

Apuntes de la asignatura
Química Física II (Licenciatura en Química)
Tema 6: Momento angular

Ángel José Pérez Jiménez
Dept. de Química Física (Univ. Alicante)

Índice

1. Momento angular en Mecánica Clásica.	2
1.1. Definición del momento angular de una partícula en Mecánica Clásica	2
1.2. Significado físico del momento angular	3
2. Tratamiento mecano-cuántico del momento angular orbital.	3
2.1. Operadores del momento angular en coordenadas cartesianas	3
2.2. Operadores del momento angular en coordenadas esféricas	4
3. Autofunciones y autovalores de \hat{L}_z y \hat{L}^2.	5
3.1. Separación de variables	5
3.2. Autofunciones y autovalores de \hat{L}_z	6
3.3. Autofunciones y autovalores de \hat{L}^2	7
4. Armónicos esféricos	8
4.1. Expresión analítica de los armónicos esféricos	8
4.2. Armónicos esféricos reales	10
4.3. Representación gráfica de los armónicos esféricos	11
5. Problemas	16

1. Momento angular en Mecánica Clásica.

1.1. Definición del momento angular de una partícula en Mecánica Clásica

- Se define como el vector, \vec{L} , que resulta del producto vectorial entre su vector de posición, \vec{r} , y su vector momento lineal \vec{p} (ver Figura 1)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1)$$

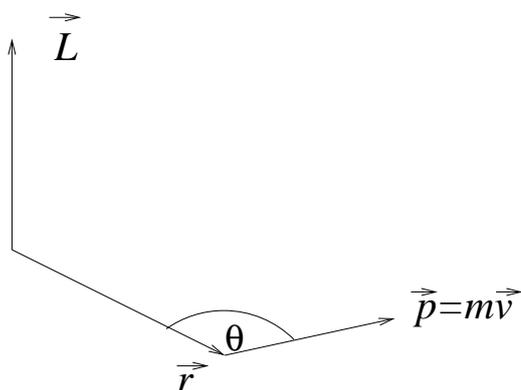


Figura 1: Momento angular de una partícula.

- Cuyas tres componentes cartesianas son

$$L_x = yp_z - zp_y \quad (2)$$

$$L_y = zp_x - xp_z \quad (3)$$

$$L_z = xp_y - yp_x \quad (4)$$

que pueden deducirse de la expresión

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \quad (5)$$

- Y cuyo módulo viene dado por:

$$\|\vec{L}\| = \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{p}\| \cdot \text{sen}\theta_{r,p} \quad (6)$$

1.2. Significado físico del momento angular

Momento angular y giro de una partícula. \vec{L} caracteriza el cambio de orientación de una partícula:

- Su dirección es la del eje de giro: perpendicular al plano formado por los vectores \vec{r} y \vec{p} .
- Su sentido se obtiene de aplicar la regla del sacacorchos \rightarrow sentido del giro.
- Su longitud es tanto mayor cuanto más pronunciado es dicho giro: mayor velocidad y mayor desalineamiento entre \vec{r} y \vec{p} .

Momento angular y torque sobre la partícula. La derivada respecto al tiempo del momento angular de una partícula es igual al momento de la fuerza que actúa sobre ésta (torque):

$$\vec{M} \equiv \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (7)$$

Conservación del momento angular.

- Por tanto, si la fuerza \vec{F} que actúa sobre la partícula tiene la misma dirección que \vec{r} el torque es nulo y \vec{L} es constante:

$$\text{Si } \vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{p} = 0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{L} = \text{const.} \quad (8)$$

- El caso anterior sucede en los llamados *problemas de campo central*, en los que el potencial es independiente de la orientación de \vec{r} (sólo depende de su módulo), como le sucede al electrón en el átomo de hidrógeno.

2. Tratamiento mecano-cuántico del momento angular orbital.

2.1. Operadores del momento angular en coordenadas cartesianas

Operadores del momento angular. Empleando las reglas de construcción de operadores introducidas en el Tema 4, los operadores correspondientes a las tres componentes cartesianas del operador momento angular y de su módulo al cuadrado son:

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (9)$$

$$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (10)$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (11)$$

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \quad (12)$$

Reglas de conmutación. Empleando las expresiones anteriores es posible demostrar que:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \quad (13)$$

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x \quad (14)$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y \quad (15)$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0 \quad (16)$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_y] = 0 \quad (17)$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0 \quad (18)$$

De forma que:

- No es posible asignar valores precisos de manera simultánea a más de una componente del momento angular
 \hookrightarrow si se conoce con precisión el valor de una de las componentes, las otras dos quedan indeterminadas
- Es posible determinar simultáneamente el valor del cuadrado del momento angular y una de sus componentes.

2.2. Operadores del momento angular en coordenadas esféricas

Expresión de los operadores en coordenadas polares esféricas.

- En los problemas donde el momento angular es importante, como sucede con potenciales de campo central, las coordenadas cartesianas no son el sistema de coordenadas más apropiado.
- En problemas con simetría esférica es conveniente trabajar con coordenadas esféricas (ver figura 2)

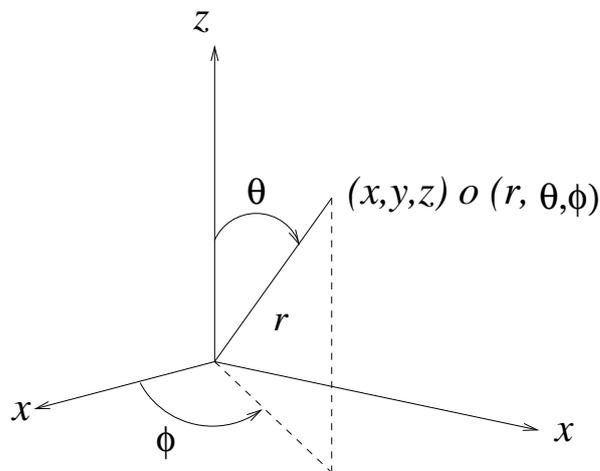


Figura 2: Coordenadas esféricas.

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (19)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \quad \theta = \arccos \frac{z}{r} \quad (20)$$

$$z = r \cos \theta \quad \phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (21)$$

y cuyos rangos de definición son:

$$0 \leq r \leq \infty \quad (22)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad (23)$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (24)$$

y, además

$$d\tau = dx dy dz = r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi \quad (25)$$

- Conviene, pues, expresar los operadores del momento angular en función de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , empleando sus definiciones y la regla de la cadena, para llegar a:

$$\hat{L}_x = i\hbar \left(\operatorname{sen} \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (26)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \operatorname{sen} \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (27)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (28)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (29)$$

Variables angulares.

- Obsérvese que los operadores \hat{L}_x , \hat{L}_y , \hat{L}_z y \hat{L}^2 sólo dependen de las variables angulares θ y ϕ .
- En particular \hat{L}_z sólo depende ϕ , por lo que habitualmente se aborda la determinación de las autofunciones y autovectores *comunes* a \hat{L}_z y \hat{L}^2 .

3. Autofunciones y autovalores de \hat{L}_z y \hat{L}^2 .

3.1. Separación de variables

- Vamos a determinar las funciones propias comunes de \hat{L}_z y \hat{L}^2 , denominadas *armónicos esféricos*:

$$\hat{L}_z Y = bY \quad (30)$$

$$\hat{L}^2 Y = cY \quad (31)$$

$$(32)$$

- Como \hat{L}_z y \hat{L}^2 sólo dependen de las variables angulares θ y ϕ , sus correspondientes autofunciones comunes son funciones de dichas variables, de forma que:

$$-i\hbar \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \phi} = bY(\theta, \phi) \quad (33)$$

$$-\hbar^2 \left(\frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) = cY(\theta, \phi) \quad (34)$$

- Puesto que \hat{L}_z sólo depende de ϕ podemos buscar una solución que tenga la forma:

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (35)$$

3.2. Autofunciones y autovalores de \hat{L}_z

Solución general. Introduciendo la expresión para $Y(\theta, \phi)$ dada por (35) en la ecuación de autovalores de \hat{L}_z , y teniendo en cuenta que éste sólo actúa sobre ϕ , se llega a:

$$-i\hbar \frac{d\Phi(\phi)}{d\phi} = b\Phi(\phi) \quad (36)$$

cuya solución general es:

$$\Phi(\phi) = Ae^{ib\phi/\hbar} \quad (37)$$

Condiciones de contorno. Para ser aceptable la función $\Phi(\phi)$ debe ser unievaluada:

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$

$$\hookrightarrow A = Ae^{ib2\pi/\hbar}$$

$$\hookrightarrow 1 = e^{ib2\pi/\hbar} = \cos \frac{2\pi b}{\hbar} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi b}{\hbar} \begin{cases} 1 = \cos \frac{2\pi b}{\hbar} \\ 0 = \operatorname{sen} \frac{2\pi b}{\hbar} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \frac{2\pi b}{\hbar} = m(2\pi); \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Cuantización y normalización. En otras palabras, los autovalores de la componente z del momento angular están *cuantizados*:

$$\hat{L}_z \Phi_m(\phi) = m\hbar \Phi_m(\phi); \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (38)$$

Finalmente, para determinar A aplicamos la condición de normalización sobre $\Phi_m(\phi)$:

$$1 = \langle \Phi_m | \Phi_m \rangle = |A|^2 \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} e^{im\phi} d\phi = 2\pi |A|^2 \quad (39)$$

$$\hookrightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (40)$$

de forma que:

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \quad (41)$$

Conjunto ortonormal. Puesto que las funciones $\Phi_m(\phi)$ son autofunciones no degeneradas de un operador Hermítico, forman un conjunto ortonormal:

$$\langle \Phi_m | \Phi_{m'} \rangle = \int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\phi) \Phi_{m'}(\phi) d\phi = \delta_{m,m'} \quad (42)$$

3.3. Autofunciones y autovalores de \hat{L}^2

Ecuación diferencial para $\Theta(\theta)$.

- Introduciendo la expresión para $Y(\theta, \phi)$ dada por (35) en la ecuación de autovalores de \hat{L}^2 se llega a:

$$-\hbar^2 \left[\Phi(\phi) \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + \Phi(\phi) \cot \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\Theta(\theta)}{\text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} \right] = c \Theta(\theta) \Phi(\phi) \quad (43)$$

- Introduciendo la forma de $\Phi(\phi)$ deducida en el apartado anterior, dada por (41), en la ecuación (43) y reagrupando se tiene que:

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} + \left(\frac{c}{\hbar^2} - \frac{m^2}{\text{sen}^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0 \quad (44)$$

que es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes variables.

- Haciendo el cambio de variable

$$w = \cos \theta; \text{ (obsérvese que } -1 \leq w \leq +1) \quad (45)$$

introduciendo la función

$$Z(w) = \Theta(\theta) \quad (46)$$

y expresando las derivadas de θ en función de las de w :

$$\frac{d}{d\theta} = -\text{sen} \theta \frac{d}{dw} \quad (47)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} = -\cos \theta \frac{d}{dw} + \text{sen}^2 \theta \frac{d^2}{dw^2} \quad (48)$$

la ecuación diferencial se transforma en:

$$(1 - w^2)Z'' - 2wZ' + \left(\frac{c}{\hbar^2} - \frac{m^2}{1 - w^2} \right) Z = 0 \quad (49)$$

Polinomios asociados de Legendre.

- La ecuación anterior es análoga a la denominada *ecuación diferencial asociada de Legendre*:

$$(1 - w^2)P'' - 2wP' + \left(l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - w^2} \right) P = 0 \quad (50)$$

cuyas soluciones son los denominados *polinomios asociados de Legendre* de grado l y orden m , $P_l^{|m|}(w)$: ver tabla 1.

Tabla 1: Algunos polinomios asociados de Legendre.

l	$ m $	$P_l^{ m }(\cos \theta)$
0	0	1
1	0	$\cos \theta$
1	1	$\text{sen } \theta$
2	0	$(3 \cos^2 \theta - 1)/2$
2	1	$3 \cos \theta \text{sen } \theta$
2	2	$3 \text{sen}^2 \theta$
3	0	$(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)/2$
3	1	$3 \text{sen } \theta (5 \cos^3 \theta - 1)/2$
3	2	$15 \text{sen}^2 \theta \cos \theta$
3	3	$15 \text{sen}^3 \theta$

- Dichos polinomios son funciones aceptables pues no divergen, ya que cada polinomio se trunca hasta un cierto orden, lo que conduce a la cuantización de los valores de l :

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (51)$$

y a la siguiente relación entre m y l :

$$|m| \leq l \Rightarrow m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l \quad (52)$$

- La igualdad entre ambas ecuaciones diferenciales (49) y (50) requiere, pues que *los autovalores de \hat{L}^2 estén cuantizados*:

$$c = l(l+1)\hbar^2; \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (53)$$

- Finalmente, de todo lo anterior y tras imponer la condición de normalización, se deduce que la función $\Theta(\theta)$ viene dada por:

$$\Theta_{l,m}(\theta) = (-1)^m \left(\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!} \right)^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) \quad (54)$$

4. Armónicos esféricos

4.1. Expresión analítica de los armónicos esféricos

- En resumen: las autofunciones comunes de \hat{L}_z y \hat{L}^2 , denominadas *armónicos esféricos* se pueden expresar como:

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = (-1)^m \left(\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!} \right)^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (55)$$

algunas de las cuales se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2: Algunos armónicos esféricos

l	m	$Y_{l,m}(\theta, \phi)$
0	0	$(1/(4\pi))^{1/2}$
1	0	$(3/(4\pi))^{1/2} \cos \theta$
1	± 1	$\mp (3/(8\pi))^{1/2} \sin \theta \exp(\pm i\phi)$
2	0	$(5/(16\pi))^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1)$
2	± 1	$\mp (15/(8\pi))^{1/2} \cos \theta \sin \theta \exp(\pm i\phi)$
2	± 2	$(15/(32\pi))^{1/2} \sin^2 \theta \exp(\pm 2i\phi)$
3	0	$(7/(16\pi))^{1/2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$
3	± 1	$\mp (21/(64\pi))^{1/2} \sin \theta (5 \cos^3 \theta - 1) \exp(\pm i\phi)$
3	± 2	$(105/(32\pi))^{1/2} \sin^2 \theta \cos \theta \exp(\pm 2i\phi)$
3	± 3	$\mp (35/(64\pi))^{1/2} \sin^3 \theta \exp(\pm 3i\phi)$

- Recordemos que tanto el módulo como la componente z del momento angular están cuantizados:

$$\hat{L}^2 Y_{l,m} = l(l+1)\hbar^2 Y_{l,m} \quad \rightarrow \quad |\vec{L}| = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (56)$$

$$\hat{L}_z Y_{l,m} = m\hbar Y_{l,m} \quad \rightarrow \quad |\vec{L}_z| = \hbar m \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \quad (57)$$

- La relación entre m y l establece que, por cada valor de l hay $2l + 1$ posibles valores distintos de $m \rightarrow$ los armónicos esféricos presentan una degeneración $2l + 1$ respecto a \hat{L}^2 .
- Recordemos también que $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ no son autofunciones de \hat{L}_x y \hat{L}_y , por lo que dichas componentes del momento angular están indeterminadas.
- Por esta razón es frecuente usar una representación gráfica del momento angular como la de la figura 3, de manera que el momento angular de una partícula sería cualquiera de los infinitos vectores de módulo $l(l+1)\hbar$ y componente $m\hbar$ que definen el cono representado en dicha figura:

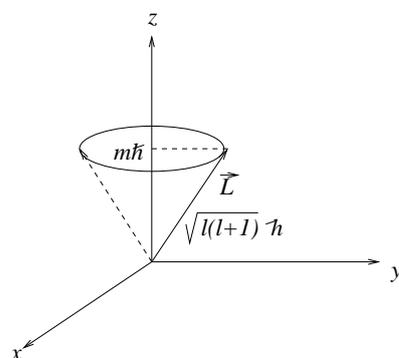


Figura 3: Representación vectorial del momento angular de una partícula.

- Los armónicos esféricos formarán parte de las funciones de onda que describen el movimiento de los electrones en átomos y moléculas, de ahí su importancia en Química Cuántica.
- Una notación habitual de los armónicos esféricos emplea la letra s, p, d, f, \dots según el valor de $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ y un subíndice según el valor de m . Por ejemplo: $Y_{l=3, m=-2} \rightarrow f_{-2}$.

4.2. Armónicos esféricos reales

- Los armónicos esféricos son funciones complejas cuando $m \neq 0$.
- Sin embargo es posible combinar $Y_{l, +|m|}$ con $Y_{l, -|m|}$ para obtener dos nuevas funciones reales denominadas *armónicos esféricos reales* (ver tabla 3):

$$Y_{l,+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{l,+|m|} + Y_{l,-|m|}) \quad (58)$$

$$Y_{l,-} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(Y_{l,+|m|} - Y_{l,-|m|}) \quad (59)$$

- Dichas funciones siguen siendo autofunciones de \hat{L}^2 pues son combinaciones lineales de funciones con el mismo valor propio de \hat{L}^2 .
- Sin embargo los armónicos esféricos reales no son autofunciones de \hat{L}_z por la razón contraria.

Tabla 3: Algunos armónicos esféricos reales

Notación	l	m	$Y_{l m }^{\pm}(\theta, \phi)$	Pol. cartesiano
s	0	0	$(1/(4\pi))^{1/2}$	1
p_z	1	0	$(3/(4\pi))^{1/2} \cos \theta$	z
p_x	1	1	$(3/(4\pi))^{1/2} \sin \theta \cos \phi$	x
p_y	1	1	$(3/(4\pi))^{1/2} \sin \theta \sin \phi$	y
d_{z^2}	2	0	$(5/(16\pi))^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$2z^2 - x^2 - y^2$
d_{xz}	2	1	$(15/(4\pi))^{1/2} \cos \theta \sin \theta \cos \phi$	xz
d_{yz}	2	1	$(15/(4\pi))^{1/2} \cos \theta \sin \theta \sin \phi$	yz
$d_{x^2-y^2}$	2	2	$(15/(16\pi))^{1/2} \sin^2 \theta \cos 2\phi$	$x^2 - y^2$
d_{xy}	2	2	$(15/(16\pi))^{1/2} \sin^2 \theta \sin 2\phi$	xy

- En la tabla anterior se incluye también:

Su expresión en coordenadas cartesianas, pues resulta especialmente sencilla.

La notación habitual de estas funciones, que emplea la letra s, p, d, f, \dots según el valor de $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ y un subíndice que corresponde al término más alto del polinomio cartesiano correspondiente.

4.3. Representación gráfica de los armónicos esféricos

- Dada su importancia es conveniente representar gráficamente los armónicos esféricos.
- Dicha representación se suele realizar mediante *gráficos polares*: para cada dirección definida por los valores de θ y ϕ se representa un segmento de longitud igual al valor absoluto del armónico esférico o su módulo al cuadrado.

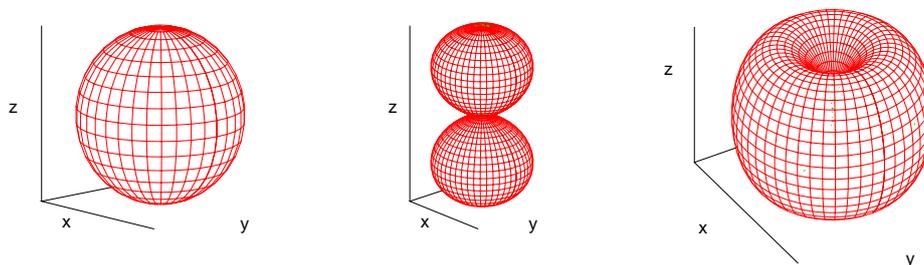


Figura 4: Representación en coordenadas polares esféricas del módulo al cuadrado de algunos armónicos esféricos. De izquierda a derecha: $|Y_{0,0}|^2$, $|Y_{1,0}|^2$, $|Y_{1,1}|^2 = |Y_{1,-1}|^2$.

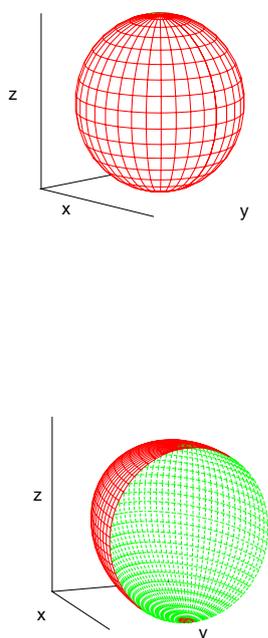


Figura 5: Arriba: representación en coordenadas polares esféricas del módulo al cuadrado del armónico esférico real s . Abajo: corte transversal.

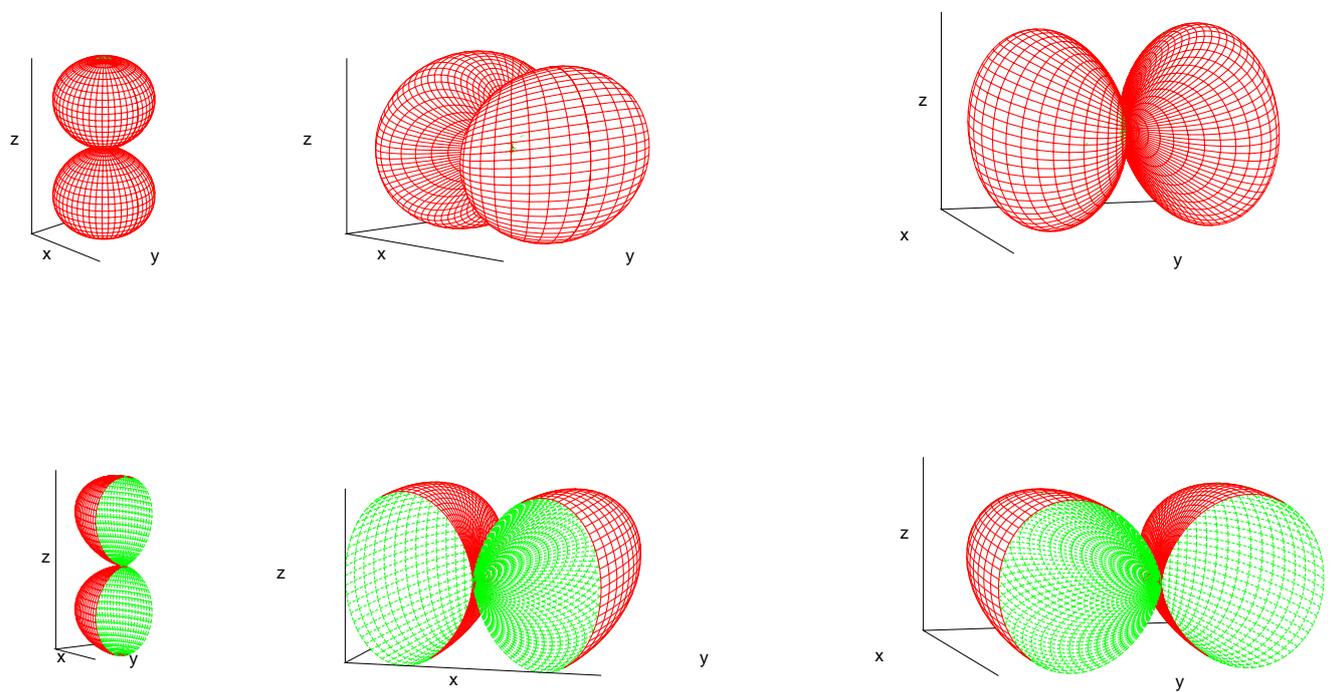


Figura 6: Arriba, y de izquierda a derecha: representación en coordenadas polares esféricas del módulo al cuadrado de los armónicos esféricos reales p_z , p_x y p_y . Abajo: cortes transversales.

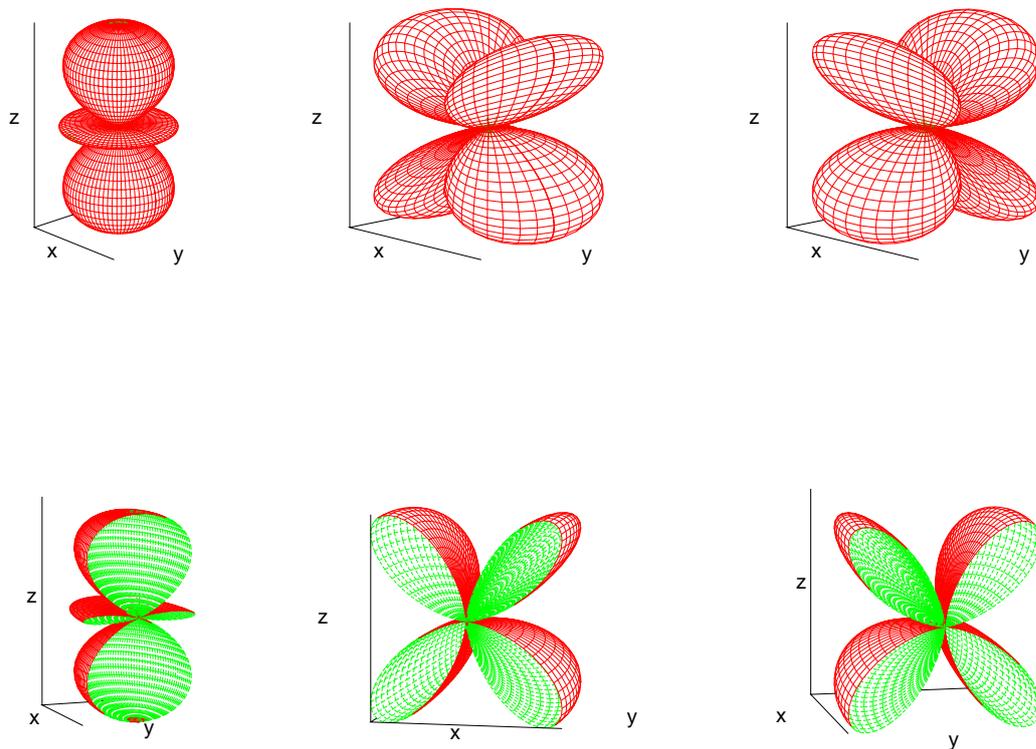


Figura 7: Arriba, y de izquierda a derecha: representación en coordenadas polares esféricas del módulo al cuadrado de los armónicos esféricos reales d_z^2 , d_{xz} y d_{yz} . Abajo: cortes transversales.

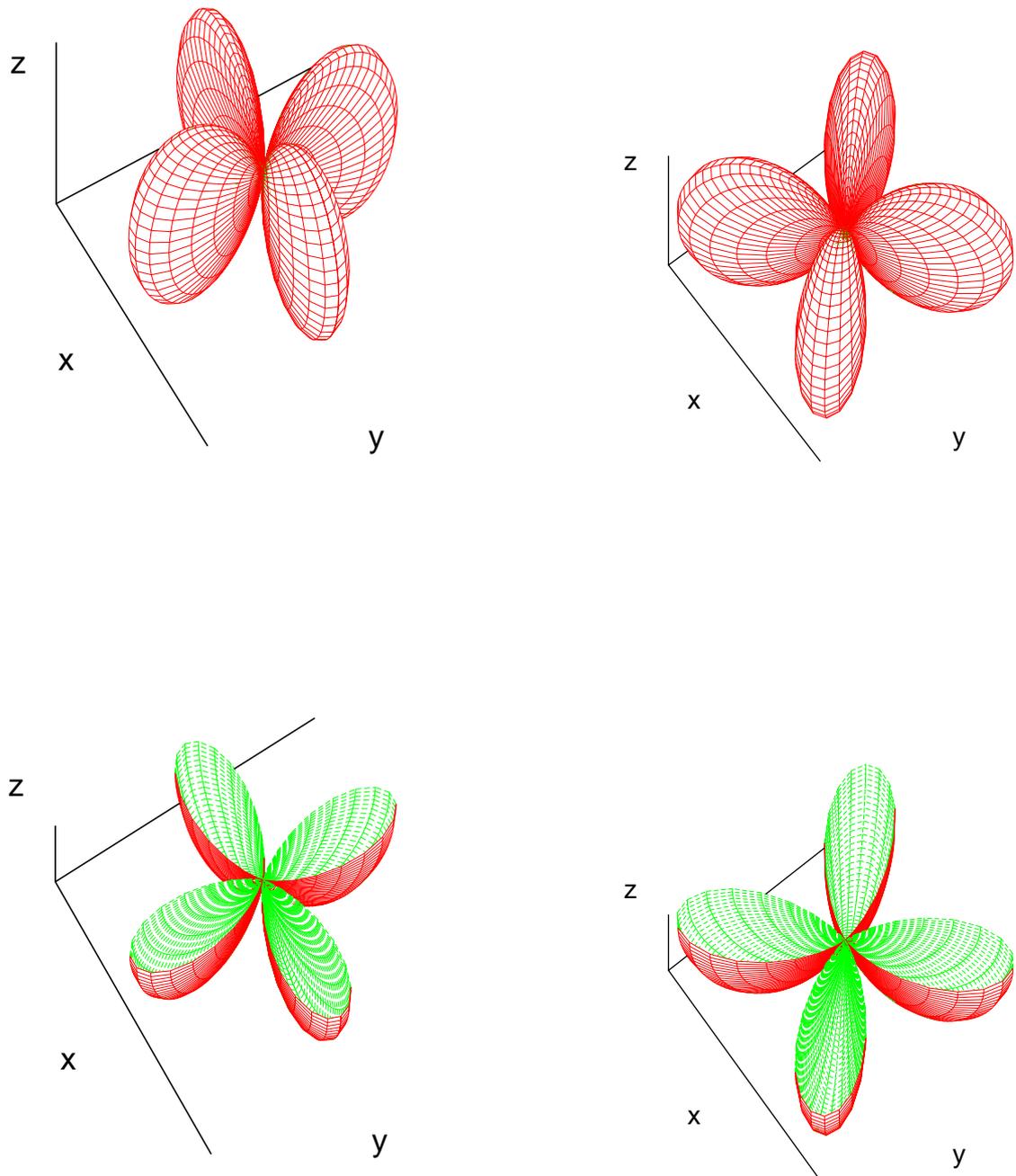


Figura 8: Arriba, y de izquierda a derecha: representación en coordenadas polares esféricas del módulo al cuadrado de los armónicos esféricos reales $d_{x^2-y^2}$ y d_{xy} . Abajo: cortes transversales.

5. Problemas

1: Calcular el valor de los siguientes conmutadores:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y], [\hat{L}_y, \hat{L}_z], [\hat{L}_z, \hat{L}_x], [\hat{L}^2, \hat{L}_x]$$

y evaluar el producto vectorial $\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}}$.

2: Calcular, si es posible, los valores propios de \hat{L}^2 y \hat{L}_z para las funciones:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= N \cos \theta & \Psi_2 &= N \sin \theta \cos \varphi \\ \Psi_3 &= N \sin \theta \sin \varphi & \Psi_4 &= \Psi_2 + i \Psi_3 \end{aligned}$$

Considerar \hat{L}_z y \hat{L}^2 en coordenadas polares.

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

3: Una partícula de masa m está restringida a moverse sobre una circunferencia de radio r , sin estar sometida a ningún potencial. Si en unidades atómicas tenemos que:

$$\hat{p}_x = -i \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \hat{p}_y = -i \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad E_{\text{cinética}} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m}$$

donde $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Obtener la expresión de la energía y de la función de onda aceptable y normalizada para los estados estacionarios del sistema.

4: Sabiendo que los denominados *operadores escalera* se definen como $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i \hat{L}_y$, encontrar el valor de:

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_{\pm}], [L^2, \hat{L}_{\pm}], [\hat{L}_+, \hat{L}_-], [\hat{L}_-, \hat{L}_+]$$