



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Soluciones analítico-numéricas de ecuaciones
en derivadas parciales con retardo

Elia Reyes Salguero



Tesis

Doctorales

www.eltallerdigital.com

UNIVERSIDAD de ALICANTE



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Departamento de Matemática Aplicada

TESIS DOCTORAL

SOLUCIONES ANALÍTICO-NUMÉRICAS DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES CON RETARDO

Memoria presentada por la licenciada en Ciencias Matemáticas D^a Elia Reyes Salguero para optar al grado de Doctora por la Universidad de Alicante.

Directores:

José Antonio Martín Alustiza
Catedrático de Escuela Universitaria
Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Alicante

Francisco Rodríguez Mateo
Profesor Titular de Universidad
Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Alicante

ALICANTE, 2008

Objetivos y resumen de la tesis

La creciente utilización en distintos problemas científico-técnicos de modelos en los que se tiene en cuenta la existencia de efectos hereditarios o retardados, destacando en los últimos años el empleo de modelos basados en ecuaciones y sistemas de ecuaciones en derivadas parciales con retardo (EDPR), plantea la necesidad de disponer de soluciones exactas y de aproximaciones numéricas para este tipo de ecuaciones. Mientras que las cuestiones de existencia y propiedades cualitativas de las soluciones de distintas clases de EDPR han sido consideradas en numerosos trabajos, la obtención de soluciones explícitas y el desarrollo de métodos de aproximación numérica eficientes para tipos específicos de EDPR es un campo menos desarrollado.

El objetivo de este trabajo es la obtención de soluciones exactas y analítico-numéricas de problemas mixtos para ciertos tipos de ecuaciones y sistemas de ecuaciones en derivadas parciales con retardo.

En concreto, se considerará la ecuación generalizada de difusión con retardo,

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + b^2 u_{xx}(t - \tau, x), \quad t > \tau, \quad 0 \leq x \leq l,$$

y se abordará la obtención de soluciones exactas en forma de serie infinita y de aproximaciones numéricas continuas para problemas mixtos, con condición inicial

$$u(t, x) = \varphi(t, x), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad 0 \leq x \leq l,$$

y condiciones frontera de tipo Dirichlet,

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad t \geq 0.$$

En el Capítulo 1, tras una breve introducción al tema, se presentan las estrategias utilizadas en los distintos problemas abordados en esta memoria.

En el Capítulo 2 se realiza un estudio detallado de la solución del problema anterior en forma de serie infinita, obtenida aplicando el método de separación de variables, y se obtienen acotaciones para el error cometido al truncar la serie solución. Con ello, se obtienen soluciones numéricas continuas que permiten aproximar la solución exacta en dominios acotados con precisión prefijada.

El objetivo del Capítulo 3 es mejorar la eficiencia computacional de las soluciones numéricas obtenidas en el capítulo anterior. Para ello, en primer lugar se muestra que si la función inicial es de tipo polinómico, entonces es posible calcular de forma exacta algunos de los términos que definen dicha solución numérica y que los demás términos de la solución, dados en forma de serie infinita, pueden truncarse de forma que el error cometido decaiga de forma exponencial con el número de términos de la serie truncada. Para una función inicial cualquiera, se plantea su aproximación mediante polinomios de grado adecuado, de forma que el error total, al aproximar la función inicial por una función polinómica y al truncar la correspondiente solución en forma de serie infinita, quede acotado por el error admisible prefijado, manteniéndose las propiedades de rapidez en la convergencia de la serie. De esta forma, es posible obtener aproximaciones numéricas precisas con un número reducido de términos en la serie truncada.

En el Capítulo 4 se generalizan los resultados del Capítulo 2 para el caso de sistemas de ecuaciones acoplados, esto es, problemas análogos al considerado más arriba pero donde las funciones $u(t, x)$ y $\varphi(t, x)$ son vectoriales y los coeficientes a^2 y b^2 son sustituidos por coeficientes matriciales A y B , cumpliendo condiciones adecuadas pero en general no simultáneamente diagonalizables.

Todos los métodos numéricos desarrollados en este trabajo han sido implementados utilizando el programa Maple. Los correspondientes códigos, con los que se han realizado los cálculos de los ejemplos y figuras incluidos en la memoria, se recogen en un anexo.

Agradecimientos

Quiero expresar mi reconocimiento y agradecimiento a mis directores de tesis D. José Antonio Martín Alustiza y en especial a D. Francisco Rodríguez Mateo por haberme iluminado en los momentos difíciles cuando parecía que no había salida y siendo además su actitud positiva motivo de inspiración constante permitiéndome llegar al final del camino y hacer posible este trabajo.

A Antonio, mi marido, por su paciencia infinita que me ha animado siempre a seguir adelante.

A mis padres, que a pesar de no poder leer este trabajo siempre han estado ahí para ayudarme en todo lo que he necesitado.

Gracias Maite por escucharme y entenderme cuando te contaba mis dificultades.

A mis amigos, en especial a Ana, que siempre ha sabido esperarme.

Este trabajo se ha desarrollado en el marco de los proyectos GV04B/454 y GV06/207, financiados, respectivamente, por la Conselleria de Cultura, Educación y Deporte y la Conselleria de Empresa, Universidad y Ciencia de la Generalitat Valenciana y GRE0411, financiado por la Universidad de Alicante. La Universidad de Alicante ha contribuido también a través de las ayudas al grupo de investigación en ecuaciones diferenciales con retardo (VIGROB038).

Índice general

Objetivos y resumen de la tesis	I
Agradecimientos	III
1. Introducción	1
2. Soluciones de problemas mixtos para la ecuación generalizada de difusión con retardo	5
2.1. Solución de la ecuación diferencial ordinaria con retardo	7
2.2. Solución en forma de serie infinita	19
2.3. Lemas previos	21
2.4. Continuidad de la solución	26
2.5. Regularidad de la solución	29
2.6. Acotaciones de los restos	40
2.7. Solución numérica con cota de error <i>a priori</i>	43
2.8. La ecuación de reacción-difusión con retardo	46
2.8.1. Acotaciones de los restos	48
2.8.2. Continuidad y regularidad de la solución	52
3. Aproximaciones polinómicas de la función inicial	60
3.1. Expresión del tercer sumando de la serie si $\varphi_t(t, x)$ se aproxima por un polinomio en la variable t	61
3.2. Estudio de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \frac{g_{n,k}}{(n^2 d^2)^{k+1-j}}$	66
3.3. Estudio de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k+1}} \sin(nx)$, siendo k un número natural	70
3.4. Expresión definitiva de la solución aproximada	74
3.5. Teorema de Weierstrass. Polinomios de Bernstein	75
3.6. Cálculo del error cometido al truncar la solución obtenida aproximando φ_t por un polinomio en la variable t	79
3.7. Acotación del error total de aproximación	83

4. Soluciones de sistemas acoplados de ecuaciones generalizadas de difusión con retardo	86
4.1. Aplicación del método de separación de variables	87
4.2. Solución de la ecuación diferencial vectorial con retardo	88
4.3. Solución exacta en forma de serie infinita	95
4.4. Caso particular de igualdad de coeficientes	97
4.5. Lemas previos	100
4.6. Convergencia y continuidad de la solución	105
4.7. Regularidad de la solución	113
4.8. Aproximaciones numéricas	120
Conclusiones	125
Apéndice. Programas en Maple	127
Bibliografía	147



Universitat d'Alacant
 Universidad de Alicante

Capítulo 1

Introducción

Las ecuaciones diferenciales constituyen una de las herramientas básicas de la modelización matemática. Existen numerosos problemas reales en los que el comportamiento del sistema depende, aunque sea en parte, de su historia previa, de modo que para poder modelizar estos procesos es necesario utilizar ecuaciones diferenciales funcionales. En particular, las ecuaciones diferenciales con retardo (EDR) y las ecuaciones en derivadas parciales con retardo (EDPR) han merecido un especial interés, debido a que recogen las características esenciales de los procesos en los que existen efectos hereditarios o retardados, encontrando multitud de aplicaciones en problemas y campos muy diversos, como por ejemplo en dinámica de poblaciones, teoría de control de procesos, propiedades de materiales viscoelásticos, transmisión de calor en materiales con memoria térmica, etc... (véase [4, 10, 11, 17, 22, 23, 44] y las referencias allí incluidas).

En este trabajo consideraremos problemas mixtos para la ecuación generalizada de difusión con retardo

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + b^2 u_{xx}(t - \tau, x), \quad t > \tau, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.1)$$

donde $\tau > 0$, con condición inicial

$$u(t, x) = \varphi(t, x), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.2)$$

y condiciones de contorno de tipo Dirichlet

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Asimismo, se considerarán problemas similares para la ecuación de reacción-difusión con retardo

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + bu(t - \tau, x), \quad t > \tau, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.4)$$

y para sistemas acoplados de ecuaciones de difusión con retardo del tipo (1.1).

Este tipo de ecuaciones aparecen al incorporar efectos de retardo en las ecuaciones clásicas que describen los procesos de difusión, transmisión del calor o dispersión de poblaciones. Así, la ecuación (1.1) sin retardo, es decir, con $b = 0$,

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (1.5)$$

corresponde al modelo clásico para describir la difusión de sustancias químicas, la conducción del calor y otros fenómenos de transporte.

Una cuestión que se ha venido planteando desde hace largo tiempo respecto de esta ecuación, por su falta de fundamento físico, es que este modelo implica una velocidad de propagación infinita ([7, 41, 42]), por lo que se han propuesto, especialmente en el campo de la transmisión del calor, diferentes variaciones del modelo clásico que producen velocidades de propagación finitas y pueden, por tanto, resultar en modelos más realistas en situaciones en las que existen fenómenos de “inercia” térmica, ondas de calor o respuestas retardadas a las perturbaciones (véase [21]).

Centrándonos en el fenómeno de la conducción del calor, consideremos la ley de Fourier en una dimensión

$$q(t, x) = -ku_x(t, x), \quad (1.6)$$

donde q es el flujo de calor, u la temperatura y $k > 0$ es la conductividad térmica, un coeficiente que mide la capacidad del material para conducir el calor. El modelo clásico de difusión (1.5) se obtiene combinando (2.38) con la ecuación de conservación de la energía

$$-q_x(t, x) + Q(t, x) = C_p u_t(t, x),$$

donde C_p es el calor específico por unidad de volumen, Q es la energía térmica generada por unidad de tiempo y volumen, correspondiendo a la posible existencia de fuentes de calor, y $a^2 = k/C_p$ es la difusividad térmica.

El modelo clásico de conducción del calor proporciona descripciones macroscópicas precisas del comportamiento, en periodos largos de tiempo, de sistemas con dimensiones espaciales suficientemente grandes, por lo que se puede aplicar de forma satisfactoria en

los problemas técnicos convencionales. Sin embargo, cuando se necesita una descripción de la conducción del calor a escala microcópica o cuando se estudian procesos transitorios rápidos, como ocurre en el análisis del calentamiento de estructuras de láminas delgadas mediante láseres ultrarápidos o en el fenómeno del segundo sonido en el helio [5, 32, 33, 38], es preciso considerar modelos que incluyan retardos en el flujo de calor y/o en el gradiente de temperatura [39, 40].

En el modelo denominado de retardo de fase dual (dual-phase-lagging o DPL) propuesto por Tzou [40], la ley de Fourier se reemplaza por

$$q(t + \tau_q, x) = -ku_x(t + \tau_u, x), \quad (1.7)$$

donde τ_q y τ_u son, respectivamente, los retardos del flujo de calor y del gradiente de temperatura. En las aplicaciones del modelo DPL es habitual utilizar aproximaciones de primer orden en (1.7),

$$q(t, x) + \tau_q \frac{\partial q}{\partial t}(t, x) \cong -k\{u_x(t, x) + \tau_u \frac{\partial u_x}{\partial t}(t, x)\}, \quad (1.8)$$

y es usual referirse como modelo DPL a la ecuación resultante de esta aproximación [39], que, para $\tau_u = 0$, se reduce al denominado modelo de Cattaneo-Vernotte [7, 41, 42].

Sin embargo, si se mantiene la formulación original del modelo DPL, dada en (1.7), y utilizando la ecuación de conservación de energía adecuada, puede demostrarse [26, 45] que, para $\tau = \tau_q - \tau_u > 0$, el modelo DPL de conducción del calor puede escribirse en la forma

$$u_{t'}(t', x) = \alpha u_{xx}(t' - \tau, x), \quad t' > \tau_q, \quad (1.9)$$

donde u es la temperatura, α la difusividad térmica y $t' = t + \tau_q$, que es una ecuación de la forma (1.1) con $a = 0$.

Por lo que respecta a la ecuación de reacción-difusión con retardo (1.4), puede obtenerse como resultado de la linearización de algunos modelos usuales en dinámica de poblaciones. Así, la ecuación logística con retardo, conocida también como ecuación de Hutchinson o Wright (p. ej., [25, p. 4],[24, p. 83]),

$$N'(t) = rN(t) \left[1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right], \quad (1.10)$$

donde r es la tasa intrínseca de crecimiento y K es la capacidad de carga, permite incorporar a través del término $N(t - \tau)$ los efectos de diversos factores que producen

efectos retardados en el crecimiento de la población y si en este modelo se incorpora la dispersión de la población se obtiene una ecuación en derivadas parciales con retardo no lineal [37]. La linearización de (2.48) en el entorno de la capacidad de carga (véase, p. ej., [28, p. 18], [24, p. 84]),

$$n(t) = N(t) - K,$$

da lugar a la ecuación diferencial con retardo lineal

$$n'(t) = -rn(t - \tau),$$

y la incorporación de un término de difusión resulta en una ecuación de reacción-difusión con retardo de la forma (1.4).

El método de separación de variables, o método de Fourier, es una técnica clásica muy eficiente para resolver problemas mixtos de ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes ([6, 12, 14, 16]) que también puede ser de utilidad en problemas con coeficientes variables ([2, 19]) o matriciales ([20, 29]). Las soluciones exactas en forma de serie infinita que se obtienen con este método, y las soluciones numéricas continuas que se pueden obtener truncando estas series, se expresan en términos de los datos del problema y, por tanto, permiten estudiar las variaciones de la solución frente a perturbaciones de los datos, sus propiedades de oscilación o asintóticas y analizar la corrección del modelo utilizado.

El método de separación de variables también ha sido aplicado en algunos problemas de ecuaciones en derivadas parciales con retardo ([34],[43]). La aplicación del método es similar al caso de ecuaciones en derivadas parciales no funcionales, pero en la ecuación separada para el tiempo que se obtiene como resultado, se plantea un problema de valores iniciales de una ecuación diferencial con retardo, siendo necesario disponer de una solución explícita para este problema.

Capítulo 2

Soluciones de problemas mixtos para la ecuación generalizada de difusión con retardo

En este capítulo consideramos problemas mixtos para la ecuación generalizada de difusión del tipo

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + b^2 u_{xx}(t - \tau, x), \quad t > \tau, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.1)$$

$$u(t, x) = \varphi(t, x), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.2)$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

donde a y b son constantes distintas de cero y $\tau > 0$.

Utilizaremos el método de separación de variables para proponer una solución exacta en forma de serie infinita. Una vez demostrada la convergencia de esta serie, y de las derivadas necesarias, acotaremos el resto de la serie, de modo que al truncar la misma con el número de términos adecuado se obtenga una solución numérica continua cuyo error pueda ser fijado *a priori* en dominios acotados.

La regularidad de la función φ la supondremos, por el momento, suficiente para que sean correctos los cálculos que vamos a realizar; más adelante se estudiarán cuáles son las condiciones de regularidad suficientes.

Abordaremos el problema (2.1)-(2.3) utilizando el método de separación de variables. Buscaremos una solución de la forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. De esta forma, se obtendrán dos problemas separados para las variables tiempo y espacio.

$$T'(t)X(x) = a^2T(t)X''(x) + b^2T(t - \tau)X''(x),$$

o

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t) + b^2T(t - \tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Consecuentemente, $X(x)$ es la solución del problema

$$X''(x) + \lambda^2X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0$$

y resolviendo esta ecuación se tiene que su solución es

$$X(x) = a_1 \sin(\lambda x) + a_2 \cos(\lambda x),$$

e imponiendo las condiciones de contorno se tiene que $a_2 = 0$ y $a_1 \sin(\lambda l) = 0$, de donde

$$\lambda = \frac{n\pi}{l}$$

o

$$\lambda^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, n = 1, 2, \dots$$

con lo que las funciones características serán

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Las correspondientes funciones $T_n(t)$ serán la solución de la ecuación diferencial ordinaria con retardo

$$T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2} (a^2T_n(t) + b^2T_n(t - \tau)) = 0, \quad (2.4)$$

con $T_n(t) = B_n(t)$ para $0 \leq t \leq \tau$ y donde $B_n(t)$ son los coeficientes del desarrollo de Fourier de la función inicial $\varphi(t, x)$ con respecto a $\sin(\frac{n\pi x}{l})$, de modo que

$$\varphi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Con este planteamiento, propondremos como solución del problema (2.1)-(2.3) la serie formal

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

En la Sección 1 se construye una expresión explícita para la solución de la ecuación diferencial con retardo genérica que se obtiene al aplicar el método de separación de variables. La construcción de una solución del problema (2.1)-(2.3) en forma de serie infinita y las cuestiones de convergencia y regularidad son discutidas en las secciones 2-5. En la Sección 6 se obtienen acotaciones de los restos de la serie infinita, lo que permitirá truncar la misma con la precisión deseada, obteniendo soluciones numéricas continuas con cotas de error *a priori*, como se muestra en la sección 7. Finalmente, en la sección 8, se considera una ecuación de reacción-difusión con retardo, como ejemplo de ecuaciones que pueden ser abordadas con métodos similares a los empleados en este capítulo.

2.1. Solución de la ecuación diferencial ordinaria con retardo

La aplicación del método de separación de variables al problema (2.1)-(2.3) nos conduce a un problema de valor inicial general para la ecuación diferencial con retardo,

$$F'(t) = \alpha F(t) + \beta F(t - \tau), \quad t > \tau, \quad (2.5)$$

$$F(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (2.6)$$

donde $\tau > 0$ y $\alpha, \beta \neq 0$.

En primer lugar consideramos el problema particular en el que la función inicial es la función constante $f(t) = 1$. Utilizando el método de los pasos (véase [4, p. 45-47], [11, p.6-15], [23, p. 87-92]), se puede ir resolviendo el problema (2.5)-(2.6) en sucesivos intervalos $[m\tau, (m+1)\tau]$, a partir del intervalo inicial $[0, \tau]$, en el que la solución coincide con la función inicial y es, por tanto, conocida. En el siguiente lema se presenta la expresión general, para un intervalo cualquiera, de la solución que se deduce por este método y se demuestra su validez por inducción.

Lema 2.1. *Consideremos la EDD (2.5), con condición inicial $F(t) = 1$ para $t \in [0, \tau]$, y escribamos $\gamma = \beta/\alpha$. Su solución en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$, $m = 0, 1, \dots$, viene dada por*

$$F_1(t) = (1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(t-k\tau))^j}{j!} + (-\gamma)^m. \quad (2.7)$$

Demostración.

Comprobemos la expresión propuesta por inducción. De forma trivial, para $m = 0$ la suma es vacía y vale 0 y $F_1(t) = 1$ coincide con la condición inicial.

Supongamos que la expresión es cierta para m , es decir que la solución en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$ viene dada por

$$F_1(t) = (1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(t-k\tau))^j}{j!} + (-\gamma)^m. \quad (2.8)$$

Calcularemos la solución en el intervalo $[(m+1)\tau, (m+2)\tau]$, que debe venir dada por la expresión

$$F_1(t) = (1 + \gamma) \sum_{k=1}^{m+1} (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(t-k\tau))^j}{j!} + (-\gamma)^{m+1}. \quad (2.9)$$

La ecuación para t en el intervalo $[(m+1)\tau, (m+2)\tau]$ es

$$F_1(t) = e^{\int_{(m+1)\tau}^t \alpha ds} \left[c + \int_{(m+1)\tau}^t e^{-\int_{(m+1)\tau}^s \alpha du} \beta F_1(s-\tau) ds \right] \quad (2.10)$$

y, ajustando el valor de c para que en el extremo izquierdo, $(m+1)\tau$, el valor de $F_1(t)$ coincida con el proporcionado por (2.9), se tiene que

$$c = F_1((m+1)\tau)$$

y, sustituyendo en (2.10),

$$F_1(t) = e^{\int_{(m+1)\tau}^t \alpha ds} \left[F_1((m+1)\tau) + \int_{(m+1)\tau}^t e^{-\int_{(m+1)\tau}^s \alpha du} \beta F_1(s-\tau) ds \right], \quad (2.11)$$

es decir,

$$\begin{aligned} F_1(t) &= e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} F_1((m+1)\tau) \\ &+ \beta e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} \int_{(m+1)\tau}^t e^{-\alpha(s-(m+1)\tau)} F_1(s-\tau) ds. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Extrayendo constantes fuera de la integral y simplificando se tiene

$$F_1(t) = e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} F_1((m+1)\tau) + \beta e^{\alpha t} \int_{(m+1)\tau}^t e^{-\alpha s} F_1(s-\tau) ds. \quad (2.13)$$

Dado que $(m+1)\tau \leq s \leq (m+2)\tau$, la expresión $F_1(s-\tau)$ es la solución en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$. Por tanto, teniendo en cuenta los valores $F_1((m+1)\tau)$ y $F_1(s-\tau)$ en (2.8) y sustituyendo éstos en (2.13), se tiene,

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} \left[(1+\gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(m+1-k)\tau} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(m+1-k)\tau)^j}{j!} + (-\gamma)^m \right] \\
&+ \beta e^{\alpha t} \int_{(m+1)\tau}^t e^{-\alpha s} \left[(1+\gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(s-(k+1)\tau)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(s-(k+1)\tau))^j}{j!} \right] ds \\
&+ \beta e^{\alpha t} \int_{(m+1)\tau}^t e^{-\alpha s} (-\gamma)^m ds. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Ahora vamos a desarrollar la primera parte en la expresión (2.14), que quedaría de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
&e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} \left[(1+\gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(m+1-k)\tau} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(m+1-k)\tau)^j}{j!} + (-\gamma)^m \right] \\
&= (1+\gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(m+1-k)\tau)^j}{j!} \\
&+ (-\gamma)^m e^{\alpha(t-(m+1)\tau)}. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Separando $k=1$ en el primer sumatorio, la expresión (2.15) quedaría

$$\begin{aligned}
&(1+\gamma) \sum_{k=2}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(m+1-k)\tau)^j}{j!} \\
&+ (1+\gamma)(-\gamma)^{1-1} e^{\alpha(t-\tau)} + (-\gamma)^m e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} \tag{2.16}
\end{aligned}$$

y separando $j=0$ del segundo sumatorio, (2.16) quedaría como sigue,

$$\begin{aligned}
&(1+\gamma) \sum_{k=2}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-\alpha(m+1-k)\tau)^j}{j!} \\
&+ (1+\gamma) \sum_{k=2}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \\
&+ (1+\gamma) e^{\alpha(t-\tau)} + (-\gamma)^m e^{\alpha(t-(m+1)\tau)}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Ahora vamos a desarrollar la segunda y tercera expresión de (2.14),

$$\begin{aligned}
& \beta e^{\alpha t} \int_{(m+1)\tau}^t e^{-\alpha s} \left[(1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(s-(k+1)\tau)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(s-(k+1)\tau))^j}{j!} \right] ds \\
& + \beta e^{\alpha t} \int_{(m+1)\tau}^t e^{-\alpha s} (-\gamma)^m ds \\
& = \beta e^{\alpha t} \int_{(m+1)\tau}^t (1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} e^{-\alpha(k+1)\tau} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(s-(k+1)\tau))^j}{j!} ds \\
& + \beta (-\gamma)^m e^{\alpha t} \int_{(m+1)\tau}^t e^{-\alpha s} ds. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Introduciendo la primera integral dentro del sumatorio y resolviendo la segunda integral, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \beta e^{\alpha t} (1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} e^{-\alpha(k+1)\tau} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{(m+1)\tau}^t \frac{(-\alpha(s-(k+1)\tau))^j}{j!} ds \\
& - \frac{\beta}{\alpha} (-\gamma)^m e^{\alpha t} (e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(m+1)\tau}). \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Operando en (2.19), quedaría como sigue

$$\begin{aligned}
& \beta (1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-(k+1)\tau)} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{(-\alpha(s-(k+1)\tau))^{j+1}}{(-\alpha)(j+1)!} \right]_{(m+1)\tau}^t \\
& + (-\gamma)^{m+1} (1 - e^{\alpha(t-(m+1)\tau)}) \\
& = -\frac{\beta}{\alpha} (1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-(k+1)\tau)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(t-(k+1)\tau))^{j+1}}{(j+1)!} \\
& + \frac{\beta}{\alpha} (1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-(k+1)\tau)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(m-k)\tau)^{j+1}}{(j+1)!} \\
& - (-\gamma)^{m+1} e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} + (-\gamma)^{m+1}. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Renombrando los índices de los primeros sumatorios de las expresiones de (2.20) se tiene que la expresión anterior es igual a lo siguiente

$$\begin{aligned}
& - \gamma (1 + \gamma) \sum_{k=2}^{m+1} (-\gamma)^{k-2} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(-\alpha(t-k\tau))^{j+1}}{(j+1)!} \\
& + \gamma (1 + \gamma) \sum_{k=2}^{m+1} (-\gamma)^{k-2} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(-\alpha(m+1-k)\tau)^{j+1}}{(j+1)!} \\
& - (-\gamma)^{m+1} e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} + (-\gamma)^{m+1}. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Ahora renombramos los segundos sumatorios de las expresiones anteriores, con lo que se tiene

$$\begin{aligned}
& - \gamma(1 + \gamma) \sum_{k=2}^{m+1} (-\gamma)^{k-2} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-\alpha(t-k\tau))^j}{j!} \\
& + \gamma(1 + \gamma) \sum_{k=2}^{m+1} (-\gamma)^{k-2} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-\alpha(m+1-k)\tau)^j}{j!} \\
& - (-\gamma)^{m+1} e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} + (-\gamma)^{m+1}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

o lo que es lo mismo, introduciendo γ dentro de los sumatorios,

$$\begin{aligned}
& = (1 + \gamma) \sum_{k=2}^{m+1} (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-\alpha(t-k\tau))^j}{j!} \\
& - (1 + \gamma) \sum_{k=2}^{m+1} (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-\alpha(m+1-k)\tau)^j}{j!} \\
& - (-\gamma)^{m+1} e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} + (-\gamma)^{m+1}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Teniendo en cuenta que para $k = m + 1$ la expresión $(-\alpha(m+1-k)\tau)^j$ es cero, las expresiones anteriores quedarían de la forma

$$\begin{aligned}
& (1 + \gamma) \sum_{k=2}^{m+1} (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-\alpha(t-k\tau))^j}{j!} \\
& - (1 + \gamma) \sum_{k=2}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-\alpha(m+1-k)\tau)^j}{j!} \\
& - (-\gamma)^{m+1} e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} + (-\gamma)^{m+1}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Sumando las expresiones (2.17) con las expresiones (2.24), que proceden del desarrollo de (2.14), tenemos la expresión de $F_1(t)$ en el intervalo $[(m+1)\tau, (m+2)\tau]$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
F_1(t) & = (1 + \gamma) \sum_{k=2}^{m+1} (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-\alpha(t-k\tau))^j}{j!} \\
& - (-\gamma)^{m+1} e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} + (1 + \gamma) \sum_{k=2}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \\
& + (1 + \gamma) e^{\alpha(t-\tau)} + (-\gamma)^m e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} + (-\gamma)^{m+1}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

y, simplificando (2.25),

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= (1 + \gamma) \sum_{k=2}^{m+1} (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-\alpha(t-k\tau))^j}{j!} \\
&+ (1 + \gamma) \sum_{k=2}^m (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} + (1 + \gamma)(-\gamma)^m e^{\alpha(t-(m+1)\tau)} \\
&+ (1 + \gamma)e^{\alpha(t-\tau)} + (-\gamma)^{m+1}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Finalmente, agrupando las expresiones de (2.26) se tiene

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= (1 + \gamma) \sum_{k=2}^{m+1} (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-\alpha(t-k\tau))^j}{j!} \\
&+ (1 + \gamma) \sum_{k=2}^{m+1} (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \\
&+ (1 + \gamma)e^{\alpha(t-\tau)} + (-\gamma)^{m+1}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

y reagrupando la primera y la segunda línea

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= (1 + \gamma) \sum_{k=2}^{m+1} (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(t-k\tau))^j}{j!} \\
&+ (1 + \gamma)e^{\alpha(t-\tau)} + (-\gamma)^{m+1},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

o lo que es igual,

$$F_1(t) = (1 + \gamma) \sum_{k=1}^{m+1} (-\gamma)^{k-1} e^{\alpha(t-k\tau)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\alpha(t-k\tau))^j}{j!} + (-\gamma)^{m+1} \tag{2.29}$$

en el intervalo $[(m+1)\tau, (m+2)\tau]$, como queríamos demostrar.

En el próximo lema probaremos este resultado escribiendo la solución en una forma más compacta, utilizando la función gamma y la función gamma incompleta complementaria,

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-s} s^{k-1} ds, \quad \Gamma(k, v) = \int_v^\infty e^{-s} s^{k-1} ds.$$

Lema 2.2. *La solución de la ecuación (2.5) con la condición inicial $F(t) = 1$ para $t \in [0, \tau]$, en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$, $m = 0, 1, \dots$, viene dada por*

$$F_1(t) = (1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t-k\tau))}{\Gamma(k)} + (-\gamma)^m. \tag{2.30}$$

Demostración. La equivalencia entre (2.7) y (2.30) se sigue inmediatamente de la identidad (véase [1, p. 262])

$$e^{-v} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{v^j}{j!} = \frac{\Gamma(k, v)}{\Gamma(k)}.$$

La suma en (2.30) es vacía para $m = 0$, con lo que es evidente que $F_1(t)$ satisface la condición inicial. No es difícil comprobar que $F_1(t)$ es continua para $t \geq 0$ y continuamente diferenciable para $t > \tau$. Usando las relaciones

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Gamma(k)} \frac{\partial \Gamma(k, v)}{\partial v} &= \frac{e^{-v} v^{k-1}}{\Gamma(k)} = \frac{\Gamma(k, v)}{\Gamma(k)} - \frac{\Gamma(k-1, v)}{\Gamma(k-1)}, \quad k > 1, \\ -\frac{1}{\Gamma(1)} \frac{\partial \Gamma(1, v)}{\partial v} &= e^{-v} = \frac{\Gamma(1, v)}{\Gamma(1)}, \end{aligned}$$

(ver [1, p. 262]), obtenemos que para $t \in (m\tau, (m+1)\tau)$, $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= (1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} \alpha \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} \\ &\quad - (1 + \gamma) \sum_{k=2}^m (-\gamma)^{k-1} \alpha \frac{\Gamma(k-1, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k-1)} \\ &= \alpha F_1(t) - \alpha(-\gamma)^m + \alpha\gamma(1 + \gamma) \sum_{k=1}^{m-1} (-\gamma)^{k-1} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - \tau - k\tau))}{\Gamma(k)} \\ &= \alpha F_1(t) + \beta F_1(t - \tau). \end{aligned}$$

Para obtener la solución para una función inicial cualquiera, consideramos la siguiente representación integral (véase [11, p. 67]).

Lema 2.3. *Sea $F_1(t)$ la solución de la ecuación (2.5) con la condición inicial considerada en el Lema 2.2. Entonces, la solución del problema de valores iniciales (2.5)-(2.6), para una función inicial f diferenciable, viene dada por*

$$F_f(t) = \frac{f(\tau) + \gamma f(0)}{1 + \gamma} F_1(t) + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \int_0^\tau F_1(t-s) f'(s) ds. \quad (2.31)$$

Demostración. Buscamos una solución de la forma

$$F_f(t) = K F_1(t) + \int_0^\tau F_1(t-s) g'(s) ds, \quad (2.32)$$

donde $F_1(t)$ es la solución de (2.5)-(2.6) con $F_1(t) = f(t) = 1$ en $0 \leq t \leq \tau$ e $g(s)$ una función a determinar de manera que $F_f(t)$ sea solución de (2.5)-(2.6). Es fácil comprobar sin más que sustituir en la ecuación diferencial que la función $F_f(t)$ antes definida es solución del problema. Nos queda determinar la constante K y la función $g(s)$ de manera que F_f coincida con la función siguiente para valores de t cumpliendo que $\tau \leq t \leq 2\tau$,

$$\begin{aligned} F_f(t) &= e^{\int_{\tau}^t \alpha ds} [f(\tau) + \int_{\tau}^t e^{-\int_{\tau}^s \alpha du} \beta f(s - \tau) ds] \\ &= e^{\alpha(t-\tau)} f(\tau) + e^{\alpha(t-\tau)} \int_{\tau}^t e^{-(s-\tau)\alpha} \beta f(s - \tau) ds. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable en la integral anterior se tiene que la expresión anterior se quedaría como sigue

$$F_f(t) = e^{\alpha(t-\tau)} f(\tau) + e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-s\alpha} \beta f(s) ds.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que en el intervalo $[0, \tau]$

$$F_1(t) = 1$$

y en el intervalo $[\tau, 2\tau]$

$$F_1(t) = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-\tau)} - \frac{\beta}{\alpha}$$

sustituyendo las expresiones anteriores en (2.32) se tiene,

$$\begin{aligned} & e^{\alpha(t-\tau)} f(\tau) + e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-s\alpha} \beta f(s) ds \\ &= K \left(\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-\tau)} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \\ &+ \int_0^{t-\tau} \left(\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-s-\tau)} - \frac{\beta}{\alpha} \right) g'(s) + \int_{t-\tau}^{\tau} g'(s) ds. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Aplicando integración por partes se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_0^{t-\tau} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-s-\tau)} g'(s) \\ &= \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-\tau)} [e^{-\alpha s} g(s)]_0^{t-\tau} + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} \alpha e^{-\alpha s} g(s) ds \\ &= \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-\tau)} e^{-\alpha(t-\tau)} g(t-\tau) - \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-\tau)} g(0) \\ &+ \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} \alpha e^{-\alpha s} g(s) ds. \end{aligned}$$

Así (2.33) se queda como sigue,

$$\begin{aligned}
& e^{\alpha(t-\tau)} f(\tau) + e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-s\alpha} \beta f(s) ds \\
= & K(1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)} - K \frac{\beta}{\alpha} \\
& - \frac{\beta}{\alpha} g(t-\tau) + \frac{\beta}{\alpha} g(0) + g(\tau) - g(t-\tau) + (1 + \frac{\beta}{\alpha}) g(t-\tau) \\
& - (1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)} g(0) + (1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} \alpha e^{-\alpha s} g(s) ds.
\end{aligned}$$

Simplificando lo anterior se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}
& e^{\alpha(t-\tau)} f(\tau) + e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-s\alpha} \beta f(s) ds \\
= & K(1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)} - K \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} g(0) + g(\tau) \\
& - (1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)} g(0) + (1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} \alpha e^{-\alpha s} g(s) ds. \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Si tomamos

$$e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-s\alpha} \beta f(s) ds = (1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} \alpha e^{-\alpha s} g(s) ds \tag{2.35}$$

se deduce que

$$\beta f(s) = (1 + \frac{\beta}{\alpha}) \alpha g(s)$$

o lo que es lo mismo

$$f(s) = (1 + \frac{\alpha}{\beta}) g(s).$$

Y despejando se obtiene

$$g(s) = \frac{\beta}{\beta + \alpha} f(s).$$

Por otro lado, teniendo en cuenta (2.35), la expresión (2.34) se quedaría como sigue,

$$e^{\alpha(t-\tau)} f(\tau) = K((1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)} - \frac{\beta}{\alpha}) + g(\tau) + (-(1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)} + \frac{\beta}{\alpha}) g(0)$$

y teniendo en cuenta la definición de $g(t)$, de la expresión anterior se obtiene

$$e^{\alpha(t-\tau)} f(\tau) = K((1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)} - \frac{\beta}{\alpha}) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} f(\tau) + (-(1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)} + \frac{\beta}{\alpha}) \frac{\beta}{\alpha + \beta} f(0)$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned}
& (e^{\alpha(t-\tau)} - \frac{\beta}{\alpha + \beta}) f(\tau) - (\frac{\beta}{\alpha} - (1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)}) \frac{\beta}{\alpha + \beta} f(0) \\
= & K((1 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha(t-\tau)} - \frac{\beta}{\alpha}). \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$e^{\alpha(t-\tau)} - \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta}{\beta + \alpha} \left(\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-\tau)} - \frac{\beta}{\alpha} \right),$$

el valor de K de (2.36) se despeja como sigue

$$K = \frac{\beta f(0) + \alpha f(\tau)}{\beta + \alpha} = \frac{\gamma f(0) + f(\tau)}{1 + \gamma}.$$

Por tanto, sustituyendo $g(t)$ y K en (2.32), se tiene

$$F_f(t) = \frac{f(\tau) + \gamma f(0)}{1 + \gamma} F_1(t) + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \int_0^\tau F_1(t-s) f'(s) ds.$$

Nuestro próximo teorema se deduce fácilmente sustituyendo la expresión (2.30) en (2.31), sabiendo que si $t \in [m\tau, (m+1)\tau]$ entonces $t-s$ se va a mover en dos intervalos diferentes. Esto habrá que tenerlo en cuenta para el cálculo de

$$\frac{\gamma}{1 + \gamma} \int_0^\tau F_1(t-s) f'(s) ds.$$

Así,

$$0 \leq s \leq t - m\tau \implies m\tau \leq t - s \leq t$$

y $F_1(t-s)$ es la solución $F_1(t)$ en $[m\tau, (m+1)\tau]$ cambiando t por $t-s$, mientras que

$$t - m\tau \leq s \leq \tau \implies t - \tau \leq t - s \leq m\tau$$

y $F_1(t-s)$ es la solución $F_1(t)$ en $[(m-1)\tau, m\tau]$ cambiando t por $t-s$. De esta forma,

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{1 + \gamma} \int_0^\tau F_1(t-s) f'(s) ds \\ &= \frac{\gamma}{1 + \gamma} \int_0^{t-m\tau} \left[(1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t-k\tau))}{\Gamma(k)} + (-\gamma)^m \right] f'(s) ds \\ &+ \frac{\gamma}{1 + \gamma} \int_{t-m\tau}^\tau \left[(1 + \gamma) \sum_{k=1}^{m-1} (-\gamma)^{k-1} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t-k\tau))}{\Gamma(k)} + (-\gamma)^{m-1} \right] f'(s) ds \quad (2.37) \end{aligned}$$

El resultado final se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *La solución del problema de valores iniciales (2.5)-(2.6), para una función inicial f diferenciable, viene dada, en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$, $m = 0, 1, \dots$, por*

$$\begin{aligned}
F_f(t) &= (f(\tau) + \gamma f(0)) \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \gamma^{k-1} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} \\
&\quad + \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \gamma^k \int_0^{t-m\tau} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau - s))}{\Gamma(k)} f'(s) ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \gamma^k \int_{t-m\tau}^{\tau} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau - s))}{\Gamma(k)} f'(s) ds \\
&\quad + (-1)^m \gamma^m f(t - m\tau).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Demostración Por el Lema 2.3,

$$F_f(t) = \frac{f(\tau) + \gamma f(0)}{1 + \gamma} F_1(t) + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \int_0^{\tau} F_1(t - s) f'(s) ds. \tag{2.39}$$

Teniendo en cuenta (2.37) y el Lema 2.2,

$$\begin{aligned}
&F_f(t) \\
&= \frac{f(\tau) + \gamma f(0)}{1 + \gamma} \left[(1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} + (-\gamma)^m \right] \\
&\quad + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \int_0^{t-m\tau} \left[(1 + \gamma) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} + (-\gamma)^m \right] f'(s) ds \\
&\quad + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \int_{t-m\tau}^{\tau} \left[(1 + \gamma) \sum_{k=1}^{m-1} (-\gamma)^{k-1} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} + (-\gamma)^{m-1} \right] f'(s) ds.
\end{aligned}$$

Simplificando lo anterior,

$$\begin{aligned}
F_f(t) &= (f(\tau) + \gamma f(0)) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} \\
&\quad + \frac{f(\tau) + \gamma f(0)}{1 + \gamma} (-\gamma)^m \\
&\quad - \int_0^{t-m\tau} \sum_{k=1}^m (-\gamma)^k \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} f'(s) ds \\
&\quad - \int_{t-m\tau}^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} (-\gamma)^k \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} f'(s) ds \\
&\quad - \frac{(-\gamma)^{m+1}}{1 + \gamma} \int_0^{t-m\tau} f'(s) ds - \frac{(-\gamma)^m}{1 + \gamma} \int_{t-m\tau}^{\tau} f'(s) ds.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Resolviendo y simplificando las integrales de (2.40), se tiene,

$$\begin{aligned}
F_f(t) &= (f(\tau) + \gamma f(0)) \sum_{k=1}^m (-\gamma)^{k-1} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} \\
&+ (-\gamma)^m \frac{f(\tau) + \gamma f(0)}{1 + \gamma} \\
&- \int_0^{t-m\tau} \sum_{k=1}^m (-\gamma)^k \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} f'(s) ds \\
&- \int_{t-m\tau}^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} (-\gamma)^k \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} f'(s) ds \\
&+ (-\gamma)^m f(t - m\tau) - (-\gamma)^m \frac{f(\tau) + \gamma f(0)}{1 + \gamma}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

De esta forma, se obtiene el resultado del teorema,

$$\begin{aligned}
F_f(t) &= (f(\tau) + \gamma f(0)) \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \gamma^{k-1} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} \\
&+ \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \gamma^k \int_0^{t-m\tau} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau - s))}{\Gamma(k)} f'(s) ds \\
&+ \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \gamma^k \int_{t-m\tau}^{\tau} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau - s))}{\Gamma(k)} f'(s) ds \\
&+ (-1)^m \gamma^m f(t - m\tau).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Nótese que para $m = 0$, la expresión (2.42) se reduce al último término. La expresión equivalente que sigue se obtiene reordenando el segundo y el tercer términos en (2.42), sobreentendiéndose que la suma del tercer término es vacía para $m = 0$.

$$\begin{aligned}
F_f(t) &= (f(\tau) + \gamma f(0)) \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \gamma^{k-1} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau))}{\Gamma(k)} \\
&+ \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \gamma^k \int_0^{\tau} \frac{\Gamma(k, -\alpha(t - k\tau - s))}{\Gamma(k)} f'(s) ds \\
&+ (-1)^{m-1} \gamma^m \int_0^{t-m\tau} \frac{\Gamma(m, -\alpha(t - m\tau - s))}{\Gamma(m)} f'(s) ds \\
&+ (-1)^m \gamma^m f(t - m\tau).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Destacamos el caso $a = 0$ para el problema (2.1)-(2.3), lo que se traduce en $\alpha = 0$ para el problema (2.5)-(2.6). Tomando $P(k, x) = 1 - Q(k, x)$, y usando la relación [1,

p. 262]

$$P(k, x) = \frac{x^k \exp(-x)}{\Gamma(k+1)} M(1, k+1, x),$$

donde M es una función hipergeométrica [1, p. 504], que satisface $M(1, k+1, 0) = 1$, la expresión (2.38) se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} F_f(t) &= f(\tau) + (\alpha f(\tau) + \beta f(0)) \sum_{k=1}^m \frac{\beta^{k-1} (t - k\tau)^k}{k!} e^{\alpha(t-k\tau)} M(1, k+1, -\alpha(t-k\tau)) \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\beta^k}{k!} \int_0^\tau (t - k\tau - s)^k e^{\alpha(t-k\tau-s)} M(1, k+1, -\alpha(t-k\tau-s)) f'(s) ds \\ &+ \frac{\beta^m}{m!} \int_0^{t-m\tau} (t - m\tau - s)^m e^{\alpha(t-m\tau-s)} M(1, m+1, -\alpha(t-m\tau-s)) f'(s) ds. \end{aligned}$$

y, para $\alpha = 0$, lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned} F_f(t) &= f(\tau) + \beta f(0) \sum_{k=1}^m \frac{\beta^{k-1} (t - k\tau)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\beta^k}{k!} \int_0^\tau (t - k\tau - s)^k f'(s) ds \\ &+ \frac{\beta^m}{m!} \int_0^{t-m\tau} (t - m\tau - s)^m f'(s) ds. \end{aligned}$$

2.2. Solución en forma de serie infinita

Consideremos el problema (2.1)-(2.3). En lo que sigue se suponen las siguientes condiciones para $\varphi(t, x)$, que iremos utilizando cuando sean necesarias.

- $\varphi(t, x)$ es continuamente diferenciable en t ,
- $\varphi(t, x)$ y $\varphi_t(t, x)$ son dos veces continuamente diferenciables en x ,
- $\varphi_{xx}(t, x)$ es variación acotada en x , continua en t .

Usando el método de separación de variables, buscamos soluciones de (2.1) de la forma $u(t, x) = T(t)X(x)$ de (2.1)-(2.3), como ya se indicó anteriormente, proponiéndose la solución

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (2.44)$$

Aquí, $T_n(t)$ es la solución del problema

$$T'_n(t) = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 T_n(t) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 b^2 T_n(t - \tau), \quad t > \tau, \quad (2.45)$$

$$T_n(t) = B_n(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (2.46)$$

y $B_n(t)$ son los coeficientes de Fourier

$$B_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(t, x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx,$$

tales que

$$\varphi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad 0 \leq x \leq l.$$

El problema (2.45)-(2.46) es del tipo considerado en el Teorema 2.4, por lo que la expresión para $T_n(t)$ se sigue inmediatamente de (2.43). Para escribir la solución en una forma más compacta, sean

$$c = \frac{b}{a}, \quad d = \frac{\pi a}{l},$$

y consideremos la función

$$Q(k, v) = \Gamma(k, v) / \Gamma(k), \quad v \geq 0,$$

que es una función de distribución ([1, p. 941]), que es positiva, monótona decreciente y satisface

$$Q(k, 0) = 1, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} Q(k, v) = 0.$$

Entonces, la serie solución (2.44) del problema (2.1)-(2.3) que llamaremos $u(t, x)$ puede ser expresada como

$$u(t, x) = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4, \quad (2.47)$$

donde

$$\sum_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} c^{2(k-1)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(k, n^2 d^2 (t - k\tau)), \quad (2.48)$$

$$\sum_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} c^{2k} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) Q(k, n^2 d^2 (t - k\tau - s)) ds, \quad (2.49)$$

$$\sum_3 = (-1)^{m-1} c^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) Q(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) ds, \quad (2.50)$$

$$\sum_4 = (-1)^m c^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) B_n(t-m\tau) = (-1)^m c^{2m} \varphi(t-m\tau, x). \quad (2.51)$$

Para que φ sea desarrollable en serie de Fourier es condición suficiente que φ sea de variación acotada. Más adelante veremos que hay que exigir a φ condiciones más fuertes para que al menos la solución sea continua.

Antes de seguir adelante, vamos a enunciar algunos resultados que serán de utilidad en el resto del trabajo.

2.3. Lemas previos

Usaremos el siguiente resultado de regularidad de funciones definidas por una integral.

Lema 2.5. Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos de \mathbb{R}^q .

1. Sea $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando:

- Para cada $x \in \Omega_1$, la función $y \longrightarrow f(x, y)$ es integrable.
- Para cada $y \in \Omega_2$, la función $x \longrightarrow f(x, y)$ es continua.
- Existe una función no negativa g integrable en Ω_2 tal que $|f(x, y)| \leq g(y)$ para cada $y \in \Omega_2$. Entonces

$$h(x) = \int_{\Omega_2} f(x, y) dy$$

es continua.

2. Si además f verifica,

- Para $y \in \Omega_2$, la función $x \longrightarrow f(x, y)$ tiene derivadas primeras continuas respecto a x_i , $i = 1, \dots, q$.

b) Existe una función no negativa g integrable en Ω_2 tal que $|\nabla f(x, y)| \leq g(y)$ para cada $y \in \Omega_2$.

Entonces

$$h(x) = \int_{\Omega_2} f(x, y) dy$$

tiene derivadas primeras continuas que además se calculan por la fórmula

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy, \quad i = 1, \dots, q$$

Su demostración puede verse en ([30, p. 301]).

El siguiente lema se usará para probar la existencia de las derivadas parciales de la solución de nuestro problema.

Lema 2.6. *Supongamos que cada término de $\{f_n\}$ es una función real con derivada finita en cada punto de (a, b) . Sea $F_N = \sum_{n=1}^N f_n$. Supongamos que para un punto x_0 , por lo menos, de (a, b) la sucesión $\{F_N(x_0)\}$ converge. Supongamos además que existe una función g tal que $F'_N \rightarrow g$ uniformemente en (a, b) . Entonces:*

- *Existe una función F tal que $F_N \rightarrow F$ uniformemente en (a, b) .*
- *Para cada $x \in (a, b)$ la derivada $F'(x)$ existe y es igual a $g(x)$.*

Véase ([3, p. 280]).

Enunciaremos a continuación algunos resultados sobre series de Fourier que usaremos en distintas ocasiones. Consideramos el desarrollo en serie de Fourier de una función f ,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Lema 2.7. *Supongamos que f y sus primeras $k - 2$ derivadas son 2π -periódicas. Si f es de clase $C^{(k-1)}$ y $f^{(k-1)}$ es diferenciable a trozos (esto es $f^{(k-1)}$ existe excepto en un conjunto finito de puntos en cada intervalo acotado y es continua a trozos), entonces los coeficientes de Fourier de f satisfacen*

$$\sum |n^k a_n|^2 < \infty, \quad \sum |n^k b_n|^2 < \infty.$$

En particular

$$n^k a_n \longrightarrow 0, \quad n^k b_n \longrightarrow 0$$

cuando $n \longrightarrow \infty$.

Véase ([14, p. 41]).

Consecuencia de lo anterior es que existe $M > 0$ cumpliendo

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^k} \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^k}$$

para todo n número natural y para $k \geq 1$.

Podemos decir entonces que la mayor regularidad de la función se traduce en un mayor decaimiento de sus coeficientes de Fourier. Vamos a obtener una aplicación inmediata de este hecho a la obtención de un teorema de convergencia uniforme.

Lema 2.8. *Si f es de variación acotada en el intervalo compacto $[x - \delta, x + \delta]$ para un $\delta < \pi$, entonces la serie de Fourier converge al límite cuando t tiende a cero de la función $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$.*

Véase ([3, p. 388]).

Lema 2.9. *Supongamos que $f(x)$ es una función de variación acotada sobre $(0, 2\pi)$. Entonces*

- *En cada punto x_0 , la serie de Fourier $S(f)$ converge a $f(x)$ en cada punto de continuidad de f .*
- *Si f es además continua en cada punto de un intervalo cerrado I , entonces $S(f)$ converge uniformemente en I .*

Véase ([46, p. 57]).

Lema 2.10. *Sea f una función continua en $[-\pi, \pi]$, tal que $f(-\pi) = f(\pi)$, y sea f' una función continua a trozos en dicho intervalo. Entonces la serie de Fourier es diferenciable en cada punto x del intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ donde existe $f''(x)$ y en cada punto donde f' admite derivadas laterales. Su derivada se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de f .*

Véase ([18, p. 81, 82]).

Lema 2.11. *Sea f 2π -periódica y tal que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s)ds$, con $f' \in L^2([-\pi, \pi])$ y sea $S_N f(x)$ su suma parcial de Fourier N -ésima. Entonces*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x)$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Véase ([30, p. 164]). También será útil el siguiente resultado, que es una versión del criterio de Abel para series de productos de funciones que dependen de dos variables (véase [3, p. 237]).

Lema 2.12. *Sean T y S dos subconjuntos de \mathbb{R} y $g_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones reales tales que $g_{n+1}(t) \leq g_n(t)$ para cada $t \in T$ y cada $n = 1, 2, \dots$. Si g_n es uniformemente acotada en T y $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones reales tales que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en S , entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(t)$$

también converge uniformemente en $S \times T$.

Demostración. Como la sucesión g_n está uniformemente acotada

$$\exists M > 0 : |g_n(t)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in T.$$

Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

y $F_n(x)$ la sucesión de sumas parciales de $f(x)$. Dado $\epsilon > 0$ por ser $F_n(x)$ una sucesión que converge uniformemente a $f(x)$

$$\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N - 1 \quad \rightarrow |F_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4M} \quad \forall x \in S.$$

Para $h \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=N}^{N+h} f_n(x)g_n(t) \right| \\
&= |f_N(x)g_N(t) + f_{N+1}(x)g_{N+1}(t) + \dots + f_{N+h}(x)g_{N+h}(t)| \\
&= |(F_N(x) - F_{N-1}(x))g_N(t) + (F_{N+1}(x) - F_N(x))g_{N+1}(t) + \dots| \\
&\quad |\dots + (F_{N+h}(x) - F_{N+h-1}(x))g_{N+h}(t)| \\
&= |-F_{N-1}(x)g_N(t) + F_N(x)(g_N(t) - g_{N+1}(t)) + F_{N+1}(x)(g_{N+1}(t) - g_{N+2}(t)) + \dots| \\
&\quad |\dots + F_{N+h-1}(x)(g_{N+h-1}(t) - g_{N+h}(t)) + F_{N+h}(x)g_{N+h}(t)| \\
&= |-(F_{N-1}(x) - f(x))g_N(t) + (F_N(x) - f(x))(g_N(t) - g_{N+1}(t)) + \dots| \\
&\quad |\dots + (F_{N+h-1}(x) - f(x))(g_{N+h-1}(t) - g_{N+h}(t)) + (F_{N+h}(x) - f(x))g_{N+h}(t)| \leq \\
&\leq |F_{N-1}(x) - f(x)| |g_N(t)| + |F_N(x) - f(x)| |g_N(t) - g_{N+1}(t)| + \dots \\
&\quad \dots + |F_{N+h-1}(x) - f(x)| |g_{N+h-1}(t) - g_{N+h}(t)| + |F_{N+h}(x) - f(x)| |g_{N+h}(t)|
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Puesto que la sucesión $\{g_n\}$ es decreciente, $|g_N(t) - g_{N+1}(t)| = g_N(t) - g_{N+1}(t)$, con lo que la expresión anterior es menor o igual que

$$\begin{aligned}
& |F_{N-1}(x) - f(x)| |g_N(t)| + \frac{\epsilon}{4M} (g_N(t) - g_{N+1}(t) + g_{N+1}(t) - g_{N+2}(t) + \dots \\
&\quad \dots + g_{N+h-1}(t) - g_{N+h}(t)) + |F_{N+h}(x) - f(x)| |g_{N+h}(t)| \\
&= |F_{N-1}(x) - f(x)| |g_N(t)| + \frac{\epsilon}{4M} (g_N(t) - g_{N+h}(t)) + |F_{N+h}(x) - f(x)| |g_{N+h}(t)| \leq \\
&\leq |F_{N-1}(x) - f(x)| |g_N(t)| + \frac{\epsilon}{4M} |g_N(t)| \\
&+ \frac{\epsilon}{4M} |g_{N+h}(t)| + |F_{N+h}(x) - f(x)| |g_{N+h}(t)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{4M} M + \frac{\epsilon}{4M} M + \frac{\epsilon}{4M} M + \frac{\epsilon}{4M} M = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x)g_n(t) = 0, \quad \forall x \in S, \quad \forall t \in T.$$

Lema 2.13. Sea $u(t) = \int_0^t g(t, s)ds$, donde $g(t, s)$ es una función continua en s y $g_t(t, s)$ continua en s . Entonces,

$$u'(t) = g(t, t) + \int_0^t g_t(t, s)ds.$$

Ver ([31, p. 288]).

El siguiente lema se utilizará para acotar la solución. Utilizaremos en su demostración razonamientos análogos a los que se usan en el criterio de la integral como puede verse en ([3, p. 232]).

Lema 2.14. *Sea f una función decreciente en $[N, \infty)$ siendo N un número natural mayor o igual que cero, cumpliendo que $\int_N^\infty f(x)dx < \infty$. Entonces*

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^\infty f(x)dx$$

Demostración.

$$\sum_{n=N+1}^{N+h} f(n) = \sum_{k=0}^{h-1} \int_{N+k}^{N+k+1} f(N+k+1)dx.$$

Por ser f decreciente la expresión anterior es menor o igual que

$$\sum_{k=0}^{h-1} \int_{N+k}^{N+k+1} f(x)dx = \int_N^{N+h} f(x)dx.$$

Por tanto tomando límite cuando h tiende a ∞ , se tiene

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^\infty f(x)dx.$$

A continuación aplicaremos el Lema 2.5 para calcular $B'_n(t)$. Si suponemos que φ admite derivada continua con respecto a t , y dado que ésta es integrable con respecto a la variable x , le podemos aplicar la segunda parte del Lema 2.5 y se tendrá

$$B'_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_t(t, x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

2.4. Continuidad de la solución

En el siguiente teorema exigiremos las condiciones suficientes a φ para que la solución sea continua.

Teorema 2.15. *Consideremos el problema (2.1)-(2.3). Supongamos que $\varphi(t, x)$, $\varphi_t(t, x)$ son funciones continuas en $[0, \tau] \times [0, l]$ y $\varphi_x(t, \cdot)$ continua en $[0, l]$ para cada t . Entonces la solución candidata $u(t, x)$ dada en (2.47) es continua en $[\tau, \infty) \times [0, l]$.*

Demostración. Probaremos que cada serie es acotada, justificando así los intercambios de sumatorios e integral. La hipótesis de que φ sea continuamente diferenciable en t se utiliza para el cálculo de $B'_n(t)$ que antes comentamos.

Dado $1 \leq k \leq m$, para probar que

$$\sum_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-c^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau))$$

está acotada aplicaremos el Lema 2.12. Llamaremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Al ser $\varphi_x(t, \cdot)$ continua, podemos aplicar el Lema 2.11 para concluir que esta serie converge uniformemente en $[0, l]$. Tomaremos

$$g_n(t) = \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau)),$$

teniéndose que $\{g_n(t)\}$ es decreciente $\forall t \in [m\tau, (m+1)\tau]$ y

$$|g_n(t)| \leq \Gamma(k), \quad \forall t \in [m\tau, (m+1)\tau].$$

De esta forma, aplicando el Lema 2.12, los restos de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-c^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau))$$

tienden a cero, por lo que ésta converge uniformemente en

$$[0, l] \times [m\tau, (m+1)\tau],$$

siendo \sum_1 una función continua.

Para probar la convergencia del segundo y tercer sumando de la serie (2.49)-(2.50), aplicaremos el Lema 2.14, ya que $Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s))$ es una sucesión decreciente respecto de n ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) \leq \int_0^{\infty} Q(k, v^2 d^2(t - k\tau - s)) dv$$

y, con el cambio de variable

$$w = v^2 d^2(t - k\tau - s),$$

tenemos

$$\int_0^\infty Q(k, v^2 d^2(t - k\tau - s)) dv = \frac{1}{2d\sqrt{t - k\tau - s}} \int_0^\infty w^{-\frac{1}{2}} Q(k, w) dw,$$

integrando por partes y teniendo en cuenta la propiedad (6.5.37) de [1].

$$\int_0^\infty w^{-\frac{1}{2}} Q(k, w) dw = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty w^{-\frac{1}{2}} \Gamma(k, w) dw = \frac{2\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k)},$$

por lo que

$$\sum_{n=1}^\infty Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) \leq \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k) d\sqrt{t - k\tau - s}}. \quad (2.53)$$

Así, $\sum_{n=1}^\infty Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s))$ está acotada por una función integrable para s en el intervalo $[0, \tau]$, cuando $k < m$, y para $s \in [0, t - \tau]$ cuando $k = m$, lo que permite el intercambio de sumatorio e integral en lo que sigue. Por tanto, de (2.53), y llamando B' a una cota de $B'_n(s)$, $\forall n \geq 1$, $\forall s \in [0, \tau]$, se tiene,

$$\begin{aligned} \left| \sum_2 \right| &\leq B' \sum_{k=1}^{m-1} c^{2k} \int_0^\tau \sum_{n=1}^\infty Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds \\ &\leq B' \sum_{k=1}^{m-1} \frac{c^{2k} \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k) d} \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{t - k\tau - s}} \\ &= \frac{2B'}{d} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{c^{2k} \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k)} \left(\sqrt{t - k\tau} - \sqrt{t - (k+1)\tau} \right), \end{aligned} \quad (2.54)$$

pero

$$\frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k)} \leq \sqrt{k}$$

y, para $t \in [m\tau, (m+1)\tau]$,

$$\sqrt{t - k\tau} - \sqrt{t - (k+1)\tau} \leq \sqrt{(m+1-k)\tau} - \sqrt{(m-k-1)\tau}.$$

Así,

$$\left| \sum_2 \right| \leq \frac{4B'\sqrt{\tau}}{d} \sum_{k=1}^{m-1} c^{2k} \sqrt{k} \sqrt{m+1-k} \quad (2.55)$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} \left| \sum_3 \right| &\leq B' c^{2m} \int_0^{t-m\tau} \sum_{n=1}^\infty Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds \\ &\leq B' \frac{c^{2m} \Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m) d} \int_0^{t-m\tau} \frac{ds}{\sqrt{t - m\tau - s}} \\ &= \frac{2B' c^{2m} \Gamma(m + \frac{1}{2})}{d \Gamma(m)} \sqrt{t - m\tau} \\ &\leq \frac{2B' c^{2m} \sqrt{m\tau}}{d}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

De esta forma, la solución está acotada y llamando $\{u_N(t, x)\}$ a la serie de las sumas parciales, $\{u_N(t, x)\}$ converge uniformemente en

$$[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$$

a la solución $u(t, x)$ dada en (2.47)-(2.51), siendo ésta una función continua para $(t, x) \in [m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$ para cada m por ser límite uniforme de funciones continuas. No es difícil comprobar que las expresiones de $u(t, x)$ dadas en cada intervalo coinciden en el extremo común $t = m\tau$ y $u(t, x)$ es una función continua en $[\tau, \infty) \times [0, l]$.

En la siguiente sección vamos a enunciar un teorema que resume las propiedades de la solución propuesta para el problema (2.1)-(2.3). La mayor parte de las propiedades ya han sido demostradas; sólo nos queda ver que nuestra solución definida como una serie admite derivada parcial segunda con respecto a x y derivada parcial con respecto a t en $[m\tau, (m+1)\tau] \times (0, l)$. Finalmente, demostraremos un teorema que nos asegura la existencia de las derivadas en todo el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$, así como las condiciones mínimas que ha de cumplir la función φ para que la solución de nuestro problema admita derivadas parciales continuas.

2.5. Regularidad de la solución

Antes de comenzar con la demostración de la existencia de las derivadas, vamos a enunciar un lema que necesitaremos posteriormente.

Lema 2.16. *Sea $f \in L[0, l]$ con segunda derivada, cumpliendo $f(0) = f(l) = 0$, y $F : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = f(x)$ y $F(-x) = -f(x)$ si $x \in [0, l]$ si llamamos $S(F)$ al desarrollo en serie de Fourier de la función F en el intervalo $(-l, l)$, y $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$ es decir*

$$S(F) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

entonces el desarrollo en serie de Fourier de su segunda derivada es

$$S(F'') = \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (2.57)$$

Demostración. El desarrollo en serie de Fourier de F'' es

$$S(F'') = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

donde

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l F''(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \quad (2.58)$$

Integrando por partes (2.58),

$$c_n = \frac{2}{l} \left([F'(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)]_0^l - \frac{n\pi}{l} \int_0^l F'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \right) \quad (2.59)$$

y, dado que el seno se anula en 0 y en l , se tiene,

$$c_n = \frac{2}{l} \left(-\frac{n\pi}{l} \int_0^l F'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \right). \quad (2.60)$$

Si volvemos a integrar por partes,

$$c_n = \frac{2}{l} \left(-\frac{n\pi}{l} [F(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)]_0^l - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \int_0^l F(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \right) \quad (2.61)$$

y, puesto que $F(0) = F(l) = 0$ por hipótesis, se tiene,

$$c_n = -\frac{2}{l} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \int_0^l F(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 b_n, \quad (2.62)$$

como queríamos demostrar.

Teorema 2.17. *Supongamos las condiciones del Teorema 2.15 y además*

- (a) φ_{xx} es continua en $[0, \tau] \times (0, l)$ y de variación acotada en $x \in (0, l)$,
- (b) $\varphi_t(t, \cdot)$ es dos veces continuamente diferenciable para cada t .

Entonces $u(t, x)$ dada en (2.47) verifica:

1. $u(t, x)$ es continua en $[\tau, \infty) \times [0, l]$.
2. $u(t, x)$ es solución del problema (2.1)-(2.3).
3. $u_t(t, x)$ y $u_{xx}(t, x)$ son continuas en $(\tau, \infty) \times (0, l)$.

Demostración. La demostración del primer apartado se hizo en el Teorema 2.15. Para probar la segunda condición vamos a estudiar la existencia de las derivadas parciales u_t y u_{xx} . Empezamos buscando la existencia de u_t . La solución es de la forma,

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (2.63)$$

Si probamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.64)$$

converge uniformemente $\forall t \in [m\tau, (m+1)\tau]$, por el Lema 2.6, habremos probado que

$$u_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.65)$$

Para probar que (2.64) converge uniformemente utilizamos la expresión,

$$T'_n(t) = -a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) - b^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t - \tau) \quad (2.66)$$

y (2.65) se escribiría de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.67)$$

$$= -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t - \tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.68)$$

Por tanto, probaremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t - \tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

convergen uniformemente $\forall t \in [m\tau, (m+1)\tau]$. Como ambas expresiones son análogas, nos dedicaremos sólo al estudio de una de ellas. Así,

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

donde

$$\begin{aligned}
S_1 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{(-c^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau)) \\
S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-c^2)^k}{\Gamma(k)} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds \\
S_3 &= \frac{(-c^2)^m}{\Gamma(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) \Gamma(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds \\
S_4 &= -(-c^2)^m \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t - m\tau) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)
\end{aligned}$$

Probaremos que S_1, S_2, S_3, S_4 convergen uniformemente $\forall t \in [m\tau, (m+1)\tau]$.

En cuanto a S_1 , aplicaremos el Lema 2.12 a cada sumando desde $k = 1$ hasta $k = m$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-c^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau)) \quad (2.69)$$

Por un lado, la sucesión

$$\{\Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau))\}$$

es decreciente para todo t ; por otra parte, como φ es desarrollable en serie de de Fourier

$$\varphi(\tau, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

teniendo en cuenta que $\varphi(t, 0) = \varphi(t, l) = 0$, aplicando el Lema 2.16 se tiene que el desarrollo en serie de Fourier de $\varphi_{xx}(\tau, x)$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (2.70)$$

Por ser $\varphi_{xx}(t, \cdot)$ continua y de variación acotada en $(0, l)$, aplicando el Lema 2.9 se sigue que la serie de Fourier de $\varphi_{xx}(\tau, x)$ converge uniformemente en cada punto de $(0, l)$ a φ_{xx} . De esta forma, hemos probado que (2.70) converge uniformemente en un entorno de cada punto de $(0, l)$ y además se tiene

$$\varphi_{xx}(\tau, x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (2.71)$$

Lo mismo ocurre con

$$\varphi_{xx}(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (2.72)$$

En consecuencia, aplicando el Lema 2.12, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-c^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau)) \quad (2.73)$$

converge uniformemente en un entorno de cada punto de $(0, l)$. Así S_1 converge uniformemente en $[m\tau, (m+1)\tau] \times (0, l)$.

En cuanto a S_2 , se tiene que

$$|S_2| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(c^2)^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\tau} \frac{\pi^2 n^2}{l^2} |B'_n(s)| \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds$$

Por otro lado, $\varphi_t(t, \cdot)$ es dos veces continuamente diferenciable para cada t ; así, tenemos por el Lema 2.7,

$$|B'_n(s)| \leq \frac{B'(s)}{n^2}$$

pero como φ_t es continua existe B' cumpliendo

$$|B'_n(s)| \leq \frac{B'}{n^2}$$

y, por tanto,

$$|S_2| \leq \frac{B' \pi^2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(c^2)^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\tau} \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds.$$

Tendremos en cuenta la siguiente acotación,

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) \leq \int_0^{\infty} Q(k, v^2 d^2(t - k\tau - s)) dv$$

y, con el cambio de variable

$$w = v^2 d^2(t - k\tau - s),$$

tenemos

$$\int_0^{\infty} Q(k, v^2 d^2(t - k\tau - s)) dv = \frac{1}{2d\sqrt{t - k\tau - s}} \int_0^{\infty} w^{-\frac{1}{2}} Q(k, w) dw,$$

e, integrando por partes,

$$\int_0^{\infty} w^{-\frac{1}{2}} Q(k, w) dw = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} w^{-\frac{1}{2}} \Gamma(k, w) dw = \frac{2\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k)},$$

por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) \leq \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k) d \sqrt{t - k\tau - s}}. \quad (2.74)$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s))$ está acotada por una función integrable para s en el intervalo $[0, \tau]$, lo que permite el intercambio de sumatorio e integral en lo que sigue. En consecuencia, de lo anterior y del Lema 2.7 aplicado a $B'_n(s)$, se tiene

$$\begin{aligned} |S_2| &\leq \frac{B' \pi^2}{l^2} \sum_{k=1}^{m-1} c^{2k} \int_0^{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds \\ &\leq \frac{B' \pi^2}{l^2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{c^{2k} \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k) d} \int_0^{\tau} \frac{ds}{\sqrt{t - k\tau - s}} \\ &= \frac{2B' \pi^2}{dl^2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{c^{2k} \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k)} \left(\sqrt{t - k\tau} - \sqrt{t - (k+1)\tau} \right), \end{aligned} \quad (2.75)$$

pero

$$\frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k)} \leq \sqrt{k}$$

y, para $t \in [m\tau, (m+1)\tau]$,

$$\sqrt{t - k\tau} - \sqrt{t - (k+1)\tau} \leq \sqrt{(m+1-k)\tau} - \sqrt{(m-k-1)\tau},$$

con lo que

$$|S_2| \leq \frac{2B' \pi^2}{dl^2} \sum_{k=1}^{m-1} c^{2k} \sqrt{k} \left(\sqrt{(m+1-k)\tau} - \sqrt{(m-k-1)\tau} \right). \quad (2.76)$$

Así, hemos probado que existe S_2 y además es continua en todo el intervalo

$$[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l].$$

Procedemos ahora con S_3 ,

$$|S_3| \leq \frac{(c^2)^m \pi^2}{\Gamma(m) l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_0^{t-m\tau} |B'_n(s)| \Gamma(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds.$$

Teniendo en cuenta que

$$|B'_n(s)| \leq \frac{B'}{n^2},$$

la expresión anterior se acota de la misma forma que S_2 ,

$$\begin{aligned}
|S_3| &\leq \frac{B'c^{2m}\pi^2}{l^2} \int_0^{t-m\tau} \sum_{n=1}^{\infty} Q(m, n^2d^2(t-m\tau-s)) ds \\
&\leq \frac{B'\pi^2c^{2m}\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m)dl^2} \int_0^{t-m\tau} \frac{ds}{\sqrt{t-m\tau-s}} \\
&= \frac{2B'\pi^2c^{2m}\Gamma(m+\frac{1}{2})}{dl^2\Gamma(m)} \sqrt{t-m\tau} \\
&\leq \frac{2B'\pi^2c^{2m}\sqrt{m\tau}}{dl^2}.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Por tanto, S_3 converge uniformemente en

$$[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l].$$

Por último, por ser φ_{xx} continua y de variación acotada en $(0, l)$, como ya hemos razonado anteriormente,

$$S_4 = \varphi_{xx}(t-m\tau, x),$$

que es una función continua en $[m\tau, (m+1)\tau] \times (0, l)$ por hipótesis.

De esta forma hemos probado la existencia y continuidad de u_t en $[m\tau, (m+1)\tau] \times (0, l)$. Es trivial comprobar que las expresiones de u_t en los intervalos $[(m-1)\tau, m\tau]$ y $[m\tau, (m+1)\tau]$ coinciden en el extremo común $t = m\tau$. Así hemos probado que u_t es continua en $(\tau, \infty) \times (0, l)$.

Ahora probaremos la existencia y continuidad de $u_{xx}(t, x)$ y que u es solución del problema. Por lo que ya hemos visto, se tiene,

$$u_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{2.78}$$

$$= -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t-\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{2.79}$$

La expresión (2.78) verifica la ecuación diferencial

$$a^2 u_{xx}(t, x) + b^2 u_{xx}(t-\tau, x)$$

si probamos que

$$u_{xx}(t, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

y

$$u_{xx}(t - \tau, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t - \tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

es decir si,

$$u_{xx}(t, x) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

donde,

$$\begin{aligned} S_1 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{(-c^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau)) \\ S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-c^2)^k}{\Gamma(k)} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds \\ S_3 &= \frac{(-c^2)^m}{\Gamma(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) \Gamma(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds \\ S_4 &= -(-c^2)^m \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t - m\tau) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned}$$

En primer lugar, supongamos que $t \neq m\tau$. Sabemos por (2.47) que

$$u(t, x) = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4, \quad (2.80)$$

donde

$$\sum_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} c^{2(k-1)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau)), \quad (2.81)$$

$$\sum_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} c^{2k} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds, \quad (2.82)$$

$$\sum_3 = (-1)^{m-1} c^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds, \quad (2.83)$$

$$\sum_4 = (-1)^m c^{2m} \varphi(t - m\tau, x). \quad (2.84)$$

Por un lado $\varphi(t - m\tau, x)$ se puede derivar dos veces con respecto a la variable x , y como ésta es de variación acotada y continua en $(0, l)$, por lo que ya hemos visto

$$(-1)^m c^{2m} \varphi_{xx}(t - m\tau, x) = -(-c^2)^m \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t - m\tau) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.85)$$

Por otro lado, queremos ver que \sum_1, \sum_2, \sum_3 se pueden derivar dos veces con respecto a la variable x , término a término. Aplicando el Lema 2.6, tenemos que probar que la serie formada por las primeras derivadas y la serie formada por las segundas derivadas convergen uniformemente, como ésta última ya está probada sólo nos queda ver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{(-c^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \left(\frac{n\pi}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau)) \quad (2.86)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k-1} c^{2k}}{\Gamma(k)} \left(\frac{n\pi}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds \quad (2.87)$$

$$\frac{(-1)^{m-1} c^{2m}}{\Gamma(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) \Gamma(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds \quad (2.88)$$

convergen uniformemente en $(0, l)$. La segunda y tercera expresión convergen uniformemente en

$$[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$$

puesto que $n \leq n^2$, $|\cos(\frac{n\pi x}{l})| \leq 1$ y como ya se visto

$$|S_2| < \infty$$

y

$$|S_3| < \infty.$$

Por tanto, sólo queda probar que la serie siguiente converge uniformemente en $(0, l)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{(-c^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \left(\frac{n\pi}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau)). \quad (2.89)$$

A partir de un cierto N en adelante, para cada valor de t , la sucesión

$$\{n\Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau))\}$$

es monótona decreciente respecto de n , por lo que aplicando el Lema 2.14 se tiene que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n\Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau)) \leq \int_N^{\infty} u\Gamma(k, u^2 d^2(t - k\tau)) du \leq \int_0^{\infty} u\Gamma(k, u^2 d^2(t - k\tau)) du$$

y, con el cambio de variable

$$v = u^2 d^2(t - k\tau),$$

se tiene

$$\int_0^\infty u\Gamma(k, u^2d^2(t - k\tau))du \quad (2.90)$$

$$= \int_0^\infty \frac{v^{\frac{1}{2}}}{d\sqrt{t - k\tau}} \frac{v^{-\frac{1}{2}}}{2d\sqrt{t - k\tau}} \Gamma(k, v)dv \quad (2.91)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2d^2(t - k\tau)} \Gamma(k, v)dv \quad (2.92)$$

$$= \frac{1}{2d^2(t - k\tau)} \int_0^\infty \Gamma(k, v)dv \quad (2.93)$$

y por la propiedad (6.5.37) de [1], la expresión (2.93) se queda como sigue,

$$\frac{\Gamma(k + 1)}{2d^2(t - k\tau)}. \quad (2.94)$$

Así para cada valor de $t \in (m\tau, (m + 1)\tau]$, la expresión (2.89) converge uniformemente en $(0, l)$.

Para $t = m\tau$, si sustituimos este valor en $(S_1 - S_4)$, se tiene que es lo mismo que se obtiene al substituir ese valor en $(S_1 - S_4)$ para el intervalo anterior $((m - 1)\tau, m\tau]$, es decir, sustituimos $t = m\tau$ en la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-c^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau)) \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-2} \frac{(-c^2)^k}{\Gamma(k)} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^\tau B'_n(s) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds \\ & \frac{(-c^2)^{m-1}}{\Gamma(m-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-(m-1)\tau} B'_n(s) \Gamma(m-1, n^2 d^2(t - (m-1)\tau - s)) ds \\ & - (-c^2)^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t - (m-1)\tau) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned}$$

y dicho valor por lo ya demostrado coincide con

$$u_{xx}(m\tau, x).$$

Queda por tanto demostrada la existencia y continuidad de las derivadas parciales de la solución.

En el siguiente teorema daremos las condiciones suficientes para que las derivadas parciales sean continuas en todo el intervalo cerrado $[0, l]$.

Teorema 2.18. *Suponiendo que φ cumple las condiciones del Teorema 2.17 y además $\varphi_{xxx}(t, \cdot) \in L^2([0, l])$ y $\varphi_{xx}(t, 0^+) = \varphi_{xx}(t, l^-)$, entonces $u_t(t, x)$ y $u_{xx}(t, x)$ son continuas en $(\tau, \infty) \times [0, l]$ para $m \geq 1$.*

Demostración. En el teorema anterior hemos probado la continuidad de las series S_2 y S_3 , por lo que sólo nos falta probar la continuidad de las series S_1 y S_4 en el intervalo $[0, l]$. Vamos a estudiar la continuidad de S_1 .

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m -\frac{(-c^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau)) \quad (2.95)$$

es continua, ya que la siguiente serie de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

converge uniformemente en $[0, l]$, porque $\varphi_{xxx} \in L^2[0, l]$ y φ_{xx} es periódica (Lema 2.11). La sucesión

$$\{g_n(t)\} = \{\Gamma(m, n^2 d^2(t - m\tau))\}$$

es una sucesión decreciente en la variable t y uniformemente acotada por $\Gamma(m)$. De esta forma, aplicando el Lema 2.12 la serie S_1 converge uniformemente y es continua en

$$[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l].$$

En cuanto a S_4 , se tiene que

$$S_4 = -(-c^2)^m \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t - m\tau) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

converge uniformemente a $\varphi_{xx}(t - m\tau, x)$ en todo el intervalo $[0, l]$.

El resto de los sumandos no planteaba ningún problema de continuidad en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$. Así, queda por tanto demostrada la continuidad de las derivadas parciales de la solución en

$$[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l].$$

2.6. Acotaciones de los restos

En este apartado vamos a estimar el error cometido al truncar la solución u del problema (2.1)-(2.3) dada en (2.47) en N términos. Sean

$$\begin{aligned}
 R_{1,k}^N &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-c^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau)) \right|, \\
 R_{2,k}^N &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{-(-c^2)^k}{\Gamma(k)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds \right| \\
 & y \\
 R_3^N &= \left| \frac{-(-c^2)^m}{\Gamma(m)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) \Gamma(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds \right|
 \end{aligned}$$

los correspondientes restos. Empezaremos acotando el primer resto, $R_{1,k}^N$. Por ser $\varphi(t, \cdot)$ dos veces continuamente diferenciable para cada t , aplicando el Lema 2.7, existe $B > 0$ tal que

$$|B_n(t)| \leq \frac{B}{n^2}$$

para todo $t \in [0, \tau]$. Por tanto, llamando $B_1 = B + c^2 B$, se tiene

$$|B_n(\tau) + c^2 B_n(0)| \leq \frac{B_1}{n^2}.$$

Así pues ,

$$\begin{aligned}
 R_{1,k}^N &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(c)^{2k-2}}{\Gamma(k)} B_1 \frac{\Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau))}{n^2} \\
 &= \frac{B_1 c^{2k-2}}{\Gamma(k)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau))}{n^2}.
 \end{aligned}$$

Usaremos [1, p. 261-263] que $\Gamma(k, v)$ es una función monótona decreciente de v , con $\Gamma(k, 0) = \Gamma(k)$ y $\lim_{v \rightarrow \infty} \Gamma(k, v) = 0$, y que para k un número natural

$$\Gamma(k) = k\Gamma(k-1) = (k-1)!,$$

y

$$\Gamma(k, v) = \Gamma(k) e^{-v} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{v^j}{j!}. \quad (2.96)$$

Por tanto,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau))}{n^2} \leq \Gamma(k, (N+1)^2 d^2(t - k\tau)) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Por ser $\{\frac{1}{n^2}\}$ una sucesión monótona decreciente respecto de n , aplicando el Lema 2.14, se tiene

$$\begin{aligned} & \Gamma(k, (N+1)^2 d^2(t - k\tau)) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ & \leq \Gamma(k, (N+1)^2 d^2(t - k\tau)) \int_N^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{\Gamma(k, (N+1)^2 d^2(t - k\tau))}{N} \end{aligned}$$

Así,

$$R_{1,k}^N \leq \frac{B_1 c^{2k-2} \Gamma(k, (N+1)^2 d^2(t - k\tau))}{\Gamma(k) N}.$$

La acotación final para el primer resto es

$$R_1^N \leq \sum_{k=1}^m \frac{B_1 c^{2k-2} \Gamma(k, (N+1)^2 d^2(t - k\tau))}{\Gamma(k) N}. \quad (2.97)$$

De (2.96) se deduce

$$\Gamma(k, N^2 d^2(t - k\tau)) \leq \Gamma(k) e^{-N^2 d^2(t - k\tau)} (1 + N^2 d^2(t - k\tau))^{k-1},$$

lo que muestra que R_1^N decae en forma exponencial con el número de términos.

Con razonamientos similares calcularemos la acotación del segundo resto, $R_{2,k}^N$. Por ser $\varphi_t(t, \cdot)$ dos veces continuamente diferenciable para cada t , aplicando el Lema 2.7, existe $B' > 0$ tal que

$$|B'_n(t)| \leq \frac{B'}{n^2}$$

para todo $t \in [0, \tau]$.

Si tenemos en cuenta que $\Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) \leq \Gamma(k, n^2 d^2(t - (k+1)\tau))$, para todo s en el intervalo $[0, \tau]$, se tiene,

$$\begin{aligned} R_{2,k}^N &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{-(-c^2)^k}{\Gamma(k)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) \Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{c^{2k}}{\Gamma(k)} \int_0^{\tau} |B'_n(s)| \Gamma(k, n^2 d^2(t - (k+1)\tau)) ds \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta la cota de $|B'_n|$ en el intervalo $[0, \tau]$ y procediendo de forma análoga a $R_{1,k}^N$,

$$\begin{aligned} R_{2,k}^N &\leq \frac{c^{2k}}{\Gamma(k)} B' \tau \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k, n^2 d^2 (t - (k+1)\tau))}{n^2} \\ &\leq \frac{B' \tau c^{2k}}{\Gamma(k)} \frac{\Gamma(k, (N+1)^2 d^2 (t - (k+1)\tau))}{N} \end{aligned}$$

Así, la acotación final para el segundo resto es

$$R_2^N \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B' \tau c^{2k}}{\Gamma(k)} \frac{\Gamma(k, (N+1)^2 d^2 (t - (k+1)\tau))}{N}. \quad (2.98)$$

Por último vamos a acotar R_3^N . Se tiene

$$\begin{aligned} R_3^N &= \left| \frac{-(-c^2)^m}{\Gamma(m)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) \Gamma(m, n^2 d^2 (t - m\tau - s)) ds \right| \\ &\leq \frac{c^{2m}}{(m-1)!} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) \Gamma(m, n^2 d^2 (t - m\tau - s)) ds \right| \\ &\leq \frac{c^{2m}}{(m-1)!} \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} |B'_n(s)| \Gamma(m, n^2 d^2 (t - m\tau - s)) ds. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$|B'_n(s)| \leq \frac{B'}{n^2},$$

obtenemos

$$R_3^N \leq \frac{c^{2m}}{(m-1)!} \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} \frac{B'}{n^2} \Gamma(m, n^2 d^2 (t - m\tau - s)) ds$$

y, con el cambio de variable,

$$v = (t - m\tau - s)n^2 d^2$$

la expresión anterior toma la forma,

$$\begin{aligned} R_3^N &\leq \frac{c^{2m}}{(m-1)!} B' \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4 d^2} \int_0^{n^2 d^2 (t-m\tau)} \Gamma(m, v) dv \\ &\leq \frac{c^{2m} B'}{(m-1)!} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4 d^2} \int_0^{\infty} \Gamma(m, v) dv \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $\int_0^\infty \Gamma(m, v)dv = \Gamma(m + 1)$, [1, p. 263], obtenemos

$$\begin{aligned} R_3^N &\leq \frac{c^{2m} B'}{(m-1)!} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4 d^2} \Gamma(m+1) \\ &= \frac{c^{2m} B' m}{d^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\ &\leq \frac{c^{2m} B' m}{d^2} \int_N^\infty \frac{du}{u^4} = \frac{c^{2m} B' m}{3d^2 N^3} \end{aligned}$$

Así pues, de todo lo anterior se deduce el siguiente resultado.

Teorema 2.19. *Consideremos el problema (2.1)-(2.3), sea u la solución exacta dada en (2.47), y sea u_N la aproximación obtenida cuando \sum_1 , \sum_2 , y \sum_3 en (2.47) son sustituidas por las correspondientes sumas parciales con los N primeros términos. Entonces, para $(t, x) \in [m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$, tenemos la acotación*

$$\begin{aligned} |u_N(t, x) - u(t, x)| &\leq \sum_{k=1}^m \frac{B_1 c^{2k-2} \Gamma(k, (N+1)^2 d^2 (t - k\tau))}{\Gamma(k) N} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B' \tau c^{2k} \Gamma(k, (N+1)^2 d^2 (t - (k+1)\tau))}{\Gamma(k) N} + \frac{c^{2m} B' m}{3d^2 N^3}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, dado $\delta > 0$ y un error prefijado $\epsilon > 0$, puede encontrarse N tal que $|u_N(t, x) - u(t, x)| \leq \epsilon$ para $(t, x) \in [m\tau + \delta, (m+1)\tau] \times [0, l]$.

2.7. Solución numérica con cota de error *a priori*

A partir de las cotas dadas por las expresiones del Teorema 2.19, se puede ver que, dado cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar un valor de N tal que cada uno de los restos $R_1^N - R_3^N$ sea menor que $\epsilon/3$, de forma que el error cometido al aproximar la solución exacta (2.47-2.51) por la suma parcial de la serie con N términos esté uniformemente acotado por ϵ en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$.

Así, se dispone de soluciones numéricas continuas que permiten el cálculo efectivo de las soluciones de los problemas considerados en este capítulo con cotas de error prefijadas en dominios acotados. En la Figura 2.7 se muestran ejemplos de cálculo de soluciones aproximadas del problema (2.1)-(2.3) para distintas elecciones de los parámetros.

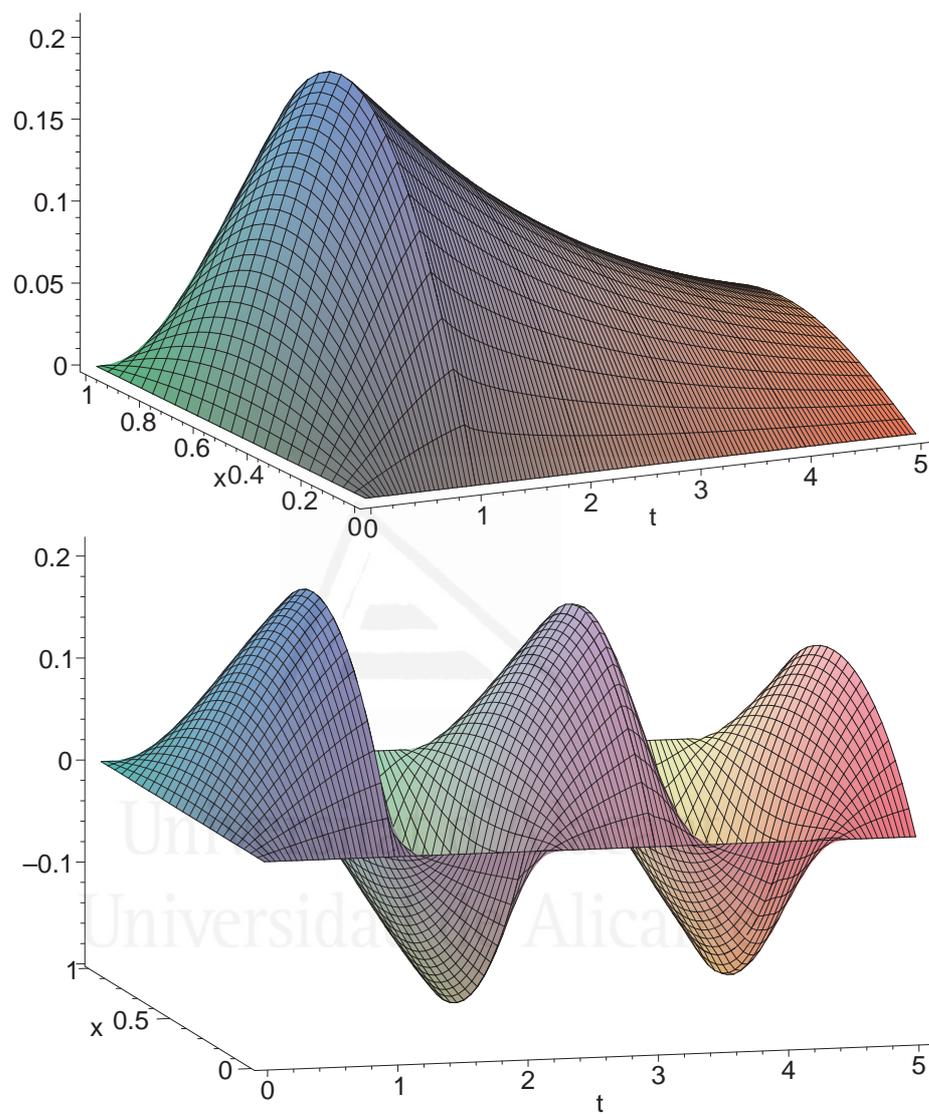


Figura 2.1: Solución numérica del problema (2.1,2.2-2.3) calculada utilizando la serie truncada u_N dada en el Teorema 2.19, para $N = 20$, con $l = 1$, $\tau = 1$, función inicial $\varphi(t, x) = \sin(t)x(1 - x)$ y distintos valores de los parámetros a y b . Gráfica superior: $a = 0,2$ y $b = 0,02$. Gráfica inferior: $a = 1$ y $b = 1$.

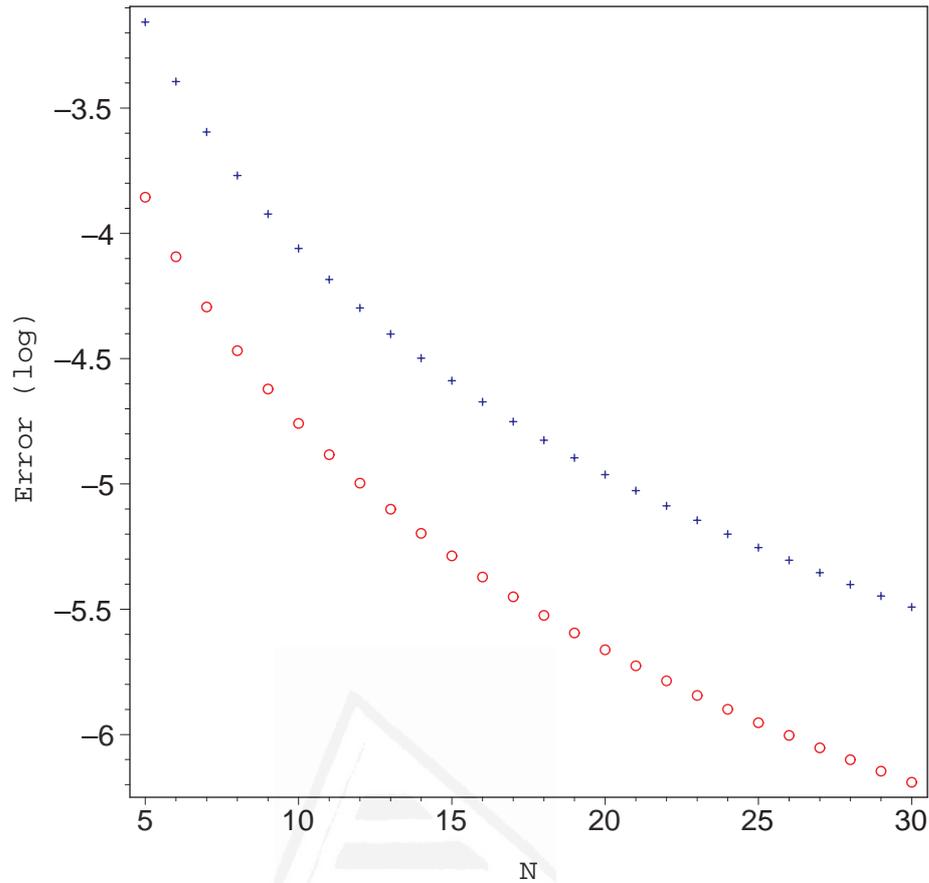


Figura 2.2: Cotas de error (logaritmos decimales) en función de N para la solución numérica del problema (2.1,2.2-2.3) calculada utilizando la serie truncada u_N dada en el Teorema 2.19, con $l = 1$, $\tau = 1$, $a = 1$, $b = 1$ y con función inicial $\varphi(t, x) = \sin(t)x(1 - x)$, para $(t, x) \in [m\tau + \delta, (m + 1)\tau] \times [0, l]$, donde $\delta = 0,1$, $m = 2$ (círculos) y $m = 10$ (cruces).

En la Figura 2.2 se muestra un ejemplo de la relación entre el número de términos de la serie truncada, N , y la cota de error proporcionada por el Teorema 2.19. Aunque en el próximo capítulo abordaremos la posibilidad de mejorar la eficiencia de nuestras aproximaciones numéricas, intentando garantizar una cota de error dada con un reducido número de términos en la suma parcial de la serie, conviene tener en cuenta que la precisión de nuestras aproximaciones puede ser, en general, mucho mayor que lo que aseguran las cotas del Teorema 2.19.

2.8. La ecuación de reacción-difusión con retardo

En esta sección consideramos problemas mixtos del tipo

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + bu(t - \tau, x), \quad t > \tau, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.99)$$

$$u(t, x) = \varphi(t, x), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.100)$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.101)$$

donde a y b son constantes distintas de cero y $\tau > 0$.

Utilizaremos el método de separación de variables para proponer una solución exacta en forma de serie infinita.

La regularidad de la función φ la supondremos, por el momento, suficiente para que sean correctos los cálculos que vamos a realizar.

Abordaremos el problema (2.99)-(2.101) utilizando el método de separación de variables nuevamente. Buscaremos una solución de la forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. De esta forma, se tendrá

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x) + bT(t - \tau)X(x),$$

o

$$\frac{T'(t) - bT(t - \tau)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Consecuentemente, $X(x)$ es la solución del problema

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0$$

y resolviendo esta ecuación se tiene que su solución es

$$X(x) = a_1 \sin(\lambda x) + a_2 \cos(\lambda x),$$

e imponiendo las condiciones de contorno se tiene que $a_2 = 0$ y $a_1 \sin(\lambda l) = 0$, de donde

$$\lambda = \frac{n\pi}{l}$$

o

$$\lambda^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

con lo que las funciones características serán

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Las correspondientes funciones $T_n(t)$ serán la solución de la ecuación diferencial ordinaria con retardo

$$T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2}a^2T_n(t) - bT_n(t - \tau) = 0, \quad (2.102)$$

con $T_n(t) = B_n(t)$ para $0 \leq t \leq \tau$ y donde $B_n(t)$ son los coeficientes del desarrollo de Fourier de la función inicial $\varphi(t, x)$ con respecto a $\sin(\frac{n\pi x}{l})$, de modo que

$$\varphi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Con este planteamiento, propondremos como solución del problema (2.99)-(2.101) la serie formal

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

La ecuación (2.102) da lugar a resolver la ecuación diferencial ordinaria con retardo (2.5) donde

$$\alpha = -\lambda^2 a^2$$

y

$$\beta = b$$

de donde

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-b}{a^2\lambda^2} = \frac{-c^2}{b\lambda^2}.$$

De esta forma, nos quedaría la siguiente solución,

$$u(t, x) = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \quad (2.103)$$

donde

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \left(\frac{-c^2 l^2}{b\pi^2 n^2}\right)^{k-1} (B_n(\tau) - \frac{c^2 l^2}{b\pi^2 n^2} B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau)), \\ u_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \left(\frac{-c^2 l^2}{b\pi^2 n^2}\right)^k \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B_n'(s) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds, \\ u_3 &= (-1)^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-c^2 l^2}{b\pi^2 n^2}\right)^m \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B_n'(s) Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds, \\ u_4 &= (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-c^2 l^2}{b\pi^2 n^2}\right)^m \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) B_n(t - m\tau). \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2} \right)^{k-1} B_n(\tau) \sin \left(\frac{n \pi x}{l} \right) Q(k, n^2 d^2 (t - k \tau))$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2} \right)^{k-1} \frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2} B_n(0) \sin \left(\frac{n \pi x}{l} \right) Q(k, n^2 d^2 (t - k \tau)) \quad (2.104)$$

$$u_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2} \right)^k \sin \left(\frac{n \pi x}{l} \right) \int_0^{\tau} B'_n(s) Q(k, n^2 d^2 (t - k \tau - s)) ds \quad (2.105)$$

$$u_3 = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2} \right)^m \sin \left(\frac{n \pi x}{l} \right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) Q(m, n^2 d^2 (t - m \tau - s)) ds \quad (2.106)$$

$$u_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2} \right)^m \sin \left(\frac{n \pi x}{l} \right) B_n(t - m \tau). \quad (2.107)$$

Nótese que u_4 se puede calcular de forma explícita. Véase el Teorema 3.4.

En la próxima sección estimaremos el error cometido al truncar en N términos las tres primeras expresiones anteriores.

2.8.1. Acotaciones de los restos

En este apartado vamos a estimar el error cometido al truncar la solución del problema (2.99)-(2.101) en N términos. Teniendo en cuenta que $c = \frac{b}{a}$ y $d = \frac{\pi a}{l}$ podemos escribir la solución de la siguiente forma,

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{b}{d^2 n^2} \right)^{k-1} \left(B_n(\tau) - \frac{b}{d^2 n^2} B_n(0) \right) \sin \left(\frac{n \pi x}{l} \right) Q(k, n^2 d^2 (t - k \tau)) \quad (2.108)$$

$$u_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{b}{d^2 n^2} \right)^k \sin \left(\frac{n \pi x}{l} \right) \int_0^{\tau} B'_n(s) Q(k, n^2 d^2 (t - k \tau - s)) ds \quad (2.109)$$

$$u_3 = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{d^2 n^2} \right)^m \sin \left(\frac{n \pi x}{l} \right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) Q(m, n^2 d^2 (t - m \tau - s)) ds \quad (2.110)$$

$$u_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{d^2 n^2} \right)^m \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) B_n(t - m\tau). \quad (2.111)$$

Consideremos los siguientes restos,

$$R_{1,k}^N = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{b}{d^2 n^2} \right)^{k-1} (B_n(\tau) - \frac{b}{d^2 n^2} B_n(0)) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau)) \right|$$

$$R_{2,k}^N = \left| - \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{b}{d^2 n^2} \right)^k \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \int_0^\tau B'_n(s) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds \right|$$

$$R_3^N = \left| - \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{b}{d^2 n^2} \right)^m \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds \right|$$

Empezaremos acotando el primer resto, $R_{1,k}^N$.

Llamamos B a una cota superior de $|B_n(\tau)|$ y $|B_n(0)|$ y $B_2 = B + \frac{b}{d^2} B$. Por tanto,

$$\left| B_n(\tau) - \frac{b}{d^2 n^2} B_n(0) \right| \leq B_2.$$

Así pues, para $k = 1$,

$$\begin{aligned} R_{1,1}^N &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (B_n(\tau) - \frac{b}{d^2 n^2} B_n(0)) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) Q(1, n^2 d^2(t - \tau)) \right| \\ &\leq B_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-n^2 d^2(t-\tau)} \leq B_2 \int_N^\infty e^{-u^2 d^2(t-\tau)} du \\ &= \int_N^\infty \frac{B_2}{u} e^{-u^2 d^2(t-\tau)} u du \leq \frac{B_2}{N} \int_N^\infty e^{-u^2 d^2(t-\tau)} u du \\ &= \frac{B_2}{2N d^2(t-\tau)} \int_N^\infty e^{-u^2 d^2(t-\tau)} 2u d^2(t-\tau) du = \frac{B_2}{2N d^2(t-\tau)} e^{-N^2 d^2(t-\tau)}. \end{aligned}$$

Para $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} R_{1,k}^N &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{b}{d^2} \right)^{k-1} \frac{B_2}{\Gamma(k)} \frac{\Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau))}{(n^2)^{k-1}} \\ &= \left(\frac{b}{d^2} \right)^{k-1} \frac{B_2}{\Gamma(k)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k, n^2 d^2(t - k\tau))}{(n^2)^{k-1}} \\ &\leq \left(\frac{b}{d^2} \right)^{k-1} \frac{B_2 \Gamma(k, (N+1)^2 d^2(t - k\tau))}{\Gamma(k)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n^2)^{k-1}} \quad (2.112) \end{aligned}$$

Por ser $\left\{\frac{1}{(n^2)^{k-1}}\right\}$ una sucesión monótona decreciente respecto de n , aplicando el Lema 2.14,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n^2)^{k-1}} \leq \int_N^{\infty} \frac{1}{(u^2)^{k-1}} du.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} R_{1,k}^N &\leq \left(\frac{b}{d^2}\right)^{k-1} \frac{B_2 \Gamma(k, (N+1)^2 d^2 (t - k\tau))}{\Gamma(k)} \int_N^{\infty} \frac{1}{(u^2)^{k-1}} du \\ &= \frac{b^{k-1} B_2}{(2k-3) d^{2(k-1)} \Gamma(k)} \frac{\Gamma(k, (N+1)^2 d^2 (t - k\tau))}{N^{2k-3}}. \end{aligned}$$

Así, la acotación final para el primer resto es

$$\begin{aligned} R_1^N &\leq \frac{B_2}{2N d^2 (t - \tau)} e^{-N^2 d^2 (t - \tau)} \\ &+ \sum_{k=2}^m \frac{b^{k-1} B_2}{(2k-3) d^{2(k-1)} \Gamma(k)} \frac{\Gamma(k, (N+1)^2 d^2 (t - k\tau))}{N^{2k-3}}. \end{aligned}$$

Con razonamientos similares calcularemos la acotación del segundo resto, $R_{2,k}^N$. Si tenemos en cuenta que

$$\Gamma(k, n^2 d^2 (t - k\tau - s)) \leq \Gamma(k, n^2 d^2 (t - (k+1)\tau)),$$

para todo s en el intervalo $[0, \tau]$, se tiene,

$$\begin{aligned} R_{2,k}^N &= \left| - \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{b}{d^2 n^2}\right)^k \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) Q(k, n^2 d^2 (t - k\tau - s)) ds, \right| \\ &\leq \left(\frac{b}{d^2}\right)^k \frac{B'\tau}{\Gamma(k)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k, n^2 d^2 (t - (k+1)\tau))}{n^{2k}} \end{aligned}$$

y procediendo de forma análoga a $R_{1,k}^N$, se obtiene,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \leq \int_N^{\infty} \frac{1}{u^{2k}} du.$$

Así,

$$\begin{aligned} R_{2,k}^N &\leq \left(\frac{b}{d^2}\right)^k \frac{B'\tau}{\Gamma(k)} \Gamma(k, (N+1)^2 d^2 (t - (k+1)\tau)) \int_N^{\infty} \frac{1}{u^{2k}} du \\ &= \frac{b^k B'\tau}{(2k-1) d^{2k} \Gamma(k)} \frac{\Gamma(k, (N+1)^2 d^2 (t - (k+1)\tau))}{N^{2k-1}}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$R_2^N \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{b^k B' \tau}{(2k-1)d^{2k}\Gamma(k)} \frac{\Gamma(k, (N+1)^2 d^2 (t - (k+1)\tau))}{N^{2k-1}}.$$

Por último vamos a acotar R_3^N . Se tiene que

$$\begin{aligned} R_3^N &= \left| - \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{b}{d^2 n^2} \right)^m \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) Q(m, n^2 d^2 (t - m\tau - s)) ds \right| \\ &\leq \frac{b^m}{d^{2m}\Gamma(m)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} \frac{B'\Gamma(m, n^2 d^2 (t - m\tau - s))}{n^{2m}} ds \end{aligned}$$

y, con el cambio de variable,

$$v = n^2 d^2 (t - m\tau - s)$$

la expresión anterior toma la forma,

$$R_3^N \leq \frac{B'b^m}{d^{2m}\Gamma(m)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+2}d^2} \int_0^{n^2 d^2 (t-m\tau)} \Gamma(m, v) dv$$

y teniendo en cuenta que $\int_0^{\infty} \Gamma(m, v) dv = \Gamma(m+1)$, [1, p. 263], obtenemos

$$\begin{aligned} R_3^N &\leq \frac{B'b^m}{d^{2m+2}\Gamma(m)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+2}} \Gamma(m+1) \\ &= \frac{mB'b^m}{d^{2m+2}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+2}} \\ &\leq \frac{mB'b^m}{d^{2m+2}} \int_N^{\infty} \frac{du}{u^{2m+2}} \\ &= \frac{mB'b^m}{(2m+1)d^{2m+2}N^{2m+1}}. \end{aligned}$$

Así pues de todo lo anterior se concluye el siguiente resultado.

Teorema 2.20. *Consideremos el problema (2.99)-(2.101), sea u la solución exacta dada en (2.103), y sea u_N la aproximación obtenida cuando u_1 , u_2 , y u_3 en (2.103) son sustituidas por las correspondientes sumas parciales con los N primeros términos.*

Entonces, para $(t, x) \in [m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$, tenemos la acotación

$$\begin{aligned}
|u_N(t, x) - u(t, x)| &\leq \frac{B_2}{2Nd^2(t-\tau)} e^{-N^2d^2(t-\tau)} \\
&+ \sum_{k=2}^m \frac{b^{k-1}B_2}{(2k-3)d^{2(k-1)}\Gamma(k)} \frac{\Gamma(k, (N+1)^2d^2(t-k\tau))}{N^{2k-3}} \\
&+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{b^k B' \tau}{(2k-1)d^{2k}\Gamma(k)} \frac{\Gamma(k, (N+1)^2d^2(t-(k+1)\tau))}{N^{2k-1}} \\
&+ \frac{mB'b^m}{(2m+1)d^{2m+2}N^{2m+1}}.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, dado $\delta > 0$ y un error prefijado $\epsilon > 0$, puede encontrarse N tal que $|u_N(t, x) - u(t, x)| \leq \epsilon$ para $(t, x) \in [m\tau + \delta, (m+1)\tau] \times [0, l]$.

2.8.2. Continuidad y regularidad de la solución

En el siguiente teorema exigiremos las condiciones suficientes a φ para que la solución sea continua.

Teorema 2.21. *Consideremos el problema (2.99)-(2.101). Sea $u(t, x)$ la solución candidata dada por (2.103). Supongamos que*

- (a) $\varphi_t(t, x)$ es una función continua en $[0, \tau] \times [0, l]$.
- (b) $\varphi_x(t, \cdot)$ es continua en $[0, l]$ para cada t .

Entonces $u(t, x)$ es continua en $[\tau, \infty) \times [0, l]$.

Demostración. La hipótesis de que φ sea continuamente diferenciable en t se utiliza para el cálculo de $B'_n(t)$ al igual que se comentaba en el problema anterior.

La convergencia uniforme de las series de las expresiones (2.105), (2.106) está basada en que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2 l^2}{b\pi^2 n^2} \right)^k$$

convergen para todo $k \geq 1$.

Para comprobar la convergencia uniforme en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$ de la serie dada por (2.104) basta fijarse en el caso más desfavorable que es la expresión del sumando correspondiente para $k = 1$ siguiente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau)).$$

El razonamiento para probar su convergencia uniforme es el mismo que se hizo en el Teorema 2.15 donde se utilizaba la hipótesis de que $\varphi_x(t, \cdot)$ es una función continua.

Teorema 2.22. *Supongamos las condiciones del Teorema 2.21. Entonces, la solución candidata $u(t, x)$ dada por (2.103) verifica:*

1. $u(t, x)$ es continua en $[\tau, \infty) \times [0, l]$.
2. $u(t, x)$ es solución del problema (2.99)-(2.101).
3. $u_t(t, x)$ y $u_{xx}(t, x)$ son continuas en $(\tau, \infty) \times (0, l)$.

Demostración. La demostración del primer apartado se hizo en el Teorema 2.21. Para probar la segunda condición vamos a estudiar la existencia de las derivadas parciales u_t y u_{xx} . Empezamos buscando la existencia de u_t . La solución es de la forma,

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (2.113)$$

Si probamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.114)$$

converge uniformemente $\forall t \in [m\tau, (m+1)\tau]$, por el Lema 2.6, habremos probado que

$$u_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.115)$$

Para probar que (2.114) converge uniformemente utilizamos la expresión,

$$T'_n(t) = -a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) + b T_n(t - \tau) \quad (2.116)$$

y (2.114) se escribiría de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.117)$$

$$= -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t - \tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (2.118)$$

Por tanto, probaremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t - \tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

convergen uniformemente $\forall t \in [m\tau, (m+1)\tau]$. Como la segunda expresión converge uniformemente por lo que hemos visto en el teorema anterior, nos dedicaremos sólo al estudio de la primera. Así,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{c^2}{b}\right)^{k-1} \left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\right)^{k-2} (B_n(\tau) - \frac{c^2 l^2}{\pi^2 n^2} B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau)), \\ S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{c^2}{b}\right)^k \left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\right)^{k-1} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds, \\ S_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2}{b}\right)^m \left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\right)^{m-1} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds, \\ S_4 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2}{b}\right)^m \left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\right)^{m-1} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) B_n(t - m\tau). \end{aligned}$$

Probaremos que S_1, S_2, S_3, S_4 convergen uniformemente $\forall t \in [m\tau, (m+1)\tau]$.

Empezamos con S_1 .

Si $m = 1, k = 1$ la serie más desfavorable es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right) (B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(1, n^2 d^2(t - \tau))). \quad (2.119)$$

Esta expresión converge dado que

$$\int_0^{\infty} u^2 \Gamma(1, u^2 d^2(t - \tau)) du = \int_0^{\infty} \frac{v}{d^2(t - \tau)} \frac{v^{-\frac{1}{2}}}{2d\sqrt{t - \tau}} \Gamma(1, v) dv \quad (2.120)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{v^{\frac{1}{2}}}{2d^3(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \Gamma(1, v) dv = \frac{1}{3d^3(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} x^{1+\frac{3}{2}-1} e^{-x} dx \quad (2.121)$$

$$= \frac{\Gamma(5/2)}{3d^3(t - \tau)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.122)$$

Dado $t_0 \in (\tau, 2\tau]$ existe un entorno del mismo donde la expresión (2.122) está acotada. Así pues hay convergencia uniforme de la serie (2.119) en $(\tau, 2\tau] \times [0, l]$ en un entorno de cada punto de este intervalo y $u_t(t, x)$ es continua en $(\tau, 2\tau] \times [0, l]$.

Para $m \geq 2, k = 1$ la serie (2.119) converge uniformemente en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$ puesto que (2.122) se puede acotar por

$$\frac{\Gamma(5/2)}{3d^3\tau^{\frac{3}{2}}}.$$

Para $m \geq 2, k = 2$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^2}{b} B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(2, n^2 d^2(t - 2\tau)) \quad (2.123)$$

converge uniformemente en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$ utilizando el mismo argumento que en el teorema anterior.

Para $m \geq 2, k > 2$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2}{b}\right)^{k-1} \left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\right)^{k-2} B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau))$$

converge uniformemente en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$ puesto que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\right)^{k-2}$$

es convergente.

Estudiaremos ahora S_2 .

Para $m = 1$ la suma es vacía.

Para $m \geq 2$ y $k = 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^2}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) Q(1, n^2 d^2(t - \tau - s)) ds$$

converge en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$ como ya se razonó en el Teorema 2.15. Véase (2.54).

Para $m \geq 2$ y $k \geq 2$ la expresión S_2 converge uniformemente en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$ debido a la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{k-1}.$$

Así S_2 converge uniformemente en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$.

En cuanto al estudio de S_3 es análogo al de S_2 .

Por último, en cuanto a S_4 para $m = 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^2}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) B_n(t - m\tau) = \varphi(t - m\tau, x)$$

razonando igual que en el Teorema 2.15 supuestas para φ las condiciones del teorema anterior.

Para $m \geq 2$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\right)^{m-1}$$

converge y por tanto S_4 converge uniformemente en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$.

De esta forma hemos probado la existencia y continuidad de u_t en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$. Es trivial comprobar que las expresiones de u_t en los intervalos $[(m-1)\tau, m\tau]$ y $[m\tau, (m+1)\tau]$ coinciden en el extremo común $t = m\tau$. Así hemos probado que u_t es continua en $(\tau, \infty) \times [0, l]$.

Ahora probaremos la existencia y continuidad de $u_{xx}(t, x)$ y que $u(t, x)$ es solución del problema. Por lo que ya hemos visto, se tiene,

$$u_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.124)$$

$$= -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t - \tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.125)$$

La expresión (2.124) verifica la ecuación diferencial

$$a^2 u_{xx}(t, x) + bu(t - \tau, x)$$

si probamos que

$$u_{xx}(t, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

es decir si,

$$u_{xx}(t, x) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

donde,

$$\begin{aligned}
S_1 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{c^2}{b}\right)^{k-1} \left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\right)^{k-2} \left(B_n(\tau) - \frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2} B_n(0)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau)), \\
S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{c^2}{b}\right)^k \left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\right)^{k-1} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds, \\
S_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2}{b}\right)^m \left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\right)^{m-1} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds, \\
S_4 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2}{b}\right)^m \left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\right)^{m-1} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) B_n(t - m\tau).
\end{aligned}$$

En primer lugar supongamos que $m > 1$.

Queremos ver que u_1, u_2, u_3, u_4 dadas por (2.104)-(2.107) se pueden derivar dos veces con respecto a la variable x , término a término. Aplicando el Lema 2.6, tenemos que probar que la serie formada por las primeras derivadas y la serie formada por las segundas derivadas convergen uniformemente en el intervalo $(0, l)$ para cada $t \in [m\tau, (m+1)\tau]$, como ésta última ya está probada sólo nos queda ver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2}\right)^{k-1} \frac{n\pi}{l} B_n(\tau) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau)) \quad (2.126)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2}\right)^{k-1} \frac{n\pi}{l} \frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2} B_n(0) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau)) \quad (2.127)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2}\right)^k \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds, \quad (2.128)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2}\right)^m \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds, \quad (2.129)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2 l^2}{b \pi^2 n^2}\right)^m \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) B_n(t - m\tau), \quad (2.130)$$

convergen uniformemente para todo valor de $x \in (0, l)$.

Empezamos con (2.126). El sumando más desfavorable para la convergencia uniforme de (2.126) es el correspondiente a $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} B_n(\tau) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(1, n^2 d^2(t - \tau)).$$

Teniendo en cuenta la acotación (2.94) para cada valor de t existe N cumpliendo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma(1, n^2 d^2(t - \tau)) \leq \frac{\Gamma(2)}{2d^2(t - \tau)}. \quad (2.131)$$

Por tanto, como $m > 1$ la serie (2.126) converge uniformemente en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$.

El estudio de la serie (2.127) es similar al de (2.126).

Estudiamos ahora la convergencia uniforme de (2.128). El sumando más desfavorable para la convergencia uniforme de (2.128) es el correspondiente a $k = 1$,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^2 l^2}{b\pi^2 n^2} \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^\tau B'_n(s) Q(1, n^2 d^2(t - \tau - s)) ds$$

que converge uniformemente en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$ ya que

$$\begin{aligned} & \left| -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^2 l^2}{b\pi^2 n^2} \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^\tau B'_n(s) Q(1, n^2 d^2(t - \tau - s)) ds \right| \\ & \leq \frac{c^2 l}{b\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau |B'_n(s)| Q(1, n^2 d^2(t - \tau - s)) ds < \infty \end{aligned}$$

al igual que razonamos en (2.55).

La convergencia uniforme de las series (2.129) y (2.130) en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$ teniendo en cuenta que $m \geq 2$ está basada en la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2 l^2}{b\pi^2 n^2} \right)^m \frac{n\pi}{l}.$$

En segundo lugar supongamos que $m = 1$. En este caso, teniendo en cuenta el Teorema 3.4,

$$\begin{aligned} u_4 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^2 l^2}{b\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) B_n(t - \tau) \\ &= \frac{c^2}{b} \left(\frac{-2F^{(2)}(l)}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - F^{(2)}(x) \right) \end{aligned} \quad (2.132)$$

donde

$$F^{(2)}(x) = \int_0^x du_2 \int_0^{u_2} \varphi(t - \tau, u_1) du_1.$$

Como

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = x$$

para $x \in [0, l)$, se tiene que

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} = -\frac{c^2}{b} \varphi(t - \tau, x)$$

y desarrollando φ en serie de Fourier

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^2}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) B_n(t - \tau)$$

como queríamos probar.

Para probar que u_1, u_2, u_3 , se pueden derivar dos veces con respecto a la variable x término a término, basta probar la convergencia uniforme en $(0, l)$ para cada $t \in [m\tau, (m+1)\tau]$ de las series (2.126)-(2.129) al igual que comentamos en el caso $m > 1$.

Estudiaremos la convergencia de las series (2.126) y (2.129) ya que (2.127) se estudiaría como (2.126) y la serie (2.128) es vacía para $m = 1$. Para (2.126) el razonamiento es el mismo que hemos hecho antes, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma(1, n^2 d^2(t - \tau)) \leq \frac{\Gamma(2)}{2d^2(t - \tau)}.$$

Así para cada $t \in (\tau, 2\tau]$ y $m = 1$ la serie (2.126) converge uniformemente $\forall x \in [0, l]$.

En cuanto a la serie (2.129), se tiene la siguiente acotación

$$\begin{aligned} & \left| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^2 l^2}{b\pi^2 n^2} \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-\tau} B'_n(s) Q(1, n^2 d^2(t - \tau - s)) ds \right| \\ & \leq \frac{c^2 l}{b\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-\tau} |B'_n(s)| Q(1, n^2 d^2(t - \tau - s)) ds < \infty \end{aligned}$$

al igual que razonamos en (2.56). Se tiene por tanto que la serie (2.129) converge uniformemente en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$.

Queda por tanto demostrada la existencia y continuidad de las derivadas parciales de la solución en $(\tau, \infty) \times (0, l)$.

Capítulo 3

Aproximaciones polinómicas de la función inicial

En el capítulo anterior se obtuvieron soluciones aproximadas del problema (2.1)-(2.3) que garantizaban una precisión prefijada en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$. Si recordamos las acotaciones de los restos dadas en el Teorema 2.19, se observa que, para cada t en $(m\tau, (m+1)\tau]$, el error cometido en cada sumando disminuía de forma exponencial con el número de términos en la suma parcial, excepto en el tercer sumando \sum_3 . Para solventar este problema, vamos a aproximar la función inicial $\varphi_t(t, x)$ por un polinomio de cierto grado L en la variable t , al que llamaremos $P_{L, \varphi_t}(t, x)$, usando polinomios de aproximación adecuados,

$$P_{L, \varphi_t}(t, x) = \sum_{k=0}^L t^k f_k(x).$$

Sea $u(t, x)$ la solución del problema (2.1)-(2.3) dada por (2.47). En la solución aproximada a ésta, a la que llamaremos $u_P(t, x)$, algunas partes podrán ser calculadas de forma exacta, de modo que la en la serie truncada, $u_P^N(t, x)$, el resto asociado a ella disminuirá de forma exponencial con el número de términos.

Así, $u_P(t, x)$ adoptaría la forma siguiente,

$$u_P(t, x) = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4, \quad (3.1)$$

donde

$$\begin{aligned}
\sum_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} c^{2(k-1)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau)), \\
\sum_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} c^{2k} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds, \\
\sum_3 &= (-1)^{m-1} c^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} P_{n,L}(s) Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds \\
&\quad y \\
\sum_4 &= (-1)^m c^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) B_n(t - m\tau) = (-1)^m c^{2m} \varphi(t - m\tau, x),
\end{aligned}$$

donde $P_{n,L}(s)$ son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier del polinomio $P_{L,\varphi_t}(s, x)$, es decir

$$P_{n,L}(s) = \frac{2}{l} \int_0^l P_{L,\varphi_t}(s, x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

En la próxima sección desarrollaremos y reescribiremos la expresión \sum_3' . A continuación, buscaremos el polinomio adecuado que aproxime a $\varphi_t(t, x)$ y para acabar el capítulo calcularemos el error cometido al truncar la solución aproximada y estimaremos el error al aproximar $\varphi_t(t, x)$ por el polinomio $P_{L,\varphi_t}(t, x)$, es decir, acotaremos los errores cometidos en las aproximaciones

$$u(t, x) \rightarrow u_P(t, x) \rightarrow u_P^N(t, x).$$

3.1. Expresión del tercer sumando de la serie si $\varphi_t(t, x)$ se aproxima por un polinomio en la variable t

Supongamos que $\varphi_t(t, x)$ es aproximado por un polinomio de grado L , $P_{L,\varphi_t}(t, x)$. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Lema 3.1. Sea $P_{L,\varphi_t}(t, x) = \sum_{k=0}^L t^k f_k(x)$. Si $P_{n,L}(t)$ son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la función P_{L,φ_t} y llamamos $g_{n,k} = \frac{2}{l} \int_0^l f_k(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$, $d = \frac{\pi a}{l}$

y $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \int_0^{t-m\tau} P_{n,L}(s) Q(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) ds \quad (3.2)$$

$$= \sum_{k=0}^L \frac{(t-m\tau)^{k+1}}{k+1} f_k(x) \quad (3.3)$$

$$+ \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j} (t-m\tau)^j}{(k+1)\Gamma(m)} \binom{k+1}{j} \Gamma(k+m-j+1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \frac{g_{n,k}}{(n^2 d^2)^{k+1-j}} \quad (3.4)$$

$$+ \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t-m\tau)^j}{(k+1)\Gamma(m)} \binom{k+1}{j} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \frac{g_{n,k} \Gamma(k+m-j+1, n^2 d^2(t-m\tau))}{(n^2 d^2)^{k+1-j}}. \quad (3.5)$$

Demostración. Llamemos $P_{L,\varphi_t}^{(k)}(t, x) = t^k f_k(x)$. De esta forma, P_{L,φ_t} se puede escribir como sigue,

$$P_{L,\varphi_t}(t, x) = \sum_{k=0}^L t^k f_k(x) = \sum_{k=0}^L P_{L,\varphi_t}^{(k)}(t, x)$$

y además

$$P_{n,L}(t) = \frac{2}{l} \int_0^l P_{L,\varphi_t}(t, x) dx.$$

Si desarrollamos $P_{L,\varphi_t}^{(k)}(t, x)$ en serie de Fourier, se tiene

$$P_{L,\varphi_t}^{(k)}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n,L}^{(k)}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

donde

$$P_{n,L}^{(k)}(t) = \frac{2}{l} \int_0^l t^k f_k(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = t^k g_{n,k}$$

y

$$f_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{n,k} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Teniendo en cuenta lo anterior,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} P_{n,L}(s) Q(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) ds \\
&= \sum_{k=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} P_{n,L}^{(k)}(s) Q(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) ds \\
&= \sum_{k=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} s^k g_{n,k} Q(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) ds. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

A continuación, desarrollaremos la expresión

$$\int_0^{t-m\tau} s^k \Gamma(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) ds.$$

Integrando por partes,

$$u = \Gamma(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)), \quad dv = s^k ds,$$

$$du = n^2 d^2 e^{-n^2 d^2(t-m\tau-s)} (n^2 d^2(t-m\tau-s))^{m-1} ds, \quad v = \frac{s^{k+1}}{k+1},$$

y llamando

$$Exp(n, s) = e^{-n^2 d^2(t-m\tau-s)} (n^2 d^2(t-m\tau-s))^{m-1},$$

se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t-m\tau} s^k \Gamma(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) ds \\
&= \left[\Gamma(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) \frac{s^{k+1}}{k+1} \right]_0^{t-m\tau} - \int_0^{t-m\tau} \frac{s^{k+1}}{k+1} n^2 d^2 Exp(n, s) ds \\
&= \Gamma(m) \frac{(t-m\tau)^{k+1}}{k+1} - \int_0^{t-m\tau} Exp(n, s) \frac{s^{k+1}}{k+1} n^2 d^2 ds. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Si reescribimos esta última integral y desarrollamos el siguiente binomio de Newton,

$$\begin{aligned}
s^{k+1} &= (-1)^{k+1} (-1)^{k+1} s^{k+1} \\
&= (-1)^{k+1} (-s)^{k+1} \\
&= (-1)^{k+1} (t-m\tau-s + (-t+m\tau))^{k+1} \\
&= (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (t-m\tau-s)^{k+1-j} (-t+m\tau)^j, \tag{3.8}
\end{aligned}$$

sustituyendo (3.8) en la siguiente integral, se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t-m\tau} \frac{s^{k+1}}{k+1} n^2 d^2 e^{-n^2 d^2 (t-m\tau-s)} (n^2 d^2 (t-m\tau-s))^{m-1} ds \\
&= \int_0^{t-m\tau} \left[\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (t-m\tau-s)^{k+1-j} (-t+m\tau)^j n^2 d^2 \text{Exp}(n, s) \right] ds \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t-m\tau)^j}{k+1} \binom{k+1}{j} \int_0^{t-m\tau} (t-m\tau-s)^{k+1-j} n^2 d^2 \text{Exp}(n, s) ds \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t-m\tau)^j}{(k+1)(n^2 d^2)^{k+1-j}} \binom{k+1}{j} \int_0^{t-m\tau} (n^2 d^2 (t-m\tau-s))^{k+1-j} n^2 d^2 \text{Exp}(n, s) ds,
\end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta la expresión de $\text{Exp}(n, s)$, se tiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t-m\tau)^j}{(k+1)(n^2 d^2)^{k+1-j}} \binom{k+1}{j} \int_0^{t-m\tau} (n^2 d^2 (t-m\tau-s))^{k+m-j} n^2 d^2 e^{-n^2 d^2 (t-m\tau-s)} ds \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t-m\tau)^j}{(k+1)(n^2 d^2)^{k+1-j}} \binom{k+1}{j} \int_0^{t-m\tau} \Gamma_s(k+m-j+1, n^2 d^2 (t-m\tau-s)) ds \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t-m\tau)^j}{(k+1)(n^2 d^2)^{k+1-j}} \binom{k+1}{j} \Gamma(k+m-j+1, 0) \\
&- \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t-m\tau)^j}{(k+1)(n^2 d^2)^{k+1-j}} \binom{k+1}{j} \Gamma(k+m-j+1, n^2 d^2 (t-m\tau)) \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t-m\tau)^j}{(k+1)(n^2 d^2)^{k+1-j}} \binom{k+1}{j} \Gamma(k+m-j+1) \\
&+ \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j} (t-m\tau)^j}{(k+1)(n^2 d^2)^{k+1-j}} \binom{k+1}{j} \Gamma(k+m-j+1, n^2 d^2 (t-m\tau)). \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Si sustituimos (3.9) en (3.7),

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t-m\tau} s^k \Gamma(m, n^2 d^2 (t-m\tau-s)) ds \\
&= \Gamma(m) \frac{(t-m\tau)^{(k+1)}}{k+1} \\
&+ \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j} (t-m\tau)^j}{(k+1)(n^2 d^2)^{k+1-j}} \binom{k+1}{j} \Gamma(k+m-j+1) \\
&+ \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t-m\tau)^j}{(k+1)(n^2 d^2)^{k+1-j}} \binom{k+1}{j} \Gamma(k+m-j+1, n^2 d^2 (t-m\tau)). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Llamando $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, sustituyendo (3.10) en (3.6) y teniendo en cuenta que

$$Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) = \frac{\Gamma(m, n^2 d^2(t - m\tau - s))}{\Gamma(m)},$$

se tiene,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \int_0^{t-m\tau} s^k g_{n,k} Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds \\ &= \sum_{k=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) g_{n,k} \frac{(t - m\tau)^{k+1}}{k+1} \\ &+ \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j} (t - m\tau)^j \Gamma(k + m - j + 1)}{(k+1)\Gamma(m)} \binom{k+1}{j} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \frac{g_{n,k}}{(n^2 d^2)^{k+1-j}} \\ &+ \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t - m\tau)^j}{(k+1)\Gamma(m)} \binom{k+1}{j} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \frac{g_{n,k} \Gamma(k + m - j + 1, n^2 d^2(t - m\tau))}{(n^2 d^2)^{k+1-j}}. \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $g_{n,k}$ son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de las funciones f_k ,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \int_0^{t-m\tau} s^k g_{n,k} Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds \\ &= \sum_{k=0}^L \frac{(t - m\tau)^{k+1}}{k+1} f_k(x) \\ &+ \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j} (t - m\tau)^j \Gamma(k + m - j + 1)}{(k+1)\Gamma(m)} \binom{k+1}{j} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \frac{g_{n,k}}{(n^2 d^2)^{k+1-j}} \\ &+ \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t - m\tau)^j}{(k+1)\Gamma(m)} \binom{k+1}{j} \\ &\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \frac{g_{n,k} \Gamma(k + m - j + 1, n^2 d^2(t - m\tau))}{(n^2 d^2)^{k+1-j}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nótese que el primer sumando se calcula de forma exacta. En la próxima sección nos ocuparemos del estudio de la segunda serie de (3.11) y veremos que el segundo sumando se puede calcular de forma exacta también. El tercer sumando no ofrecerá ningún problema, pues como veremos más adelante el resto de dicha serie se puede acotar de forma exponencial en relación con el número de términos.

3.2. Estudio de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \frac{g_{n,k}}{(n^2 d^2)^{k+1-j}}$

Lema 3.2. Sea $F_k^{(i)}$ la función formada por i integrales iteradas de f_k ,

$$F_k^{(i)}(x) = \int_0^x du_i \int_0^{u_i} du_{i-1} \dots \int_0^{u_2} f_k(u_1) du_1.$$

Entonces, para todo i número natural no nulo se tiene

$$\int_0^l f_k(x) \sin(\lambda_n x) dx = \sum_{p=1}^i (-1)^{n+p} (\lambda_n)^{2p-1} F_k^{(2p)}(l) + (-1)^i (\lambda_n)^{2i} \int_0^l F_k^{(2i)}(x) \sin(\lambda_n x) dx. \quad (3.12)$$

Demostración. Se va a demostrar por inducción, integrando por partes dos veces. Comprobemos la fórmula para $i = 1$. Integrando por partes y llamando

$$\begin{aligned} u &= \sin(\lambda_n x), & dv &= f_k(x) dx, \\ du &= \lambda_n \cos(\lambda_n x) dx, & v &= \int_0^x f_k(u) du, \end{aligned}$$

se tiene,

$$\begin{aligned} \int_0^l f_k(x) \sin(\lambda_n x) dx &= \left[\sin(\lambda_n x) \int_0^x f_k(u) du \right]_0^l - \int_0^l \left(\int_0^x f_k(u) du \right) \lambda_n \cos(\lambda_n x) dx \\ &= - \int_0^l \left(\int_0^x f_k(u) du \right) \lambda_n \cos(\lambda_n x) dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Integrando de nuevo por partes en (3.13), tomando

$$\begin{aligned} u &= -\lambda_n \cos(\lambda_n x), & dv &= \left(\int_0^x f_k(u) du \right) dx, \\ du &= \lambda_n^2 \sin(\lambda_n x) dx, & v &= \int_0^x \left(\int_0^{u_2} f_k(u_1) du_1 \right) du_2, \end{aligned}$$

(3.13) se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} & \left[-\lambda_n \cos(\lambda_n x) \int_0^x \left(\int_0^{u_2} f_k(u_1) du_1 \right) du_2 \right]_0^l - \int_0^l \lambda_n^2 \sin(\lambda_n x) \left(\int_0^x \left(\int_0^{u_2} f_k(u_1) du_1 \right) du_2 \right) dx \\ &= -\lambda_n \cos(\lambda_n l) \int_0^l \left(\int_0^{u_2} f_k(u_1) du_1 \right) du_2 - \lambda_n^2 \int_0^l \sin(\lambda_n x) \left(\int_0^x \left(\int_0^{u_2} f_k(u_1) du_1 \right) du_2 \right) dx \\ &= (-1)^{n+1} \lambda_n \int_0^l \left(\int_0^{u_2} f_k(u_1) du_1 \right) du_2 - \lambda_n^2 \int_0^l \sin(\lambda_n x) \left(\int_0^x \left(\int_0^{u_2} f_k(u_1) du_1 \right) du_2 \right) dx \\ &= (-1)^{n+1} \lambda_n F_k^{(2)}(l) - \lambda_n^2 \int_0^l F_k^{(2)}(x) \sin(\lambda_n x) dx. \end{aligned}$$

Supuesta cierta la fórmula para i , veamos qué ocurre para $i + 1$

$$\int_0^l f_k(x) \sin(\lambda_n x) dx = \sum_{p=1}^i (-1)^{n+p} (\lambda_n)^{2p-1} F_k^{(2p)}(l) + (-1)^i (\lambda_n)^{2i} \int_0^l F_k^{(2i)}(x) \sin(\lambda_n x) dx. \quad (3.14)$$

Si integramos por partes la integral de (3.14), tomando

$$u = \sin(\lambda_n x), \quad dv = F_k^{(2i)}(x) dx,$$

$$du = \lambda_n \cos(\lambda_n x) dx, \quad v = \int_0^x F_k^{(2i)}(u) du,$$

se tiene

$$\begin{aligned} & \int_0^l F_k^{(2i)}(x) \sin(\lambda_n x) dx \\ &= \left[\sin(\lambda_n x) \int_0^x F_k^{(2i)}(u) du \right]_0^l - \int_0^l \lambda_n \cos(\lambda_n x) \left(\int_0^x F_k^{(2i)}(u) du \right) dx \\ &= - \int_0^l \lambda_n \cos(\lambda_n x) \left(\int_0^x F_k^{(2i)}(u) du \right) dx. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si volvemos a integrar por partes (3.15), con

$$u = -\lambda_n \cos(\lambda_n x), \quad dv = \left(\int_0^x F_k^{(2i)}(u) du \right) dx,$$

$$du = \lambda_n^2 \sin(\lambda_n x) dx, \quad v = \int_0^x \left(\int_0^{u_2} F_k^{(2i)}(u_1) du_1 \right) du_2 = F_k^{(2i+2)}(x),$$

se tiene que (3.15) se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \int_0^l F_k^{(2i)}(x) \sin(\lambda_n x) dx &= \left[-\lambda_n \cos(\lambda_n x) F_k^{(2i+2)}(x) \right]_0^l - \lambda_n^2 \int_0^l F_k^{(2i+2)}(x) \sin(\lambda_n x) dx \\ &= -\lambda_n (-1)^n F_k^{(2i+2)}(l) - \lambda_n^2 \int_0^l F_k^{(2i+2)}(x) \sin(\lambda_n x) dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Finalmente, sustituyendo (3.16) en (3.14) se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^l f_k(x) \sin(\lambda_n x) dx &= \sum_{p=1}^i (-1)^{n+p} (\lambda_n)^{2p-1} F_k^{(2p)}(l) \\
&+ (-1)^i (\lambda_n)^{2i} [-\lambda_n (-1)^n F_k^{(2i+2)}(l) - \lambda_n^2 \int_0^l F_k^{(2i+2)}(x) \sin(\lambda_n x) dx] \\
&= \sum_{p=1}^i (-1)^{n+p} (\lambda_n)^{2p-1} F_k^{(2p)}(l) \\
&+ (\lambda_n)^{2i+1} (-1)^n (-1)^{i+1} F_k^{(2i+2)}(l) \\
&+ (\lambda_n)^{2i+2} (-1)^{i+1} \int_0^l F_k^{(2i+2)}(x) \sin(\lambda_n x) dx \\
&= \sum_{p=1}^{i+1} (-1)^{n+p} (\lambda_n)^{2p-1} F_k^{(2p)}(l) \\
&+ (-1)^{i+1} (\lambda_n)^{2i+2} \int_0^l F_k^{(2i+2)}(x) \sin(\lambda_n x) dx. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

A continuación enunciaremos un corolario inmediato, que consiste en despejar de la fórmula del lema anterior.

Corolario 3.3. *Bajo las condiciones del Lema 3.2, se tiene*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2}\right)^i} \int_0^l f_k(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\
&= \sum_{p=1}^i (-1)^{n+p} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2(i-p)+1}} F_k^{(2p)}(l) + (-1)^i \int_0^l F_k^{(2i)}(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx,
\end{aligned}$$

para todo i número natural no nulo.

En el próximo teorema daremos el valor exacto de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 d^2)^i} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) g_{n,k}.$$

Teorema 3.4. *Supongamos las condiciones del Lema 3.2 y sean $d = \frac{\pi a}{l}$ y $g_{n,k} = \frac{2}{l} \int_0^l f_k(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$. Entonces,*

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 d^2)^i} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) g_{n,k} \\
&= \sum_{p=1}^i \frac{2(-1)^p F_k^{(2p)}(l)}{l a^{2i}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2(i-p)+1}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \frac{(-1)^i}{a^{2i}} F_k^{(2i)}(x).
\end{aligned}$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $d = \frac{\pi a}{l}$, $n^2 d^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2$,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 d^2)^i} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) g_{n,k} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2}\right)^i a^{2i}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^l f_k(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \end{aligned} \quad (3.18)$$

aplicando el Corolario 3.3 se tiene,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2}\right)^i} \int_0^l f_k(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \sum_{p=1}^i (-1)^{n+p} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2(i-p)+1}} F_k^{(2p)}(l) + (-1)^i \int_0^l F_k^{(2i)}(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Sustituyendo (3.19) en (3.18),

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 d^2)^i} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) g_{n,k} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l a^{2i}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sum_{p=1}^i (-1)^{n+p} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2(i-p)+1}} F_k^{(2p)}(l) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l a^{2i}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) (-1)^i \int_0^l F_k^{(2i)}(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \sum_{p=1}^i \frac{2(-1)^p F_k^{(2p)}(l)}{l a^{2i}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2(i-p)+1}} \\ &+ \frac{(-1)^i}{a^{2i}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{2}{l} \int_0^l F_k^{(2i)}(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que el desarrollo en serie de Fourier de $F_k^{(2i)}(x)$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{2}{l} \int_0^l F_k^{(2i)}(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx,$$

finalmente se tiene,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 d^2)^i} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) g_{n,k} \\ &= \sum_{p=1}^i \frac{2(-1)^p F_k^{(2p)}(l)}{l a^{2i}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2(i-p)+1}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \frac{(-1)^i}{a^{2i}} F_k^{(2i)}(x). \end{aligned}$$

Aplicaremos el teorema anterior en nuestra serie tomando $i = k - j + 1$, quedando el resultado de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 d^2)^{k-j+1}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) g_{n,k} \\ = & \sum_{p=1}^{k-j+1} \frac{2(-1)^p F_k^{(2p)}(l)}{l a^{2(k-j+1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2(k-j+1-p)+1}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ + & \frac{(-1)^{k-j+1}}{a^{2(k-j+1)}} F_k^{(2(k-j+1))}(x). \end{aligned}$$

Como se puede observar, el estudio de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{g_{n,k}}{(n^2 d^2)^i}$$

se expresa en términos de la nueva función conocida $F_k^{(i)}(x)$ y de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2(i-p)+1}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

que vamos a estudiar a continuación.

3.3. Estudio de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k+1}} \sin(nx)$, siendo k un número natural

Vamos a estudiar el desarrollo en serie de Fourier de senos para funciones x^k con k impar.

Lema 3.5. *El desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = x$ es*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad x \in [0, \pi).$$

Demostración. Sea $f(x) = x$, con $-\pi < x < \pi$. El desarrollo en serie de Fourier tiene la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx.$$

Para la función dada, la expresión de b_n es

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx,$$

e, integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi(-1)^n}{n} \right] + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^\pi = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \end{aligned}$$

con lo que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad x \in [0, \pi).$$

A continuación vamos a calcular b_n para una función x^k , con k impar, mediante una fórmula de recurrencia en función de k .

Lema 3.6. Sea $I_{k,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^k \sin(nx) dx$. Entonces, para $k \geq 3$ se cumple la fórmula de recurrencia

$$I_{k,n} = 2\pi^{k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{k(k-1)}{n^2} I_{k-2,n}. \quad (3.20)$$

Demostración. Para $k = 1$,

$$I_{1,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Integrando por partes

$$I_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^k \sin(nx) dx,$$

con

$$\begin{aligned} u &= x^k, & du &= kx^{k-1}, \\ dv &= \sin(nx) dx, & v &= -\frac{\cos(nx)}{n}, \end{aligned}$$

se tiene,

$$\begin{aligned} I_{k,n} &= \frac{2}{\pi} \left[-x^k \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi kx^{k-1} \frac{\cos(nx)}{n} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\pi^k \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) + \frac{2k}{\pi} \int_0^\pi x^{k-1} \frac{\cos(nx)}{n} dx \end{aligned}$$

y, volviendo a integrar por partes, con

$$\begin{aligned} u &= x^{k-1}, & du &= (k-1)x^{k-2}, \\ dv &= \frac{\cos(nx)}{n}, & v &= \frac{\sin(nx)}{n^2}, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} I_{k,n} &= 2\pi^{k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2k}{\pi} \left[x^{k-1} \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^\pi - \frac{2k(k-1)}{\pi n^2} \int_0^\pi x^{k-2} \sin(nx) dx \\ &= 2\pi^{k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{2k(k-1)}{\pi n^2} \int_0^\pi x^{k-2} \sin(nx) dx \\ &= 2\pi^{k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{k(k-1)}{n^2} I_{k-2,n}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Proposición 3.7. Sea $I_{k,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^k \sin(nx) dx$ y k un número impar. Entonces,

$$x^k = \pi^{k-1} x - k(k-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{k-2,n}}{n^2} \sin(nx) \quad (3.22)$$

para valores de $x \in [0, \pi)$.

Demostración. Como k es un número impar,

$$x^k = \sum_{n=1}^{\infty} I_{k,n} \sin(nx)$$

y aplicando el Lema 3.6 la expresión anterior adopta la forma

$$x^k = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi^{k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) - k(k-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{k-2,n}}{n^2} \sin(nx).$$

Teniendo en cuenta el Lema 3.5,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = x,$$

la expresión resultante es

$$x^k = \pi^{k-1}x - k(k-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{k-2,n}}{n^2} \sin(nx).$$

Veamos un ejemplo para $k = 3$ calculando la siguiente serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin(nx).$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} x^3 &= \pi^2 x - 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{1,n}}{n^2} \sin(nx), \\ x^3 &= \pi^2 x - 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3} \sin(nx), \\ x^3 &= \pi^2 x - 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin(nx), \end{aligned}$$

y, despejando la serie, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi^2 x}{12}.$$

En nuestro problema, $x \in [0, l)$ y, por tanto, $\frac{\pi x}{l} \in [0, \pi)$. De esta forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{\left(\frac{\pi x}{l}\right)^3}{12} - \frac{\pi^2}{12} \frac{\pi x}{l}.$$

Aplicando el método de recurrencia anterior, podemos obtener el valor de cualquier expresión del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k+1}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

En el siguiente teorema daremos la expresión definitiva de la serie \sum_3' dada en (3.1) si φ_t es aproximada por un polinomio en la variable t . Esto va a dar lugar a una expresión en la que vamos a calcular de forma explícita todos sus términos, salvo uno que se puede truncar de forma que el resto asociado decaiga en forma exponencial con el número de términos.

3.4. Expresión definitiva de la solución aproximada

Teorema 3.8. Sea $P_{L,\varphi_t}(t, x)$ un polinomio de grado L , es decir,

$$P_{L,\varphi_t}(t, x) = \sum_{k=0}^L t^k f_k(x),$$

y sean $g_{n,k} = \frac{2}{l} \int_0^l f_k(x) \sin(\frac{n\pi x}{l}) dx$ y $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi x}{l}) \int_0^{t-m\tau} s^k g_{n,k} Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds \\ &= v_1(t, x) + v_2(t, x) + v_3(t, x) + v_4(t, x), \end{aligned}$$

donde

$$v_1(t, x) = \sum_{k=0}^L \frac{(t - m\tau)^{k+1}}{k+1} f_k(x), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} v_2(t, x) &= \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{2(-1)^{k+j} (t - m\tau)^j \Gamma(k + m - j + 1)}{(k+1)\Gamma(m) a^{2(k-j+1)} l} \binom{k+1}{j} \sum_{p=1}^{k-j+1} (-1)^p F_k^{(2p)}(l) \\ &\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n)^{2(k-j+1-p)+1}} \sin(\lambda_n x), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$v_3(t, x) = - \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(t - m\tau)^j \Gamma(k + m - j + 1)}{(k+1)\Gamma(m) a^{2(k-j+1)}} \binom{k+1}{j} F_k^{(2(k-j+1))}(x) \quad (3.25)$$

y

$$v_4(t, x) = \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t - m\tau)^j}{(k+1)\Gamma(m)} \binom{k+1}{j} \quad (3.26)$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \frac{g_{n,k} \Gamma(k + m - j + 1, n^2 d^2(t - m\tau))}{(n^2 d^2)^{k-j+1}}. \quad (3.27)$$

Demostración. El resultado se obtiene sustituyendo la expresión proporcionada por el Teorema 3.4 en las expresiones del Lema 3.1.

Nótese que, salvo el último sumando $v_4(t, x)$, el resto de expresiones de este teorema se calculan de forma explícita. Por tanto, la expresión definitiva de la solución aproximada de nuestro problema a la que llamamos $u_P(t, x)$ es igual que la obtenida en el capítulo anterior $u(t, x)$, en (2.47-2.51), salvo en el tercer sumando, donde aproximamos

$$\int_0^{t-m\tau} B'_n(s) Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s)) ds$$

por

$$\int_0^{t-m\tau} P_{n,L}(s)Q(m, n^2 d^2(t - m\tau - s))ds,$$

siendo $P_{n,L}(s)$ los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier del polinomio P_{L,φ_t} , es decir,

$$P_{n,L}(s) = \frac{2}{l} \int_0^l P_{L,\varphi_t}(s, x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

En consecuencia,

$$u_P(t, x) = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4, \quad (3.28)$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} c^{2(k-1)} (B_n(\tau) + c^2 B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau)), \\ \sum_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} c^{2k} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) Q(k, n^2 d^2(t - k\tau - s)) ds, \\ \sum_3 &= (-1)^{m-1} c^{2m} (v_1(t, x) + v_2(t, x) + v_3(t, x) + v_4(t, x)), \\ & \quad y \\ \sum_4 &= (-1)^m c^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) B_n(t - m\tau) = (-1)^m c^{2m} \varphi(t - m\tau, x), \end{aligned}$$

siendo v_1, v_2, v_3 y v_4 las funciones descritas en el Teorema 3.8.

3.5. Teorema de Weierstrass. Polinomios de Bernstein

En esta sección vamos a ver cómo podemos aproximar φ_t por un polinomio en la variable t . El Teorema de Weierstrass (véase [3, p. 392]) nos asegura que toda función continua se puede aproximar por un polinomio, aunque en nuestro caso tenemos una función que depende de dos variables, t, x . Queremos aproximar la función φ_t por un polinomio en la variable t que sea válido para cualquier valor de x . Nos apoyaremos en los polinomios de Bernstein (ver [9, p. 166]) pero dada la mayor eficacia de los

polinomios de Tschebyscheff (ver [8, p.66]) emplearemos éstos en los programas de los anexos que calculan el error a partir del número de términos y el que calcula el número de términos en función del error. En realidad en los cálculos que hacemos partimos de un polinomio cualquiera en la variable t . Sólo nos apoyamos en los de Bernstein para probar que toda función continua en dos variables definida en un conjunto compacto se puede aproximar por un polinomio en una de sus variables, lo veremos en el próximo teorema.

Proposición 3.9. *El conjunto de polinomios $\left\{\binom{L}{k}t^k(1-t)^{L-k}, \quad k = 0, 1, \dots, L\right\}$ es una base del conjunto de los polinomios de grado L en la variable t .*

Proposición 3.10. *Propiedades Inmediatas*

1. *Propiedad*

$$1 = \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} t^k (1-t)^{L-k}. \quad (3.29)$$

2. *Propiedad*

$$Lt = \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} k t^k (1-t)^{L-k}. \quad (3.30)$$

3. *Propiedad*

$$t = \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \frac{k}{L} t^k (1-t)^{L-k}. \quad (3.31)$$

4. *Propiedad*

$$\left(1 - \frac{1}{L}\right)t^2 + \frac{t}{L} = \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \frac{k^2}{L^2} t^k (1-t)^{L-k}. \quad (3.32)$$

Usaremos las anteriores igualdades en la demostración del siguiente teorema. Si $\varphi_t(\cdot, x)$ es una función continua en el intervalo $[0, 1]$ se define el polinomio de Bernstein de grado L , en la variable t asociado a la función φ_t de la forma siguiente:

$$P_{L, \varphi_t}(t, x) = \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \varphi_t\left(\frac{k}{L}, x\right) t^k (1-t)^{L-k}. \quad (3.33)$$

Teorema 3.11. Si $\varphi_t(\cdot, x)$ es una función continua en el intervalo $[0, 1]$ para cada x , entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad |\varphi_t(t, x) - P_{L, \varphi_t}(t, x)| < \varepsilon \quad \forall L \geq L_0(\varepsilon) \quad (3.34)$$

$$\forall t \in [0, 1] \quad \forall x \in [0, l].$$

Demostración. Por la Propiedad 1 (3.29), se tiene

$$\varphi_t(t, x) = \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \varphi_t(t, x) t^k (1-t)^{L-k}. \quad (3.35)$$

Teniendo en cuenta la expresión de $P_{L, \varphi_t}(t, x)$ en (3.33),

$$|\varphi_t(t, x) - P_{L, \varphi_t}(t, x)| = \left| \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} (\varphi_t(t, x) - \varphi_t(\frac{k}{L}, x)) t^k (1-t)^{L-k} \right| \quad (3.36)$$

$$= \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \left| \varphi_t(t, x) - \varphi_t(\frac{k}{L}, x) \right| t^k (1-t)^{L-k}. \quad (3.37)$$

Como φ_t es continua en $[0, 1] \times [0, l]$ es uniformemente continua en $[0, 1] \times [0, l]$. Por tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1, \delta_2 > 0 \quad / |t_1 - t_2| < \delta_1, |x_1 - x_2| < \delta_2, \quad |\varphi_t(t_1, x_1) - \varphi_t(t_2, x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.38)$$

En particular, si $x_1 = x_2$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que si $|t_1 - t_2| < \delta_1$ se cumple

$$|\varphi_t(t_1, x) - \varphi_t(t_2, x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [0, l].$$

Llamando

$$S_1 = \{k \mid |t - \frac{k}{L}| < \delta_1\}$$

y

$$S_2 = \{k \mid |t - \frac{k}{L}| \geq \delta_1\}$$

la expresión (3.37) se escribe de la forma

$$\sum_{k \in S_1} \binom{L}{k} \left| \varphi_t(t, x) - \varphi_t(\frac{k}{L}, x) \right| t^k (1-t)^{L-k} \quad (3.39)$$

$$+ \sum_{k \in S_2} \binom{L}{k} \left| \varphi_t(t, x) - \varphi_t(\frac{k}{L}, x) \right| t^k (1-t)^{L-k}. \quad (3.40)$$

Teniendo en cuenta la continuidad uniforme de φ_t y la Propiedad 1 (3.29), se tiene la siguiente desigualdad

$$\sum_{k \in S_1} \binom{L}{k} \left| \varphi_t(t, x) - \varphi_t\left(\frac{k}{L}, x\right) \right| t^k (1-t)^{L-k} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.41)$$

Por otro lado, si $k \in S_2$ entonces

$$\left| t - \frac{k}{L} \right| \geq \delta_1$$

y

$$\left(t - \frac{k}{L} \right)^2 \geq \delta_1^2.$$

Así,

$$\frac{\left(t - \frac{k}{L} \right)^2}{\delta_1^2} \geq 1.$$

Por otro lado, si llamamos

$$M = \text{Max}\{\varphi_t(t, x), \quad t \in [0, 1], \quad x \in [0, l]\}$$

se tiene,

$$\left| \varphi_t(t, x) - \varphi_t\left(\frac{k}{L}, x\right) \right| \leq 2M \leq 2M \left(\frac{t - \frac{k}{L}}{\delta_1} \right)^2. \quad (3.42)$$

Así,

$$\sum_{k \in S_2} \binom{L}{k} \left| \varphi_t(t, x) - \varphi_t\left(\frac{k}{L}, x\right) \right| t^k (1-t)^{L-k} \quad (3.43)$$

$$\leq \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} 2M \left(\frac{t - \frac{k}{L}}{\delta_1} \right)^2 t^k (1-t)^{L-k} \quad (3.44)$$

$$\leq \frac{2M}{\delta_1^2} \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \frac{(Lt - k)^2}{L^2} t^k (1-t)^{L-k} \quad (3.45)$$

$$= \frac{2M}{\delta_1^2} \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \left(\frac{L^2 t^2}{L^2} - \frac{2Lkt}{L^2} + \frac{k^2}{L^2} \right) t^k (1-t)^{L-k} \quad (3.46)$$

$$= \frac{2M}{\delta_1^2} \left[t^2 - 2t \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \frac{k}{L} t^k (1-t)^{L-k} + \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \frac{k^2}{L^2} t^k (1-t)^{L-k} \right] \quad (3.47)$$

y usando las propiedades 3 y 4 (3.31) - (3.32) la expresión anterior queda como sigue

$$= \frac{2M}{\delta_1^2} \left[t^2 - 2t^2 + \left(1 - \frac{1}{L}\right)t^2 + \frac{t}{L} \right] \quad (3.48)$$

$$= \frac{2M}{\delta_1^2} \left[t^2 \left(1 - \frac{1}{L} - 1\right) + \frac{t}{L} \right] \quad (3.49)$$

$$= \frac{2M}{\delta_1^2} \frac{1}{L} t(1-t). \quad (3.50)$$

Teniendo en cuenta que $t \in [0, 1]$, el máximo de la función $f(t) = t(1 - t)$ se alcanza en $t = \frac{1}{2}$ y vale $\frac{1}{4}$. Por tanto (3.50) se puede acotar por

$$\frac{2M}{\delta_1^2} \frac{1}{4L} = \frac{M}{2L\delta_1^2}. \quad (3.51)$$

Y $\frac{M}{2L\delta_1^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ si $L > \frac{M}{\varepsilon\delta_1^2}$.

Si $\varphi_t(\cdot, x)$ es una función continua en $[0, \tau]$ para cada $x \in [0, l]$ entonces el polinomio de Bernstein de grado L , en la variable t , asociado a la función φ_t es el siguiente,

$$P_{L,\varphi_t}(t, x) = \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \varphi_t\left(\tau \frac{k}{L}, x\right) \left(\frac{t}{\tau}\right)^k \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{L-k}.$$

3.6. Cálculo del error cometido al truncar la solución obtenida aproximando φ_t por un polinomio en la variable t

Como acabamos de ver, los coeficientes de los polinomios que aproximan a $\varphi_t(t, x)$ dependen explícitamente de la función $\varphi_t(t, x)$,

$$P_{L,\varphi_t}(t, x) = \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \varphi_t\left(\tau \frac{k}{L}, x\right) \left(\frac{t}{\tau}\right)^k \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{L-k} \quad (3.52)$$

y, como por hipótesis $\varphi_t(t, x)$ es dos veces continuamente diferenciable en la variable x , existe B' cumpliendo

$$|B'_n(t)| \leq \frac{B'}{n^2}.$$

Llamando $P_{L,\varphi_t}(t, x)$ al polinomio que aproxima a $\varphi_t(t, x)$ y $f_k(x)$ a los coeficientes del polinomio que aproxima a $\varphi_t(t, x)$, es decir,

$$P_{L,\varphi_t}(t, x) = \sum_{k=0}^L t^k f_k(x)$$

e igualando (3.52) a la expresión anterior, se ve que $f_k(x)$ es combinación lineal de φ_t y, por tanto, llamando $g_{n,k}$ a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $f_k(x)$, es decir,

$$f_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{n,k} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

donde

$$g_{n,k} = \frac{2}{l} \int_0^l f_k(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx,$$

existe g cumpliendo que

$$|g_{n,k}| \leq \frac{g}{n^2}.$$

En el Teorema 3.8 hemos probado que si $\varphi_t(t, x)$ es una función polinómica en la variable t entonces \sum_3 dada en (3.28) se escribe en forma de una función dada más una serie que depende de la función Gamma, que es la que vamos a acotar en el próximo teorema, en el que probaremos que el resto de la serie dada va a decaer de forma exponencial con el número de términos, de forma similar que en el Teorema 2.19 se obtenía para \sum_1 y \sum_2 en 2.47.

Teorema 3.12. Sean $d = \frac{\pi a}{l}$ y g un valor cumpliendo

$$|g_{n,k}| \leq \frac{g}{n^2} \quad n \geq 1, \quad 0 \leq k \leq L \quad 0 \leq j \leq k + 1$$

Entonces, para $(t, x) \in [m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$, la expresión

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{g_{n,k} \Gamma(k+m-j+1, n^2 d^2 (t-m\tau))}{(n^2 d^2)^{k+1-j}}$$

se puede acotar por

$$\frac{g \Gamma(k+m-j+1, (N+1)^2 d^2 (t-m\tau))}{(2(k-j)+3) d^{2(k+1-j)} N^{2(k-j)+3}}. \quad (3.53)$$

Demostración.

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) g_{n,k} \frac{\Gamma(k+m-j+1, n^2 d^2 (t-m\tau))}{(n^2 d^2)^{k+1-j}} \right| \quad (3.54)$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |g_{n,k}| \frac{\Gamma(k+m-j+1, n^2 d^2 (t-m\tau))}{(n^2 d^2)^{k+1-j}}. \quad (3.55)$$

Teniendo en cuenta que

$$|g_{n,k}| \leq \frac{g}{n^2},$$

la expresión (3.55) se puede acotar por

$$g \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+m-j+1, n^2 d^2 (t-m\tau))}{n^2 (n^2 d^2)^{k+1-j}}. \quad (3.56)$$

Por ser

$$\{\Gamma(k + m - j + 1, n^2 d^2(t - m\tau))\}$$

una sucesión decreciente respecto de n para cada t y aplicando el Lema 2.14, se tiene

$$\begin{aligned} & g \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k + m - j + 1, n^2 d^2(t - m\tau))}{n^2 (n^2 d^2)^{k+1-j}} \\ & \leq g \Gamma(k + m - j + 1, (N + 1)^2 d^2(t - m\tau)) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{d^{2(k+1-j)} n^{2(k-j)+4}} \\ & \leq \frac{g \Gamma(k + m - j + 1, (N + 1)^2 d^2(t - m\tau))}{d^{2(k+1-j)}} \int_N^{\infty} \frac{du}{u^{2(k-j)+4}} \\ & = \frac{g \Gamma(k + m - j + 1, (N + 1)^2 d^2(t - m\tau))}{(2(k - j) + 3) d^{2(k+1-j)} N^{2(k-j)+3}} \end{aligned}$$

En los próximos teoremas estimaremos el error cometido al truncar la serie aproximada $u_P(t, x)$ en N términos. Recordemos que, ver (3.28),

$$\sum_3^l = (-1)^{m-1} c^{2m} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4).$$

Si truncamos v_4 en N términos se tiene,

$$v_4^N = \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t - m\tau)^j}{(k + 1) \Gamma(m)} \binom{k + 1}{j} \sum_{n=1}^N \sin(\lambda_n x) \frac{g_{n,k} \Gamma(k + m - j + 1, n^2 d^2(t - m\tau))}{(n^2 d^2)^{k-j+1}}.$$

Al resto obtenido obtenido al considerar los N primeros términos lo llamaremos R_3^N ,

$$R_3^N = c^{2m} \left| \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^{k+j+1} (t - m\tau)^j}{(k + 1) \Gamma(m)} \binom{k + 1}{j} H_n \right|,$$

donde

$$H_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \frac{g_{n,k} \Gamma(k + m - j + 1, n^2 d^2(t - m\tau))}{(n^2 d^2)^{k-j+1}}.$$

En el siguiente teorema daremos la acotación del resto correspondiente a R_3^N .

Teorema 3.13. *Sea g un valor cumpliendo*

$$|g_{n,k}| \leq \frac{g}{n^2} \quad n \geq 1, 0 \leq k \leq L.$$

Entonces, para $(t, x) \in [m\tau, (m + 1)\tau] \times [0, l]$ con $m \geq 1$ se tiene

$$R_3^N \leq \sum_{k=0}^L \frac{g c^{2m} 2^{k+1}}{\Gamma(m) (k + 1) d^{2(k+1)}} \frac{\Gamma(k + m + 1, (N + 1)^2 d^2(t - m\tau))}{N^{2k+3}}.$$

Demostración. Teniendo en cuenta el Teorema 3.12, se tiene la siguiente acotación para R_3^N ,

$$\begin{aligned}
R_3^N &\leq \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{c^{2m}(t-m\tau)^j}{(k+1)\Gamma(m)} \binom{k+1}{j} \frac{g\Gamma(k+m-j+1, (N+1)^2d^2(t-m\tau))}{(2(k-j)+3)d^{2(k+1-j)}N^{2(k-j)+3}} \\
&\leq \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{gc^{2m}(t-m\tau)^j\Gamma(k+m-j+1, (N+1)^2d^2(t-m\tau))}{(k+1)\Gamma(m)d^{-2j}N^{-2j}d^{2(k+1)}N^{2k+3}} \binom{k+1}{j} \\
&= \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{gc^{2m}(N^2d^2(t-m\tau))^j\Gamma(k+m-j+1, (N+1)^2d^2(t-m\tau))}{\Gamma(m)(k+1)d^{2(k+1)}N^{2k+3}} \binom{k+1}{j}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&(N^2d^2(t-m\tau))^j\Gamma(k+m-j+1, (N+1)^2d^2(t-m\tau)) \\
&= (N^2d^2(t-m\tau))^j \int_{(N+1)^2d^2(t-m\tau)}^{\infty} e^{-s}s^{k+m-j}ds \\
&= \int_{(N+1)^2d^2(t-m\tau)}^{\infty} e^{-s}s^{k+m} \left(\frac{N^2d^2(t-m\tau)}{s}\right)^j ds \\
&\leq \int_{(N+1)^2d^2(t-m\tau)}^{\infty} e^{-s}s^{k+m}ds = \Gamma(k+m+1, (N+1)^2d^2(t-m\tau)).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, R_3^N se puede acotar por

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^{k+1} \frac{gc^{2m}\Gamma(k+m+1, (N+1)^2d^2(t-m\tau))}{\Gamma(m)(k+1)d^{2(k+1)}N^{2k+3}} \binom{k+1}{j} \\
&= \frac{gc^{2m}2^{k+1}}{\Gamma(m)(k+1)d^{2(k+1)}} \frac{\Gamma(k+m+1, (N+1)^2d^2(t-m\tau))}{N^{2k+3}},
\end{aligned}$$

con lo que queda probado el teorema.

Resumiendo todo lo anterior, y teniendo en cuenta las expresiones de las acotaciones de

$$R_1^N = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{(-c^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} (B_n(\tau) + c^2B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \Gamma(k, n^2d^2(t-k\tau)) \right|$$

y

$$R_2^N = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{-(-c^2)^k}{\Gamma(k)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{\tau} B'_n(s) \Gamma(k, n^2d^2(t-k\tau-s)) ds \right|,$$

dadas en (2.97) y (2.98), el error cometido cuando u_P dada en (3.28) se aproxima con sumas finitas se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.14. *Sea u_P la expresión dada en (3.28). Denotemos por $u_{P,N}$ la aproximación a u_P obtenida cuando \sum_1 y \sum_2 en (2.47), y v_4 en (3.26) son sustituidas por las correspondientes sumas parciales con los N primeros términos. Entonces para $(t, x) \in [m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$ con $m \geq 1$ se tiene*

$$|u_{P,N} - u_P| \leq \sum_{k=1}^m \frac{B_1 c^{2k-2} \Gamma(k, (N+1)^2 d^2 (t - k\tau))}{\Gamma(k) N} \quad (3.57)$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B'_1 \tau c^{2k} \Gamma(k, (N+1)^2 d^2 (t - (k+1)\tau))}{\Gamma(k) N} \quad (3.58)$$

$$+ \sum_{k=0}^L \frac{g c^{2m} 2^{k+1} \Gamma(k+m+1, (N+1)^2 d^2 (t - m\tau))}{\Gamma(m)(k+1)d^{2(k+1)} N^{2k+3}}. \quad (3.59)$$

En definitiva, hemos probado que si $B'_n(t)$ se aproxima por un polinomio en la variable t , es posible obtener de forma exacta algunas de las partes que constituyen la solución, pudiendo reordenarse el resto de modo que el error cometido al truncar la serie infinita decaiga de forma exponencial con el número de términos según se ha mostrado en el Teorema 3.14. A continuación vamos a estimar el error cometido en la solución al tomar la solución aproximada u_P dada en (3.28) en lugar de u en (2.47), lo que nos permitirá acotar el error total de aproximación.

3.7. Acotación del error total de aproximación

Proposición 3.15. *Sean u la solución exacta del problema (2.1)-(2.3) dada en (2.47) y u_P la aproximación obtenida cuando \sum_3 en (2.47) los coeficientes de Fourier $B'_n(t)$ son sustituidos por aquellos que proceden de la aproximación polinómica a φ_t dada en el Lema 3.1. Entonces si*

$$|\varphi_t(t, x) - P_{L, \varphi_t}(t, x)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, \tau] \quad \forall x \in [0, l]$$

se tiene,

$$|u - u_P| \leq \frac{4c^{2m} \sqrt{m\tau}}{d} \varepsilon. \quad (3.60)$$

Demostración. Aplicando el Teorema 3.11 a $\varphi_t(t, x)$, existe un polinomio al que hemos llamado $P_{L, \varphi_t}(t, x)$ cumpliendo lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |\varphi_t(t, x) - P_{L, \varphi_t}(t, x)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, \tau] \quad \forall x \in [0, l].$$

$$\begin{aligned}
u - u_P &= (-1)^{m-1} c^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} B'_n(s) Q(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) ds \\
&- (-1)^{m-1} c^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \int_0^{t-m\tau} P_{n,L}(s) Q(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) ds
\end{aligned}$$

Por tanto

$$|u - u_P| \leq c^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} |B'_n(s) - P_{n,L}(s)| Q(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) ds \quad (3.61)$$

y teniendo en cuenta que

$$B'_n(s) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_s(s, x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

y

$$P_{n,L}(s) = \frac{2}{l} \int_0^l P_{L,\varphi_t}(s, x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

se tiene que la expresión (3.61) se queda como sigue

$$\begin{aligned}
&|u - u_P| \\
&\leq \frac{2c^{2m}}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} Q(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) \int_0^l |\varphi_s(s, x) - P_{L,\varphi_t}(s, x)| dx ds \\
&\leq \frac{2c^{2m}}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} Q(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) l \varepsilon ds \\
&= 2c^{2m} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} Q(m, n^2 d^2(t-m\tau-s)) ds
\end{aligned}$$

y al igual que hicimos en el Capítulo 1, (ver 2.56) se tiene

$$|u - u_P| \leq 4c^{2m} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)d} \sqrt{t-m\tau} \varepsilon \quad (3.62)$$

o lo que es lo mismo

$$|u - u_P| \leq \frac{4c^{2m} \Gamma(m + \frac{1}{2}) \sqrt{\tau}}{\Gamma(m)d} \varepsilon \quad (3.63)$$

y como

$$\frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \leq \sqrt{m}$$

entonces

$$|u - u_P| \leq \frac{4c^{2m} \sqrt{m\tau}}{d} \varepsilon. \quad (3.64)$$

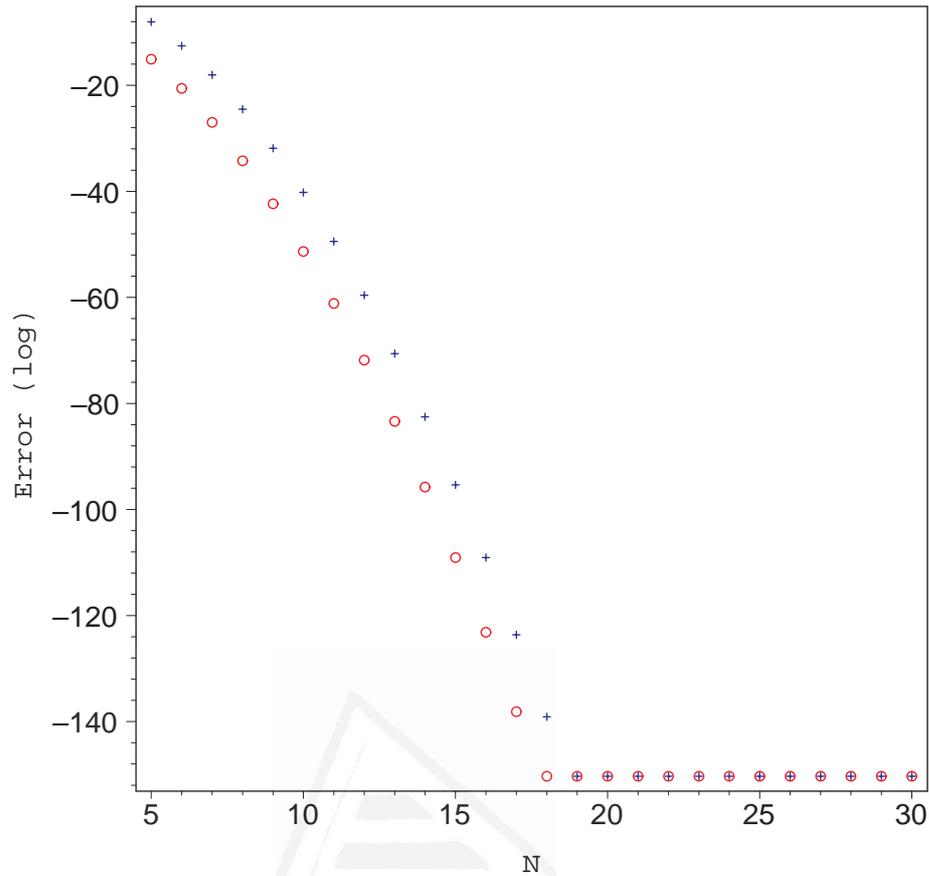


Figura 3.1: Cotas de error (logaritmos decimales) en función de N para la solución numérica del problema (2.1,2.2-2.3) calculada utilizando la serie truncada $u_{P,N}$ dada en el Teorema 3.14, con $l = 1$, $\tau = 1$, $a = 1$, $b = 1$ y con función inicial $\varphi(t, x) = \sin(t)x(1 - x)$, para $(t, x) \in [m\tau + \delta, (m + 1)\tau] \times [0, l]$, donde $\delta = 0,1$, $m = 2$ (círculos) y $m = 10$ (cruces).

En consecuencia, combinando los resultados proporcionados por el Teorema 3.14 y la Proposición 3.15, se obtiene inmediatamente una cota para el error total de aproximación. Un ejemplo de estas cotas de error, en función del número de términos de la serie truncada, se muestra en la Figura 3.1, donde puede observarse claramente la mayor precisión de estas acotaciones en relación con las proporcionadas en el capítulo anterior (compárese con la Figura 2.2). En esta figura se utilizó un polinomio de aproximación común para todos los valores de N , con un valor de ε en la Proposición 3.15 escogido para obtener una cota de 10^{-150} en (3.64). No obstante, dado cualquier $\delta > 0$ y cualquier error prefijado, es posible obtener un polinomio de aproximación adecuado y un valor de N de modo que la precisión de la solución aproximada $u_{P,N}$ cumpla las condiciones de error *a priori* uniformemente para $(t, x) \in [m\tau + \delta, (m + 1)\tau] \times [0, l]$.

Capítulo 4

Soluciones de sistemas acoplados de ecuaciones generalizadas de difusión con retardo

En este capítulo abordamos la extensión de los resultados obtenidos en el Capítulo 2 al caso de sistemas acoplados de ecuaciones generalizadas de difusión con retardo, es decir, consideraremos sistemas de la forma

$$u_t(t, x) = Au_{xx}(t, x) + Bu_{xx}(t - \tau, x), \quad t > \tau, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.1)$$

$$u(t, x) = \varphi(t, x), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.2)$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.3)$$

donde $u(t, x)$ y $\varphi(t, x)$ son vectores de \mathbb{C}^M y los coeficientes A y B son matrices de $\mathbb{C}^{M \times M}$. Más adelante se indicará las condiciones que exigiremos a estas matrices, que en general no serán simultáneamente diagonalizables.

La organización de este capítulo es la siguiente. En la próxima sección aplicaremos el método de separación de variables al problema (4.1)-(4.3), lo que nos permitirá plantear la obtención de una solución exacta en forma de serie infinita, que será obtenida en la Sección 3. Previamente, en la Sección 2, consideraremos la obtención de soluciones constructivas explícitas de problemas de valor inicial, matriciales y vectoriales, para ecuaciones ordinarias con retardo. En las restantes secciones probaremos la convergencia y regularidad de la solución propuesta y obtendremos acotaciones para el error

cometido al considerar aproximaciones numéricas mediante el truncamiento de la serie solución.

4.1. Aplicación del método de separación de variables

Buscaremos soluciones de la ecuación (4.1) utilizando el método de separación de variables en la forma

$$u(t, x) = T(t)X(x), \quad T(t) \in \mathbb{C}^M, \quad X(x) \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Imponiendo que la expresión (4.4) satisfaga la ecuación (4.1), se tiene

$$T'(t)X(x) = AT(t)X''(x) + BT(t - \tau)X''(x), \quad (4.5)$$

con lo que obtenemos,

$$T'(t) = (AT(t) + BT(t - \tau)) \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (4.6)$$

Como $T'(t)$ no depende de x ,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \quad (4.7)$$

esto da lugar a dos problemas, uno de ellos es el problema escalar

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.8)$$

y otro es el problema vectorial

$$T'(t) + \lambda^2(AT(t) + BT(t - \tau)) = 0, \quad t > \tau. \quad (4.9)$$

La solución general de la ecuación diferencial (4.8) es

$$X(x) = a \sin(\lambda x) + b \cos(\lambda x)$$

e imponiendo las condiciones de contorno $X(0) = X(l) = 0$ se llega a que $b = 0$ y $a \sin(\lambda x) = 0$, con lo que

$$\lambda = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

De esta forma, las funciones características del problema (4.8), con las condiciones de contorno dadas, son

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (4.10)$$

La función correspondiente $T_n(t)$ es la solución de la ecuación

$$T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2}[AT_n(t) + BT_n(t - \tau)] = 0, \quad (4.11)$$

donde $T_n(t) = B_n(t)$ para $0 \leq t \leq \tau$ y $B_n(t)$ son los coeficientes de Fourier con respecto a $\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ en el desarrollo de la función inicial $\varphi(t, x)$, es decir,

$$B_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(t, x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad (4.12)$$

de modo que

$$\varphi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.13)$$

Una vez resuelto este último problema, propondremos como solución de (4.1)-(4.3) la serie formal

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

4.2. Solución de la ecuación diferencial vectorial con retardo

El problema que hemos de resolver en (4.11) es un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial vectorial con retardo, cuya forma general es

$$F'(t) = AF(t) + BF(t - \tau), \quad t > \tau, \quad (4.14)$$

$$F(t) = f(t) = (f_1(t), \dots, f_M(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (4.15)$$

donde A y B son matrices de $\mathbb{C}^{M \times M}$ y $f_1(t), \dots, f_M(t)$ son funciones escalares de \mathbb{C} . Antes de abordar este problema, vamos a resolver el siguiente problema matricial asociado,

$$G'(t) = AG(t) + BG(t - \tau), \quad t > \tau, \quad (4.16)$$

$$G(t) = I, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (4.17)$$

donde A , B e I son matrices de $\mathbb{C}^{M \times M}$, siendo I la matriz identidad.

En el próximo lema se obtiene la solución del problema (4.16)-(4.17) en términos de ciertas expresiones matriciales que definiremos a continuación. Sean

$$Q(1, t) = \int_0^t e^{A(t-s)}(A + B)ds \quad (4.18)$$

y, para $k \geq 2$,

$$Q(k, t) = \int_0^t e^{A(t-s)}BQ(k-1, s)ds. \quad (4.19)$$

Nótese que $Q(k, t)$ se calcula de forma explícita,

$$Q(k, t) = \int_0^t e^{A(t-s_k)}Bds_k \int_0^{s_k} e^{A(s_k-s_{k-1})}Bds_{k-1} \dots \int_0^{s_2} e^{A(s_2-s_1)}(A + B)ds_1.$$

Si derivamos (4.18) y (4.19) con respecto a la variable t , aplicando el Lema (2.13), se tiene que

$$Q'(1, t) = AQ(1, t) + A + B \quad (4.20)$$

y

$$Q'(k, t) = AQ(k, t) + BQ(k-1, t) \quad (4.21)$$

para $k \geq 2$.

Podemos ahora enunciar el siguiente lema.

Lema 4.1. *La solución al problema matricial (4.16)-(4.17) en el intervalo*

$$[m\tau, (m+1)\tau], \quad m = 0, 1, \dots$$

viene dada por

$$G(t) = I, \quad m = 0, \quad (4.22)$$

$$G(t) = I + \sum_{k=1}^m Q(k, t - k\tau), \quad m \geq 1. \quad (4.23)$$

Demostración. Veamos en primer lugar que la solución propuesta es continua. Puesto que se trata de una suma de funciones continuas en cada intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$, sólo nos queda comprobar que las expresiones dadas para dos intervalos consecutivos toman igual valor en el extremo común. En efecto, para $t = \tau$ se tiene que $G(\tau) = I$, por (4.22), pero además por (4.23) se tiene que

$$G(t) = I + Q(1, t - \tau), \quad \tau \leq t \leq 2\tau, \quad (4.24)$$

con lo que sustituyendo $t = \tau$ en la expresión (4.24) se obtiene

$$G(\tau) = I + Q(1, 0) = I,$$

y la solución es continua en $t = \tau$. Veamos que la solución es continua en $t = m\tau$ para cualquier $m > 1$. Sea $G^{(m-1)}(t)$ la solución en el intervalo $[(m-1)\tau, m\tau]$,

$$G^{(m-1)}(t) = I + \sum_{k=1}^{m-1} Q(k, t - k\tau),$$

y $G^{(m)}(t)$ la solución en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$,

$$G^{(m)}(t) = I + \sum_{k=1}^m Q(k, t - k\tau).$$

Vamos a comprobar que $G^{(m-1)}(m\tau) = G^{(m)}(m\tau)$. Se tiene,

$$G^{(m)}(m\tau) = I + \sum_{k=1}^m Q(k, m\tau - k\tau) = I + \sum_{k=1}^{m-1} Q(k, m\tau - k\tau) + Q(m, 0) \quad (4.25)$$

y, teniendo en cuenta que $Q(m, 0) = 0$, la expresión de (4.25) es igual a

$$I + \sum_{k=1}^{m-1} Q(k, m\tau - k\tau) = G^{(m-1)}(m\tau).$$

Por tanto $G(t)$ es una función continua.

Veamos que (4.23) verifica la ecuación (4.16). Se tiene,

$$G'(t) = \left(I + \sum_{k=1}^m Q(k, t - k\tau) \right)' \quad (4.26)$$

$$= Q'(1, t - \tau) + \sum_{k=2}^m Q'(k, t - k\tau) \quad (4.27)$$

y, teniendo en cuenta (4.20) y (4.21), la expresión anterior es igual a

$$AQ(1, t - \tau) + A + B + \sum_{k=2}^m (AQ(k, t - k\tau) + BQ(k-1, t - k\tau)) \quad (4.28)$$

$$= A + AQ(1, t - \tau) + \sum_{k=2}^m AQ(k, t - k\tau) + B + \sum_{k=2}^m BQ(k-1, t - k\tau), \quad (4.29)$$

de donde, sacando factor común A y B y renombrando el segundo sumatorio, se obtiene

$$A \left[I + \sum_{k=1}^m AQ(k, t - k\tau) \right] + B \left[I + \sum_{k=1}^{m-1} Q(k, t - (k+1)\tau) \right] \quad (4.30)$$

$$= AG(t) + BG(t - \tau). \quad (4.31)$$

Ahora buscamos la solución del problema de valores iniciales (4.14)-(4.15) considerando la siguiente representación integral.

Lema 4.2. Sean $A, B, I + C$, con $C = A^{-1}B$, matrices inversibles. Sea $G(t)$ la solución del problema matricial (4.16)-(4.17) dada en el Lema 4.1. Entonces, la solución del problema vectorial (4.14)-(4.15), para una función inicial $f(t) = (f_1(t), \dots, f_M(t))$ diferenciable, viene dada por

$$\begin{aligned} F(t) &= G(t) ((I + C)^{-1}Cf(0) + (I + C)^{-1}f(\tau)) \\ &+ \int_0^\tau G(t-s)(I + C)^{-1}Cf'(s)ds. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Demostración. Buscamos soluciones de la ecuación (4.14) de la forma

$$F(t) = G(t)K + \int_0^\tau G(t-s)y'(s)ds \quad (4.33)$$

donde $G(t)$ es la solución de la ecuación matricial del Lema 4.1 y que viene dada por la expresión (4.23), K es una constante a determinar e $y(s)$ una función que calcularemos más adelante, para que la expresión (4.33) sea solución del problema (4.14)-(4.15). Veamos que la expresión (4.33) verifica la ecuación (4.14) para $t \in [m\tau, (m+1)\tau]$.

$$F'(t) = G'(t)K + \int_0^\tau G'(t-s)y'(s)ds \quad (4.34)$$

y teniendo en cuenta que G verifica la ecuación matricial (4.16), (4.34) se escribe como sigue

$$(AG(t) + BG(t-\tau))K + \int_0^\tau (AG(t-s) + BG(t-\tau-s))y'(s)ds \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} &= AG(t)K + BG(t-\tau)K + \int_0^\tau AG(t-s)y'(s)ds \\ &+ \int_0^\tau BG(t-\tau-s)y'(s)ds \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$= AF(t) + BF(t-\tau) \quad (4.37)$$

A continuación vamos a calcular la constante K e $y(t)$ de forma que F coincida con la función siguiente para $t \in [\tau, 2\tau]$,

$$\begin{aligned} F(t) &= e^{\int_\tau^t A ds} [f(\tau) + \int_\tau^t e^{-\int_\tau^s A du} Bf(s-\tau)ds] \\ &= e^{A(t-\tau)} f(\tau) + e^{A(t-\tau)} \int_\tau^t e^{-(s-\tau)A} Bf(s-\tau)ds. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable en la integral anterior se tiene que la expresión anterior se quedaría como sigue

$$F(t) = e^{A(t-\tau)} f(\tau) + e^{A(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-As} B f(s) ds. \quad (4.38)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que en el intervalo $[0, \tau]$

$$G(t) = I$$

y en el intervalo $[\tau, 2\tau]$

$$\begin{aligned} G(t) &= I + Q(1, t - \tau) \\ &= I + \int_0^{t-\tau} e^{A(t-\tau-s)} (A + B) ds \\ &= e^{A(t-\tau)} (I + A^{-1}B) - A^{-1}B. \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión anterior y (4.38) en (4.33) y teniendo en cuenta que A es una matriz inversible se tiene

$$\begin{aligned} &e^{A(t-\tau)} f(\tau) + e^{A(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-As} B f(s) ds \\ &= (e^{A(t-\tau)} (I + A^{-1}B) - A^{-1}B) K \\ &+ \int_0^{t-\tau} (e^{A(t-s-\tau)} (I + A^{-1}B) - A^{-1}B) y'(s) + \int_{t-\tau}^{\tau} I y'(s) ds. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Aplicando integración por partes se tiene que

$$\begin{aligned} &\int_0^{t-\tau} e^{A(t-s-\tau)} (I + A^{-1}B) y'(s) \\ &= [e^{A(t-s-\tau)} (I + A^{-1}B) y(s)]_0^{t-\tau} + \int_0^{t-\tau} e^{A(t-s-\tau)} A (I + A^{-1}B) y(s) ds \\ &= (I + A^{-1}B) y(t - \tau) - e^{A(t-\tau)} (I + A^{-1}B) y(0) \\ &+ e^{A(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-As} A (I + A^{-1}B) y(s) ds. \end{aligned}$$

Así (4.39) se queda como sigue,

$$\begin{aligned} &e^{A(t-\tau)} f(\tau) + e^{A(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-As} B f(s) ds \\ &= e^{A(t-\tau)} (I + A^{-1}B) K - A^{-1}BK + (I + A^{-1}B) y(t - \tau) - e^{A(t-\tau)} (I + A^{-1}B) y(0) \\ &+ e^{A(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-As} A (I + A^{-1}B) y(s) ds - A^{-1}B y(t - \tau) + A^{-1}B y(0) + y(\tau) - y(t - \tau). \end{aligned}$$

Simplificando lo anterior se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}
& e^{A(t-\tau)} f(\tau) + e^{A(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-As} B f(s) ds \\
= & e^{A(t-\tau)} (I + A^{-1} B) K - A^{-1} B K + A^{-1} B y(0) + y(\tau) \\
- & e^{A(t-\tau)} (I + A^{-1} B) y(0) + e^{A(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-As} A (I + A^{-1} B) y(s) ds. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Si tomamos

$$e^{A(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-As} B f(s) ds = e^{A(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{-As} A (I + A^{-1} B) y(s) ds \quad (4.41)$$

se deduce que

$$B f(s) = A (I + A^{-1} B) y(s)$$

o lo que es lo mismo, como B es una matriz inversible,

$$f(s) = B^{-1} A (I + A^{-1} B) y(s).$$

Llamando $C = A^{-1} B$ y teniendo en cuenta que A y B son matrices inversibles se tiene,

$$f(s) = (I + C^{-1}) y(s).$$

Despejando $y(s)$ se obtiene

$$y(s) = (I + C^{-1})^{-1} f(s)$$

o lo que es lo mismo

$$y(s) = (I + C)^{-1} C f(s).$$

Así, teniendo en cuenta (4.41), la expresión (4.40) se quedaría como sigue,

$$e^{A(t-\tau)} f(\tau) = (e^{A(t-\tau)} (I + C) K - C K + (C - e^{A(t-\tau)} (I + C)) y(0) + y(\tau)$$

y teniendo en cuenta la definición de $y(s)$, la expresión anterior se queda como sigue

$$e^{A(t-\tau)} f(\tau) = (e^{A(t-\tau)} (I + C) - C) K + (C - e^{A(t-\tau)} (I + C)) (I + C)^{-1} C f(0) + (I + C)^{-1} C f(\tau)$$

o lo que es lo mismo

$$(e^{A(t-\tau)} (I + C) - C) K = (e^{A(t-\tau)} - (I + C)^{-1} C) f(\tau) - (C - e^{A(t-\tau)} (I + C)) (I + C)^{-1} C f(0).$$

Despejando K y teniendo en cuenta que $(I + C)^{-1} C (I + C) = C$ se obtiene lo siguiente

$$K = (I + C)^{-1} f(\tau) + (I + C)^{-1} C f(0).$$

Finalmente sustituyendo el valor de K e $y(t)$ en (4.33) se tiene

$$\begin{aligned} F(t) &= G(t) \left((I + C)^{-1} C f(0) + (I + C)^{-1} f(\tau) \right) \\ &+ \int_0^\tau G(t - s) (I + C)^{-1} C f'(s) ds. \end{aligned} \quad (4.42)$$

El siguiente teorema nos da la solución definitiva de la ecuación (4.14) para $t \in [m\tau, (m + 1)\tau]$, teniendo en cuenta la expresión de $G(t)$ en el Lema 4.1.

Teorema 4.3. *La solución del problema (4.14)-(4.15), para una función inicial diferenciable $f(t) = (f_1(t), \dots, f_M(t))$, en el intervalo $[m\tau, (m + 1)\tau]$ viene dada por*

$$\begin{aligned} F(t) &= \left(I + \sum_{k=1}^m Q(k, t - k\tau) \right) \left((I + C)^{-1} C f(0) + (I + C)^{-1} f(\tau) \right) \\ &+ \int_0^\tau \left(I + \sum_{k=1}^{m-1} Q(k, t - s - k\tau) \right) (I + C)^{-1} C f'(s) ds \\ &+ \int_0^{t-m\tau} Q(m, t - s - m\tau) (I + C)^{-1} C f'(s) ds. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Demostración. Vamos a sustituir $G(t)$ en la expresión (4.32) del lema anterior. Teniendo en cuenta que $t \in [m\tau, (m + 1)\tau]$, para $m \geq 1$, si

$$0 \leq s \leq t - m\tau$$

entonces

$$m\tau \leq t - s \leq t \leq (m + 1)\tau$$

y $G(t - s)$ es la solución $G(t)$ en el intervalo $[m\tau, (m + 1)\tau]$ cambiando t por $t - s$. Por otro lado, si

$$t - m\tau \leq s \leq \tau$$

entonces

$$t - \tau \leq t - s \leq m\tau$$

y $G(t - s)$ es la solución $G(t)$ en el intervalo $[(m - 1)\tau, m\tau]$, cambiando t por $t - s$. De

esta forma,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau G(t-s)(I+C)^{-1}Cf'(s)ds \\
&= \int_0^{t-m\tau} \left(I + \sum_{k=1}^m Q(k, t-s-k\tau) \right) (I+C)^{-1}Cf'(s)ds \\
&+ \int_{t-m\tau}^\tau \left(I + \sum_{k=1}^{m-1} Q(k, t-s-k\tau) \right) (I+C)^{-1}Cf'(s)ds \\
&= \int_0^\tau \left(I + \sum_{k=1}^{m-1} Q(k, t-s-k\tau) \right) (I+C)^{-1}Cf'(s)ds \\
&+ \int_0^{t-m\tau} Q(m, t-s-m\tau)(I+C)^{-1}Cf'(s)ds.
\end{aligned}$$

Así, la solución del problema (4.14)-(4.15) quedaría como sigue,

$$\begin{aligned}
F(t) &= \left(I + \sum_{k=1}^m Q(k, t-k\tau) \right) ((I+C)^{-1}Cf(0) + (I+C)^{-1}f(\tau)) \\
&+ \int_0^\tau \left(I + \sum_{k=1}^{m-1} Q(k, t-s-k\tau) \right) (I+C)^{-1}Cf'(s)ds \\
&+ \int_0^{t-m\tau} Q(m, t-s-m\tau)(I+C)^{-1}Cf'(s)ds. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

4.3. Solución exacta en forma de serie infinita

Ahora estamos en condiciones de abordar la solución del problema (4.1)-(4.3). Como se indicó anteriormente, usando el método de separación de variables proponemos la solución en forma de serie infinita

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{4.45}$$

donde $T_n(t)$ es la solución del problema de valores iniciales con retardo

$$T_n'(t) = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (AT_n(t) + BT_n(t-\tau)), \quad t > \tau, \tag{4.46}$$

$$T_n(t) = B_n(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{4.47}$$

y $B_n(t)$ son los coeficientes de Fourier de la función inicial φ ,

$$B_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(t, x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Teniendo en cuenta los resultados de la sección anterior, si llamamos

$$Q_n(1, t) = -\frac{n^2\pi^2}{l^2} \int_0^t e^{-A\frac{n^2\pi^2}{l^2}(t-s)}(A + B)ds \quad (4.48)$$

y

$$Q_n(k, t) = -\frac{n^2\pi^2}{l^2} \int_0^t e^{-A\frac{n^2\pi^2}{l^2}(t-s)}BQ_n(k-1, s)ds, \quad (4.49)$$

el Teorema 4.3 proporciona de forma inmediata la solución de (4.46)-(4.47),

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \left(I + \sum_{k=1}^m Q_n(k, t - k\tau) \right) \left((I + C)^{-1}CB_n(0) + (I + C)^{-1}B_n(\tau) \right) \\ &+ \int_0^\tau \left(I + \sum_{k=1}^{m-1} Q_n(k, t - s - k\tau) \right) (I + C)^{-1}CB'_n(s)ds \\ &+ \int_0^{t-m\tau} Q_n(m, t - s - m\tau)(I + C)^{-1}CB'_n(s)ds \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} T_n(t) &= (I + C)^{-1}CB_n(0) + \sum_{k=1}^m Q_n(k, t - k\tau)(I + C)^{-1}CB_n(0) \\ &+ (I + C)^{-1}B_n(\tau) + \sum_{k=1}^m Q_n(k, t - k\tau)(I + C)^{-1}B_n(\tau) \\ &+ (I + C)^{-1}C(B_n(\tau) - B_n(0)) + \int_0^\tau \sum_{k=1}^{m-1} Q_n(k, t - s - k\tau)(I + C)^{-1}CB'_n(s)ds \\ &+ \int_0^{t-m\tau} Q_n(m, t - s - m\tau)(I + C)^{-1}CB'_n(s)ds, \end{aligned}$$

y eliminando algunos términos

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \sum_{k=1}^m Q_n(k, t - k\tau)(I + C)^{-1}CB_n(0) + \sum_{k=1}^m Q_n(k, t - k\tau)(I + C)^{-1}B_n(\tau) \\ &+ \int_0^\tau \sum_{k=1}^{m-1} Q_n(k, t - s - k\tau)(I + C)^{-1}CB'_n(s)ds \\ &+ \int_0^{t-m\tau} Q_n(m, t - s - m\tau)(I + C)^{-1}CB'_n(s) + B_n(\tau). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Utilizando este resultado, el siguiente teorema nos da la solución definitiva a nuestro problema.

Teorema 4.4. *Con las condiciones adecuadas para el problema inicial que garantizan la continuidad y regularidad, la solución del problema (4.1)-(4.3) para $t \in [m\tau, (m+1)\tau]$ viene dada por*

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n(k, t - k\tau)(I + C)^{-1}CB_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n(k, t - k\tau)(I + C)^{-1}B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} Q_n(k, t - s - k\tau)(I + C)^{-1}CB'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} Q_n(m, t - s - m\tau)(I + C)^{-1}CB'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \\
&+ \varphi(\tau, x).
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Demostración. Teniendo en cuenta (4.45) y las expresiones (4.50), la solución del problema (4.1)-(4.3) sería la dada en el teorema.

4.4. Caso particular de igualdad de coeficientes

Proposición 4.5. *Si $A = B$, Para todo número natural $k \geq 1$ se tiene,*

$$Q(k, t) = 2 \left[(-1)^k I + (-1)^{k-1} e^{At} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-At)^i}{i!} \right]$$

donde I es la matriz identidad.

Demostración. Lo haremos por inducción. Para $k = 1$,

$$Q(1, t) = \int_0^t e^{A(t-s)} 2A ds = -2e^{At} [e^{-As}]_0^t = -2e^{At} [e^{-At} - I] = 2[-I + e^{At}].$$

Supuesta la fórmula cierta para k , veamos qué ocurre para $k + 1$.

$$\begin{aligned}
Q(k+1, t) &= \int_0^t e^{A(t-s)} A Q(k, s) ds \\
&= \int_0^t e^{A(t-s)} 2A \left[(-1)^k I + (-1)^{k-1} e^{As} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-As)^i}{i!} \right] ds \\
&= \int_0^t e^{A(t-s)} 2A (-1)^k ds + 2(-1)^k e^{At} \int_0^t -A \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-As)^i}{i!} ds \\
&= 2(-1)^k (-I + e^{At}) + 2(-1)^k e^{At} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-At)^{i+1}}{(i+1)!} \\
&= 2(-1)^{k+1} I + 2(-1)^k e^{At} + 2(-1)^k e^{At} \sum_{i=1}^k \frac{(-At)^i}{i!} \\
&= 2(-1)^{k+1} I + 2(-1)^k e^{At} \sum_{i=0}^k \frac{(-At)^i}{i!} \\
&= 2 \left[(-1)^{k+1} I + (-1)^k e^{At} \sum_{i=0}^k \frac{(-At)^i}{i!} \right].
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de $Q_n(k, t)$ véase (4.49), la expresión anterior se quedaría como sigue,

$$Q_n(k, t) = 2 \left[(-1)^k I + (-1)^{k-1} e^{-A\lambda_n^2 t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(A\lambda_n^2 t)^i}{i!} \right]$$

y por tanto la solución a nuestro problema se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 4.6. *Con las condiciones adecuadas para el problema inicial que garantizan la continuidad y regularidad, la solución del problema (4.1)-(4.3) con $A = B$ para $t \in [m\tau, (m+1)\tau]$ viene dada por*

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} e^{-A\lambda_n^2(t-k\tau)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(A\lambda_n^2(t-k\tau))^i}{i!} (B_n(0) + B_n(\tau)) \sin(\lambda_n x) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} e^{-A\lambda_n^2(t-s-k\tau)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(A\lambda_n^2(t-s-k\tau))^i}{i!} B_n'(s) \sin(\lambda_n x) ds \\
&+ (-1)^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} e^{-A\lambda_n^2(t-s-m\tau)} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(A\lambda_n^2(t-s-m\tau))^i}{i!} B_n'(s) \sin(\lambda_n x) ds \\
&+ (-1)^m \varphi(t-m\tau, x).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Demostración. Sustituyendo la expresión anterior, $Q_n(k, t)$, en el Teorema 4.4 y teniendo en cuenta que $(I + C)^{-1} = \frac{1}{2}I$ se tiene,

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left[(-1)^k I + (-1)^{k-1} e^{-A\lambda_n^2(t-k\tau)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(A\lambda_n^2(t-k\tau))^i}{i!} \right] B_n(0) \sin(\lambda_n x) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left[(-1)^k I + (-1)^{k-1} e^{-A\lambda_n^2(t-k\tau)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(A\lambda_n^2(t-k\tau))^i}{i!} \right] B_n(\tau) \sin(\lambda_n x) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k B'_n(s) \sin(\lambda_n x) ds \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} \left[(-1)^{k-1} e^{-A\lambda_n^2(t-s-k\tau)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(A\lambda_n^2(t-s-k\tau))^i}{i!} \right] B'_n(s) \sin(\lambda_n x) ds \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} (-1)^m B'_n(s) \sin(\lambda_n x) ds \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} \left[(-1)^{m-1} e^{-A\lambda_n^2(t-s-m\tau)} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(A\lambda_n^2(t-s-m\tau))^i}{i!} \right] B'_n(s) \sin(\lambda_n x) ds \\
&+ \varphi(\tau, x). \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Si separamos de la expresión anterior la parte constante que no depende de t se obtiene,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^k B_n(0) \sin(\lambda_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^k B_n(\tau) \sin(\lambda_n x) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k (B_n(\tau) - B_n(0)) \sin(\lambda_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m (B_n(t-m\tau) - B_n(0)) \sin(\lambda_n x) \\
&+ \varphi(\tau, x) \\
&= \sum_{k=1}^m (-1)^k \varphi(0, x) + \sum_{k=1}^m (-1)^k \varphi(\tau, x) + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \varphi(\tau, x) \\
&- \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \varphi(0, x) + (-1)^m \varphi(t-m\tau, x) - (-1)^m \varphi(0, x) + \varphi(\tau, x) \\
&= (-1)^m \varphi(t-m\tau, x).
\end{aligned}$$

Por tanto u tendría la forma siguiente,

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} e^{-A\lambda_n^2(t-k\tau)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(A\lambda_n^2(t-k\tau))^i}{i!} (B_n(0) + B_n(\tau)) \sin(\lambda_n x) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} e^{-A\lambda_n^2(t-s-k\tau)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(A\lambda_n^2(t-s-k\tau))^i}{i!} B_n'(s) \sin(\lambda_n x) ds \\
&+ (-1)^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} e^{-A\lambda_n^2(t-s-m\tau)} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(A\lambda_n^2(t-s-m\tau))^i}{i!} B_n'(s) \sin(\lambda_n x) ds \\
&+ (-1)^m \varphi(t-m\tau, x). \tag{4.54}
\end{aligned}$$

4.5. Lemas previos

En primer lugar indicaremos algunas definiciones y lemas que utilizaremos posteriormente.

Consideraremos la 2-norma para una matriz A ([15, p.56]) que denotaremos por $\|\cdot\|$,

$$\|A\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2}.$$

Llamaremos $\sigma(A)$ al conjunto de valores propios de una matriz A .

Lema 4.7. Sea $A \in \mathbb{C}^{M \times M}$ y $\alpha(A) = \max\{\operatorname{Re}(z); z \in \sigma(A)\}$. Entonces, $\forall \nu > \alpha(A)$ existe $K_\nu \geq 1$ tal que

$$\|e^{At}\| \leq K_\nu e^{\nu t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.55}$$

Demostración. Consideremos la forma canónica de Jordan de la matriz A , es decir

$$A = PJP^{-1}$$

donde P es una matriz inversible y $J = D + E$ con D una matriz diagonal formada por los valores propios de A y E una matriz triangular superior nilpotente. Llamando

$$P(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\|Et\|^k}{k!}$$

de ([15, p.396]) se sigue que

$$\|e^{At}\| \leq e^{t\alpha(A)} P(t) \tag{4.56}$$

Si $\nu > \alpha(A)$, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{t\alpha(A)} P(t)}{e^{\nu t}} = 0$$

o sea que existe $T > 0$ tal que si $t \geq T$

$$e^{t\alpha(A)} P(t) \leq e^{\nu t}.$$

Por otro lado si

$$K_1 = \max\{P(t); t \in [0, T]\}$$

entonces si $t \in [0, T]$ se tiene

$$e^{t\alpha(A)} P(t) \leq K_1 e^{t\alpha(A)} \leq K_1 e^{\nu t}.$$

Finalmente, si llamamos

$$K_\nu = \max\{1, K_1\}$$

se verifica que

$$\|e^{At}\| \leq e^{t\alpha(A)} P(t) \leq K_\nu e^{\nu t} \quad \forall t \geq 0.$$

En particular para $d^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$ un número positivo tendremos

$$\left\| e^{-An^2 d^2 t} \right\| \leq e^{\alpha(-A)n^2 d^2 t} P(n^2 d^2 t) \leq K_\nu e^{\nu n^2 d^2 t} \quad \forall t \geq 0, \forall n \geq 1. \quad (4.57)$$

Lema 4.8. Sean $Q_n(k, t)$ las matrices definidas en (4.48)-(4.49) para $k \geq 1$. Si llamamos $\beta = \|B\|$, $\gamma = \|A^{-1}B\|$, $d^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$, tomamos $\nu > \alpha(-A)$ y K_ν cumpliendo (4.57), entonces podemos escribir

$$Q_n(k, t) = (-1)^k (A^{-1}B)^{k-1} (I + A^{-1}B) + Q_n^{(1)}(k, t), \quad (4.58)$$

donde $Q_n^{(1)}(k, t)$ es una matriz que se puede acotar de la forma

$$\|Q_n^{(1)}(k, t)\| \leq (1 + \gamma) K_\nu^k e^{\nu n^2 d^2 t} \sum_{j=0}^{k-1} (n^2 d^2 \beta)^j \gamma^{k-1-j} \frac{t^j}{j!}. \quad (4.59)$$

Estas expresiones son válidas para todo $k \geq 1$.

Demostración. Vamos a demostrar la fórmula por inducción sobre k . Para $k = 1$ se tiene

$$Q_n(1, t) = - \int_0^t e^{-A \frac{n^2 \pi^2}{l^2} (t-s)} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} (A + B) ds$$

y llamando $d^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$,

$$\begin{aligned} Q_n(1, t) &= - \int_0^t e^{-An^2d^2(t-s)} n^2 d^2 (A + B) ds \\ &= -e^{-An^2d^2t} \int_0^t e^{An^2d^2s} n^2 d^2 (A + B) ds. \end{aligned}$$

Resolviendo la integral, la expresión anterior es igual a

$$-e^{-An^2d^2t} [e^{An^2d^2s}]_0^t A^{-1} (A + B)$$

o, lo que es igual,

$$-e^{-An^2d^2t} (e^{An^2d^2t} - I) A^{-1} (A + B),$$

y simplificando la expresión anterior nos queda

$$-(I + A^{-1}B) + e^{-An^2d^2t} (I + A^{-1}B).$$

De esta forma, llamando $Q_n^{(1)}(1, t) = e^{-An^2d^2t} (I + A^{-1}B)$ se tiene la expresión del lema. Veamos la acotación de $Q_n^{(1)}(1, t)$. Según la expresión (4.57), para $\nu > \alpha(-A)$ se tiene,

$$\begin{aligned} \|Q_n^{(1)}(1, t)\| &\leq \|e^{-An^2d^2t}\| \|I + A^{-1}B\| \\ &\leq K_\nu e^{\nu n^2 d^2 t} \|I + A^{-1}B\|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la norma es subaditiva,

$$\|Q_n^{(1)}(1, t)\| \leq K_\nu e^{\nu n^2 d^2 t} (\|I\| + \|A^{-1}B\|)$$

y llamando $\gamma = \|A^{-1}B\|$,

$$\|Q_n^{(1)}(1, t)\| \leq K_\nu e^{\nu n^2 d^2 t} (1 + \gamma).$$

Supuesta probada la fórmula para k , veamos qué ocurre para $k + 1$.

$$Q_n(k + 1, t) = - \int_0^t e^{-An^2d^2(t-s)} B n^2 d^2 Q_n(k, s) ds.$$

Aplicando la hipótesis de inducción en la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned}
& Q_n(k+1, t) \\
&= - \int_0^t e^{-An^2d^2(t-s)} Bn^2d^2 [(-1)^k(A^{-1}B)^{k-1}(I + A^{-1}B) + Q_n^{(1)}(k, s)] ds \\
&= - \int_0^t e^{-An^2d^2(t-s)} Bn^2d^2(-1)^k(A^{-1}B)^{k-1}(I + A^{-1}B) ds \\
&\quad - \int_0^t e^{-An^2d^2(t-s)} Bn^2d^2 Q_n^{(1)}(k, s) ds \\
&= -[e^{-An^2d^2(t-s)}]_0^t A^{-1}B(-1)^k(A^{-1}B)^{k-1}(I + A^{-1}B) \\
&\quad - \int_0^t e^{-An^2d^2(t-s)} Bn^2d^2 Q_n^{(1)}(k, s) ds \\
&= -(I - e^{-An^2d^2t})(-1)^k(A^{-1}B)^k(I + A^{-1}B) \\
&\quad - \int_0^t e^{-An^2d^2(t-s)} Bn^2d^2 Q_n^{(1)}(k, s) ds \\
&= (-1)^{k+1}(A^{-1}B)^k(I + A^{-1}B) + (-1)^k e^{-An^2d^2t}(A^{-1}B)^k(I + A^{-1}B) \\
&\quad - \int_0^t e^{-An^2d^2(t-s)} Bn^2d^2 Q_n^{(1)}(k, s) ds \\
&= (-1)^{k+1}(A^{-1}B)^k(I + A^{-1}B) + Q_n^{(1)}(k+1, t).
\end{aligned}$$

Veamos ahora cómo se puede acotar $Q_n^{(1)}(k+1, t)$.

$$\begin{aligned}
Q_n^{(1)}(k+1, t) &= (-1)^k e^{-An^2d^2t}(A^{-1}B)^k(I + A^{-1}B) \\
&\quad - \int_0^t e^{-An^2d^2(t-s)} Bn^2d^2 Q_n^{(1)}(k, s) ds.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Aplicando la desigualdad triangular en la norma matricial se tiene,

$$\|Q_n^{(1)}(k+1, t)\| \leq K_\nu e^{\nu n^2 d^2 t} \gamma^k (1 + \gamma) + \int_0^t K_\nu e^{\nu n^2 d^2 (t-s)} \beta n^2 d^2 \|Q_n^{(1)}(k, s)\| ds. \tag{4.61}$$

Por la hipótesis de inducción,

$$\|Q_n^{(1)}(k, s)\| \leq (1 + \gamma) K_\nu^k e^{\nu n^2 d^2 s} \sum_{j=0}^{k-1} (n^2 d^2 \beta)^j \gamma^{k-1-j} \frac{s^j}{j!}$$

y (4.61) se puede acotar por

$$\begin{aligned}
& \|Q_n^{(1)}(k+1, t)\| \leq K_\nu e^{\nu n^2 d^2 t} \gamma^k (1 + \gamma) \\
& + K_\nu e^{\nu n^2 d^2 t} \int_0^t e^{-\nu n^2 d^2 s} n^2 d^2 \beta (1 + \gamma) K_\nu^k e^{\nu n^2 d^2 s} \sum_{j=0}^{k-1} (n^2 d^2 \beta)^j \gamma^{k-1-j} \frac{s^j}{j!} ds.
\end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior

$$\begin{aligned}
\|Q_n^{(1)}(k+1, t)\| &\leq K_\nu e^{\nu n^2 d^2 t} \gamma^k (1 + \gamma) \\
&+ K_\nu^{k+1} e^{\nu n^2 d^2 t} \int_0^t n^2 d^2 \beta (1 + \gamma) \sum_{j=0}^{k-1} (n^2 d^2 \beta)^j \gamma^{k-1-j} \frac{s^j}{j!} ds \\
&= K_\nu e^{\nu n^2 d^2 t} \gamma^k (1 + \gamma) \\
&+ K_\nu^{k+1} e^{\nu n^2 d^2 t} (1 + \gamma) \int_0^t \sum_{j=0}^{k-1} (n^2 d^2 \beta)^{j+1} \gamma^{k-1-j} \frac{s^j}{j!} ds.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $K_\nu \geq 1$, $K_\nu < K_\nu^{k+1}$ y sacando factor común la expresión anterior se puede acotar por

$$K_\nu^{k+1} e^{\nu n^2 d^2 t} (1 + \gamma) \left[\gamma^k + \int_0^t \sum_{j=0}^{k-1} (n^2 d^2 \beta)^{j+1} \gamma^{k-1-j} \frac{s^j}{j!} ds \right].$$

Y resolviendo la integral nos queda,

$$K_\nu^{k+1} e^{\nu n^2 d^2 t} (1 + \gamma) \left[\gamma^k + \sum_{j=0}^{k-1} (n^2 d^2 \beta)^{j+1} \gamma^{k-1-j} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} \right].$$

Renombrando la suma se tiene,

$$\begin{aligned}
\|Q_n^{(1)}(k+1, t)\| &\leq K_\nu^{k+1} e^{\nu n^2 d^2 t} (1 + \gamma) \left[\gamma^k + \sum_{j=1}^k (n^2 d^2 \beta)^j \gamma^{k-j} \frac{t^j}{j!} \right] \\
&= K_\nu^{k+1} e^{\nu n^2 d^2 t} (1 + \gamma) \sum_{j=0}^k (n^2 d^2 \beta)^j \gamma^{k-j} \frac{t^j}{j!}.
\end{aligned}$$

En el siguiente lema vamos a reescribir la acotación de $\|Q_n^{(1)}(k, t)\|$.

Lema 4.9. Sean $\delta = \text{Max}\{\beta^j \gamma^{k-1-j}, j = 0, \dots, k-1\}$, $\mu = \text{Max}\{\frac{1}{|\nu|^j}, j = 0, \dots, k-1\}$, y ν y K_ν los números antes descritos en el Lema 4.8. Si suponemos que cada valor propio de A tiene parte real positiva, entonces $\forall t \geq 0$,

$$\|Q_n^{(1)}(k, t)\| \leq (1 + \gamma) K_\nu^k \delta \mu \frac{\Gamma(k, n^2 |\nu| d^2 t)}{\Gamma(k)}. \quad (4.62)$$

Demostración. Consideramos

$$\delta = \text{Max}\{\beta^j \gamma^{k-1-j}, \quad j = 0, \dots, k-1\}$$

y

$$\mu = \text{Max}\left\{\frac{1}{|\nu|^j}, \quad j = 0, \dots, k-1\right\}.$$

Aplicando la acotación (4.59) y teniendo en cuenta el valor de δ ,

$$\begin{aligned} \|Q_n^{(1)}(k, t)\| &\leq (1 + \gamma)K_\nu^k e^{\nu n^2 d^2 t} \sum_{j=0}^{k-1} (n^2 d^2)^j \delta \frac{t^j}{j!} \\ &= (1 + \gamma)K_\nu^k \delta e^{\nu n^2 d^2 t} \sum_{j=0}^{k-1} (n^2)^j \frac{|\nu|^j d^{2j} t^j}{|\nu|^j j!}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de μ , se tiene

$$\|Q_n^{(1)}(k, t)\| \leq (1 + \gamma)K_\nu^k \delta \mu e^{n^2 \nu d^2 t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(n^2 |\nu| d^2 t)^j}{j!} \quad (4.63)$$

y como por hipótesis cada valor propio de A tiene parte real positiva, todos los valores propios de $-A$ tienen parte real negativa y por tanto podemos elegir $\nu < 0$ y K_ν cumpliendo el Lema 4.7.

Finalmente, por la definición de las funciones gamma y gamma incompleta, (4.63) se puede escribir de la forma

$$\|Q_n^{(1)}(k, t)\| \leq (1 + \gamma)K_\nu^k \delta \mu \frac{\Gamma(k, n^2 |\nu| d^2 t)}{\Gamma(k)}.$$

4.6. Convergencia y continuidad de la solución

Probaremos algunos resultados antes de probar la continuidad de la solución del problema (4.1)-(4.3) dada en el Teorema 4.4.

Teniendo en cuenta la expresión 4.60 se tiene,

$$\begin{aligned} Q_n^{(1)}(k, t) &= (-1)^{k-1} e^{-An^2 d^2 t} (A^{-1}B)^{k-1} (I + A^{-1}B) \\ &\quad - \int_0^t e^{-An^2 d^2 (t-s)} B n^2 d^2 Q_n^{(1)}(k-1, s) ds. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Tomando $n^2 = v$ y llamando $Q_v^{(1)}(k, t) = Q_n^{(1)}(k, t)$,

$$\begin{aligned} Q_v^{(1)}(k, t) &= (-1)^{k-1} e^{-Avd^2 t} (A^{-1}B)^{k-1} (I + A^{-1}B) \\ &\quad - \int_0^t e^{-Avd^2 (t-s)} B v d^2 Q_v^{(1)}(k-1, s) ds. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Proposición 4.10. Para todo valor de k se cumple,

$$\left\| \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) \right\| \leq \sum_{j=0}^{H_k} \varrho_j e^{\nu v d^2 t} (|\nu| v d^2 t)^j t$$

$$\forall t \geq 0, \forall v \geq 0$$

donde H_k es un número mayor o igual que cero que depende de k , y ϱ_j para todo j son constantes que no dependen ni de v ni de t .

Demostración. Lo demostraremos por inducción. Para $k = 1$,

$$Q_v^{(1)}(1, t) = e^{-A v d^2 t} (I + A^{-1} B)$$

y por tanto,

$$\frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(1, t) = e^{-A v d^2 t} (-A d^2 t) (I + A^{-1} B).$$

Tomando normas en la expresión anterior se tiene,

$$\left\| \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) \right\| \leq K_\nu e^{\nu v d^2 t} (\|A\| + \|B\|) d^2 t.$$

En este caso se cumple la proposición tomando

$$H_k = 0, \varrho_0 = K_\nu (\|A\| + \|B\|) d^2.$$

Supongamos que es cierto para $k - 1$. Derivando (4.65) con respecto a la variable v ,

$$\frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) = (-1)^{k-1} e^{-A v d^2 t} (-A d^2 t) (A^{-1} B)^{k-1} (I + A^{-1} B) \quad (4.66)$$

$$- \int_0^t e^{-A v d^2 (t-s)} (-A d^2) (t-s) B v d^2 Q_v^{(1)}(k-1, s) ds \quad (4.67)$$

$$- \int_0^t e^{-A v d^2 (t-s)} B d^2 Q_v^{(1)}(k-1, s) ds \quad (4.68)$$

$$- \int_0^t e^{-A v d^2 (t-s)} B v d^2 \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k-1, s) ds. \quad (4.69)$$

Aplicando (4.63),

$$\|Q_v^{(1)}(k-1, s)\| \leq (1 + \gamma) K_\nu^{k-1} \delta \mu e^{\nu v d^2 s} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(|\nu| v d^2 s)^j}{j!} \quad (4.70)$$

y llamando

$$D_k = (1 + \gamma) K_\nu^{k-1} \delta \mu$$

$$\|Q_v^{(1)}(k-1, s)\| \leq D_k e^{\nu v d^2 s} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(|\nu| v d^2 s)^j}{j!}. \quad (4.71)$$

Vamos a tomar normas en las expresiones (4.66)-(4.69) y veremos que cada una de ellas es de la forma pedida en el lema. Llamando $\gamma = \|A^{-1}B\|$, (4.66) se acota de la forma siguiente,

$$\left\| (-1)^{k-1} e^{-A v d^2 t} (-A d^2 t) (A^{-1} B)^{k-1} (I + A^{-1} B) \right\| \quad (4.72)$$

$$\leq K_\nu \|A\| d^2 \gamma^{k-1} (1 + \gamma) e^{\nu v d^2 t}. \quad (4.73)$$

La expresión anterior es de la forma pedida. Procedemos ahora con (4.67). Llamando $\beta = \|B\|$,

$$\left\| - \int_0^t e^{-A v d^2 (t-s)} (-A d^2) (t-s) B v d^2 Q_v^{(1)}(k-1, s) ds \right\| \quad (4.74)$$

$$\leq \int_0^t K_\nu e^{\nu v d^2 (t-s)} \|A\| d^2 t \beta v d^2 \|Q_v^{(1)}(k-1, s)\| ds. \quad (4.75)$$

Aplicando (4.71) a la expresión anterior se tiene,

$$\begin{aligned} & \int_0^t K_\nu e^{\nu v d^2 (t-s)} \|A\| d^2 t \beta v d^2 \|Q_v^{(1)}(k-1, s)\| ds \\ & \leq \int_0^t K_\nu e^{\nu v d^2 (t-s)} \|A\| d^2 t \beta v d^2 D_k e^{\nu v d^2 s} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(|\nu| v d^2 s)^j}{j!} ds \\ & = \frac{K_\nu \|A\| d^2 \beta D_k}{|\nu|} t e^{\nu v d^2 t} \int_0^t \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(|\nu| v d^2)^{j+1} s^j}{j!} ds \\ & = \frac{K_\nu \|A\| d^2 \beta D_k}{|\nu|} t e^{\nu v d^2 t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(|\nu| v d^2)^{j+1} t^{j+1}}{(j+1)!} \\ & = \frac{K_\nu \|A\| d^2 \beta D_k}{|\nu|} t e^{\nu v d^2 t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(|\nu| v d^2 t)^{j+1}}{(j+1)!}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Así la expresión (4.67) es de la forma pedida. Ahora acotaremos la norma de (4.68)

$$\begin{aligned}
& \left\| - \int_0^t e^{-Avd^2(t-s)} B d^2 Q_v^{(1)}(k-1, s) ds \right\| \\
& \leq \int_0^t K_\nu e^{\nu vd^2(t-s)} \beta d^2 \|Q_v^{(1)}(k-1, s)\| ds \\
& \leq \int_0^t K_\nu e^{\nu vd^2(t-s)} \beta d^2 D_k e^{\nu vd^2 s} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(|\nu|vd^2 s)^j}{j!} ds \\
& = K_\nu \beta d^2 D_k e^{\nu vd^2 t} \int_0^t \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(|\nu|vd^2)^j s^j}{j!} ds \\
& = K_\nu \beta d^2 D_k e^{\nu vd^2 t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(|\nu|vd^2)^j t^{j+1}}{(j+1)!} \\
& = K_\nu \beta d^2 D_k e^{\nu vd^2 t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(|\nu|vd^2 t)^j}{(j+1)!}.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Por tanto (4.68) es de la forma pedida.

Por último, acotaremos la norma de la expresión (4.69). Aplicaremos la hipótesis de inducción.

$$\begin{aligned}
& \left\| - \int_0^t e^{-Avd^2(t-s)} B v d^2 \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k-1, s) ds \right\| \\
& \leq \int_0^t K_\nu e^{\nu vd^2(t-s)} \beta v d^2 \sum_{j=0}^{H_{k-1}} \varrho_j e^{\nu vd^2 s} (|\nu|vd^2 s)^j s ds \\
& = K_\nu \beta v d^2 e^{\nu vd^2 t} \sum_{j=0}^{H_{k-1}} \varrho_j (|\nu|vd^2)^j \int_0^t s^{j+1} ds \\
& = K_\nu \beta v d^2 e^{\nu vd^2 t} \sum_{j=0}^{H_{k-1}} \varrho_j \frac{(|\nu|vd^2)^j}{j+2} t^{j+2} \\
& = \frac{K_\nu}{|\nu|} \beta e^{\nu vd^2 t} \sum_{j=0}^{H_{k-1}} \varrho_j \frac{(|\nu|vd^2)^{j+1}}{j+2} t^{j+2} \\
& = \frac{K_\nu}{|\nu|} \beta e^{\nu vd^2 t} \sum_{j=0}^{H_{k-1}} \varrho_j \frac{(|\nu|vd^2 t)^{j+1}}{j+2}.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Así la expresión (4.69) tiene la forma que queríamos demostrar y por tanto queda

probado el lema.

En el siguiente corolario probaremos que

$$\int_0^\infty \left\| \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) \right\| dv$$

está acotada.

Corolario 4.11. *Se verifica que*

$$\int_0^\infty \left\| \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) \right\| dv < \infty$$

para todo $t > 0$.

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición anterior basta probar que cada sumando está acotado. Para $j = 0$ y $t > 0$ como $\nu < 0$,

$$t \int_0^\infty e^{\nu v d^2 t} dv = \left[\frac{e^{\nu v d^2 t}}{\nu d^2} \right]_0^\infty = \frac{-1}{\nu d^2}.$$

Para cualquier j , como $\nu < 0$,

$$t \int_0^\infty e^{\nu v d^2 t} (|\nu| v d^2 t)^j dv = \frac{1}{|\nu| d^2} \int_0^\infty e^{-x} x^j dx = \frac{\Gamma(j+1)}{|\nu| d^2}.$$

Teorema 4.12. *Sea S un subconjunto de \mathbb{R} y $f_n : S \rightarrow \mathbb{C}^m$ una sucesión de funciones tales que $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ converge uniformemente en S , entonces*

$$\sum_{n=1}^\infty Q_n^{(1)}(k, t) f_n(x)$$

también converge uniformemente para $(t, x) \in [0, \infty) \times S$.

Demostración. Por el Lema 4.9,

$$\|Q_n^{(1)}(k, t)\| \leq (1 + \gamma) K_\nu^k \delta \mu \frac{\Gamma(k, n^2 |\nu| d^2 t)}{\Gamma(k)}. \quad (4.79)$$

De esta forma,

$$\|Q_n^{(1)}(k, t)\| \leq (1 + \gamma) K_\nu^k \delta \mu \quad (4.80)$$

para todo valor de t y n . Por el corolario anterior,

$$\int_0^\infty \left\| \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) \right\| dv < \infty.$$

Sea

$$L = \max \left\{ (1 + \gamma)K_\nu^k \delta \mu, \int_0^\infty \left\| \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) \right\| dv \right\}$$

y

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Llamando $F_n(x)$ a la sucesión de sumas parciales de $f(x)$ como $\{F_n(x)\}$ es una sucesión que converge uniformemente a $f(x)$, dado $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N - 1 \quad \rightarrow |F_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3L} \quad \forall x \in S.$$

Para $h \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=N}^{N+h} Q_n^{(1)}(k, t) f_n(x) \\ &= Q_N^{(1)}(k, t) f_N(x) + Q_{N+1}^{(1)}(k, t) f_{N+1}(x) + \dots + Q_{N+h}^{(1)}(k, t) f_{N+h}(x) \\ &= Q_N^{(1)}(k, t) (F_N(x) - F_{N-1}(x)) + \dots + Q_{N+h}^{(1)}(k, t) (F_{N+h}(x) - F_{N+h-1}(x)) \\ &= -Q_N^{(1)}(k, t) F_{N-1}(x) + \left(Q_N^{(1)}(k, t) - Q_{N+1}^{(1)}(k, t) \right) F_N(x) \\ &+ \dots + \left(Q_{N+h-1}^{(1)}(k, t) - Q_{N+h}^{(1)}(k, t) \right) F_{N+h-1}(x) + Q_{N+h}^{(1)}(k, t) F_{N+h}(x) \\ &= -Q_N^{(1)}(k, t) (F_{N-1}(x) - f(x)) + \left(Q_N^{(1)}(k, t) - Q_{N+1}^{(1)}(k, t) \right) (F_N(x) - f(x)) \\ &+ \dots + \left(Q_{N+h-1}^{(1)}(k, t) - Q_{N+h}^{(1)}(k, t) \right) (F_{N+h-1}(x) - f(x)) \\ &+ Q_{N+h}^{(1)}(k, t) (F_{N+h}(x) - f(x)) \\ &= -Q_N^{(1)}(k, t) (F_{N-1}(x) - f(x)) - \int_{N^2}^{(N+1)^2} \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) (F_N(x) - f(x)) dv \\ &- \dots - \int_{(N+h-1)^2}^{(N+h)^2} \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) (F_{N+h-1}(x) - f(x)) dv + Q_{N+h}^{(1)}(k, t) (F_{N+h}(x) - f(x)). \end{aligned}$$

Tomando normas en las expresiones anteriores se tiene,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n=N}^{N+h} Q_n^{(1)}(k, t) f_n(x) \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3L} \left\| Q_N^{(1)}(k, t) \right\| + \frac{\varepsilon}{3L} \int_{N^2}^{(N+1)^2} \left\| \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) \right\| dv \\ &+ \dots + \frac{\varepsilon}{3L} \int_{(N+h-1)^2}^{(N+h)^2} \left\| \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) \right\| dv + \frac{\varepsilon}{3L} \left\| Q_{N+h}^{(1)}(k, t) \right\| \\ &= \frac{\varepsilon}{3L} \left\| Q_N^{(1)}(k, t) \right\| + \frac{\varepsilon}{3L} \int_{N^2}^{(N+h)^2} \left\| \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) \right\| dv + \frac{\varepsilon}{3L} \left\| Q_{N+h}^{(1)}(k, t) \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon L}{3L} + \frac{\varepsilon}{3L} \int_0^\infty \left\| \frac{d}{dv} Q_v^{(1)}(k, t) \right\| dv + \frac{\varepsilon L}{3L} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.81}$$

En el próximo teorema exigiremos las condiciones suficientes a la función inicial φ para garantizar la convergencia y continuidad de la solución del problema (4.1)-(4.3) propuesta en el Teorema 4.4, que escribimos en la forma

$$u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x) + u_3(t, x) + u_4(t, x) + \varphi(\tau, x), \quad (4.82)$$

donde

$$u_1(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n(k, t - k\tau)(I + C)^{-1}CB_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (4.83)$$

$$u_2(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n(k, t - k\tau)(I + C)^{-1}B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (4.84)$$

$$u_3(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} Q_n(k, t - s - k\tau)(I + C)^{-1}CB'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds, \quad (4.85)$$

$$u_4(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} Q_n(m, t - s - m\tau)(I + C)^{-1}CB'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds. \quad (4.86)$$

Recordemos que $\varphi(t, x) \in \mathbb{C}^M$. Diremos que $\varphi(t, x)$ es de variación acotada si las partes reales e imaginarias de cada componente de $\varphi(t, x)$ son de variación acotada.

Teorema 4.13. Sean A, B e $(I + C)$ matrices regulares donde cada valor propio de la matriz A tiene parte real positiva. Supongamos las siguientes condiciones para la función φ .

- (i) $\varphi(t, x)$ y $\varphi_t(t, x)$ son funciones continuas en $[0, \tau] \times [0, l]$.
- (ii) $\varphi_x(t, \cdot)$ es una función continua en $[0, l]$ para cada t .

Entonces la solución $u(t, x)$ del problema (4.1)-(4.3) definida en el Teorema 4.4 es una función continua en $[\tau, \infty) \times [0, l]$.

Demostración. Probaremos que cada serie es acotada, justificando así los intercambios de sumatorios e integral. La hipótesis de que φ sea continuamente diferenciable en t se utiliza para el cálculo de $B'_n(t)$ como comentamos en el caso escalar.

Según el Lema 4.8, se tienen las expresiones

$$Q_n(k, t - k\tau) = (-1)^k(A^{-1}B)^{k-1}(I + A^{-1}B) + Q_n^{(1)}(k, t - k\tau). \quad (4.87)$$

Así, cada uno de los sumandos de $u(t, x)$ se puede escribir de forma que haya una parte constante, que sale fuera de los sumatorios y de las integrales. Veamos para cada uno de los sumandos las acotaciones necesarias, que son semejantes al caso escalar estudiado en el Capítulo 2.

Empezamos con $u_1(t, x)$. La parte constante que no depende de t para $1 \leq k \leq m$ de $u_1(t, x)$ daría lugar a la serie

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k (C)^{k-1} (I + C)(I + C)^{-1} C B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ &= (-1)^k (C)^k \varphi(0, x). \end{aligned} \quad (4.88)$$

A la parte no constante de $u_1(t, x)$ que sí depende de t la llamaremos $u_1^{(1)}(t, x)$. Dado $1 \leq k \leq m$, para probar que

$$u_1^{(1)}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n^{(1)}(k, t - k\tau) (I + C)^{-1} C B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (4.89)$$

está acotada aplicaremos el Teorema 4.12. Llamaremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (I + C)^{-1} C B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Al ser φ_x continua, podemos aplicar el Lema 2.11 a cada término de la matriz anterior para concluir que esta serie converge uniformemente en $[0, l]$.

En consecuencia, hemos probado que $u_1(t, x)$ está bien definida y es una función continua en $[m\tau, (m + 1)\tau] \times [0, l]$.

Según se observa en la definición de $u(t, x)$, la expresión de $u_2(t, x)$ es similar a $u_1(t, x)$, por lo que no repetiremos los cálculos. Ahora nos ocuparemos de $u_3(t, x)$ y, como antes hemos hecho, pasaremos al estudio de $u_3^{(1)}(t, x)$,

$$\left\| u_3^{(1)}(t, x) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} Q_n^{(1)}(k, t - s - k\tau) (I + C)^{-1} C B_n'(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \right\|.$$

Llamando L_1 a una cota superior de $\gamma\delta\mu \left\| B_n'(s) \right\| K_{\nu}^k$ para todo n natural y teniendo en cuenta el Lema 4.9, la expresión anterior se puede acotar como sigue,

$$\left\| u_3^{(1)}(t, x) \right\| \leq L_1 \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^{\tau} \frac{\Gamma(k, n^2|\nu|d^2(t - s - k\tau))}{\Gamma(k)} ds. \quad (4.90)$$

Razonando de forma análoga a como hicimos en (2.54),

$$\sum_{k=1}^{m-1} \int_0^\tau \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(k, n^2 |\nu| d^2 (t - k\tau - s)) ds \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\sqrt{|\nu| d^2}} \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{t - k\tau - s}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{|\nu| d^2}} \sum_{k=1}^{m-1} \Gamma(k + \frac{1}{2}) \left(\sqrt{t - k\tau} - \sqrt{t - (k+1)\tau} \right) \end{aligned} \quad (4.92)$$

Por tanto, se tiene

$$\left\| u_3^{(1)}(t, x) \right\| \leq \frac{2L_1}{\sqrt{|\nu| d^2}} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}) (\sqrt{t - k\tau} - \sqrt{t - (k+1)\tau})}{\Gamma(k)}$$

y esta última expresión está acotada para t en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$.

Una situación similar se tiene para $u_4^{(1)}(t, x)$, donde los cálculos no se vuelven a repetir,

$$\left\| u_4^{(1)}(t, x) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} Q_n^{(1)}(m, t-s-m\tau) (I+C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \right\|,$$

y de forma análoga a como hicimos en el caso escalar, véase (2.56), y llamando L_2 a una cota de $\gamma\delta\mu \left\| B'_n(s) \right\| K_\nu^m$, se tiene que la expresión anterior se puede acotar por

$$\frac{2L_2}{\sqrt{|\nu| d^2}} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \sqrt{t - m\tau}.$$

Así $\left\| u_4^{(1)}(t, x) \right\|$ está acotada para valores de t en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$.

Hemos probado que u es continua en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$. Como es trivial comprobar, las expresiones de u en los intervalos $[(m-1)\tau, m\tau]$ y $[m\tau, (m+1)\tau]$ coinciden en el extremo común $t = m\tau$, por lo que se deduce que u es continua en $[\tau, \infty) \times [0, l]$.

4.7. Regularidad de la solución

En esta sección establecemos condiciones que permiten derivar término a término la serie solución propuesta en el Teorema 4.4, asegurando la convergencia de las series

derivadas y completando, por tanto, la demostración de que la serie formal propuesta en el Teorema 4.4 es realmente solución del problema (4.1)-(4.3). El siguiente teorema resume estos resultados.

Teorema 4.14. *Supongamos las condiciones del Teorema 4.13 y además*

- (a) φ_{xx} es continua en $[0, \tau] \times (0, l)$ y de variación acotada para valores de x en $(0, l)$.
- (b) $\varphi_t(t, \cdot)$ es dos veces continuamente diferenciable para cada t .

Entonces, la función $u(t, x)$ definida en el Teorema 4.4 es una solución del problema (4.1)-(4.3) y además $u_t(t, x)$ y $u_{xx}(t, x)$ son funciones continuas en $(\tau, \infty) \times (0, l)$.

Demostración. Volvemos a escribir la expresión de $u(t, x)$.

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n(k, t - k\tau) (I + C)^{-1} C B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n(k, t - k\tau) (I + C)^{-1} B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} Q_n(k, t - s - k\tau) (I + C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} Q_n(m, t - s - m\tau) (I + C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \\
 &+ \varphi(\tau, x).
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

Vamos a estudiar la existencia de las derivadas parciales u_t y u_{xx} .

Empezamos buscando la existencia de $u_t(t, x)$. La solución es de la forma (véase (4.45)),

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{4.94}$$

Si probamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{4.95}$$

converge uniformemente $\forall t \in [m\tau, (m+1)\tau]$, por el Lema 2.6, habremos probado que

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (4.96)$$

Para probar que (4.95) converge uniformemente utilizamos la expresión (4.11), es decir,

$$T'_n(t) = -A\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) - B\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t - \tau) \quad (4.97)$$

y (4.96) se escribiría de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (4.98)$$

$$= -A \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - B \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t - \tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (4.99)$$

Por tanto, probaremos que

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

y

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t - \tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

convergen uniformemente $\forall t \in [m\tau, (m+1)\tau]$. Como ambas expresiones son análogas, nos dedicaremos sólo al estudio de una de ellas. Así,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

donde

$$S_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Q_n(k, t - k\tau) (I + C)^{-1} C B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$S_2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Q_n(k, t - k\tau) (I + C)^{-1} B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$S_3 = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Q_n(k, t - s - k\tau) (I + C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds$$

$$S_4 = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Q_n(m, t - s - m\tau) (I + C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds$$

$$S_5 = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Probaremos que S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 convergen uniformemente $\forall t \in [m\tau, (m+1)\tau]$.

Vamos a empezar por S_1 . Separaremos la parte constante que no depende de t . Aplicando el Lema 4.8,

$$Q_n(k, t) = (-1)^k (A^{-1}B)^{k-1} (I + A^{-1}B) + Q_n^{(1)}(k, t). \quad (4.100)$$

Así,

$$\begin{aligned} S_1 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^k C^k \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Q_n^{(1)}(k, t - k\tau) (I + C)^{-1} C B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Por ser φ_{xx} continua y de variación acotada en $(0, l)$, llamando $d^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$, y razonando igual que en el caso escalar, se tiene,

$$S_1 = - \sum_{k=1}^m (-1)^k C^k \varphi_{xx}(0, x) \quad (4.102)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n^{(1)}(k, t - k\tau) (I + C)^{-1} C n^2 d^2 B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (4.103)$$

La expresión (4.102) es continua ya que por hipótesis φ_{xx} es una función continua en $[0, \tau] \times (0, l)$. La expresión (4.103) converge uniformemente en $[m\tau, (m+1)\tau] \times (0, l)$ aplicando el Teorema 4.12, tomando $S = (0, l)$ y

$$f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 d^2 B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

ya que aplicando el Lema 2.9, como φ_{xx} es continua y de variación acotada en la variable x la serie anterior es uniformemente convergente a φ_{xx} en un intervalo compacto que contenga a un punto de x del intervalo $(0, l)$. Así, S_1 converge uniformemente y es una función continua en

$$[m\tau, (m+1)\tau] \times (0, l).$$

El estudio de S_2 es exactamente igual al de S_1 .

En el estudio de las derivadas parciales de S_3 y S_4 aplicaremos el Lema 2.7, ya que $\varphi_t(t, x)$ es dos veces continuamente diferenciable en la variable x para todo $t \in [0, \tau]$. Por tanto $\exists H_1 > 0$ cumpliendo

$$\left\| B_n'(s) \right\| \leq \frac{H_1}{n^2}. \quad (4.104)$$

Vamos a desarrollar S_3 . Vamos a extraer fuera de la integral la parte constante que no depende t . Teniendo en cuenta el Lema 4.8, se tiene

$$Q_n(k, t) = (-1)^k C^{k-1} (I + C) + Q_n^{(1)}(k, t) \quad (4.105)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} S_3 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k C^k \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 B_n'(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Q_n^{(1)}(k, t - s - k\tau) (I + C)^{-1} C B_n'(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds. \end{aligned}$$

Operando la primera integral,

$$\begin{aligned} S_3 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k C^k \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (B_n(\tau) - B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Q_n^{(1)}(k, t - s - k\tau) (I + C)^{-1} C B_n'(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} S_3 &= - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k C^k \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (B_n(\tau) - B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Q_n^{(1)}(k, t - s - k\tau) (I + C)^{-1} C B_n'(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S_3 &= - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k C^k (\varphi_{xx}(\tau, x) - \varphi_{xx}(0, x)) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Q_n^{(1)}(k, t - s - k\tau) (I + C)^{-1} C B_n'(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $d^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$,

$$\begin{aligned} S_3 &= - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k C^k (\varphi_{xx}(\tau, x) - \varphi_{xx}(0, x)) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} n^2 d^2 Q_n^{(1)}(k, t - s - k\tau) (I + C)^{-1} C B_n'(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Por hipótesis del teorema, la primera expresión de (4.106) es continua. Vamos a acotar la serie de las expresiones dadas por (4.106),

$$\left\| - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} n^2 d^2 Q_n^{(1)}(k, t - k\tau - s) (I + C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \right\|. \quad (4.107)$$

Teniendo en cuenta (4.104), y aplicando el Lema 4.9 lo anterior se acota por

$$\| (I + C)^{-1} C \| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} H_1 d^2 \| Q_n^{(1)}(k, t - k\tau - s) \| ds \quad (4.108)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m-1} H_1 d^2 \frac{K_{\nu}^k \gamma \delta \mu}{\Gamma(k)} \int_0^{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(k, n^2 |\nu| d^2 (t - k\tau - s)) ds \quad (4.109)$$

y al igual que se hizo en el caso escalar (2.75) la expresión anterior se puede acotar por

$$\sum_{k=1}^{m-1} 2H_1 d^2 \frac{K_{\nu}^k \gamma \delta \mu \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k) \sqrt{|\nu| d^2}} \left(\sqrt{t - k\tau} - \sqrt{t - (k+1)\tau} \right). \quad (4.110)$$

Así, la serie (4.106) converge uniformemente en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$.

Por último vamos a desarrollar S_4 de forma análoga a S_3 . Teniendo en cuenta que

$$Q_n(m, t) = (-1)^m C^{m-1} (I + C) + Q_n^{(1)}(m, t), \quad (4.111)$$

se tiene

$$\begin{aligned} S_4 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} (-1)^m C^m n^2 d^2 B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} n^2 d^2 Q_n^{(1)}(m, t - s - m\tau) (I + C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Operando la primera integral, se tiene

$$\begin{aligned} S_4 &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m C^m n^2 d^2 (B_n(t - m\tau) - B_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} n^2 d^2 Q_n^{(1)}(m, t - s - m\tau) (I + C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S_4 &= (-1)^{m+1} C^m ((\varphi_{xx}(t - m\tau, x) - \varphi_{xx}(0, x)) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} n^2 d^2 Q_n^{(1)}(m, t - s - m\tau) (I + C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds). \end{aligned} \quad (4.114)$$

Por hipótesis del teorema, la primera expresión de (4.114) es continua. Vamos a acotar la serie de (4.114) de la misma forma que hicimos con S_3 ,

$$\left\| -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} n^2 d^2 Q_n^{(1)}(m, t-m\tau-s) (I+C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds \right\| \quad (4.115)$$

y teniendo en cuenta la acotación de B'_n es decir, como se cumple la condición de que $\varphi_t(\cdot, t)$ admite derivada parcial continua de segundo orden con respecto a la variable x se tiene,

$$\|B'_n(s)\| \leq \frac{H_1}{n^2}.$$

De esta forma la expresión (4.115) se acota por

$$\|(I+C)^{-1}C\| H_1 d^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} \|Q_n^{(1)}(m, t-m\tau-s)\| ds.$$

Aplicando el Lema 4.9 y razonando igual que en (2.77) la expresión anterior se acota por

$$\begin{aligned} & (1+\gamma)^{-1} \gamma H_1 d^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} \|Q_n^{(1)}(m, t-m\tau-s)\| ds \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} \frac{H_1 d^2 K_\nu^m \gamma \delta \mu}{\Gamma(m)} \Gamma(m, n^2 |\nu| d^2 (t-m\tau-s)) ds \\ & \leq 2H_1 d^2 K_\nu^m \gamma \delta \mu \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m) \sqrt{|\nu| d^2}} \sqrt{t-m\tau} \end{aligned}$$

y esta expresión está acotada en $[m\tau, (m+1)\tau]$. De esta forma hemos probado que S_4 es una función continua en $[m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$.

En cuanto a S_5 ,

$$S_5 = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = -\varphi_{xx}(\tau, x) \quad (4.116)$$

que es una función continua en el intervalo $(0, l)$. De esta forma hemos probado la existencia y continuidad de u_t en $[m\tau, (m+1)\tau] \times (0, l)$. Es trivial comprobar que las expresiones de u_t en los intervalos $[(m-1)\tau, m\tau]$ y $[m\tau, (m+1)\tau]$ coinciden en el extremo común $t = m\tau$. Así hemos probado que u_t es continua en $(\tau, \infty) \times (0, l)$.

Ahora probaremos la existencia y continuidad de $u_{xx}(t, x)$. Se tiene

$$u_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (4.117)$$

$$= -A \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - B \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t - \tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (4.118)$$

La expresión (4.117) es igual a

$$Au_{xx}(t, x) + Bu_{xx}(t - \tau, x)$$

siguiendo el mismo razonamiento que en el caso escalar. Queda por tanto demostrada la existencia y continuidad de las derivadas parciales de la solución y que ésta verifica la ecuación diferencial del problema.

4.8. Aproximaciones numéricas

En esta sección vamos a tomar la solución del problema (4.1)-(4.3) dada en (4.82) truncada en N términos. Utilizando el Lema 4.8,

$$Q_n(k, t) = (-1)^k (A^{-1}B)^{k-1} (I + A^{-1}B) + Q_n^{(1)}(k, t).$$

Por tanto $u(t, x)$ se escribe de la forma siguiente,

$$u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x) + u_3(t, x) + u_4(t, x) + \varphi(\tau, x)$$

donde

$$u_1(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^k C^k B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n^{(1)}(k, t - k\tau) (I + C)^{-1} C B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

o lo que es igual

$$u_1(t, x) = \sum_{k=1}^m (-1)^k C^k \varphi(0, x) + u_1^{(1)}(t, x)$$

donde

$$u_1^{(1)}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n^{(1)}(k, t - k\tau) (I + C)^{-1} C B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

De la misma forma

$$u_2(t, x) = \sum_{k=1}^m (-1)^k C^{k-1} \varphi(\tau, x) + u_2^{(1)}(t, x).$$

donde

$$u_2^{(1)}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n^{(1)}(k, t - k\tau)(I + C)^{-1} B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Igualmente

$$u_3(t, x) = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k C^k (\varphi(\tau, x) - \varphi(0, x)) + u_3^{(1)}(t, x)$$

donde

$$u_3^{(1)}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} Q_n^{(1)}(k, t - s - k\tau)(I + C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds.$$

Y por último

$$u_4(t, x) = (-1)^m C^m (\varphi(t - m\tau, x) - \varphi(0, x)) + u_4^{(1)}(t, x)$$

donde

$$u_4^{(1)}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} Q_n^{(1)}(m, t - s - m\tau)(I + C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds.$$

Por tanto, las expresiones de los restos serían las siguientes,

$$R_1^N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n^{(1)}(k, t - k\tau)(I + C)^{-1} C B_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (4.119)$$

$$R_2^N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k=1}^m Q_n^{(1)}(k, t - k\tau)(I + C)^{-1} B_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (4.120)$$

$$R_3^N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{m-1} Q_n^{(1)}(k, t - s - k\tau)(I + C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds, \quad (4.121)$$

$$R_4^N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} Q_n^{(1)}(m, t - s - m\tau)(I + C)^{-1} C B'_n(s) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ds. \quad (4.122)$$

Vamos a acotar cada expresión. Si llamamos $\gamma = \|C\|$ y tenemos en cuenta que $\varphi(\cdot, t)$ admite derivada parcial continua de segundo orden con respecto a la variable x , por el Lema 2.7 $\exists H > 0$ tal que

$$\|B_n(s)\| \leq \frac{H}{n^2} \quad \forall s \in [0, \tau].$$

Entonces

$$\|R_1^N\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \|Q_n^{(1)}(k, t - k\tau)\| (I + \gamma)^{-1} \gamma \|B_n(0)\|,$$

extrayendo constantes fuera se tiene

$$\|R_1^N\| \leq H(I + \gamma)^{-1} \gamma \sum_{k=1}^m \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\|Q_n^{(1)}(k, t - k\tau)\|}{n^2}.$$

Vamos a acotar esta expresión teniendo en cuenta el Lema 4.9.

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\|Q_n^{(1)}(k, t - k\tau)\|}{n^2} \leq \frac{(1 + \gamma)K_\nu^k \delta \mu}{\Gamma(k)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k, n^2 |\nu| d^2(t - k\tau))}{n^2}$$

Con cálculos muy similares a los que se hicieron en el Capítulo 2, tenemos

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k, n^2 |\nu| d^2(t - k\tau))}{n^2} \leq \frac{\Gamma(k, (N + 1)^2 |\nu| d^2(t - k\tau))}{N}.$$

De esta forma,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\|Q_n^{(1)}(k, t - k\tau)\|}{n^2} \leq \frac{(1 + \gamma)K_\nu^k \delta \mu}{\Gamma(k)} \frac{\Gamma(k, (N + 1)^2 |\nu| d^2(t - k\tau))}{N}$$

y por tanto

$$\|R_1^N\| \leq \sum_{k=1}^m \frac{H \gamma K_\nu^k \delta \mu}{\Gamma(K)} \frac{\Gamma(k, (N + 1)^2 |\nu| d^2(t - k\tau))}{N}.$$

Las expresiones de R_2^N son análogas (véase 4.120). Por tanto,

$$\|R_2^N\| \leq \sum_{k=1}^m \frac{H K_\nu^k \delta \mu}{\Gamma(K)} \frac{\Gamma(k, (N + 1)^2 |\nu| d^2(t - k\tau))}{N}.$$

Procedemos ahora con R_3^N . Como

$$\|B_n'(s)\| \leq \frac{H_1}{n^2}$$

se tiene,

$$\|R_3^N\| \leq H_1 (1 + \gamma)^{-1} \gamma \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^\tau \frac{\|Q_n^{(1)}(k, t - s - k\tau)\|}{n^2} ds.$$

Teniendo en cuenta el Lema 4.9 nuevamente,

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^\tau \frac{\|Q_n^{(1)}(k, t - s - k\tau)\|}{n^2} ds &\leq \frac{(1 + \gamma)K_\nu^k \delta \mu}{\Gamma(k)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^\tau \frac{\Gamma(k, n^2 |\nu| d^2(t - s - k\tau))}{n^2} ds \\ &\leq \frac{(1 + \gamma)K_\nu^k \delta \mu \tau}{\Gamma(k)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k, n^2 |\nu| d^2(t - (k + 1)\tau))}{n^2}. \end{aligned}$$

Y al igual que acotamos esta expresión en el Capítulo 2,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k, n^2|\nu|d^2(t - (k+1)\tau))}{n^2} \leq \frac{\Gamma(k, (N+1)^2|\nu|d^2(t - (k+1)\tau))}{N}$$

Así pues,

$$\|R_3^N\| \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{H_1\gamma K_\nu^k \delta\mu\tau}{\Gamma(k)} \frac{\Gamma(k, (N+1)^2|\nu|d^2(t - (k+1)\tau))}{N}.$$

Por último, vamos a acotar R_4^N . Teniendo en cuenta

$$\|B'_n(s)\| \leq \frac{H_1}{n^2} \quad \forall s \in [0, \tau]$$

se tiene

$$\|R_4^N\| \leq H_1(1+\gamma)^{-1}\gamma \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} \frac{\|Q_n^{(1)}(m, t-s-m\tau)\|}{n^2} ds.$$

Y por el Lema 4.9,

$$\|R_4^N\| \leq \frac{H_1 K_\nu^k \delta\mu\gamma}{\Gamma(m)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^{t-m\tau} \frac{\Gamma(m, n^2|\nu|d^2(t-s-m\tau))}{n^2} ds$$

y con el cambio de variable

$$v = n^2|\nu|d^2(t-s-m\tau)$$

la acotación para R_4^N sería

$$\|R_4^N\| \leq \frac{H_1 K_\nu^k \delta\mu\gamma}{\Gamma(m)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4|\nu|d^2} \int_0^{n^2|\nu|d^2(t-m\tau)} \Gamma(m, v) dv.$$

Y al igual que hicimos en el Capítulo 2,

$$\|R_4^N\| \leq \frac{H_1 K_\nu^k \delta\mu\gamma}{\Gamma(m)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4|\nu|d^2} \Gamma(m+1)$$

o lo que es lo mismo

$$\|R_4^N\| \leq \frac{H_1 K_\nu^k \delta\mu\gamma m}{|\nu|d^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leq \frac{H_1 K_\nu^k \delta\mu\gamma m}{3|\nu|d^2 N^3}.$$

Resumiendo todo lo anterior las acotaciones correspondientes a los cuatro restos se recogen en el siguiente teorema.

Teorema 4.15. Consideremos el problema (4.1)-(4.3), sea u la solución exacta dada en Teorema 4.4, y sea u_N la aproximación obtenida cuando u_1, u_2, u_3 y u_4 en (4.82) son sustituidas por las correspondientes sumas parciales con los N primeros términos. Entonces, para $(t, x) \in [m\tau, (m+1)\tau] \times [0, l]$,

$$\begin{aligned}
|u_N(t, x) - u(t, x)| &\leq \sum_{k=1}^m \frac{H(1+\gamma)K_\nu^k \delta \mu \Gamma(k, (N+1)^2 |\nu| d^2 (t - k\tau))}{\Gamma(K) N} \\
&+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{H_1 \gamma K_\nu^k \delta \mu \tau \Gamma(k, (N+1)^2 |\nu| d^2 (t - (k+1)\tau))}{\Gamma(k) N} \\
&+ \frac{H_1 K_\nu^k \delta \mu \gamma m}{3 |\nu| d^2 N^3}.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, dado $\delta > 0$ y un error prefijado $\epsilon > 0$, puede encontrarse N tal que $|u_N(t, x) - u(t, x)| \leq \epsilon$ para $(t, x) \in [m\tau + \delta, (m+1)\tau] \times [0, l]$.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Conclusiones

La utilización del método de los pasos y de representaciones integrales adecuadas (Lemas 2.3 y 4.2) permite obtener soluciones explícitas constructivas de problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales con retardo con coeficientes constantes, tanto escalares (Teorema 2.4) como vectoriales (Teorema 4.3).

El método de separación de variables constituye una herramienta efectiva para la obtención de soluciones exactas y de aproximaciones numéricas de problemas mixtos para ecuaciones en derivadas parciales con retardo con coeficientes constantes.

Los Teoremas 2.15 y 2.17 proporcionan la solución exacta en forma de serie infinita del problema mixto para la ecuación generalizada de difusión con retardo abordado en el Capítulo 2. El Teorema 2.19 permite acotar el error cometido al aproximar la serie solución mediante una suma finita, pudiéndose obtener con ello aproximaciones analítico-numéricas con cotas de error prefijadas en dominios acotados. Los Teoremas 2.20, 2.21 y 2.22 proporcionan resultados similares para la ecuación de reacción-difusión con retardo considerada en el Capítulo 2.

El Teorema 3.14 y la Proposición 3.15 muestran que la utilización de aproximaciones polinómicas de la función inicial permite incrementar, en dominios adecuados, la eficiencia computacional de las aproximaciones numéricas obtenidas en el Capítulo 2.

El método de separación de variables puede ser también aplicado de forma efectiva para la resolución exacta y analítico-numérica de problemas mixtos para sistemas acoplados de ecuaciones en derivadas parciales con retardo con coeficientes constantes.

Los Teoremas 4.4, 4.13 y 4.14 proporcionan la solución exacta en forma de serie

infinita del problema mixto abordado en el Capítulo 4 para la ecuación vectorial de difusión con retardo. En el Teorema 4.15 se obtienen las acotaciones de los errores de truncación que permiten la construcción de aproximaciones numéricas constructivas con cotas de error *a priori* en dominios acotados.

Los métodos utilizados y los resultados obtenidos en este trabajo podrían ser extendidos en diferentes aspectos y aplicados a otros tipos de problemas, lo que en algunos casos ya está siendo llevado a cabo dentro del grupo de investigación en ecuaciones diferenciales con retardo de la Universidad de Alicante. Así, por ejemplo, se podrían utilizar condiciones de contorno más generales que las condiciones de tipo Dirichlet empleadas en esta memoria, se podrían considerar problemas, escalares o vectoriales, con coeficientes variables o se podría abordar la obtención de soluciones para otros tipos de ecuaciones, como la ecuación de ondas con retardo.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Apéndice

Programas en Maple

En este apéndice se recogen los códigos, para el programa Maple, de los algoritmos que implementan los métodos desarrollados en esta memoria y que se han utilizado para realizar los cálculos de los ejemplos y figuras incluidos en la misma, de acuerdo con la relación siguiente.

- Solución numérica aproximada, truncada en n términos, de la ecuación generalizada de difusión con retardo.
- Cálculo del error cometido en la solución numérica aproximada de la ecuación generalizada de difusión con retardo.
- Cálculo del número de términos n en la solución numérica aproximada con un error dado.
- Solución numérica aproximada, truncada en n términos y aproximando la derivada de la función inicial por un polinomio en la variable t , de la ecuación generalizada de difusión con retardo.
- Cálculo del error cometido en la solución numérica aproximada que se obtiene aproximando la derivada de la función inicial por un polinomio.
- Cálculo del número de términos n en la solución numérica aproximada, que se obtiene aproximando la derivada de la función inicial por un polinomio en la variable t , con un error dado.

- Solución numérica aproximada, truncada en n términos, de la ecuación generalizada de difusión con retardo vectorial.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

SOLUCIÓN NUMÉRICA APROXIMADA, TRUNCADA EN N TÉRMINOS, DE LA ECUACIÓN GENERALIZADA DE DIFUSIÓN CON RETARDO.

Vamos a representar gráficamente la solución truncada, es decir, vamos a tomar los N primeros términos de cada una de las series que definen la solución $u(t, x) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$.

Iniciamos el proceso.

```
> restart:with(plots):
> assume(n,integer);
> with(linalg):
> with(LinearAlgebra):
> with(linalg, exponential):
```

Introducimos la función inicial en el intervalo $[0, \tau]$ a la que llamaremos ϕ .

```
> phi(t,x):=sin(t)*x*(1-x);
```

Cálculo de los coeficientes de Fourier de la función inicial en el intervalo $[0, l]$ a los que llamamos $B[n](t)$.

```
> phi[n](t,x):=sin(t)*x*(1-x)*sin(n*Pi*x/l)*2/l;
> B[n](t):=int(phi[n](t,x),x=0..1);
```

Cálculo de los coeficientes de Fourier de la función inicial derivada en el intervalo $[0, 1]$ a los que llamamos "Bderivada[n](s)".

```
> Bderivada[n](s):=subs(t=s,diff(int(phi[n](t,x),x=0..1),t));
```

Introducimos las constantes l, τ, c, d .

```
> l:=1;tau:=1;c:=1;d:=Pi;
```

Llamamos m al entero que determina el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$.

```
> for m from 1 to 4 do
```

$$\text{Sea } \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{(k-1)} c^{2(k-1)} \Gamma(k, n^2 d^2 (t-k\tau))}{\Gamma(K)}$$

```
> sumQt_ktau[m]:=0;
> for k from 1 to m do
> sumQt_ktau[m]:=sumQt_ktau[m]+(-1)^(k-1)*c^(2*(k-1))*GAMMA(k,n^2*d^2*(t-k*tau))/GAMMA(k)
> od;
```

Llamamos

$$\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{(k-1)} c^{2k} \int_0^{\tau} \frac{B_{prima_n} \Gamma(k, n^2 d^2 (t-k\tau-s))}{\Gamma(K)} ds.$$

```
> sumQt_ktaut_s[m-1]:=0;
> for k from 1 to m-1 do
> sumQt_ktaut_s[m-1]:=sumQt_ktaut_s[m-1]+(-1)^(k-1)*c^(2*k)*int(su
bs(t=s,diff(int(phi[n](t,x),x=0..1),t))*GAMMA(k,n^2*d^2*(t-k*tau
```

```

-s))/GAMMA(k),s=0..tau)
> od:
Llamamos "sum(uu1[m]*sin(n*Pi*x/l,n=1..N)" a la expresión de la teoría  $\Sigma_1$  truncada en "N"
términos.
> uu1[m]:=sumQt_ktau[m]*
(subs(t=tau,int(phi[n](t,x),x=0..1))+c^2*subs(t=0,int(phi[n](t,x),x=0..1)));
Llamamos "sum(uu2[m]*sin(n*Pi*x/l,n=1..N)" a la expresión de la teoría  $\Sigma_2$  truncada en "N"
términos.
> uu2[m]:=sumQt_ktaut_s[m-1];
Llamamos "sum(uu3[m]*sin(n*Pi*x/l,n=1..N)" a la expresión de la teoría  $\Sigma_3$  truncada en "N"
términos.
> uu3[m]:=(-1)^(m-1)*c^(2*m)*int((subs(t=s,diff(int(phi[n](t,x),x=
0..1),t))*GAMMA(m,n^2*d^2*(t-m*tau-s))/GAMMA(m),s=0..t-m*tau));
Llamamos "uu4[m]" a la expresión de la teoría  $\Sigma_4 = (-c^2)^m \phi(t-m\tau, x)$  y "sol[m]" a la solución
final  $u(t, x)$  en el intervalo  $[m\tau, (m+1)\tau]$  truncada en "N" términos los tres primeros sumandos.
> uu4[m]:=(-1)^m*c^(2*m)*subs(t=t-m*tau,phi(t,x));
> sol[m]:=sum(simplify(uu1[m]*sin(n*Pi*x/l)+uu2[m]*sin(n*Pi*x/l)+u
u3[m]*sin(n*Pi*x/l)),n=1..20)+uu4[m];
Sea "dib[m]" la solución dibujada para valores de  $x$  en el intervalo  $[0, l]$  y valores de  $t$  en el
intervalo  $[m\tau, (m+1)\tau]$ .
> dib[m]:=plot3d(sol[m],t=m*tau..(m+1)*tau,x=0..1):display(dib[m],
axes=frame);
> od:
Llamamos "dib0" a la solución dibujada para valores de  $x$  en el intervalo  $[0, l]$  y valores de  $t$  en el
intervalo  $[0, \tau]$ .
> dib0:=plot3d(phi(t,x),t=0..1,x=0..1):display(dib0,axes=frame);
> display(dib0,dib[1],dib[2],dib[3],dib[4],axes=frame);

```

Universidad de Alicante

[- CÁLCULO DEL ERROR COMETIDO EN LA SOLUCIÓN NUMÉRICA APROXIMADA DE LA ECUACIÓN GENERALIZADA DE DIFUSIÓN CON RETARDO.

Calculamos el error cometido que será la suma de los tres restos a los que llamaremos "R1", "R2", "R3", en función del número "N" al truncar las expresiones $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ de la solución exacta en N términos.

[Iniciamos el proceso.

```
[ > restart:with(plots):
[ > Digits:=200;
[ > assume(n, integer);
[ > with(linalg):
[ > assume(k, integer);
```

[Introducimos la función inicial que llamaremos $\phi(t, x)$ en el intervalo inicial $[0, \tau]$ para la variable t y $[0, l]$ para la variable x y los datos del problema c, τ, d, l . Consideramos la solución del problema en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$.

```
[ > phi(t,x):=sin(t)*x*(1-x);
[ > c:=1;tau:=1;d:=Pi;l:=1;
```

[Calculamos el valor de la constante B_1 del resto R_1 que aquí llamaremos "B".

```
[ > phi[n](t,x):=sin(t)*x*(1-x)*sin(n*Pi*x/l)*2/l;
[ > V[n](t):=int(phi[n](t,x),x=0..1);
[ > B:=maximize(abs(evalf(subs(t=tau,V[n](t))+c^2*subs(t=0,V[n](t))))
[ ,n=1..infinity);
```

[Calculamos el valor de la constante B (prima) del resto R_2 que aquí llamaremos "B1".

```
[ > Vderivada[n](s):=evalf(subs(t=s,diff(int(phi[n](t,x),x=0..1),t))
[ );
[ > B1:=maximize(maximize(abs(Vderivada[n](s)),n=1..infinity),s=0..1
[ );
```

[Ahora definimos el procedimiento que calcula el valor del error que será la suma de los tres restos a partir de un número de términos N en el intervalo compacto $[m\tau + \delta, (m+1)\tau]$ siendo δ un número mayor que 0 y menor que τ . Llamaremos "R1", "R2" y "R3" a las expresiones de los tres restos.

```
[ > delta:=0.1;
[ > PT:=proc(N,m)
[ > local R,R1,R2,R3,k;R1:=0;R2:=0;
[ > for k from 1 to m do
[ > R1:=R1+evalf((B/N)*c^(2*k-2)*GAMMA(k,(N+1)^2*d^2*(m*tau+delta-k*
[ tau))/GAMMA(k))
[ > od:
[ > for k from 1 to m-1 do
[ > R2:=R2+evalf((B1/N)*tau*c^(2*k)*GAMMA(k,(N+1)^2*d^2*(m*tau+delta
[ -(k+1)*tau))/GAMMA(k))
[ > od:
```

```

> R3:=evalf(B1*c^(2*m)*m/(d^2*3*N^3));
> R:=evalf(log10(evalf(R1+R2+R3)));
> return(R);
> end;

```

Representamos el error en función del número de términos N en el que se trunca la serie para los valores $m = 2$ y $m = 10$. En el eje x representamos los valores de "N" y en el eje y el valor del error, "R" en escala logarítmica.

```

[ > u1:=seq([N,PT(N,2)],N=5..30):
[ > u2:=seq([N,PT(N,10)],N=5..30):
[ > Digits:=10;
[ > p1:=plot(u1,style=point,color=red,symbol=CIRCLE,symbolsize=12):
[ > p2:=plot(u2,style=point,color=blue,symbol=CROSS,symbolsize=12):
[ > display(p1,p2,labels=[`N`,`Error
[ (log)`,`],labeldirections=[HORIZONTAL,VERTICAL],labelfont=[COURIER
[ ,12],axes=boxed,symbolsize=12);

```



Universitat d'Alacant
 Universidad de Alicante

- CÁLCULO DEL NÚMERO DE TÉRMINOS N EN LA SOLUCIÓN NUMÉRICA APROXIMADA CON UN ERROR DADO.

Spongamos que hemos tomado N términos de la solución exacta correspondientes a $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$.

Llamamos "epsilon" al error cometido en todo el proceso. Nos preguntamos por el número de términos " N " necesarios para conseguir ese error prefijado en el intervalo $[m\tau + \delta, (m+1)\tau]$ siendo δ un número mayor que 0 y menor que τ .

[Iniciamos el proceso.

```
[ > restart:with(plots):
[ > Digits:=200;
[ > assume(n, integer);
[ > with(linalg):
[ > assume(k, integer);
```

[Introducimos la función inicial que llamaremos $\phi(t, x)$ en el intervalo inicial $[0, \tau]$ para la variable t y $[0, l]$ para la variable x y los datos del problema c, d, τ, l, m . Consideramos la solución del problema en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$.

```
[ > phi(t,x):=sin(t)*x*(1-x);
[ > c:=1;tau:=1;d:=Pi;l:=1;m:=4;
```

[Calculamos el valor de la constante B_1 del resto R_1 que aquí llamaremos "B".

```
[ > phi[n](t,x):=sin(t)*x*(1-x)*sin(n*Pi*x/l)*2/l;
[ > V[n](t):=int(phi[n](t,x),x=0..1);
[ > B:=maximize(abs(evalf(subs(t=tau,V[n](t))+c^2*subs(t=0,V[n](t))))
[ ,n=1..infinity);
```

[Calculamos el valor de la constante B (prima) del resto R_2 que aquí llamaremos "B1".

```
[ > Vderivada[n](s):=evalf(subs(t=s,diff(int(phi[n](t,x),x=0..1),t))
[ );
[ > B1:=maximize(maximize(abs(Vderivada[n](s)),n=1..infinity),s=0..1
[ );
```

[Ahora calculamos el procedimiento que calcula el valor de " N " a partir de un error dado que llamaremos "epsilon" en el intervalo compacto $[m\tau + \delta, (m+1)\tau]$ para un delta dado. Llamaremos "R1", "R2" y "R3" a las expresiones de los tres restos que proceden de truncar en N términos las series dadas por $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Este procedimiento nos devuelve el valor de N .

```
[ > delta:=0.1;
[ > PT:=proc(epsilon)
[ > local N,R1,R2,R3,R,k;N:=1;R1:=0;R2:=0;
[ > for k from 1 to m do
[ > R1:=R1+evalf((B/N)*c^(2*k-2)*GAMMA(k,(N+1)^2*d^2*(m*tau+delta-k*
[ tau))/GAMMA(k))
[ > od:
[ > for k from 1 to m-1 do
[ > R2:=R2+evalf((B1/N)*tau*c^(2*k)*GAMMA(k,(N+1)^2*d^2*(m*tau+delta
[ -(k+1)*tau))/GAMMA(k))
```

```

> od:
> R3:=evalf(B1*c^(2*m)*m/(d^2*3*N^3));
> R:=evalf(R1+R2+R3);
> while R > epsilon do
> N:=N+1;
> R1:=0;
> for k from 1 to m do
> R1:=R1+evalf((B/N)*c^(2*k-2)*GAMMA(k,(N+1)^2*d^2*(m*tau+delta-k*
tau))/GAMMA(k))
> od:
> R2:=0;
> for k from 1 to m-1 do
> R2:=R2+evalf((B1/N)*tau*c^(2*k)*GAMMA(k,(N+1)^2*d^2*(m*tau+delta
-(k+1)*tau))/GAMMA(k))
> od:
> R3:=evalf(B1*c^(2*m)*m/(d^2*3*N^3));
> R:=evalf(R1+R2+R3);
> od:
> return(N);
> end;

```

Calculamos el número de términos N en función de un error dado. Tomaremos como valores de "epsilon" 10^g siendo g un número negativo.

```

> for g from -12 to -1 do
> N[g]:=PT(10^(g))
> od;

```

Representamos los datos. En el eje x representamos los valores de "g" que son el error cometido en escala logarítmica y en el eje y el número de términos "N".

```

> plot([seq([g,N[g]],g=-12..-1)],style=point);

```

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

– SOLUCIÓN NUMÉRICA APROXIMADA, TRUNCADA EN N TÉRMINOS Y APROXIMANDO LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN INICIAL POR UN POLINOMIO EN LA VARIABLE t , DE LA ECUACIÓN GENERALIZADA DE DIFUSIÓN CON RETARDO.

La función inicial se llamará ϕ . Los datos de nuestro problema son c, τ, a, l, d y L (grado del polinomio que aproxima a la derivada de la función inicial, es decir a $\phi_t(t, x)$). El intervalo en el que estudiamos la solución es $[m\tau, (m+1)\tau]$, para la variable t y $[0, l]$ para la variable x .

Iniciamos el proceso.

```
[ > restart:with(plots):
[ > assume(n,integer);
[ > with(linalg):
[ > with(LinearAlgebra):
[ > with(linalg, exponential):
```

Definimos la función inicial.

```
[ > phi(t,x):=sin(t)*x*(1-x);
```

En este caso $P_{L,\phi_t}(t, x) = x(1-x) \left(\sum_{k=0}^L t^k \right)$. Más adelante calcularemos los coeficientes de Fourier

$g_{n,k}$. De momento definimos los "g[n]" que utilizaremos después.

```
[ > g[n]:=(2/l)*int(x*(1-x)*sin(n*Pi*x/l),x=0..1);
```

Definición de los coeficientes de Fourier de la función $\phi(t, x)$ que llamamos "B[n](t)".

```
[ > phi[n](t,x):=sin(t)*x*(1-x)*sin(n*Pi*x/l)*2/l;
```

```
[ > B[n](t):=int(phi[n](t,x),x=0..1);
```

Definición de los coeficientes de Fourier de la función $\phi_t(t, x)$ a los que llamamos

"Bderivada[n](s)".

```
[ > Bderivada[n](s):=subs(t=s,diff(int(phi[n](t,x),x=0..1),t));
```

```
[ > with(orthopoly):
```

```
[ > with(numapprox):
```

Calculamos el polinomio de Chebyshev que aproxima a la parte que depende de t de la función inicial con error de aproximación "epsilon".

```
[ > epsilon:=0.001;
```

```
[ > Pol:=expand(eval(chebyshev(cos(t), t=0..1, epsilon)),t);
```

Introducción de los datos L, l, τ, c, d, a .

```
[ > L:=degree(Pol);
```

```
[ > l:=1;tau:=1;c:=1;d:=Pi; a:=1;
```

Calculamos las series infinitas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)(-1)^n}{n^k}$. Nótese que el exponente máximo k de estas series es $2L+1$, por tanto llegaremos hasta ahí. Empezaremos por definir la fórmula por

recurrencia $I_{k,n} = \frac{2\pi^{(k-1)}(-1)^{(n+1)}}{n} - \frac{k(k-1)I_{k-2,n}}{n^2}$.

```
> II[1]:=-2*(-1)^(n)/n;
> for k from 3 by 2 to 2*L+1 do
  II[k]:=expand(2*Pi^(k-1)*(-1)^(n+1)/n-k*(k-1)*II[k-2]/n^2);
> od;
```

Ahora introducimos la fórmula $\pi^{(k-1)} x - k(k-1) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{k-2,n} \sin(nx)}{n^2} \right)$.

```
> eq[3]:=Pi^(2)*x-3*2*expand(sum(II[1]*sin(n*x)/n^2,n=1..infinity)
):
> for k from 5 by 2 to 2*L+1 do
> eq[k]:=Pi^(k-1)*x-k*(k-1)*expand(sum(op(1,expand(II[k-2]*sin(n*x)
)/n^2)),n=1..infinity)):
> for j from 2 to (k-1)/2 do
> eq[k]:=eq[k]-k*(k-1)*expand(sum(op(j,expand(II[k-2]*sin(n*x)/n^2
)),n=1..infinity));
> od:
> od:
```

Definimos las ecuaciones de la proposición de la teoría

$$x^k = \pi^{(k-1)} x - k(k-1) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{k-2,n} \sin(nx)}{n^2} \right)$$

```
> for k from 3 by 2 to 2*L+1 do
> ee[k]:=x^k=eq[k];
> od;
```

Despejamos los sumatorios $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)(-1)^n}{n^k}$ que queremos calcular.

```
> sum(sin(n*x)*(-1)^n/(n^k),n = 1 .. infinity);
> s[3]:=solve(ee[3],sum(sin(n*x)*(-1)^n/n^3,n=(1 .. infinity)));
> for k from 5 by 2 to 2*L+1 do
> for j from 3 by 2 to k-2 do
> ee[k]:=algsols(sum(sin(n*x)*(-1)^n/n^j, n = (1 ..
infinity))=s[j],ee[k]);
> od:
> s[k]:=solve(ee[k],sum(sin(n*x)*(-1)^n/n^k, n = (1 ..
infinity)));
> od;
```

Definimos los sumatorios $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)(-1)^n}{n^k}$.

```
> for k from 3 by 2 to 2*L+1 do
> sum(sin(n*pi*x/l)*(-1)^n/n^k,n=(1..infinity)):=subs(x=x*Pi/l,s[k
]);
> od;
```

```
> sum(sin(n*pi*x/l)*(-1)^n/n,n=1..infinity):=-Pi*x/(2*1);
```

Cálculo de los coeficientes del polinomio que aproxima a la derivada de la función inicial al que hemos llamado "Pol".

```
> T[0]:=op(1,Pol);
> for i from 2 to 4 do
> T[i-1]:=op(1,op(i,Pol));
> od;
```

De esta forma los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de los coeficientes del polinomio "Pol" a los que llamamos en teoría $g_{n,k}$ serían aquí en nuestro programa equivalentes a

"T[k]*g[n]".

Calculamos las integrales iteradas "F[k]" y "Fx[k]". Lo que en teoría llamamos $F_k^i(l)$ y $F_k^i(x)$ en nuestro programa serán igual a "F[i]*T[k]" y "Fx[k]*T[k]" respectivamente. En nuestro caso el "i" máximo sería igual al grado del polinomio mas uno multiplicado por dos.

```
> F[0]:=1*(1-1);
> Fx[0]:=x*(1-x);
> for k from 2 by 1 to 2*(degree(Pol)+1) do
> f[k]:=x[1]*(1-x[1]);
> for i from 1 by 1 to k do
> f[k]:=Int(f[k],x[i]=0..x[i+1]);
> od:
> F[k]:=value(algsubs(x[k+1]=1,f[k]));
> Fx[k]:=value(algsubs(x[k+1]=x,f[k]));
> od;
```

Definimos v_1, v_2, v_3, v_4 que en nuestro problema serán "v1[m]", "v2[m]", "v3[m]", "v4[m]".

Introducimos las fórmulas. Llamaremos "M" al valor máximo de m del intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$ para el que representaremos la solución.

```
> M:=4;
> for m from 1 to M do
> v2[m]:=0;
> for K from 0 to L do
> for j from 0 to K+1 do
> for p from 1 to K-j+1 do
> v2[m]:=v2[m]+(-1)^(m-1)*c^(2*m)*(2*(-1)^(K+j)*(t-m*tau)^j*factorial(K+m-j))*factorial(K)/(factorial(m-1)*factorial(j)*factorial(K-j+1)*a^(2*(K-j+1))*1)*(-1)^p*F[2*p]*T[K]*(1/Pi)^(2*(K-j+1-p)+1)*sum(sin(n*pi*x/l)*(-1)^n/n^(2*(K-j+1-p)+1),n= 1..infinity):
```

```

> od:od:od:
En  $v_4^m$  cambiamos los indices de la teoría, es decir "k" por "k1" y "j" por "J".
> v4[m]:=sum(sum((( -1)^(m-1)*c^(2*m)*(-1)^(k1+J+1)*(t-m*tau)^J*factorial(k1))/(factorial(m-1)*factorial(J)*factorial(k1+1-J))*g[n]*T[k1]*GAMMA(k1+m-J+1,n^2*d^2*(t-m*tau))/((n^2*d^2)^(k1-J+1)),J=0..k1+1),k1=0..L):
> v1[m]:=(-1)^(m-1)*c^(2*m)*T[0]*(t-m*tau)*x*(1-x);
> for k from 2 by 1 while k<degree(Pol)+2 do
> v1[m]:=v1[m]+(-1)^(m-1)*c^(2*m)*T[k-1]*(t-m*tau)^(k)/(k)*x*(1-x)
> od;
> v3[m]:=0;
> for K from 0 to L do
> for j from 0 to K+1 do
> v3[m]:=v3[m]+(-1)^(m-1)*c^(2*m)*((t-m*tau)^j*factorial(K+m-j))*factorial(K)/(factorial(m-1)*factorial(j)*factorial(K-j+1)*a^(2*(K-j+1)))*Fx[2*(K-j+1)]*T[K]:
> od:od:

```

Ahora seguimos con el primer, segundo y cuarto sumando, es decir Σ_1 , Σ_2 y Σ_4 .

Llamamos $sumQt_ktau_m = \sum_{k=1}^m (-1)^{(k-1)} c^{(2(k-1))} Q(k, n^2 d^2 (t-k\tau))$.

```

> sumQt_ktau[m]:=0;
> for k from 1 to m do
> sumQt_ktau[m]:=sumQt_ktau[m]+(-1)^(k-1)*c^(2*(k-1))*GAMMA(k,n^2*d^2*(t-k*tau))/GAMMA(k)
> od:

```

Llamamos $sumQt_ktaut_s_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{(k-1)} c^{(2k)} \int_0^\tau derivada B_n(s) Q(k, n^2 d^2 (t-k\tau-s)) ds$.

```

> sumQt_ktaut_s[m-1]:=0;
> for k from 1 to m-1 do
> sumQt_ktaut_s[m-1]:=sumQt_ktaut_s[m-1]+(-1)^(k-1)*c^(2*k)*int(subs(t=s,diff(int(phi[n](t,x),x=0..1),t))*GAMMA(k,n^2*Pi^2*(t-k*tau-s))/GAMMA(k),s=0..tau)
> od:

```

Ahora multiplicamos "sumQt_ktau[m]" por $B_n(\tau) + c^2 B_n(0)$.

```

> uu1[m]:=sumQt_ktau[m]*
(subs(t=tau,int(phi[n](t,x),x=0..1))+c^2*subs(t=0,int(phi[n](t,x),x=0..1)));
> uu2[m]:=sumQt_ktaut_s[m-1]:
> uu4[m]:=(-1)^m*c^(2*m)*subs(t=t-m*tau,phi(t,x)):
> v1[m]:=(-1)^(m-1)*c^(2*m)*T[0]*(t-m*tau)*x*(1-x);
> for k from 2 by 1 while k<degree(Pol)+2 do
> v1[m]:=v1[m]+(-1)^(m-1)*c^(2*m)*T[k-1]*(t-m*tau)^(k)/(k)*x*(1-x)
> od:

```

Llamamos "dib[m]" a la solución dibujada para valores de t en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$, y valores de x en el intervalo $[0, l]$.

```
> N:=20;  
> sol1[m]:=simplify(sum(uu1[m]*sin(n*Pi*x/l)+uu2[m]*sin(n*Pi*x/l),  
n=1..N)+uu4[m]):  
> sol2[m]:=evalf(v2[m]-v3[m]+v1[m])+evalf(sum(v4[m]*sin(n*Pi*x/l),  
n=1..N)):  
> sol[m]:=sol1[m]+sol2[m];  
> dib[m]:=plot3d(sol[m],t=m*tau..(m+1)*tau,x=0..l):display(dib[m],  
axes=frame):  
> od:  
[ Dibujamos la solución.  
[ > dib0:=plot3d(phi(t,x),t=0..1,x=0..l):display(dib0,axes=frame);  
[ > display(dib0,dib[1],dib[2],dib[3],dib[4],axes=frame);
```



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

— CÁLCULO DEL ERROR COMETIDO EN LA SOLUCIÓN NUMÉRICA APROXIMADA QUE SE OBTIENE APROXIMANDO LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN INICIAL POR UN POLINOMIO.

Calcularemos el error cometido "R" que será la suma de los tres restos a los que llamaremos "R1", "R2", "R3", en función del número de términos "N" al truncar la solución u_p que aproxima la solución exacta u en N términos mas el error obtenido cuando se aproxima la solución exacta u por u_p , en el intervalo $[m\tau + \delta, (m+1)\tau]$ con δ un número positivo menor que τ .

[Iniciamos el proceso.

```
[ > restart:with(plots):
[ > Digits:=200;
[ > assume(n,integer);
[ > with(linalg):
[ > assume(k,integer);
```

[Introducimos la función inicial que llamaremos $\phi(t, x)$ en el intervalo inicial $[0, \tau]$ para la variable t y $[0, l]$ para la variable x y los datos del problema c, τ, d, l, m . Consideramos la solución del problema en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$.

```
[ > phi(t,x):=sin(t)*x*(1-x);
[ > c:=1;tau:=1;d:=Pi;l:=1;m:=10;
```

[Calculamos el valor de la constante B_1 del resto R_1 que aquí llamaremos "B".

```
[ > phi[n](t,x):=sin(t)*x*(1-x)*sin(n*Pi*x/l)*2/l;
[ > V[n](t):=int(phi[n](t,x),x=0..1);
[ > B:=maximize(abs(evalf(subs(t=tau,V[n](t))+c^2*subs(t=0,V[n](t))))
[   ),n=1..infinity);
```

[Calculamos el valor de la constante B (prima) del resto R_2 que aquí llamaremos "B1".

```
[ > Vderivada[n](s):=evalf(subs(t=s,diff(int(phi[n](t,x),x=0..1),t)
[   ));
[ > B1:=maximize(maximize(abs(Vderivada[n](s)),n=1..infinity),s=0..1
[   ));
```

[Calculamos el polinomio de Chebyshev al que llamaremos "Pol" que aproxima a la derivada de la

función inicial con un error menor que $\frac{10^{(-150)} d}{8 c^{(2m)} \sqrt{m\tau}}$.

```
[ > with(orthopoly):
[ > with(numapprox):
[ > Pol:=expand(eval(chebyshev(cos(t), t=0..1,
[   evalf(10^(-150)*d/(8*c^(2*m)*sqrt(m*tau))))),t):
```

[Llamaremos "L" al grado del polinomio de Chebyshev.

```
[ > L:=degree(Pol);
```

[Ahora vamos a calcular la constante g y para ello necesitamos el cálculo de los coeficientes del polinomio "Pol" que llamaremos "T[i]".

```

> for i from 0 to L do
> T[i]:=coeff(Pol,t,i);
> od:

```

Cálculo de los $g_{n,k}$ de la teoría que se necesitan para hallar el valor de "g".

```

> g[n]:=abs((2/l)*int(x*(1-x)*sin(n*Pi*x/l),x=0..1));
> for k from 0 to L do
> T[k]:=coeff(Pol,t,k);
> G[k]:=evalf(maximize(abs(T[k]*g[n]),n=1..infinity));
> od:
> g:=0;
> for k from 0 to L do
> if g<G[k] then g:=G[k]; fi;
> od:
> print(g);

```

Ahora calculamos el procedimiento que evalúa el error cometido en función del número de términos "N" en el intervalo compacto $[m\tau + \delta, (m+1)\tau]$. Llamaremos "R1", "R2" y "R3" a las expresiones de los tres restos y "R" al error total acumulado en todo el proceso.

```

> delta:=0.1;
> PT:=proc(N)
> local R,R1,R2,R3,k;R1:=0;R2:=0;R3:=0;
> for k from 1 to m do
> R1:=R1+evalf((B/N)*c^(2*k-2)*GAMMA(k,(N+1)^2*d^2*(m*tau+delta-k*tau))/GAMMA(k))
> od:
> for k from 1 to m-1 do
> R2:=R2+evalf((B1/N)*tau*c^(2*k)*GAMMA(k,(N+1)^2*d^2*(m*tau+delta-(k+1)*tau))/GAMMA(k))
> od:
> for k from 0 to L do
> R3:=R3+evalf(g*c^(2*m)*2^(k+1)*GAMMA(k+m+1,(N+1)^2*d^2*(delta))/((k+1)*d^(2*(k+1))*N^(2*k+3)*GAMMA(m))
> od:
> R:=evalf(log10(evalf(R1+R2+R3+10^(-150)/2)));
> return(R);
> end;
> u2:=[seq([N,PT(N)],N=5..30)];
> m:=2;
> u1:=[seq([N,PT(N)],N=5..30)];
> Digits:=10;

```

Representamos los errores en función del número N. En el eje x representamos los valores de "N" y en el eje y el valor del error cometido en escala logarítmica.

```

> p1:=plot(u1,style=point,color=red,symbol=CIRCLE,symbolsize=12);
> p2:=plot(u2,style=point,color=blue,symbol=CROSS,symbolsize=12);
> display(p1,p2,labels=[`N`,`Error
(log)`],labeldirections=[HORIZONTAL,VERTICAL],labelfont=[COURIER
,12],axes=boxed,symbolsize=12);

```

[- CÁLCULO DEL NÚMERO DE TÉRMINOS N EN LA SOLUCIÓN NUMÉRICA APROXIMADA, QUE SE OBTIENE APROXIMANDO LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN INICIAL POR UN POLINOMIO EN LA VARIABLE t , CON UN ERROR DADO.

Supongamos que hemos tomado la solución truncada en N términos de la solución formada por la aproximada, u_p , es decir la que en el tercer sumando se aproxima la derivada de la función

inicial por un polinomio en la variable " t ". Sea 10^p con p un número negativo el error cometido en todo el proceso. Nos preguntamos por el número de términos N necesarios para conseguir ese error prefijado en el intervalo $[m\tau + \delta, (m+1)\tau]$ siendo δ un número positivo menor que τ .

[Iniciamos el proceso.

```
[ > restart:with(plots):
[ > Digits:=200;
[ > assume(n,integer);
[ > with(linalg):
[ > with(orthopoly):with(numapprox):
[ > assume(k,integer);
```

[Introducimos la función inicial que llamaremos $\phi(t, x)$ en el intervalo inicial $[0, \tau]$ para la variable t y $[0, l]$ para la variable x y los datos del problema c, τ, d, l, m . Consideramos la solución del problema en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$.

```
[ > phi(t,x):=sin(t)*x*(1-x);
[ > c:=1;tau:=1;d:=Pi;l:=1;m:=4;
```

[Calculamos el valor de la constante B_1 del resto R_1 que aquí llamaremos "B".

```
[ > phi[n](t,x):=sin(t)*x*(1-x)*sin(n*Pi*x/l)*2/l;
[ > V[n](t):=int(phi[n](t,x),x=0..1);
[ > B:=maximize(abs(evalf(subs(t=tau,V[n](t))+c^2*subs(t=0,V[n](t))))
[   ),n=1..infinity);
```

[Calculamos el valor de la constante B (prima) del resto R_2 que aquí llamaremos "B1".

```
[ > Vderivada[n](s):=evalf(subs(t=s,diff(int(phi[n](t,x),x=0..1),t))
[   );
[ > B1:=maximize(maximize(abs(Vderivada[n](s)),n=1..infinity),s=0..1
[   );
```

[Calculamos el polinomio de Chebyshev al que llamaremos "Pol" en este procedimiento, que

aproxima a la derivada de la función inicial con un error menor que $\frac{10^p d}{8 c^{(2m)} \sqrt{m \tau}}$.

```
[ > Pol:=proc(p)
[ > expand(eval(chebyshev(cos(t), t=0..1,
[   evalf(10^(p)*d/(8*c^(2*m)*sqrt(m*tau))))),t);
[ > end;
```

[Calculamos el grado del polinomio de Chebyshev calculado anteriormente.

```

> grado:=proc(p)
> degree(Pol(p));
> end;

```

Calculamos la constante g que depende del polinomio de Chebyshev antes calculado, y por tanto depende del valor de "p". Llamamos "ge" a la constante g dentro del siguiente procedimiento. Para ello necesitamos el cálculo de los coeficientes del polinomio "Pol" que aproxima a la derivada de la función inicial y que llamaremos "T[k]". También necesitamos calcular los $g_{n,k}$ de la teoría que se necesitan para hallar el valor de g , para esto haremos uso de los valores de "G[k]" en el siguiente procedimiento.

```

> g:=proc(p)
> local g,k,T,G,ge;
> g[n]:=abs((2/1)*int(x*(1-x)*sin(n*Pi*x/1),x=0..1));
> for k from 0 to grado(p) do
> T[k]:=coeff(Pol(p),t,k);
> G[k]:=evalf(maximize(abs(T[k]*g[n]),n=1..infinity));
> od:
> ge:=0;
> for k from 0 to grado(p) do
> if ge<G[k] then ge:=G[k]; fi;
> od:
> return(ge);
> end;

```

Ahora calculamos el procedimiento que calcula el valor de "N" a partir de un error dado, 10^P , en el intervalo compacto $[m\tau + \delta, (m+1)\tau]$ para un δ dado. Llamaremos "R1", "R2" y "R3" a las expresiones de los tres restos que proceden de truncar en N términos las series dadas por la solución aproximada u_p . Este procedimiento nos devuelve el valor de "N".

```

> delta:=0.1;
> PT:=proc(p)
> local N,R1,R2,R3,R,k;N:=1;R1:=0;R2:=0;R3:=0;
> for k from 1 to m do
> R1:=R1+evalf((B/N)*c^(2*k-2)*GAMMA(k,(N+1)^2*d^2*(m*tau+delta-k*tau))/GAMMA(k))
> od:
> for k from 1 to m-1 do
> R2:=R2+evalf((B1/N)*tau*c^(2*k)*GAMMA(k,(N+1)^2*d^2*(m*tau+delta-(k+1)*tau))/GAMMA(k))
> od:
> for k from 0 to grado(p) do
> R3:=R3+evalf(g(p)*c^(2*m)*2^(k+1)*GAMMA(k+m+1,(N+1)^2*d^2*(delta))/((k+1)*d^(2*(k+1))*N^(2*k+3)*GAMMA(m))
> od:
> R:=evalf(R1+R2+R3);
> while R > (10^(p))/2 do
> N:=N+1;

```

```

> R1:=0;
> for k from 1 to m do
> R1:=R1+evalf((B/N)*c^(2*k-2)*GAMMA(k,(N+1)^2*d^2*(m*tau+delta-k*
tau))/GAMMA(k))
> od:
> R2:=0;R3:=0;
> for k from 1 to m-1 do
> R2:=R2+evalf((B1/N)*tau*c^(2*k)*GAMMA(k,(N+1)^2*d^2*(m*tau+delta
-(k+1)*tau))/GAMMA(k))
> od:
> for k from 0 to grado(p) do
> R3:=R3+evalf(g(p)*c^(2*m)*2^(k+1)*GAMMA(k+m+1,(N+1)^2*d^2*(delta
))/((k+1)*d^(2*(k+1))*N^(2*k+3)*GAMMA(m))
> od:
> R:=evalf(R1+R2+R3);
> od:
> return(N);
> end;

```

[Calculamos el valor de N en función del error.

```

> for h from -12 to -1 do
> N[h]:=PT(h);
> od;

```

[Representamos los datos. En el eje x representamos los valores de "h" que son el error cometido en escala logarítmica y en el eje y el número de términos "N".

```

> plot([seq([h,N[h]],h=-12..-1)],style=point);

```

– SOLUCIÓN NUMÉRICA APROXIMADA, TRUNCADA EN N TÉRMINOS, DE LA ECUACIÓN GENERALIZADA DE DIFUSIÓN CON RETARDO VECTORIAL.

Truncaremos los cuatro primeros sumandos de la siguiente solución vectorial en "N" términos, $u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x) + u_3(t, x) + u_4(t, x) + \phi(\tau, x)$, donde $\phi(t, x)$ es la función inicial para valores de t en el intervalo $[0, \tau]$ y de x en el intervalo $[0, l]$.

Iniciamos el proceso.

```
[ > restart:with(plots):
[ > assume(n,integer);
[ > with(linalg):
[ > with(LinearAlgebra):
[ > with(linalg, exponential):
```

Definimos la función inicial a la que llamamos $\phi(t, x)$.

```
[ > phi(t,x):=array(1..2,[t*x*(x^2-1),exp(-t)*x*(x^2-1)]);
```

Definimos los coeficientes de Fourier de la función inicial y los de la derivada de ésta. Los llamaremos "B[n](t)" y "Bderivada[n](s)" respectivamente.

```
[ > phi[n](t,x):=array(1..2,[t*x*(x^2-1)*sin(n*Pi*x/l)*2/l,exp(-t)*x
[ * (x^2-1)*sin(n*Pi*x/l)*2/l]);
[ > B[n](t):=map(int,phi[n](t,x),x=0..1);
[ > Bderivada[n](s):=subs(t=s,map(diff,map(int,phi[n](t,x),x=0..1),t
[ ]));
```

Introducimos los datos, las matrices A , B , la matriz inversa de B a la que llamamos "B_1", la matriz identidad, la matriz $C+I$ de la teoría que llamamos aquí "Ga" y la inversa de $C+I$ que llamamos "Ga_1".

```
[ > A:=matrix(2,2,[2,1,1,2]);
[ > B:=matrix(2,2,[1,0,1,-1]);
[ > B_1:=inverse(B);
[ > Id:=matrix(2,2,[1,0,0,1]);
[ > Ga:=evalm(B_1 &*A+Id);
[ > Ga_1:=inverse(Ga);
```

Introducimos los datos l y τ .

```
[ > l:=1;tau:=1;
```

$$\left(\frac{A n^2 \pi^2 (t-s)}{l^2} \right)$$

Definimos la matriz exponencial e .

```
[ > eAt_s:=exponential(-A*n^2*Pi^2/l^2*(t-s));
```

Definimos la matriz $Q_n(1, t)$ a la que llamamos aquí "Qn1t".

```
[ > Qn1t:=-map(int,evalm(eAt_s&*(A+B)*n^2*Pi^2/l^2),s=0..t);
```

Definimos la matriz $Q_n(k, t)$ que aquí llamamos "Qnkt[k]". Llamamos "sumQt_ktau[m]" al

siguiente valor, $\sum_{k=1}^m Q_n(k, t - k \tau)$ y "sumQt_ktau_s[m-1]" a la siguiente suma,

$\sum_{k=1}^{m-1} Q_n(k, t - k \tau - s)$. Llamaremos "uu1[m]", "uu2[m]", "uu3[m]" y "uu4[m]" a las

correspondientes expresiones de la teoría, u_1 , u_2 , u_3 y u_4 en el intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$ y llamaremos "uu5[m]" a $\phi(\tau, x)$.

```

> for m from 1 to 4 do
> sumQt_ktau[m]:=matrix(2,2,[0,0,0,0]);
> for k from 1 to m do
> Qnkt[k]:=Qn1t;
> for j from 1 to k-1 do
> Qnkt[k]:=-map(int,evalm(eAt_s*B
&*subs(t=s,Qnkt[k])*n^2*Pi^2/l^2),s=0..t)
> od:
> sumQt_ktau[m]:=evalm(sumQt_ktau[m]+subs(t=t-k*tau,Qnkt[k]))
> od:
> sumQt_ktau_s[m-1]:=matrix(2,2,[0,0,0,0]);
> for k from 1 to m-1 do
> sumQt_ktau_s[m-1]:=evalm(sumQt_ktau_s[m-1]+subs(t=t-k*tau-s,Qnkt
[k]))
> od:
> uu1[m]:=evalm(sumQt_ktau[m]* Ga_1&*
subs(t=0,map(int,phi[n](t,x),x=0..1)));
> uu2[m]:=evalm(sumQt_ktau[m]*B_1 &* A
&*Ga_1&*subs(t=tau,map(int,phi[n](t,x),x=0..1)));
> uu3[m]:=map(int,evalm(sumQt_ktau_s[m-1]*Ga_1&*
subs(t=s,map(diff,map(int,phi[n](t,x),x=0..1),t)),s=0..tau);
> uu4[m]:=map(int,evalm(subs(t=t-m*tau-s,Qnkt[m])*Ga_1&*subs(t=s,
map(diff,map(int,phi[n](t,x),x=0..1),t)),s=0..t-m*tau);
> uu5:=subs(t=tau,phi(t,x));
> sol1[m]:=sum(simplify(uu1[m][1]*sin(n*Pi*x/l)+uu2[m][1]*sin(n*Pi
*x/l)+uu3[m][1]*sin(n*Pi*x/l)+uu4[m][1]*sin(n*Pi*x/l)),n=1..20)+
uu5[1];
> sol2[m]:=sum(simplify(uu1[m][2]*sin(n*Pi*x/l)+uu2[m][2]*sin(n*Pi
*x/l)+uu3[m][2]*sin(n*Pi*x/l)+uu4[m][2]*sin(n*Pi*x/l)),n=1..20)+
uu5[2];
> dib1[m]:=plot3d(sol1[m],t=m*tau..(m+1)*tau,x=0..1):display(dib1[
m],axes=frame);
> dib2[m]:=plot3d(sol2[m],t=m*tau..(m+1)*tau,x=0..1):display(dib2[
m],axes=frame);
> od:
> dib10:=plot3d(phi(t,x)[1],t=0..1,x=0..1):display(dib10,axes=fram
e);
> dib20:=plot3d(phi(t,x)[2],t=0..1,x=0..1):display(dib20,axes=fram
e);
[ Dibujamos las dos componentes del vector solución, es decir las dos componentes de  $u(t, x)$ .
[ > display(dib10,dib1[1],dib1[2],dib1[3],dib1[4],axes=frame);
[ > display(dib20,dib2[1],dib2[2],dib2[3],dib2[4],axes=frame);

```

Bibliografía

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1964.
- [2] P. Almenar, L. Jódar and J.A. Martín, Mixed Problems for the Time-Dependent Telegraph Equation: Continuous Numerical Solutions with *A Priori* Error Bounds, *Mathematical and Computer Modelling* **25**, pp. 31-44, 1997.
- [3] T.M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, 1957.
- [4] R. Bellman and K.L. Cooke, *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York, 1963.
- [5] B. Bertman and D.J. Sandiford, Second sound in solid helium, *Scientific American* **222**, p. 92, 1970.
- [6] G. Cain and G.H. Meyer, *Separation of Variables for Partial Differential Equations. An Eigenfunction Approach*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.
- [7] C. Cattaneo, Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **247**, 431-433, 1958.
- [8] B.P. Demidowitsch, I.A. Maron and E.S. Schuwalowa, *Métodos Numéricos de Análisis*, Paraninfo, Madrid, 1980.
- [9] J. Dieudonne, *Cálculo Infinitesimal*, Ediciones Omega, Barcelona, 1971.
- [10] O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verduyn Lunel and H.-O. Walther, *Delay Equations*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [11] L.E. El'sgol'ts and S.B. Norkin, *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, New York, 1973.

- [12] S.J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover, New York, 1993.
- [13] T.M. Flett, *Differential Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [14] G.B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*, Wadsworth & Brooks, Pacific Groove, 1992.
- [15] G. Golub and C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns-Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1989.
- [16] E.A. Gonzalez-Velasco, *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*, Academic Press, New York, 1995.
- [17] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [18] L. Jódar, *Ampliación de Matemáticas*, U.P. de Valencia, Valencia, 1996.
- [19] L. Jódar and P. Almenar, Accurate Continuous Numerical Solutions of Time Dependent Mixed Partial Differential Problems, *Computers and Mathematics with Applications* **32**, pp. 5-19, 1996.
- [20] L. Jódar, E. Navarro and J. A. Martín, Exact and Analytic-Numerical Solutions of Strongly Coupled Mixed Diffusion Problems. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **43**, pp. 1-25, 2000.
- [21] D.D. Joseph and L. Preziosi, Heat waves, *Review of Modern Physics* **61**, pp. 41-73, 1989.
- [22] V. Kolmanovskii and A. Myshkis, *Applied Theory of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- [23] V. Kolmanovskii and A. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [24] M. Kot, *Elements of Mathematical Ecology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [25] Y. Kuang, *Delay Differential Equations. With Applications in Population Dynamics*, Academic Press, San Diego, 1993.

- [26] V.V. Kulish and V.B. Novozhilov, An integral equation for the dual-lag model of heat transfer, *ASME Journal of Heat Transfer* **126**, pp. 805-808, 2004.
- [27] J.A. Martín, F. Rodríguez and R. Company, Analytic Solution of Mixed Problems for the Generalized Diffusion Equation with Delay, *Mathematical and Computer Modelling* **40**, pp. 361-369, 2004.
- [28] J.D. Murray, *Mathematical Biology. I: An Introduction*, Third edition, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [29] E. Navarro, E. Ponsoda and L. Jódar, A Matrix Approach to the Analytic-Numerical Solution of Mixed Partial Differential Systems, *Computers and Mathematics with Applications* **30**, pp. 99-109, 1995.
- [30] I. Peral, *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- [31] M.H. Protter and C.B. Morrey, *A first Course in Real Analysis*, Springer, New York, 1998.
- [32] T. Q. Qiu and C. L. Tien, Short-pulse laser heating on metals, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **35**, pp. 719-726, 1992.
- [33] T. Q. Qiu and C. L. Tien, Heat transfer mechanisms during short-pulse laser heating of metals, *ASME Journal of Heat Transfer* **115**, pp. 835-841, 1993.
- [34] E.J. Scott, On a Class of Linear Partial Differential Equations with Retarded Argument in Time, *Buletinul Institutului Politehnic Din Iasi* **15**, pp. 99-103, 1969.
- [35] C.C. Travis and G.F. Webb, Existence and Stability for Partial Functional Differential Equations, *Transactions of the American Mathematical Society*. **200**, pp. 395-418, 1974.
- [36] C.C. Travis and G.F. Webb, Partial Differential Equations with Deviating Arguments in the Time Variable, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **56**, pp. 397-409, 1976.
- [37] L. Turyn, A partial functional differential equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **263**, pp. 1-13, 2001.
- [38] D.Y. Tzou, Experimental support for the lagging behavior in heat propagation, *AIAA Journal of Thermophysics and Heat Transfer* **9**, pp. 686-693, 1995.

- [39] D.Y. Tzou, The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **38**, pp. 3231-3240, 1995.
- [40] D.Y. Tzou, *Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior*, Taylor & Francis, Washington, 1996.
- [41] P. Vernotte, Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **246**, 3154-3155, 1958.
- [42] P. Vernotte, P. Vernotte, Some possible complications in the phenomena of thermal conduction, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **252**, 2190-2191, 1961.
- [43] J. Wiener and L. Debnath, Boundary value problems for the diffusion equation with piecewise continuous time delay, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **20**, pp. 187-195, 1997.
- [44] J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [45] M. Xu and L. Wang, Dual-phase-lagging heat conduction based on Boltzmann transport equation, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **48**, pp. 5616-5624, 2005.
- [46] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante