# Index

# Index

# Teoremas de Fubini, $f : X \times Y \to [0, \infty]$

# Teoremas de Fubini, $f : X \times Y \to [0, \infty]$

## Teorema de Fubini I

Sea $f : X \times Y \to [0, \infty]$ $\Sigma_1 \times \Sigma_2-$medible, entonces:

1.- Para cada $x \in X$, la función sección $f_x : Y \to [0, \infty]$, $f_x(y) := f(x, y)$, es $\Sigma_2$-medible.

2.- Para cada $y \in Y$, la función sección $f_y : X \to [0, \infty]$, $f_y(x) := f(x, y)$, es $\Sigma_1$-medible.

3.- La función $y \to \displaystyle\int_X f_y d\lambda$ de $Y$ en $[0, \infty]$, que denotaremos por $\displaystyle\int_X f(x, y) d\lambda$ es $\Sigma_2-$medible.

4.- La función $x \to \displaystyle\int_Y f_x d\mu$ de $X$ en $[0, \infty]$, que denotaremos por $\displaystyle\int_Y f(x, y) d\mu$ es $\Sigma_1-$medible.

5.- Se cumple que

$$\int_{X\times Y} f d(\lambda\otimes\mu) = \int_X \left(\int_Y f_x d\mu\right) d\lambda = \int_Y \left(\int_X f_y d\lambda\right) d\mu,$$

o bien

$$\int_{X\times Y} f d(\lambda\otimes\mu) = \int_X d\lambda \int_Y f_x d\mu = \int_Y d\mu \int_X f_y d\lambda.$$

Estas igualdades se escriben en la práctica así:

$$\int_{X\times Y} f(x,y) d(\lambda\otimes\mu) = \int_X d\lambda \int_Y f(x,y) d\mu = \int_Y d\mu \int_X f(x,y) d\lambda.$$

# Teorema de Fubini $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$

# Teorema de Fubini $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$

## Teorema de Fubini II

Sea $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \otimes \mu-$integrable. Entonces se tiene

1.- Para $\lambda-$casi todo $x \in X$, la función sección $f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}$, es $\mu-$integrable.

2.- Para $\mu-$casi todo $y \in Y$, la función sección $f_y : X \to \overline{\mathbb{R}}$, es $\lambda-$integrable.

3.- La integral $\displaystyle\int_Y f_x d\mu := \int_Y f(x,y) d\mu$ es una función de $x$ definida $c.p.t.(X)$ y $\lambda-$integrable.

4.- La integral $\displaystyle\int_X f_y d\lambda := \int_X f(x,y) d\lambda$ es una función de $y$ definida $c.p.t.(Y)$ y $\mu-$integrable.

5.- Se tiene que

$$\int_{X \times Y} f d(\lambda \otimes \mu) = \int_X d\lambda \int_Y f_x d\mu = \int_Y d\mu \int_X f_y d\lambda.$$

# Teorema de Fubini, $f : X \times Y \to \mathbb{C}$

# Teorema de Fubini, $f : X \times Y \to \mathbb{C}$

## Teorema de Fubini III

Sea $f : X \times Y \to \mathbb{C}$, $\lambda \otimes \mu-$integrable. Entonces se tiene

1.- Para $\lambda$-casi todo $x \in X$, la función sección $f_x : Y \to \mathbb{C}$, es $\mu-$integrable.

2.- Para $\mu$-casi todo $y \in Y$, la función sección $f_y : X \to \mathbb{C}$, es $\lambda-$integrable.

3.- La integral $\int_Y f_x d\mu := \int_Y f(x,y) d\mu$ es una función de $x$ definida $c.p.t.(X)$ y $\lambda-$integrable.

4.- La integral $\int_X f_y d\lambda := \int_X f(x,y) d\lambda$ es una función de $y$ definida $c.p.t.(Y)$ y $\mu-$integrable.

5.- Se tiene que

$$\int_{X \times Y} f d(\lambda \otimes \mu) = \int_X d\lambda \int_Y f_x d\mu = \int_Y d\mu \int_X f_y d\lambda,$$

# Teorema de Hobson-Tonelli

# Teorema de Hobson-Tonelli

## Teorema de Hobson-Tonelli

Sea $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{C})$, una función $\Sigma_1 \times \Sigma_2-$medible. Si alguna de las integrales reiteradas $\int_Y d\mu \int_X |f(x,y)|\, d\lambda$, $\int_X d\lambda \int_Y |f(x,y)|\, d\mu$, es finita, entonces $f$ es $\lambda \otimes \mu-$integrable y se tiene que

$$\int_{X\times Y} f(x,y) d(\lambda \otimes \mu) = \int_X d\lambda \int_Y f(x,y) d\mu = \int_Y d\mu \int_X f(x,y) d\lambda.$$