP     | 1.0126     | 0.0027              | 1.9961    | 0.1536             | 23.88            | 0.64                    |
| VTIS     | 0.9742     | 0.0031              | 1.1137    | 0.2685             | 46.72            | 2.18                    |
| WDC2     | 0.9569     | 0.0062              | 0.8598    | 0.1568             | 131.42           | 1.60                    |
| WEL2     | 0.9775     | 0.0032              | 0.2779    | 0.2151             | 357.49           | 6.61                    |
| WES2     | 1.0194     | 0.0031              | 1.0131    | 0.1097             | 210.18           | 0.86                    |
| WHIT     | 1.0159     | 0.0059              | 0.8203    | 0.1346             | 172.76           | 1.34                    |
| WILL     | 1.0140     | 0.0032              | 1.6092    | 0.1397             | 258.15           | 0.73                    |
| WROC     | 0.9968     | 0.0032              | 0.6677    | 0.0751             | 106.23           | 0.96                    |
| WTZA     | 1.0053     | 0.0029              | 0.8279    | 0.0999             | 27.79            | 0.99                    |
| WTZR     | 1.0028     | 0.0036              | 0.6439    | 0.0970             | 24.32            | 1.28                    |
| WTZZ     | 0.9872     | 0.0017              | 0.9050    | 0.0783             | 7.45             | 0.74                    |
| WUHN     | 1.0223     | 0.0045              | 1.3118    | 0.2129             | 79.13            | 1.34                    |
| YAR1     | 0.9973     | 0.0020              | 1.2907    | 0.1080             | 204.67           | 0.72                    |
| YARR     | 1.0018     | 0.0033              | 1.5693    | 0.1657             | 276.08           | 0.91                    |
| YELL     | 0.9724     | 0.0041              | 2.2105    | 2.3044             | 23.32            | 9.17                    |
| YSSK     | 0.9816     | 0.0030              | 0.8019    | 0.1119             | 208.56           | 1.19                    |
| ZECK     | 0.9962     | 0.0032              | 1.0957    | 0.1744             | 17.03            | 1.39                    |

Tabla 10.4: Amplitud y fase de la frecuencia anual para la componente norte. Las columnas hacen referencia, por este orden, al nombre de la estación, frecuencia, incertidumbre de la frecuencia, amplitud de la señal, incertidumbre de la amplitud, fase (día de máxima señal contado desde el 1 de enero de 2000) e incertidumbre asociada a la fase.

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| ADE1     | 1.0011     | 0.0040              | 0.8924    | 0.1397             | 315.01           | 1.32                    |
| AIRA     | 1.0018     | 0.0000              | 3.7594    | 3.9542             | 176.06           | 9.09                    |
| AIS1     | 1.0216     | 0.0037              | 1.1755    | 0.1531             | 54.02            | 1.06                    |
| AJAC     | 1.0393     | 0.0044              | 0.7627    | 0.1411             | 174.05           | 1.42                    |
| ALBH     | 1.0280     | 0.0038              | 0.8602    | 0.1230             | 177.60           | 1.17                    |
| ALIC     | 0.9978     | 0.0055              | 0.7504    | 0.1443             | 287.26           | 1.64                    |

Continuación Tabla 10.4

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| ALME     | 1.0112     | 0.0046              | 1.1668    | 0.1994             | 319.43           | 1.44                    |
| AMC2     | 1.0153     | 0.0036              | 1.0534    | 0.1224             | 105.44           | 0.98                    |
| ANKR     | 1.0043     | 0.0043              | 1.1754    | 0.1845             | 108.87           | 1.28                    |
| ARP3     | 1.0047     | 0.0038              | 0.6013    | 0.2949             | 269.19           | 4.03                    |
| ASPA     | 1.0000     | 0.0031              | 1.2058    | 0.1876             | 258.22           | 1.31                    |
| AUCK     | 1.0195     | 0.0055              | 0.6161    | 0.1394             | 118.07           | 1.87                    |
| AZCN     | 1.0034     | 0.0018              | 1.9278    | 0.1549             | 40.34            | 0.66                    |
| AZRY     | 1.0328     | 0.0023              | 1.0637    | 0.1079             | 102.56           | 0.84                    |
| BAKE     | 1.0220     | 0.0020              | 2.4887    | 0.2125             | 204.85           | 0.70                    |
| BAR1     | 1.0144     | 0.0023              | 1.3908    | 0.1643             | 311.17           | 0.95                    |
| BBRY     | 1.0442     | 0.0027              | 1.3550    | 0.1516             | 335.46           | 0.91                    |
| BHR2     | 0.9684     | 0.0177              | 1.9645    | 1.4080             | 11.58            | 6.25                    |
| BILI     | 1.0084     | 0.0014              | 2.7030    | 0.1495             | 121.95           | 0.47                    |
| BLYT     | 1.0233     | 0.0046              | 0.7242    | 0.1361             | 126.67           | 1.54                    |
| BRAZ     | 1.0165     | 0.0071              | 0.8579    | 0.1855             | 271.57           | 1.79                    |
| BREW     | 1.0070     | 0.0022              | 1.1300    | 0.1220             | 146.40           | 0.89                    |
| BRMU     | 0.9959     | 0.0029              | 0.6359    | 0.0670             | 8.49             | 0.86                    |
| BUCU     | 0.9777     | 0.0028              | 0.9040    | 0.1285             | 55.12            | 1.21                    |
| BUE2     | 1.0040     | 0.0031              | 3.0618    | 0.4017             | 109.81           | 1.09                    |
| CAS1     | 0.9922     | 0.0032              | 0.7696    | 0.2161             | 347.49           | 2.53                    |
| CAT1     | 1.0210     | 0.0041              | 0.9475    | 0.1656             | 91.99            | 1.40                    |
| CCV3     | 0.9897     | 0.0040              | 1.4217    | 0.2127             | 322.49           | 1.29                    |
| CFAG     | 1.0193     | 0.0027              | 1.3636    | 0.1504             | 117.88           | 0.93                    |
| CHA1     | 0.9832     | 0.0104              | 1.3285    | 0.2437             | 251.62           | 1.57                    |
| CHAN     | 1.0065     | 0.0021              | 1.2691    | 0.1820             | 253.86           | 1.17                    |
| CHAT     | 1.0193     | 0.0054              | 0.2662    | 0.1690             | 86.81            | 5.19                    |
| CHPI     | 0.9927     | 0.0015              | 1.8774    | 0.1598             | 194.62           | 0.72                    |
| CHUM     | 1.0075     | 0.0019              | 2.3089    | 0.1888             | 20.62            | 0.68                    |
| CHUR     | 1.0124     | 0.0035              | 1.1172    | 0.1818             | 63.20            | 1.35                    |
| CIC1     | 1.0287     | 0.0035              | 0.9572    | 0.1348             | 72.08            | 1.18                    |
| CKIS     | 1.0024     | 0.0033              | 0.8285    | 0.1314             | 313.14           | 1.33                    |
| CLAR     | 1.0135     | 0.0023              | 1.8212    | 0.1633             | 250.37           | 0.73                    |
| COCO     | 0.9931     | 0.0058              | 1.0155    | 0.2006             | 253.42           | 1.70                    |
| CONZ     | 1.0174     | 0.0025              | 1.7063    | 0.2211             | 235.87           | 1.06                    |
| COSO     | 1.0229     | 0.0029              | 1.3218    | 0.1526             | 98.45            | 0.93                    |
| DAEJ     | 1.0044     | 0.0027              | 1.2082    | 0.1374             | 178.22           | 0.95                    |



Continuación Tabla 10.4

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| DARW     | 1.0019     | 0.0017              | 1.8043    | 0.1274             | 40.28            | 0.58                    |
| DAV1     | 0.9685     | 0.0026              | 0.7464    | 0.0860             | 291.73           | 1.01                    |
| DRAG     | 0.9949     | 0.0044              | 1.3886    | 0.2360             | 130.57           | 1.45                    |
| DRAO     | 1.0422     | 0.0042              | 0.7665    | 0.1091             | 294.28           | 1.15                    |
| DUBO     | 0.9680     | 0.0031              | 0.0214    | 0.1267             | 219.23           | 51.62                   |
| ELAT     | 0.9966     | 0.0051              | 0.9376    | 0.1558             | 58.35            | 1.40                    |
| ELRO     | 1.0107     | 0.0026              | 1.2634    | 0.1305             | 317.43           | 0.86                    |
| ENG1     | 1.0026     | 0.0029              | 3.0542    | 0.3247             | 68.41            | 0.89                    |
| EPRT     | 0.9913     | 0.0055              | 0.8057    | 0.1973             | 311.70           | 2.06                    |
| FAIR     | 1.0150     | 0.0025              | 1.5195    | 0.1523             | 190.20           | 0.83                    |
| FORT     | 0.9993     | 0.0048              | 1.6167    | 0.2133             | 15.54            | 1.12                    |
| FTS1     | 1.0212     | 0.0020              | 1.6733    | 0.1272             | 219.70           | 0.62                    |
| GAL1     | 1.0057     | 0.0053              | 2.6505    | 0.2529             | 312.36           | 0.81                    |
| GENO     | 0.9976     | 0.0032              | 0.7489    | 0.1022             | 117.70           | 1.16                    |
| GLPT     | 0.9946     | 0.0024              | 1.7628    | 0.1313             | 352.51           | 0.63                    |
| GLSV     | 0.9873     | 0.0022              | 1.3852    | 0.1388             | 263.78           | 0.85                    |
| GODE     | 0.9800     | 0.0035              | 0.8364    | 0.1223             | 176.55           | 1.26                    |
| GOLD     | 1.0061     | 0.0014              | 2.5177    | 0.1450             | 134.26           | 0.48                    |
| GRAS     | 0.9945     | 0.0034              | 0.8879    | 0.1226             | 310.81           | 1.17                    |
| GUAO     | 0.9997     | 0.0022              | 2.0939    | 0.2380             | 258.53           | 0.94                    |
| HAMM     | 0.9993     | 0.0026              | 1.9782    | 0.2406             | 273.46           | 0.98                    |
| HELG     | 1.0186     | 0.0049              | 1.0542    | 0.7132             | 23.50            | 5.60                    |
| HFLK     | 0.9982     | 0.0013              | 4.0192    | 0.1718             | 217.34           | 0.36                    |
| HIL1     | 0.9990     | 0.0037              | 1.4113    | 0.2727             | 267.68           | 1.64                    |
| HLFX     | 1.0054     | 0.0013              | 1.3810    | 0.1035             | 260.78           | 0.62                    |
| HNLC     | 1.0009     | 0.0020              | 1.5418    | 0.1372             | 26.00            | 0.77                    |
| HOLB     | 1.0224     | 0.0025              | 1.2780    | 0.1346             | 218.93           | 0.86                    |
| HOLM     | 0.9831     | 0.0021              | 2.3201    | 0.2347             | 124.24           | 0.87                    |
| HRAO     | 1.0306     | 0.0048              | 0.1790    | 0.2963             | 242.88           | 13.91                   |
| HYDE     | 1.0165     | 0.0023              | 1.4958    | 0.1707             | 143.05           | 0.94                    |
| IISC     | 1.0071     | 0.0038              | 1.2608    | 0.1711             | 51.45            | 1.13                    |
| INVK     | 1.0007     | 0.0037              | 1.9491    | 0.4624             | 265.67           | 2.40                    |
| IRKT     | 0.9907     | 0.0038              | 1.7452    | 0.2455             | 55.34            | 1.19                    |
| ISTA     | 1.0051     | 0.0047              | 1.1646    | 0.2187             | 36.66            | 1.57                    |
| JPLM     | 1.0140     | 0.0022              | 1.7253    | 0.1528             | 329.73           | 0.73                    |
| KABR     | 0.9868     | 0.0057              | 1.3937    | 0.6369             | 26.84            | 3.90                    |

Continuación Tabla 10.4

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| KARR     | 0.9906     | 0.0027              | 1.4869    | 0.1562             | 29.79            | 0.91                    |
| KELS     | 1.0117     | 0.0030              | 0.2731    | 0.2296             | 91.75            | 7.12                    |
| KIRI     | 1.0101     | 0.0047              | 1.3204    | 0.3084             | 232.15           | 1.96                    |
| KOUR     | 1.0010     | 0.0020              | 2.4455    | 0.1944             | 308.02           | 0.66                    |
| KUNM     | 1.0047     | 0.0028              | 1.4087    | 0.1657             | 109.64           | 0.98                    |
| KYW1     | 0.9978     | 0.0030              | 1.3862    | 0.1634             | 184.73           | 1.01                    |
| LAGO     | 1.0227     | 0.0046              | 1.0000    | 0.1468             | 224.29           | 1.25                    |
| LAMP     | 0.9815     | 0.0037              | 0.7021    | 0.1176             | 196.87           | 1.50                    |
| LEBA     | 1.0152     | 0.0031              | 0.9220    | 0.1470             | 43.05            | 1.29                    |
| LHAS     | 1.0065     | 0.0021              | 2.7990    | 0.1910             | 139.76           | 0.57                    |
| LHAZ     | 0.9957     | 0.0018              | 2.7248    | 0.2084             | 34.37            | 0.65                    |
| LPGS     | 1.0087     | 0.0034              | 1.2572    | 0.1640             | 60.45            | 1.09                    |
| LROC     | 1.0065     | 0.0027              | 0.8950    | 0.1133             | 207.65           | 1.07                    |
| MADR     | 1.0143     | 0.0043              | 1.7060    | 0.2673             | 45.76            | 1.30                    |
| MALI     | 0.9987     | 0.0076              | 1.0889    | 0.2142             | 128.52           | 1.67                    |
| MALL     | 1.0385     | 0.0031              | 1.7286    | 0.1954             | 86.24            | 0.91                    |
| MARS     | 1.0026     | 0.0047              | 0.7253    | 0.1402             | 238.00           | 1.62                    |
| MAUI     | 1.0192     | 0.0040              | 0.9805    | 0.1669             | 193.48           | 1.40                    |
| MAW1     | 0.9983     | 0.0026              | 0.4103    | 0.1742             | 73.77            | 3.47                    |
| MCIL     | 0.9931     | 0.0032              | 1.2931    | 0.1879             | 50.51            | 1.32                    |
| MCN1     | 1.0099     | 0.0023              | 1.7337    | 0.1716             | 253.22           | 0.83                    |
| MDO1     | 1.0128     | 0.0020              | 1.0049    | 0.0885             | 17.74            | 0.72                    |
| METS     | 1.0090     | 0.0053              | 0.5165    | 0.1087             | 193.25           | 1.77                    |
| MKEA     | 0.9991     | 0.0035              | 0.7923    | 0.1187             | 276.71           | 1.26                    |
| MLF1     | 1.0059     | 0.0038              | 1.2379    | 0.1846             | 38.00            | 1.21                    |
| MOB1     | 1.0085     | 0.0012              | 2.7849    | 0.1518             | 61.25            | 0.45                    |
| MONP     | 1.0172     | 0.0024              | 1.0754    | 0.1045             | 332.19           | 0.80                    |
| MTKA     | 1.0014     | 0.0025              | 1.8953    | 0.1978             | 146.25           | 0.87                    |
| NANO     | 1.0119     | 0.0022              | 1.5356    | 0.1311             | 71.87            | 0.71                    |
| NEAH     | 1.0194     | 0.0027              | 1.0934    | 0.1287             | 353.33           | 0.95                    |
| NICO     | 1.0125     | 0.0035              | 1.5404    | 0.1747             | 138.64           | 0.97                    |
| NISU     | 0.9977     | 0.0012              | 2.2047    | 0.1913             | 53.08            | 0.80                    |
| NKLG     | 1.0122     | 0.0026              | 1.2141    | 0.1687             | 126.45           | 1.15                    |
| NLIB     | 1.0359     | 0.0043              | 0.6949    | 0.1146             | 83.04            | 1.34                    |
| NOT1     | 0.9752     | 0.0016              | 1.3073    | 0.1097             | 260.77           | 0.72                    |
| NPRI     | 0.9936     | 0.0017              | 1.3439    | 0.0894             | 4.42             | 0.56                    |

Continuación Tabla 10.4

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| NTUS     | 1.0047     | 0.0000              | 1.7387    | 6.4446             | 21.45            | 30.05                   |
| NVSK     | 0.9817     | 0.0022              | 0.7837    | 0.6634             | 185.45           | 7.11                    |
| NYA1     | 0.9964     | 0.0032              | 0.8351    | 0.1043             | 110.39           | 1.06                    |
| NYAL     | 0.9856     | 0.0031              | 0.9503    | 0.1127             | 167.11           | 1.02                    |
| OSN1     | 0.9950     | 0.0059              | 0.8456    | 0.2096             | 298.39           | 2.10                    |
| PADO     | 0.9956     | 0.0010              | 3.1738    | 0.1590             | 98.54            | 0.42                    |
| PALM     | 0.9998     | 0.0035              | 0.3455    | 0.3040             | 5.18             | 6.95                    |
| PARA     | 1.0261     | 0.0044              | 1.7184    | 0.2765             | 133.97           | 1.28                    |
| PGC5     | 1.0033     | 0.0019              | 2.7758    | 0.2653             | 168.27           | 0.77                    |
| PIE1     | 1.0084     | 0.0028              | 0.7736    | 0.0992             | 40.64            | 1.10                    |
| PIMO     | 1.0096     | 0.0050              | 1.0239    | 0.1823             | 133.46           | 1.50                    |
| PLO3     | 1.0272     | 0.0058              | 1.9551    | 0.2760             | 298.08           | 1.16                    |
| POL2     | 1.0069     | 0.0037              | 1.2635    | 0.2008             | 88.26            | 1.34                    |
| PTBB     | 1.0001     | 0.0024              | 1.2179    | 0.1476             | 251.92           | 1.02                    |
| PUC1     | 1.0052     | 0.0023              | 1.3441    | 0.1368             | 41.75            | 0.86                    |
| QAQ1     | 1.0037     | 0.0030              | 0.7122    | 0.1103             | 236.31           | 1.31                    |
| QUI2     | 0.9974     | 0.0028              | 1.6222    | 0.1870             | 262.84           | 0.98                    |
| RAMO     | 1.0013     | 0.0025              | 1.3571    | 0.1411             | 39.07            | 0.87                    |
| RESO     | 1.0162     | 0.0033              | 2.0004    | 0.3552             | 350.14           | 1.39                    |
| RIOG     | 1.0461     | 0.0078              | 0.8645    | 0.1895             | 270.76           | 1.77                    |
| SAMO     | 1.0434     | 0.0040              | 1.0176    | 0.1947             | 226.25           | 1.56                    |
| SANT     | 1.0206     | 0.0042              | 1.3771    | 0.2309             | 223.73           | 1.38                    |
| SCH2     | 0.9683     | 0.0039              | 1.0930    | 0.1464             | 111.34           | 1.18                    |
| SCOB     | 0.9507     | 0.0034              | 1.5471    | 0.0756             | 33.89            | 0.44                    |
| SEAT     | 1.0236     | 0.0025              | 1.4902    | 0.1506             | 194.07           | 0.82                    |
| SELE     | 1.0233     | 0.0037              | 0.9765    | 0.1603             | 3.22             | 1.36                    |
| SFDM     | 1.0054     | 0.0026              | 1.6717    | 0.2162             | 13.21            | 1.08                    |
| SFER     | 0.9738     | 0.0050              | 0.7767    | 0.1222             | 256.98           | 1.38                    |
| SHEE     | 1.0053     | 0.0010              | 4.8996    | 0.1505             | 147.21           | 0.26                    |
| SIO3     | 1.0076     | 0.0040              | 0.9718    | 0.1685             | 175.03           | 1.47                    |
| SNI1     | 1.0227     | 0.0031              | 1.0373    | 0.1300             | 54.26            | 1.04                    |
| SOFI     | 0.9891     | 0.0046              | 0.5846    | 0.1042             | 300.86           | 1.53                    |
| SOL1     | 0.9918     | 0.0036              | 0.9709    | 0.1266             | 17.01            | 1.11                    |
| SPK1     | 1.0034     | 0.0015              | 1.8850    | 0.1208             | 124.55           | 0.53                    |
| SULP     | 0.9567     | 0.0052              | 0.7139    | 0.1967             | 266.42           | 2.41                    |
| SUM1     | 1.0263     | 0.0036              | 1.8815    | 0.2873             | 243.22           | 1.23                    |

Continuación Tabla 10.4

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| SUWN     | 1.0127     | 0.0044              | 0.7333    | 0.1038             | 269.03           | 1.18                    |
| SYOG     | 0.9891     | 0.0051              | 0.7821    | 0.1572             | 106.99           | 1.69                    |
| THTI     | 1.0124     | 0.0049              | 0.6974    | 0.1676             | 328.78           | 1.92                    |
| TIDB     | 1.0042     | 0.0050              | 0.7003    | 0.1328             | 252.02           | 1.58                    |
| TIXI     | 0.9962     | 0.0022              | 1.5648    | 0.1579             | 206.09           | 0.84                    |
| TLSE     | 0.9887     | 0.0020              | 1.1118    | 0.1180             | 206.39           | 0.91                    |
| TNML     | 0.9802     | 0.0031              | 1.7363    | 0.2850             | 216.15           | 1.41                    |
| TORP     | 1.0251     | 0.0035              | 1.0952    | 0.1585             | 117.96           | 1.18                    |
| TOW2     | 0.9946     | 0.0033              | 0.9402    | 0.1041             | 66.13            | 0.95                    |
| TRAB     | 1.0005     | 0.0054              | 0.7905    | 0.1272             | 29.84            | 1.34                    |
| TRO1     | 1.0355     | 0.0032              | 0.1255    | 0.1990             | 303.81           | 13.23                   |
| TROM     | 1.0121     | 0.0056              | 0.9293    | 0.1898             | 255.36           | 1.68                    |
| TSKB     | 1.0114     | 0.0041              | 1.4175    | 0.1907             | 265.68           | 1.13                    |
| TUCU     | 1.0035     | 0.0033              | 0.9559    | 0.4628             | 323.24           | 4.07                    |
| TWTF     | 0.9828     | 0.0027              | 2.4541    | 0.3171             | 78.87            | 1.07                    |
| UEPP     | 1.0261     | 0.0054              | 1.8013    | 0.2608             | 71.09            | 1.16                    |
| ULAB     | 0.9953     | 0.0024              | 1.2733    | 0.1535             | 295.61           | 1.01                    |
| UNIV     | 1.0478     | 0.0045              | 0.5876    | 0.1187             | 345.73           | 1.62                    |
| UNSA     | 1.0071     | 0.0022              | 0.7309    | 0.3698             | 49.81            | 4.23                    |
| UPO1     | 1.0294     | 0.0048              | 0.6183    | 0.4059             | 12.00            | 5.36                    |
| USNA     | 0.9983     | 0.0011              | 5.3693    | 0.1661             | 258.48           | 0.26                    |
| USNO     | 0.9899     | 0.0019              | 1.0661    | 0.0941             | 252.99           | 0.75                    |
| UZHL     | 0.9943     | 0.0066              | 0.7107    | 0.1524             | 88.63            | 1.83                    |
| VBCA     | 1.0062     | 0.0041              | 1.7421    | 0.2542             | 152.76           | 1.23                    |
| VERE     | 1.0130     | 0.0028              | 2.4639    | 0.2181             | 271.86           | 0.75                    |
| VILL     | 0.9648     | 0.0039              | 0.7621    | 0.1209             | 99.53            | 1.39                    |
| VNDP     | 1.0126     | 0.0020              | 1.5312    | 0.1279             | 85.25            | 0.67                    |
| VTIS     | 1.0203     | 0.0031              | 1.0361    | 0.1357             | 216.91           | 1.08                    |
| WEL2     | 1.0019     | 0.0035              | 1.0078    | 0.1567             | 218.72           | 1.32                    |
| WES2     | 0.9893     | 0.0021              | 1.1300    | 0.0981             | 291.21           | 0.73                    |
| WHIT     | 1.0100     | 0.0043              | 1.3143    | 0.2100             | 334.41           | 1.32                    |
| WUHN     | 0.9810     | 0.0040              | 1.0377    | 0.1623             | 71.65            | 1.35                    |
| YAR1     | 1.0369     | 0.0053              | 0.6210    | 0.1140             | 174.37           | 1.50                    |
| YSSK     | 1.0455     | 0.0064              | 0.5886    | 0.1115             | 99.42            | 1.53                    |
| ZECK     | 1.0081     | 0.0029              | 1.1359    | 0.1164             | 305.01           | 0.86                    |

Tabla 10.5: Amplitud y fase de la frecuencia anual para la componente vertical. Las columnas hacen referencia, por este orden, al nombre de la estación, frecuencia, incertidumbre de la frecuencia, amplitud de la señal, incertidumbre de la amplitud, fase (día de máxima señal contado desde el 1 de enero de 2000) e incertidumbre asociada a la fase.

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| ABER     | 0.9987     | 0.0034              | 4.0895    | 0.4560             | 121.39           | 0.94                    |
| ADE1     | 1.0043     | 0.0013              | 5.8651    | 0.3647             | 103.34           | 0.52                    |
| AIRA     | 0.9936     | 0.0049              | 3.2347    | 0.6321             | 334.98           | 1.66                    |
| AIS1     | 0.9986     | 0.0024              | 5.5467    | 0.5311             | 5.02             | 0.79                    |
| AJAC     | 1.0039     | 0.0018              | 3.5414    | 0.2832             | 142.27           | 0.66                    |
| ALAC     | 0.9962     | 0.0034              | 2.3870    | 0.3094             | 309.56           | 1.12                    |
| ALBH     | 0.9938     | 0.0015              | 4.8941    | 0.3120             | 253.62           | 0.53                    |
| ALGO     | 1.0087     | 0.0022              | 4.7348    | 0.3991             | 220.57           | 0.71                    |
| ALIC     | 0.9979     | 0.0028              | 3.3790    | 0.4274             | 76.02            | 1.09                    |
| ALME     | 0.9913     | 0.0053              | 2.4636    | 0.5138             | 42.85            | 1.75                    |
| ANKR     | 1.0029     | 0.0024              | 4.2965    | 0.4350             | 98.36            | 0.85                    |
| ANTC     | 1.0103     | 0.0025              | 8.2416    | 1.0101             | 77.12            | 1.00                    |
| AREQ     | 1.0039     | 0.0023              | 3.4944    | 0.3616             | 168.37           | 0.86                    |
| ARP3     | 1.0156     | 0.0047              | 2.9968    | 0.4334             | 338.76           | 1.21                    |
| ARTU     | 1.0051     | 0.0013              | 6.3681    | 0.3949             | 14.55            | 0.52                    |
| AUCK     | 1.0030     | 0.0025              | 5.0290    | 1.0971             | 281.09           | 1.81                    |
| AZRY     | 1.0145     | 0.0049              | 2.0330    | 0.4525             | 93.13            | 1.84                    |
| BAKE     | 1.0209     | 0.0022              | 6.9363    | 0.6739             | 169.74           | 0.79                    |
| BAR1     | 0.9722     | 0.0043              | 1.6087    | 0.3643             | 309.34           | 1.94                    |
| BARH     | 1.0093     | 0.0025              | 2.6768    | 0.3168             | 170.03           | 0.98                    |
| BBRY     | 1.0075     | 0.0047              | 2.8171    | 0.6405             | 167.18           | 1.89                    |
| BHR2     | 1.0066     | 0.0011              | 6.0755    | 0.2876             | 8.63             | 0.40                    |
| BILI     | 1.0040     | 0.0014              | 6.3694    | 0.3973             | 352.62           | 0.53                    |
| BOGO     | 1.0006     | 0.0018              | 4.4900    | 0.3321             | 332.22           | 0.63                    |
| BOR1     | 1.0000     | 0.0023              | 4.1206    | 0.3598             | 315.10           | 0.74                    |
| BRAZ     | 0.9939     | 0.0012              | 8.9590    | 0.5155             | 211.30           | 0.48                    |
| BREW     | 1.0046     | 0.0016              | 4.5161    | 0.3836             | 76.86            | 0.70                    |
| BRMU     | 0.9576     | 0.0054              | 1.0689    | 0.2038             | 187.34           | 1.65                    |
| BUCU     | 1.0009     | 0.0013              | 6.9167    | 0.3788             | 334.36           | 0.46                    |
| BUE2     | 1.0084     | 0.0029              | 5.7549    | 0.6908             | 339.34           | 1.01                    |
| CAGL     | 0.9952     | 0.0022              | 3.0787    | 0.2581             | 8.58             | 0.70                    |

Continuación Tabla 10.5

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| CAGS     | 0.9967     | 0.0016              | 6.0453    | 0.6137             | 83.42            | 0.86                    |
| CAGZ     | 1.0100     | 0.0029              | 3.9300    | 0.5693             | 255.34           | 1.22                    |
| CASC     | 1.0043     | 0.0120              | 1.1414    | 0.3384             | 228.50           | 2.51                    |
| CEDU     | 1.0063     | 0.0018              | 4.2268    | 0.3216             | 254.57           | 0.63                    |
| CFAG     | 1.0045     | 0.0027              | 2.8196    | 0.2858             | 189.71           | 0.84                    |
| CHAT     | 1.0327     | 0.0042              | 2.0282    | 0.3262             | 208.36           | 1.31                    |
| CHPI     | 1.0062     | 0.0016              | 5.1378    | 0.4752             | 219.23           | 0.78                    |
| CHUM     | 0.9972     | 0.0022              | 6.8824    | 0.6472             | 170.90           | 0.82                    |
| CHUR     | 0.9942     | 0.0016              | 4.5105    | 0.3057             | 106.92           | 0.58                    |
| CKIS     | 0.9779     | 0.0031              | 1.5018    | 1.7806             | 22.71            | 10.22                   |
| COCO     | 1.0009     | 0.0026              | 3.3366    | 0.3952             | 127.53           | 0.97                    |
| CONZ     | 1.0069     | 0.0019              | 5.1534    | 0.5473             | 288.22           | 0.87                    |
| CRO1     | 1.0408     | 0.0064              | 2.9245    | 0.5494             | 88.37            | 1.52                    |
| DAEJ     | 0.9993     | 0.0025              | 6.7610    | 2.9696             | 264.57           | 3.67                    |
| DARW     | 0.9975     | 0.0034              | 3.5565    | 0.5551             | 107.17           | 1.35                    |
| DRAG     | 0.9968     | 0.0025              | 5.1145    | 0.5202             | 132.05           | 0.85                    |
| DRAO     | 1.0018     | 0.0014              | 4.9267    | 0.3034             | 172.87           | 0.51                    |
| DUBO     | 1.0045     | 0.0019              | 3.7207    | 0.2939             | 184.73           | 0.66                    |
| DWH1     | 1.0237     | 0.0036              | 5.1468    | 0.7002             | 195.75           | 1.14                    |
| EIL2     | 1.0037     | 0.0019              | 9.0644    | 0.7644             | 272.31           | 0.70                    |
| EISL     | 1.0126     | 0.0067              | 5.8241    | 0.7700             | 332.91           | 1.14                    |
| ELAT     | 0.9978     | 0.0019              | 5.3059    | 0.3710             | 48.61            | 0.60                    |
| EPRT     | 1.0032     | 0.0026              | 3.1854    | 0.3663             | 163.78           | 0.98                    |
| FALE     | 1.0032     | 0.0054              | 2.9145    | 0.5315             | 294.19           | 1.54                    |
| FLIN     | 1.0002     | 0.0030              | 3.0055    | 0.3838             | 101.35           | 1.07                    |
| FTS1     | 1.0030     | 0.0021              | 3.7123    | 0.2687             | 241.40           | 0.60                    |
| GENO     | 0.9937     | 0.0022              | 3.7101    | 0.3698             | 206.02           | 0.83                    |
| GLPT     | 1.0256     | 0.0038              | 3.3092    | 0.3580             | 144.14           | 0.89                    |
| GLSV     | 0.9966     | 0.0012              | 7.0547    | 0.3462             | 306.65           | 0.41                    |
| GODE     | 0.9992     | 0.0026              | 3.0789    | 0.3022             | 364.33           | 0.83                    |
| GOLD     | 1.0102     | 0.0023              | 4.7152    | 0.4353             | 342.21           | 0.77                    |
| GOPE     | 0.9907     | 0.0027              | 3.1365    | 0.3711             | 103.94           | 1.02                    |
| GOUG     | 1.0105     | 0.0057              | 3.5403    | 0.6649             | 264.87           | 1.59                    |
| GRAS     | 0.9951     | 0.0024              | 2.7256    | 0.2599             | 174.26           | 0.81                    |
| GRAZ     | 0.9974     | 0.0017              | 4.8234    | 0.3127             | 233.83           | 0.55                    |
| GUAO     | 1.0178     | 0.0015              | 4.4928    | 0.3792             | 248.57           | 0.70                    |

Continuación Tabla 10.5

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| GUAT     | 0.9821     | 0.0021              | 5.3592    | 0.5719             | 24.69            | 0.93                    |
| HAMM     | 1.0047     | 0.0020              | 4.1583    | 0.3889             | 243.47           | 0.80                    |
| HELG     | 1.0073     | 0.0018              | 5.6325    | 0.4195             | 201.44           | 0.65                    |
| HERS     | 1.0081     | 0.0027              | 3.5685    | 0.4536             | 261.09           | 1.07                    |
| HFLK     | 1.0007     | 0.0029              | 3.8264    | 0.3568             | 306.60           | 0.79                    |
| HIL1     | 1.0034     | 0.0019              | 4.8856    | 0.4758             | 317.55           | 0.82                    |
| HLFX     | 0.9874     | 0.0017              | 3.7042    | 0.3307             | 183.06           | 0.77                    |
| HNLC     | 1.0041     | 0.0060              | 1.9623    | 0.3834             | 15.13            | 1.64                    |
| HOB2     | 1.0031     | 0.0000              | 5.1577    | 8.9257             | 18.50            | 14.52                   |
| HOFN     | 1.0045     | 0.0020              | 4.2778    | 0.2998             | 156.28           | 0.59                    |
| HOLB     | 0.9883     | 0.0040              | 3.6562    | 0.6044             | 320.37           | 1.37                    |
| HOLM     | 0.9962     | 0.0015              | 4.2018    | 0.3184             | 258.03           | 0.65                    |
| HRAO     | 0.9784     | 0.0033              | 3.0282    | 0.4251             | 34.08            | 1.23                    |
| HRM1     | 1.0002     | 0.0021              | 3.0346    | 0.2677             | 143.97           | 0.74                    |
| IENG     | 1.0050     | 0.0011              | 4.9529    | 0.3171             | 41.80            | 0.53                    |
| IISC     | 1.0105     | 0.0019              | 6.6422    | 0.5123             | 116.41           | 0.64                    |
| IRKT     | 1.0025     | 0.0011              | 8.3904    | 0.3655             | 83.93            | 0.37                    |
| ISTA     | 1.0043     | 0.0015              | 6.4165    | 0.4230             | 84.63            | 0.55                    |
| JOZE     | 0.9938     | 0.0029              | 2.7975    | 0.2832             | 121.09           | 0.86                    |
| KABR     | 1.0006     | 0.0022              | 4.4738    | 0.3807             | 161.39           | 0.72                    |
| KARR     | 1.0037     | 0.0021              | 3.6416    | 0.3364             | 142.16           | 0.79                    |
| KELS     | 1.0040     | 0.0028              | 3.9511    | 0.3817             | 8.65             | 0.83                    |
| KIRI     | 1.0099     | 0.0022              | 4.8227    | 0.5196             | 138.23           | 0.90                    |
| KIRU     | 1.0180     | 0.0052              | 2.9242    | 0.6599             | 31.92            | 1.91                    |
| KIT3     | 1.0272     | 0.0028              | 3.9549    | 0.5219             | 237.66           | 1.08                    |
| KOD1     | 1.0011     | 0.0038              | 1.1696    | 0.5766             | 257.25           | 3.99                    |
| KOKB     | 1.0121     | 0.0086              | 2.5077    | 0.6099             | 221.20           | 1.98                    |
| KOSG     | 0.9998     | 0.0018              | 4.2297    | 0.2985             | 258.37           | 0.60                    |
| KOUR     | 1.0084     | 0.0021              | 2.6841    | 0.8312             | 65.14            | 2.60                    |
| KUNM     | 1.0096     | 0.0015              | 8.2678    | 0.5746             | 325.80           | 0.58                    |
| KYW1     | 1.0108     | 0.0049              | 2.1105    | 0.3297             | 38.30            | 1.34                    |
| LAGO     | 0.9908     | 0.0036              | 2.0106    | 0.2690             | 100.46           | 1.13                    |
| LAUT     | 0.9977     | 0.0020              | 5.3815    | 0.5629             | 30.04            | 0.88                    |
| LEBA     | 0.9874     | 0.0025              | 3.6537    | 0.4921             | 180.89           | 1.14                    |
| LHAS     | 1.0026     | 0.0040              | 3.9039    | 0.4316             | 312.24           | 0.93                    |
| LHAZ     | 0.9912     | 0.0013              | 6.0652    | 0.3540             | 182.35           | 0.50                    |

Continuación Tabla 10.5

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| LPGS     | 0.9960     | 0.0021              | 4.2280    | 0.3580             | 219.25           | 0.71                    |
| LROC     | 0.9906     | 0.0022              | 2.7696    | 0.2735             | 152.82           | 0.85                    |
| MAG0     | 0.9748     | 0.0054              | 2.1704    | 0.3293             | 169.39           | 1.32                    |
| MALL     | 1.0121     | 0.0034              | 3.1149    | 0.5615             | 238.93           | 1.32                    |
| MANA     | 0.9840     | 0.0024              | 4.5569    | 0.5223             | 25.58            | 1.01                    |
| MAR6     | 1.0069     | 0.0016              | 5.4745    | 0.3807             | 307.82           | 0.58                    |
| MARS     | 0.9939     | 0.0014              | 4.1643    | 0.2611             | 122.81           | 0.52                    |
| MAS1     | 1.0262     | 0.0084              | 2.7888    | 4.4894             | 334.99           | 12.90                   |
| MAT1     | 0.9802     | 0.0018              | 4.1328    | 0.3749             | 76.84            | 0.77                    |
| MATE     | 0.9906     | 0.0016              | 3.8349    | 0.2441             | 138.53           | 0.54                    |
| MAUI     | 1.0024     | 0.0047              | 1.9237    | 0.3456             | 323.41           | 1.50                    |
| MCD1     | 0.9978     | 0.0070              | 3.1399    | 0.6138             | 142.07           | 1.66                    |
| MCIL     | 1.0315     | 0.0050              | 2.1778    | 0.4826             | 263.87           | 1.86                    |
| MCN1     | 1.0211     | 0.0023              | 3.9645    | 0.3739             | 317.06           | 0.77                    |
| MDO1     | 1.0131     | 0.0040              | 1.6819    | 0.2625             | 104.30           | 1.29                    |
| MDVJ     | 1.0001     | 0.0037              | 3.6889    | 0.6155             | 220.54           | 1.40                    |
| METS     | 1.0015     | 0.0017              | 4.9771    | 0.3279             | 317.40           | 0.56                    |
| METZ     | 1.0002     | 0.0013              | 8.4190    | 0.5029             | 319.01           | 0.50                    |
| MKEA     | 1.0104     | 0.0055              | 1.9050    | 0.3420             | 264.12           | 1.50                    |
| MLF1     | 1.0066     | 0.0038              | 4.4327    | 0.6508             | 120.15           | 1.22                    |
| MOB1     | 1.0030     | 0.0021              | 4.0690    | 0.3642             | 336.72           | 0.76                    |
| MOBN     | 0.9999     | 0.0014              | 9.5188    | 0.7101             | 332.76           | 0.62                    |
| MONP     | 1.0167     | 0.0050              | 1.9923    | 0.3602             | 84.03            | 1.50                    |
| MTJO     | 0.9995     | 0.0032              | 2.8407    | 0.3534             | 188.56           | 1.05                    |
| NAIN     | 1.0033     | 0.0017              | 4.0207    | 0.3621             | 271.66           | 0.74                    |
| NANO     | 0.9975     | 0.0014              | 5.7189    | 0.3477             | 24.73            | 0.51                    |
| NEAH     | 1.0007     | 0.0023              | 3.4528    | 0.3644             | 150.02           | 0.88                    |
| NEWL     | 1.0024     | 0.0035              | 4.0464    | 0.4303             | 159.28           | 0.88                    |
| NEWP     | 0.9945     | 0.0042              | 3.0121    | 0.4448             | 200.86           | 1.25                    |
| NICO     | 0.9973     | 0.0024              | 4.2189    | 0.3678             | 195.78           | 0.72                    |
| NKLG     | 1.0112     | 0.0029              | 2.6651    | 0.3591             | 84.14            | 1.14                    |
| NLIB     | 0.9989     | 0.0033              | 2.9215    | 0.3727             | 44.29            | 1.05                    |
| NNOR     | 1.0013     | 0.0017              | 4.3607    | 0.4145             | 322.90           | 0.81                    |
| NOT1     | 0.9952     | 0.0017              | 3.5283    | 0.2707             | 11.95            | 0.64                    |
| NOUM     | 1.0132     | 0.0018              | 4.8023    | 0.2777             | 148.39           | 0.48                    |
| NOVJ     | 1.0045     | 0.0039              | 9.8129    | 1.5431             | 42.42            | 1.32                    |



Continuación Tabla 10.5

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| NPLD     | 1.0030     | 0.0022              | 3.1042    | 0.2952             | 240.84           | 0.83                    |
| NPRI     | 1.0008     | 0.0033              | 3.3802    | 0.3455             | 9.17             | 0.86                    |
| NRC1     | 1.0044     | 0.0015              | 5.8151    | 0.3683             | 82.58            | 0.53                    |
| NRIL     | 0.9979     | 0.0016              | 6.1743    | 0.4829             | 221.36           | 0.67                    |
| NTUS     | 1.0123     | 0.0046              | 2.5051    | 0.4622             | 33.57            | 1.53                    |
| NVSK     | 1.0010     | 0.0018              | 8.2337    | 0.8099             | 360.07           | 0.82                    |
| NYA1     | 0.9957     | 0.0030              | 2.7333    | 0.3704             | 131.25           | 1.15                    |
| NYAL     | 0.9836     | 0.0034              | 3.3592    | 0.4624             | 279.86           | 1.21                    |
| ONSA     | 1.0054     | 0.0023              | 3.1895    | 0.3198             | 175.49           | 0.85                    |
| OPMT     | 0.9917     | 0.0038              | 4.2570    | 0.7605             | 195.66           | 1.55                    |
| ORID     | 0.9863     | 0.0023              | 4.3904    | 0.5060             | 323.40           | 0.99                    |
| OSN1     | 1.0013     | 0.0025              | 4.1363    | 0.4161             | 332.69           | 0.84                    |
| OUS2     | 1.0085     | 0.0023              | 3.4632    | 0.3436             | 19.57            | 0.83                    |
| OUSD     | 1.0186     | 0.0022              | 4.8682    | 0.3591             | 56.78            | 0.61                    |
| PADO     | 1.0085     | 0.0033              | 3.6699    | 0.5850             | 292.14           | 1.34                    |
| PALM     | 0.9661     | 0.0029              | 2.8182    | 0.3771             | 66.92            | 1.17                    |
| PARA     | 0.9996     | 0.0046              | 3.6415    | 0.5645             | 360.12           | 1.25                    |
| PARC     | 0.9968     | 0.0025              | 3.6201    | 0.3858             | 213.26           | 0.90                    |
| PENC     | 1.0055     | 0.0019              | 5.0052    | 0.3609             | 289.84           | 0.61                    |
| PERT     | 1.0314     | 0.0014              | 2.0324    | 0.4667             | 199.42           | 1.93                    |
| PETS     | 0.9759     | 0.0027              | 3.6631    | 0.5855             | 240.22           | 1.38                    |
| PGC5     | 0.9910     | 0.0027              | 4.5691    | 0.6258             | 184.01           | 1.15                    |
| PIMO     | 1.0175     | 0.0033              | 3.7643    | 0.6155             | 98.98            | 1.37                    |
| POL2     | 1.0074     | 0.0030              | 3.4410    | 0.4332             | 7.16             | 1.05                    |
| POLV     | 1.0006     | 0.0022              | 5.5713    | 0.5649             | 20.15            | 0.86                    |
| POTS     | 0.9966     | 0.0025              | 4.4781    | 0.3871             | 286.24           | 0.74                    |
| PRDS     | 1.0083     | 0.0027              | 2.8638    | 0.3462             | 268.67           | 1.00                    |
| PRE1     | 1.0052     | 0.0022              | 3.8564    | 0.3886             | 321.31           | 0.83                    |
| PSU1     | 1.0043     | 0.0026              | 3.1946    | 0.3679             | 93.15            | 0.97                    |
| PUR3     | 1.0387     | 0.0072              | 3.5033    | 0.7545             | 15.05            | 1.75                    |
| QAQ1     | 1.0003     | 0.0025              | 3.0775    | 0.4181             | 196.65           | 1.15                    |
| QUI2     | 1.0111     | 0.0045              | 2.5883    | 0.5406             | 25.56            | 1.75                    |
| QUIN     | 0.9893     | 0.0021              | 5.5431    | 0.5071             | 315.03           | 0.74                    |
| RABT     | 0.9846     | 0.0043              | 1.6735    | 0.3619             | 164.10           | 1.84                    |
| RAMO     | 1.0034     | 0.0016              | 5.6642    | 0.3416             | 131.67           | 0.51                    |
| REUN     | 1.0046     | 0.0055              | 3.3979    | 0.8696             | 27.17            | 2.17                    |

Continuación Tabla 10.5

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| REYK     | 0.9885     | 0.0051              | 1.7652    | 0.4003             | 5.57             | 1.92                    |
| RIGA     | 1.0105     | 0.0018              | 5.2695    | 0.3862             | 50.94            | 0.61                    |
| RIOG     | 1.0039     | 0.0033              | 5.2033    | 0.5105             | 176.81           | 0.84                    |
| SAMO     | 1.0139     | 0.0035              | 3.3259    | 0.5677             | 156.52           | 1.38                    |
| SANT     | 0.9734     | 0.0036              | 2.8880    | 0.3872             | 4.20             | 1.16                    |
| SCH2     | 0.9851     | 0.0025              | 4.6350    | 0.4578             | 118.89           | 0.85                    |
| SEAT     | 1.0025     | 0.0012              | 6.5583    | 0.3595             | 326.88           | 0.45                    |
| SELE     | 1.0146     | 0.0027              | 4.5425    | 0.4545             | 349.08           | 0.83                    |
| SFER     | 0.9840     | 0.0051              | 2.9591    | 0.5964             | 208.60           | 1.72                    |
| SHAO     | 0.9990     | 0.0024              | 4.7197    | 0.3818             | 315.59           | 0.71                    |
| SHEE     | 0.9932     | 0.0032              | 3.8708    | 0.4058             | 85.42            | 0.88                    |
| SJDV     | 1.0106     | 0.0019              | 3.6903    | 0.2729             | 53.41            | 0.62                    |
| SOFI     | 0.9981     | 0.0018              | 5.3393    | 0.3769             | 288.01           | 0.59                    |
| SOL1     | 1.0340     | 0.0048              | 1.5907    | 0.2790             | 187.16           | 1.44                    |
| SPT0     | 1.0209     | 0.0028              | 3.3335    | 0.4872             | 190.91           | 1.22                    |
| STAV     | 1.0055     | 0.0022              | 5.1023    | 0.4777             | 292.08           | 0.79                    |
| STJO     | 0.9909     | 0.0019              | 3.0683    | 0.2459             | 196.54           | 0.68                    |
| STR1     | 1.0037     | 0.0014              | 4.9614    | 0.3325             | 278.10           | 0.57                    |
| SULP     | 0.9977     | 0.0014              | 5.7961    | 0.3974             | 267.86           | 0.58                    |
| SUTH     | 0.9986     | 0.0017              | 3.3152    | 0.2842             | 137.29           | 0.71                    |
| SUTM     | 1.0031     | 0.0013              | 4.6997    | 0.3337             | 211.24           | 0.59                    |
| SUWN     | 0.9925     | 0.0022              | 4.5569    | 0.3746             | 155.11           | 0.70                    |
| SYOG     | 0.9810     | 0.0082              | 2.6181    | 0.5857             | 269.71           | 1.93                    |
| TELA     | 0.9960     | 0.0031              | 5.2987    | 0.5570             | 141.01           | 0.90                    |
| THTI     | 1.0107     | 0.0053              | 2.0251    | 0.4328             | 29.51            | 1.71                    |
| THU3     | 1.0067     | 0.0034              | 2.7057    | 0.4085             | 235.11           | 1.26                    |
| TIDB     | 1.0090     | 0.0013              | 5.2163    | 0.2563             | 66.39            | 0.41                    |
| TIXI     | 0.9972     | 0.0017              | 6.0548    | 0.4524             | 258.93           | 0.62                    |
| TLSE     | 0.9935     | 0.0022              | 3.0144    | 0.3140             | 132.48           | 0.90                    |
| TNML     | 0.9594     | 0.0022              | 3.3795    | 0.3444             | 171.86           | 0.89                    |
| TOW2     | 0.9866     | 0.0028              | 2.6057    | 0.3548             | 243.19           | 1.17                    |
| TRAB     | 0.9958     | 0.0022              | 4.7166    | 0.4009             | 159.25           | 0.72                    |
| TRO1     | 0.9956     | 0.0070              | 2.1943    | 0.4244             | 262.99           | 1.64                    |
| TROM     | 0.9979     | 0.0042              | 2.6702    | 0.4669             | 99.21            | 1.45                    |
| TSKB     | 1.0041     | 0.0010              | 6.8276    | 0.2954             | 187.90           | 0.36                    |
| TUCU     | 0.9956     | 0.0033              | 4.5579    | 0.5711             | 322.11           | 1.03                    |

Continuación Tabla 10.5

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| TUVA     | 1.0065     | 0.0028              | 4.0862    | 0.6008             | 104.26           | 1.19                    |
| TWTF     | 1.0266     | 0.0023              | 3.4371    | 0.4117             | 129.12           | 0.95                    |
| UCLU     | 0.9979     | 0.0021              | 3.5756    | 0.3439             | 69.10            | 0.81                    |
| UEPP     | 0.9887     | 0.0040              | 5.8139    | 0.6337             | 125.52           | 0.93                    |
| ULAB     | 1.0003     | 0.0012              | 5.8795    | 0.3165             | 363.91           | 0.46                    |
| UNIV     | 0.9939     | 0.0029              | 1.2893    | 1.4810             | 85.12            | 9.74                    |
| UPO1     | 1.0208     | 0.0056              | 3.3027    | 0.5971             | 226.50           | 1.47                    |
| URUM     | 1.0021     | 0.0017              | 6.8586    | 0.4719             | 133.58           | 0.56                    |
| USNA     | 1.0259     | 0.0063              | 3.7240    | 0.5419             | 256.99           | 1.21                    |
| USNO     | 1.0064     | 0.0031              | 4.0514    | 0.4018             | 88.00            | 0.83                    |
| USUD     | 0.9887     | 0.0042              | 3.0911    | 0.4650             | 230.05           | 1.28                    |
| UZHL     | 1.0178     | 0.0021              | 4.2061    | 0.3763             | 188.72           | 0.74                    |
| VANU     | 1.0057     | 0.0023              | 5.3608    | 0.6192             | 42.11            | 0.97                    |
| VBCA     | 0.9932     | 0.0032              | 6.0741    | 0.6559             | 229.14           | 0.90                    |
| VCIO     | 1.0361     | 0.0046              | 1.9472    | 0.3665             | 359.70           | 1.53                    |
| VESL     | 0.9688     | 0.0047              | 2.9496    | 0.6106             | 117.18           | 1.81                    |
| VIL0     | 1.0300     | 0.0047              | 2.0652    | 0.3875             | 163.18           | 1.54                    |
| VILL     | 1.0065     | 0.0033              | 2.9921    | 0.4385             | 302.39           | 1.25                    |
| VNDP     | 1.0096     | 0.0074              | 1.6959    | 0.3833             | 71.29            | 1.80                    |
| VS0G     | 1.0125     | 0.0020              | 5.3426    | 0.4318             | 310.60           | 0.68                    |
| WDC2     | 1.0114     | 0.0033              | 4.7905    | 0.4892             | 354.08           | 0.85                    |
| WEL2     | 0.9975     | 0.0018              | 4.2053    | 0.2977             | 223.20           | 0.60                    |
| WES2     | 1.0060     | 0.0031              | 3.5623    | 0.3799             | 94.48            | 0.89                    |
| WGTN     | 1.0041     | 0.0023              | 5.2710    | 0.4409             | 306.23           | 0.70                    |
| WGTT     | 0.9976     | 0.0023              | 6.2932    | 0.5553             | 230.43           | 0.75                    |
| WHIT     | 1.0055     | 0.0025              | 4.7462    | 0.4939             | 260.76           | 0.87                    |
| WILL     | 0.9950     | 0.0020              | 4.7055    | 0.4579             | 113.17           | 0.80                    |
| WROC     | 0.9948     | 0.0038              | 4.3955    | 0.6232             | 280.26           | 1.21                    |
| WSRT     | 0.9998     | 0.0024              | 3.4316    | 0.3839             | 45.17            | 0.96                    |
| WTZA     | 1.0039     | 0.0028              | 4.1648    | 0.4720             | 336.55           | 0.95                    |
| WTZR     | 0.9957     | 0.0020              | 4.1253    | 0.3490             | 278.06           | 0.72                    |
| WTZZ     | 1.0002     | 0.0020              | 4.9246    | 0.4443             | 327.98           | 0.77                    |
| YAR1     | 1.0049     | 0.0017              | 5.1170    | 0.3628             | 326.76           | 0.60                    |
| YARR     | 0.9996     | 0.0019              | 5.8447    | 0.4343             | 268.55           | 0.63                    |
| YEBE     | 1.0041     | 0.0025              | 2.5482    | 0.2725             | 27.72            | 0.90                    |
| YELL     | 0.9920     | 0.0034              | 2.6685    | 0.4425             | 22.34            | 1.45                    |

Continuación Tabla 10.5

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(días) | $\sigma_\phi$<br>(días) |
|----------|------------|---------------------|-----------|--------------------|------------------|-------------------------|
| YSSK     | 0.9924     | 0.0016              | 5.3152    | 0.3229             | 234.39           | 0.52                    |
| ZECK     | 0.9958     | 0.0014              | 5.9771    | 0.3110             | 62.17            | 0.44                    |
| ZIMM     | 1.0091     | 0.0032              | 3.6156    | 0.4535             | 77.99            | 1.05                    |

Tal como se indicó en la sección 10.2, durante el análisis armónico de las series temporales, se estimó un proceso de ruido el cual viene determinado a partir de su índice espectral,  $\alpha$ , y la componente de covarianza asociada,  $\sigma^2$ . Esta componente de ruido es distinta para cada serie de datos. Del mismo modo que hicimos con el contenido armónico, se han creado histogramas de los valores estimados para los índices espectrales. La Figura 10.4 contabiliza y agrupa las distintas estimaciones de  $\alpha$  para las series temporales en función de la componente de desplazamiento que representan. Cada barra en estos histogramas posee una amplitud constante de 0.05 unidades. A partir de la Figura 10.4, puede percibirse la similitud en la distribución de las estimaciones del índice espectral para las distintas componentes: este, norte y vertical. A simple vista, todas ellas parecen seguir una distribución normal con una media que ronda el valor de -0.8 unidades. Para fundamentar dicha observación, se procedió a la realización de un test de normalidad, en concreto, el *test de normalidad de Lilliefors*. Este test es apropiado cuando la distribución de los datos es completamente desconocida y sus parámetros deben ser estimados (al contrario que el test de *Kolmogorov-Smirnov*, que requiere del conocimiento completo de la distribución que pretende contrastarse). Así pues, mediante el *test de Lilliefors* resolvimos el contraste de hipótesis dado por:

$$\begin{cases} H_0 & : \text{Las estimaciones de } \alpha \text{ siguen una distribución normal.} \\ H_1 & : \text{Las estimaciones de } \alpha \text{ no siguen una distribución normal.} \end{cases} \quad (10.6)$$

Dicho contraste fue resuelto para cada una de las componentes, obteniendo idénticos resultados en los tres casos: *No existen evidencias estadísticas suficientes como para rechazar la hipótesis de que las estimaciones del índice espectral sigan una distribución normal*. Como aliciente, y con el propósito de evaluar gráficamente si los datos pueden proceder o no de una distribución normal, se recurre a una comparación

Tabla 10.6: Componente este. Frecuencias asociadas a largos periodos comprendidos entre 4 y 10 años. Se muestran (en este orden): el identificador de la estación, la frecuencia fundamental, incertidumbre de la frecuencia, periodo, amplitud, incertidumbre de la amplitud, fase e incertidumbre de la fase.

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | $\Pi$<br>(años) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(grados) | $\sigma_\phi$<br>(grados) |
|----------|------------|---------------------|-----------------|-----------|--------------------|--------------------|---------------------------|
| AREQ     | 0.1868     | 0.0059              | 5.35            | 2.5401    | 0.6156             | 35.15              | 10.48                     |
| BAR1     | 0.1872     | 0.0033              | 5.34            | 1.1279    | 0.2913             | 284.66             | 12.65                     |
| BHR2     | 0.2193     | 0.0067              | 4.56            | 1.3499    | 0.3416             | 219.98             | 9.52                      |
| ELRO     | 0.1456     | 0.0029              | 6.87            | 1.2199    | 0.1648             | 149.64             | 7.93                      |
| GENO     | 0.2359     | 0.0044              | 4.24            | 0.5528    | 0.1078             | 26.69              | 6.56                      |
| HELG     | 0.1372     | 0.0026              | 7.29            | 0.3919    | 0.2228             | 337.50             | 40.87                     |
| LAUT     | 0.1387     | 0.0051              | 7.21            | 1.8850    | 0.4696             | 44.96              | 14.29                     |
| MLF1     | 0.2313     | 0.0066              | 4.32            | 1.4862    | 0.3115             | 257.38             | 7.27                      |
| MQZG     | 0.1415     | 0.0040              | 7.07            | 1.8909    | 0.3054             | 220.80             | 10.06                     |
| MTJO     | 0.1547     | 0.0025              | 6.46            | 1.0110    | 0.1201             | 227.06             | 6.43                      |
| NSSS     | 0.1164     | 0.0046              | 8.59            | 0.8693    | 0.2236             | 230.91             | 18.82                     |
| OUS2     | 0.2017     | 0.0012              | 4.96            | 1.3043    | 0.0990             | 117.33             | 3.45                      |
| PTBB     | 0.1384     | 0.0017              | 7.22            | 0.1837    | 0.1945             | 331.84             | 65.43                     |
| SIO3     | 0.1009     | 0.0032              | 9.91            | 0.6543    | 0.4080             | 338.82             | 39.12                     |
| TELA     | 0.2273     | 0.0044              | 4.40            | 1.2412    | 0.6768             | 273.20             | 18.12                     |
| TIDB     | 0.1459     | 0.0048              | 6.85            | 0.6821    | 0.1504             | 113.42             | 12.15                     |
| TWTF     | 0.2387     | 0.0028              | 4.19            | 1.1101    | 0.3133             | 54.73              | 10.33                     |
| UCLU     | 0.2106     | 0.0033              | 4.75            | 0.6743    | 0.3933             | 26.76              | 23.47                     |
| VCIO     | 0.2304     | 0.0030              | 4.34            | 0.2978    | 0.6120             | 198.60             | 74.03                     |
| WEL2     | 0.2171     | 0.0000              | 4.61            | 4.0560    | 2.6856             | 347.02             | 26.13                     |

Tabla 10.7: Componente norte. Frecuencias asociadas a largos periodos comprendidos entre 4 y 10 años. Se muestran (en este orden): el identificador de la estación, la frecuencia fundamental, incertidumbre de la frecuencia, periodo, amplitud, incertidumbre de la amplitud, fase e incertidumbre de la fase.

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | $\Pi$<br>(años) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(grados) | $\sigma_\phi$<br>(grados) |
|----------|------------|---------------------|-----------------|-----------|--------------------|--------------------|---------------------------|
| MAG0     | 0.2224     | 0.0098              | 4.50            | 2.1929    | 0.4557             | 34.34              | 8.14                      |
| USNA     | 0.2291     | 0.0064              | 4.36            | 1.2178    | 0.2239             | 96.42              | 6.74                      |
| VNDP     | 0.1673     | 0.0031              | 5.98            | 0.3537    | 0.2621             | 100.25             | 34.11                     |
| WDC2     | 0.1556     | 0.0173              | 6.43            | 2.1092    | 1.6877             | 131.80             | 70.49                     |
| WGTM     | 0.1712     | 0.0031              | 5.84            | 0.2381    | 0.2958             | 55.03              | 68.13                     |

Tabla 10.8: Componente vertical. Frecuencias asociadas a largos periodos comprendidos entre 4 y 10 años. Se muestran (en este orden): el identificador de la estación, la frecuencia fundamental, incertidumbre de la frecuencia, periodo, amplitud, incertidumbre de la amplitud, fase e incertidumbre de la fase.

| Estación | f<br>(cpa) | $\sigma_f$<br>(cpa) | $\Pi$<br>(años) | A<br>(mm) | $\sigma_A$<br>(mm) | $\phi$<br>(grados) | $\sigma_\phi$<br>(grados) |
|----------|------------|---------------------|-----------------|-----------|--------------------|--------------------|---------------------------|
| ADE1     | 0.1025     | 0.0060              | 9.75            | 2.9175    | 0.8004             | 131.12             | 24.47                     |
| BUCU     | 0.1090     | 0.0040              | 9.17            | 4.6865    | 0.7805             | 0.82               | 14.00                     |
| DAEJ     | 0.2215     | 0.0041              | 4.51            | 2.3723    | 0.4603             | 195.64             | 7.15                      |
| FTS1     | 0.1310     | 0.0042              | 7.63            | 3.1022    | 0.4601             | 271.50             | 9.80                      |
| KOD1     | 0.2110     | 0.0073              | 4.74            | 3.1596    | 0.8257             | 227.03             | 10.02                     |
| LPGS     | 0.2474     | 0.0104              | 4.04            | 2.5818    | 0.5349             | 11.43              | 6.93                      |
| ORID     | 0.1114     | 0.0051              | 8.98            | 5.2343    | 1.0832             | 317.03             | 15.29                     |
| PLO3     | 0.2310     | 0.0045              | 4.33            | 0.9186    | 1.1938             | 175.07             | 39.82                     |
| SOL1     | 0.1906     | 0.0071              | 5.25            | 1.7774    | 0.4058             | 304.84             | 10.15                     |
| SUM1     | 0.1631     | 0.0068              | 6.13            | 3.8671    | 1.0832             | 209.17             | 13.50                     |
| TWTF     | 0.1474     | 0.0017              | 6.78            | 9.4941    | 0.7726             | 240.10             | 4.75                      |
| ZECK     | 0.1151     | 0.0053              | 8.69            | 2.9852    | 0.5675             | 91.83              | 13.61                     |

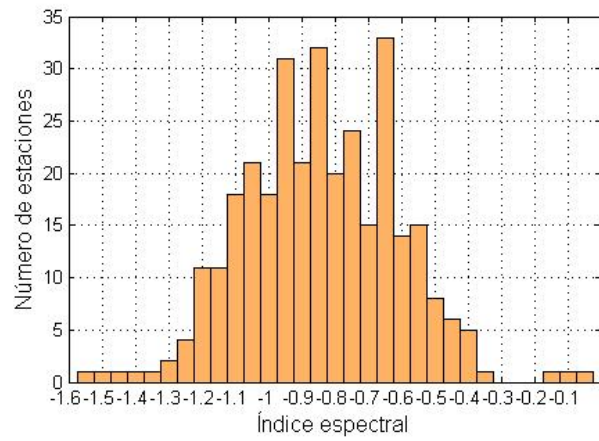
Tabla 10.9: Estimación de la media y desviación típica de la distribución normal ajustada a las estimaciones de los índices espectrales de las estaciones. También se presentan los intervalos de confianza al 95 %.

| Componente | $\mu$   | $IC_{\mu}$         | $\sigma$ | $IC_{\sigma}$    |
|------------|---------|--------------------|----------|------------------|
| Este       | -0.8427 | [-0.8680, -0.8174] | 0.2214   | [0.2129, 0.2488] |
| Norte      | -0.8648 | [-0.8875, -0.8422] | 0.2054   | [0.1906, 0.2227] |
| Vertical   | -0.7950 | [-0.8161, -0.7738] | 0.1917   | [0.1778, 0.2078] |

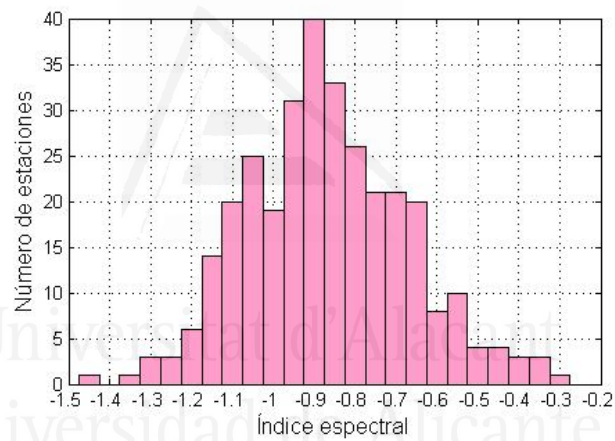
mediante la gráfica de probabilidad normal de las estimaciones. En la Figura 10.5 aparecen las representaciones para cada una de las componentes de desplazamiento. Si los datos son normales, la gráfica debe presentar un comportamiento lineal. Tal es el caso que nos ocupa, donde para cada componente la representación gráfica se ajusta de forma clara a una recta. Otro tipo de distribución no normal introduciría algún tipo de curvatura en la gráfica, por lo que se asume la normalidad de las estimaciones.

El siguiente paso lógico consistía en estimar los parámetros de la distribución normal que aparentan seguir los valores de  $\alpha$  en cada componente. Para ello se hizo uso de la función *normfit* de MATLAB que permite obtener la media, desviación típica e intervalos de confianza al 95 % de la distribución normal de los datos. Los resultados obtenidos son los que se muestran en la Tabla 10.9. En general, el proceso de ruido que afecta a las diferentes componentes podría clasificarse como un ruido parpadeante o incluso como suma de un ruido blanco y otro parpadeante ya que el valor medio del índice espectral oscila alrededor de -0.8 unidades tanto para la componente horizontal como para la vertical; lo cual está en concordancia con varios de los diferentes estudios realizados sobre los procesos de ruido en los datos de GPS (ver, por ejemplo, Mao et al., 1999; Zhang et al., 1997).

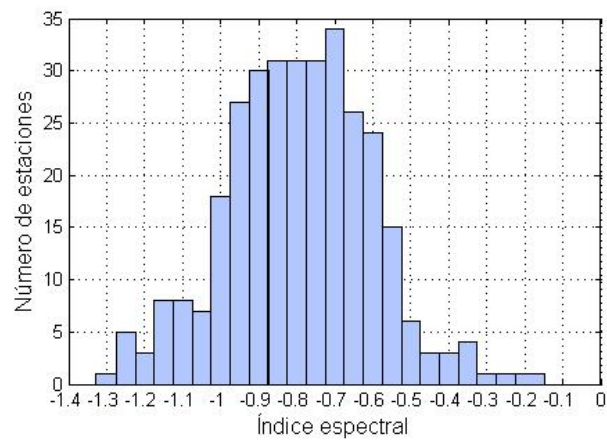
La Tabla 10.10, recoge la estimación de los índices espectrales y la componente de covarianza (además de sus incertidumbres) para cada una de las estaciones y componente de desplazamiento. A partir de esta tabla, puede observarse que la componente de covarianza del proceso de ruido presenta diferencias destacables atendiendo a la dirección del movimiento que se considere. Así pues, los desplazamientos verticales



(a)



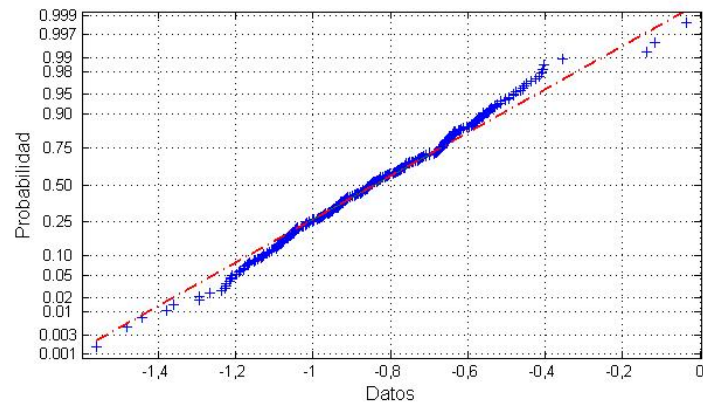
(b)



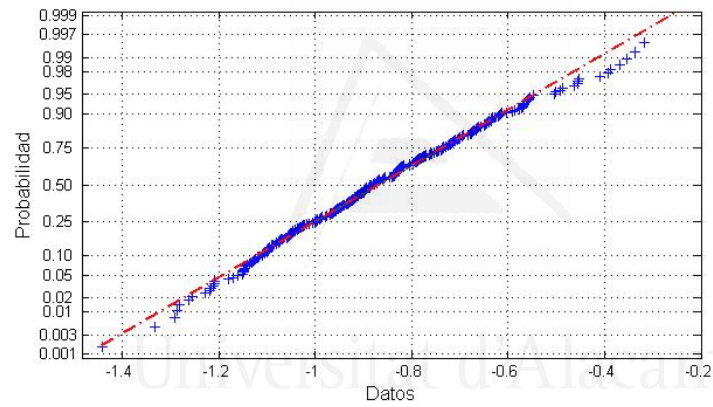
(c)

Figura 10.4: Histogramas del índice espectral para las series residuales de posiciones de estaciones GPS. (a) Componente este, (b) componente norte y (c) componente vertical.

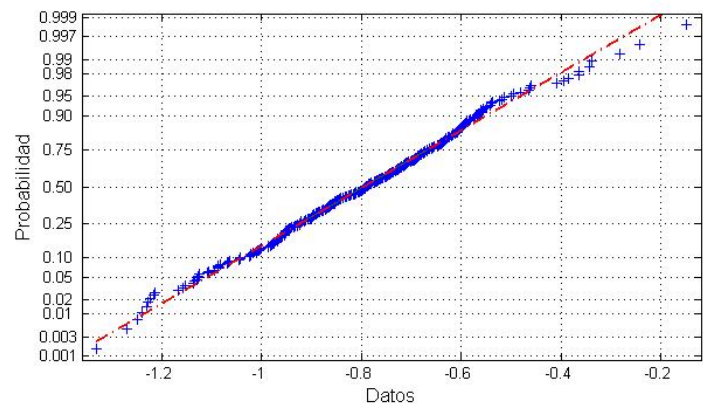




(a)



(b)



(c)

Figura 10.5: Gráfica de probabilidad normal de los valores estimados para el índice espectral. El símbolo + representa las estimaciones y la línea roja une el primer y tercer cuartil. (a) Componente este, (b) componente norte y (c) componente vertical.

se encuentran afectados por un proceso de ruido cuya amplitud o componente de covarianza es, en general, mayor que para los desplazamientos horizontales. La mediana en el caso de las series temporales de alturas se encuentra alrededor de  $8.90 \text{ mm}^2$ , mientras que para las series temporales este y norte es de aproximadamente  $0.90 \text{ mm}^2$  y  $1.10 \text{ mm}^2$ , respectivamente. Las estaciones con mayor componente de varianza para los desplazamientos horizontales en dirección este son ANKR ( $10.59 \text{ mm}^2$ ) y MADR ( $5.85 \text{ mm}^2$ ). Es oportuno señalar que ambas estaciones alcanzan dicho valor en la componente de varianza debido a que su modelo funcional carece por completo de contenido armónico, ya que las frecuencias extraídas en cada caso tenían asignadas un SNR menor que 3 y por tanto fueron finalmente desechadas. La estación de MADR ( $4.78 \text{ mm}^2$ ) aparece también como la estación con mayor componente de covarianza para la componente norte. Seguida muy de cerca, podemos destacar la estación UPO1 cuyo valor de  $\sigma^2$  para los desplazamientos en dirección norte se estima en  $4.21 \text{ mm}^2$ . Como ya se ha mencionado con anterioridad, las amplitudes del ruido estimado para la componente vertical son considerablemente superiores a las asignadas a los desplazamientos horizontales. Las estaciones más ruidosas se corresponden con CHA1 ( $87.67 \text{ mm}^2$ ), CCJM ( $45.74 \text{ mm}^2$ ) y GOUG ( $36.56 \text{ mm}^2$ ). En contraposición, las estaciones más estables, entendidas como aquellas cuya componente de ruido posee una menor amplitud son QAQ1 para la componente este ( $0.22 \text{ mm}^2$ ), THU3 para la componente norte ( $0.35 \text{ mm}^2$ ) y finalmente YEBE ( $3.79 \text{ mm}^2$ ) alcanza la menor variación en el caso de los desplazamientos verticales.

Tabla 10.10: Índice espectral y el valor de su componente de varianza ( $\text{mm}^2$ ) para cada una de las estaciones analizadas.

| Estación | Este       |            | Norte      |            | Vertical   |            |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|          | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ |
| ABER     | -0.77±0.02 | 2.17±0.15  | -0.75±0.02 | 1.05±0.07  | -0.71±0.02 | 9.68±0.68  |
| ACOR     | -0.79±0.02 | 0.58±0.04  | -1.04±0.02 | 0.86±0.06  | -0.93±0.02 | 6.28±0.41  |
| ADE1     | -1.09±0.01 | 0.76±0.05  | -0.88±0.02 | 0.86±0.05  | -0.76±0.02 | 7.48±0.46  |
| AIRA     | -1.04±0.02 | 2.85±0.18  | -0.83±0.02 | 2.06±0.13  | -0.81±0.02 | 16.48±1.02 |
| AIS1     | -1.17±0.02 | 1.23±0.07  | -0.84±0.02 | 1.40±0.08  | -0.86±0.02 | 10.85±0.64 |
| AJAC     | -0.71±0.02 | 0.79±0.05  | -0.78±0.02 | 0.91±0.06  | -0.63±0.02 | 4.95±0.34  |
| ALAC     | -0.83±0.02 | 0.48±0.03  | -0.98±0.02 | 0.80±0.05  | -0.65±0.02 | 6.39±0.41  |
| ALBH     | -0.98±0.02 | 0.69±0.04  | -1.00±0.02 | 0.65±0.04  | -0.90±0.02 | 4.60±0.26  |

Continuación Tabla 10.10

| Estación | Este       |            | Norte      |            | Vertical   |            |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|          | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ |
| ALGO     | -0.54±0.02 | 0.90±0.05  | -0.57±0.02 | 1.55±0.09  | -0.79±0.02 | 9.62±0.54  |
| ALIC     | -0.93±0.02 | 0.48±0.03  | -1.08±0.02 | 0.72±0.04  | -0.98±0.02 | 8.55±0.48  |
| ALME     | -0.78±0.02 | 1.80±0.13  | -0.86±0.02 | 1.17±0.09  | -0.83±0.02 | 9.93±0.73  |
| AMC2     | -0.95±0.02 | 0.36±0.02  | -0.72±0.02 | 0.64±0.04  | -0.92±0.02 | 5.75±0.35  |
| ANKR     | -0.95±0.02 | 10.59±0.62 | -0.91±0.02 | 1.67±0.10  | -0.95±0.02 | 9.55±0.56  |
| ANTC     | -1.00±0.02 | 0.60±0.05  | -1.06±0.02 | 1.72±0.15  | -1.16±0.01 | 10.28±0.89 |
| AREQ     | -1.09±0.02 | 1.67±0.10  | -1.21±0.02 | 1.55±0.09  | -1.02±0.02 | 4.94±0.29  |
| ARP3     | -1.06±0.02 | 1.54±0.10  | -1.14±0.02 | 1.43±0.09  | -0.83±0.02 | 7.73±0.49  |
| ARTU     | -0.98±0.02 | 0.52±0.03  | -0.89±0.02 | 0.66±0.04  | -0.59±0.02 | 11.82±0.76 |
| ASPA     | -0.66±0.02 | 1.54±0.11  | -0.39±0.02 | 2.72±0.20  | -0.57±0.02 | 17.07±1.24 |
| AUCK     | -0.96±0.02 | 0.77±0.04  | -1.03±0.02 | 0.78±0.04  | -0.68±0.02 | 4.37±0.25  |
| AZCN     | -0.83±0.02 | 0.39±0.03  | -0.91±0.02 | 0.98±0.06  | -1.27±0.02 | 5.52±0.35  |
| AZRY     | -0.59±0.02 | 0.89±0.06  | -0.70±0.01 | 0.94±0.06  | -1.07±0.01 | 5.31±0.35  |
| BAKE     | -1.19±0.02 | 0.95±0.09  | -0.97±0.02 | 0.88±0.08  | -0.86±0.02 | 11.85±1.03 |
| BAR1     | -0.46±0.02 | 1.04±0.08  | -0.63±0.02 | 1.02±0.08  | -0.66±0.02 | 6.25±0.48  |
| BARH     | -0.86±0.02 | 0.61±0.04  | -1.07±0.02 | 1.06±0.06  | -0.59±0.02 | 8.01±0.49  |
| BBRY     | -1.14±0.01 | 1.26±0.08  | -1.10±0.02 | 1.10±0.07  | -1.33±0.01 | 6.24±0.39  |
| BHR2     | -1.09±0.02 | 0.63±0.04  | -1.21±0.02 | 0.98±0.05  | -0.78±0.02 | 5.20±0.29  |
| BILI     | -0.67±0.02 | 0.46±0.03  | -0.92±0.02 | 0.86±0.06  | -0.56±0.02 | 11.23±0.75 |
| BLYT     | -0.67±0.02 | 0.93±0.05  | -0.89±0.02 | 0.96±0.05  | -0.90±0.02 | 10.36±0.59 |
| BOGO     | -0.76±0.02 | 0.85±0.05  | -0.76±0.02 | 1.09±0.06  | -0.69±0.02 | 8.44±0.49  |
| BOR1     | -0.82±0.02 | 0.46±0.03  | -0.80±0.02 | 0.60±0.03  | -0.79±0.02 | 8.41±0.47  |
| BRAZ     | -0.66±0.02 | 1.23±0.07  | -0.91±0.02 | 1.61±0.09  | -0.96±0.02 | 10.59±0.61 |
| BREW     | -1.21±0.02 | 0.32±0.02  | -0.80±0.02 | 0.61±0.04  | -0.76±0.02 | 5.85±0.42  |
| BRMU     | -0.44±0.02 | 0.69±0.04  | -0.35±0.02 | 0.56±0.03  | -0.36±0.02 | 4.92±0.29  |
| BUCU     | -0.91±0.01 | 0.77±0.05  | -0.87±0.02 | 0.83±0.05  | -0.73±0.02 | 8.94±0.55  |
| BUE2     | -1.20±0.02 | 1.27±0.08  | -1.44±0.02 | 2.28±0.15  | -1.23±0.02 | 11.55±0.74 |
| CAGL     | -0.57±0.02 | 0.80±0.05  | -0.72±0.02 | 0.86±0.05  | -0.60±0.02 | 6.09±0.34  |
| CAGS     | -0.73±0.02 | 2.32±0.15  | -0.83±0.02 | 2.07±0.13  | -0.68±0.02 | 13.98±0.90 |
| CAGZ     | -0.68±0.02 | 1.11±0.08  | -0.64±0.02 | 1.27±0.09  | -1.05±0.02 | 7.13±0.53  |
| CAS1     | -0.95±0.02 | 0.67±0.04  | -0.89±0.02 | 1.32±0.08  | -1.24±0.02 | 12.52±0.72 |
| CASC     | -1.04±0.02 | 0.66±0.04  | -0.78±0.02 | 0.86±0.05  | -0.98±0.02 | 4.91±0.29  |
| CAT1     | -0.77±0.02 | 1.12±0.07  | -0.91±0.02 | 1.31±0.08  | -0.99±0.02 | 7.72±0.46  |
| CCJM     | -1.23±0.02 | 3.61±0.21  | -1.29±0.02 | 2.53±0.15  | -1.09±0.02 | 45.74±2.63 |
| CCV3     | -0.64±0.02 | 0.63±0.04  | -0.93±0.02 | 1.21±0.08  | -0.97±0.02 | 8.47±0.59  |
| CEDU     | -0.97±0.02 | 0.42±0.03  | -0.82±0.02 | 0.83±0.05  | -0.91±0.02 | 5.09±0.30  |

Continuación Tabla 10.10

| Estación | Este       |            | Norte      |            | Vertical   |            |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|          | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ |
| CEUT     | -0.14±0.02 | 2.52±0.23  | -0.60±0.02 | 1.61±0.14  | -0.81±0.02 | 14.62±1.31 |
| CFAG     | -1.00±0.02 | 0.67±0.04  | -0.78±0.02 | 1.27±0.08  | -0.78±0.02 | 6.16±0.38  |
| CHA1     | -0.80±0.02 | 1.03±0.08  | -0.89±0.02 | 1.63±0.12  | -0.34±0.02 | 87.67±6.64 |
| CHAN     | -1.38±0.02 | 1.37±0.13  | -0.61±0.02 | 1.02±0.10  | -0.36±0.02 | 8.70±0.87  |
| CHAT     | -0.89±0.02 | 0.68±0.04  | -0.82±0.02 | 0.76±0.04  | -0.84±0.02 | 5.66±0.32  |
| CHB1     | -1.18±0.02 | 0.49±0.03  | -1.16±0.02 | 1.34±0.08  | -0.69±0.02 | 9.67±0.59  |
| CHPI     | -1.08±0.02 | 1.12±0.09  | -0.95±0.02 | 0.55±0.04  | -0.75±0.02 | 7.78±0.63  |
| CHUM     | -0.85±0.02 | 1.04±0.06  | -1.10±0.02 | 1.34±0.08  | -1.09±0.02 | 13.06±0.76 |
| CHUR     | -0.64±0.02 | 1.00±0.06  | -1.01±0.02 | 1.23±0.07  | -0.61±0.02 | 9.48±0.55  |
| CIC1     | -0.87±0.02 | 0.58±0.04  | -0.89±0.02 | 0.80±0.05  | -1.01±0.02 | 4.70±0.30  |
| CKIS     | -0.95±0.02 | 2.13±0.16  | -0.46±0.02 | 1.39±0.10  | -0.61±0.02 | 24.04±1.76 |
| CLAR     | -0.88±0.02 | 1.44±0.08  | -1.00±0.02 | 1.13±0.06  | -0.99±0.02 | 16.09±0.91 |
| COCO     | -1.08±0.02 | 1.19±0.07  | -1.09±0.01 | 1.30±0.07  | -0.80±0.02 | 10.05±0.57 |
| CONZ     | -0.93±0.02 | 0.49±0.04  | -1.04±0.02 | 1.29±0.10  | -1.01±0.02 | 6.03±0.45  |
| COSO     | -0.56±0.02 | 1.51±0.09  | -0.92±0.02 | 0.93±0.05  | -0.90±0.02 | 12.72±0.75 |
| CRO1     | -1.19±0.02 | 0.77±0.04  | -1.03±0.02 | 1.15±0.07  | -0.95±0.02 | 14.08±0.80 |
| DAEJ     | -0.94±0.02 | 0.65±0.04  | -0.79±0.02 | 0.93±0.06  | -0.57±0.02 | 6.87±0.42  |
| DARW     | -1.01±0.02 | 0.85±0.05  | -0.67±0.02 | 1.29±0.08  | -0.98±0.02 | 11.98±0.73 |
| DAV1     | -0.65±0.02 | 0.46±0.03  | -0.56±0.02 | 0.70±0.04  | -0.86±0.02 | 6.10±0.35  |
| DRAG     | -0.71±0.02 | 2.33±0.15  | -0.78±0.02 | 2.68±0.17  | -0.77±0.02 | 12.56±0.82 |
| DRAO     | -0.85±0.02 | 0.54±0.03  | -0.84±0.02 | 0.74±0.04  | -0.80±0.02 | 6.34±0.35  |
| DUBO     | -0.63±0.02 | 0.40±0.02  | -0.70±0.02 | 0.61±0.03  | -0.52±0.02 | 9.85±0.56  |
| DWH1     | -1.18±0.02 | 0.86±0.07  | -1.01±0.02 | 1.90±0.15  | -0.89±0.02 | 11.97±0.94 |
| EIL2     | -1.02±0.02 | 1.11±0.07  | -1.17±0.02 | 1.12±0.08  | -0.91±0.02 | 20.28±1.36 |
| EISL     | -0.91±0.02 | 2.97±0.22  | -0.96±0.02 | 2.45±0.18  | -0.87±0.02 | 18.17±1.37 |
| ELAT     | -0.67±0.02 | 1.18±0.07  | -1.05±0.02 | 0.73±0.05  | -0.77±0.02 | 8.04±0.50  |
| ELRO     | -0.51±0.02 | 0.74±0.05  | -0.92±0.02 | 0.78±0.05  | -0.62±0.02 | 6.03±0.40  |
| ENG1     | -1.36±0.02 | 1.65±0.10  | -1.22±0.02 | 2.23±0.14  | -0.96±0.02 | 13.74±0.87 |
| EPRT     | -1.13±0.02 | 1.08±0.07  | -1.15±0.02 | 0.93±0.06  | -0.87±0.02 | 8.04±0.50  |
| FAIR     | -1.06±0.02 | 1.00±0.06  | -0.82±0.02 | 1.33±0.08  | -0.71±0.02 | 21.12±1.19 |
| FALE     | -0.78±0.02 | 4.34±0.27  | -0.50±0.02 | 1.76±0.11  | -0.60±0.02 | 19.95±1.24 |
| FLIN     | -0.78±0.02 | 0.55±0.03  | -0.88±0.02 | 0.81±0.05  | -0.71±0.02 | 11.92±0.67 |
| FORT     | -0.76±0.02 | 2.92±0.19  | -0.74±0.02 | 2.31±0.15  | -0.72±0.02 | 31.78±2.08 |
| FTS1     | -0.83±0.01 | 1.41±0.08  | -0.77±0.02 | 0.93±0.06  | -0.54±0.02 | 6.47±0.39  |
| GAL1     | -0.76±0.02 | 1.10±0.09  | -0.87±0.02 | 1.88±0.15  | -1.00±0.02 | 14.85±1.16 |
| GENO     | -0.57±0.02 | 0.40±0.02  | -0.63±0.02 | 0.82±0.05  | -0.82±0.02 | 6.95±0.42  |

Continuación Tabla 10.10

| Estación | Este       |            | Norte      |            | Vertical   |            |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|          | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ |
| GLPS     | -1.07±0.02 | 0.48±0.04  | -1.33±0.02 | 1.82±0.15  | -1.13±0.02 | 6.05±0.50  |
| GLPT     | -0.67±0.02 | 1.24±0.08  | -0.56±0.02 | 1.51±0.10  | -0.69±0.02 | 8.54±0.56  |
| GLSV     | -0.76±0.02 | 0.96±0.06  | -0.75±0.02 | 1.27±0.07  | -0.55±0.02 | 10.74±0.63 |
| GODE     | -1.04±0.02 | 0.42±0.02  | -0.86±0.02 | 0.79±0.04  | -0.74±0.02 | 7.56±0.42  |
| GOLD     | -0.64±0.02 | 0.71±0.04  | -0.94±0.02 | 0.86±0.05  | -0.94±0.02 | 8.86±0.50  |
| GOPE     | -0.83±0.02 | 0.45±0.03  | -1.06±0.02 | 0.71±0.04  | -0.81±0.02 | 10.76±0.61 |
| GOUG     | -0.36±0.02 | 5.09±0.33  | -0.57±0.02 | 3.20±0.21  | -0.60±0.02 | 36.56±2.39 |
| GRAS     | -1.13±0.02 | 0.62±0.04  | -0.88±0.02 | 0.81±0.05  | -0.72±0.02 | 4.75±0.27  |
| GRAZ     | -0.78±0.02 | 0.54±0.03  | -0.68±0.02 | 0.78±0.04  | -0.74±0.02 | 7.58±0.42  |
| GUAM     | -0.96±0.02 | 2.18±0.12  | -1.07±0.02 | 1.66±0.09  | -0.71±0.02 | 21.91±1.24 |
| GUAO     | -1.01±0.02 | 0.41±0.03  | -0.96±0.02 | 0.97±0.07  | -0.63±0.02 | 5.83±0.44  |
| GUAT     | -0.98±0.02 | 4.88±0.33  | -0.97±0.02 | 1.49±0.10  | -1.11±0.02 | 10.46±0.71 |
| GUUG     | -1.48±0.01 | 1.34±0.12  | -0.32±0.02 | 0.71±0.06  | -0.85±0.02 | 11.08±0.95 |
| HAMM     | -0.68±0.02 | 1.37±0.11  | -0.99±0.02 | 1.31±0.10  | -0.58±0.02 | 11.28±0.88 |
| HARB     | -0.76±0.02 | 0.56±0.04  | -1.15±0.02 | 1.35±0.09  | -0.81±0.02 | 5.15±0.35  |
| HELG     | -0.47±0.02 | 0.83±0.05  | -0.72±0.02 | 0.58±0.04  | -0.75±0.02 | 9.94±0.64  |
| HERS     | -0.86±0.02 | 0.62±0.04  | -0.87±0.02 | 0.77±0.05  | -0.95±0.02 | 7.62±0.49  |
| HFLK     | -0.79±0.02 | 1.61±0.10  | -0.92±0.02 | 1.15±0.07  | -0.63±0.02 | 11.91±0.74 |
| HIL1     | -1.21±0.02 | 0.94±0.07  | -0.90±0.01 | 1.83±0.14  | -0.96±0.02 | 6.00±0.46  |
| HLFX     | -0.75±0.02 | 0.79±0.06  | -0.34±0.02 | 0.84±0.07  | -0.63±0.02 | 5.42±0.42  |
| HNLC     | -0.54±0.02 | 1.73±0.10  | -0.66±0.02 | 1.61±0.09  | -0.59±0.02 | 12.30±0.71 |
| HOB2     | -0.67±0.02 | 0.92±0.05  | -0.96±0.02 | 0.90±0.05  | -0.91±0.02 | 5.69±0.32  |
| HOFN     | -0.93±0.02 | 0.48±0.03  | -0.69±0.02 | 0.64±0.04  | -0.76±0.02 | 5.98±0.34  |
| HOLB     | -1.05±0.02 | 0.84±0.05  | -0.78±0.02 | 1.06±0.06  | -0.96±0.02 | 14.81±0.87 |
| HOLM     | -1.08±0.02 | 0.97±0.07  | -0.83±0.02 | 1.22±0.09  | -0.48±0.02 | 9.47±0.67  |
| HRAO     | -1.13±0.02 | 1.00±0.06  | -1.12±0.02 | 1.29±0.08  | -1.02±0.02 | 6.78±0.40  |
| HRM1     | -0.83±0.02 | 0.42±0.03  | -0.96±0.02 | 0.65±0.04  | -0.64±0.02 | 5.15±0.32  |
| HYDE     | -0.87±0.02 | 0.55±0.04  | -0.68±0.02 | 1.54±0.12  | -0.15±0.02 | 4.91±0.39  |
| IENG     | -0.62±0.02 | 0.70±0.06  | -1.08±0.02 | 1.34±0.11  | -0.47±0.02 | 4.99±0.42  |
| IISC     | -1.06±0.02 | 1.29±0.07  | -1.05±0.02 | 1.19±0.07  | -0.97±0.02 | 11.26±0.65 |
| INVK     | -0.93±0.02 | 1.18±0.08  | -1.15±0.02 | 1.23±0.09  | -0.87±0.02 | 18.93±1.37 |
| IRKT     | -1.05±0.02 | 1.49±0.08  | -1.06±0.02 | 2.02±0.11  | -0.66±0.02 | 11.22±0.63 |
| ISTA     | -0.93±0.02 | 0.70±0.05  | -1.13±0.02 | 0.93±0.06  | -0.84±0.02 | 7.61±0.52  |
| JOZE     | -0.92±0.02 | 0.63±0.04  | -0.84±0.02 | 0.98±0.05  | -0.46±0.02 | 10.52±0.59 |
| JPLM     | -0.85±0.02 | 0.50±0.03  | -1.11±0.02 | 0.80±0.04  | -1.14±0.02 | 4.81±0.27  |
| KABR     | -0.66±0.02 | 0.86±0.05  | -0.82±0.02 | 0.74±0.04  | -0.90±0.02 | 6.09±0.37  |

Continuación Tabla 10.10

| Estación | Este       |            | Norte      |            | Vertical   |            |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|          | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ |
| KARR     | -0.81±0.02 | 0.70±0.04  | -1.03±0.02 | 0.98±0.05  | -0.79±0.02 | 7.27±0.41  |
| KELS     | -1.11±0.02 | 1.27±0.08  | -0.99±0.02 | 1.02±0.06  | -0.77±0.02 | 7.84±0.50  |
| KERG     | -0.61±0.02 | 1.06±0.06  | -0.83±0.02 | 1.77±0.10  | -0.63±0.02 | 12.66±0.72 |
| KIRI     | -1.06±0.02 | 2.41±0.19  | -0.99±0.02 | 2.08±0.16  | -0.67±0.02 | 12.28±0.96 |
| KIRU     | -0.85±0.02 | 2.91±0.17  | -0.83±0.02 | 1.81±0.11  | -0.73±0.02 | 27.21±1.61 |
| KIT3     | -0.99±0.02 | 2.54±0.15  | -1.01±0.02 | 2.03±0.12  | -0.91±0.02 | 14.42±0.85 |
| KOD1     | -0.65±0.02 | 1.42±0.09  | -0.92±0.02 | 3.27±0.20  | -0.72±0.02 | 11.69±0.72 |
| KOK1     | -0.52±0.02 | 2.99±0.20  | -0.92±0.02 | 1.76±0.12  | -0.81±0.02 | 18.39±1.21 |
| KOKB     | -0.95±0.02 | 1.73±0.10  | -0.83±0.02 | 1.10±0.06  | -1.07±0.02 | 12.10±0.69 |
| KOSG     | -0.73±0.02 | 0.51±0.03  | -1.02±0.02 | 0.66±0.04  | -0.68±0.02 | 6.83±0.39  |
| KOUR     | -1.13±0.02 | 1.74±0.10  | -0.96±0.02 | 1.88±0.11  | -0.79±0.02 | 30.04±1.73 |
| KUNM     | -0.84±0.02 | 1.05±0.06  | -0.94±0.02 | 1.06±0.06  | -1.14±0.02 | 8.79±0.53  |
| KYW1     | -1.01±0.02 | 2.25±0.14  | -0.84±0.02 | 1.35±0.08  | -0.62±0.02 | 9.16±0.56  |
| LAGO     | -0.59±0.02 | 1.33±0.10  | -0.82±0.02 | 0.93±0.07  | -0.57±0.02 | 4.33±0.31  |
| LAMA     | -0.81±0.02 | 0.64±0.04  | -0.94±0.02 | 0.87±0.05  | -0.80±0.02 | 10.24±0.59 |
| LAMP     | -0.64±0.02 | 0.63±0.04  | -0.74±0.02 | 0.79±0.05  | -0.64±0.02 | 6.64±0.43  |
| LAUT     | -0.67±0.02 | 1.53±0.11  | -0.90±0.02 | 1.60±0.12  | -0.71±0.02 | 12.78±0.94 |
| LEBA     | -0.64±0.02 | 1.34±0.10  | -0.55±0.02 | 1.60±0.12  | -0.74±0.02 | 8.80±0.64  |
| LHAS     | -0.99±0.02 | 1.26±0.08  | -0.96±0.02 | 1.45±0.09  | -0.95±0.02 | 6.49±0.42  |
| LHAZ     | -1.06±0.02 | 0.84±0.05  | -1.02±0.02 | 1.32±0.08  | -0.90±0.02 | 5.14±0.33  |
| LPGS     | -0.72±0.02 | 0.79±0.05  | -0.91±0.02 | 1.27±0.07  | -0.62±0.02 | 11.74±0.68 |
| LROC     | -0.45±0.02 | 0.60±0.05  | -0.56±0.02 | 0.69±0.05  | -0.56±0.02 | 4.73±0.36  |
| MADR     | -0.97±0.02 | 5.85±0.34  | -0.81±0.02 | 4.78±0.28  | -0.90±0.02 | 12.10±0.71 |
| MAG0     | -1.23±0.02 | 1.14±0.08  | -0.90±0.02 | 1.80±0.13  | -0.69±0.02 | 6.39±0.44  |
| MALI     | -0.84±0.02 | 3.97±0.23  | -0.87±0.02 | 2.19±0.13  | -0.88±0.02 | 23.26±1.35 |
| MALL     | -0.97±0.02 | 2.55±0.21  | -0.59±0.02 | 1.94±0.16  | -0.64±0.02 | 12.39±1.03 |
| MANA     | -0.67±0.02 | 1.10±0.08  | -0.75±0.02 | 1.70±0.12  | -0.88±0.02 | 9.01±0.61  |
| MAR6     | -0.87±0.02 | 0.51±0.03  | -0.89±0.02 | 0.65±0.04  | -0.72±0.02 | 9.03±0.55  |
| MARS     | -0.56±0.02 | 1.01±0.06  | -0.70±0.02 | 1.20±0.07  | -0.54±0.02 | 7.95±0.49  |
| MAS1     | -0.85±0.02 | 0.53±0.03  | -0.98±0.02 | 0.86±0.05  | -0.68±0.02 | 4.39±0.25  |
| MAT1     | -0.56±0.02 | 0.46±0.03  | -0.99±0.02 | 0.88±0.06  | -0.79±0.02 | 6.41±0.45  |
| MATE     | -0.87±0.02 | 0.42±0.02  | -0.84±0.02 | 0.74±0.04  | -0.66±0.02 | 5.13±0.29  |
| MAUI     | -0.98±0.02 | 1.07±0.07  | -1.04±0.02 | 1.03±0.06  | -0.93±0.02 | 5.03±0.31  |
| MAW1     | -0.92±0.02 | 0.62±0.04  | -0.90±0.02 | 0.79±0.04  | -0.76±0.02 | 6.36±0.36  |
| MCD1     | -0.82±0.02 | 0.94±0.08  | -0.92±0.02 | 2.07±0.17  | -0.85±0.02 | 8.41±0.71  |
| MCIL     | -0.70±0.02 | 0.97±0.08  | -0.65±0.02 | 1.33±0.11  | -0.74±0.02 | 7.85±0.64  |

Continuación Tabla 10.10

| Estación | Este       |            | Norte      |            | Vertical   |            |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|          | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ |
| MCM4     | -0.86±0.02 | 0.58±0.03  | -0.91±0.02 | 0.69±0.04  | -1.04±0.02 | 19.25±1.08 |
| MCN1     | -0.62±0.02 | 1.61±0.12  | -0.57±0.02 | 2.13±0.15  | -0.28±0.02 | 13.35±0.96 |
| MDO1     | -0.76±0.02 | 0.52±0.03  | -0.65±0.02 | 0.75±0.04  | -0.73±0.02 | 7.20±0.40  |
| MDVJ     | -0.96±0.02 | 0.73±0.06  | -0.91±0.02 | 1.09±0.08  | -0.69±0.02 | 17.95±1.37 |
| METS     | -0.81±0.02 | 0.68±0.04  | -0.62±0.02 | 1.15±0.06  | -0.63±0.02 | 9.86±0.55  |
| METZ     | -0.66±0.02 | 2.01±0.14  | -0.41±0.02 | 1.52±0.11  | -0.69±0.02 | 12.87±0.90 |
| MIZU     | -0.68±0.02 | 1.75±0.13  | -0.72±0.02 | 2.12±0.16  | -0.57±0.02 | 9.80±0.74  |
| MKEA     | -0.89±0.02 | 0.86±0.05  | -0.73±0.02 | 0.97±0.05  | -0.92±0.02 | 5.58±0.32  |
| MLF1     | -0.71±0.02 | 1.85±0.11  | -0.83±0.02 | 1.93±0.12  | -0.95±0.02 | 14.10±0.86 |
| MOB1     | -0.85±0.02 | 1.31±0.07  | -0.80±0.02 | 1.55±0.09  | -0.84±0.02 | 8.20±0.46  |
| MOBN     | -0.66±0.02 | 1.26±0.09  | -1.04±0.02 | 1.74±0.12  | -0.69±0.02 | 25.15±1.76 |
| MONP     | -0.71±0.02 | 0.73±0.04  | -0.74±0.02 | 0.75±0.04  | -0.95±0.02 | 5.83±0.33  |
| MQZG     | -0.74±0.02 | 1.05±0.07  | -0.95±0.02 | 1.20±0.08  | -0.67±0.02 | 10.63±0.70 |
| MTJO     | -0.50±0.02 | 0.53±0.04  | -0.93±0.02 | 0.74±0.05  | -0.84±0.02 | 5.32±0.38  |
| MTKA     | -1.29±0.02 | 1.46±0.09  | -1.03±0.02 | 1.66±0.11  | -1.01±0.02 | 11.95±0.77 |
| NAIN     | -0.48±0.02 | 0.65±0.05  | -0.79±0.02 | 0.84±0.07  | -0.64±0.02 | 7.24±0.57  |
| NANO     | -0.87±0.02 | 0.58±0.03  | -0.97±0.02 | 0.88±0.05  | -0.89±0.02 | 5.97±0.34  |
| NEAH     | -0.81±0.02 | 1.33±0.08  | -0.87±0.02 | 1.06±0.06  | -0.87±0.02 | 8.83±0.51  |
| NEWL     | -0.84±0.02 | 1.59±0.11  | -0.79±0.02 | 1.55±0.11  | -0.64±0.02 | 12.38±0.87 |
| NEWP     | -0.89±0.02 | 1.24±0.08  | -0.87±0.02 | 0.89±0.06  | -0.86±0.02 | 8.82±0.57  |
| NICO     | -0.93±0.02 | 1.01±0.06  | -0.87±0.02 | 1.31±0.08  | -0.72±0.02 | 7.86±0.49  |
| NISU     | -0.48±0.02 | 0.49±0.05  | -0.77±0.02 | 0.58±0.06  | -0.86±0.02 | 6.84±0.64  |
| NKLG     | -0.56±0.02 | 0.65±0.04  | -0.93±0.02 | 1.22±0.08  | -0.86±0.02 | 5.63±0.37  |
| NLIB     | -0.54±0.02 | 0.49±0.03  | -0.82±0.02 | 0.76±0.04  | -0.70±0.02 | 11.31±0.63 |
| NNOR     | -1.44±0.02 | 0.57±0.04  | -0.79±0.02 | 0.96±0.07  | -0.87±0.02 | 5.30±0.40  |
| NOT1     | -0.83±0.02 | 0.66±0.04  | -0.64±0.02 | 0.75±0.05  | -0.60±0.02 | 5.14±0.34  |
| NOUM     | -1.00±0.02 | 0.89±0.06  | -0.90±0.02 | 1.13±0.07  | -0.54±0.02 | 6.26±0.41  |
| NOVJ     | -1.09±0.02 | 0.90±0.09  | -1.26±0.02 | 1.43±0.13  | -1.12±0.02 | 22.28±2.11 |
| NPLD     | -0.70±0.02 | 0.48±0.04  | -0.71±0.01 | 0.74±0.06  | -0.62±0.02 | 5.16±0.40  |
| NPRI     | -0.49±0.02 | 1.08±0.08  | -0.37±0.02 | 0.84±0.06  | -0.71±0.02 | 6.81±0.48  |
| NRC1     | -0.86±0.02 | 0.77±0.04  | -0.71±0.02 | 1.76±0.10  | -0.80±0.02 | 8.62±0.49  |
| NRIL     | -0.53±0.02 | 0.43±0.03  | -0.75±0.02 | 0.66±0.04  | -0.57±0.02 | 15.49±1.06 |
| NSSS     | -0.53±0.02 | 0.41±0.03  | -0.98±0.02 | 1.28±0.09  | -1.04±0.02 | 4.58±0.34  |
| NTUS     | -0.56±0.02 | 2.70±0.17  | -0.66±0.02 | 1.78±0.11  | -0.70±0.02 | 13.94±0.89 |
| NVSK     | -1.03±0.02 | 1.62±0.11  | -1.05±0.02 | 2.29±0.16  | -0.68±0.02 | 35.02±2.48 |
| NYA1     | -0.72±0.02 | 0.42±0.02  | -0.90±0.02 | 0.44±0.03  | -0.74±0.02 | 8.27±0.49  |

Continuación Tabla 10.10

| Estación | Este       |            | Norte      |            | Vertical   |            |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|          | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ |
| NYAL     | -1.05±0.02 | 0.36±0.02  | -1.08±0.02 | 0.48±0.03  | -0.77±0.02 | 10.83±0.62 |
| OBE2     | -0.60±0.02 | 1.20±0.09  | -0.67±0.02 | 0.99±0.08  | -0.66±0.02 | 8.20±0.64  |
| ONSA     | -0.55±0.02 | 0.53±0.03  | -0.93±0.02 | 0.50±0.03  | -0.69±0.02 | 7.17±0.40  |
| OPMT     | -0.62±0.02 | 0.82±0.06  | -1.06±0.02 | 0.75±0.05  | -1.23±0.02 | 8.61±0.62  |
| ORID     | -0.90±0.01 | 1.18±0.09  | -0.72±0.01 | 1.66±0.12  | -0.67±0.02 | 9.92±0.74  |
| OSN1     | -1.02±0.02 | 0.49±0.03  | -1.22±0.02 | 0.86±0.05  | -0.86±0.02 | 7.06±0.45  |
| OUS2     | -0.12±0.02 | 1.19±0.09  | -0.72±0.02 | 1.15±0.08  | -0.73±0.02 | 5.82±0.42  |
| OUSD     | -0.93±0.02 | 1.17±0.07  | -0.75±0.02 | 1.22±0.07  | -0.78±0.02 | 7.81±0.47  |
| PADO     | -0.64±0.02 | 1.92±0.14  | -0.74±0.02 | 1.25±0.09  | -1.04±0.02 | 6.83±0.51  |
| PALM     | -0.74±0.02 | 0.59±0.04  | -0.94±0.02 | 1.42±0.09  | -0.56±0.02 | 9.93±0.60  |
| PARA     | -1.02±0.02 | 1.11±0.08  | -1.09±0.02 | 1.76±0.12  | -1.02±0.02 | 8.21±0.58  |
| PARC     | -0.59±0.02 | 2.15±0.14  | -0.94±0.02 | 1.97±0.13  | -0.24±0.02 | 17.08±1.13 |
| PDEL     | -0.66±0.02 | 0.50±0.03  | -0.39±0.02 | 1.24±0.08  | -0.39±0.02 | 7.64±0.50  |
| PENC     | -1.13±0.02 | 0.69±0.04  | -1.03±0.02 | 0.87±0.05  | -0.90±0.02 | 10.53±0.59 |
| PERT     | -0.86±0.02 | 0.65±0.04  | -0.95±0.02 | 0.83±0.05  | -0.92±0.02 | 6.09±0.35  |
| PETP     | -1.17±0.01 | 1.80±0.11  | -1.14±0.02 | 1.51±0.09  | -0.98±0.01 | 13.18±0.80 |
| PETS     | -0.92±0.02 | 0.65±0.06  | -1.00±0.01 | 0.74±0.07  | -0.94±0.02 | 6.81±0.62  |
| PGC5     | -1.16±0.02 | 1.39±0.09  | -1.26±0.02 | 1.07±0.07  | -1.13±0.02 | 7.98±0.54  |
| PIE1     | -0.81±0.02 | 0.51±0.03  | -0.66±0.02 | 0.68±0.04  | -0.97±0.02 | 4.28±0.24  |
| PIMO     | -0.80±0.02 | 1.75±0.11  | -0.83±0.02 | 1.68±0.11  | -0.68±0.02 | 24.81±1.61 |
| PIN1     | -0.42±0.02 | 2.91±0.16  | -0.67±0.02 | 2.06±0.12  | -0.52±0.02 | 20.94±1.19 |
| PLO3     | -1.11±0.02 | 0.92±0.07  | -1.15±0.02 | 1.39±0.10  | -0.94±0.02 | 4.86±0.36  |
| POL2     | -1.05±0.01 | 0.73±0.04  | -1.10±0.02 | 1.28±0.07  | -0.88±0.02 | 9.69±0.56  |
| POLV     | -0.93±0.02 | 0.38±0.03  | -0.95±0.02 | 0.83±0.06  | -0.84±0.02 | 11.39±0.79 |
| POTS     | -0.86±0.02 | 0.37±0.02  | -1.05±0.02 | 0.62±0.03  | -0.85±0.02 | 8.16±0.45  |
| PRDS     | -1.11±0.02 | 0.70±0.04  | -1.21±0.02 | 0.85±0.05  | -0.70±0.02 | 9.62±0.57  |
| PRE1     | -1.05±0.02 | 0.81±0.05  | -1.23±0.02 | 1.60±0.10  | -0.97±0.02 | 5.81±0.37  |
| PSU1     | -0.69±0.02 | 1.00±0.06  | -0.84±0.02 | 1.01±0.06  | -0.58±0.02 | 10.71±0.64 |
| PTBB     | -0.40±0.02 | 0.43±0.03  | -1.00±0.02 | 0.64±0.04  | -1.08±0.02 | 8.07±0.52  |
| PUC1     | -1.05±0.02 | 0.80±0.06  | -0.57±0.02 | 1.14±0.08  | -0.84±0.02 | 8.26±0.61  |
| PUR3     | -0.97±0.02 | 2.84±0.18  | -0.86±0.02 | 2.72±0.17  | -1.15±0.02 | 14.24±0.90 |
| QAQ1     | -1.02±0.02 | 0.22±0.02  | -0.68±0.02 | 0.56±0.04  | -0.95±0.02 | 4.64±0.34  |
| QUI2     | -1.15±0.02 | 0.68±0.04  | -1.00±0.02 | 1.14±0.07  | -1.22±0.02 | 6.00±0.39  |
| QUIN     | -0.94±0.02 | 2.43±0.14  | -1.09±0.02 | 2.16±0.13  | -0.89±0.02 | 12.31±0.72 |
| RABT     | -1.56±0.02 | 0.46±0.03  | -0.84±0.02 | 0.72±0.05  | -0.96±0.02 | 3.85±0.25  |
| RAMO     | -0.79±0.02 | 1.02±0.06  | -0.84±0.02 | 0.95±0.06  | -0.95±0.02 | 5.45±0.33  |



Continuación Tabla 10.10

| Estación | Este       |            | Norte      |            | Vertical   |            |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|          | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ |
| RESO     | -1.29±0.02 | 2.92±0.22  | -1.28±0.02 | 1.52±0.12  | -0.75±0.02 | 10.20±0.78 |
| REUN     | -1.07±0.02 | 3.53±0.24  | -1.06±0.02 | 2.99±0.20  | -0.85±0.02 | 26.70±1.82 |
| REYK     | -1.02±0.02 | 0.50±0.03  | -0.85±0.02 | 0.65±0.04  | -0.83±0.02 | 8.55±0.49  |
| REYZ     | -0.97±0.02 | 1.59±0.11  | -1.10±0.02 | 1.03±0.07  | -1.09±0.02 | 10.76±0.75 |
| RIGA     | -0.76±0.02 | 0.79±0.05  | -0.79±0.02 | 0.83±0.05  | -0.71±0.02 | 10.78±0.66 |
| RIOG     | -0.92±0.02 | 0.58±0.04  | -0.91±0.02 | 1.25±0.09  | -0.79±0.02 | 12.25±0.83 |
| SAMO     | -0.56±0.02 | 5.45±0.40  | -0.62±0.02 | 2.10±0.15  | -0.46±0.02 | 22.03±1.61 |
| SANT     | -1.08±0.02 | 1.30±0.07  | -1.14±0.02 | 1.53±0.09  | -0.82±0.02 | 8.32±0.46  |
| SCH2     | -0.72±0.02 | 1.16±0.07  | -0.68±0.02 | 1.71±0.10  | -0.72±0.02 | 9.83±0.59  |
| SCOB     | -1.00±0.02 | 1.48±0.20  | 0.22±0.02  | 0.68±0.10  | -0.66±0.02 | 10.18±1.45 |
| SCUB     | -0.79±0.02 | 1.12±0.07  | -0.67±0.02 | 1.77±0.11  | -0.50±0.02 | 14.99±0.96 |
| SEAT     | -1.08±0.02 | 0.97±0.06  | -1.04±0.02 | 0.88±0.05  | -0.85±0.02 | 6.75±0.39  |
| SELE     | -0.95±0.02 | 1.18±0.07  | -0.90±0.02 | 1.31±0.07  | -0.89±0.02 | 11.90±0.67 |
| SFDM     | -0.41±0.02 | 0.93±0.07  | -1.13±0.02 | 1.27±0.09  | -1.02±0.02 | 13.06±0.90 |
| SFER     | -1.18±0.02 | 0.83±0.05  | -0.79±0.02 | 0.83±0.05  | -0.87±0.02 | 16.26±0.91 |
| SHAO     | -1.15±0.01 | 1.05±0.07  | -0.88±0.02 | 1.38±0.09  | -0.61±0.02 | 11.39±0.72 |
| SHEE     | -0.64±0.02 | 1.96±0.13  | -0.51±0.02 | 2.31±0.15  | -0.62±0.02 | 11.87±0.77 |
| SIO3     | -0.76±0.02 | 0.63±0.04  | -1.18±0.02 | 0.78±0.04  | -0.95±0.02 | 9.06±0.51  |
| SJDV     | -0.51±0.02 | 1.26±0.08  | -0.76±0.02 | 0.78±0.05  | -0.59±0.02 | 7.04±0.45  |
| SNI1     | -0.76±0.02 | 0.76±0.04  | -0.83±0.02 | 0.93±0.05  | -0.93±0.02 | 7.24±0.41  |
| SOFI     | -0.66±0.02 | 2.19±0.13  | -0.46±0.02 | 1.34±0.08  | -0.66±0.02 | 11.41±0.66 |
| SOL1     | -0.86±0.02 | 0.51±0.03  | -0.72±0.02 | 0.90±0.06  | -0.61±0.02 | 8.26±0.51  |
| SPK1     | -0.93±0.02 | 1.33±0.08  | -0.71±0.02 | 1.17±0.07  | -1.11±0.02 | 8.56±0.48  |
| SPT0     | -0.58±0.02 | 0.53±0.04  | -0.64±0.02 | 0.57±0.04  | -0.88±0.02 | 8.06±0.57  |
| STAV     | -0.42±0.02 | 1.07±0.08  | -0.97±0.02 | 0.73±0.05  | -0.92±0.02 | 9.26±0.67  |
| STJO     | -0.41±0.02 | 0.73±0.04  | -0.56±0.02 | 1.09±0.06  | -0.56±0.02 | 7.11±0.40  |
| STR1     | -0.04±0.02 | 1.37±0.09  | -1.05±0.02 | 0.45±0.03  | -0.79±0.02 | 6.18±0.40  |
| SULP     | -0.46±0.02 | 0.75±0.05  | -1.07±0.02 | 0.79±0.06  | -0.67±0.02 | 9.81±0.70  |
| SUM1     | -1.21±0.02 | 1.24±0.09  | -1.12±0.02 | 1.45±0.11  | -0.79±0.02 | 8.78±0.66  |
| SUTH     | -0.68±0.02 | 0.67±0.04  | -0.89±0.02 | 1.00±0.06  | -0.82±0.02 | 3.92±0.24  |
| SUTM     | -0.64±0.02 | 0.61±0.05  | -1.13±0.02 | 1.27±0.09  | -0.80±0.02 | 3.89±0.29  |
| SUWN     | -1.04±0.02 | 0.62±0.04  | -0.70±0.02 | 0.92±0.05  | -0.81±0.02 | 8.09±0.48  |
| SYDN     | -0.88±0.02 | 0.61±0.06  | -0.90±0.02 | 0.40±0.04  | -0.34±0.02 | 4.04±0.38  |
| SYOG     | -1.11±0.02 | 0.85±0.05  | -0.94±0.02 | 1.07±0.06  | -1.09±0.02 | 11.81±0.66 |
| TAH1     | -0.65±0.02 | 1.58±0.11  | -0.80±0.02 | 1.49±0.10  | -0.73±0.02 | 14.59±0.99 |
| TEHN     | -0.93±0.02 | 0.63±0.06  | -1.12±0.02 | 0.61±0.06  | -0.80±0.02 | 5.35±0.50  |

Continuación Tabla 10.10

| Estación | Este       |            | Norte      |            | Vertical   |            |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|          | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ |
| TELA     | -1.22±0.02 | 1.05±0.06  | -1.29±0.02 | 0.69±0.04  | -1.21±0.02 | 7.19±0.42  |
| THTI     | -1.22±0.02 | 2.44±0.15  | -0.65±0.02 | 1.78±0.11  | -0.51±0.02 | 16.21±0.99 |
| THU3     | -0.88±0.02 | 0.27±0.02  | -0.74±0.02 | 0.35±0.02  | -0.90±0.02 | 6.89±0.42  |
| TIDB     | -0.49±0.02 | 0.94±0.05  | -0.93±0.02 | 0.80±0.04  | -0.75±0.02 | 4.89±0.27  |
| TIXI     | -0.91±0.02 | 0.63±0.04  | -0.93±0.02 | 1.10±0.07  | -0.69±0.02 | 13.40±0.83 |
| TLSE     | -0.58±0.02 | 0.25±0.02  | -0.73±0.02 | 0.65±0.04  | -0.79±0.02 | 4.56±0.31  |
| TNML     | -1.09±0.02 | 1.27±0.10  | -0.90±0.02 | 1.79±0.13  | -0.61±0.02 | 8.36±0.63  |
| TORP     | -0.76±0.02 | 0.75±0.04  | -1.09±0.02 | 0.81±0.05  | -1.06±0.02 | 7.45±0.42  |
| TOW2     | -0.91±0.02 | 0.98±0.06  | -0.49±0.02 | 1.24±0.07  | -0.59±0.02 | 11.01±0.62 |
| TRAB     | -0.61±0.02 | 0.41±0.03  | -0.79±0.02 | 0.94±0.07  | -0.71±0.02 | 8.06±0.57  |
| TRO1     | -0.66±0.02 | 1.87±0.11  | -0.58±0.02 | 1.42±0.08  | -0.87±0.02 | 9.92±0.58  |
| TROM     | -0.58±0.02 | 1.47±0.09  | -0.64±0.02 | 2.47±0.15  | -0.92±0.02 | 8.42±0.52  |
| TSKB     | -1.09±0.02 | 0.79±0.04  | -1.11±0.02 | 1.13±0.06  | -0.69±0.02 | 6.50±0.36  |
| TUCU     | -0.77±0.02 | 1.29±0.09  | -1.08±0.02 | 1.71±0.11  | -0.93±0.02 | 11.03±0.73 |
| TUVA     | -0.74±0.02 | 4.24±0.32  | -0.64±0.02 | 1.77±0.13  | -0.50±0.02 | 19.86±1.50 |
| TWTF     | -0.60±0.02 | 2.06±0.16  | -1.07±0.02 | 1.84±0.14  | -0.56±0.02 | 9.54±0.72  |
| UCLU     | -0.86±0.02 | 1.07±0.06  | -0.87±0.02 | 0.88±0.05  | -0.92±0.02 | 6.81±0.38  |
| UEPP     | -0.85±0.02 | 1.17±0.09  | -0.86±0.02 | 2.32±0.18  | -0.92±0.02 | 10.62±0.83 |
| ULAB     | -0.82±0.02 | 0.94±0.07  | -0.59±0.02 | 1.22±0.09  | -0.39±0.02 | 9.97±0.70  |
| UNIV     | -0.68±0.02 | 1.26±0.09  | -0.49±0.02 | 1.08±0.08  | -0.85±0.02 | 9.52±0.69  |
| UNSA     | -1.06±0.02 | 0.85±0.06  | -0.93±0.02 | 1.46±0.10  | -1.22±0.02 | 9.55±0.64  |
| UPO1     | -0.90±0.01 | 3.28±0.20  | -0.99±0.02 | 4.21±0.26  | -0.73±0.02 | 21.31±1.30 |
| URUM     | -1.09±0.02 | 0.99±0.06  | -1.05±0.02 | 1.62±0.10  | -0.82±0.02 | 10.51±0.66 |
| USNA     | -0.88±0.02 | 2.38±0.16  | -0.45±0.02 | 2.58±0.17  | -0.89±0.02 | 12.40±0.84 |
| USNO     | -0.85±0.02 | 0.45±0.03  | -0.61±0.02 | 0.79±0.04  | -0.65±0.02 | 6.78±0.38  |
| USUD     | -0.83±0.02 | 2.04±0.12  | -0.67±0.02 | 2.46±0.14  | -0.58±0.02 | 19.58±1.12 |
| UZHL     | -0.73±0.02 | 0.75±0.05  | -0.74±0.02 | 1.27±0.08  | -0.67±0.02 | 13.23±0.83 |
| VAAS     | -0.67±0.02 | 0.50±0.03  | -0.87±0.02 | 0.66±0.04  | -0.85±0.02 | 27.58±1.71 |
| VANU     | -1.12±0.02 | 1.48±0.12  | -1.10±0.02 | 1.57±0.12  | -0.75±0.02 | 11.54±0.90 |
| VBCA     | -1.08±0.02 | 4.51±0.37  | -0.89±0.02 | 2.27±0.19  | -0.60±0.02 | 17.96±1.47 |
| VCIO     | -0.96±0.02 | 1.82±0.10  | -1.15±0.02 | 1.63±0.09  | -0.79±0.02 | 10.18±0.57 |
| VENE     | -1.03±0.02 | 0.59±0.04  | -1.13±0.02 | 1.44±0.09  | -1.25±0.02 | 30.39±1.89 |
| VESL     | -0.76±0.02 | 0.63±0.04  | -0.92±0.02 | 0.76±0.05  | -0.97±0.02 | 12.74±0.83 |
| VIL0     | -0.81±0.02 | 0.64±0.04  | -0.92±0.02 | 0.88±0.06  | -0.41±0.02 | 14.29±0.96 |
| VILL     | -0.91±0.02 | 0.53±0.03  | -0.96±0.02 | 0.72±0.04  | -0.98±0.02 | 11.18±0.63 |
| VNDP     | -0.58±0.02 | 1.33±0.08  | -0.45±0.02 | 1.75±0.10  | -0.64±0.02 | 11.58±0.68 |

Continuación Tabla 10.10

| Estación | Este       |            | Norte      |            | Vertical   |            |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|          | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ | $\alpha$   | $\sigma^2$ |
| VS0G     | -0.73±0.02 | 0.68±0.04  | -0.71±0.02 | 0.51±0.03  | -0.75±0.02 | 11.15±0.70 |
| VTIS     | -0.78±0.02 | 0.69±0.04  | -0.80±0.02 | 0.83±0.05  | -0.89±0.02 | 5.96±0.37  |
| WDC2     | -0.87±0.02 | 0.63±0.05  | -0.88±0.02 | 0.52±0.04  | -0.90±0.02 | 7.63±0.58  |
| WEL2     | -0.55±0.02 | 1.00±0.07  | -0.76±0.02 | 1.22±0.08  | -0.55±0.02 | 9.03±0.58  |
| WES2     | -0.93±0.02 | 0.74±0.04  | -0.63±0.02 | 0.96±0.05  | -0.71±0.02 | 9.58±0.55  |
| WGTT     | -0.66±0.01 | 2.13±0.13  | -0.57±0.02 | 1.37±0.08  | -0.76±0.02 | 13.44±0.83 |
| WGTT     | -0.92±0.01 | 1.47±0.10  | -0.93±0.02 | 1.13±0.07  | -0.77±0.02 | 14.11±0.93 |
| WHIT     | -0.67±0.02 | 1.35±0.08  | -0.74±0.02 | 2.61±0.16  | -0.80±0.02 | 12.12±0.72 |
| WILL     | -0.95±0.02 | 0.61±0.03  | -0.78±0.02 | 0.73±0.04  | -1.02±0.02 | 8.15±0.46  |
| WROC     | -0.66±0.02 | 0.55±0.03  | -0.70±0.02 | 0.68±0.04  | -1.17±0.02 | 9.24±0.54  |
| WSRT     | -0.75±0.02 | 0.37±0.02  | -0.89±0.02 | 0.57±0.03  | -0.98±0.02 | 5.96±0.34  |
| WTZA     | -1.04±0.02 | 0.39±0.02  | -1.10±0.02 | 0.66±0.04  | -1.00±0.02 | 7.54±0.45  |
| WTZR     | -0.73±0.02 | 0.64±0.04  | -1.00±0.02 | 0.96±0.05  | -0.77±0.02 | 7.39±0.41  |
| WTZZ     | -0.45±0.02 | 0.85±0.06  | -0.66±0.02 | 0.83±0.06  | -0.76±0.02 | 9.06±0.62  |
| WUHN     | -1.24±0.02 | 1.10±0.06  | -0.95±0.02 | 1.33±0.07  | -0.85±0.02 | 11.13±0.63 |
| YAR1     | -0.94±0.02 | 0.53±0.03  | -0.83±0.02 | 0.83±0.05  | -0.95±0.02 | 5.51±0.31  |
| YARR     | -0.91±0.02 | 0.99±0.07  | -0.96±0.02 | 0.82±0.06  | -0.78±0.02 | 10.91±0.80 |
| YEBE     | -0.89±0.02 | 0.42±0.03  | -0.82±0.02 | 0.68±0.05  | -0.75±0.02 | 3.79±0.26  |
| YELL     | -1.27±0.02 | 0.90±0.05  | -0.73±0.02 | 1.04±0.06  | -0.74±0.02 | 13.06±0.76 |
| YSSK     | -0.93±0.02 | 0.43±0.03  | -0.83±0.02 | 0.71±0.05  | -0.60±0.02 | 6.69±0.43  |
| ZECK     | -0.65±0.02 | 0.50±0.03  | -0.77±0.02 | 0.88±0.05  | -0.63±0.02 | 8.13±0.49  |
| ZIMM     | -0.64±0.02 | 0.66±0.04  | -1.11±0.02 | 0.88±0.05  | -1.13±0.02 | 6.24±0.35  |

## 10.4. Conclusiones

En este capítulo se ha llevado a cabo la construcción de un modelo funcional armónico y un modelo estocástico (para la componente de ruido) de un representativo conjunto de series temporales residuales de posiciones de estaciones GPS. Dichas estaciones contribuyen a la creación del ITRF2008.

Con respecto al contenido armónico, un elevado porcentaje de estaciones manifiestan un comportamiento periódico anual tanto en los desplazamientos horizontales como verticales. Sin embargo, ésta no es la única frecuencia ampliamente detectada. Armónicos próximos a periodos semianuales, trimestrales y de dos meses son

también significativos. No obstante, estas frecuencias se alejan en cierta medida de una periodicidad entera. Tal y como señalaron previamente Collilieux et al. (2007) y Ray et al. (2008) mediante un estudio de las series temporales que intervienen en el ITRF2005, los armónicos asociados al año draconítico<sup>1</sup> (1.04 *cpa*) son detectados en el análisis espectral de las series de posiciones de estaciones. Para poder apreciar este hecho se ha recalculado el histograma de frecuencias de la Figura 10.3 pero utilizando en esta ocasión una red más densa (en concreto cada barra tiene una amplitud de 0.02 *cpa*). Los resultados se muestran en la Figura 10.6, donde aparecen los grupos de frecuencia distinguidos hasta 6.5 *cpa*. A partir de esta gráfica se aprecia como los múltiplos de la frecuencia draconítica (hasta un factor de 6 unidades) se hacen presentes. La componente vertical es la única para la cual el periodo draconítico de 1.04 ciclos por año queda considerablemente opacado por el periodo anual natural (solar). No existe, por supuesto, una razón o motivo evidente por el que debamos esperar un movimiento de la corteza terrestre en estas frecuencias. Algunos autores como *Tregoning y Watson* han intentado recientemente explicar estos armónicos (ver *Tregoning and Watson, 2009*). A pesar de todo, el mecanismo por el cual estas señales se propagan en casi todos los productos de GPS no está todavía nada claro. Entender la causa de la aparición de estos picos de frecuencia es uno de los objetivos marcados por el IGS en los próximos años.

En cuanto a la componente de ruido, se concluye que el modelo de un único índice espectral que mejor la describe en cada una de las series temporales se caracteriza por un valor que oscila en las inmediaciones de -0.8 unidades. En definitiva, hablamos de la presencia de un ruido fraccional próximo al parpadeante como el tipo de ruido que domina las observaciones de GPS analizadas. La componente de desplazamiento vertical es aquella que presenta unos mayores valores estimados para la componente de covarianza. Por otra parte, los desplazamientos horizontales en dirección este tienen asignados, en general, menores estimaciones para la amplitud del ruido. En un futuro sería interesante establecer un análisis similar al descrito en este capítulo pero considerando la componente de ruido como suma de un ruido parpadeante y otro blanco, de índices espectrales -1 y 0, respectivamente.

---

<sup>1</sup>Un año draconítico equivale al tiempo requerido por la órbita GPS en volver a su orientación inercial con respecto al sol. Este tiempo es de 351.4 días, que se corresponde con una frecuencia de 1.04 ciclos por año

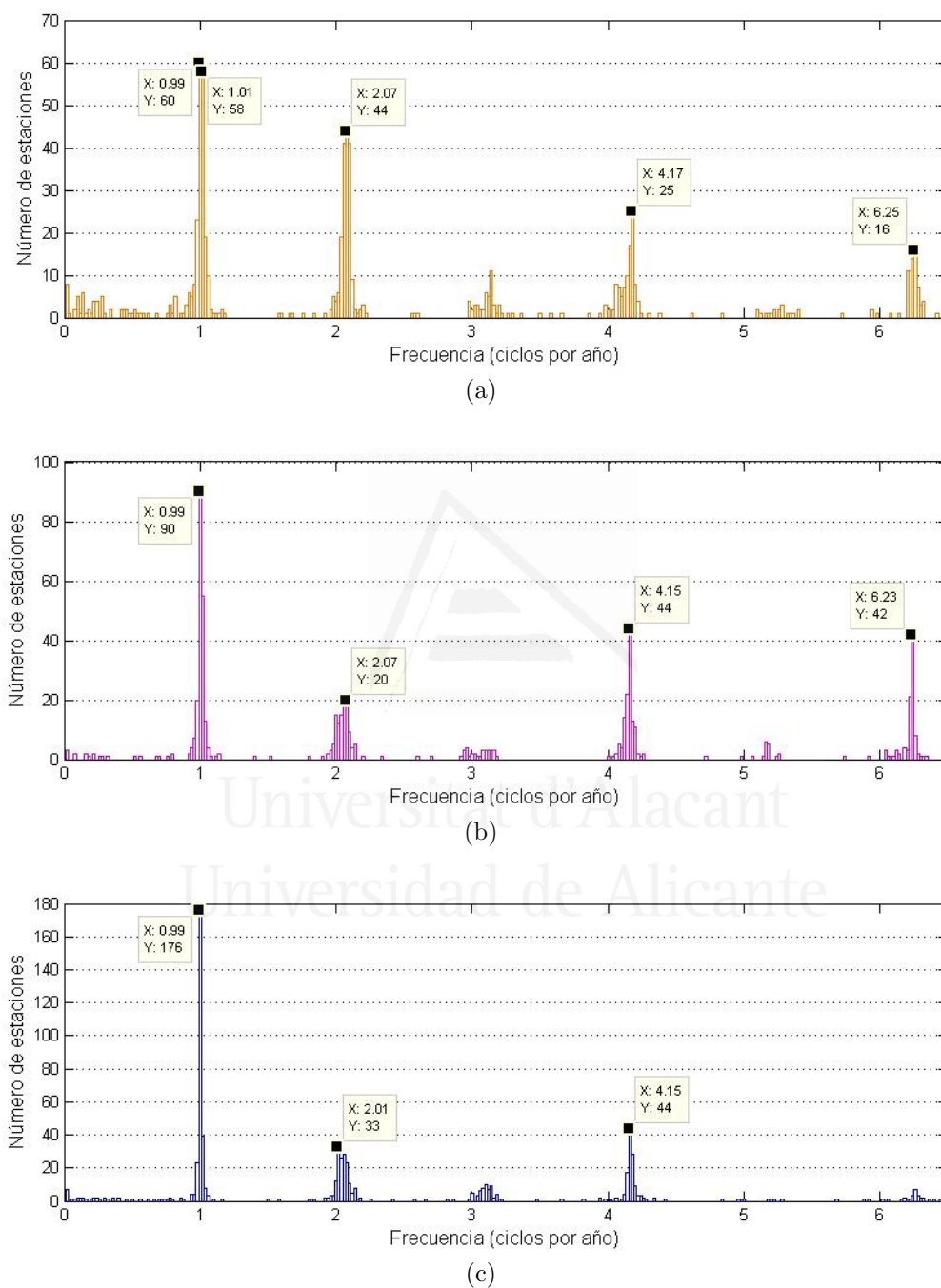


Figura 10.6: Histogramas del contenido armónico para las series residuales de posiciones de estaciones GPS. (a) Componente este, (b) componente norte y (c) componente vertical. La amplitud de cada barra es de 0.02 ciclos por frecuencia.

---

# Capítulo 11

## Conclusiones y perspectivas

Con este capítulo se pretende dar a conocer aquellos objetivos y aspectos que se han alcanzado durante la realización de este trabajo de investigación. Asimismo, se trazan unas breves líneas sobre la dirección que quiere seguirse en el futuro más próximo con relación al estudio descrito en esta memoria.

### 11.1. Conclusiones

El análisis espectral de series temporales es una importante herramienta para extraer información sobre el comportamiento periódico de ciertos fenómenos físicos, geofísicos, astronómicos, químicos, biológicos, etc. Con la finalidad de crear modelos matemáticos basados en las propiedades armónicas de los fenómenos sometidos a estudio, se llevó a cabo una ardua tarea centrada en el desarrollo de un completo *software* especializado en el análisis armónico no lineal de series temporales. Dada su capacidad de computación algebraica y matricial, se optó por utilizar el lenguaje de programación MATLAB. La base de todas y cada una de las rutinas principales implementadas reside en el análisis espectral mediante la utilización del periodograma de Lomb y el periodograma extendido. Gracias a este conjunto de programas pueden ser fácilmente analizadas una amplia gama de series temporales (desde series escalares homogéneas hasta series vectoriales heterogéneas con una componente de ruido de color). Todas las rutinas creadas se han agrupado, de forma básica, en cinco paquetes claramente diferenciables atendiendo a su funcionalidad:

**Paquete NLHA:** Utilizando las rutinas incluidas en este paquete, uno puede crear modelos que permitan al usuario conocer el contenido armónico y la tendencia de una serie temporal dada ya sea homogénea o heterogénea, escalar o vectorial e impregnada por una componente de ruido blanco. En caso de que el ruido inmerso en la serie sea de color, el modelo armónico que se obtiene podría contener líneas espectrales que no hacen referencia al fenómeno recabado en las observaciones sino a la propia componente de ruido. Dicho paquete está destinado a series temporales cuyas observaciones poseen, todas, el mismo peso o importancia. Siempre que sea posible se evita la inversión directa de matrices, por lo que pueden someterse a estudio series temporales de notable longitud. Los modelos armónicos son construidos buscando simplicidad y considerando la posibilidad de respuesta del sistema a tener la misma frecuencia como un acto de excitación derivado de él debido a la no linealidad. Los modelos que se construyen están formados por una tendencia polinomial (de hasta grado 2) y una suma finita de términos de Fourier y términos seculares mixtos. El usuario puede modificar ciertos parámetros a su voluntad para llevar a cabo un análisis espectral determinado: puede ordenar un análisis armónico donde las líneas espectrales se extraen de una en una a partir del periodograma de los residuos generados, o incluso puede proporcionar el contenido armónico deseado y realizar un ajuste a partir del mismo. Todas las rutinas incluidas están dotadas de un amplio número de argumentos para poder llevar a cabo un completo y específico estudio de una determinada serie temporal. Además, proporciona la incertidumbre asociada a las estimaciones de los parámetros incluidos en el modelo. Por otro lado, el usuario puede disponer de una idea visual del modelo y el ajuste realizado gracias a las múltiples ventanas gráficas que este paquete proporciona.

**Paquete WNLHA:** Consiste en la ampliación lógica del paquete NLHA. Posee la misma funcionalidad aunque contiene diversas ventajas de las cuales carece su predecesor. Así, por ejemplo, existe la posibilidad de utilizar más de un criterio de parada algorítmica y, si se desea, puede llevarse a cabo un filtrado final de frecuencias basado en el valor del SNR para cada línea espectral. Por lo que respecta al periodograma, el usuario puede acelerar su cálculo mediante

la estimación de un tamaño de paso para el dominio de frecuencias de tal forma que sea lo suficientemente grande como para detectar todas las líneas espectrales que explican el fenómeno (ver sección 9.6.1). Sin embargo, la mejora más importante que incluye este paquete con respecto a NLHA es que el usuario tiene la oportunidad de asignar pesos a las observaciones contenidas en la serie temporal que desea estudiar. De esta forma, en el análisis, uno puede otorgar mayor importancia a aquellas observaciones que se encuentren asociadas a un menor error. Este paquete también proporciona las incertidumbres ligadas a cada parámetro estimado además de representar gráficamente el modelo y otras relaciones establecidas, si se desea.

**Paquete PREDWNLHA:** Paquete habilitado para el estudio de la capacidad predictiva de los modelos de series temporales. El alcance analítico es idéntico al descrito en el paquete WNLHA. No obstante, PREDWNLHA incluye rutinas que permiten realizar y comparar un modelo con el comportamiento futuro de la serie temporal (si se dispone del mismo).

**Paquete FFAST:** Mediante las rutinas incluidas en este paquete, uno puede realizar un análisis espectral según el algoritmo FFAST detallado en el capítulo 9 y que contempla, además de un modelo armónico para la serie temporal espectral, la estimación de un modelo estocástico para la componente de ruido. Este paquete permite considerar modelos estocásticos fruto de la combinación de varios tipos de ruido con índices espectrales distintos, aunque no asegura la no negatividad de las estimaciones para las componentes de covarianza. Debido a la inversión de ciertas matrices durante el código implementado, la longitud permitida para las series temporales que pueden analizarse se ve reducida en comparación con la tolerada en los paquetes anteriores. Conserva los criterios de parada del paquete WNLHA y combina, como sabemos, los puntos más fuertes del método armónico no lineal de *W. Harada* y *T. Fukushima* (ver Harada, 2003; Harada and Fukushima, 2003) y el método LS-VCE de *A. R. Amiri-Simkooei* y *P. J. G. Teunissen* (ver, por ejemplo, Amiri-Simkooei, 2007, 2009; Amiri-Simkooei et al., 2007; Teunissen and Amiri-Simkooei, 2008a). Los periodogramas son calculados teniendo en cuenta la matriz de covarianza del ruido. Por lo que respecta al modelo estocástico, el usuario puede fijar (si lo



desea) el tipo de ruido a considerar en el análisis o si lo prefiere puede permitir al algoritmo seleccionar un único tipo de ruido a través de la estimación de su índice espectral (ver sección 9.9).

**Paquete RFHAST:** Es una modificación-ampliación del paquete FFAST. En ella se ha llevado a cabo una reparametrización exponencial para evitar estimaciones negativas de las componentes de varianza en los modelos estocásticos (ver sección 9.5.1).

Al mismo tiempo que se creaban estas rutinas, fueron analizadas series temporales de interés como los desplazamientos en longitud y oblicuidad del polo celeste (sección 4.1.4), las variaciones del geocentro debido a la redistribución de masa de agua sobre la superficie terrestre (sección 5.4), el exceso en la duración del día (sección 7.4), el flujo de agua continental (sección 6.5) y las posiciones de estaciones GPS (sección 10.4). Se obtuvieron modelos armónicos que explican cada uno de estos fenómenos en el dominio temporal considerado, permitiendo extraer conclusiones y observaciones sobre su comportamiento. No nos extenderemos en exceso volviendo a escribir las conclusiones que se extrajeron de las series temporales estudiadas ya que éstas aparecen detalladas al final de cada capítulo correspondiente. No obstante mencionaremos brevemente ciertos aspectos de algunas de ellas.

En la mayor parte de las series temporales analizadas se han detectado frecuencias fundamentales que van más allá de aquellas asociadas al periodo anual y semianual. Así por ejemplo, para los desplazamientos en longitud y oblicuidad del polo celeste se estimó la influencia de un periodo de 6549.53 días, que resultó ser de una transcendencia incluso mayor que la anual. Se apuntó hacia un origen relacionado directa o indirectamente con la libración lunar, aunque no se han encontrado evidencias concluyentes que lo corroboren. Además de este periodo de 17.9 años (aproximadamente), se detectaron armónicos asociados a periodos de 3276.08, 433.60 y 173.31 días. La procedencia de todas estas señales o líneas espectrales requiere de un estudio en profundidad que no hemos realizado ya que no formaba parte de los objetivos y pretensiones de esta tarea de investigación. Se hizo constancia de algunas similitudes con periodos cíclicos naturales conocidos que podrían ser la causa de éstas, pero en ningún momento nos hemos centrado en determinar la naturaleza o interpretar la

presencia de ellas en los modelos armónicos obtenidos. Sería por tanto interesante realizar un análisis o investigación más profunda basada en la búsqueda de los fenómenos causantes de cada una de las líneas espectrales detectadas.

Para las variaciones en el geocentro debido al almacenamiento de agua sobre la superficie, se extrajeron frecuencias ligadas a periodos bienales, otros de 3.5-3.8 años e incluso a largos periodos entre 10 y 17 años, aproximadamente. Algunos de estos armónicos fueron también detectados por otros autores como Huang et al. (1996), y pudimos corroborar que la mayor contribución en estos desplazamientos se realiza sobre el eje Y con una amplitud de aproximadamente 1 mm (tal como apuntaron con anterioridad Bouillé et al. (2000)).

Mediante el estudio del flujo de agua continental, obtuvimos dos modelos para una serie multidimensional cuyos parámetros físicos son el tiempo y el espacio. Así pues, para cada región de 1x1 grado sobre la superficie terrestre se dispone de un modelo de frecuencias prefijadas (anual, semianual y teranual) y otro cuyo contenido espectral se ha obtenido mediante el método armónico no lineal descrito en el capítulo 3. Estos modelos se estimaron para un determinado dominio temporal, guardando la última parte de las observaciones para un posterior estudio de su capacidad predictiva. Se observó que ambos modelos podrían considerarse predictores adecuados, si bien, uno resulta preferible al otro en determinadas zonas (ver sección 6.5).

Mencionaremos, finalmente, el estudio llevado a cabo sobre las posiciones de estaciones de GPS. Se analizaron hasta un total de 318 estaciones utilizando el paquete de rutinas FFAST. Para cada una de las estaciones se extrajeron hasta un máximo de 7 frecuencias fundamentales, desechando aquellas cuyo SNR resultaba ser menor que 3 unidades. Al mismo tiempo, en este análisis armónico, se consideró la estimación de un modelo estocástico para la componente de ruido. Se comprobó que un elevado porcentaje de estaciones manifiestan un comportamiento periódico anual tanto en los desplazamientos verticales como horizontales, aunque también destacan otras líneas espectrales como las asociadas a periodos semianuales, trimestrales e incluso bimestrales. No obstante, estas frecuencias no se corresponden con ciclos de valor entero, sino que presentan un pequeño desfase siendo, en realidad, múltiplos del llamado año draconítico (1.04 ciclos por año). Estos armónicos ya fueron detectados en otros estudios llevados a cabo por Collilieux et al. (2007) y Ray et al. (2008),

aunque su origen no es nada claro todavía. En cuanto a la componente de ruido, se concluyó que (para una gran parte de las estaciones) podía caracterizarse por un índice espectral fraccional de  $-0.8$  unidades, el cual presenta mayor amplitud en la componente vertical.

## 11.2. Perspectivas

A partir de los estudios y discusiones presentados en esta memoria, las perspectivas para futuros trabajos se orientan en dos direcciones o vertientes principales. En un primer plano se encontrarían aquellas tareas de investigación relacionadas directamente con el perfeccionamiento y creación de nuevas rutinas para el análisis de series temporales. Diversas mejoras podrían realizarse en este ámbito. Sería interesante, por ejemplo, la elaboración de una nueva versión del paquete FFAST y WNLHA donde la tendencia de una frecuencia a estar ligada a términos seculares mixtos pueda ser modificada durante el proceso de ajuste, si fuera necesario. Podría suceder que durante el proceso de optimización BFGS, una frecuencia ya extraída se vea notablemente alterada en detrimento de un mejor ajuste. En este caso, el carácter que indica si una frecuencia está asociada a términos seculares mixtos debería de modificarse en consecuencia. Otro aspecto a tratar y desarrollar consistiría en la creación de un algoritmo que permita la detección de los distintos tipos de ruido que pueden encontrarse en una serie temporal dada y no conformarnos con un ajuste mediante el uso de un único índice espectral o la previa fijación de un conjunto de estos índices. La mejora del tiempo de computación de las rutinas principales de cada paquete es otra de las pretensiones que deseamos abarcar en el futuro. Un punto adicional a desarrollar sería la modificación de los paquetes FFAST y RFAST para poder aplicarlos a series temporales de mayor longitud, para lo cual debería desarrollarse una implementación diferente que evite, en la medida de lo posible, la formulación matricial.

En un segundo plano, no menos importante que el primero, encontraríamos las aplicaciones de estas nuevas rutinas al estudio de importantes fenómenos físicos, geofísicos o de otra índole. Uno de los estudios que más interés suscita es aquel que hace referencia al análisis combinado de las posiciones de estaciones de GPS y

VLBI, a partir del cual podría obtenerse un modelo armónico común. Una vez determinado dicho modelo, o al mismo tiempo que se estima, sería posible caracterizar y comparar el tipo de ruido que afecta a cada una de las técnicas de observación consideradas. Por otro lado, sabemos que las series temporales que se han tratado a lo largo de esta memoria están en constante actualización gracias a las nuevas técnicas de observación y al avance tecnológico. Por tanto, es interesante seguir estudiando el comportamiento de estos fenómenos a medida que nuevos datos son añadidos. También podría ampliarse la tipología de series a estudiar, aplicando los paquetes y rutinas creadas mediante MATLAB a series de tipo económico, químico, biológico, médico, etc.

A continuación, se detallan algunas de estas perspectivas mencionadas incluyendo, si hubiera, los detalles de una primera indagación al problema planteado.

### **11.2.1. Frecuencia de transición. Ruido combinado**

Como ya se indicó en la sección 11.1, los paquetes de rutinas FFAST y RFAST realizan un análisis de series temporales proporcionando un modelo armónico para el fenómeno recogido y un modelo estocástico para el ruido inmerso en la serie que lo representa (ver capítulo 9). En ambos conjuntos de programas se contempla la posibilidad de estimar un modelo estocástico mediante la consideración de un único índice espectral (ver sección 9.3.1) o bien, mediante la combinación de varios de ellos. En este punto se presentan ciertos inconvenientes que pretendemos y deseamos resolver en un futuro próximo. Así pues, en caso de que el usuario opte por considerar una componente de ruido combinada, generada por varios índices espectrales, deberá introducir (él mismo) los valores de los índices deseados. No se ha desarrollado satisfactoriamente todavía una subrutina que permita detectar frecuencias de transición a partir de las cuales un ruido de determinado índice espectral pasa a transformarse en otro ruido de distinto índice. Independientemente de disponer o no de la posibilidad de estimar distintos índices espectrales, existen ciertas combinaciones de ruido para las cuales el algoritmo programado no es capaz de proporcionar una solución. Esto se debe básicamente a problemas de mal condicionamiento o escalamiento de las matrices que intervienen en el proceso. Así pues, para el estudio de las series de posiciones de estaciones GPS, la mayor parte de las veces que se considera una

componente de ruido como suma de un ruido blanco ( $\alpha = 0$ ) y un ruido parpadeante ( $\alpha = -1$ ), el proceso interno LS-VCE se detiene debido a que la matriz  $Q_y$  o la matriz  $G$  (ecuación (9.14)), cuya inversa proporciona la incertidumbre de las componentes de covarianza, resultan presentar una propiedad de mal condicionamiento tras cierto número de iteraciones. Hemos observado que esta situación se produce mayormente al combinar dos ruidos de índice espectral comprendidos entre  $0 \leq \alpha \leq -1$ . Si se considera una combinación de un ruido blanco y un paseo aleatorio, el algoritmo tiene más probabilidad de converger sin problemas, aunque no siempre. Lo mismo ocurre al combinar un ruido parpadeante y un paseo aleatorio. Hasta la fecha se han realizado diversas modificaciones en el código y en la forma de invertir estas matrices, pero sin éxito alguno. Actualmente se está contemplando la posibilidad de aproximar la función inversa mediante el llamado *método de eliminación* de Walz (1988), así como utilizar la matriz de covarianza de un ruido parpadeante empleada por diversos autores como Amiri-Simkooei et al. (2007), Zhang et al. (1997) y Mao et al. (1999). Otra posibilidad es que estas dificultades deriven de la longitud de las series temporales, ya que se han llegado a analizar algunas con mayor número de observaciones y ha permitido la estimación de un modelo estocástico combinado.

### 11.2.2. Análisis conjunto de series de posición GPS y VLBI

Una aplicación de las futuras rutinas a elaborar abarca el estudio de las series temporales de posiciones de las denominadas *Colocation Sites* (estaciones donde se encuentran establecidas más de una técnica geodésica). En concreto, se pretenden analizar aquéllas dotadas de observaciones GPS y VLBI. Sería interesante la construcción de un modelo único para cada estación (común y derivado a partir de las series temporales de GPS y VLBI) y que permita caracterizar de una forma más concisa el tipo de error al que se encuentran sometidas cada una de las estas técnicas de observación. Se construirían así modelos de la forma:

$$d(t)_{VLBI} = s(t) + b(t)_{VLBI} \quad (11.1)$$

$$d(t)_{GPS} = s(t) + b(t)_{GPS} \quad (11.2)$$

donde,  $s(t)$  sería el modelo funcional común a estimar y  $b(t)$  sería el ruido particular de cada tipo de técnica de observación. Esta componente de ruido estaría inicialmente formada por la suma de un ruido blanco y otro parpadeante.

Se ha creado ya una versión vectorial del método FHAST como primera aproximación al problema (paquete *FHAST-VEC*), no obstante es necesario solventar las dificultades mencionadas en la sección 11.2.1 para poder realizar el estudio. Como añadido, podría ser interesante establecer un análisis sobre las estimaciones de las amplitudes del ruido de cada técnica en función de la localización geográfica de la estación, indagando en busca de algún tipo de dependencia en latitud o longitud, por ejemplo.

### 11.2.3. Aceleración computacional

Otra de las pretensiones a alcanzar consiste en establecer una mejora en cuanto a tiempo de computación se refiere. El elevado coste computacional empleado por las rutinas en el análisis de ciertas series temporales depende de muchos factores: longitud de la serie, su carácter escalar o vectorial, la proximidad de los puntos semilla a la solución óptima dentro de cada subproceso de optimización, la inversión de matrices, etc. De entre todas ellas destaca el cómputo del periodograma de Lomb (y el periodograma extendido). Como sabemos, su cálculo se realiza sobre un dominio de frecuencias discreto de manera que cuanto más pequeño sea el tamaño de paso seleccionado, mejor será la aproximación del periodograma. Sin embargo, cuando el tamaño de paso es considerablemente pequeño y la longitud de la serie temporal es relativamente grande, el tiempo de computación del periodograma se incrementa. Por otro lado, este proceso de estimación del periodograma de Lomb forma parte de las iteraciones principales de los algoritmos descritos en los capítulos 3 y 9. Ello hace que el coste computacional de las rutinas programadas se dispare de forma considerable en determinados casos. Algunos autores como Mignard (2005) desarrollaron técnicas para acelerar el proceso de cálculo del periodograma buscando un tamaño de paso para el dominio de frecuencias lo suficientemente grande como para detectar todas las líneas espectrales que caracterizan a la serie temporal (ver sección 9.6.1). Sin embargo, esta técnica requiere de un cierto conocimiento previo del fenómeno que se estudia, del cual no siempre disponemos.

En un primer intento de abarcar este problema, se desarrolló un algoritmo que permite, en el mejor de los casos, realizar el cálculo del periodograma hasta tres veces más rápido de lo habitual. Esta modificación en el proceso de estimación dio lugar a un nuevo paquete de rutinas denominado **QuickWNLHA**. En él se incluye una versión del paquete WNLHA donde se considera el cálculo del periodograma de Lomb y del periodograma extendido mediante este nuevo procedimiento ideado. El proceso es bastante sencillo. En lugar de reducir el número de líneas espectrales del dominio de frecuencias, lo que se hace es mantenerlo intacto y, en su lugar, *parhear* el periodograma en un entorno de los armónicos más sobresalientes. A continuación se detalla, brevemente, el algoritmo propuesto para la aceleración del cálculo del periodograma:

**Paso 1:** Denotemos por  $D_f = [f_1, f_2, \dots, f_r]$  el dominio discreto de frecuencias donde se estimará el periodograma. Iniciemos  $i = 0$ .

**Paso 2:** Utilizando la ecuación (3.66), calculamos el periodograma para la serie temporal  $\{(t_n, d_n)\}_{n=1,2,\dots,N}$ :

$$P^0 = [P_1^0, P_2^0, \dots, P_r^0] = [P(f_1), P(f_2), \dots, P(f_r)]$$

**Paso 3:** Hacemos  $i \leftarrow i + 1$ . Seleccionamos el pico de frecuencia donde el periodograma  $P^0$  alcanza su máximo, a saber  $f^i = f_p$  con  $p \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Tras ello, eliminamos de los datos la información contenida en dicho armónico siguiendo el algoritmo descrito en el capítulo 3.

**Paso 4:** Si la condición de parada del proceso armónico no lineal se alcanza, entonces detendremos el algoritmo. En caso contrario, el proceso continuará con la extracción de una nueva frecuencia fundamental. Ahora, en lugar de estimar el periodograma de los residuales para todas las líneas espectrales del dominio de frecuencias, lo que haremos será *parhear*  $P^0$ . En primer lugar consideremos un entorno centrado en la línea espectral seleccionada durante el paso anterior y conteniendo un total de  $2h + 1$  frecuencias,

$$D_f^i = [f_{p-h}, f_{p-h+1}, \dots, f^i, \dots, f_{p+h-1}, f_{p+h}] \subset D_f$$

**Paso 5:** Denotemos por

$$P^i = [P_{p-h}^i, P_{p-h+1}^i, \dots, P_{p+h}^i] = [P(f_{p-h}), P(f_{p-h+1}), \dots, P(f_{p+h})]$$

al periodograma de los residuales para los armónicos en  $D_f^i$ .

**Paso 6:** Escalamos y parcheamos el periodograma  $P^0$  haciendo:

$$P_j^0 = \begin{cases} P_j^0 / R^i & \text{si } f_j \notin D_f^i \\ P_j^i & \text{si } f_j \in D_f^i \end{cases}$$

donde  $R^i$  es el cociente entre la mediana de los valores en  $P^0$  y la mediana de los valores en el parche  $P^i$ . Tras ello, volver al paso 3.

Para poder ejecutar el algoritmo es necesario determinar la longitud del entorno de frecuencias que constituye el parche para el periodograma inicial. Este valor depende de las características de la serie temporal pero normalmente es suficiente tomar  $h = 200$ . Si se cree que los datos están afectados por un ruido de amplitud considerable, tomar un valor de  $h$  mayor será más seguro. Como podemos comprobar, en el paso 6, se realiza un escalamiento del espectro para aquellas frecuencias que no forman parte del parche. El motivo de este escalamiento reside en el hecho de que tras eliminar una línea espectral, el resto del periodograma se ve reducido debido a la desaparición del efecto de fuga espectral causado por dicha frecuencia. Así pues, para evitar en la medida de lo posible la formación de falsos picos de frecuencia como consecuencia del parcheado, se lleva a cabo dicho escalamiento. En cualquier caso, esta medida no asegura la no producción de falsas líneas espectrales por lo que se ha incluido, además, una etapa o fase de corrección; es decir, el usuario tiene la posibilidad de ordenar la estimación natural y ordinaria del periodograma de los residuales para el dominio de frecuencias completo tras la realización de un número determinado de parches. En este caso, si se lleva a cabo una corrección, el periodograma obtenido será el nuevo  $P^0$  a parchear en las siguientes iteraciones, si las hubiera.

Para comprobar su correcto funcionamiento se han realizado ya algunas pruebas con series sintéticas y series temporales reales. Aquí mostraremos los resultados para un caso de cada uno de estos grupos. Comenzaremos con una aplicación sobre una serie temporal sintética. El número de datos fue fijado en 5000 observaciones y el



Tabla 11.1: Contenido armónico de la serie temporal sintética. Las columnas hacen referencia (por este orden) a la etiqueta de la línea espectral, frecuencia (ciclos por unidad de tiempo), coeficientes de Fourier en seno y coseno y finalmente coeficientes asociados a términos seculares mixtos en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | <i>f</i> | <i>S</i> | <i>C</i> | <i>SS</i> | <i>CC</i> |
|------------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| 1          | 0.001    | 1        | 3        | 0         | 0         |
| 2          | 0.200    | 2        | 1        | 0         | 0         |
| 3          | 0.003    | 2        | 2        | 0         | 0         |
| 4          | 0.040    | 0        | 5        | 0         | 0         |
| 5          | 0.005    | -3       | 1        | -0.005    | 0.002     |

Tabla 11.2: Contenido armónico estimado para la serie temporal sintética mediante el uso del periodograma parcheado. Las columnas hacen referencia (por este orden) a la etiqueta de la línea espectral, frecuencia (ciclos por unidad de tiempo), coeficientes de Fourier en seno y coseno y finalmente coeficientes asociados a términos seculares mixtos en seno y coseno, respectivamente.

| <i>No.</i> | <i>f</i>          | <i>S</i>           | <i>C</i>          | <i>SS</i>          | <i>CC</i>         |
|------------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| 1          | $0.001 \pm 0.000$ | $0.996 \pm 0.015$  | $3.030 \pm 0.015$ | 0                  | 0                 |
| 2          | $0.200 \pm 0.000$ | $1.960 \pm 0.015$  | $1.007 \pm 0.015$ | 0                  | 0                 |
| 3          | $0.003 \pm 0.000$ | $1.996 \pm 0.015$  | $1.986 \pm 0.015$ | 0                  | 0                 |
| 4          | $0.040 \pm 0.000$ | $-0.008 \pm 0.015$ | $4.998 \pm 0.015$ | 0                  | 0                 |
| 5          | $0.005 \pm 0.000$ | $-3.014 \pm 0.015$ | $1.028 \pm 0.015$ | $-0.005 \pm 0.000$ | $0.002 \pm 0.000$ |

dominio temporal seleccionado parte de -2499.5 hasta 2499.5 en intervalos equiespaciados de 1 día. El contenido armónico de los datos aparece detallado en la Tabla 11.1. Aparte de estas frecuencias, hemos considerado que la serie temporal se encuentra afectada por una componente de ruido blanco de varianza  $\sigma^2 = 1$ . Para el análisis se ha utilizado el paquete QuickWNLHA que emplea el algoritmo del periodograma parcheado descrito. La longitud de los parches viene determinada por un valor de  $h = 100$  y en esta ocasión, debido al escaso número de frecuencias que estamos interesados en extraer, no se realizará ninguna etapa de corrección. Los resultados se muestran en la Tabla 11.2. Asimismo, puede verse el proceso de parcheado seguido a través de la Figura 11.1. Como puede observarse, el método armónico no lineal con el periodograma parcheado es capaz de detectar adecuadamente las líneas espectrales que describen los datos, aun a pesar de la presencia de una componente de ruido. De hecho, apenas existen diferencias sustanciales con las estimaciones obtenidas mediante el método armónico no lineal del paquete WNLHA. Sin embargo, el tiempo invertido en la obtención del modelo con el periodograma parcheado (80.69 segundos) es aproximadamente tres veces menor que el requerido si utilizáramos el cálculo tradicional del periodograma de Lomb (233.38 segundos).

Como aplicación real, mostraremos los resultados obtenidos para el análisis de una de las series estudiadas en el capítulo 4. Nos referimos a la serie temporal que describe las variaciones en longitud y oblicuidad del polo celeste según el modelo IAU1980. Recordemos, nuevamente, que los datos se encuentran disponibles online<sup>1</sup> en el sitio del IERS. El dominio temporal parte del 23 de septiembre de 2000 y termina el 23 de septiembre de 2010 a través de una red equiespaciada de paso diario. Con la intención de establecer una comparación, tanto en lo referente al modelo como al tiempo de computación invertido, la serie temporal será analizada mediante el paquete WNLHA y el QuickWNLHA. En ambos casos se han extraído un total de 20 frecuencias fundamentales de los datos. El rango del parche para el paquete QuickWNLHA se ha fijado tomando un valor de  $h = 300$  y una fase de corrección cada 5 frecuencias (es decir, cada cuatro parches se estima el periodograma para el dominio de frecuencias completo). Los resultados numéricos se muestran en las Tablas 11.3–11.6. Considerando las incertidumbres para los parámetros estimados

---

<sup>1</sup><http://www.iers.org/>

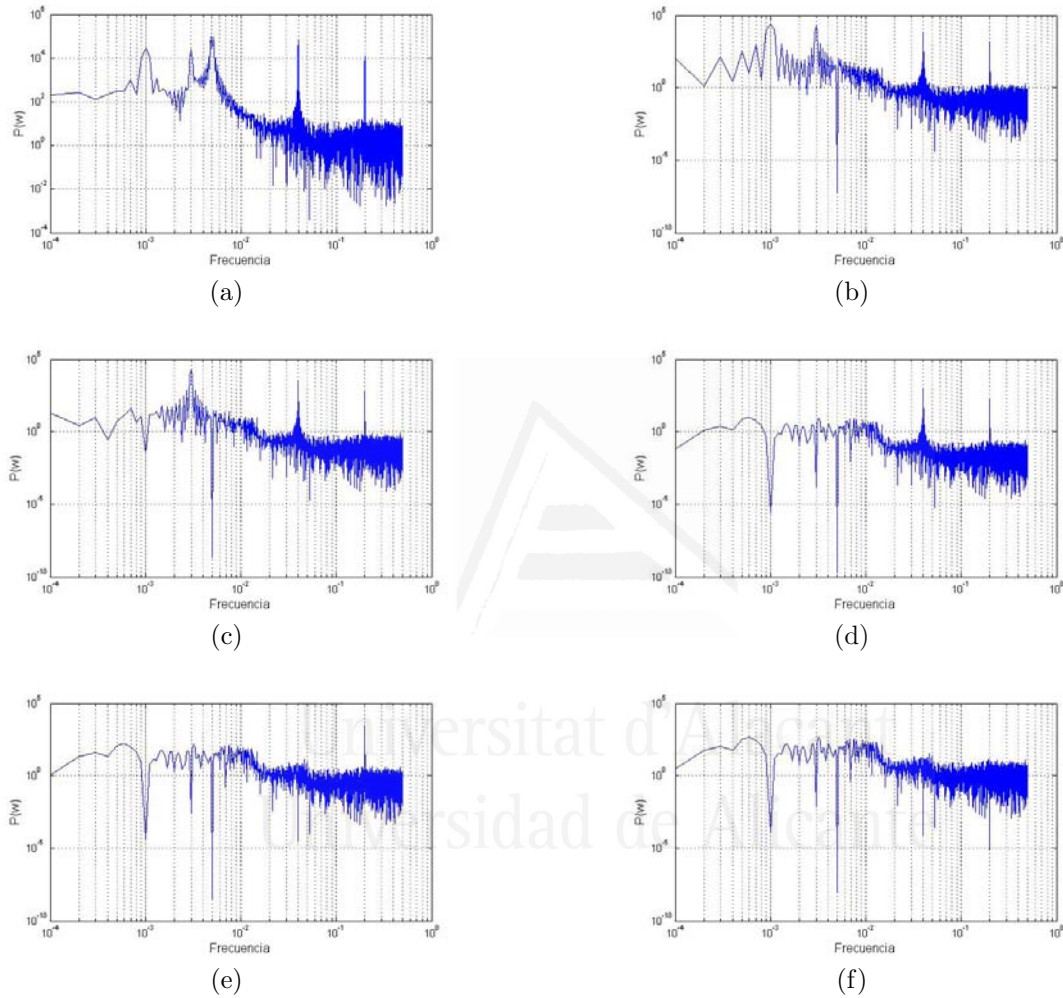


Figura 11.1: Proceso de parcheado para la serie sintética cuyo contenido armónico aparece detallado en la Tabla 11.1. Cada subfigura hace referencia a una etapa: (a) Etapa 1: Periodograma de Lomb, (b) etapa 2: primer parcheado del periodograma de Lomb, (c) etapa 3: segundo parcheado, (d) etapa 4: tercer parcheado, (e) etapa 5: cuarto parcheado, y finalmente (f) la representación del periodograma tras los parcheados necesarios para la extracción de los armónicos que definen la serie sintética.

en cada caso, podemos apreciar una notable correspondencia y equivalencia entre el modelo obtenido mediante el uso del periodograma parcheado con corrección y el obtenido mediante el cálculo usual del periodograma de Lomb. Las frecuencias (o periodos) detectadas son iguales en ambos casos y los coeficientes lineales estimados para cada una de las líneas espectrales son bastante similares. Pueden observarse ciertas diferencias sutiles entre alguno de los periodos, coeficientes asociados y el orden de extracción de las frecuencias pero, en general, podemos decir que ambos modelos contienen básicamente la misma información espectral. Sin embargo, el análisis llevado a cabo por las rutinas contenidas en QuickWNLHA es más rápido que el llevado a cabo mediante el paquete WNLHA (2286.61 segundos frente a 3032.30 segundos, ahorrando así 12.5 minutos aproximadamente). Esta diferencia en tiempos se hace más significativa cuando se trata de analizar series temporales multidimensionales como aquella que aparece en el capítulo 6 donde se ahorraría un determinado tiempo por cada una de las series analizadas.

Tabla 11.3: Términos de Fourier. Descomposición armónica de  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$  (periodo 23/09/2000 al 23/09/2010) según el modelo de precesión-nutación IAU1980. Las columnas hacen referencia al orden de extracción del periodo, periodo (días), coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\psi$ , y los coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\epsilon$ , respectivamente.

| <i>No.</i> | $\Pi$               | $S_\psi$         | $C_\psi$         | $S_\epsilon$     | $C_\epsilon$     |
|------------|---------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1          | $365.20 \pm 0.06$   | $1.12 \pm 0.29$  | $-5.83 \pm 0.28$ | $0.48 \pm 0.17$  | $-0.05 \pm 0.17$ |
| 2          | $182.96 \pm 0.04$   | $1.75 \pm 0.01$  | $-1.11 \pm 0.01$ | $-0.31 \pm 0.01$ | $-0.53 \pm 0.01$ |
| 3          | $3647.83 \pm 13.23$ | $0.60 \pm 0.05$  | $1.44 \pm 0.01$  | $-0.57 \pm 0.03$ | $1.18 \pm 0.01$  |
| 4          | $13.66 \pm 0.00$    | $-0.12 \pm 0.01$ | $-0.46 \pm 0.01$ | $-0.24 \pm 0.01$ | $0.13 \pm 0.01$  |
| 5          | $449.16 \pm 1.24$   | $0.36 \pm 0.01$  | $0.18 \pm 0.01$  | $-0.10 \pm 0.01$ | $0.14 \pm 0.01$  |
| 6          | $1611.86 \pm 16.56$ | $-0.10 \pm 0.02$ | $-0.18 \pm 0.01$ | $0.05 \pm 0.01$  | $-0.17 \pm 0.01$ |
| 7          | $31.88 \pm 0.01$    | $-0.19 \pm 0.01$ | $-0.12 \pm 0.01$ | $0.00 \pm 0.01$  | $-0.03 \pm 0.01$ |
| 8          | $27.53 \pm 0.02$    | $0.15 \pm 0.01$  | $-0.08 \pm 0.01$ | $0.02 \pm 0.01$  | $0.06 \pm 0.01$  |
| 9          | $27.02 \pm 0.01$    | $-0.01 \pm 0.01$ | $0.06 \pm 0.01$  | $0.01 \pm 0.01$  | $-0.10 \pm 0.01$ |
| 10         | $371.52 \pm 0.13$   | $-0.79 \pm 0.28$ | $0.46 \pm 0.28$  | $1.51 \pm 0.16$  | $-0.05 \pm 0.16$ |
| 11         | $13.59 \pm 0.00$    | $0.01 \pm 0.01$  | $-0.10 \pm 0.01$ | $-0.10 \pm 0.01$ | $0.02 \pm 0.01$  |
| 12         | $9.55 \pm 0.00$     | $-0.00 \pm 0.01$ | $-0.14 \pm 0.01$ | $-0.01 \pm 0.01$ | $0.03 \pm 0.01$  |
| 13         | $13.15 \pm 0.00$    | $0.06 \pm 0.01$  | $-0.00 \pm 0.01$ | $-0.00 \pm 0.01$ | $-0.07 \pm 0.01$ |
| 14         | $14.79 \pm 0.00$    | $0.05 \pm 0.01$  | $-0.02 \pm 0.01$ | $-0.07 \pm 0.01$ | $-0.04 \pm 0.01$ |
| 15         | $29.78 \pm 0.02$    | $-0.02 \pm 0.01$ | $0.01 \pm 0.01$  | $-0.01 \pm 0.01$ | $-0.00 \pm 0.01$ |
| 16         | $9.12 \pm 0.00$     | $0.08 \pm 0.01$  | $0.01 \pm 0.01$  | $-0.04 \pm 0.01$ | $0.03 \pm 0.01$  |
| 17         | $206.20 \pm 0.67$   | $-0.01 \pm 0.01$ | $-0.05 \pm 0.01$ | $0.07 \pm 0.01$  | $0.03 \pm 0.01$  |
| 18         | $9.81 \pm 0.00$     | $0.04 \pm 0.01$  | $0.04 \pm 0.01$  | $0.03 \pm 0.01$  | $-0.05 \pm 0.01$ |
| 19         | $12.80 \pm 0.00$    | $-0.03 \pm 0.01$ | $-0.04 \pm 0.01$ | $0.01 \pm 0.01$  | $-0.06 \pm 0.01$ |
| 20         | $9.33 \pm 0.00$     | $0.01 \pm 0.01$  | $0.04 \pm 0.01$  | $-0.02 \pm 0.01$ | $0.00 \pm 0.01$  |

Tabla 11.4: Igual que la Tabla 11.3 pero para los términos seculares mixtos. Las columnas hacen referencia al orden de extracción del periodo, periodo (días), coeficientes ( $\mu as$ ) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\psi$ , y los coeficientes ( $\mu as$ ) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\epsilon$ , respectivamente.

| <i>No.</i> | $\Pi$               | $SS_\psi$        | $CC_\psi$        | $SS_\epsilon$    | $CC_\epsilon$    |
|------------|---------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 6          | $1611.86 \pm 16.56$ | $-0.17 \pm 0.01$ | $0.06 \pm 0.03$  | $-0.21 \pm 0.01$ | $-0.12 \pm 0.02$ |
| 10         | $371.52 \pm 0.13$   | $-0.28 \pm 0.08$ | $-0.29 \pm 0.08$ | $0.10 \pm 0.05$  | $0.58 \pm 0.05$  |
| 15         | $29.78 \pm 0.02$    | $-0.10 \pm 0.01$ | $0.03 \pm 0.01$  | $0.04 \pm 0.01$  | $0.03 \pm 0.01$  |
| 20         | $9.33 \pm 0.00$     | $0.02 \pm 0.01$  | $0.10 \pm 0.01$  | $0.03 \pm 0.01$  | $-0.02 \pm 0.01$ |

Tabla 11.5: Igual que la Tabla 11.3 pero para el análisis llevado a cabo mediante la utilización del periodograma parcheado con corrección. Las columnas hacen referencia al orden de extracción del periodo, posición del periodo de la Tabla 11.3 con el que se corresponde, periodo (días), coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\psi$ , y los coeficientes (mas) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\epsilon$ , respectivamente.

| No. | Ref. | $\Pi$              | $S_\psi$         | $C_\psi$         | $S_\epsilon$     | $C_\epsilon$     |
|-----|------|--------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1   | 1    | $365.18 \pm 0.06$  | $1.30 \pm 0.30$  | $-5.76 \pm 0.29$ | $0.36 \pm 0.18$  | $0.02 \pm 0.18$  |
| 2   | 2    | $182.96 \pm 0.04$  | $1.75 \pm 0.01$  | $-1.11 \pm 0.01$ | $-0.31 \pm 0.01$ | $-0.53 \pm 0.01$ |
| 3   | 3    | $3399.98 \pm 8.73$ | $0.54 \pm 0.05$  | $1.40 \pm 0.01$  | $-0.53 \pm 0.02$ | $1.14 \pm 0.01$  |
| 4   | 6    | $1597.20 \pm 9.38$ | $-0.11 \pm 0.01$ | $-0.22 \pm 0.01$ | $0.06 \pm 0.01$  | $-0.21 \pm 0.01$ |
| 5   | 5    | $449.79 \pm 1.15$  | $0.36 \pm 0.01$  | $0.18 \pm 0.01$  | $-0.10 \pm 0.01$ | $0.14 \pm 0.01$  |
| 6   | 4    | $13.65 \pm 0.00$   | $-0.12 \pm 0.01$ | $-0.47 \pm 0.01$ | $-0.24 \pm 0.01$ | $0.13 \pm 0.01$  |
| 7   | 7    | $31.90 \pm 0.01$   | $-0.19 \pm 0.01$ | $-0.12 \pm 0.01$ | $-0.00 \pm 0.01$ | $-0.03 \pm 0.01$ |
| 8   | 8    | $27.53 \pm 0.02$   | $0.15 \pm 0.01$  | $-0.08 \pm 0.01$ | $0.02 \pm 0.01$  | $0.06 \pm 0.01$  |
| 9   | 9    | $27.02 \pm 0.01$   | $-0.01 \pm 0.01$ | $0.06 \pm 0.01$  | $0.01 \pm 0.01$  | $-0.10 \pm 0.01$ |
| 10  | 11   | $13.59 \pm 0.00$   | $0.01 \pm 0.01$  | $-0.10 \pm 0.01$ | $-0.10 \pm 0.01$ | $0.02 \pm 0.01$  |
| 11  | 10   | $371.38 \pm 0.12$  | $-0.96 \pm 0.29$ | $0.40 \pm 0.29$  | $1.62 \pm 0.17$  | $-0.12 \pm 0.17$ |
| 12  | 12   | $9.55 \pm 0.00$    | $-0.00 \pm 0.01$ | $-0.14 \pm 0.01$ | $-0.01 \pm 0.01$ | $0.03 \pm 0.01$  |
| 13  | 14   | $14.79 \pm 0.00$   | $0.05 \pm 0.01$  | $-0.02 \pm 0.01$ | $-0.07 \pm 0.01$ | $-0.04 \pm 0.01$ |
| 14  | 13   | $13.16 \pm 0.00$   | $0.06 \pm 0.01$  | $-0.00 \pm 0.01$ | $-0.01 \pm 0.01$ | $-0.07 \pm 0.01$ |
| 15  | 17   | $206.02 \pm 0.69$  | $-0.01 \pm 0.01$ | $-0.05 \pm 0.01$ | $0.07 \pm 0.01$  | $0.03 \pm 0.01$  |
| 16  | 16   | $9.12 \pm 0.00$    | $0.08 \pm 0.01$  | $0.01 \pm 0.01$  | $-0.04 \pm 0.01$ | $0.03 \pm 0.01$  |
| 17  | 15   | $29.78 \pm 0.02$   | $-0.02 \pm 0.01$ | $0.00 \pm 0.01$  | $-0.01 \pm 0.01$ | $-0.00 \pm 0.01$ |
| 18  | 18   | $9.81 \pm 0.00$    | $0.04 \pm 0.01$  | $0.04 \pm 0.01$  | $0.03 \pm 0.01$  | $-0.05 \pm 0.01$ |
| 19  | 19   | $12.80 \pm 0.00$   | $-0.03 \pm 0.01$ | $-0.04 \pm 0.01$ | $0.01 \pm 0.01$  | $-0.06 \pm 0.01$ |
| 20  | 20   | $9.33 \pm 0.00$    | $0.01 \pm 0.01$  | $0.04 \pm 0.01$  | $-0.02 \pm 0.01$ | $0.00 \pm 0.01$  |

Tabla 11.6: Igual que la Tabla 11.5 pero para los términos seculares mixtos. Las columnas hacen referencia al orden de extracción del periodo, periodo (días), coeficientes ( $\mu as$ ) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\psi$ , y los coeficientes ( $\mu as$ ) asociados a los términos en seno y coseno para  $\delta\epsilon$ , respectivamente.

| No. | $\Pi$              | $SS_\psi$        | $CC_\psi$        | $SS_\epsilon$    | $CC_\epsilon$    |
|-----|--------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 4   | $1597.20 \pm 9.38$ | $-0.21 \pm 0.01$ | $0.06 \pm 0.03$  | $-0.26 \pm 0.01$ | $-0.14 \pm 0.02$ |
| 11  | $371.38 \pm 0.12$  | $-0.25 \pm 0.08$ | $-0.33 \pm 0.08$ | $0.12 \pm 0.05$  | $0.60 \pm 0.05$  |
| 17  | $29.78 \pm 0.02$   | $-0.10 \pm 0.01$ | $0.03 \pm 0.01$  | $0.04 \pm 0.01$  | $0.03 \pm 0.01$  |
| 20  | $9.33 \pm 0.00$    | $0.02 \pm 0.01$  | $0.10 \pm 0.01$  | $0.03 \pm 0.01$  | $-0.02 \pm 0.01$ |



---

## Parte II

# **EXTENDED SUMMARY: NON-LINEAR HARMONIC MODELS FOR GEODETIC TIME SERIES**

Univ  
Universidad de Alicante





---

# Chapter S.1

## Introduction

From the beginning, human beings have observed everything around them. They realized that certain events that took place in their environment showed a behavior that was repeated every certain period of time: the course from the day to the night, seasons, weather events, the appropriate time for planting and harvesting, the migration of certain birds, floods, eclipses, lunar phases, . . . There is no doubt that this study carried out by simple observation made possible our evolution. From the empirical analysis of these phenomena, human beings were able to anticipate the arrival of these events and use the knowledge that this study provided them to survive. This fact made possible to conceive the concept of time, measure it and derive many of the theories we know nowadays.

Currently, we are still looking on the horizon and everything that happens around us but we do it in a much more accurate way. We have checked that all those events, which our ancestors believed them to be periodic, do not occur at exactly identical time intervals. Subtle changes are manifested in some cases.

To get a rough idea, a time series is just a sequence of data or measurements (in chronological order) established during a period of time in certain epochs. A time series provides useful information about the physical, biological, socioeconomic or another type of system that produces it. The purpose of time series analysis is to determine some of the main features of the system in order to quantify certain aspects of the series. Later, these properties can help us understand and predict the future behavior of the system (Ghil et al., 2002).

Given these evidences, which come useful only for highlighting the importance of time series studies, we immerse ourselves in the development of a research focused primarily on harmonic analysis of geodetic time series with the sole purpose of providing further information about certain phenomena that occur on our planet. Thus, this report is a summary of the results obtained during the researching process carried out at the Department of Applied Mathematics under the guidance and supervision of Dr. *Jose Manuel Ferrándiz Leal*, and also at the *Laboratory of Research in Geodesy* (LAREG) at the *National Geographic Institute* (IGN) (Paris) with Dr. *Zuheir Altamimi* and Dr. *Xavier Collilieux*.

In the following sections of this first chapter, we specify the objectives to be achieved and the methodology used in the study, as well as a brief description of the contents of this memory.

### S.1.1. Objectives and methodology

One of the main objectives of this research is to obtain a comprehensive and specialized software to analyze time series. At present, there are tools that allow us to establish a kind of classical and basic analysis that does not take into account the periodic nature of the phenomenon that is represented. However, most of the time series that can be found in any field have a behavior that appears to be repeated at regular time intervals. Harmonic analysis is a type of time series analysis that allows us to know and determine its periodic behavior, somehow.

Much of the tools we can find today for analyzing these periodic time series is limited to a particular type of series such as evenly time series. As we shall see, an evenly time series is a series whose observations are taken or prescribed in regular intervals. However, the existence of these series is just theoretical. Any measurement or observation of a phenomenon is influenced by a human factor in some extent, which prevents the data to be collected at certain equidistant epochs. Thus, in reality, dealing with unevenly time series is the most common situation. However, if we relax the concept of evenly time series, there are unevenly series which could be treated as evenly.

First, we plan to implement a software package capable of studying a time series,

regardless of whether it is evenly or unevenly and whether it is affected by systematic errors or not. It would also be desirable that these routines were suitable for time series from any scientific or economic field. Once the software with these basic features has been created, we would be interested in use it for studying some geodetic time series (primarily). Thus, another objective of this work is to obtain harmonic models for these series that allow us to understand the periodic behavior and its ability to predict the state of the phenomenon that the series refers to. We have to take into account that in this work we will not focus on the origin or cause of the possible periodic patterns of the analyzed time series, although in most cases we will suggest a possible *candidate factor*.

Once we have described the main objectives, we asked ourselves which tool would be the most appropriate to use for developing the software packages for time series analysis. After going through some options, we finally decided to use MATLAB as the main tool to carry out our work. The reasons that led us to opt for this program were several:

1. MATLAB is a high level programming language and easy to learn, allowing public outreach.
2. We can get high quality graphics and it features integrated display facilities. Moreover, graphic representations can be made in 2 and 3 dimensions easily.
3. It has an environment with numerous functions for working with numbers and matrices.
4. Its interactive interface allows quick testing and debugging programs.
5. It is a common extended resource in science or engineering studies at universities all over the world. It also has endless applications in electronics, chemistry, artificial intelligence, biology, medicine, space geodesy, etc.
6. Finally, MATLAB files and routines are portable to other platforms (Linux, Apple, Windows) and convertible into other programming languages such as C + +.

## S.1.2. Contents

This report contains 11 chapters, including this introduction. Chapters S.2, S.3, S.8 and S.9 are eminently theoretical and describe a set of procedures to be used for the analysis of time series. Chapters S.4–S.7 and S.10 are about the study of different types of time series that are considerably important in the geophysical field. Herein we briefly detail the contents of each chapter:

- Chapter S.2 discusses the problem of signal detection. Primarily, it includes definitions and basic concepts that are common and characteristic of the slang of time series analysis and are relevant to the proper understanding of this report.
- Chapter S.3 focuses on the description of a nonlinear harmonic method proposed by *Wataru Harada* and *Toshio Fukushima* (Harada, 2003). This method is the basis for the time series studies that are conducted.
- Chapter S.4 analyzes the time series that represents the variations of the celestial pole by taking into account a couple of precession-nutation models (IAU1980 and IAU2000A). Moreover, the predictive ability of some of those models is tested.
- Chapters S.5 and S.6 are closely related to continental water flux on the planet. In the first one, we will study how variations in continental water storage affect the position of the Earth's center of mass. In the aforementioned second chapter, we study the spectral content of the multidimensional series described by the continental water flux. This latter analysis is carried out through the creation of two different harmonic models whose predictive power is also studied.
- In chapter S.7, we propose a non-linear harmonic model for the variations in the length of day after removing tidal effects.
- Chapter S.8 contains a brief introduction to the concept of spectral noise, which will be important for subsequent studies. The basic typology will be detail as well as some remarkable characteristics.

- Last theoretical chapter (chapter S.9) describes the FFAST algorithm as a combination of the non-linear harmonic method detailed in chapter S.3 and a estimation process for stochastic models (known as LS-VCE) suggested by Amiri-Simkooei (2007).
- Chapter S.10 shows the results of a study about the position time series of GPS (*Global Positioning System*) stations that take part in the ITRF2008. To carry out this task we estimate non-linear harmonic and stochastic models as they were described in chapter S.9.
- Finally, Chapter S.11 provides overall conclusions and presents future researching directions.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



---

## Chapter S.2

# The signal detection problem

### S.2.1. Definition of time series

The concept of time series has a lot of meanings depending on the circumstances. To avoid confusion and misunderstanding, henceforth, when we talk about *time series* with length  $N \in \mathbb{N}$  we will refer to a sequence of data  $\{d(t_1), d(t_2), \dots, d(t_N)\}$  obtained by estimating or measuring a certain magnitude  $d$  in a discrete set of times  $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  where  $t_i \neq t_j$  for all  $i, j = 1, 2, \dots, N$ . The finite set  $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  is commonly known as the *time domain* of the series. In this report, we will denote a time series by  $\{t_n, d(t_n)\}_{n=1,2,\dots,N}$  or, indistinctly,  $\{t_n, d_n\}_{n=1,2,\dots,N}$ . Besides, it is supposed that the epochs of observation are sorted in chronological order, that is to say,  $t_i < t_{i+1}$  for all  $i = 1, 2, \dots, N$ .

The time series can be classified according to various aspects such as the properties of the measured quantity, the characteristics of the time domain or even the field where it occurs. Thus, we can find time series related to the physical, chemical, biological, geophysical or astronomical field, as well as economics, demographic and marketing. On the other hand, the physical property  $d$ , which is subjected to observation, can refer to a scalar or a vectorial magnitude. According to this feature, we talk about *scalar or univariate* time series and *vectorial or multivariate* time series, respectively.

Every vectorial time series can be considered as a set of scalar time series whose time domain is identical. So, when we deal with vectorial time series, many authors



try to solve the problem that arises in relation to whether a multivariate analysis is more appropriate than an individual study of each scalar component.

A time series can also be classified according to the characteristics of the time domain. Thus, we refer to *evenly* (or *equally spaced*) time series when the time domain verifies the following property:

$$t_i = t_1 + (i - 1) \cdot \Delta t \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N \text{ and } \Delta t \neq 0$$

Otherwise, the time series is called *unevenly* or *not equally spaced*. Finally, there are some time series that not only depend on one parameter (such as time) but they do on two or more parameters (for instance, time-space). Those time series are known as *multidimensional* time series.

### S.2.1.1. Components of a time series

Traditionally, a time series can be decomposed into four distinct components (see Figure 2.1), namely:

1. **Trend** ( $T(t)$ ). It refers to the secular movements of the time series and can be defined as the component that explains the long-term behavior. The trend component can be modeled according to different models: lineal, parabolic, exponential, logarithmic, etc.
2. **Seasonal** ( $S(t)$ ). It refers to those regular movements of the time series that can take place regularly at weekly, monthly, quarterly, semiannual or even daily periods.
3. **Cyclical** ( $C(t)$ ). It is a fluctuation over the secular component. It can be considered as a medium-large oscillating factor over the trend component that can be periodic or not.
4. **Noise** ( $R(t)$ ). This component does not follow any behavior pattern. It is usually linked to accidental or random factors that occur in an isolated way or permanently in a time series.

Depending on the time series, some authors group the seasonal and cyclical components into a single component called, commonly, *periodic component*. In this report, we will consider a time series as a combination of a trend component (usually linear or parabolic), a periodic one and a noise component.

From the definition of time series follows its discrete nature. However, most of the time, these series represent phenomena that occur in a continuous way. This fact make us think about the possibility of modeling a time series by using a continuous function,  $F$ . The  $F$  function can be considered as a combination of the aforementioned four components that depend on time ( $t$ ). Considering the way these components interact in order to form  $F$ , we can find three classic models for time series modeling:

- Additive:  $F(t) = T(t) + S(t) + C(t) + R(t)$
- Multiplicative:  $F(t) = T(t) \cdot S(t) \cdot C(t) \cdot R(t)$
- Mixed:  $F(t) = T(t) \cdot S(t) \cdot C(t) + R(t)$

In this report, due to the nature of the time series we are going to study, we consider an additive model.

### S.2.1.2. Noise component

The study of the noise component in a time series is one of the topics that has aroused more interest in last years because its characterization allows, among other things, more accurate estimations of the remaining components as well as better calculation of the uncertainties for the estimated parameters.

There is a wide noise typology, a small part of which will be discussed later (*flicker noise*, *random walk noise*, *Kolmogorov turbulence*, etc.). However, there is a particular kind of noise that has special interest. We talk about the so-called *white noise*. A noise,  $R(t)$ , is said to be white if it consists of a sequence of uncorrelated and identically distributed random variables (Peña, 1989) satisfying the properties (2.3)–(2.5).

When we study time series it would be ideal that they were not affected by a noise component or, at most, they contained a white noise. However, this is an

uncommon situation. Either way, from now on and until we say so, it is assumed that the time series we are analyzing are affected by a white noise or the observations are uncorrelated.

## S.2.2. Spectral analysis

When we study a time series we expect to achieve several aims. Among the main objectives we can find: describing the behavior of the time series at the time domain, establishing connections between certain variables that are considered in the series, predicting its future behavior, controlling the state of the phenomenon that it represents or, even, getting some information about other phenomena that has something to do with that one which is being studied. To carry out this task, many techniques have arisen. The most ancient is the *classical analysis* (Jenkins and Watts, 1968; Peña, 1989; Scargle, 1981) that is still widely used and the most recent technique resorts to the so-called *wavelets* (Foster, 1996; Foufoula-Georgiou and Kumar, 1994). However, we will focus on another well-known technique: the *spectral analysis*.

The *Fourier or spectral analysis* of time series consists of decomposing time series as a linear combination of sinusoidal functions. However, this term is often used in a broader sense to describe any type of procedure that is able to explain time series fluctuations by comparison with sinusoidal functions.

When we perform a spectral analysis we frequently find several concepts that are part of the typical jargon of this field. Let us consider a periodic time series representing some phenomenon. A *cycle* is the pattern of states adopted by the phenomenon that is repeated at each certain period of time. On the other hand, the *fundamental frequency* or *spectral line*,  $f$ , associated with a periodic behavior is the number of cycles that the phenomenon completes per unit of time. Obviously, a periodic phenomenon can hold more than one fundamental frequency, depending on the number of distinct patterns or cycles that is capable of holding. Sometimes, instead of using the term *fundamental frequency* we can read or listen about the term *angular frequency*. The angular frequency,  $\omega$ , is the amount of radians covered per unit of time and it is related to the fundamental frequency by the equation (2.12).

Another important element to take into account when we work with harmonic functions is the *period*,  $\Pi$ . Fundamental frequency and period are concepts that have an inverse relationship (see equation (2.13)). That is to say, the period is the time took by the phenomenon to complete a cycle. From now on, we will called *high (low) frequencies* those spectral lines that are linked to short (long) periods of time.

The main objective that we expect to reach when we perform a spectral analysis is to express the time series we are studying as a sum of a functional model and a residual component:

$$d_n = h_n + R_n$$

where  $h_n$  is a linear combination of harmonic functions

$$h_n = \sum_{i=1}^L S_i \sin(\omega_i t_n) + C_i \cos(\omega_i t_n)$$

with  $L \in \mathbb{N}$  and where  $R_n$  is the residual component.

The spectral problem consists in the identification of the signal  $h_n$  from the observations, despite the presence of a noise component. This process is known as *signal detection*. The signal detection problem has slightly changed and, currently, it is focused on the estimation of the harmonic content of the time series. To carry out an spectral analysis, many techniques and tools have been developed such as the *Maximum Entropy Method* (MEM) (Ulrych and Bishop, 1975), the *Singular Spectral Analysis* (SSA) (Vautard and Ghil, 1989) or the *Lomb periodogram* (Lomb, 1976), among many others.

### S.2.3. The signal detection problem

In many disciplines, occasionally, it is necessary to analyze and look for unknown periodicities. Fourier methods based on the *Fast Fourier Transform* (FFT) or the MEM method are suitable for the harmonic analysis of evenly time series. A basic tool of spectral analysis for these type of time series is the *Discrete Fourier Transform* (DFT) (Scargle, 1982) which leads to the so-called *classical periodogram* given by the equation (2.21) where  $\omega$  represents the angular frequency. This tool is used for identifying the spectral lines that better explain the variability of the time series

$\{t_n, d_n\}_{n=1, \dots, N}$  with  $N \in \mathbb{N}$ . However, the classical periodogram is not the appropriate tool to look for unknown signals of an unevenly time series. Besides, it has the well-known problem of *spectral leakage*. There are several kinds of spectral leakage: the energy leakage to frequencies near the real spectral line and the energy leakage to frequencies that are far from the real frequency which explains a great deal of variability of the data. The most known spectral leakage phenomenon is called *aliasing* and it consists in the leakage of energy from high frequencies to low frequencies.

Thus, we need some kind of mathematical tool that can be used for analyzing unevenly time series, apart from solving the aforementioned problems related to the creation of spurious frequencies. The *Lomb periodogram* is used for analyzing unevenly time series but does not solve the creation of false spectral lines. However, you can avoid the inclusion of these spurious frequencies in the spectral analysis of time series if the harmonics are drawn from the Lomb periodogram iteratively. First, we calculate the parameters associated with the extracted frequency from the Lomb periodogram. Once the amplitude and other parameters have been estimated, we remove from the data the linear harmonic combination (of sines and cosines) for the extracted frequency. The residuals obtained will be used in next iteration where we estimate the Lomb periodogram for the residuals instead of considering the raw data. This process is reiterated until the extracted frequencies have negligible amplitude.

The Lomb periodogram was developed by Lomb (1976) and Scargle (1982) by following different ways. It is given by the equation (2.34). As we can imagine, it is impossible to estimate the Lomb periodogram for a continuous range of frequencies so we have to confine ourselves to an estimation for a discrete set of frequencies. Throughout this report we will usually use a regular and equally spaced range of frequencies for estimating the periodogram. This range of frequencies will be called *frequency domain*. The upper bound of the frequency domain will be chosen taking into account the features of the time series we expect to analyze, except when we deal with evenly time series. In this latter case, we will consider the *Nyquist frequency* (equation (2.36)) as the upper bound of the frequency domain.

---

## Chapter S.3

# Non-linear harmonic analysis

As we have pointed out in the previous chapter, the harmonic analysis is one of the different techniques we can resort to when we deal with the signal detection problem of time series. The *non-linear harmonic method* that we are describing in this chapter was developed and successfully applied to astronomical time series by *Wataru Harada* and *Toshio Fukushima* (Harada, 2003). Some of those time series are, for instance, the Time Ephemeris, the motions of Ecliptic and Laplace plane. This algorithm determines three important aspects of a time series, namely:

1. The coefficients of a quadratic polynomial trend representing the secular variation, the amplitude of Fourier terms, as well as other linear parameters by the usual linear least square method.
2. The frequencies of Fourier terms and other non-linear parameters by the quasi-Newton *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (BFGS) algorithm (Broyden, 1967).
3. The number of the non-linear parameters by increasing it one by one from zero until the *weighted root mean square*<sup>1</sup> (WRMS) of the residuals becomes smaller than the required level or until its decreasing manner becomes approximately flat for the noisy data.

Let us consider a vectorial time series with  $N \in \mathbb{N}$  observations, denoted by  $\left\{t_n, \vec{d}_n\right\}_{n=1, \dots, N}$ , where  $\vec{d}_n$  is the measurement of the phenomenon or magnitude we

---

<sup>1</sup>Or the *root mean square* (RMS) if every observation has the same weight

are interested in, at epoch  $t_n$ . The vectorial magnitude  $\vec{d}_n \in \mathbb{R}^M$  is given by:

$$\vec{d}_n = (d_{nm})_{m=1,\dots,M} = (d_{n1}, d_{n2}, \dots, d_{nM})^T \quad \text{with } M \in \mathbb{N}$$

Thus and henceforth,  $d_{nm}$  will represent the value of the  $m^{\text{th}}$  component at the  $n^{\text{th}}$  epoch. In order to facilitate subsequent calculations, given a time series, we will consider the temporal translation  $\{\tau_n, \vec{d}_n\}_{n=1,\dots,N}$  where:

$$\tau = t - \frac{t_1 + t_N}{2} = t - t_1 - \frac{T}{2}$$

being  $T = t_N - t_1$ . The algorithm (see Figure S.3.1), which we will describe briefly, is about fitting a time series using the least-squares method to a function of the form:

$$h_{nm} = \sum_{l=1}^L a_{lm} \cdot \varphi_l(\tau_n)$$

where  $L \in \mathbb{N}$  is the number of basis functions  $\{\varphi_l\}_{l=1,\dots,L}$  and  $\{a_{lm}\}$  with  $l = 1, \dots, L$  and  $m = 1, \dots, M$  are real values to solve for. Thus, in order to estimate all the linear parameters of this model, we will minimize (by using least-squares method) the objective function:

$$\phi = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mu_{nm} \left[ d_{nm} - \sum_{l=1}^L a_{lm} \cdot \varphi_l(\tau_n) \right]^2$$

where  $\mu_{nm} > 0$  is the weight assigned to the observation  $d_{nm}$ . The set of base functions consists of:

1. *Three polynomial functions* which set up the trend of the series:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= 1 \\ \varphi_2(\tau) &= \frac{4\tau}{T} \\ \varphi_3(\tau) &= \left[ \frac{3 \cdot (N-1)}{4 \cdot (N+1)} \right] \cdot \varphi_2^2(\tau) - 1 \end{aligned}$$

2. A couple of *Fourier terms* for the angular frequency  $\omega_k$ :

$$\varphi_{2k+2}(\tau) = \sin(\omega_k \tau)$$

$$\varphi_{2k+3}(\tau) = \cos(\omega_k \tau)$$

3. A couple of the so-called *mixed secular terms* for the frequency  $\omega_{k_i}$ :

$$\varphi_{2K+2i+2}(\tau) = \tau \cdot \sin(\omega_{k_i} \tau)$$

$$\varphi_{2K+2i+3}(\tau) = \tau \cdot \cos(\omega_{k_i} \tau)$$

for  $i = 1, 2, \dots, S$ . This kind of basis functions does not have to appear necessary in the model for each frequency.

First, we assume that a trend (if necessary) and  $K$  angular frequencies  $\omega_k$  are already included in the functional model, the set of them being denoted as a vector  $\vec{\omega}^{(K)} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K)^T$ . Let us also consider  $W' = \{\omega_{k_v} \in \vec{\omega}^{(K)}\}_{v=1, \dots, S}$ , the subset of frequencies already associated to mixed secular terms. We search additional frequencies that could be added to the functional model by studying the Lomb periodogram of the residuals obtained from the least squares fit of the temporary functional model.

A criterion is needed to guess which frequencies are linked to mixed secular terms and which not, so as to construct our objective function. The procedure that allows us to elucidate such an association is based on the Lomb periodogram and an extension of it. The algorithm increases the number of frequencies one by one and adds them to the model. First, we have to compute the spectrum of the Lomb periodogram, which is given by the formula (3.66)–(3.72). The peak of this spectrum will point out a significant angular frequency to be included in the model. In the next stage, when the Fourier term of the frequency is already selected as a basis function, we compute the extended periodogram given by the equations (3.72)–(3.78). If this maximum of the extended periodogram is larger than the maximum of the Lomb periodogram, mixed secular terms will be linked to this frequency. In other case, we will only select classic Fourier terms. As we draw each frequency, an adjustment of the data is made by using the least-squares method (equations (3.62)–(3.65)) just to solve for



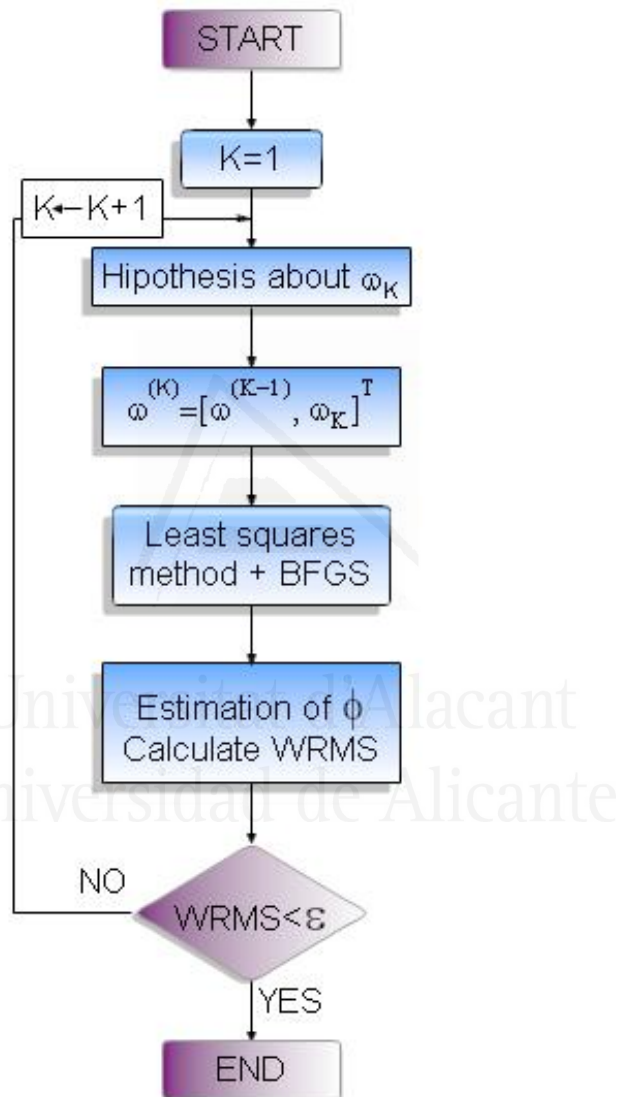


Figure S.3.1: Non-linear harmonic scheme.

the value of the linear coefficients  $\{a_{lm}\}$  with  $l = 1, \dots, L$  and  $m = 1, \dots, M$ . After each estimation of these coefficients that we denote by  $\tilde{a} = \{\tilde{a}_{lm}\}$  with  $l = 1, \dots, L$  and  $m = 1, \dots, M$ , and before adding a new angular frequency, we can regard the objective function of the least square problem for our model (3.60) as a function in the space of frequencies, that is:

$$\phi(\tilde{a}, \vec{\omega}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mu_{nm} \left[ d_{nm} - \sum_{l=1}^L \tilde{a}_{lm} \cdot \varphi_l(\tau_n, \vec{\omega}) \right]^2 = \hat{\phi}(\vec{\omega})$$

with  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^K$ . Therefore, our problem is reduced to a minimization problem (P1) that depends non-linearly of the parameters, namely:

$$\begin{aligned} (P1) \quad & \text{Min} \quad \hat{\phi}(\vec{\omega}) \\ & \text{s.t.} \quad \vec{\omega} \in \mathbb{R}^K \end{aligned} \quad (S.3.1)$$

To carry out this task we use the *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (BFGS) algorithm (Broyden, 1967; Press et al., 1967) where we consider  $\vec{\omega}^{(K)}$  as a seed point. Let us denote by  $\vec{\omega}_s$  the solution of (P1). Next stage deals with the adjustment of the model (3.60) to the data by considering  $\vec{\omega}_s$  as a vector of frequencies and by using the least squares method again. This cycle recurs until the difference between the seed point and the solution of (P1) becomes small. After that, we can continue extracting another frequency or we can stop the process if the weighted root mean square of the residuals becomes smaller than a fixed level. We can also stop the algorithm by reaching a preset number of frequencies given by the user. The WRMS is given by the equation:

$$WRMS = \sqrt{\frac{\phi}{\Upsilon}}$$

where  $\phi$  is the value of the objective function in equation (3.61) and  $\Upsilon$  is the sum of the weights of the observations:

$$\Upsilon = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mu_{nm}$$

being  $N$  the number of observations and  $M$  the number of observable magnitudes.



---

# Chapter S.4

## Celestial Pole Offsets

### S.4.1. IAU1980 Pole Offsets

#### S.4.1.1. Data

The *Earth Orientation Parameters* (EOP) describe the irregularities of the Earth rotation with respect to a non-rotating reference frame. Two parameters ( $\delta\psi, \delta\epsilon$ ) correct the precession-nutation model of the celestial pole, one parameter (UT1-UTC) gives the irregularities of the rotation angle, and the two last ones ( $X, Y$ ) describe the polar motion with respect to the crust. They give the full transformation between the *International Terrestrial Reference Frame* (ITRF) and the *International Celestial Reference Frame* (ICRF) (see Bizouard and Gambis).

The data<sup>1</sup>, “*EOP C04\_05 series for 1962-2010 (IAU1980)*”, provide the EOP’s from January, 1st 1962 up to the present considering the IAU1980 precession-nutation model. They are daily spaced in time and they are consistent with the ITRF2005. The time series we are going to study now refer to the pole offsets ( $\delta\psi, \delta\epsilon$ ).

#### S.4.1.2. Analysis and results

We consider the vectorial time series defined by the pole offsets ( $\delta\psi, \delta\epsilon$ ). The time domain starts on September, 23rd 1985 and finishes on September, 23rd 2010.

---

<sup>1</sup>From Earth orientation data section of <http://www.iers.org/>

Thus, the number of observations is  $N = 9132$ . Those data are analyzed by using the non-linear harmonic method described in chapter S.3 and by considering a weight,  $\mu_{nm} = 1/\sigma_{nm}^2$ , for each observation  $d_{nm}$  where  $n = 1, \dots, N$ ,  $m = 1, 2$  and  $\sigma_{nm}$  is the uncertainty associated with the observation  $d_{nm}$ .

We extract up to 20 fundamental frequencies from the data by considering a threshold of 0.1 milliarcseconds ( $mas = 0.001''$ ) for the WRMS. The frequency domain ranges between 0.0001 and 0.5 cycles per day ( $cpd$ ) and it is discretized by using a step-size of  $h = 0.0001$   $cpd$ . The threshold for the BFGS phase is set to 0.0001 units. Finally, the trend component is supposed to be linear for this study.

Once the analysis has been performed, we get the following results. The analytical expression for the estimated trend component is given by the equations (4.1)–(4.2) where  $\tau_n = t_n - t_c$  is a translation of the time domain centered on the modify julian day  $t_c = 50896.5$   $MJD$  (March, 24th 1998) and  $\varphi_2(\tau_n)$  is the basis function defined by the equation (3.15). The trend coefficients and their uncertainties are given in  $mas$ .

The harmonic content for both magnitudes are shown in Tables 4.1–4.4. In order to compare the differences between the estimated models and the raw data, we have proceeded to represent the analyzed data (Figure 4.3) and their approximations (Figure 4.4), as well as the residuals generated by the models (Figure 4.5). Finally, we can see how the WRMS decreases as new parameters are added to the model during the estimation process (Figure 4.6). Table 4.5 shows the *amplitude*,  $A$ , and *phase*,  $\theta$ , of each spectral line considering the model given by the equations (4.3)–(4.5) where  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  is the angular frequency linked to the fundamental frequency denoted by  $f$ .

### S.4.1.3. Conclusions

By using the estimated models, we reach a value of 0.4604  $mas$  for the WRMS for  $\delta\psi$  component, and 0.2596  $mas$  for  $\delta\epsilon$ . These values can be translated into a reduction of the weighted mean square error of about 96.43% and 88.16% for  $\delta\psi$  and  $\delta\epsilon$ , respectively.

As we can see in Tables 4.1 and 4.3, the first fundamental frequency that is extracted corresponds to the annual period. This signal has an estimated amplitude

of  $5.23 \pm 0.01$  *mas* for  $\delta\psi$  and  $2.07 \pm 0.00$  *mas* for variations in obliquity,  $\delta\epsilon$ . Likewise, as it is shown in Table 4.5, the maximum annual signal is reached at  $224.04^\circ \pm 0.09^\circ$  and  $160.46^\circ \pm 0.13^\circ$  for  $\delta\psi$  and  $\delta\epsilon$ , respectively. If we express those values in units of time, we conclude that these phases of maximum signal correspond to mid-November and the first fortnight of September, respectively.

The semiannual period is also another spectral line included in the harmonic content of the models. It is the third fundamental frequency extracted from the data and it has an amplitude whose magnitude is only half of the yearly amplitude in both components. In addition, the maximum effect caused by this signal (expressed in terms of time) occurs in late April/October for  $\delta\psi$  and during the first half of May/November for  $\delta\epsilon$ .

Interestingly, the second frequency that is detected corresponds to a period of time of 6549.53 days (about 17.9 years). The amplitude of this term is larger than the amplitude of the annual signal for both components. Its nature is not known but we might think that it has something to do with the lunar libration because of the large percentage of variability that it explains and also due to its nearness to a period of 18 years (*Saros cycle*). Related to this harmonic, we find out a period of time called *eclipse season* which refers to the period of time between two alignments of the lunar nodes with the Sun. This period, which is about 173.31 days, turns out to be quite similar to the tenth frequency included in the harmonic model (177.94 days), so it might be associated with this phenomenon.

The fourth frequency corresponds to the semidraconitic period (13.66 days). This signal is half the time that the Moon needs to complete the translation process around the Earth (27.3 days). Curiously, this period of time of 27.3 days, is also included in the model in ninth position with an amplitude of  $0.12 \pm 0.01$  *mas* and  $0.02 \pm 0.00$  *mas* for  $\delta\psi$  and  $\delta\epsilon$ , respectively.

It also appears a spectral line of 8.8-year period. Its origin is not clear but we think that it might be related to the Moon and Sun. It is well known that the apogee revolves around the lunar orbit once in 8.8 years (S.Chapman and Lindzen, 1970), so this fluctuation of the pole offsets might be related to this phenomenon to some extent.

Finally, there are many other well-known frequencies such as 1-month period (8th

frequency) or the so-called *Chandler wobble period*, henceforth CW (433.60 days), which is linked to mixed secular terms. It is complicated to explain the cause or origin of the CW, in fact, it is still being studied by many scientists. It ranges between 416 and 433 days but its nature is not clear. On the other hand, it is also known that one of the main components of the *free core nutation* (FCN) has a retrograde nominal period of 430.3 days, so the spectral line associated with the 433.60-day period might be linked to the Earth's liquid core movement.

## S.4.2. IAU2000 Pole Offsets

Among the data that the *International Earth Rotation and Reference Systems Service* (IERS) has regularly published for the conventional transformations are celestial pole offsets  $\delta\psi$  and  $\delta\epsilon$ , representing the observed angular offset of the celestial pole from its modeled position, expressed in terms of changes in ecliptic longitude and obliquity. Apart from those parameters, the IERS also publishes observed celestial pole offsets with respect to the IAU2000A precession-nutation model in terms of the parameters  $\delta X$  and  $\delta Y$ , which are small changes in the unit vector components of the celestial pole position (Kaplan, 2005). This reflects the new IERS computational procedure whereby the pole position is expressed in rectangular coordinates  $(X, Y)$  with respect to the axes of the *International Celestial Reference System* (ICRS) (with  $Z = \sqrt{1 - X^2 - Y^2} \approx 1$ ). Thus, in the long term, only  $\delta X$  and  $\delta Y$  will be available from the IERS (Kaplan, 2005).

Because the IAU2000A precession-nutation model matches modern VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*) observations quite well, the magnitudes of the pole offsets are now of order 1 *mas* or less, compared to several tens of *mas* for the offsets from the previous models (Kaplan, 2005). Due to this improvement in the data it might be interesting to carry out an study of the time series  $(\delta X, \delta Y)$ .

### S.4.2.1. Data

The data, “*EOP C04\_05 series for 1962-2010 (IAU2000)*”, are available at IERS web site. They provide the EOP's from January, 1st 1962 up to the present considering the IAU2000A precession-nutation model. They are daily spaced in time and

they are consistent with the ITRF2005. From this file we only consider the columns that refer to  $\delta X$ ,  $\delta Y$  and their errors.

### S.4.2.2. Analysis and results

In order to establish a comparison between the results of this analysis and the results gotten for changes in ecliptic longitude and obliquity, we keep the same analysis conditions that we fixed for the  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$  pole offsets study. This time, the analytical expression for the estimated linear trend component is given by the equations (4.6)–(4.7) where  $\tau_n = t_n - t_c$  is a translation of the time domain centered on  $t_c = 50896.5$  *MJD* (March, 24th 1998) and  $\varphi_2(\tau_n)$  is the basis function defined by the equation (3.15). The trend coefficients and their uncertainties are given in *mas*.

Tables 4.6–4.9 show the harmonic content of the estimated  $(\delta X, \delta Y)$ -model. In addition, Table 4.10 contains the amplitude and phase of each spectral line according to the model given by the equation (4.3). Finally, we include some graphical displays of the raw data (Figure 4.7), the estimated model (Figure 4.8), residuals (Figure 4.9) and the decreasing manner of the WRMS as new parameters are added to the model during the estimating process (Figure 4.10).

### S.4.2.3. Conclusions

The estimated models produce a value of  $WRMS = 0.1406$  *mas* for the  $\delta X$  component, and  $WRMS = 0.1774$  *mas* for  $\delta Y$ . These values can be translated into a reduction of the weighted mean square error of about 27.61% and 14.79% for  $\delta X$  and  $\delta Y$ , respectively. It seems to be a timid percentage if we consider the number of parameters included in the model, but we think that this low percentage is due to the large error that is linked to the data during the first 13 years. In any case, the models seem to suit the most reliable observations quite well and they appear to describe what its behavior would be in the period of time before 1998, which contains less reliable observations (see Figures 4.7–4.9).

As far as the harmonic content is concerned, we can establish a comparison with the estimated  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$ -model. They both have similar frequencies such as periods of 13.66 and 3274.45 days, although there are other different spectral lines that are



worth mentioning. The  $(\delta X, \delta Y)$ -model contains a frequency which is quite similar to the 433.60-day period that was drawn from  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$ . This harmonic is the first detected frequency (457.77 days). Despite being slightly different, it would not be ridiculous to think that they both have a common origin. As we said, this signal can be related to the nutation of Earth's liquid core, the main component of which has a 430.3-day retrograde period that is not stable (it changes with time) and, currently, it is estimated as  $445.5 \pm 0.5$  days (Gubanov, 2009).

The analysis of the vectorial time series  $(\delta X, \delta Y)$  reveals a spectral line linked to 62.72 days (a 2-month period, approximately) that is not extracted from  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$  (although a 1-month period appears in the latter). Apart from this harmonic, something that catches our eye is that Tables 4.6 and 4.8 do not contain a clear annual signal (the nearest ones are 351.75 and 384.39 days). On the other hand, the position of those frequencies is also strange (No. 7 and 8), although this might be due to the influence of the errors/uncertainties of the data that correspond to the first 13 years.

There are other spectral lines that turn out to be interesting such as one linked to a week period (6th frequency) with an amplitude of  $0.0277 \pm 0.0022$  *mas* and  $0.0077 \pm 0.0033$  *mas* for the  $\delta X$  and  $\delta Y$  component, respectively. We also observe a quarterly period (91.80 days), but its amplitude is weak if we compare it with the amplitude of other peaks.

We can not venture to what extent observation errors for  $(\delta X, \delta Y)$  may lead to the creation of false frequencies. Periods such as 412.33, 534.88, 351.75 or 384.39 days are difficult to interpret and they might be related to spurious spectral lines. It would be ideal to have a  $(\delta X, \delta Y)$  series with equal or greater length than the analyzed one and whose observations were not affected by large errors. However, we do not currently have a series with those features, so we will confine ourselves to analyze the data for the last part of the time domain (which is not affected by large errors). Thus, we remove from the time series the data until September, 23rd 2000. The remaining data are analyzed keeping the same conditions that were used for the previous  $(\delta X, \delta Y)$  series. This time, the WRMS is reduced about 42.69% and 33.49% for the  $\delta X$  and  $\delta Y$  components, respectively (this value is almost twice larger than the percentage gotten for the long time series). On the other hand, the linear trend component is now estimated by the equations (4.8)–(4.9) where  $\tau_n = t_n - t_c$  being

$t_c = 53636$  *MJD* (September, 23rd 2005), and  $\varphi_2(\tau_n)$  is the basis function given by the expression (3.15). Once again, the trend coefficients and their uncertainties are expressed in *mas*.

Figures 4.11, 4.12 and 4.13 show the graphical display of the analysis and Tables 4.11–4.13 contain the estimated parameters of the model. As we can see, periods of 412.33 and 534.84 days, the nature of which were difficult to determine, do not appear anymore. On the other hand, other spectral lines that do not previously appear in the top 20 frequencies are now detected, such as a semiannual period (182.16 days, approximately) or a 650.44-day period. Finally, many other signals appear in both models (or, at least, they are quite similar) such as the frequency possibly related to the FCN period, the signal related to the lunar nodes or the quarterly and 2-month periods, among others. We might expect that these harmonics correspond to real spectral lines of the behavior of  $(\delta X, \delta Y)$ , however, we do not have enough evidence to establish a conclusion.

### S.4.3. Dynamic models for $(\delta\psi, \delta\epsilon)$ prediction

The harmonic models estimated in previous sections can be easily re-estimated when we get new observations of the phenomenon. Let us consider the vectorial time series  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$  according to the IAU1980 nutation-precession model. By using a routine created with MATLAB we can estimate a set of non-linear harmonic models and use them for predicting. The first model is estimated from the  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$  series with a time domain that ranges between September, 23rd 2000 and September, 23rd 2005. By using this estimated model, we predict the phenomenon for the next 31 days. This model is updated and re-estimated weekly, getting a new prediction for the next month starting from the last epoch included in the raw data. Therefore, we get a new model and a new prediction every 7 observations. The conditions for the analysis are exactly the same as the conditions set in this chapter during the previous analysis. On the other hand, we know the real value of the phenomenon  $(\delta\psi, \delta\epsilon)$  for the predicted time domain, so we can estimate the absolute error that we make with the predictions. Figure 4.14 shows those errors in a color matrix. The row refers to the number of days in the future from the last epoch included in the raw data to

estimate the model and each column represents an updated model. As we can see, those maps are quite uniform with values that range mainly between 0 and 0.4 *mas*. However, there are temporal ranges where the predictions are slightly worse. This is the case of  $\delta\psi$  for the prediction of 2008–2009 (models No. 140–180) and those months of early 2010. The error is much more remarkable for the  $\delta\epsilon$  predictions (Figure 4.14b), especially in late-2006 months and the year 2008.

To study the behavior of the dynamic model we can estimate the RMS as a function of the number of days in the future,  $h$ . By this value, we can get an idea about the error we might expect to make as the prediction time is moving away. The  $RMSE(h)$  is given by the equation (4.10) with  $h = 1, 2, \dots, 31$  and where  $\delta\psi^{(i)}(t^{(i)} + h)$  is the prediction obtained by using the  $i$ -th model for the  $h^{th}$  day after the last epoch ( $t^{(i)}$ ) included in the data used for estimating the model,  $M$  is the total number of models and  $\delta\psi(t^{(i)} + h)$  is the real value of  $\delta\psi$  on epoch  $t^{(i)} + h$ . The expression for  $\delta\epsilon$  is similar. The  $RMSE(h)$  is shown in Figure 4.16. As we can see, the  $RMSE(h)$  has a positive slope for  $\delta\psi$ , although it seems to be more stable for  $\delta\epsilon$ .

As far as the worst prediction epochs are concerned, we think that these errors might be due to some phenomenon that affects the Earth's rotation to some extent, the effect of which is not completely taken into account in the estimated models. This phenomenon might be the *El Niño/Southern-Oscillation* (ENSO), which took place in the period of time where the predictions are less accurate, even though more information is needed to give a reliable conclusion.

---

## Chapter S.5

# Geocenter variations caused by continental water flux

### S.5.1. Introduction

The *geocenter* is defined as the mass center of the Earth system, including the solid earth, oceans, and atmosphere (Chen et al., 1999). In a reference frame linked to the solid Earth and defined by a set of mean geodetic station coordinates, the center of mass of the Earth system moves because of mass redistribution inside the system (Bouillé et al., 2000).

On timescales ranging from intraseasonal to interannual, this mass redistribution mainly results from fluid redistribution within and between atmosphere, oceans, continental water reservoirs and ice sheets (Bouillé et al., 2000). The question that needs to be answer now is to what extent this redistribution of mass can affect the position of the geocenter. Several studies were carried out about this issue (Chen et al., 1999; Dong et al., 1997). They conclude that the contribution of atmospheric pressure, ocean mass and continental waters produce an annual geocenter variation whose amplitude is less than 5 millimeters (*mm*).

In this chapter we are going to study the behavior of the geocenter due to the redistribution of the continental water. To carry out this task we have considered the *Land Data Assimilation System* (LDAS) model produced by the *Climate Prediction Center* (CPC) of the *National Oceanic and Atmospheric Administration* (NOAA).

## S.5.2. Data

As we have already mentioned, we have used the data of the LDAS model to perform the analysis of the variations of the geocenter due to the redistribution of continental water mass. LDAS is forced by observed precipitation, derived from CPC daily and hourly precipitation analysis, downward solar and long-wave radiation, surface pressure, humidity, 2-m temperature and horizontal wind speed from the *National Centers for Environmental Prediction* (NCEP) reanalysis. The output consists of soil temperature and soil moisture in four layers below the ground. At the surface, it includes all components affecting energy and water mass balance, including snow cover, depth, and albedo. The data<sup>1</sup> represent the monthly averaged soil water storage changes (in *centimeters (cm) of equivalent water thickness*). They are provided on a 1x1 degree grid that covers the whole Earth's surface (although no estimate is provided over Antarctica) during the period of time ranging from January, 1948 to December 2007.

We will consider each grid of data as a system of particles, where each one corresponds to a 1x1 degree square and whose mass depends on its area and the amount of water in it. The cartesian coordinates of the geocenter for this system of particles will be given by the equations (5.4)–(5.6). In these expressions  $\phi$  is the latitude (expressed in radians),  $\lambda$  is the East longitude (expressed in radians),  $M_E = 5.9742 \times 10^{27}$  grams is the mass of the Earth,  $L(\phi, \lambda)$  represents the water storage (in *cm* of equivalent water thickness) of the region of the grid that contains the point with coordinates  $(\phi, \lambda)$ ,  $R_E = 6.371 \times 10^8$  *cm* is the Earth's mean radius and  $\Delta s$  is the area of the surface linked to  $L(\phi, \lambda)$  given by the equation (5.7) (see Chen et al., 1999).

By using the equations (5.4)–(5.6) we build the scalar time series that represent the variations of the geocenter in each cartesian coordinate due to the redistribution of continental water mass.

## S.5.3. Analysis and results

We have performed a non-linear harmonic analysis of each scalar time series,  $X$ ,  $Y$ , and  $Z$  representing the cartesian coordinates of the center of mass of the

<sup>1</sup>Available at <ftp://ftp.crs.utexas.edu/pub/ggfc/water/CPC/>

continental water system. The time domain considered goes from January 1970 to December 2007 (throughout 456 monthly observations). We extract up to 15 spectral lines for each component from a frequency domain ranging between 0.0001 and 0.5 cycles per month. The step-size for the discretization of the frequency domain is 0.0001 cycles per month. On the other hand, the bound for the frequency vector in the non-linear optimization phase is set to 0.0001 units. Similarly, the minimum value allowed for the RMS is 0.0001 *cm*. Finally, we consider a polynomial linear trend component to be included in the functional model.

After the analysis with the available routines created with MATLAB, we get the following results. The trend component for each coordinate is represented in Figures 5.2c, 5.3c and 5.4c. Their analytical expressions are given by the equations (5.8)–(5.10) where  $\tau_n = t_n - t_c$  is a translation of the time domain centered on  $t_c$  that corresponds to mid-January, 1989 and  $\varphi_2(\tau_n)$  is the basis function given at equation (3.15). The estimated coefficients and uncertainties of the trend component are expressed in *cm*.

As far as the harmonic content is concerned, this is shown in Tables 5.1, 5.3 and 5.5. The frequencies that are linked to mixed secular terms in each coordinate can be found in Tables 5.2, 5.4 and 5.6. Moreover, Figures 5.2d, 5.3d and 5.4d show the graphical display of the estimated models for  $X$ ,  $Y$ , and  $Z$  coordinates, respectively. In the same way, Figures 5.2e, 5.3e and 5.4e refer to the residuals generated by the model. In order to understand how the RMS is reduced as new parameters are added to the model, we show the Figures 5.2f, 5.3f and 5.4f where this reduction is represented.

Finally, Tables 5.7, 5.8 and 5.9 contain the estimation of the amplitude (in *cm*),  $A$ , and phase (angle in degrees of maximum influence),  $\theta$ , of each frequency according to the model given by the equation (4.3).

## S.5.4. Conclusions

The estimated harmonic models are able to reduce the value of the RMS to 0.0168 *cm*, 0.0153 *cm* and 0.0117 *cm* for the  $X$ ,  $Y$  and  $Z$  coordinates of the center of mass of the continental water system. However, all models are not formed by the

same number of parameters and they not have the same harmonic content. Thus, the model for the X coordinate uses 57 parameters, whereas the model for the Y coordinate uses 51, and the Z-model includes 59 parameters. Those models are able to explain 71.92 %, 82.48 % and 83.05 % of the variability of the data for the X, Y and Z component, respectively.

As we might expect from the graphical display of the data, the trend component does not contain a significant amount of information of the geocenter variations. This can be understood by looking at the small estimated value of the trend coefficients and the percentage of variability that this component explains (1.63 %, 0.32 % and 2.84 % for the X, Y and Z coordinates, respectively).

In this study, a frequency that deserves special attention is that one linked to an annual period. This signal is detected in X, Y and Z coordinates of the center of mass, and furthermore, it always appears at first position in the harmonic content. On the other hand, this frequency explains the largest percentage of variability (36.76 %, 51.46 % and 51.11 % for the X, Y and Z coordinates, respectively). From Tables 5.7–5.9 we can observe that at annual frequency the largest contribution arises in the Y component with an annual cycle of 1.07 mm, showing a maximum between late April and early May. The annual cycle for the remaining coordinates is smaller, with a minimum of 0.65 mm in the X component. Note that these results are consistent with other studies such as that one carried out by Bouillé et al. (2000). The only substantial difference lies in the epoch of maximum influence of the annual signal.

The semiannual period, is clearly shown in the Z and Y coordinates with amplitudes of 0.11 mm and 0.31 mm, respectively. However, this spectral line is not detected for the X component. The most similar fluctuations correspond to periods of 4 months (with 0.0999 mm of amplitude) and 8 months (0.0083 mm of amplitude). The reason why the semiannual period does not appear for this coordinate is because it has an amplitude less than 0.0083 mm (which corresponds to the amplitude of the last frequency considered in the model for the X component). In fact, if we perform a harmonic analysis by extracting a larger number of frequencies or considering a vectorial analysis of (X, Y, Z), the semiannual frequency appears as part of the harmonic content and it does with an amplitude of 0.0061 mm, approximately.

Many other frequencies associated with interannual periods also appear in the

harmonic content of the estimated models. Among them, we find a frequency close to a 2-year period (around 23–25 months). This signal has an amplitude of 0.099 *mm*, 0.016 *mm* and 0.072 *mm* for the *X*, *Y* and *Z* coordinates, respectively. If we look for its origin, this frequency might be associated with the so-called *Quasi Biennial Oscillation* (QBO) (Alexander and Weickman, 1995). This phenomenon is an atmospheric oscillation that takes place every 20–36 months or so, and among its effects we can highlight the change of monsoon rains, which directly affects the distribution of continental water.

Another interannual frequency that appears in the estimated models is linked to a period of 3.5–3.8 years (42–46 months). This signal was also detected by Huang et al. (1996), although the estimated value of its amplitude differs from that one presented in this chapter. Its nature, as well as the origin of the 55–68 months signal (4.5–5.5 years), is unknown but, perhaps, it might be attributed to the climatological phenomenon ENSO which is repeated every 3 to 7 years (with an average of 5 years).

There are also fluctuations associated with long periods of time that range between 123 and 198 months. Thus, the *X* coordinate seems to be affected by a 15.12-year signal whose amplitude is 0.099 *mm*; the *Y* component has a 10.3-year fluctuation of 0.2 *mm* of amplitude and finally, the *Z* coordinate shows a period of 16.47 years whose amplitude is 0.055 *mm*, approximately. These spectral lines are some of the most important signals in the models because they explain a significant proportion of the variability of the data and they have a remarkable amplitude if we compared them with other harmonics. The origin of these signals is difficult to guess. It is unknown to what extent monthly data can affect the detection of the spectral lines because the time between two consecutive months is not always the same. If we assume that this fact affects the extraction frequency process, we can say that this period of 10–16 years might be related to the lunar nodes period and semi-period (18.6 and 9.3 years). Obviously, other studies are required to check this hypothesis.

Finally, we note that other shorter periods (80–100 months) are included together with these aforementioned spectral lines. At this moment, its origin is unknown so, in the future, it would be interesting to study the harmonic content of some climate phenomena in order to find similarities and answers.





---

## Chapter S.6

# Spatio-temporal models for continental water flux

### S.6.1. Introduction

*Continental water storage* (from now on, CWS) is defined by some authors as all forms of water stored above and underneath the surface of the Earth (Syed et al., 2008). Taking into account this definition we can understand what kind of water compartments involve continental water storage. These compartments go from water on wetlands, lakes, rivers or reservoirs, to snow, soil moisture, groundwater and even water on the vegetation canopy (Güntner et al., 2007).

Clearly, continental water storage is not a static phenomenon. As time passes by, the amount of water that we can find stored on the Earth's surface varies due to several reasons and it depends on space. Precipitations, evapotranspiration, temperatures, rivers runoff and water withdrawal for human use are a few examples of factors that have influence on CWS variations. Moreover, these changes in CWS are not uniform in space. In fact, it varies quite a lot among the climate zones, being tropical and high-latitude areas the places where the strongest variations are shown (Güntner et al., 2007). But that is not all, changes and variations are obviously different inside each climate zone, so it would be interesting to analyze the time-space behavior of *continental water flux* (henceforth, CWF) in order to obtain a model that can provide us with more insight into the phenomenon and its consequences.

Creating a “handy” harmonic model for the variations in CWS is necessary due to its participation on the Earth’s evolution as an extremely involved dynamic system. These variations affect climate, weather, land and several geophysical phenomena. In fact, CWF entails transportation and redistribution of the Earth’s mass which is directly related with changes in terrestrial gravity field, in Earth rotational variation and polar motion besides elastic oscillations of the Earth’s surface. Although scientists do not fully agree in which way and amount continental water flux contributes to polar motion (Chao and O’Connor, 1998; Hinnov and Wilson, 1987; Kuehne and Wilson, 1991; Lei and Gao, 1992; van Hylckama, 1970), it is undeniable that it affects this phenomenon to some extent.

On the other hand, CWF is an essential issue to understand the global hydrologic process, the energy cycle and biochemical phenomena. It is especially important for the existence of an enormous variety of ecosystems and it allows human beings to cover basic needs including water for agriculture, industry or domestic use. Therefore, not only CWF and CWS have implications on natural and physical sciences, but also they are significant for the economical sphere. As we can infer, the presence of water in our continents means life and quality of life. There are not many fields where water does not play an outstanding role. Everywhere we take a look around, we can find out the participation of water no matter its form, and this is just the top of the iceberg.

Once we are aware of these facts, we can understand the importance of offering a model that explains not only how continental water flux behaves at present or in the past, but also in the future. Herein, we put forward a study that complements recent studies such as Güntner et al. (2007), Syed et al. (2008) and Schmidt et al. (2008), among others. Our approach is different from those ones aforementioned in several aspects that refer to the model, time domain and aims. Some of them basically involve a global analysis of the variations in CWS at several non-small areas (major global climate zones, largest river basins, etc.) and the study of the behavior of these variations at annual or seasonal scales. However, they do not offer an analytical harmonic model that gives us the estimation of CWF for every particular area at the moment we are considering. On the contrary, we provide a mathematical harmonic time-dependent model that makes possible knowing the estimation of CWF at a

given epoch for a given specific continental area from a 1x1 degree grid that covers the Earth's surface. On the other hand, there are studies that also consider such kind of analytical time-depended models, as Schmidt et al. (2008) do; however, we can find fundamental differences between those ones and our model. If we briefly compare the study that is carried out by Schmidt et al. (2008) with the analysis that we will detail in this chapter, it is possible to realize some remarkable differences:

1. First, they use GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) monthly data to obtain global models for the largest river basins. This choice is very timely, but it imposes several strong limitations. On one hand, they just have three years of available data, from February 2003 to December 2006 and besides, the time series are not equally spaced because of GRACE data gaps during June 2003 and January 2004. On the contrary, we use the monthly estimations of the continental water storage from the CDAS-1 (*Climate Data Assimilation System I*) model provided by the NCEP and the *National Center for Atmospheric Research* (NCAR). The file contains evenly time series of CWF from January 1993 to December 1998. The larger the period of time is, the easier detecting hidden significant frequencies. Moreover, we do not merely obtain analytical models for the largest river basins.
2. They select the frequencies by using the well-known EOF analysis and determine the models by following an algorithm which is based on the ideas described by Mautz and Petrovic (2005). On the other hand, we use the non-linear harmonic analysis (Harada, 2003) detailed in chapter S.3 for extracting the hidden frequencies from the data, which is a mathematical tool that nobody has used to study CWF so far. As we already know, this technique adds frequencies to the analytical model one by one. Moreover, once a frequency is selected, this does not mean that it has to be immutable. We just need to consider any geophysical phenomenon to observe that it turns out to be a dynamical system subjected to natural perturbations, especially in its periodical behavior. A generic effect of non-linearity is that the response to a given disturbing frequency rarely keeps the same period of the perturbation but exhibits some shift, although it turns out to be difficult to compute in most cases (Giacaglia, 1972; Nayfeh, 1973; Sanders and Verhulst, 1985). Therefore, there are deep reasons

beyond looking for lower residuals to allow that the frequencies included in our models can vary as another frequency is added to the model, as we will see later. So, we will hardly find a model where annual or semiannual exact periodicity appears for a specific area just because that would not fully reflect reality and theory.

3. Also, there are differences in the make-up of the model. Schmidt et al. (2008) consider a linear trend component, while we contemplate a polynomial quadratic one. Besides, they include only Fourier terms and they do not consider the so-called mixed secular terms, which is something we take into account.

As a result, our outcomes show evident qualitative differences with those ones obtained by Schmidt et al. (2008). Nevertheless, they are not easily comparable because they refer to different epochs and they also have been fitted by using different data sets.

To carry out the study of the CWF, we have developed a package of routines that can be used to perform a non-linear harmonic analysis with a wide variety of options that the user can specify. Those programs will allow us to perform and compare two simple analytical models in order to explain the harmonic behavior of CWF in different continental areas of the planet. However, it is important to know that this analysis package is not specific for the study of CWF; in fact, it is flexible enough to be performed in the analysis of other different time series such as scalar or vectorial time series whose observations can be equally or not equally spaced in the time domain (which are more common to find in real world).

## S.6.2. Data

To understand the relevance in geosciences of the implemented methods as well as to compare their ability, we have analyzed a set of data<sup>1</sup> that represent the monthly mean CWF. The file contains the CWF from January 1993 to December 1998. For each month, those numerical values are stored in a matrix where every single entry symbolizes the mean continental water flux that corresponds to an area of the planet.

---

<sup>1</sup>Extracted from <http://www.iers.org/MainDisp.csl?pid=43-25750> (Geophysical Fluids Data section)

Therefore, we have a matrix for each considered month, which contains the estimation of the CWS variations all over the world. The Earth surface is divided into a  $1^\circ \times 1^\circ$  grid, so each one of these mentioned matrixes has exactly 65160 elements. However, due to several reasons, some points of the grid were rejected. Coordinates that correspond to oceans, seas or lakes are obviously ignored because we are only interested in continental water flux. Moreover, there are continental locations whose amount of water storage is null throughout several consecutive months and therefore, these points of the grid do not constitute a feasible time series to be harmonically analyzed. These locations correspond to extremely dry zones such as vast deserts. To put it in a nutshell, 17155 scalar time series were finally taken into account for the study while the rest of the data were discarded because of the aforementioned reasons.

Those monthly mean estimations of CWS (in grams per square centimeter,  $g/cm^2$ ) are computed from soil moisture and snow accumulation data. The soil moisture refers to two adjoining terrestrial layers. The first one is the most external and it corresponds with the top 10 *cm* of soil. The second layer comes after the first one along 190 *cm* depth. Soil moisture under 2 *m* depth is not taken into account. As far as snow accumulation is concerned, we are pointing out that the snow depth in the Antarctic is set to be a constant (despite it is not like this, actually). Changes in CWS are computed by adding soil water and snow water variations. Therefore, the flux for each month is determined by subtracting the previous monthly water storage from the estimated CWS of the current month:

$$f_{ij}(t) = w_{ij}(t) - w_{ij}(t - 1)$$

where,  $f_{ij}(t)$  and  $w_{ij}(t)$  represent the CWF and CWS estimations respectively at the epoch  $t$  in the area containing the point with latitude  $i$  and longitude  $j$  ( $i = 0^\circ, \dots, 359^\circ$  and  $j = -90^\circ, \dots, 90^\circ$ ).

### S.6.3. Methods

We have to keep in mind that we have divided the data into two parts according to their subsequent use. First, we consider the CWF from January 1993 to December

1997 in order to estimate numerical models for the phenomenon by using the package we have implemented with MATLAB. After that, we use them for developing predictions for the year 1998. The available data from January 1998 to December 1998 are used for comparing and evaluating the goodness of predictions.

We develop two different harmonic models, each one made of a polynomial quadratic trend and a periodic component. Moreover, the time domain will be centered in June 1995. The main difference between those models lies on the estimation process. The first model, from now on *NLHM*, is built regarding the process described in chapter S.3. Due to the available time domain, the model will only include three fundamental frequencies which will be characteristic of each 1x1 degree area of the continental surface.

On the other hand, the second model, henceforth *FFM* model, consists in a function of the form:

$$f(\tau_n, \omega_1, \dots, \omega_K) = \sum_{p=1}^3 a_p \varphi_p(\tau_n) + \sum_{k=1}^K [a_{2k+2} \sin(\omega_k \tau_n) + a_{2k+3} \cos(\omega_k \tau_n)]$$

where  $\{\omega_k\}_{k=1,2,\dots,K}$  are the set of prefixed angular frequencies we want to include in the model,  $\{\varphi_p\}_{p=1,2,3}$  are the basis functions defined by the equations (3.14)–(3.16),  $\tau_n$  is a translation of the time domain that centers it in June 1995 (see equation (3.17)) and  $\{a_l\}_{l=1,2,\dots,2K+3}$  are the linear coefficients that need to be estimated by least-squares. Firstly, in order to determine the fundamental frequencies that will be included in the FFM model, we need to study the Lomb periodogram (Figure 6.2) of the vectorial time series whose scalar components are the time series of every 1x1 degree region of the grid. The frequencies with higher power will be chosen to take part in the model. As we did for the NLHM, we will consider  $K = 3$  fixed frequencies for the FFM model. The angular frequencies (in cycles per month) will be :

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{6}, \quad \omega_3 = \frac{2\pi}{4}$$

that correspond to annual, semiannual and terannual (4-month) periods. The FFM model will contain the same spectral lines for all 1x1 degree area of the grid.

To get a better idea of the NLHM and FFM model, we expose the main differences

between them:

1. The harmonic content for NLHM model *does not have* to be the same for every area of the grid whereas the FFM model has *exactly the same* spectral lines for all those regions.
2. The NLHM model includes a non-linear optimization process in the frequency space whereas the FFM model does not. The FFM model does not modify the harmonic content during the estimation process.
3. The NLHM model can contain frequencies linked to mixed secular terms. On the contrary, the FFM model just uses a linear combination of Fourier terms.

## S.6.4. Results

It would be appropriate to reveal the value of the estimations of the coefficients for the NLHM and FFM model at every analyzed point but, because of the limited space of this report, it is not possible, so we will confine ourselves to a general discussion of the results by using several maps that will help us to understand the models.

It would be interesting to show the final harmonic content of the NLHM model in order to describe the results and compare the models obtained by using the implemented methods. However, explaining the composition and particular characteristics of the NLHM model turns out to be thorny since every grid element has its own model and therefore, it has its own frequencies. We can shallowly, but quickly, figure out which main frequencies are extracted from the data by creating a color map where tonality represents the value of the considered frequency in the point of the grid we are looking at. Those maps are given at Figures 6.3–6.5. On the other hand, Figures 6.6–6.13 give information about the amplitude and phase (following the model at equation (4.3)) of the most remarkable frequencies (annual, semiannual, terannual and 3-month period).

Let focuss on the NLHM models first. In Figure 6.3 is possible to appreciate the presence of a dominant nearly annual frequency which appears in almost every point of the grid. This annual frequency looks closer to 13-14 months in some parts of



the map such as those ones located at the Northeast of America or at the center of Arabia, but is hardly noticeable. In any case, the annual frequency (rarely associated with mixed secular terms) is present in the harmonic content of the NLHM model of virtually all areas tested, although it appears with different intensity in each one of them. This can be checked by observing the map presented in Figure 6.6 which includes the amplitude of the annual frequency in those regions where it is detected. We can emphasize, for example, the African central area, the Lunda Plateau and the Rift Valley of Africa, the East coast of Madagascar, the Ganges river areas and the Deccan Plateau (India), the Indochina peninsula, the Kirgiz steppe (Kazakhstan), the Brazilian plateau, the plateau of Bolivia and the Rocky Mountains, with an amplitude ranging between 14 and 18  $g/cm^2$ . The epoch when this signal reaches its maximum amplitude is shown in Figure 6.7. As we can appreciate, the period of time that ranges between February and May has the strongest voice.

Continuing the description of the harmonic content of the NLHM model, we can infer (from Figure 6.4) that semiannual period is the most remarkable second spectral line, although it shares the map with a period of approximately four months. This harmonic of two cycles per year turns out to be more important than the annual period for some areas such as the Mississippi basin, those ones near the North Pole, the Tibet region, and the Northeast Coast of Africa. Figure 6.8, which contains the amplitude of the semiannual signal, allows us to highlight areas (ranging between 9 and 14  $g/cm^2$ ) as the Congo, the Crystal Mountains and those areas close to the Zambezi River (Africa), the Deccan Plateau (India) and the plateau of Mongolia. In most of these highlighted areas, the semiannual signal reaches its greatest contribution in mid-summer and mid-winter (see Figure 6.9 to know the phase associated with the period of two cycles per year in every region where it was detected).

On the other hand, Figure 6.5 shows locations with periods that go from two to three months but above all, it shows the frequency associated to a terannual signal as the most important third spectral line that has been drawn. The areas where this signal is more important (Figure 6.10) are, for instance, the East Coast of the Indochina peninsula, the Kirgiz steppe and the plateau of Mongolia. They show amplitudes that range from 6 to 8  $g/cm^2$ , approximately. Figure 6.11 shows

the month when the terannual signal is stronger for each area.

To end the description of the NLHM model, we include the amplitude and phase maps for a quarterly signal (four cycles per year). This spectral line is the most frequently detected fourth frequency in the data, although it is not found in the same proportion as the other harmonics pointed out above. The areas that consider this harmonic appear quite isolated, although we can point out some regions such as the Australian desert, South Africa and South America, Japan and areas near the Tigris and Euphrates river, among others. In general, its amplitude is around  $3 \text{ g/cm}^2$ , except for certain areas such as Bangladesh (the South of Himalayas) where this value ranges between 4 and  $5 \text{ g/cm}^2$ . Finally, interannual signals are not widely detected but there are some regions with relatively long periodic signals.

As far as the FFM model is concerned, its description is easier because the spectral content has been fixed with anticipation and it is exactly the same for all the areas of the  $1 \times 1$  degree grid. Thus, we only need to know, somehow, the amplitude and phase where each spectral line reaches its maximum influence. These values are shown in Figures 6.14–6.19. These color maps do not differ a great deal from those obtained for the NLHM model.

As we have seen, the harmonic content of both models is similar in many continental areas, but the NLHM model considers mixed secular terms, so differences in the goodness of the adjustment are expected to become apparent. By using these models, we have tried to recover the observed data from January 1993 to December 1997, and we have estimated the residuals at each point of the grid, for every month. This has allowed us to make a residual map of the adjustment for each unit of time and calculate a RMS for each one of these maps. Once we have obtained these residuals, we estimated the goodness of each model on each point of the grid by using an F-test with a false alarm rate of  $\alpha = 0.05$  to compare the observation time series with the computed model that corresponds to a given grid element. The results allow us to conclude that the adjustment of the NLHM model turns out to be significant in all the points where the FFM model is, but not the other way around. In Table 6.1 we show the percentage of points with the same significance level for each model. In light of the results, we can say that the NLHM model allow us to understand the past of the time series (1993-1997) better than the FFM model. The

FFM model is not able to fit some areas properly (e.g. desert areas of Australia, Africa and Arabia) due to a large lack of non-zero data in there or to an erratic behavior that can not be described with the selected frequencies in the FFM model. This fact can also be observed by comparing the values of the monthly RMS that both models produce (see Figure 6.24). The RMS estimations of the FFM model are always larger than the ones from the NLHM model, even though they both have similar monotony and behavior. Table 6.2, which contains the yearly RMS value of the whole grid from 1993 to 1997, furnishes more evidences. To complement these appreciations we can calculate the variance explained by the models. The results are shown as a percentage map in Figures 6.20–6.21. After taking a look at these maps and evaluating them, it is not erroneous to assert that both, FFM and NLHM models, explain a large proportion of the variance of the data but the second one turns out to be slightly better. In fact, the NLHM model attains larger percentages at every analyzed point of the grid, especially at problematic points such as deserts and zones with high mountains (Himalaya, Fuji Mountain and ranges of Southeast of South America, among others). Moreover, if we calculate the *mean global explained variance* of the final models, we can observe how the NLHM model explains 86.4% of the variance, whereas the FFM model explains 82.9%.

As far as the prediction of the year 1998 is concerned, the results are slightly different. By using the estimated models, we are able to offer two different predictions of the continental water flux for every month at each point of the grid. Then, if we consider the actual data for 1998, we can compute the residual root mean square of the predictions through time for each point on the grid with latitude and longitude  $(i, j)$  (where  $i = 0^\circ, 1^\circ, \dots, 359^\circ$  and  $j = -90^\circ, \dots, 90^\circ$ ). With  $RMS_H(i, j)$  and  $RMS_F(i, j)$  we denote the RMS of the prediction at the point with coordinates  $(i, j)$  by using the NLHM model and the FFM model, respectively. In this way we obtain a map of RMS predictions associated to each estimated model that we have proposed (see Figures 6.22–6.23). By looking at those maps, we can infer that the FFM model can predict the continental water flux slightly better than the NLHM model in some places, especially those where the model does not fit the time series in the past as good as the NLHM model. This might be due to the shortness of the series. The number of observations is not enough to show the real harmonic content

and therefore NLHM method is not able to capture the behavior of the phenomenon in those areas. Nevertheless, the quality of the prediction is similar. Moreover, both methods give the higher RMS at the same zones. By observing Figures 6.22–6.23, we notice that these problematic areas correspond to the South of Rocky Mountains, the Coastal Plain, the Northeast coast of South America, the Andes and the Atacama Desert, the Great Rift Valley and the Mitumba Mountains, the West of Pamirs, the Manchurian Plain, areas surrounding the Nan Ling Mountains, the New Guinea Highlands, and the North coast of Australia (Kimberley, Arnhem land and the North of Great Dividing Range).

In a similar way, we have calculated the global RMS of the predictions for the whole grid (that is to say, for the multidimensional time series) by setting a particular month, so we have one value per month and method. Let us denote by  $RMS_H(t)$  and  $RMS_F(t)$  the RMS for the  $t^{th}$  month considering the NLHM and FFM model, respectively (see Figure 6.25). Thus,  $RMS_F(t)$  is slightly lower than  $RMS_H(t)$ . Moreover, both have practically the same value at last months, although  $RMS_F(t)$  is far smaller than  $RMS_H(t)$  at the beginning of 1998.

On the other hand, if we calculate the total RMS along time and space for both models, that is to say, the RMS of the predictions for the multidimensional time series along its parameters, we can see that these values only differ in  $0.16 \text{ g/cm}^2$ , approximately ( $RMS_H = 2.276 \text{ g/cm}^2$  y  $RMS_F = 2.116 \text{ g/cm}^2$ ). So there are not a big amount of points in the grid where the NLHM model is worse for predicting CWF than the FFM model and vice versa. This fact balances and explains that global RMS is quite similar for both models. Specifically, the FFM model is preferable for predicting water flux in 56.4% of the analyzed areas whereas the NLHM model is better for the remaining 43.6%.

## S.6.5. Conclusions

We have implemented a package of routines in MATLAB that provides us with a couple of different non-linear harmonic algorithms that we can use for studying a wide range of time series. As an application, we have analyzed CWF (CDAS-1) time series from January 1993 to December 1998. By using those rou-

tines, we have developed a non-linear harmonic model (NLHM) and another one with fixed frequencies (FFM) in order to know part of the periodic behavior of the CWF phenomenon.

Once the estimation and the analysis were carried out, we compared the results. In this case, we concluded that both processes lead to similar models. The harmonic content is practically the same, except for those regions where the consideration of a quarterly period, instead of a 4-month period, leads to a greater reduction of the variability of the data. In any case, we observe that the regions with greater amplitude for these detected signals correspond to those endowed with a tropical climate (either wet or dry) typical of forests and savannahs, and some regions of the Northern Hemisphere with a steppe climate that surround others with a continental climate.

As it might be expected, the NLHM model (which can contain mixed secular terms for some particular frequencies) provides a better adjustment of the data for the time domain, both globally and locally. However, NLHM model turns out to be slightly worse for predicting the year 1998 (data that were not included in the estimation of the models). In addition, the NLHM model considers a different harmonic content for each area of the 1x1 degree grid, the frequencies of which are extracted in terms of their influence on the data. To obtain the NLHM model, a optimization phase in the frequency space is performed, so we can think that it might provide better results regarding prediction and adjustment. However, the predictions obtained from this model are less accurate than those ones provided by the FFM model. The shortness of the time series may affect the harmonic content of the NLHM model and because of this, it is not able to capture the three frequencies that better explain the future behavior of each scalar time series. It can also be due to disturbances or abnormalities caused by the climate phenomenon ENSO (which apparently affects the water cycle in an irregular way) that took place in 1994/1995. This phenomenon has two phases, one with unusual warm temperatures (El Niño) and a second one with unusual cold temperatures (La Niña). The change of the conditions from El Niño to La Niña and vice versa, takes about 4 years. In fact, during 1998, the cold phase of the ENSO phenomenon took place, so the predictions we have established are estimated in a complex scenario. However, the models are

able to predict fairly well the continental water flux.

In order to provide more insight into this study, we have proposed the development of a similar analysis of the CWS considering other data sources like GRACE or LDAS which is one of the land models developed by the CPC at NOAA. These data cover a longer time domain and allow us to include a larger number of spectral lines in the models to be built.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



---

## Chapter S.7

# Harmonic study of the length of day

### S.7.1. Introduction

The Earth does not strictly follow a circular rotation, which is characterized by fluctuations of the order of a few milliseconds per century. Modern space-geodetic measurements provide detailed information about the Earth's rotation allowing us to obtain a large amount of precise observational data, from which Earth-Moon-Sun relationships as well as atmospheric, oceanic and convection interactions in the Earth's interior have been revealed (Telesca, 2007).

The Earth's rotation rate is not constant. This variation is customarily represented by the change of the *length of day* (LOD). LOD (denoted by  $\Delta$ ) is defined as the difference between the astronomically determined duration of the day and 86400 seconds. The variations in LOD can be split into several components, according to their causes. The Earth's rotation rate continuously changes due to external and internal torques (redistribution of mass and angular momentum). The variability of excess LOD ranges from sub-daily to decadal timescales (Buffa and Poma, 2000; GuoQing and HaiFeng, 2007; Niedzielski and Kosek, 2008; Telesca, 2007; Zhou et al., 2001). The quasi-periodic change of LOD on the decadal timescale is caused by the core-mantle coupling inside the Earth (Zhou et al., 2001). For timescales between few years and less than a decade, the variability of the LOD appears to be due to



ocean oscillations and the exchange of angular momentum between the atmosphere and the Earth's crust (Telesca, 2007; Zhou et al., 2001). Finally, for timescales of a year and less about 90 % of the variability in the LOD is due to the atmosphere, and in particular oceans and continental hydrology can explain a smaller amount of the LOD variability for timescales ranging between few weeks and a year (Telesca, 2007).

In this chapter, we will carry out a non-linear harmonic study of the LOD in order to obtain a model that reproduce its behavior and provide, as far as possible, new spectral information on the phenomenon.

## S.7.2. Data

The data used for performing this study were provided by LAREG Laboratory at IGN (Marne la Vallée, Paris). The file contains the LOD time series for a period of time ranging from April 12th, 1980 to December 31st, 2008. This series is an unevenly time series with 3197 observations and it is obtained by using the VLBI technique. Keeping in mind that the time domain covers a period of 28 years, the series only contains 30.48 % of the information that would be available if it was equally spaced.

Variations in LOD are of tidal or non-tidal origin. Since tide effects in LOD can be modeled with high accuracy (Petit and Luzum, 2010) (blue line in Figure 7.3), they can be subtracted from LOD time series to derive  $\hat{\Delta}$  (green line in Figure 7.3). The input data used for modeling are  $\hat{\Delta}$ .

## S.7.3. Analysis and results

Once we have removed the tidal effect from LOD, we use the non-linear harmonic method described in chapter S.3 for the analysis. We consider a polynomial quadratic trend component and we extract up to 15 spectral lines from the input time series. The step size for the discretization of the frequency domain will be 0.00001 *cpd*.

The expression for the estimated trend component is finally given by the equation (7.11) where  $\tau_n = t_n - t_c$  is a translation of the time domain centered on  $t_c = 49586.5$  *MJD* (August 22nd, 1994) and  $\varphi_2(\tau_n)$  and  $\varphi_3(\tau_n)$  are the basis functions

given by equations (3.15)–(3.16). The estimated trend coefficients, as well as their uncertainties, are expressed in milliseconds ( $ms$ ).

On the other hand, the harmonic content included in the final model is detailed in Tables 7.2–7.4. Figures 7.4a, 7.5a and 7.5b show the graphical display of the trend component, the estimated model for  $\hat{\Delta}$  and the residuals, respectively.

## S.7.4. Conclusions

The estimated nonlinear harmonic model for  $\hat{\Delta}$  can reduce 75.16 % of the RMS of the input data, being  $RMS = 0.1839 ms$  its final value. Among the most remarkable spectral lines, we found a period of about 16.20 years ( $5916.35 \pm 17.32$  days). This harmonic has an amplitude of  $0.6296 \pm 0.0037 ms$  that is almost twice the amplitude of the annual signal, which is the most important second frequency extracted from the data. We can think that the 16-year period is a spurious line introduced in the model because of the polynomial trend component, however, after performing another analysis with a linear trend component we observe that this signal is still included in the harmonic model. Nevertheless, this spectral line is not reliable because the period that is linked to it is even larger than half the length of the time domain (28 years). Due to the shortness of the time series, a real 18.6-year period of the phenomenon might degenerate into a shorter period as it has been tested synthetically. Thus, we need more observations in order to understand the origin and the truthfulness of this period of approximately 16 years.

Apart from the annual period, we can clearly see the presence of a semiannual frequency with  $0.2593 \pm 0.0033 ms$  of amplitude. Both the spectral lines of 365.07 and 182.73 days were already considered in the tidal model that was removed from VLBI observations of LOD. However, they still remain in the estimated harmonic model. This could be due to an unmodeled tidal effect but because of their large amplitudes we think that they are annual and semiannual fluctuations with non-tidal origin and they might be caused by zonal wind circulation (Buffa and Poma, 2000).

If we take a look at Tables 7.2–7.4, we can observe the existence of several frequencies associated with periods ranging from 1.8 to 2.5 years, approximately (see 4th, 6th, 8th and 10th spectral lines). The nature of these signals could be due to

the QBO of the couple ocean-atmosphere. It was proved that the quasi biennial fluctuation in LOD is mainly due to the influence of zonal winds in the atmospheric angular momentum (see Abarca del Rio et al., 2000; Chao, 1989). We should distinguish between the *stratospheric* and the *tropospheric* part of the QBO (S-QBO and T-QBO, respectively) (Abarca del Rio et al., 2000). The S-QBO is the most prominent feature in the variability of the equatorial middle and lower stratospheric circulation. It is characterized by the alternating downward propagation of easterly and westerly wind regimes repeating at quasi-regular intervals of about 27–28 months (Abarca del Rio et al., 2000; Fraedrich et al., 1993), although this period can vary from one cycle to another ranging from 22 to 34 months (Angell, 1986; Quiroz, 1981; Sasi and Murthy, 1991). On the other hand, the T-QBO is a linear climate signal in the tropics, strongly linked to ENSO as well as the annual cycle (Barnett, 1991; Lau and Sheu, 1988). According to Abarca del Rio et al. (2000), the T-QBO presents bimodal periodicities of roughly 2.1 and 1.8 years. Due to the similarity of those QBO periods with the periods detected from  $\hat{\Delta}$  and because of the evidences given by other studies (see Abarca del Rio et al., 2000; Angell, 1986; Barnett, 1991; Chao, 1989; Lau and Sheu, 1988; Quiroz, 1981; Sasi and Murthy, 1991), we can think that these 1.8–2.5-year periods of LOD have an atmospheric origin related to the QBO.

Other frequency that catches our attention is linked to a period of 1631.87 days ( $\approx 4.47$  years). This signal might be closely related to the ENSO phenomenon because, as we already now, there are evidences which claims that this phenomenon contains fluctuations that occur at scales of roughly 4 years (Moron et al., 1998; Torrence and Compo, 1998). It is also known that there is a clear correlation between LOD and the ENSO phenomenon (Chao, 1984, 1989; Gross et al., 1996; Stefanick, 1982; Zhou et al., 2001). Thus, the ENSO signal can be detected in LOD data and it increases considerably as a result of tropical easterly winds (Niedzielski and Kosek, 2008).

Apart from these frequencies, we find out other well-known spectral lines with an origin that might be geophysical such as 13.66-day signal (with an amplitude of about 0.0449 *ms*). The model does not include a period ranging between 6 and 11 years. Some fluctuations produced at this scale have been identified by Abarca del Rio et al. (2000). This suggests that, perhaps, its influence is weaker than the influence

of the frequencies already included in the model. In order to know if this hypothesis is correct, we decided to re-analyze the time series extracting up to 30 frequencies. Once the estimation process is performed, we see that a spectral line linked to 7.12-year period appears at position 25 with an amplitude of 0.02149 *ms* and is linked to mixed secular terms. However, the RMS is reduced just 0.02 *ms* with respect the 15-frequency model. The choice of one model or another will lie in the precision we want to achieve or in the complexity of the model we are ready to deal with.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



---

# Chapter S.8

## Noise

It is known that every measurement is always affected by errors although it has been made carefully. Their estimated values are not the true values of the magnitude that is measured (Bolshakov and Gaidáyev, 1989). Getting results that are completely free of error is an utopia. Until now we have assumed that time series were affected by a white noise component, however this does not always reflect reality. In this short chapter we will present some of the most important aspects related to noise, especially with the kind of noise that often appears in GPS measurements or geodetic time series.

### S.8.1. Typology

As we know, the algorithm suggested by Harada (2003) is a powerful analytical method that is able to split up heterogeneous series into a linear combination of periodic terms. Unfortunately, their use is only suitable for series affected by white noise. During the past 15 years, many studies have provided evidences of temporal correlations in GPS position time series (see, for instance, Langbein, 2008; Mao et al., 1999; Williams, 2004; Zhang et al., 1997). Specifically, the preferred models for describing the noise component in many of these series have turned out to be a combination of white and flicker noise, or a sum of a white noise and a power-law process. Thus, if this type of noise process is not taken into consideration when we perform a spectral analysis, then we can obtain harmonics that might misinterpret

the phenomenon. As a prelude to the extension of the algorithm proposed by Harada (2003), we expose some of the features and transcendental issues that we should know about a power-law noise component.

The *power spectrum* of a big amount of geophysical signals can be described as a *power-law process* that depends on the frequency. Its analytical expression is given by the equation (8.1) where  $f$  is the frequency,  $P_0$  and  $f_0$  are normalized constants and  $\alpha$  is the so-called *spectral index*. According to the value of  $\alpha$ , the noise can be classified into *fractional Brownian movement* ( $-3 < \alpha < -1$ ) and *fractional white noise* ( $-1 < \alpha < 1$ ). Noises with integer or fractional spectral indexes have special interest. The most important noise processes are, for instance, the so-called *random walk noise* ( $\alpha = -2$ , also known as *Brownian walk*), the *Kolmogorov turbulence* ( $\alpha = \frac{-5}{3}$ ), the *flicker noise* ( $\alpha = -1$ ) and the *white noise* ( $\alpha = 0$ ). On the other hand, when the spectral index is not null, the noise is called *colored noise* (see Mao et al., 1999).

The random walk noise is a noise that shows up in the data for long periods of time, that is to say, we need a large number of observations if we want to detect it in a time series. By contrast, flicker noise requires a short number of data to be detected, but more than the number of observations for recognizing a white noise.

Each power-law noise, which is characterized by its spectral index, is linked to a covariance matrix with an amplitude that determines its behavior. Now, we are going to determine the covariance matrix of a white, flicker and random walk noise.

## S.8.2. Covariance matrices

For a power-law noise with spectral index ranging between  $-3 < \alpha < 1$ , we can get its covariance matrix by simply following the method described by Johnson and Wyatt (1994). The covariance matrix of a noise with spectral index  $\alpha$  is given by equations (8.4) and (8.6)–(8.9) where  $\{t_j\}_{j=1,\dots,N}$  are the epochs that take part in the time domain.

As we already know, a white noise is characterized by a null spectral index. If we do  $\alpha = 0$  in the expressions that appear in the paper written by Johnson and Wyatt (1994), we get that the covariance matrix of a white noise is just the identity matrix.

The covariance matrix of a flicker noise was approached and derived by Zhang et al. (1997) and it is given by the equation (8.11) where  $\Delta_{ij} = |t_j - t_i|$ . However, we will not use this matrix for carrying out our studies. Instead of it, we will use the covariance matrix given by the equations (8.4) and (8.9) (for more information see Williams, 2003). The main difference between those matrices lies in the fact that if we use the latter, the amplitude of the noise is 1.7440 times bigger than the amplitude we would estimate by using the matrix suggested by *Zhang* (see Williams, 2003).

Finally, the covariance matrix of a random walk noise is given by the equation (8.15) where  $R_j = \sum_{i=1}^j \Delta T_j = t_j - t_0$ . As we can see, the covariance matrix of a random walk noise depends on time.

### S.8.3. Relationship noise-periodogram

The power spectrum of geodetic time series can be explained, sometimes, as a power-law process that depends on frequency. Let us suppose that we have a time series whose harmonic and deterministic components have been already removed. Therefore, this time series can be considered as the noise component of the raw time series. Its power spectrum can be written by following the equation (8.1). If we take logarithms in this expression, we get the equation (8.17). Now, we can easily observe that the logarithm of the power spectrum of the noise has a linear behavior depending on the logarithm of the frequency, the slope of which corresponds to its spectral index. Figures 8.1a–8.1c show the Lomb periodogram of a white, flicker and random walk noise in logarithm scale, respectively.

Sometimes we are interested in representing a noise as a linear combination of different power-law noise processes. The cross-over frequency is the point at which the power levels of two processes are equal (Langbein and Johnson, 1997). Graphically, for a given time series, the cross-over frequency could be understood as that frequency from which the periodogram of the residuals changes its slope. So, if we were able to determine the cross-over frequencies in the periodogram of a given series, we could express its noise component as a linear combination of as many noises as different spectral indexes could be identified at different scales. Another possibility, which is more common, is to assume a certain combination of power-law noise processes with



different spectral indexes and estimate their amplitudes. If one of these components is not appropriate for the model, its estimated amplitude will be null.

#### S.8.4. Noise in GPS observations

Until mid-90s, researchers assumed that successive geodetic measurements were statistically independent. However, Langbein and Johnson (1997) demonstrated that this standard assumption of statistical independence for geodetic measurements was not correct. They showed that geodetic data are often contaminated by at least two sources of noise: the first being the precision of the instrument and the other being attributed to localized (non-tectonic) motion of the geodetic monument. The former was characterized by a white noise process and the latter by a random-walk noise (Langbein and Johnson, 1997).

Among those geodetic techniques, GPS is one of the most widely studied looking for its noise characterization. Continuous GPS certainly minimized antenna setup errors since the antennas are permanently attached to the Earth by some kind of monument firmly anchored to a subsurface layer that is representative of the Earth's crust (Zhang et al., 1997). However, replacements in hardware and firmware may sometimes occur. Zhang et al. (1997) processed 19 months of continuous GPS coordinates from 10 sites in southern California. From that study based in the power spectra, they conclude that the noise in GPS might be characterized by a fractal white noise process with a spectral index of  $-0.4 \pm 0.2$ . Mao et al. (1999) performed a spectral analysis of coordinate time series of 23 GPS stations with a 3-year time domain. They concluded that the noise characteristics of all three position components (north, east and vertical) could be modeled by a combination of a white plus a flicker noise. Moreover, they also pointed out that the amplitudes of the noise increase in the order north, east and vertical, being the later the noisiest component. On the other hand, Williams (2004) carried out an analysis of over 400 GPS stations getting estimations for the spectral index of a power-law noise process between that of flicker and random walk. Mostly, the values of the spectral index were close to -1 and they finally concluded that the model that best fitted the noise is consistent with a flicker noise distribution plus white noise at high frequencies.

---

## Chapter S.9

# FHAST algorithm

### S.9.1. Introduction

The modification of the *Harada's* algorithm is based on the study of noisy processes that can be found in time series, especially those ones that represent the variations of the position of GPS stations. During last 15 years many works about this residual component have been published (see, for instance, Langbein, 2008; Langbein and Johnson, 1997; Mao et al., 1999; Williams, 2004; Zhang et al., 1997). The noise in GPS data is not usually a white noise. Several studies of some GPS time series have given evidences of the presence of error sources that introduces temporal correlation in the data. Recent works conclude that, generally speaking, these time series are affected by a noise whose nature can be expressed as a sum of a white and a flicker noise or a noise with spectral index between zero and -1 (Zhang et al., 1997), although it is possible to find other GPS time series with a random walk noise.

Current studies of these time series deal with the estimation of a functional (harmonic) model and a stochastic one for the data such that they allow us to explain the behavior of the phenomenon represented. Thus, given a time series  $\{t_n, d_n\}_{n=1,2,\dots,N}$ , we want to estimate simultaneously:

1. The set of linear and non-linear parameters of a harmonic functional model given by the equation (9.1) where  $E$  is the *expectation operator*,  $B$  represents the *design matrix* of the functional model and  $\vec{a}$  is the vector of linear coefficients.

2. An *stochastic model* that describes the noise component of the data given by the equation (9.2) where  $D$  is the *dispersion operator*,  $Q_y$  is the *covariance matrix* expressed as a linear combination of the *cofactor matrices*  $\{Q_k\}_{k=1,\dots,p} \in \mathbb{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ ,  $Q_0$  is the known matrix of the stochastic model (if any) and  $\{\sigma_k\}_{k=1,\dots,p}$  are the *(co)variance components* that need to be estimated.

To estimate those models we will combine the strongest points of the non-linear harmonic analysis described in chapter S.3 and the *Least-Squares Variance Component Estimation method* (LS-VCE) suggested by *Amiri-Simkooei* and *Teunissen* (see Amiri-Simkooei, 2009; Amiri-Simkooei et al., 2007; Teunissen and Amiri-Simkooei, 2008a,b). From now on, the combined method will be called FFAST (*Fukushima-Harada-Amiri-Simkooei-Teunissen*).

The objective function of our estimating problem will consist in minimizing somehow the difference between the data and the model but taking into account that the noise component that affects the observations is no longer white. In other words, the covariance matrix of the noise ( $Q_y$ ) might be non-diagonal. Therefore, the objective function will have the form that appears at equation (9.4).

## S.9.2. Stochastic model

As we can observe, the stochastic model at equation (9.2) is made of some elements that we do not know a priori and therefore, we have to estimate them. We are referring to the cofactor matrices  $Q_k$  and the (co)variance components  $\sigma_k$ . In this section, we will describe how to determine the cofactor matrices. This problem is reduced to estimate the index or indexes of the noise component/s that affect the data. Once we get this information, we can easily calculate the cofactor matrices by using equations from chapter S.8.

There are several ways to determine the spectral indexes that make up the noise component of a time series. However, due to its simplicity, we will focus on a noise component made of just one spectral index. Thus, let us suppose a time series  $\{t_n, d_n\}_{n=1,2,\dots,N}$  the noise component of which is characterized by a single spectral index (see equation (9.5)).

As we now, the spectrum of a noise process can be modeled by the equation (8.1). If we apply logarithms to the right and left hand side term of that equation, we get the expression (8.17). From here, we observe that a simple estimation of the spectral index can be obtained by fitting the *log-log* scale of the periodogram of the observed data to a linear polynomial function. The slope of this linear function can be considered as an estimation of the spectral index.

Summing up, given a time series with a noise component characterized by equation (9.5), we will perform the following steps so as to get an estimation of the spectral index  $\alpha$ :

1. **Remove the trend component:** First of all, the estimation of  $\alpha$  should be derived from a detrended time series because the trend component can affect the shape of the periodogram in such way that we can misunderstand its effect as a noise with lower spectral index.
2. **Estimate the Lomb periodogram** by using equation (3.66). If we know the uncertainties linked to the data, we will use them in this step.
3. Finally, we perform a **robust linear fit** of the *log-log* periodogram. The slope of this linear function will be the estimation of the spectral index.

### S.9.3. Functional model

If we knew the basis functions that take part in the functional model, it could be partly characterized by the so-called *design matrix*. Let us assume that the time series  $\{t_n, d_n\}_{n=1,2,\dots,N}$  can be modeled by a functional model with  $L$  basis functions  $\{\varphi_l\}_{l=1,\dots,L}$ :

$$h_n = \sum_{l=1}^L a_l \cdot \varphi_l(t_n)$$

where  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_L)^T$  are the linear coefficients that need to be estimated. Therefore, the design matrix  $B$  of the model will be given by the expression (9.12). This matrix can be used for estimating the linear coefficients by using the least-squares method (see equation (9.13)). The basis functions are exactly the same as for the non-linear harmonic method described in chapter S.3.

### S.9.4. Component variance estimation

The process chosen to carry out the component variance estimation is the LS-VCE method (Amiri-Simkooei, 2009; Amiri-Simkooei et al., 2007; Teunissen and Amiri-Simkooei, 2008a,b). Herein, we describe briefly this method developed by *Amiri-Simkooei* and *Teunissen*. This technique has many advantages, from among which its straightforward implementation stands out. It provides a way to estimate the (co)variance components by using least squares method. So, given a time series and a functional model represented by the design matrix  $B$ , we expect to estimate the (co)variance components  $\{\sigma_k\}_{k=1,\dots,p}$ , assuming that we know the cofactor matrices  $\{Q_k\}_{k=1,\dots,p}$  of the stochastic model at equation (9.2). The LS-VCE performs the following steps (see Amiri-Simkooei et al., 2007):

1. First of all, we have to provide an initial guess of the (co)variance vector,  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)^T$  that we denote by  $\hat{\sigma}^0 = (\hat{\sigma}_1^0, \hat{\sigma}_2^0, \dots, \hat{\sigma}_p^0)^T$ . Moreover, we must decide a threshold  $\epsilon$  that will be used for stopping the algorithm.
2. Set the counter to  $i = 0$ .
3. Assess the stochastic model (9.2) at  $\hat{\sigma}^i = (\hat{\sigma}_1^i, \hat{\sigma}_2^i, \dots, \hat{\sigma}_p^i)^T$ .
4. Calculate the matrix  $G = (g_{kr})_{k,r=1,2,\dots,p}$  and the vector  $v = (v_1, v_2, \dots, v_p)^T$  given by the equations (9.14) and (9.15) for  $k, r = 1, 2, \dots, p$ . In those equations,  $tr(\cdot)$  is the *trace function*,  $\hat{e} = P_B d$  is the vector of residuals obtained by least-squares method and  $P_B$  represents the orthogonal projection matrix given by the equation (9.16), where  $I$  is the identity matrix.
5. Solve the normal equation  $G \cdot \hat{\sigma}^{i+1} = v$ . Its solution provides the new approximation of the estimation of the (co)variance components  $\hat{\sigma}^{i+1}$ . The matrix  $G^{-1}$  turns out to be the covariance matrix of the component estimations and therefore, it gives a way to assess the uncertainty of these estimations.
6. Calculate  $\|\hat{\sigma}^{i+1} - \hat{\sigma}^i\|_G$  by using equation (9.18). If  $\|\hat{\sigma}^{i+1} - \hat{\sigma}^i\|_G < \epsilon$ , then the LS-VCE will finish and the estimated values for the (co)variance components will be stored in  $\hat{\sigma}^{i+1}$ . Otherwise, we rise the counter in one unit ( $i \leftarrow i + 1$ ) and we reiterate the process from step 3 until the condition is reached.

The main difference with other methods addressed to estimate the (co)variance components lies in the fact that LS-VCE provides unbiased estimators with minimum variance no matter the distribution of the data. On the other hand, the LS-VCE process does not include any condition that assures the non-negativity of the (co)variance estimations. If we need our estimations to be non-negative we should slightly modify the LS-VCE algorithm. For instance, we can include the non-negative constraints but we will get unbiased estimation of the (co)variance components. Another way to deal with this problem is consider a *reparametrization*. Thus, we can assume that:

$$\sigma_k = \exp(m_k) \quad \text{with } k = 1, \dots, p$$

Thus, instead of estimating the (co)variance components  $\{\sigma_k\}_{k=1, \dots, p}$  of the stochastic model, we will estimate the exponentials  $\{m_k\}_{k=1, \dots, p}$  (see Amiri-Simkooei, 2007).

## S.9.5. Modification of the periodogram

As we have assumed that the noise in the data is a power-law process, its covariance matrix is not necessary diagonal. Therefore, the minimization problem that we need to solve to estimate the functional model can not be transform into a simple weighted least-squares problem. Moreover, the expression for the periodogram of the data should be modified just in order to take into account the covariance matrix of the noise in its estimation. The new definition for the Lomb periodogram is given by the equations (9.33) and (9.34) (see Amiri-Simkooei et al., 2007). On the other hand, if we are interested in the equivalent extended periodogram for detecting mixed secular terms, we will use the equations (9.33) and (9.35). It is easy to demonstrate that these expressions generalize the equations (3.66) and (3.73).

### S.9.5.1. A faster estimation of the periodogram

The estimation of the periodogram is the most expensive computational process in the algorithm. This is because the periodogram has to be calculated in a frequency net that should be dense enough to detect the signals that describe the behavior of the time series. Then, it would be interesting to look for a step size for the discretization

of the frequency domain that allows us to obtain the periodogram in a faster way by avoiding missing important signal information. If we have to analyze an evenly time series, it would be enough to take as a step size a value that allow us to extract the length of the time domain. However, if we are studying an unevenly time series, this step size might lead us to ignore important signals or include false peaks in the functional model. Mignard (2005) suggests the following algorithm to obtain a step size for evaluating the periodogram of unevenly time series.

Given a time series, one can approximately know which frequencies might be notable to explain its behavior, namely  $\Omega = \{\tilde{\omega}_i\}_{i=1,\dots,|\Omega|}$ . Thus, we just need to follow those steps to get the step-size for the frequency domain:

1. First, we have to build the set of synthetic time series,  $\{d^{\tilde{\omega}_i}\}_{\tilde{\omega}_i \in \Omega}$ , given by equation (9.37) where  $t = (t_1, t_2, \dots, t_N)^T$  is the vector of epochs when the observations are obtained.
2. For each  $d^{\tilde{\omega}_i}$ , we estimate the Lomb periodogram in a dense range containing the angular frequency  $\tilde{\omega}_i$ .
3. Next step is about getting the amplitude  $z_i$  of each lobe at the half height of its peak  $\tilde{\omega}_i$  (see Figure 9.4). Then, estimate the average of those amplitudes (for  $i = 1, \dots, |\Omega|$ ) that we will denote by  $z$  (equation (9.38)).
4. This average amplitude gives us an idea of the lobe size for the periodogram of the real time series. Therefore, to construct the step size  $\lambda$  for the frequency net, we will divide this mean value  $z$  by the minimum number of frequencies that we want to evaluate at each lobe. For instance, six is a good option (equation 9.39) (Mignard, 2005). This value,  $\lambda$ , will be the step size to consider for evaluating the raw data we are interested in.

### S.9.6. Stop criteria

Several stop criteria have been included in the algorithm so the user can control the end of the process either attending to his/her interest or the properties of the data:

1. *Residual Root Mean Square (RMS) Criterion*: The algorithm will finish when the RMS of the residuals turns out to be less than a certain value given by the user.
2. *Statistic  $T_2$  Criterion*: This option is addressed to time series with white noise. We have to put forward the following null and alternative hypothesis:

$H_0$  : The functional model requires  $K-1$  frequencies.

$H_1$  : The functional model requires  $K$  frequencies.

to test  $H_0$  against  $H_1$  we use the statistic given by the equation (9.49) (Amiri-Simkooei et al., 2007) where  $P(f)$  is the power of the periodogram at the frequency  $f$  that is about to be included and  $\hat{s}_f^2$  is a variance estimator after removing the influence of the spectral line  $f$  from the data. Under  $H_0$ , the statistic has a central Fisher distribution  $F(2, N - M - 2K)$  where  $N \in \mathbb{N}$  is the number of observations,  $M \in \mathbb{N}$  is the number of linear coefficients of the alternative functional model and  $K \in \mathbb{N}$  is the number of extracted frequencies under  $H_1$ . If the null hypothesis is rejected, we can increase  $K$  by one step and perform the same procedure for finding yet another frequency.

3. *Signal-to-Noise Ratio (SNR) Criterion*: The algorithm stops when the extracted frequency has a SNR less than a threshold given by the user. The SNR is obtained by dividing the square root of the power of the line by a robust estimation of the noise computed once the line has been removed.
4. Finally, the user can force the algorithm to stop when a certain number of preset frequencies has been extracted.

## S.9.7. Algorithm

Once we know the different processes that take part in the FFAST algorithm, we can describe more easily how it works. Let us consider that we have at our disposal a scalar time series which contain a noise component defined by a spectral index  $\alpha$  and a variance component  $\sigma^2$ . Herein, we describe step by step the FFAST process



for this kind of time series analysis. For a better understanding, you are encouraged to see Figure S.9.1 where a diagram of the whole algorithm is shown.

- Step 1:** First of all, if the time series contains a remarkable trend component, it will be removed from the data by using the least-squares method. The function considered for the adjustment is a polynomial function whose degree is no larger than two.
- Step 2:** Next, estimate the step size  $\lambda$  for the discretization of the frequency domain in order to get the periodograms for the data. This process is carry out by using the method suggested by *Mignard* (described in section S.9.5.1).
- Step 3:** Set the counter to  $K = 1$ . This value represents the number of frequencies included in the functional model.
- Step 4:** By using equation (3.66), estimate the Lomb periodogram of the residuals (the difference between the data and the functional model obtained so far). After that, do a linear robust fit of the *log-log* Lomb periodogram in order to get the estimation of the spectral index for the noise component and the cofactor matrix. See section S.9.2 for detail.
- Step 5:** Calculate the Lomb and the extended periodogram (equations (9.33)–(9.35)), for the residuals by using the step size  $\lambda$  obtained in step 2. Proceed to extract the frequency where the larger peak is reached and decide if this frequency must be linked to mixed secular terms or only Fourier terms.
- Step 6:** Add to the functional model the basis functions attached to the frequency that we finally consider in the previous step and get the design matrix of the functional model obtained so far. Use this matrix for estimating the (co)variance components by performing the LS-VCE process described in section S.9.4.
- Step 7:** After estimating the stochastic model, get the estimation of the linear coefficients of the functional model (equation (9.13)).
- Step 8:** Once the linear coefficients have been estimated, we can consider the objective function as a function that depends no longer on the linear coefficients but

it does on the frequencies. Therefore, an optimization process in the space of frequencies can be carried out. To minimize the objective function and obtain the new angular frequency vector we use the BFGS quasi-Newton algorithm (Harada, 2003; Press et al., 1967). This optimization process is performed until the norm of the difference between two consecutive angular vector solutions is less than a threshold.

**Step 9:** Re-estimate the functional and stochastic model by taking into account the vector of angular frequencies obtained from step 8.

**Step 10:** Check if the stop criterion is satisfied. If it does, move to the next step. Otherwise,  $K \leftarrow K + 1$  and return to step 4.

**Step 11:** If you deem appropriate, remove from the model those frequencies whose SNR turns out to be less than a threshold.

**Step 12:** Re-estimate the functional and stochastic models by taking into account the angular frequencies that passed the filter at step 11.

Throughout the previous steps, we have described a general FFAST process, but the program written in MATLAB allows the user to modify the values of the arguments and conditions in order to perform a specific analysis. Thus, for instance, if the users want to avoid estimating the spectral index, they can set the value by themselves. Actually, there are many arguments that can be modified by the users depending on their needs, such as the step size for the discretization of the frequency domain, the maximum number of frequencies we want to include in the functional model, a parabolic adjustment at the peak of the periodograms, the degree of the polynomial trend, etc.

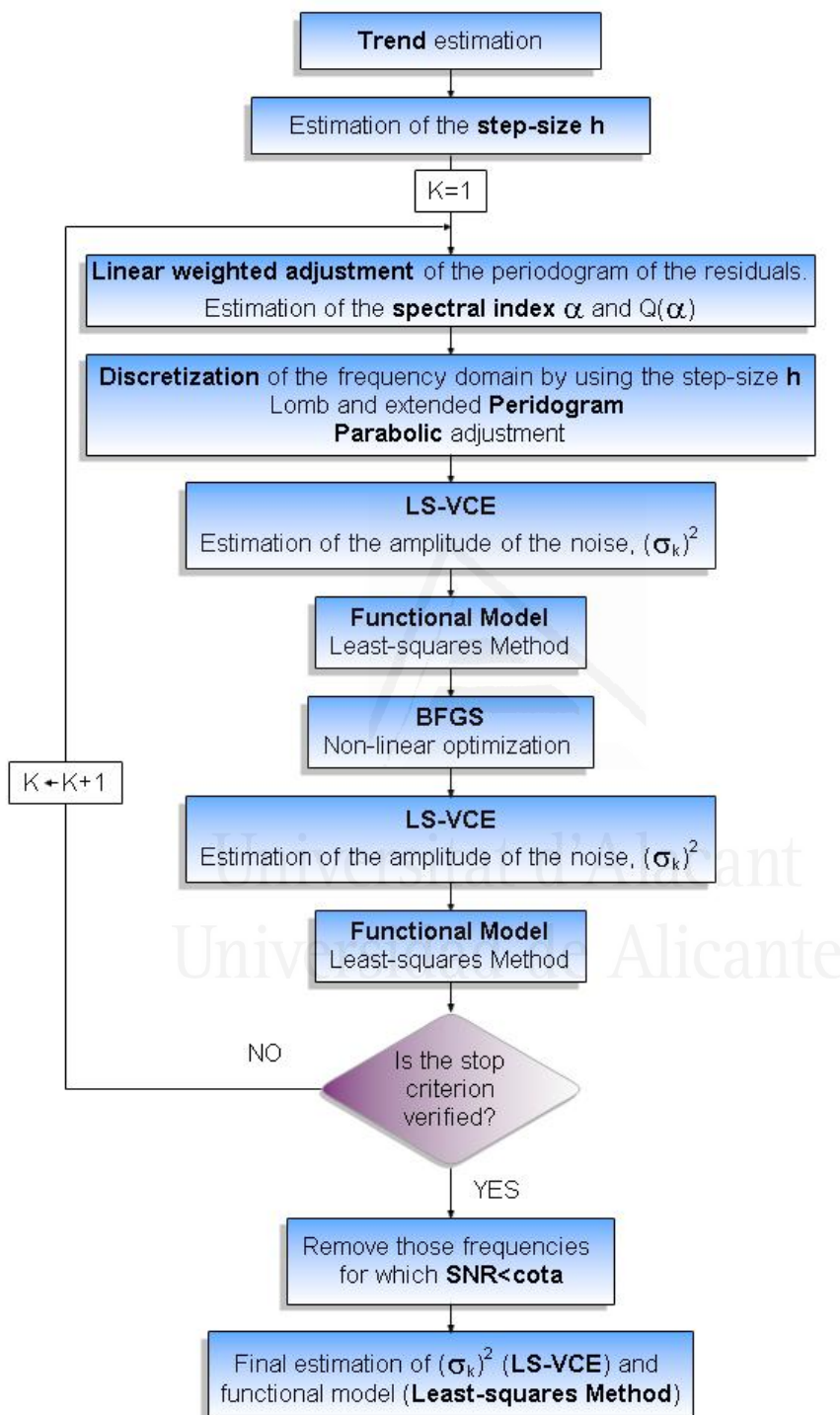


Figure S.9.1: Symbolic algorithm for the FFAST process.

---

## Chapter S.10

# Study of the position time series of GPS stations

The time series that we will analyze in this chapter are residual position time series of GPS stations that take part in the ITRF2008. They were provided by LAREG (IGN center) and are obtained after removing trend, discontinuities and transformation parameters (translation, rotation and scale) from each one of the raw position time series.

### S.10.1. Introduction

It is important to understand the noise content of GPS position data so that realistic uncertainties of unknown parameters can be estimated. In this chapter we are going to study some of the GPS position time series of some stations that take part in the *International Terrestrial Reference Frame 2008* (ITRF2008) (see Altamimi, 2006). These time series represent horizontal and vertical variations of geodetic stations where GPS technique is established. Each one of these stations is associated to three time series, namely: the one that describes the variations on the east direction, another that contains the movements on the north direction and finally, that one which refers to vertical variations (also called *height time series*). In general, these time series are unevenly sampled.

Many studies have been carried out about these time series (especially height time series). Different authors use different harmonic analysis techniques, but most of them are guided by the same patterns:

1. The functional model is a linear combination of Fourier terms and a polynomial trend component.
2. They assign weights (as a diagonal covariance matrix) to the data just in order to perform an adjustment by using the Weighted Least Squares method. By doing this, they give more importance to those observations with less uncertainty.
3. They assume white noise background or at most, they set a certain spectral index or a combination of flicker and white noise processes.

Collilieux et al. (2007) carried out one of the most important studies about height residual time series of GPS, SLR (*Satellite Laser Ranging*) and VLBI stations that take part in the ITRF2005. This study was confined to vertical movement of the stations and they also assumed that the observations were not correlated in time, that is to say, the data were affected simply by a white noise. This assumption is not unreasonable for VLBI and SLR solutions that are commonly affected by this type of noise. However, GPS data often contain a noise component that can be characterized either by a fractional white noise or by a sum of a flicker and white noise processes. As a result, the harmonic content for the analyzed GPS stations included lower frequencies. Specifically, about 40 % of these series showed harmonics linked to periods longer than 4 years whose presence might be due to the noise component embedded in the data.

In this study, we perform a procedure that modifies some of the aforementioned assumptions. Thus, the functional model for the time series will be a linear combination of Fourier and mixed secular terms; we will also consider the covariance matrix (not necessary diagonal) for the adjustment by the Least Squares Method taking into account the equations in the paper written by Williams (2003); and finally, we will not assume a white noise background but we will estimate a spectral index for the time series by using a robust linear fit of the weighted Lomb periodogram. Summing up, we will perform an analysis by using those routines that have been implemented

in MATLAB according to the FFAST algorithm previously described (see chapter S.9 for additional details).

## S.10.2. Analysis and results

We have considered 318 stations from the ITRF2008. Three time series were analyzed from each station (east, north and vertical time series). By using the FFAST algorithm, we have extracted up to 7 frequencies from each one of those 954 ( $318 \times 3$ ) time series including a final filtering phase based in the SNR criterion. The threshold for the SNR was 3 units. The assessment of the frequencies included in the final model for each component (or direction) is presented as histograms (Figure 10.3) of the number of stations for which detected frequencies in a given frequency bin exist. The amplitude of the frequency bins was considered constant, 0.1 cycles per year (from now on, *cpy*).

As a whole, the annual frequency has been the most widely detected harmonic on horizontal and vertical movements. However, semiannual and 4 *cpy* periods are also significant. Semiannual period mainly shows up on the east and vertical components whereas 4 and 6 *cpy* signals are more abundant on the north component than this spectral line of 2 *cpy*. It can be seen from Figure 10.3 that the highest frequency bins correspond to 0.95–1.05, 2.05–2.15 and 4.15–4.25 *cpy*. We can also observe a peak that ranges between 6.15–6.25 *cpy* but it is not as remarkable for height component as for horizontal components.

Although the aforementioned frequencies appear in every histogram, the proportion of each significant spectral line is not the same for each component. The annual signal seems to be present in more stations when we are talking about vertical movements than when we are looking at horizontal components.

Undoubtedly, the annual frequency seems to be the most important signal on the three components. It is detected in 78.62%, 58.18% and 52.83% of height, north and east time series, respectively. As we can see in Table 10.1, the median value of the annual amplitude is around 4.14 *mm* for the height component whereas this value decreases to 1.36 *mm* for the north component and 1.23 *mm* for the east movement. In Tables 10.3–10.5, it is possible to observe the amplitude and phase

(as well as their uncertainties) for the frequency that ranges between 0.95 and 1.05 *cpy*. Among these listed stations we can highlight USNA station which shows the widest annual amplitude on horizontal movements ( $5.40 \pm 0.22$  mm and  $5.37 \pm 0.17$  mm on the east and north components, respectively). This station not only shows a similar annual amplitude for both horizontal components but also has nearly the same epoch of maximum signal, specifically  $265.00 \pm 0.35$  days for the east component and  $258.48 \pm 0.26$  days for the north component (late-August in both cases). As far as vertical movement is concerned, we can point out the stations NOVJ and BRAZ as those ones with a large estimated annual amplitude ( $9.81 \pm 1.54$  mm and  $8.96 \pm 0.52$  mm, respectively). The maximum signal takes place in early-February for NOVJ and late-June for BRAZ station. This vertical movement seems to be related to the continental water flux. It is possible to guess a relationship between vertical movement and rain periods. For BRAZ station (Brazil), the strongest rain periods occur during April-July, so it is not odd that the maximum annual signal for vertical movements takes place in June. Similarly, vertical annual variations of NOVJ station (Novosibirsk, Russia) might be mainly affected by the rough snow periods that occur between November-January, and therefore, it can show a maximum signal in early-February. On the other hand, the stations with the shortest estimated annual amplitude are NLIB, DUBO and BRMU for the east, north and vertical components, respectively.

As far as the 2.05–2.15 *cpy* signal is concerned, its spectral line appears in a larger percentage on the east component (43.08 %) than in the other directions time series. However, the largest semiannual amplitudes are shown on the vertical component with a mean value of 1.49 mm, approximately. The stations with larger semiannual amplitude are SYDN ( $1.48 \pm 0.14$  mm), VENE ( $1.12 \pm 0.15$  mm) and DAEJ ( $3.22 \pm 1.64$  mm) on the east, north and vertical components, respectively.

Next group of frequencies that need to be highlighted corresponds to the spectral lines that ranges between 4.15–4.25 *cpy* (3-months period, approximately). It seems to have the same power on the vertical and north component (detected at 27.36 % and 22.33 % of the stations, respectively) being less important for the remaining component. This group of frequencies turns out to be even more predominant than the semiannual period on the north component. The mean amplitude for this signal

appears in Table 10.1. KIRI and BUE2 stations show the larger east and north direction displacement respectively with estimated amplitudes of  $0.86 \pm 0.17$  mm and  $0.85 \pm 0.16$  mm in each case. On the other hand, PARC station shows the largest quarterly vertical movement ( $2.10 \pm 0.30$  mm) the maximum signal of which occurs in April.

Finally, 6.15–6.25 cpy frequencies are more common to find on horizontal movements of some stations. It appears at 22.01% of the stations on the north displacements with a mean amplitude of 0.43 mm. VCIO and RIOG show the largest 6.15–6.25 cpy signal amplitude on the east and north component, respectively. As we can see from Figure 10.3 and Table 10.2, this signal is nearly as representative as the quarterly period on the north component, although the mean amplitude of the 6.15–6.25 cpy signal is larger.

Some of the estimated models contain other different frequencies such as 3 and 25 cpy. However, these spectral lines turn out to be almost imperceptible in the histograms and we are not able to conclude something about them without further studies.

Despite having conducted a study focused mainly on the analysis of high frequencies (short periods), some position time series consider larger periods (see Tables 10.6–10.8). For instance, signals of approximately 5 years are found on the east component of AREQ and BAR1 stations. Periods of 7–9 years were also extracted from some time series in every direction, although they are less common on the north component where the maximum detected period is about 6.43 years (WDC2 station). We can conclude nothing about those long periods because of the length of the analyzed time series, which allows us to detect a period of at most 7 years with some reliability. If we did not carry out a estimation of a stochastic model, we would think that those low frequencies are caused by the noise component immersed in the time series. However, this is not the situation. Therefore, this long periods that are considered in some harmonic models are probably real fluctuations of the stations or they might be caused by other phenomena, such as seismic activity (AREQ station, for instance), that affects the observation process or the station.



By using the FFAST algorithm, we have also obtained an estimation of the noise process immersed in the data. This process is characterized by a single spectral index,  $\alpha$ , and its covariance component,  $\sigma^2$ . The stochastic model is different for each time series. Figures 10.4a–10.4c represent the histograms for the estimated spectral index in each displacement direction. The amplitude of the bins is set to 0.05 units. From this figure, we can observe the distribution that the spectral indexes seem to follow on the east, north and vertical components. If we have a look at those histograms, we can guess a normal behavior. In fact, if we perform the *Lilliefors* or the *Kolmogorov-Smirnov* test for normality, we conclude that there is no evidence to reject the fact that the spectral index values for each component follow a normal distribution. Assuming this normality, we have adjusted the estimations to a normal distribution. The mean and standard deviation of the normal adjustment are shown in Table 10.9.

Table 10.10 shows the estimation of the spectral index and the covariance component (with uncertainties) for each station and each displacement component. The covariance component of the noise process presents remarkable differences depending on the direction time series. Thus, the vertical movement is affected by a noise process whose amplitude or covariance component is larger than for the horizontal displacements. The median covariance component estimation for height time series lies around  $8.90 \text{ mm}^2$  whereas the median value for the east and north time series is approximately about  $0.90 \text{ mm}^2$  and  $1.10 \text{ mm}^2$ , respectively. The stations with the largest covariance component estimation for the east component are ANKR ( $10.59 \text{ mm}^2$ ) and MADR ( $5.85 \text{ mm}^2$ ). It is important to highlight that those stations reach those amplitude values because its harmonic model lacks of harmonic content. All its extracted frequencies had a SNR less than 3 units and they were finally removed. For the north component, the stations with the largest variance component are MADR ( $4.78 \text{ mm}^2$ ) and UPO1 ( $4.21 \text{ mm}^2$ ). Regarding the vertical displacements, the most noisy stations are CHA1 ( $87.67 \text{ mm}^2$ ), CCJM ( $45.74 \text{ mm}^2$ ) and GOUG ( $36.56 \text{ mm}^2$ ). On the contrary, the stations with the shortest variance component estimation are QAQ1 for the east component ( $0.22 \text{ mm}^2$ ), THU3 for the north component ( $0.35 \text{ mm}^2$ ) and YEBE for the vertical component ( $3.79 \text{ mm}^2$ ).

### S.10.3. Conclusions

We have carried out a study of the residual position time series of 318 GPS stations of the ITRF2008 by estimating three functional and stochastic models for each station (a couple of models for each direction: east, north and height).

Regarding the harmonic content of those functional models, a high percentage of stations shows an annual fluctuation on horizontal and vertical movements. Harmonics close to semiannual, quarterly and 2-months periods are also remarkable. However, those fluctuations are not located at integer values either on vertical or horizontal components. As Collilieux et al. (2007) and Ray et al. (2008) previously pointed out by studying the position time series of the ITRF2005 stations, harmonics that are multiple of the draconitic year (1.04 *cpy*) are included in the functional models of the time series. In order to corroborate this claim, Figure 10.6 displays the histograms of Figure 10.3 but considering shorter frequency bins (with an amplitude of 0.02 *cpy*). There is not a reason why we should expect a landslide at these frequencies and, because of it, some authors such as Tregoning and Watson (2009) have tried to explain recently those harmonics. Nevertheless, the cause by which these signals appear in almost all GPS data is still something hazy. The *International Global Navigation Satellite Systems Service* (IGS) has made known its interest in understanding the cause of these peaks, setting it as one of the objectives to reach for the next years.

As far as the noise component is concerned, we can conclude that the stochastic model of the form given at equation (9.5) that better fits the noise for each time series is characterized by a spectral index of about -0.8 units. Summing up, the noise process (with just one spectral index) that affects the position time series of GPS stations can be describe likely as a fractional noise close to a flicker noise. Vertical displacements show the largest estimated values of the covariance component whereas east movements show the shortest estimations. In the future, it would be interesting to carry out a similar study but setting the noise component as a sum of a flicker and white noise instead of considering a simple power-law noise process.



---

# Chapter S.11

## Conclusions and outlook

### S.11.1. Conclusions

The spectral analysis of time series is an important tool to extract information about the periodic behavior of certain physical, geophysical, astronomical, chemical or biological phenomena, among others. In order to create mathematical models based on the harmonic properties of those phenomena, we carried out a tedious task that consisted in developing a specialized software for non-linear harmonic analysis of time series by using the MATLAB programming language. Every one of the main implemented routines deals with the estimation of the Lomb and extended periodogram. Thanks to this set of routines, a wide range of time series can be harmonically analyzed. All routines are grouped basically into five different packages according to their functionality:

**NLHA package:** By using the routines included in this package, you can create a model that allows the user to know the harmonic content and trend of a given time series either homogeneous or heterogeneous, either scalar or vectorial and impregnated by a white noise component. If the noise component is a colored noise, the harmonic model might contain spectral lines that refer to the noise but not to the data. This package is addressed to time series whose observations have the same weight or importance. Whenever possible, the direct inversion of matrices is avoided so we can study long time series with these routines.

Harmonic models are built looking for simplicity and considering the system's response to the same frequency as a measure of excitement derived from it due to the non-linearity. The estimated models are made of a polynomial trend (up to grade 2) and a finite sum of Fourier and mixed secular terms. The user can modify certain parameters to carry out a specific spectral analysis, for instance, you can perform a harmonic analysis where spectral lines are removed one by one from the periodogram of the residuals or even you can provide the desired harmonic content and get a model from it. All routines are equipped with a large number of arguments to carry out a comprehensive and specific study of time series. It also provides the uncertainty associated with the estimated parameters included in the model. On the other hand, the user can get a graphic and visual idea of the model and the adjustment thanks to the graphical displays that this package provides.

**WNLHA package:** Its functionality is almost the same as the NLHA package but it contains several advantages that its predecessor does not: the possibility of choosing between more than one stop criterion, removing from the final model those frequencies whose SNR value is less than a set value, etc. As far as the periodogram is concerned, the user can speed up its calculation by estimating the step size for the frequency domain so that it is large enough to detect all the spectral lines that explain the phenomenon (Mignard, 2005). However, the most important improvement in this package is that the user has the opportunity to assign weights to the observations in the time series to be analyzed. Thus, one can place greater emphasis on the analysis to those observations with lower error or uncertainty. This package also provides the uncertainty associated with each estimated parameter and, moreover, it provides graphical displays of the model and other items.

**PREDWNLHA package:** This package was created to study the predictive ability of time series models. The analytical scope is identical to that one described in WNLHA package. However, PREDWNLHA includes routines to estimate and compare a model with the future behavior of the series as long as we know the real future behavior of the time series.

**FHAST package:** By using the routines included in this package, one can perform a spectral analysis algorithm according to the FHAST process detailed in chapter S.9, which includes the estimation of a stochastic model for the noise component in addition to a harmonic model for the scalar time series. This package allows us to consider stochastic models resulting from the combination of various types of noise with different spectral indices, but does not ensure the non-negativity of the estimates of the covariance components. Due to the inversion of certain matrices in the implemented code, the tolerated length for time series is reduced from the previous packages. It preserves the stop criteria of the WNLHA package and combines the strongest points of the non-linear harmonic method of *W. Harada* and *T. Fukushima* (see Harada, 2003; Harada and Fukushima, 2003) and the LS-VCE method of *A. R. Amiri-Simkooei* and *P. J. G. Teunissen* (see Amiri-Simkooei, 2007, 2009; Amiri-Simkooei et al., 2007; Teunissen and Amiri-Simkooei, 2008a). The periodograms are calculated taking into account the noise covariance matrix. As far as the stochastic model is concerned, the user can either set the type of noise to consider in the analysis or allow the algorithm to select a single type of noise by estimating its spectral index (see section S.9.7).

**RFHAST package:** It is a modification or extension of the FHAST package. It carries out an exponential re-parametrization to avoid negative estimations of the variance components in the stochastic model (Amiri-Simkooei, 2007).

As these routines were created, some interesting series were analyzed such as those ones that describe the celestial pole offsets, the geocenter variations due to the redistribution of water mass on the Earth's surface, the excess of the length of day, continental water flux and the positions of GPS stations, among others. We estimated harmonic models that explain each one of these phenomena in the considered time domain and allow us to draw conclusions of their behavior. We will not expend much time on rewriting the conclusions drawn from the studied series because they are detailed at the end of each corresponding chapter. However, we will briefly mention several aspects of some of them.

Most of the analyzed time series provide harmonic models that contain fundamental frequencies beyond those ones associated with annual and semiannual periods.

For instance, a period of 6549.53 days was estimated for the celestial pole offsets time series and it turned out to be more important than the annual period (regarding the explained variance). It pointed to a lunar libration origin but we have not found conclusive evidences to support this claim. In addition to this period of 17.9 years (approximately), harmonics related to periods of 3276.08, 433.60 and 173.31 days were also detected. The nature of these signals or spectral lines requires a detailed study that we have not performed because it was not part of the aims and scopes of this research. We have emphasized some similarities with known natural cyclical periods that might be cause them, but we have not focused on determining its origin or interpreting its presence in the estimated harmonic models. Therefore, it would be interesting to carry out a research focused on searching the phenomena that cause the detected spectral lines.

For the time series that refers to the variations of the geocenter due to the water storage on the Earth's surface, a period of two years was extracted from the data, as well as other frequencies associated with periods of 3.5-3.8 years and even longer periods between 10 and 17 years, approximately. Some of these harmonics were also detected by Huang et al. (1996), and we could claim that the greatest contribution in this move is performed on the Y axis with an amplitude of about 1 *mm* (as other authors, such as Bouillé et al. (2000), have already estimated).

Through the study of continental water flux, we obtained a couple of different models for a multidimensional series whose physical parameters are time and space. Thus, for every 1x1 degree area of a grid that covers the Earth's surface we have estimated a model whose harmonic content was previously set (annual, semiannual and terannual frequencies) and another model, the spectral content of which was obtained by using the non-linear harmonic method suggested by *W. Harada* and *T. Fukushima*. These models were estimated for a given time domain, keeping the latest observations for a further study of the predictive ability of those models. As a result, we concluded that both functional models could be considered good predictors, although one of them is preferred to another in certain areas (see section S.6.5).

Finally, we will mention the study carried out about the positions of GPS stations. We analyzed 318 stations by using the routines included in the FFAST package. For

each one of these stations, we extracted up to 7 fundamental frequencies, discarding those whose SNR was shorter than 3 units. At the same time, we considered the estimation of a stochastic model for the noise component. It was shown that an outstanding percentage of stations show a yearly periodic behavior in both vertical and horizontal movements, but also include other spectral lines such as those ones associated with semiannual, quarterly or even 2-month periods. However, these frequencies do not correspond to integer cycles. They are slightly perturbed; in fact, they are multiples of the so-called draconitic period (1.04 cycles per year). These harmonics have already been detected in other studies carried out by Collilieux et al. (2007) and Ray et al. (2008), although its nature is not clear yet. As far as the noise component is concerned, it was found that, for a large part of the stations, the noise can be characterized by a spectral fractional index of -0.8 units, which has larger amplitude in vertical movements.

## S.11.2. Outlook

The outlook is oriented towards two main directions. The first one is directly related to the improvement of the routines we have already developed and the creation of new ones for time series analysis. Several improvements can be made in this area. It would be interesting, for example, the development of a new version of WNLHA and FFAST packages where the property of a frequency to be linked to mixed secular terms could be modified during the adjustment process, if necessary. Another point to discuss and develop would be the creation of an algorithm that could detect different types of noise immersed in time series just to avoid using a single spectral index or fixing a set of these indices. Improving the computation time of the main routines included in each package is another goal we want to achieve in the future. An additional point would be to modify the RFAST and FFAST packages in order to analyze longer time series.

The second main outlook consists in the application of these new routines to study important physical and geophysical phenomena, among others. One of the studies that raises more interest is that one which refers to the combined analysis of the GPS and VLBI position time series. On the other hand, it would be also



interesting to study how the models, obtained so far, change as new observations are added to the time series. Moreover, we can also expand the range of time series to be studied (economic, chemical, biological, medical, etc).

Herein, we briefly draw the outline of some of the main outlooks: the detection problem of the *crossover frequency*, the *combined analysis of GPS and VLBI position time series* and the problem related to the long time that the *computation of the periodogram* usually takes.

### S.11.2.1. Crossover frequency. Combined noise

RFHAST and FFAST packages perform a time series analysis by providing a harmonic model for the phenomenon represented and also a stochastic model for the noise embedded in it. The main routines in these packages estimate a stochastic model by considering a single spectral index or by combining several set indexes. At this point, certain drawbacks, which we want to solve in the future, turn up.

If the user chooses a combined noise component, he/she must provide the values of the desired spectral indexes that generate the noise. We have not successfully developed yet a subroutine that is able to detect crossover frequencies from which a particular noise of certain spectral index turns into another with a different index.

Despite this, there are certain combinations of spectral indexes for which the implemented routines are not able to provide a solution. This is mainly due to ill-conditioning problems and bad scaling of the matrices involved in the process. Thus, if we consider a noise component as the sum of white noise ( $\alpha = 0$ ) and a flicker noise ( $\alpha = -1$ ) during the analysis of the position time series of the GPS stations, the LS-VCE internal process stops because the  $Q_y$  matrix or the  $G$  matrix (equation (9.14)), whose inverse gives the uncertainty of the covariance components, become ill-conditioned after a certain number of iterations. We have introduced several changes into the code just to get the inverse of these matrices in those problematic cases, but without success. We are currently considering the possibility of approximating the inverse function by the so-called *elimination method* suggested by Walz (1988), apart from using the covariance matrix of a flicker noise used by others authors as Amiri-Simkooei et al. (2007), Zhang et al. (1997) and Mao et al. (1999).

### S.11.2.2. Combined analysis of GPS and VLBI position time series

As an application of the future routines, we can study the position time series of the so-called *Colocation Sites* (stations where more than one geodesic technique is established). In particular, we expect to analyze those ones equipped with GPS and VLBI systems. It would be interesting to build a single model for each station (derived from the GPS and VLBI time series) and to characterize somehow the type of error that affects each one of these techniques. Summing up, we expect to create a couple of models following the equations (11.1)-(11.2) where  $s(t)$  is the common functional model to estimate and  $b(t)$  is different and dependent on the type of observation technique. This noise component would be initially expressed as a sum of a white and a flicker noise. We have already created a vectorial version of the FFAST method as a first approximation to the problem (package *FFAST-VEC*), however it is necessary to overcome first the difficulties mentioned in previous subsection.

Moreover, it would be interesting to estimate the noise amplitude of each technique by taking into account the geographical location of the station, looking into some kind of dependence on latitude and longitude, for instance.

### S.11.2.3. Patched periodogram

The Lomb periodogram is one of the most used spectral tools when we are interested in looking for the harmonic behavior of a certain set of data. However, its estimation takes long time sometimes, especially when the time series is large enough. Moreover, when the periodogram is included as a part of an iterative non-linear harmonic process, such as the FFAST method, we find out that the computation time is considerably increased due to the estimation of a periodogram each time a frequency is removed from the harmonic content of the data. Now, imagine that the time series is multidimensional, therefore the time the algorithm needs to provide a result will be huge. Thus, it would be useful to modify the estimation of the periodogram in some way just to reduce the computation time of the analysis. There are several ways to deal with this problem and get a quicker analysis of a given time series.

On one hand, we can accelerate the calculation of the periodogram by reducing the number of frequencies in the frequency domain. In this case, you take the risk of skipping harmonics that explain the data better than any other one. To cope with this problem, Mignard (2005) suggests an algorithm that is able to estimate a fixed step size for the frequency domain such that the harmonics that might explain the data are taking into account. However, this procedure needs the user to provide a set of frequencies that may have something to do with the time series we want to analyze.

On the other hand, instead of reducing the number of frequencies, we can keep the frequency domain and patch up the periodogram in a range containing the highest peak. Once we have estimated the Lomb periodogram for the first time, we will focus on modifying the spectrum by patching it. Herein, the algorithm we suggest is described. Although we explain the process for the Lomb periodogram, it can also be applied to the extended periodogram.

**Step 1:** Let denote by  $D_f = [f_1, f_2, \dots, f_r]$  the discrete frequency domain where the periodogram will be estimated. Set up  $i=0$ .

**Step 2:** By using the equation (3.66), get the Lomb periodogram for the time series,  $\{(t_n, d_n)\}_{n=1,2,\dots,N}$ :

$$P^0 = [P_1^0, P_2^0, \dots, P_r^0] = [P(f_1), P(f_2), \dots, P(f_r)]$$

**Step 3:** Do  $i \leftarrow i + 1$ . Select the frequency where the maximum of the periodogram  $P^0$  is achieved, namely,  $f^i = f_p$  where  $p \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Then, remove the harmonic information from the data by following the non-linear harmonic algorithm.

**Step 4:** If the stop condition of the non-linear harmonic process is reached, then stop. Otherwise, the process continues extracting another frequency. Now, instead of estimating the whole periodogram for the residuals, we patch up  $P^0$ . First of all, consider a frequency range surrounding the previous extracted peak with  $2h + 1$  frequencies,

$$D_f^i = [f_{p-h}, f_{p-h+1}, \dots, f^i, \dots, f_{p+h-1}, f_{p+h}] \subset D_f$$

**Step 5:** Let denote by

$$P^i = [P_{p-h}^i, P_{p-h+1}^i, \dots, P_{p+h}^i] = [P(f_{p-h}), P(f_{p-h+1}), \dots, P(f_{p+h})]$$

the periodogram of the residuals for the harmonics in  $D_f^i$ .

**Step 6:** Scale and patch the periodogram  $P^0$  by doing:

$$P_j^0 = \begin{cases} P_j^0 / R^i & \text{si } f_j \notin D_f^i \\ P_j^i & \text{si } f_j \in D_f^i \end{cases}$$

where  $R^i$  is the rate between the median of the values in  $P^0$  and the median of the values in the patch  $P^i$ . Then, return to step 3.

To run the algorithm it is necessary to set the length of the range in step 4. The value may depend on the data, but usually taking  $h = 200$  is good enough. If you expect your data to be noisy, then choosing a larger value of  $h$  would be safer. As we have seen, at step 6 we scale the values of the periodogram that are not patched. The reason why we scale the periodogram is because as a frequency is extracted from the data, the power of the periodogram for the residuals is compressed (due to the leakage effect). Therefore, if we want to avoid creating spurious peaks, we have to reduce the power of the periodogram. A way to do that task is to calculate the rate that will give us an idea of the manner the power spectra is reduced. Nevertheless, this scaling process does not assure us of detecting the authentic frequencies so; in addition, we have included a correction stage, that is to say, the user has the possibility to order the algorithm to estimate the whole periodogram of the residuals after a specific number of patches. For the following steps, this periodogram will be the new  $P^0$  to be patched.



---

**Parte III**  
**APÉNDICES**

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



---

# Apéndice A

## Ley de propagación del error

Durante el trabajo de investigación llevado a cabo, se han estimado numerosos modelos funcionales para explicar el comportamiento de diversas series temporales. Como se ha podido comprobar, el modelo estándar construido consistía en una componente polinómica de tendencia y una suma finita de términos de Fourier y términos seculares mixtos, en la mayoría de los casos. No obstante, en ocasiones, con la finalidad de proyectar luz sobre los resultados y su interpretación, estos términos de Fourier de una misma frecuencia eran agrupados en un único término para determinar la amplitud y fase asociada a dicho armónico. Esta transformación proporcionaba un conjunto de valores (obtenidos a partir de otros con cierto grado de error) que, como cualquier otro tipo de estimación, estaban sometidos a un determinado nivel de incertidumbre. La obtención directa de dichas incertidumbres implica un reanálisis de los datos considerando, esta vez, un nuevo modelo funcional donde se introduzcan los términos cuya amplitud y fase desean estimarse. Sin embargo, existe una forma de calcular la incertidumbre de los nuevos coeficientes sin la necesidad de recurrir a la realización de otro análisis. Como veremos, bastará con conocer la relación existente entre los nuevos y antiguos parámetros y la incertidumbre asociada a estos últimos.

El problema de la propagación del error es aquel consistente en determinar la distribución de una función dependiente de un conjunto de variables aleatorias. Lo habitual es querer determinar la distribución del *conjunto de variables de salida*,  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_L)$ , obtenidas a través de un modelo matemático,



$Y = f(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_L(X)]$ , que requiere de otras *variables de entrada*,  $X = (X_1, X_2, \dots, X_K)$ , de las cuales tenemos cierta información sobre su distribución. Así pues, *la ley de propagación del error* permite calcular:

$$C_Y = F_X C_X F_X^T \quad (\text{A.1})$$

donde  $C_X$  y  $C_Y$  son las matrices de covarianza asociadas a  $X$  e  $Y$ , y  $F_X$  es la matriz Jacobiana:

$$F_X = \nabla_X f(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_K} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_L}{\partial X_1} & \frac{\partial f_L}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_L}{\partial X_K} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Así pues, lo que se expone en este anexo es el desarrollo de las ecuaciones utilizadas durante el trabajo de investigación para obtener las incertidumbres asociadas a ciertos parámetros que se derivan de otros cuya incertidumbre se conoce o ha sido previamente estimada.

En primer lugar supondremos que se dispone de una combinación lineal de términos de Fourier para una determinada frecuencia angular,  $\omega$ :

$$S \cdot \sin(\omega\tau_n) + C \cdot \cos(\omega\tau_n) \quad (\text{A.3})$$

y deseamos conocer la amplitud y fase asociada a dicho armónico según el modelo:

$$A \cdot \cos[\omega(\tau_n - \theta)] \quad (\text{A.4})$$

Supondremos, además, que conocemos las incertidumbres ligadas a los coeficientes de Fourier en la ecuación (A.3), los cuales denotaremos por  $\sigma_S$  y  $\sigma_C$  para el término en seno y coseno, respectivamente. Por otro lado, la relación existente entre los coeficientes  $S$ ,  $C$ ,  $A$  y  $\theta$  vendrá dada por:

$$A = \sqrt{S^2 + C^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\theta = \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{S}{C}\right) \quad (\text{A.6})$$

A partir de aquí, mediante la aplicación de la ley de propagación del error, es fácil conocer la incertidumbre asociada a los nuevos parámetros  $A$  y  $\theta$ . Denotemos por  $f$  la función vectorial que proporciona los valores de los parámetros  $A$  y  $\theta$  en función de los coeficientes conocidos  $S$  y  $C$ :

$$f(S, C) = [A, \theta]^T = \begin{pmatrix} \sqrt{S^2 + C^2} \\ \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{S}{C}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Así pues, la matriz Jacobiana para dicha transformación vendrá dada por:

$$\nabla f(S, C) = \begin{pmatrix} \frac{S}{A} & \frac{C}{A} \\ \frac{C}{\omega A^2} & \frac{-S}{\omega A^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Aplicando ahora la ley de propagación del error, obtenemos que:

$$C_{A,\theta} = \nabla f(S, C) \cdot C_{S,C} \cdot \nabla f(S, C)^T$$

siendo:

$$C_{S,C} = \begin{pmatrix} \sigma_S^2 & 0 \\ 0 & \sigma_C^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Es decir:

$$C_{A,\theta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2} (S^2 \sigma_S^2 + C^2 \sigma_C^2) & \frac{S C}{\omega A^3} (\sigma_S^2 - \sigma_C^2) \\ \frac{S C}{\omega A^3} (\sigma_S^2 - \sigma_C^2) & \frac{1}{\omega^2 A^4} (C^2 \sigma_S^2 + S^2 \sigma_C^2) \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

La diagonal de esta matriz contiene el valor estimado de la varianza para los parámetros amplitud y fase, por tanto, calculando la raíz cuadrada de dichos términos, obtendremos el valor de la incertidumbre asociada a los mismos:

$$\sigma_A = \frac{1}{A} \sqrt{S^2 \sigma_S^2 + C^2 \sigma_C^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\omega A^2} \sqrt{C^2 \sigma_S^2 + S^2 \sigma_C^2} \quad (\text{A.12})$$

El siguiente problema surge al querer transformar la suma de varios términos de Fourier y términos seculares mixtos de frecuencias similares en la suma de dos términos de Fourier y dos términos seculares mixtos para la frecuencia de menor módulo entre las anteriores. En este caso, la transformación se lleva a cabo mediante el proceso de mínimos cuadrados, por lo que la función que relaciona los nuevos y viejos parámetros es precisamente la solución a este problema. Así pues, supongamos que disponemos de  $K$  frecuencias,  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$ , cuyos valores están próximos unos a otros y sea  $g$  la combinación lineal de los términos de Fourier y términos seculares mixtos de éstas:

$$g(t, A_1, A_2, \dots, A_{4K}) = \sum_{i=1}^K [A_{4i-3} \sin(\omega_i t) + A_{4i-2} \cos(\omega_i t) + A_{4i-1} t \sin(\omega_i t) + A_{4i} t \cos(\omega_i t)] \quad (\text{A.13})$$

para  $t = t_1, t_2, \dots, t_N$ , la cual queremos ajustar a un modelo de la forma:

$$h(t) = B_1 \sin(\hat{\omega} t) + B_2 \cos(\hat{\omega} t) + B_3 t \sin(\hat{\omega} t) + B_4 t \cos(\hat{\omega} t) \quad (\text{A.14})$$

siendo  $\hat{\omega} = \min\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$ . Así pues, la relación funcional existente entre los coeficientes  $A = \{A_j\}_{j=1, \dots, 4K}$  y  $B = \{B_j\}_{j=1, \dots, 4}$  viene dada por la solución mínimo cuadrática correspondiente:

$$f(A) = [B_1, B_2, B_3, B_4]^T = (M^T M)^{-1} M^T G_A \quad (\text{A.15})$$

donde:

$$G_A = [g(t_1, A), g(t_2, A), \dots, g(t_N, A)]^T \quad (\text{A.16})$$

$$M = \begin{pmatrix} \sin(\hat{\omega} t_1) & \cos(\hat{\omega} t_1) & t_1 \sin(\hat{\omega} t_1) & t_1 \cos(\hat{\omega} t_1) \\ \sin(\hat{\omega} t_2) & \cos(\hat{\omega} t_2) & t_2 \sin(\hat{\omega} t_2) & t_2 \cos(\hat{\omega} t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\hat{\omega} t_N) & \cos(\hat{\omega} t_N) & t_N \sin(\hat{\omega} t_N) & t_N \cos(\hat{\omega} t_N) \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

siendo  $M$  la matriz del diseño. Así pues, lo único que resta es obtener la expresión para la matriz Jacobiana y aplicar la ley de propagación del error teniendo presente que conocemos los valores de las incertidumbres ligadas a los parámetros

$A = \{A_j\}_{j=1,\dots,4K}$  y que denotaremos por  $\{\sigma_j\}_{j=1,\dots,4K}$ . La expresión para el Jacobiano de  $f$  vendrá dada por  $\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial A_1}, \frac{\partial f}{\partial A_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial A_{4K}} \right]$  donde cada columna de esta matriz,  $\frac{\partial f}{\partial A_j}$ , adopta la siguiente expresión:

$$\frac{\partial f}{\partial A_j} = (M^T M)^{-1} M^T \frac{\partial G_A}{\partial A_j} \quad (\text{A.18})$$

Una expresión genérica para la parcial de  $G_A$  con respecto a cada uno de los parámetros  $A = \{A_j\}_{j=1,\dots,4K}$  sería:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_A}{\partial A_{4i+m-4}} = & \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{-6} \begin{pmatrix} \sin(\omega_i t_1) \\ \sin(\omega_i t_2) \\ \dots \\ \sin(\omega_i t_N) \end{pmatrix} + \\ & + \frac{(m-1)(m-3)(m-4)}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega_i t_1) \\ \cos(\omega_i t_2) \\ \dots \\ \cos(\omega_i t_N) \end{pmatrix} + \\ & + \frac{(m-1)(m-2)(m-4)}{-2} \begin{pmatrix} t_1 \sin(\omega_i t_1) \\ t_2 \sin(\omega_i t_2) \\ \dots \\ t_N \sin(\omega_i t_N) \end{pmatrix} + \\ & + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} \begin{pmatrix} t_1 \cos(\omega_i t_1) \\ t_2 \cos(\omega_i t_2) \\ \dots \\ t_N \cos(\omega_i t_N) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Finalmente, por la ley de propagación del error:

$$C_B = \nabla f \cdot C_A \cdot \nabla f^T$$

donde:

$$C_A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{4K-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{4K}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Una vez más, la diagonal principal de  $C_B$  contendrá el cuadrado de la incertidumbre de cada uno de los nuevos parámetros  $B = \{B_j\}_{j=1,\dots,4}$ .



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

---

## Apéndice B

# Acrónimos, abreviaturas y unidades

El presente apéndice contiene los acrónimos, abreviaturas y unidades utilizados en la redacción de esta memoria. Todos ellos aparecen en la Tabla B.1 ordenados alfabéticamente. El significado de cada entrada está expresado en el idioma del cual deriva, salvo las unidades que vienen recogidas en inglés.

Tabla B.1: Acrónimos

| Acrónimo       | Significado                                      |
|----------------|--|
| $\mu\text{as}$ | Microarcosecond                                  |
| $\mu\text{s}$  | Microsecond                                      |
| AC             | Analysis Centers                                 |
| AR             | Autoregressive Process                           |
| ARIMA          | Autoregressive Integrated Moving Average Process |
| ARMA           | Autoregressive Moving Average Process            |
| BFGS           | Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno                 |
| CDAS           | Climate Data Assimilation System                 |
| cm             | Centimeters                                      |
| CPC            | Climate Prediction Center                        |
| cpa            | Ciclos por año                                   |
| cpd            | Cycles per day (ciclos por día)                  |
| cpy            | Cycles per year                                  |
| CRF            | Celestial Reference Frame                        |

Continuación Tabla B.1

| Acrónimo | Significado  |
|----------|--|
| CW       | Chandler Wobble  |
| CWF      | Continental Water Flux   |
| CWS      | Continental Water Storage  |
| DFA      | Detrended Fluctuation Analysis                                     |
| DFT      | Discrete Fourier Transform   |
| DORIS    | Dopler Orbitography and Radio-positioning Integrated by Satellites |
| ENSO     | El Niño/Southern-Oscillation                                       |
| EOC      | Earth Orientation Center   |
| EOF      | Empirical Orthogonal Functions                                     |
| EOP      | Earth Orientation Parameters                                       |
| ERP      | Earth Rotation Parameters  |
| FCN      | Free Core Nutation   |
| FFM      | Fixed Frequency Model  |
| FFT      | Fast Fourier Transform   |
| FHAST    | Fukushima-Harada-Amiri-Simkoei-Teunissen                           |
| g        | Gram   |
| GNSS     | Global Navigation Satellite Systems                                |
| GPS      | Global Positioning System  |
| GRACE    | Gravity Recovery and Climate Experiment                            |
| IAG      | International Association of Geodesy                               |
| IAU      | International Astronomical Union                                   |
| ICRF     | International Celestial Reference Frame                            |
| IDS      | International DORIS Service  |
| IERS     | International Earth Rotation and Reference Systems Service         |
| IGN      | Institut Géographique National                                     |
| IGS      | International GNSS Service   |
| ILRS     | International Laser Ranging Service                                |
| ITRF     | International Terrestrial Reference Frame                          |
| ITRS     | International Terrestrial Reference System                         |
| IVS      | International VLBI Service   |
| JD       | Julian Days  |
| LAREG    | Laboratoire de Recherche en Géodésie                               |
| LDAS     | Land Data Assimilation System                                      |
| LLR      | Lunar Laser Ranging  |
| LOD      | Length of day  |
| LS-VCE   | Least-Squares Variance Component Estimation                        |
| LSM      | Least Squares Method   |

Continuación Tabla B.1

| Acrónimo | Significado                                     |
|----------|---|
| m        | Meter   |
| MA       | Moving Average                                  |
| mas      | Milliarcsecond                                  |
| MEM      | Maximum Entropy Method                          |
| MJD      | Modify Julian Days                              |
| MLE      | Maximum Likelihood Estimation                   |
| mm       | Millimeter                                      |
| ms       | Millisecond                                     |
| MSD      | Mean Solar Day                                  |
| NCAR     | National Center for Atmospheric Research        |
| NCEP     | National Centers for Environmental Prediction   |
| NLHA     | Non-Linear Harmonic Analysis                    |
| NLHM     | Non-Linear Harmonic Model                       |
| NOAA     | National Oceanic and Atmospheric Administration |
| QBO      | Quasi Biennial Oscillation                      |
| RMS      | Residual Root Mean Square                       |
| S-QBO    | Stratospheric Quasi Biennial Oscillation        |
| SLR      | Satellite Laser Ranging                         |
| SNR      | Signal to Noise Ratio                           |
| SSA      | Singular Spectral Analysis                      |
| T-QBO    | Tropospheric Quasi Biennial Oscillation         |
| TRF      | Terrestrial Reference Frame                     |
| TRS      | Terrestrial Reference System                    |
| VLBI     | Very Long Baseline Interferometry               |
| WNLHA    | Weighted Non-Linear Harmonic Analysis           |
| WRMS     | Weighted Root Mean Square                       |





---

## Apéndice C

# Modelos armónicos no lineales de algunas estaciones GPS

En este anexo hallará una colección de representaciones gráficas de series temporales que describen las posiciones residuales de estaciones de GPS estudiadas. En cada una de las gráficas aparece representada la serie de datos originales (en azul) y el modelo armónico no lineal (en rojo) estimado mediante el método FFAST descrito en el capítulo 9.

Debido a la imposibilidad de incluir las 954 series temporales analizadas en el capítulo 10, sólo se muestran las gráficas correspondientes a 24 de estas estaciones (una figura por cada una de sus componentes). No se ha seguido un criterio particular para seleccionar las series que aparecen a continuación. Simplemente se han considerado algunas de las que reciben especial mención en el capítulo 10.

Cada una de las 72 figuras que se muestran a continuación están encabezadas con el identificador de la estación que representan y se distribuyen de tal forma que cada columna hace referencia a una determinada estación. Asimismo, de arriba a abajo, las gráficas muestran las variaciones en la componente este, norte y vertical, respectivamente.

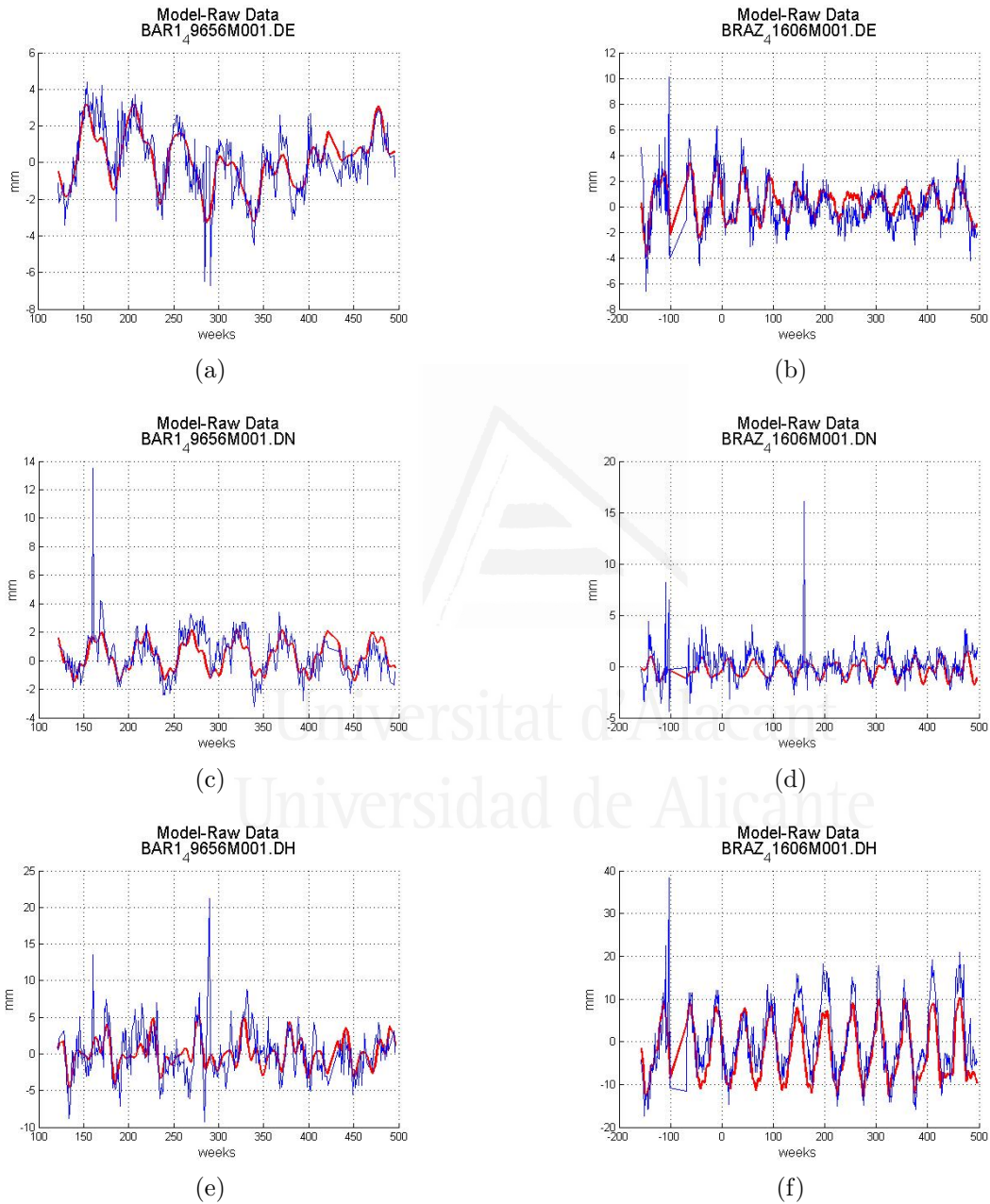


Figure C.1: Estaciones BAR1 y BRAZ.

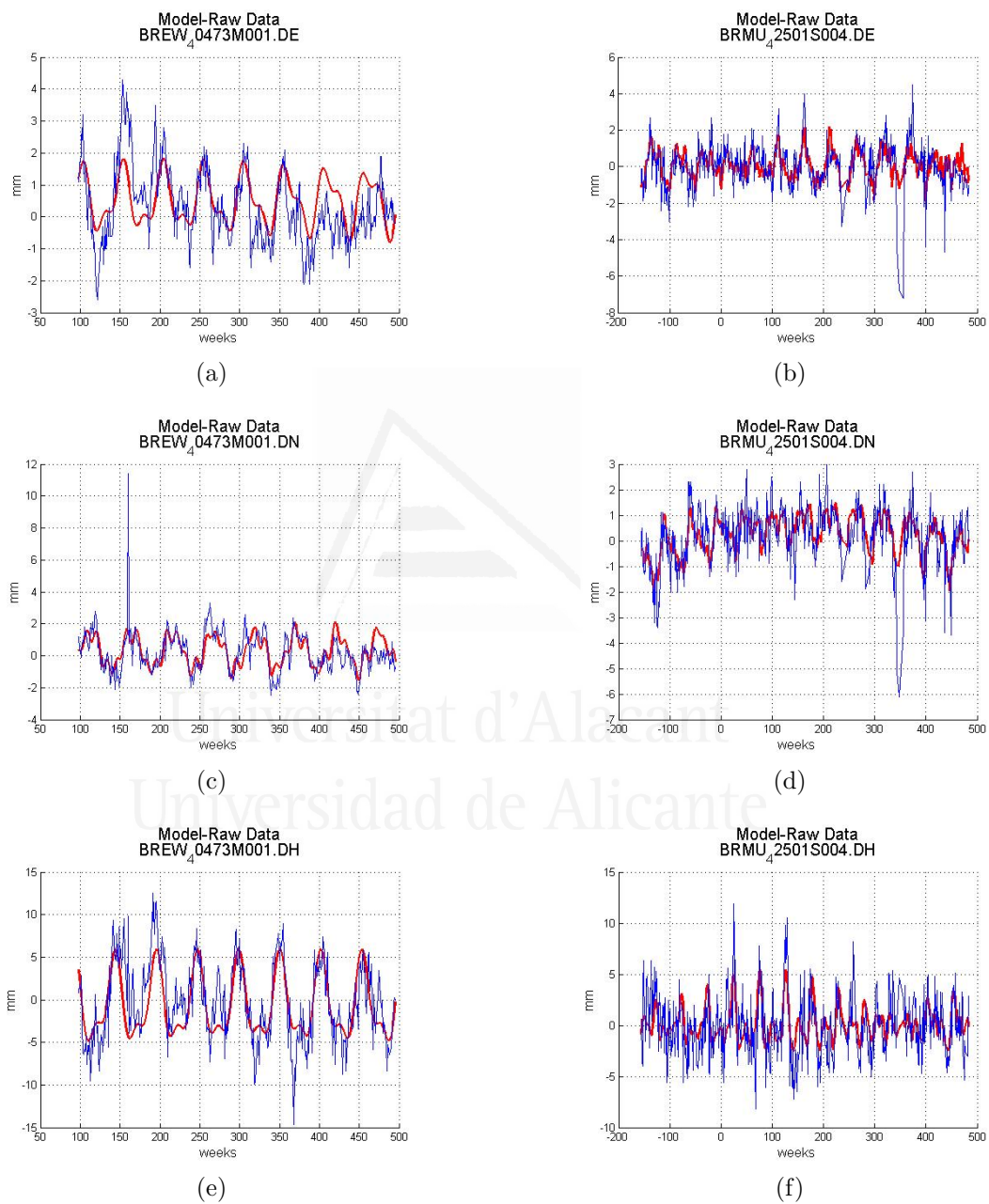


Figure C.2: Estaciones BREW y BRMU.

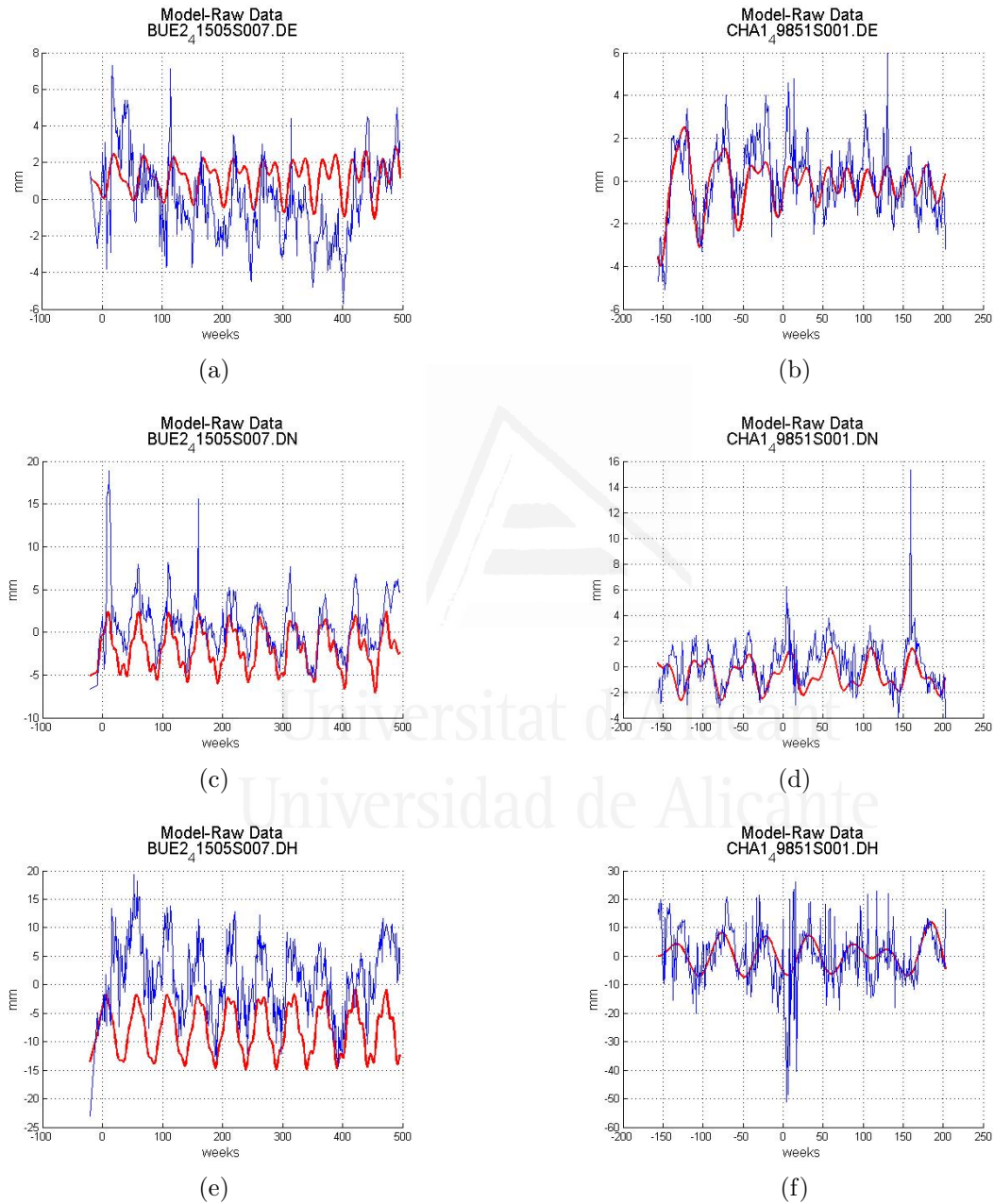


Figure C.3: Estaciones BUE2 y CHA1.

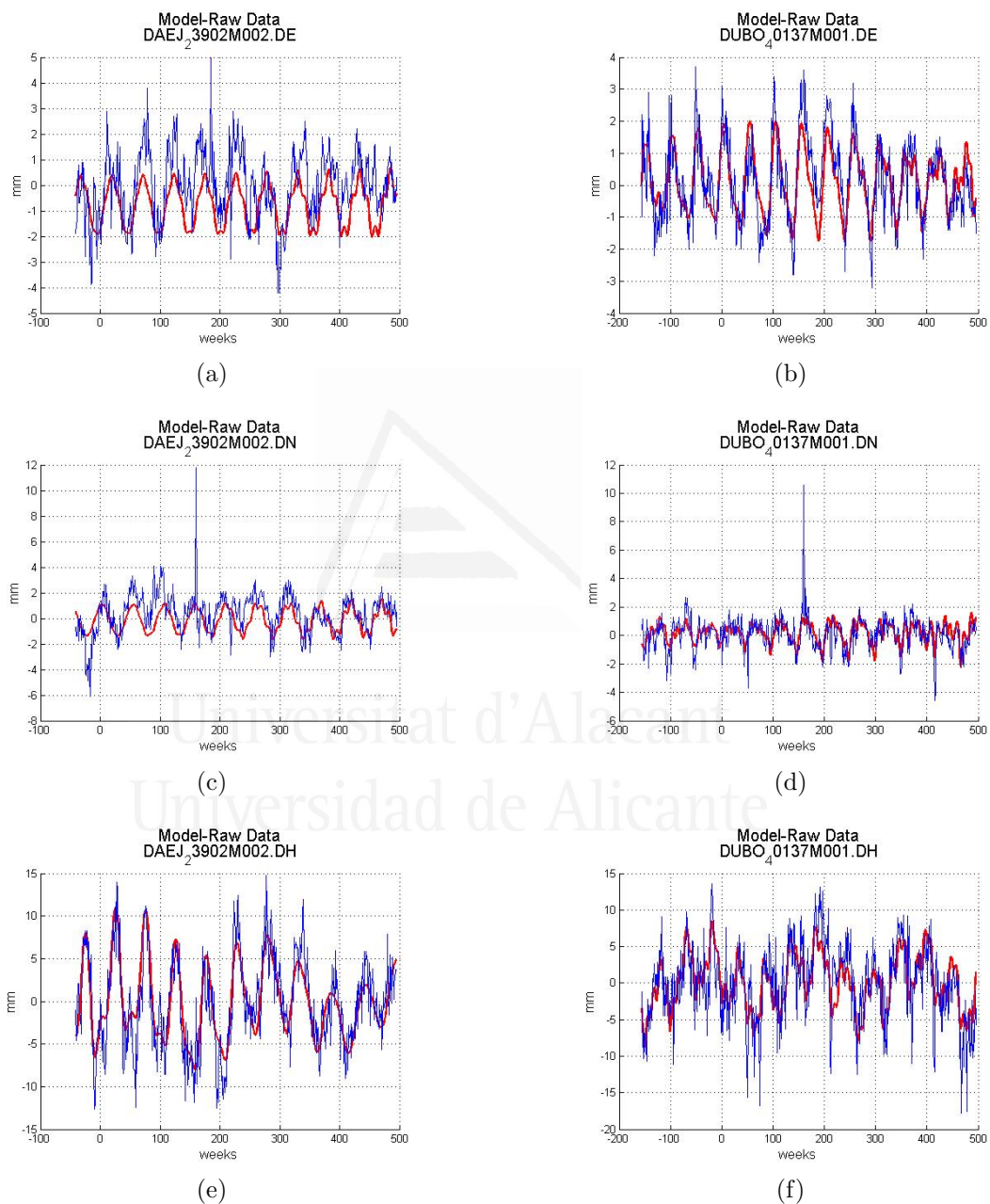


Figure C.4: Estaciones DAEJ y DUBO.

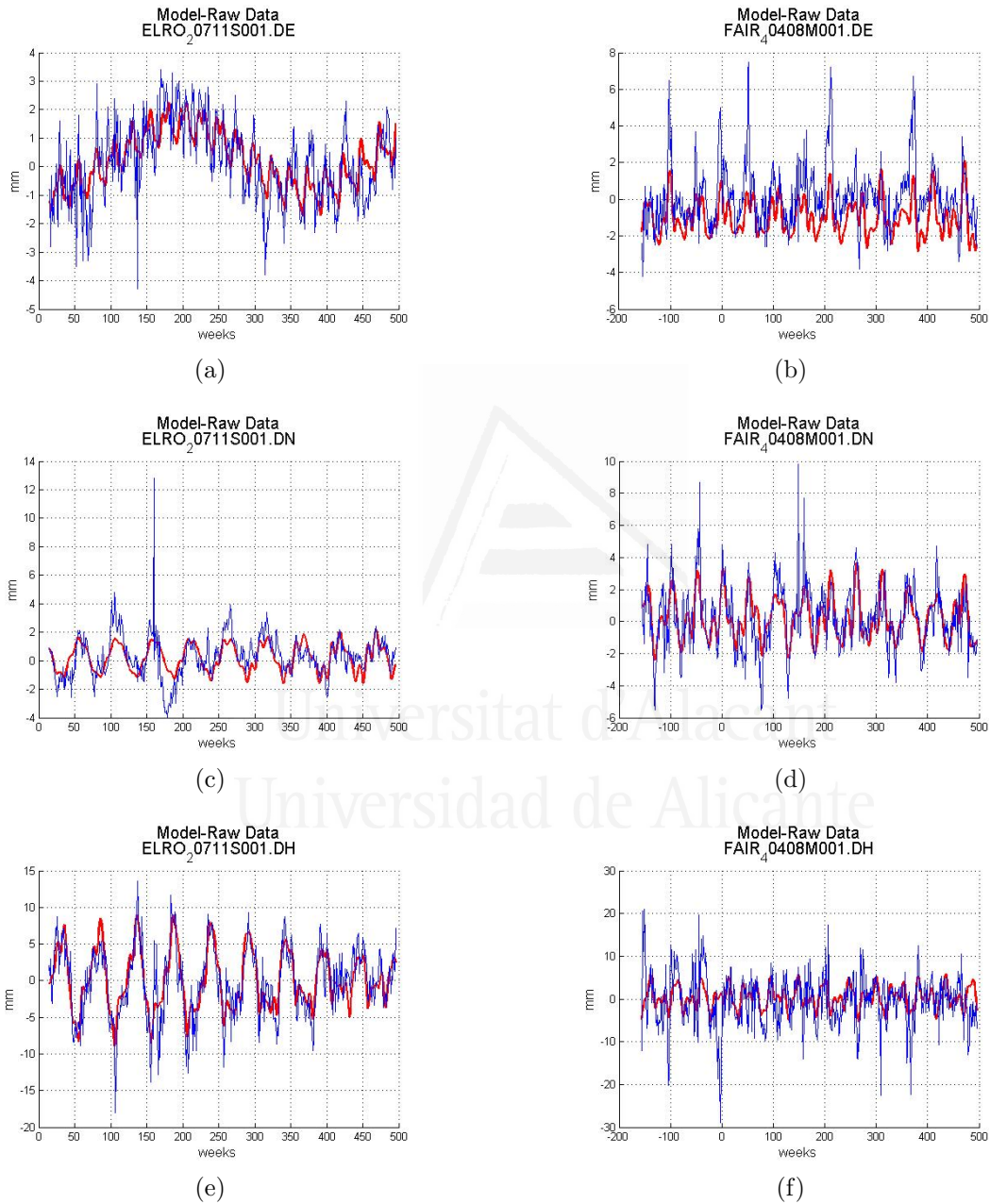


Figure C.5: Estaciones ELRO y FAIR.

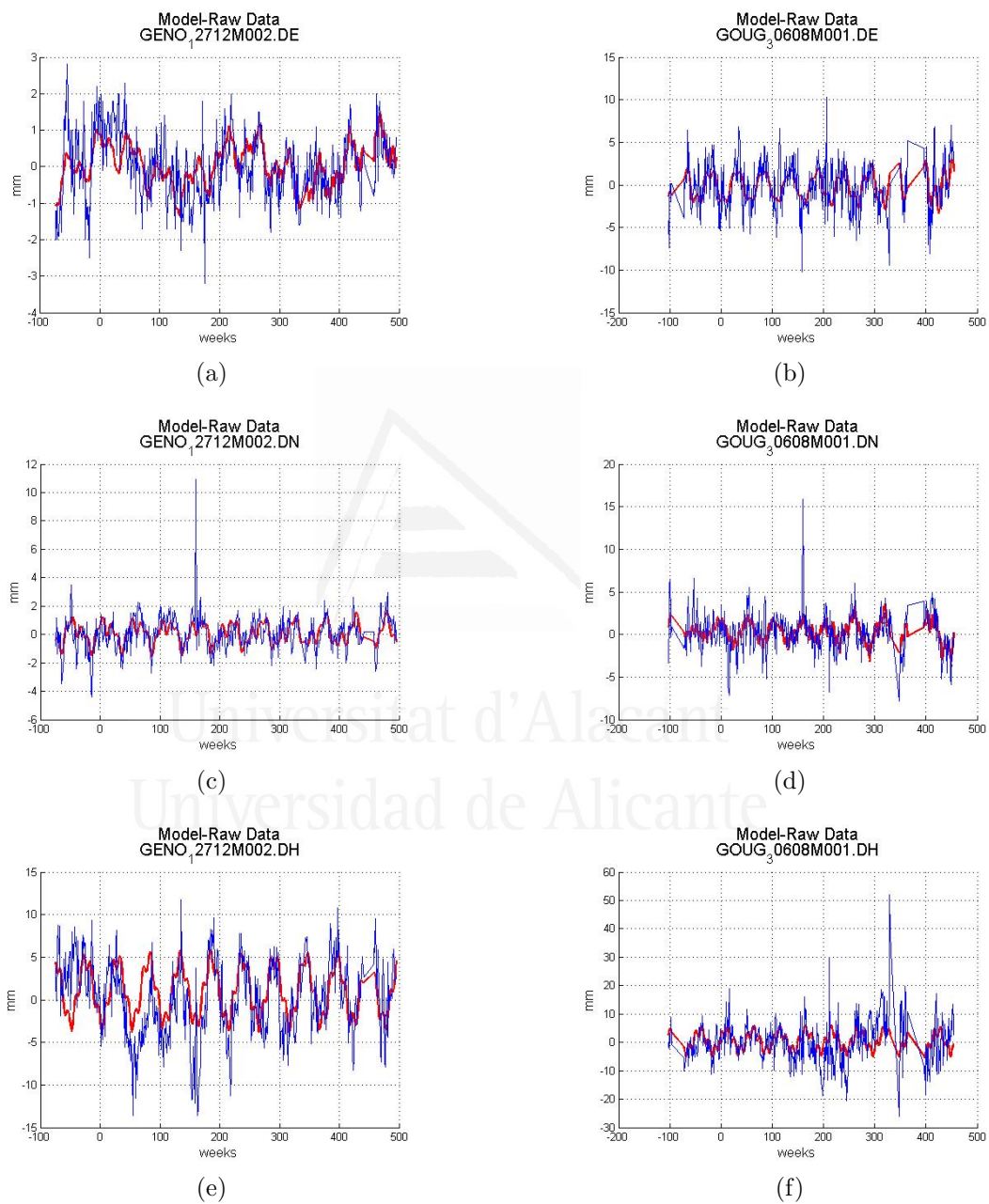


Figure C.6: Estaciones GENO y GOUG.



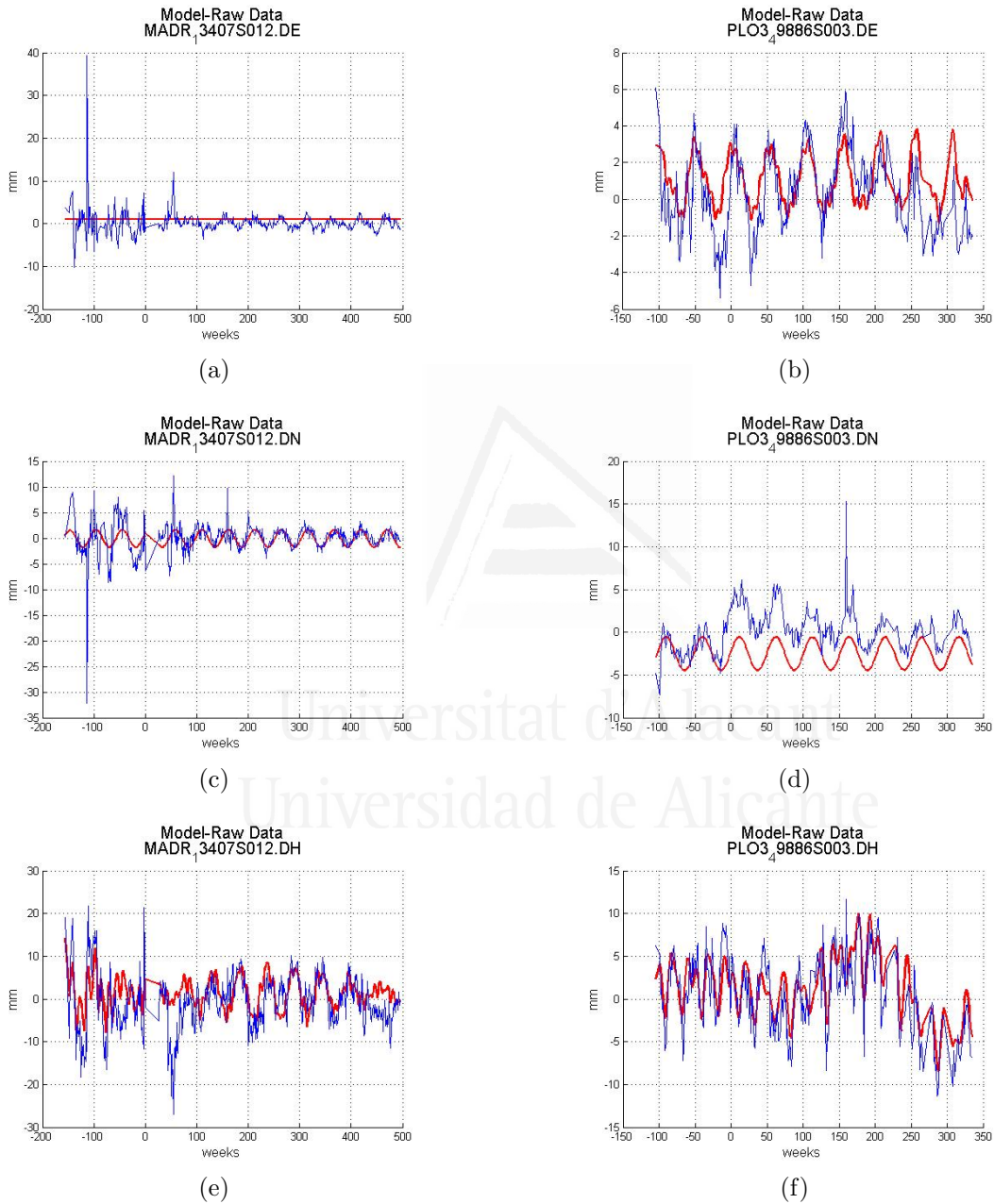


Figure C.7: Estaciones MADR y PLO3.

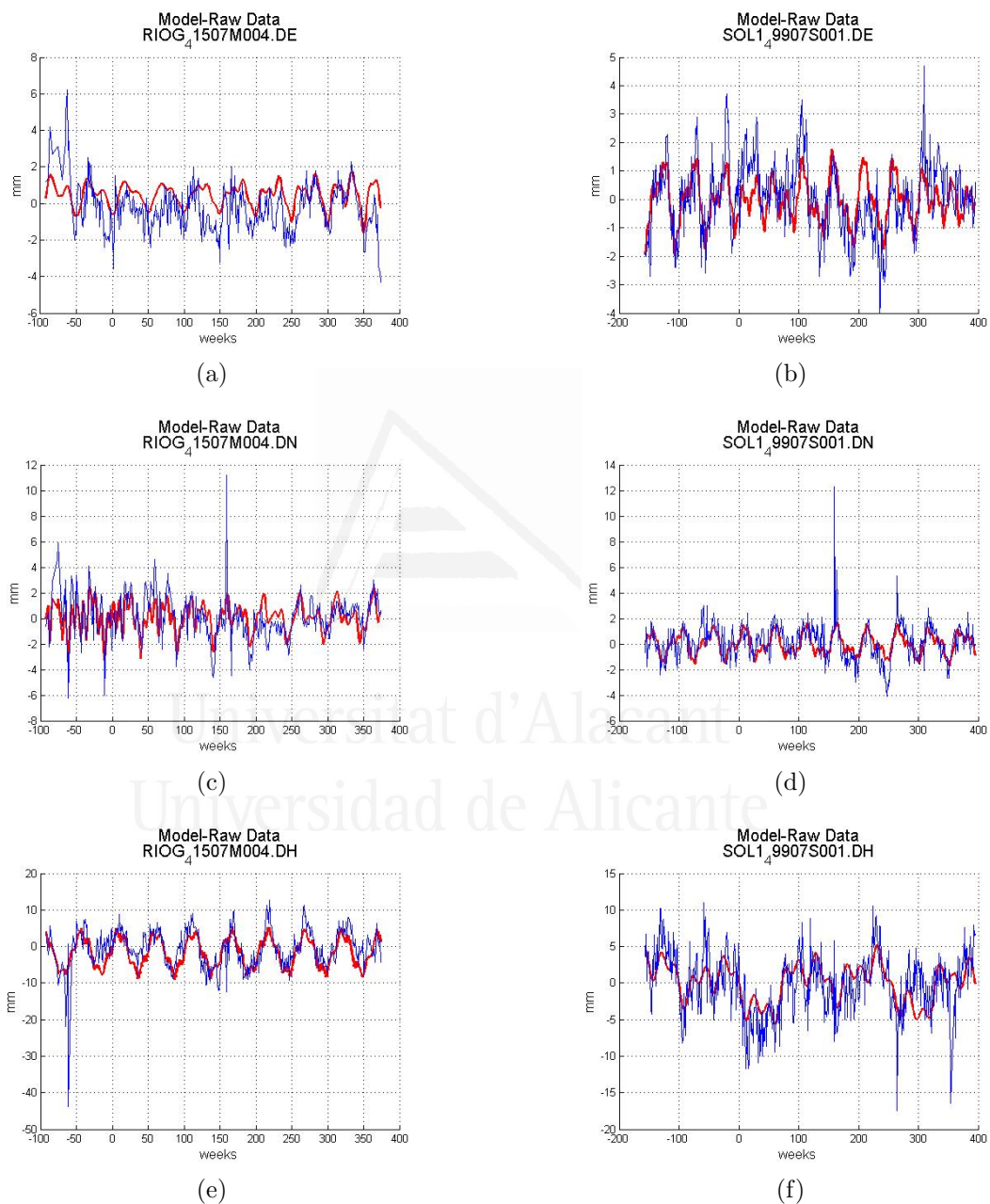


Figure C.8: Estaciones RIOG y SOL1.

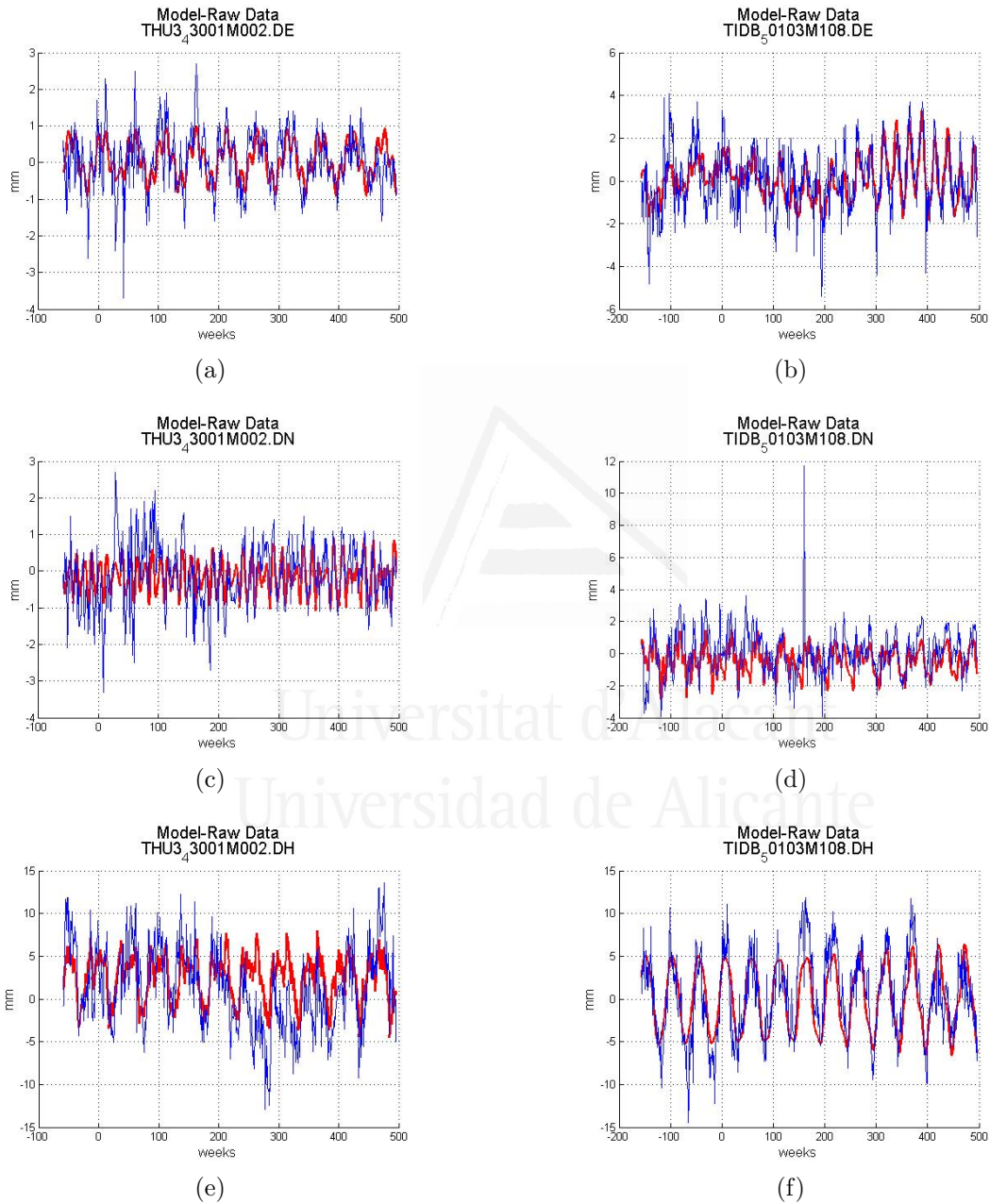


Figure C.9: Estaciones THU3 y TIDB.

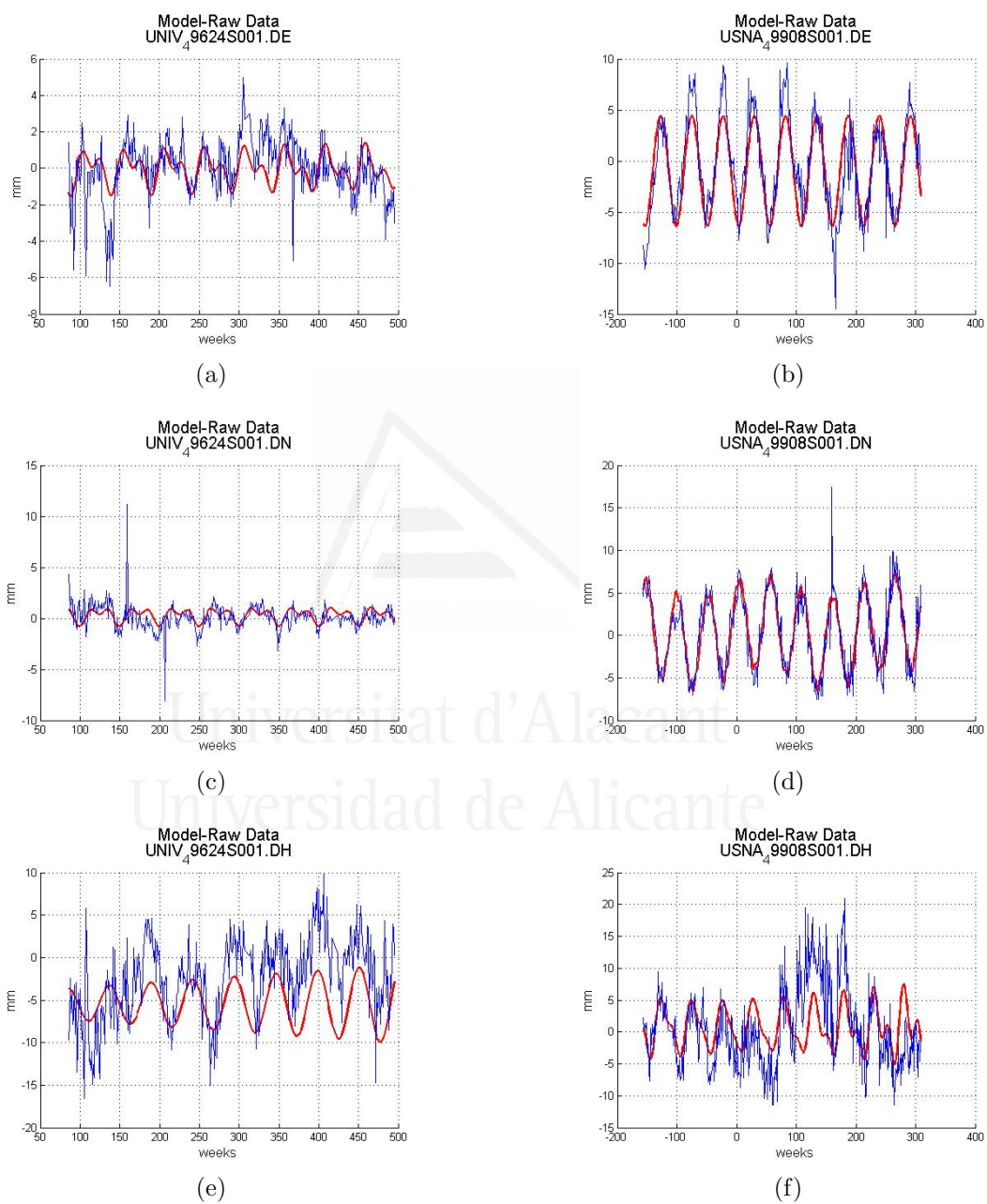


Figure C.10: Estaciones UNIV y USNA.

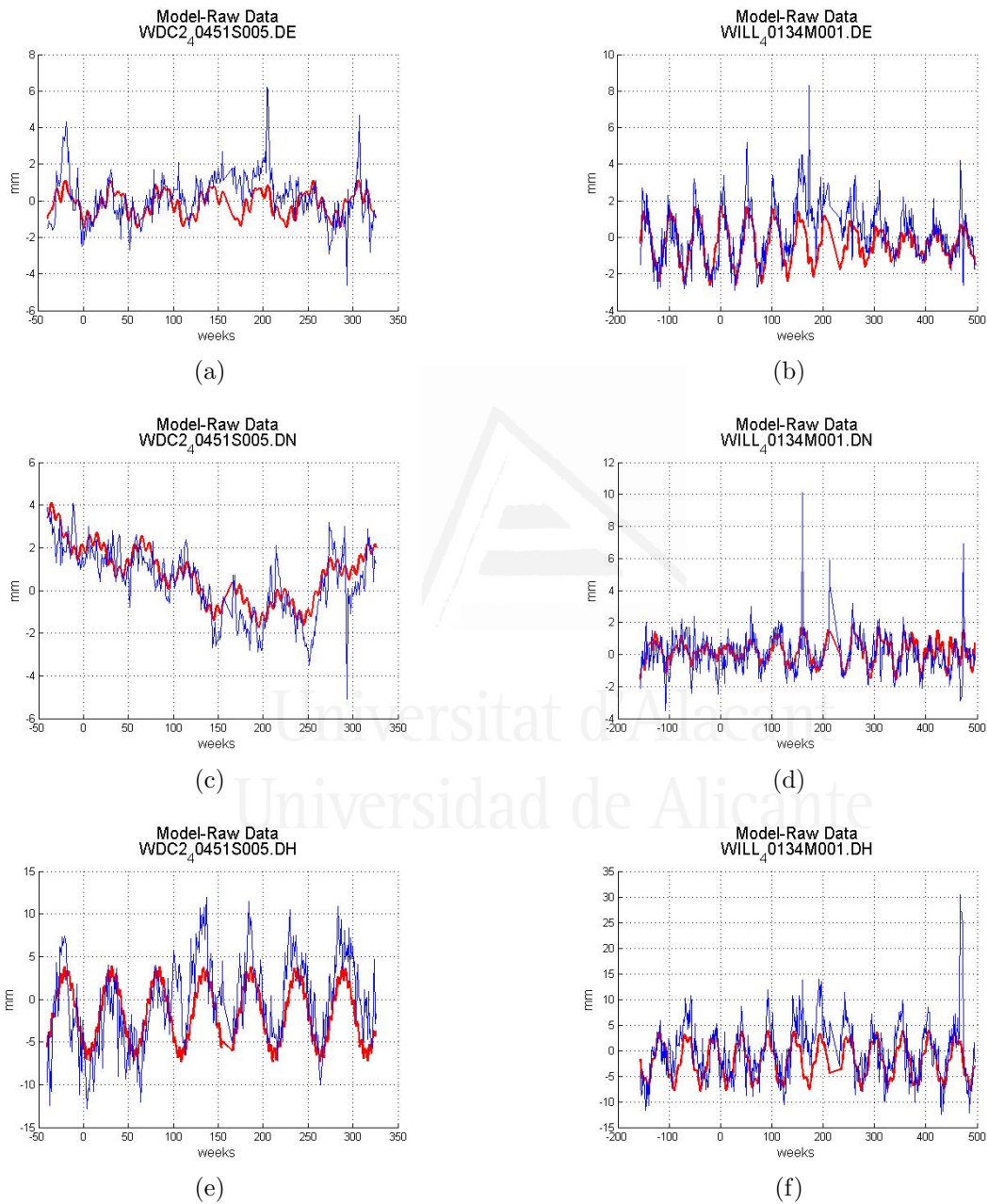


Figure C.11: Estaciones WDC2 y WILL.

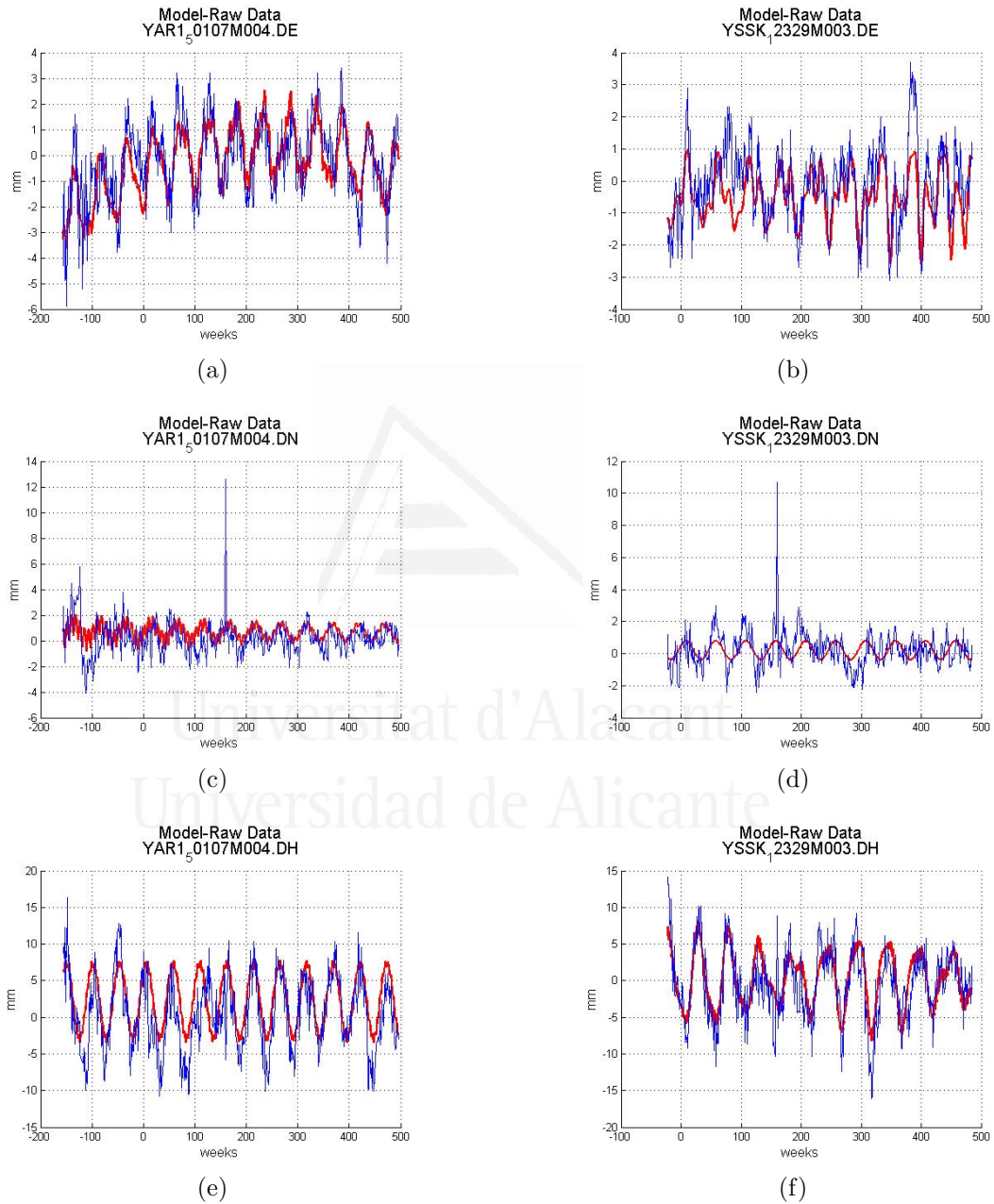


Figure C.12: Estaciones YAR1 y YSSK.



---

# Bibliografía

- R. Abarca del Rio, D. Gambis, and D. A. Salstein. Interannual signals in length of day and atmospheric angular momentum. *Annales geophysicae*, 18:347–364, 2000.
- M. Alexander and K. Weickman. Biennial variability in an atmospheric general circulation model. *Journal of Climatology*, 8:431–440, 1995.
- Z. Altamimi. *Systèmes de référence terrestres: définition, réalisation, application à l'ITRF, état actuel et perspectives*. Dossier d'Habilitation à Diriger des Recherches, 2006.
- Z. Altamimi, D. Angermann, D. Argus, G. Blewitt, C. Boucher, B. Chao, H. Drewes, R. Eanes, M. Feissel, R. Ferland, T. Herring, B. Hold, J. Johannson, K. Larson, C. Ma, J. Manning, C. Meertens, A. Nothnagel, E. Pavlis, G. Petit, J. Ray, J. Ries, H. Scherneck, P. Sillard, and M. Watkins. The Terrestrial Reference frame and the Dynamic Earth. *EOS, Transactions, American Geophysical Union*, 82:273–284, 2001.
- Z. Altamimi, C. Boucher, and P. Sillard. New trends for the realization of the International Terrestrial Reference System. *Adv. Space Res.*, 30:175–184, 2002a.
- Z. Altamimi, P. Sillard, and C. Boucher. ITRF2000: A new release of the International Terrestrial Reference Frame for earth science applications. *Journal of Geophysical Research*, 107:B10, 2214, 2002b.
- Z. Altamimi, X. Collilieux, and C. Boucher. DORIS contribution to ITRF2005. *Journal of Geodesy*, 80:625–635, 2006.



- Z. Altamimi, X. Collilieux, J. Legrand, B. Garayt, and C. Boucher. ITRF2005: A new release of the International Terrestrial Reference Frame based on time series of stations positions and Earth Orientation Parameters. *Journal of Geophysical Research*, 112:B09401, 2007.
- A. R. Amiri-Simkooei. *Least-squares variance component estimation: theory and GPS applications*. Ph.D. thesis. Delft University of Technology, Publication on Geodesy, 64, Netherlands Geodetic Commission, Delft, 2007.
- A.R. Amiri-Simkooei. Noise in multivariate GPS position time-series. *J. Geod.*, 83: 175–187, 2009.
- A.R. Amiri-Simkooei, C.C.J.M. Tiberius, and P.J.G. Teunissen. Assessment of noise in GPS coordinate time series: Methodology and results. *Journal of Geophysical Research*, 112:B07413, 2007.
- J. K. Angell. On the variation in period and amplitude of the quasi-biennial oscillation in the equatorial stratosphere 1951-85. *Mon. Weather Rev.*, 114:285–288, 1986.
- S. Aoki, B. Guinot, G. H. Kaplan, H. Kinoshita, D. D. McCarthy, and P. K. Seidelman. The new definition of Universal Time. *Astron. Astrophys.*, 105, 1, 1982.
- B. Babaoglu. *Application of BiConjugate gradient stabilized method with spectral acceleration for propagation over terrain profiles*. Master's thesis. Department of Electrical and Electronics Engineering and the Institute of Engineering and Science, University of Bilkent (Turkey), 2003.
- T. P. Barnett. The interaction of multiple time scales in the tropical climate system. *J. Clim.*, 4:269–285, 1991.
- C. Bizouard and D. Gambis. *The combined solution C04 for Earth Orientation Parameters consistent with International Terrestrial Reference Frame 2005*. Observatoire de Paris. [http://hpiers.obspm.fr/eoppc/eop/eopc04\\_05/C04\\_05.guide.pdf](http://hpiers.obspm.fr/eoppc/eop/eopc04_05/C04_05.guide.pdf).
- G. Blewitt, D. Lavallée, P. Clarke, and K. Nurutdinov. A New Global Mode of Earth Deformation: Seasonal Cycle Detected. *Science*, 294:2342–2345, 2001.

- P. Bloomfield. *Fourier Analysis of time series: An introduction*. John Wiley and Sons, 1976.
- V. Bolshakov and P. Gaidáyev. *Teoría de la elaboración matemática de mediciones geodésicas*. Editorial Mir, 1989.
- F. Bouillé, A. Cazenave, J. M. Lemoine, and J. F. Crétaux. Geocentre motion from the DORIS space system and laser data to the Lageos satellites: comparison with surface loading data. *Geophys. J. Int.*, pages 71–82, 2000.
- C.G. Broyden. *Mathematics of Computation*, volume 21. 1967.
- F. Buffa and A. Poma. On the Chandler periodicity (Polar Motion, LOD and Climate). *ASP Conference Series*, 208:397–402, 2000.
- B. A. Buffet, P. M. Mathews, and T. Herring. Modeling of nutation and precession: Effects of electromagnetic coupling. *Journal of Geophysical Research*, 107:B4, 2002.
- B. F. Chao. Interannual length-of-day variation with relation with the Southern Oscillation/El Niño. *Geophys. Res. Lett.*, 11:541–544, 1984.
- B. F. Chao. Length-of-day variations caused by El Niño/Southern Oscillation and quasi biennial oscillation. *Science*, 243:923–925, 1989.
- B. F. Chao and W. P. O’Connor. Global surface water-induced seasonal variations in the Earth’s rotation and gravitational field. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 94:263–270, 1998.
- J. L. Chen, C. R. Wilson, R. J. Eanes, and R. S. Nerem. Geophysical interpretation of observed geocenter variations. *Journal of Geophysical Research*, 104:2683–2690, 1999.
- X. Collilieux. *Analyse des series temporelles de positions des stations de geodesie spatiale: Application au Repère International de Référence Terrestre (ITRF)*. Master’s thesis. École Doctorale d’Astronomie et d’Astrophysique d’Île-de-France, 2008.

- X. Collilieux, Z. Altamimi, D. Coulot, and P. Sillard. Comparison of very long baseline interferometry, GPS, and satellite laser ranging height residuals from ITRF2005 using spectral and correlation methods. *Journal of Geophysical Research*, 112: B12403: 1–18, 2007.
- E. J. David. *The Encyclopedia of Solid Earth Geophysics*, volume 237. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1989.
- D. Dong, J. O. Dickey, Y. Chao, and M. K. Cheng. Geocenter variations caused by atmosphere, ocean and surface ground water. *Geophysical Research Letter*, 24: 1867–1870, 1997.
- Luis Echarri. *Ciencias de la Tierra y del medio ambiente*, <http://www.tecnun.es/asignaturas/Ecologia/Hipertexto/indice.html>. Ed. Teide, 1998.
- T. M. Eubanks. Variations in the orientation of the Earth. *Smith DE and Turcotte DL (eds) Contributions of Space Geodesy to Geodynamics: Crustal Dynamics, AGU Geodynamics Series*, pages 1–54, 1993.
- G. Foster. Wavelets for period analysis of unevenly sampled time series. *The Astronomical Journal*, 112:1709–1729, 1996.
- E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar. *Wavelets in geophysics*. Academic Press, 1994.
- K. Fraedrich, S. Pawson, and R. Wang. An EOF analysis of the vertical-time delay structure of the quasi-biennial oscillation. *J. Atmos. Sci.*, 50:3357–3365, 1993.
- M. Ghil, M. R. Allen, M. D. Dettinger, K. Ide, D. Kondrashov, M. E. Mann, A. W. Robertson, A. Saunders, Y. Tian, F. Varadi, and P. Yiou. Advanced spectral methods for climatic time series. *AGU Reviews of Geophysics*, 40:1–41, 2002.
- G. E. O. Giacaglia. *Perturbation Methods in Non-linear Systems, Chapter 2, section 4*. Springer, 1972.
- D. Gibert. Traitement de l'information. 1. Traitement du signal. *Cours Licence et Maitrise de Géophysique, Université de Rennes 1.*, 1997.

- A. Güntner, J. Stuck, S. Werth, P. Döll, K. Verzano, and B. Merz. A global analysis of temporal and spatial variations in continental water storage. *Water Resources Research*, 43:W05416, 2007.
- R. S. Gross, S. L. Marcus, T. M. Eubanks, J. O. Dickey, and C. L. Keppenne. Detection of an ENSO signal in seasonal length-of-day variations. *Geophys. Res. Lett.*, 23:3373–3376, 1996.
- V. S. Gubanov. Dynamics of the Earth’s Core from VLBI observations. *Astronomy Letters*, 35:270–277, 2009.
- L. GuoQing and Z. HaiFeng. 27.3-day and 13.6-day atmospheric tide. *Science in China Series D: Earth Sciences*, 50:1380–1395, 2007.
- M. C. Gutzwiller. Moon-Earth-Sun: The oldest three-body problem. *Reviews of Modern Physics*, 70, Issue 2:589–639, 1998.
- W. Harada. *A method of non-linear harmonic analysis and its application to dynamical astronomy*. Master’s thesis. Department of Astronomy, Graduate School of Science, University of Tokyo (Japan), 2003.
- W. Harada and T. Fukushima. Harmonic decomposition of the time ephemeris TE405. *The Astronomical Journal*, 126:2557–2561, 2003.
- R. Hide and J. O. Dickey. Earth’s variable rotation. *Science*, 253:629–637, 1991.
- L. A. Hinnov and C. R. Wilson. An estimate of the water storage contribution to the excitation of polar motion. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 88:437–459, 1987.
- J.R.M. Hosking. Fractional differencing. *Biometrika*, 68:165–176, 1981.
- J. Huang, H. M. Van Den Dool, and K. P. Georgakalos. Analysis of model-calculated soil-moisture over the United States (1931 - 1993) and applications to long-range temperatures forecasts. *Journal of Climatology*, 9:1350–1362, 1996.
- G. M. Jenkins and D. G. Watts. *Spectral Analysis and its applications*. Holden-day, 1968.

- H. Johnson and F.K. Wyatt. Geodetic network design for faultmechanics studies. *Manuser Geod.*, 19:309–323, 1994.
- G. H. Kaplan. Celestial Pole offsets: Conversion from (dX, dY) to (dpsi, deps). *Technical Note. U. S. Naval Observatory*, pages 1–4, 2005.
- G. A. Krasinsky. Numerical Theory of Rotation of the Deformable Earth with Two-Layer fluid Core. pt. 1: Mathematical Model. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 96:169–217, 2006.
- G. A. Krasinsky and M. V. Vasilyev. Numerical Theory of Rotation of the Deformable Earth with Two-Layer fluid Core. pt. 2: Fitting to VLBI Data. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 96:219–237, 2006.
- J. Kuehne and C. R. Wilson. Terrestrial water storage and polar motion. *Journal of Geophysical Research*, pages 4337–4345, 1991.
- J. Langbein. Noise in GPS displacement measurements from Southern California and Southern Nevada. *Journal of Geophysical Research*, 113:B05405, 2008.
- J. Langbein and H. Johnson. Correlated errors in geodetic time series: Implications for time-dependent deformation. *Journal of Geophysical Research*, 102:591–603, 1997.
- K. M. Lau and P. J. Sheu. Annual cycle, quasi-biennial oscillation, and southern oscillation in global precipitation. *Journal of Geophysical Research*, 93:10975–10988, 1988.
- X. P. Lei and B. X. Gao. The excitation of water storage distribution and the annual wobble. *Acta Astronomica Sinica*, 33:61–66, 1992.
- J. H. Lieske, T. Ledeile, W. Fricke, and B. Morando. Expressions for the precession quantities based upon the IAU 1976 system of astronomical constants. *Astronomy and Astrophysics*, 58:1–16, 1977.
- N.R. Lomb. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and Space Science*, 39:447–462, 1976.

- Z. Malkin and D. Terentev. Investigation of the Parameters of the Free Core Nutation from VLBI Data. *Comm. Inst. Appl. Astron. Russ. Acad. Sci.*, 149:24, 2003.
- A. Mao, C.G.A. Harrison, and T.H. Dixon. Noise in GPS coordinate time series. *Journal of Geophysical Research*, 104:2797–2816, 1999.
- P. M. Mathews, T. A. Herring, and B. A. Buffet. Modeling of nutation and precession: New nutation series for nonrigid Earth, and insights into the Earth's Interior. *Journal of Geophysical Research*, 107:B4, 2002.
- R. Mautz and S. Petrovic. Erkennung von physikalisch vorhandenen periodizitäten in zeitreihen. *Geod. Geoinformation Landmanagement*, 130:156–165, 2005.
- F. Mignard. Famous, frequency analysis mapping on usual sampling. *Obs. de la Cote d'Azur Cassiopée, Nice, France*, 2005.
- V. Moron, R. Vautard, and M. Ghil. Trends, interdecadal and interannual oscillations in global sea-surface temperatures. *Clim. Dyn.*, 14:545–569, 1998.
- J. F. Navarro. *Teoría analítica de la rotación de la Tierra rígida mediante manipulación simbólica específica*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Alicante, 2001.
- A. Nayfeh. *Perturbation methods*. Wiley, 1973.
- T. Niedzielski and W. Kosek. Prediction of UT1-UTC, LOD and AAM  $\chi_3$  by combination of least-squares and multivariate stochastic methods. *J. Geod.*, 82:83–92, 2008.
- D. Peña. *Estadística. Modelos y métodos. Vol. 2*. Alianza Universidad Textos, 1989.
- D. B. Percival and A. T. Walden. *Wavelet methods for time series analysis*. Cambridge University Press,, 2000.
- G. Petit and B. Luzum. IERS Conventions (2010). *IERS Conventions Centre*, IERS Technical Note No.36:1–160, 2010.

- L. Petrov and J.P. Boy. Study of the atmospheric pressure loading signal in very long baseline interferometry observations. *Journal of Geophysical Research*, 109: B18, pp. 3405, doi:10.1029/2003JB002500, 2004.
- S. G. Philander. *El Niño, La Niña, and the Southern Oscillation*. Academic Press, San Diego, 1990.
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical recipes in C, The Art of Scientific Computing, 2nd ed.* Cambridge University Press, 1967.
- R. S. Quiroz. Period modulation of the stratospheric quasi-biennial oscillation. *Mon. Weather Rev.*, 109:665–674, 1981.
- J. Ray, Z. Altamimi, X. Collilieux, and T. van Dam. Anomalous harmonics in spectra of GPS position estimates. *GPS Solut*, 12:DOI 10.1007/s10291–007–0067–7, 2008.
- R. D. Rosen. The axial momentum balance of Earth and its fluid envelope. *Surv Geophys*, 14:1–29, 1993.
- R.J. Rousseeuw and A.M. Leroy. *Robust Regression and Outlier Detection*. New York: Wiley, 1987.
- J. A. Sanders and F. Verhulst. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Springer, 1985.
- M. N. Sasi and B. V. Krishna Murthy. A study of quasi-biennial oscillation in the tropical stratosphere. *J. Atmos. Terr. Phys.*, 53:1173–1180, 1991.
- J. D. Scargle. Studies in astronomical time series analysis I. Modeling random processes in the time domain. *The Astrophysical Journal*, 263:1–71, 1981.
- J. D. Scargle. Studies in astronomical time series analysis ii. statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *The Astrophysical Journal*, 263:835–853, 1982.
- S.Chapman and R.S. Lindzen. *Atmospheric Tides*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland., 1970.

- M. Schmidt, V. Tesmer, and H. Schuh. Wavelet Analysis of VLBI Nutation Series with respect to FCN. *EGU General Assembly, Geophysical Research Abstracts*, 7: 04555, 2005.
- R. Schmidt, S. Petrovic, A. Güntner, F. Barthelmes, J. Wunsch, and J. Kusche. Periodic components of water storage changes from GRACE and global hydrology models. *Journal of Geophysical Research*, 113:B08419, 2008.
- M. Stefanick. Interannual atmospheric angular momentum variability 1963-1973 and the southern oscillation. *Journal of Geophysical Research*, 87:428–432, 1982.
- T. H. Syed, J. S. Famiglietti, M. Rodell, J. Chen, and C.R. Wilson. Analysis of terrestrial water storage changes from GRACE and GLDAS. *Water Resources Research*, 44:W02433, 2008.
- L. Telesca. Cycles, scaling and crossover phenomenon in length of the day (LOD) time series. *Physica A*, 379:459–464, 2007.
- P.J.G. Teunissen and A.R. Amiri-Simkooei. Least-squares variance component estimation. *J Geod*, 82:65–82, 2008a.
- P.J.G. Teunissen and A.R. Amiri-Simkooei. Variance component estimation by the method of least-squares. In *VI Hotine-Marussi Symposium on Theoretical and Computational Geodesy*, 2008b.
- C. Torrence and G. P. Compo. A practical guide to wavelet analysis. *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 79:61–78, 1998.
- P. Tregoning and C. Watson. Atmospheric effects and spurious signals in GPS analyses. *Journal of Geophysical Research*, 114:B09403: 1–15, 2009.
- T. J. Ulrych and T. N. Bishop. Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 33:183–200, 1975.
- T. van Dam, J.M. Wahr, P.C.D. Milly, A.B. Shmakin, G. Blewitt, D. Lavallée, and K.M. Larson. Crustal displacements due to continental water loading. *Geophysical Research Letters*, 28:651–654, doi:10.1029/2000GL012120, 2001.



- T. E. A. van Hylckama. Water balance and Earth unbalance. *IASH AISH publ.*, 92: 434–444, 1970.
- R. Vautard and M. Ghil. Singular spectrum analysis in nonlinear dynamics, with applications to paleoclimatic time series. *Physica D.*, 35:395–424, 1989.
- B. Visauta and P. Batallé. *Métodos Estadísticos Aplicados. Tomo I: Estadística Descriptiva*. Promociones y Publicaciones Universitarias, 1991.
- G. Walz. Computing the matrix exponential and other matrix functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 21:119–123, 1988.
- J.M. Warh. *The tidal motions of a rotating, elliptical, elastic and oceanless Earth*. Ph. D. thesis. University of Colorado., 1979.
- J. G. Williams, X. X. Newhall, and J. O. Dickey. Luni-solar precession: determination from lunar laser ranges. *Astron. Astrophys.*, 241:L9–L12, 1991.
- S.D.P. Williams. The effect of coloured noise on the uncertainties of rates estimated from geodetic time series. *Journal of Geodesy*, 76:483–494, 2003.
- S.D.P. Williams. Error analysis of continuous GPS position time series. *Journal of Geophysical Research*, 109:B03412, 2004.
- X. Wu, M.B. Heflin, E. Ivins, and I. Fukumori. Seasonal and interannual global surface mass variations from multisatellite geodetic data. *Journal of Geophysical Research*, 111:B10, 9401, 2006.
- C. F. Yoder, J. G. Williams, and M. E. Parke. Tidal variations of Earth rotation. *Journal of Geophysical Research*, 86:B2, 881–891, 1981.
- J. Zhang, Y. Bock, H. Johnson, P. Fang, S. Williams, J. Genrich, S. Wdowinski, and J. Behr. Southern California permanent GPS geodetic array: Error analysis of daily position estimates and site velocities. *Journal of Geophysical Research*, 102: 18035–18055, 1997.

Y. H. Zhou, D. W. Zheng, and X. H. Liao. Wavelet analysis of interannual LOD, AAM, and ENSO: 1997-98 El Niño and 1998-99 La Niña signals. *Journal of Geodesy*, 75:164–168, 2001.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

