TEORÍA DE LA MEDIDA

Departamento de Análisis Matemático

Problemas Capítulo II

1.- Sea $\mathcal{S}$ el $\sigma-$anillo de todas las partes de un conjunto X. Definimos una función μ de $\mathcal{S}$ en $[0,\infty]$ de la siguiente manera:

$$\mu(A) = \begin{cases} n & \text{si } \operatorname{card}(A) = n \\ \infty & \text{si } A \text{ es infinito} \end{cases}.$$

Demostrar que μ es una medida (medida cardinal o de conteo).

2.- Si $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida y si (A_n) es una sucesión decreciente de elementos de $\mathcal{S}$ tal que $\mu(A_1) < \infty$, es sabido que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

¿Es siempre verdad la igualdad anterior si se prescinde de la condición $\mu(A_1) < \infty$?

3.- Sea (X,Σ) un espacio medible y $\mu := \Sigma \to [0,\infty]$, una aplicación tal que

a) $\mu(A) < \infty$, para algún $A \in \Sigma$

b) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si $A, B \in \Sigma$ y $A \cap B = \emptyset$

c) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ si $A_n \in \Sigma$.

Demostrar que μ es una medida.

4.- Sea $X = \{x, y\}$ y

$$\mu^*(\emptyset) = 0, \quad \mu^*(\{x\}) = 2, \quad \mu^*(\{y\}) = 3, \quad \mu^*(X) = 4.$$

Demostrar que μ^* es una medida exterior sobre el anillo hereditario de todas las partes de X. ¿Es μ^* una medida sobre el mismo anillo?

5.- Sea $\mathcal{H}$ el anillo hereditario formado por todas las partes de un conjunto X. Sea μ^* una medida exterior definida sobre $\mathcal{H}$. Demostrar que la clase $\mathcal{M}$ de todos los elementos μ^*-medibles de $\mathcal{H}$ es una $\sigma-$álgebra.

6.- Si X es numerable y μ una medida definida sobre el conjunto de todos los subconjuntos de X, demostrar que existen una sucesión $\{\alpha_n\} \subset [0,\infty]$ y una numeración $\{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ de los elementos de X tales que $\mu(A) = \sum_{x(n)\in A} \alpha_n$, para todo $A \subset X$.

7.- Sea $\mathcal{H}$ un $\sigma-$ anillo hereditario sobre X. Sean μ^*una medida exterior sobre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{M}$ el σ-anillo de los conjuntos μ^*- medibles. Se dice que la medida exterior μ^*es regular si para todo $E \in \mathcal{H}$, existe $F \in \mathcal{M}$ tal que $E \subset F$ y $\mu^*(F) = \mu^*(E)$. Demostrar que si μ^*es regular y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión expansiva en $\mathcal{H}$, se tiene que

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_n \mu^*(E_n).$$

8.- Sea X un conjunto infinito no numerable y sea $\mathcal{M}$ la colección de todos los $E \subset X$ tales que E o E^c es a lo sumo numerable; pongamos $\mu(E) = 0$ si E es numerable y $\mu(E) = 1$ si E^c es numerable. Demostrar que $(X,\mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida.

9.- Sea $X = \mathbb{N}$ (números enteros positivos) y $\mathcal{A}$ la colección de todos los subconjuntos A de $\mathbb{N}$ tales que A o bien A^c es finito. Se pide:

a) Demostrar que $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre $\mathbb{N}$.

b) Pongamos

$$\mu(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{n_1^2} + \dfrac{1}{n_2^2} + ... + \dfrac{1}{n_p^2} & \text{si } A = \{n_1, n_2, ...n_p\} \\ \infty & \text{si } A \text{ es infinito} \\ 0 & \text{si } A = \emptyset. \end{cases},$$

demostrar que μ es una medida aditiva pero no es una medida.

10.- Poner un ejemplo de una medida μ sobre un anillo $\mathcal{R}$ tal que no sea única la extensión de μ a $\mathcal{S}(\mathcal{R})$.
(Ayuda: considerar en la recta real $\mathbb{R}$, el anillo $\mathcal{R}$ de las uniones finitas de intervalos semi-abiertos y en $\mathcal{S}(\mathcal{R}) = \mathcal{B}$, la $\sigma-$álgebra de Borel, definamos la medida μ_1, con $\mu_1(\emptyset) = 0$, y $\mu_1(A) = \infty$, $A \neq \emptyset$, $A \in \mathcal{B}$; tomemos ahora como μ_2 la medida de conteo.)

11.- Sea μ una medida sobre un anillo $\mathcal{R}$. Sea μ^* la medida exterior sobre $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ definida por μ. Si $A \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, demostrar que existe $F \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$ tal que $A \subset F$ y $\mu^*(F) = \mu^*(A)$.

12.- Sea μ una medida sobre un anillo $\mathcal{R}$. Sea μ^* la medida exterior sobre $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ definida por μ. Demostrar que μ^* es regular.

Febrero de 2011