



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

Escola Politècnica Superior  
Escuela Politécnica Superior



**TEORIA DE ESTRUCTURAS**  
**Ingeniería Geológica**

# **PROBLEMAS DE EXAMEN**

Curso 2008/09

Elaborados por los profesores:

Luis Bañón Blázquez (COL)  
Salvador Esteve Verdú (ASO)

# PRÓLOGO

La presente publicación recoge los ejercicios de exámenes realizados en el curso 2008/09, correspondientes a la asignatura “Teoría de Estructuras”, impartida en la titulación de Ingeniería Geológica.

La Ingeniería de Estructuras es una rama de gran interés para el ingeniero geólogo, ya que posibilita la materialización de soluciones técnicas viables planteadas por muchos problemas de origen geológico-geotécnico.

Esperamos que esta recopilación sea de provecho como material de apoyo para preparar la asignatura a todos vosotros. Así mismo, aprovechamos para pedirnos que si encontráis alguna errata en las soluciones planteadas nos lo hagáis saber para corregirlo en futuras ediciones.

Alicante, a 1 de mayo de 2010

Los profesores de la asignatura

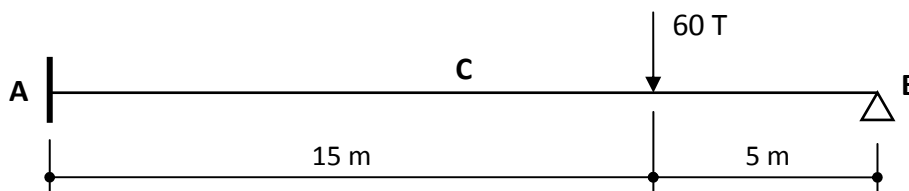


<b>7502</b>	<b>TEORÍA DE ESTRUCTURAS</b>	
<b>PARTE: 1 de 2</b>	<b>EJERCICIO PRÁCTICO 1</b>	
Convocatoria: <b>Diciembre 2008</b>	Fecha: <b>03.11.2008</b>	<b>Valor: 5 / 10</b>
Curso: <b>2008-2009</b>	Tiempo: <b>75 min</b>	
Se permite el uso de calculadora programable y todo tipo de material bibliográfico auxiliar. Deberán justificarse suficientemente los resultados obtenidos.		

De la viga representada en la figura, de sección rectangular de dimensiones 100 x 40 cm. (anchura x altura), se pide:

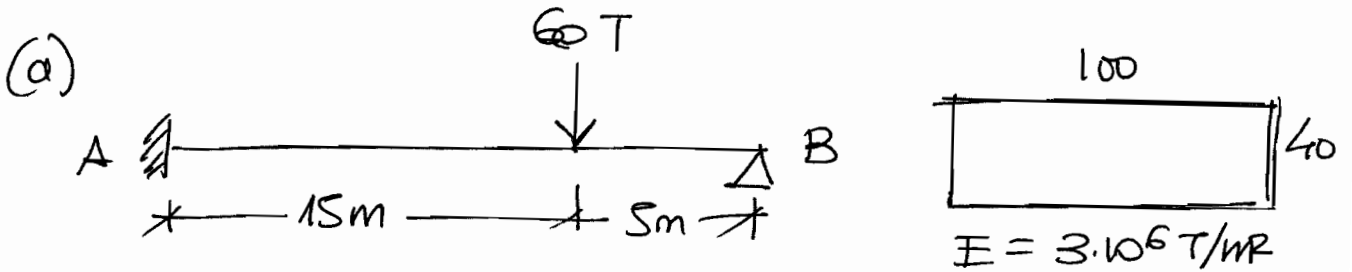
- Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos acotadas. (1,0 puntos)
- Calcular la magnitud y posición de la flecha máxima de la viga (1,5 puntos)
- En el caso de que se colocara un soporte vertical en el centro del vano (punto C), de 15 m. de longitud y 40 cm. de diámetro, indicar las nuevas leyes de esfuerzos que aparecerían sobre la viga y la reacción sobre dicho soporte. (2,5 puntos)

Considerar como módulo elástico de ambos elementos  $E = 3 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$

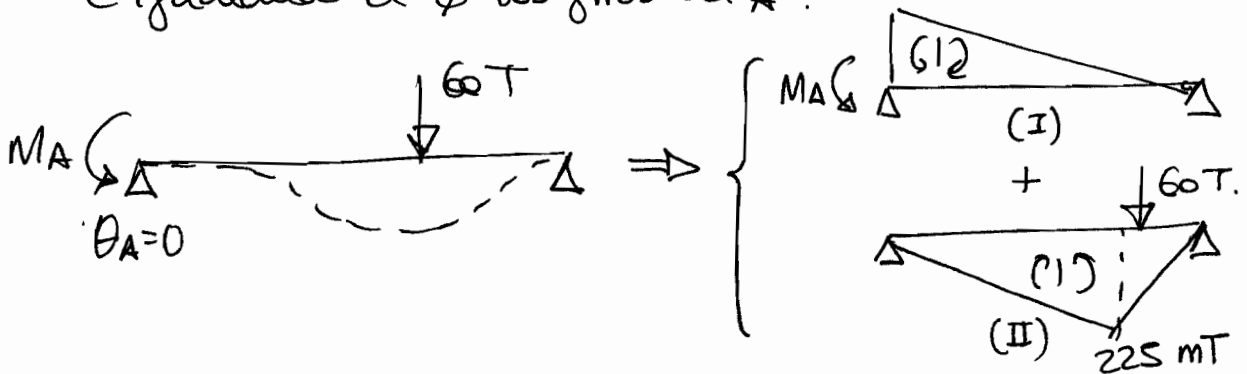


# SOLUCION EJERCICIO 1

1/4



o Plantamos la ecuación liberando la reacción a flexión e igualando a 0 los giros en A :



$$\theta_A^I = \frac{M_A \cdot L}{3EI}$$

$$\theta_A^{II} = \frac{225 \cdot 15}{2EI} \cdot 10 + \frac{225 \cdot 5}{2EI} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1875}{2EI}$$

$$\theta_A = 0 \Rightarrow \frac{M_A \cdot L}{3EI} = \frac{1875}{2EI} \rightarrow \boxed{M_A = \frac{1875 \cdot 3}{2L} = 140,6 \text{ m} \cdot \text{T}}$$

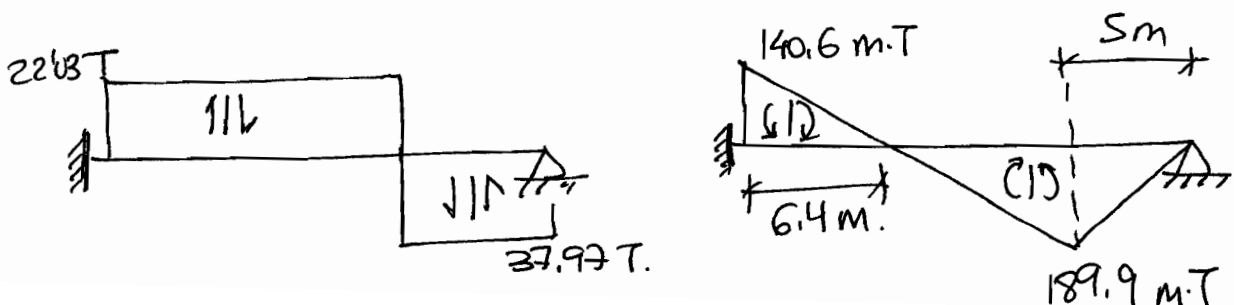
o las reacciones en A y B serán :

$$R_A = 60 \cdot \frac{5}{20} + \frac{M_A}{L} = 15 + \frac{140,6}{20} = 22,03 \text{ T}$$

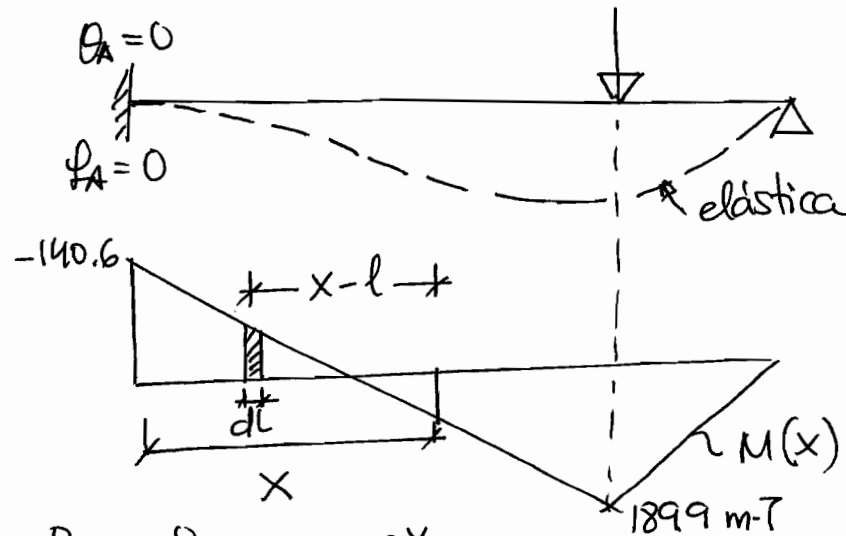
$$R_B = 60 \cdot \frac{15}{20} - \frac{M_A}{L} = 45 - \frac{140,6}{20} = 37,97 \text{ T}$$

$60,00 \text{ T}$

o Así, las leyes de esfuerzos quedarán :



(b) El valor de la flecha máxima se hallará planteando la ecuación de la elástica de la viga e igualando a cero su derivada:



$$\begin{aligned}
 f(x) &= P_A + \theta_A \cdot x + \frac{1}{EI} \int_0^x [-140.6 + 22.03l] \cdot (x-l) \cdot dl = \\
 &= \frac{1}{EI} \left[ -140.6x \cdot l + 140.6 \frac{l^2}{2} + 22.03l \frac{x^2}{2} - 22.03 \frac{l^3}{3} \right]_0^x = \\
 &= \frac{1}{EI} \left[ -140.6x^2 + 70.3x^2 + 11.015x^3 - 7.34x^3 \right] = \\
 &= \frac{1}{EI} \left[ 3.67x^3 - 70.3x^2 \right]
 \end{aligned}$$

Derivando respecto de \$x\$ e igualando a cero:

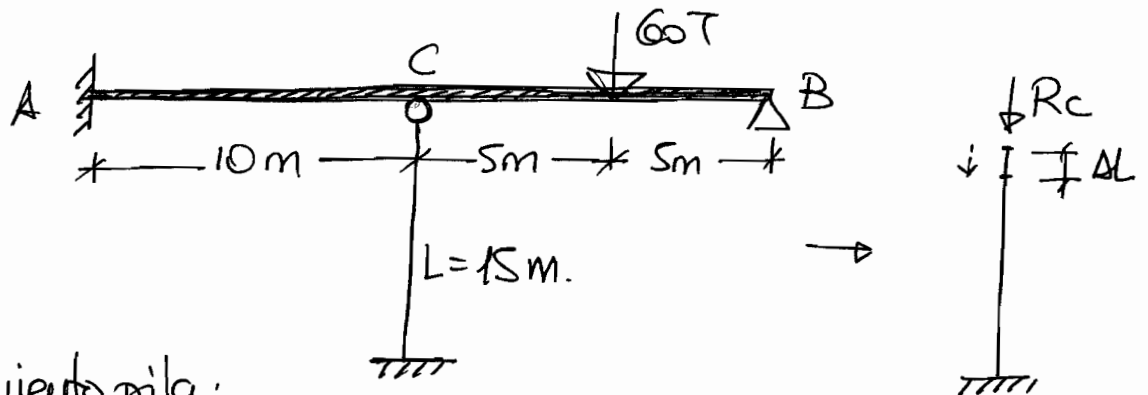
$$\frac{df(x)}{dx} = 11.015x^2 - 140.6x = 0 \rightarrow x = 12.76 \text{ m} < 15 \text{ m} \checkmark$$

$$f(x=12.76) = -\frac{3821}{EI} = -\frac{3821}{3.106 \cdot 5.33 \cdot 10^{-9}} = \boxed{-0.239 \text{ m}}$$

$$E = 3 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$$

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 0.4^3 = 5.33 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

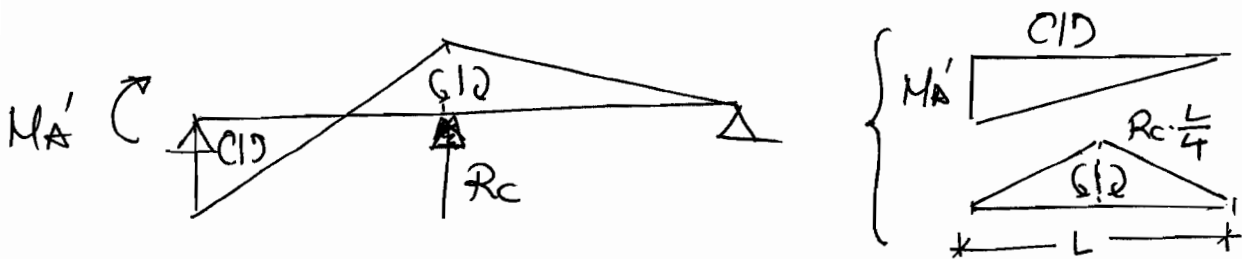
(c) Al colocar un soporte en centro de vano, aparece una nueva reacción vertical, y una nueva condición de compatibilidad de deformaciones:



- Acortamiento pila:

$$\Delta L = -\frac{R_c \cdot L}{E \cdot A} = f_c$$

- Por ello, se puede plantear el siguiente sistema:



Como  $\theta_A = 0$ , tendremos que:

$$\frac{M'_A L}{3EI} = \frac{R_c \cdot \frac{L}{4} \cdot L \cdot \frac{1}{2}}{2EI} \Rightarrow \boxed{M'_A = \frac{3R_c L}{16}}$$

- Además, la flecha en C debe coincidir con la deformación del soporte por acción del axil  $R_c$ , con lo cual:

$$f_c = f_{c,0} + f_{c,1}$$

$$f_{c,0} = \frac{1}{EI} [3,67 \cdot 10^3 - 70,3 \cdot 10^2] = -\frac{3360}{EI}$$

$$f_{c,1} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{M'_A}{2} \cdot \frac{10^2}{2} + \frac{M'_A}{4} \cdot \frac{2 \cdot 10^2}{3} - \frac{R_c \cdot 10^2}{4} \cdot \frac{10}{3} \right] = \left[ 41,67 M'_A - 83,34 R_c \right] \cdot \frac{1}{EI} = \frac{72,92 R_c}{EI}$$

- Planteando la compatibilidad de deformaciones en el punto C, tenemos:

$$-\frac{R_c \cdot 15}{EA} = \frac{72,92 \cdot R_c}{EI} - \frac{3360}{EI}, \text{ con } A = \frac{\pi \cdot 0,04^2}{4} = 0,00126 \text{ m}^2$$

despejando:

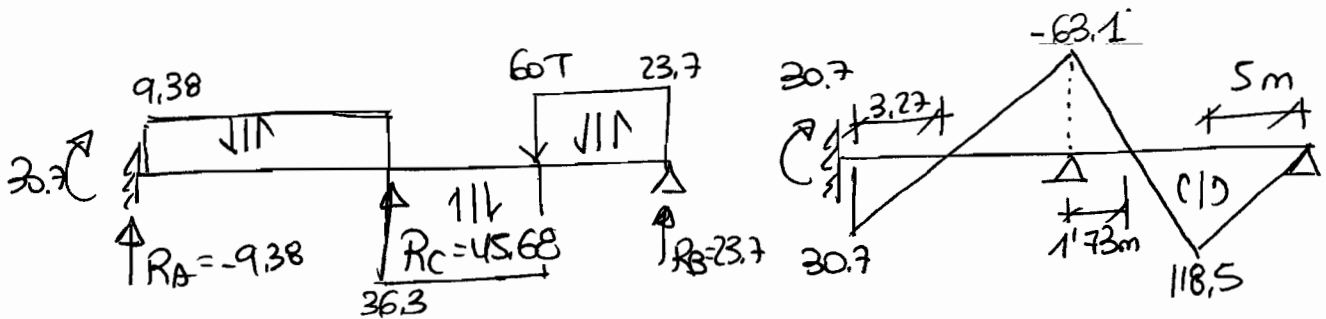
$$(119,05 + 13681) R_c = 630394 \rightarrow \boxed{R_c = 45,68 \text{ T}}$$

con lo cual,

$$M_A' = \frac{3 \cdot 45,7 \cdot 20}{16} = 171,3 \text{ m} \cdot \text{T}$$

$$\delta_{fc} = -\frac{45,7 \times 15}{3 \cdot 10^6 \cdot 0,00126} = -1,81 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

- las leyes de esfuerzos quedarán como sigue:



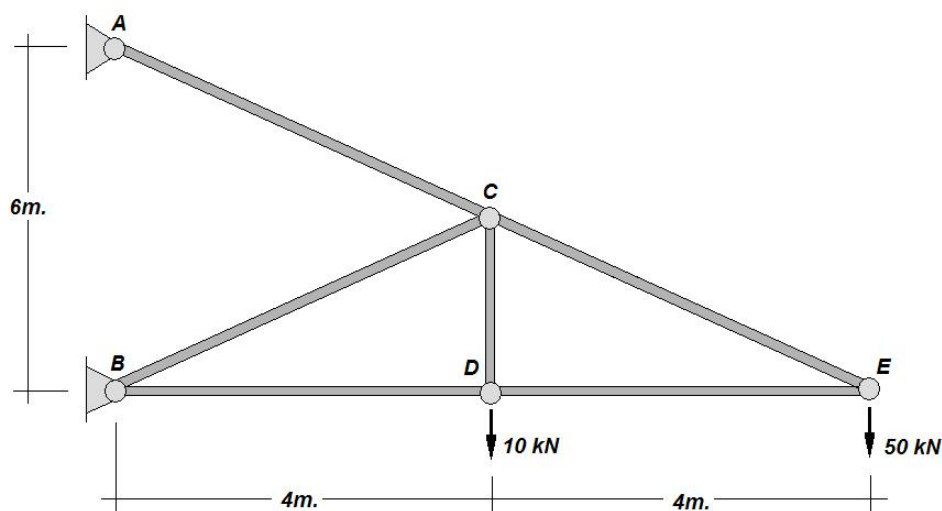
$$R_A = 22,03 - 45,68 \cdot \frac{1}{2} - \frac{171,3}{20} = -9,38 \text{ T}$$

$$R_B = 37,97 - 45,68 \cdot \frac{1}{2} + \frac{171,3}{20} = 23,70 \text{ T}$$

<b>7502</b>	<b>TEORÍA DE ESTRUCTURAS</b>		
<b>PARTE: 2 de 2</b>	<b>EJERCICIO PRÁCTICO 2</b>		
Convocatoria: <b>Diciembre 2008</b>	Fecha: <b>03.11.2008</b>	<b>Valor: 5 / 10</b>	
Curso: <b>2008-2009</b>	Tiempo: <b>75 min</b>		
Se permite el uso de calculadora programable y todo tipo de material bibliográfico auxiliar. Deberán justificarse suficientemente los resultados obtenidos.			

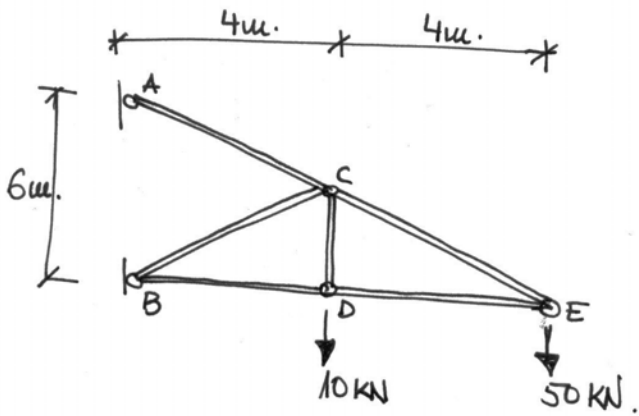
En la siguiente estructura articulada, formada por barras de acero de sección  $100 \text{ cm}^2$ , se pide, para las cargas indicadas y mediante métodos matriciales:

- Desplazamientos de todos los nudos, expresados en mm. (2,0 puntos)
- Reacciones de los apoyos, comprobando el equilibrio de la estructura. (2,0 puntos)
- Tensiones en la barra BC (1,0 puntos)



NOTA: El material es acero ( $E=210.000 \text{ N/mm}^2$ ). Despreciar el peso propio de la estructura.





- \* REACCIONES EN APOYOS?
- \* DESPLAZAMIENTOS NUDO E?
- \*

$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$   
 SECCIÓN CORDONES  $A = 100 \text{ cm}^2$

- EN PRIMER LUGAR, DADO QUE LA ESTRUCTURA ES ISOSTÁTICA, PLANTEAMOS EL SISTEMA MATRICIAL PARA RESOLVERLA:

$$[\vec{F}] = [K] \cdot [\vec{u}]$$

- DONDE LAS FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS SON:

$$[\vec{F}] = \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ \dots \\ H_B \\ V_B \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -10 \\ \dots \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} \quad [\vec{u}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ u_C \\ v_C \\ \dots \\ u_D \\ v_D \\ \dots \\ u_E \\ v_E \end{bmatrix}$$

- LA MATRIZ  $[K]$  LA FORMAREMOS A PARTIR DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS INDIVIDUALES, CON LA SIGUIENTE ESTRUCTURA, YA EN EJES GLOBALES.

$$[K_{1,2}] = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} \text{caso senacosa} & \vdots & \ominus \\ \text{senacosa senic} & & \ominus \\ \hline \ominus & & \oplus \end{bmatrix}$$

BARRA AC y CE

$$EA = 2'1 \cdot 10^6 \text{ KN} \\ L = 5\text{m} = 5000 \text{ mm} \\ \alpha = -36'87^\circ \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = 0'8 \\ \sin \alpha = -0'6 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \frac{EA}{L} = 420 \frac{\text{KN}}{\text{mm}} \right\} [K_{AC}] = [K_{CE}] = \begin{bmatrix} 268'8 & -201'6 & -268'8 & 201'6 \\ -201'6 & 151'2 & 201'6 & -151'2 \\ \hline -268'8 & 201'6 & 268'8 & -201'6 \\ 201'6 & -151'2 & -201'6 & 151'2 \end{bmatrix}$$

BARRAS BD-DE

$$EA_L = \frac{2'1 \cdot 10^6}{4000} = 525 \text{ KN/mm} \\ \alpha = 0 \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{array} \right.$$

$$[K_{BD}] = [K_{DE}] = \begin{bmatrix} 525 & 0 & -525 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -525 & 0 & 525 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

BARRA BC

$$EA_L = 420 \text{ KN/mm} \\ \alpha = 36'87^\circ \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = 0'8 \\ \sin \alpha = 0'6 \end{array} \right.$$

$$[K_{BC}] = \begin{bmatrix} 268'8 & 201'6 & -268'8 & -201'6 \\ 201'6 & 151'2 & -201'6 & -151'2 \\ \hline -268'8 & -201'6 & 268'8 & 201'6 \\ -201'6 & -151'2 & 201'6 & 151'2 \end{bmatrix}$$

BARRA CD

$$EA_L = \frac{2'1 \cdot 10^6}{3000} = 700 \text{ KN/mm} \\ \alpha = -90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = -1 \end{array} \right.$$

$$[K_{CD}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 700 & 0 & -700 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -700 & 0 & 700 \end{bmatrix}$$

• LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA QUEDA ASI:

$$[K] = \begin{bmatrix} 268'8 & -201'6 & - & - & -268'8 & 201'6 & - & - & - & - \\ -201'6 & 151'2 & - & - & 201'6 & -151'2 & - & - & - & - \\ - & - & 793'8 & 201'6 & -268'8 & -201'6 & -525 & 0 & - & - \\ - & - & 201'6 & 151'2 & -201'6 & -151'2 & 0 & 0 & - & - \\ -268'8 & 201'6 & -268'8 & -201'6 & 806'4 & -201'6 & 0 & 0 & -268'8 & 201'6 \\ 201'6 & -151'2 & -201'6 & -151'2 & -201'6 & 1153'6 & 0 & -700 & 201'6 & -151'2 \\ - & - & -525 & 0 & 0 & 0 & 1050 & 0 & -525 & 0 \\ - & - & 0 & 0 & 0 & -700 & 0 & 700 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & -268'8 & 201'6 & -525 & 0 & 793'8 & -201'6 \\ - & - & - & - & 201'6 & -151'2 & 0 & 0 & -201'6 & 151'2 \end{bmatrix}$$

• LAS ÚLTIMAS 6 ECUACIONES (LAS DE LOS DESPLAZAMIENTOS INCÓGNITA) PUEDEN SER RESUELTAS FÁCILMENTE MEDIANTE UN SISTEMA:

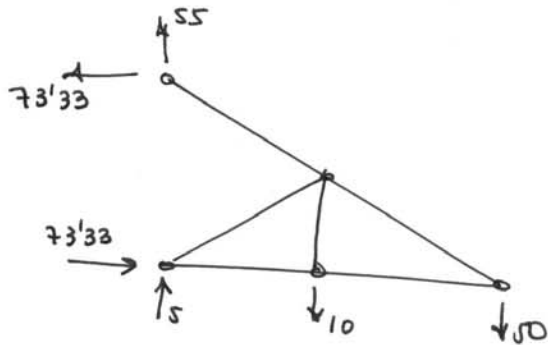
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -10 \\ \dots \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 806'4 & -201'6 & 0 & 0 & -268'8 & 201'6 \\ -201'6 & 1153'6 & 0 & -700 & 201'6 & -151'2 \\ 0 & 0 & 1050 & 0 & -525 & 0 \\ 0 & -700 & 0 & 700 & 0 & 0 \\ -268'8 & 201'6 & -525 & 0 & 793'8 & -201'6 \\ 201'6 & -151'2 & 0 & 0 & -201'6 & 151'2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_C \\ V_C \\ \dots \\ U_D \\ V_D \\ \dots \\ U_E \\ V_E \end{bmatrix}$$

• RESOLVIENDO EL SISTEMA TENEMOS

$$\begin{bmatrix} U_C \\ V_C \\ \dots \\ U_D \\ V_D \\ \dots \\ U_E \\ V_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'124 \text{ mm} \\ -0'198 \text{ ''} \\ \dots \\ -0'127 \text{ ''} \\ -0'213 \text{ ''} \\ \dots \\ -0'254 \text{ ''} \\ -1'033 \text{ ''} \end{bmatrix}$$

• CON LAS CUATRO ECUACIONES RESTANTES OBTENEMOS LAS REACCIONES.

$$\begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ \dots \\ H_B \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -73'33 \text{ KN} \\ 55'00 \text{ ''} \\ \dots \\ 73'33 \text{ ''} \\ 5'00 \text{ ''} \end{bmatrix}$$



- COMO SE PUEDE COMPROBAR POR  $\sum M = 0$ , LA ESTRUCTURA ESTÁ EN EQUILIBRIO!!



## TEORÍA DE ESTRUCTURAS

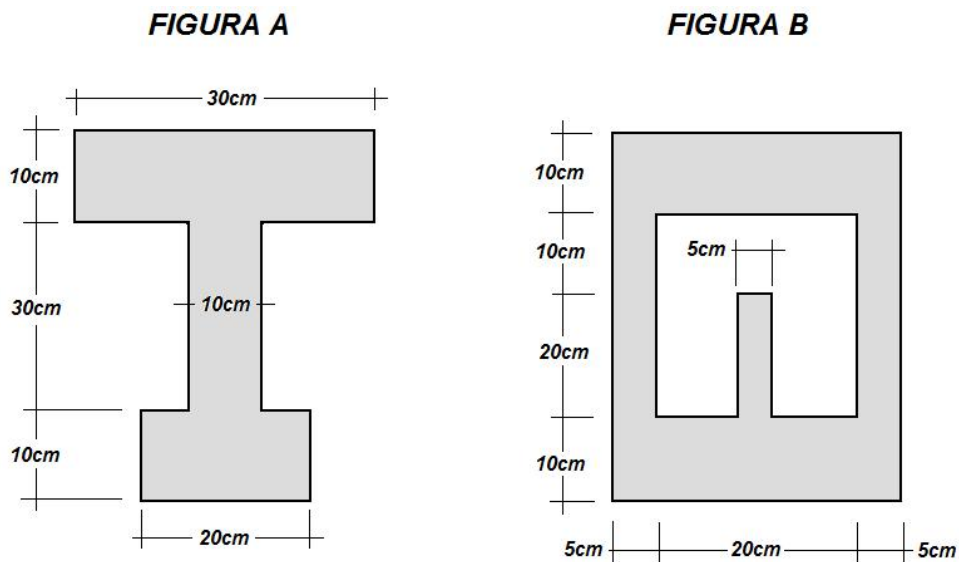
### INGENIERÍA GEOLÓGICA

#### CURSO 2008/2009

### Examen parcial (bonus total: +1,5 puntos, tiempo: 2 h.)

#### EJERCICIO 1

Estas dos figuras tienen la MISMA ALTURA y la MISMA BASE total.



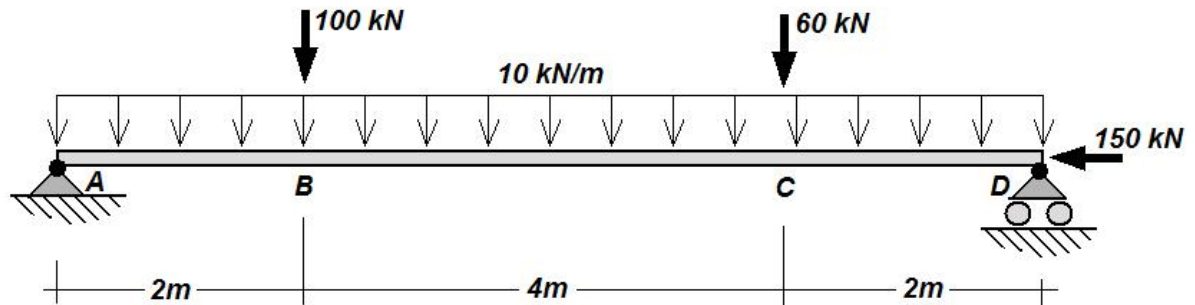
- ¿Cuál crees que tendrá más INERCIA respecto del eje X-X que pasa por su centro de gravedad? Justifica numéricamente tu respuesta.
- Si le aplicamos un axil en un punto a 5 cm de su borde inferior y centrado horizontalmente, ¿Cuál de las dos secciones soportará un axil superior si la tensión admisible del material es de  $200 \text{ kg/cm}^2$ ?

(valor: 0,5 puntos)

## EJERCICIO 2

Dada la siguiente viga, se pide:

- Representar las leyes acotadas de axiles, cortantes y flectores
- Determinar el perfil IPE necesario si su tensión admisible es de  $2600 \text{ kp/cm}^2$ . Utilizar el criterio de rotura de Von Mises.

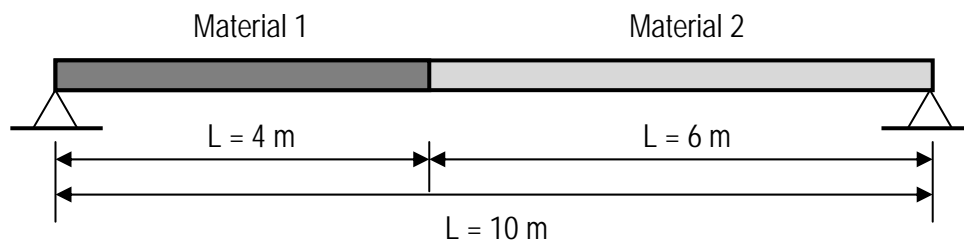


(valor: 0,5 puntos)

## EJERCICIO 3

La viga de la figura posee una sección rectangular hueca de  $30 \times 20 \text{ cm}$ . en su sección media y está sometida a un momento torsor uniforme de  $300 \text{ m}\cdot\text{kN}$ . Se pide:

- Determinar el espesor del tubo necesario, expresado en mm., para que no se produzca fallo por agotamiento del material, si la máxima tensión admisible es de  $275 \text{ N/mm}^2$
- Para la sección hallada, si la pieza se ve sometida a un descenso de temperatura de  $-40^\circ \text{ C}$ , determinar los esfuerzos resultantes en la misma, así como la máxima tensión actuante.



### CONSTANTES DEL MATERIAL EMPLEADO:

$$E_1 = 200.000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 100.000 \text{ MPa}$$

$$G_1 = 80.000 \text{ MPa}$$

$$G_2 = 40.000 \text{ MPa}$$

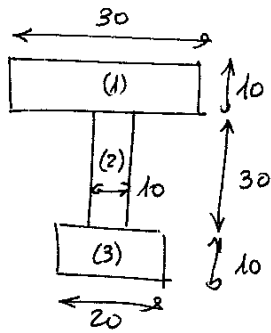
$$\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\alpha_2 = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

(valor: 0,5 puntos)

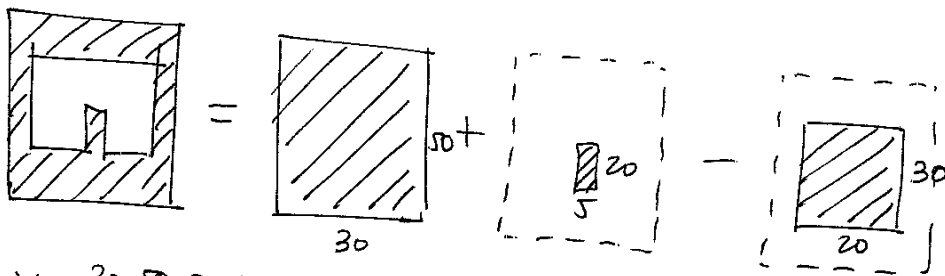
# EJERCICIO 1

a)



$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{30 \cdot 10 \cdot 45 + 10 \cdot 30 \cdot 25 + 20 \cdot 10 \cdot 5}{30 \cdot 10 + 10 \cdot 30 + 20 \cdot 10} = 27.5 \text{ cm}$$

$$I_x = \left[ \frac{30 \cdot 10^3}{12} + 30 \cdot 10 \cdot (45 - 27.5)^2 \right] + \left[ \frac{10 \cdot 30^3}{12} + 10 \cdot 30 \cdot (25 - 27.5)^2 \right] + \left[ \frac{20 \cdot 10^3}{12} + 20 \cdot 10 \cdot (5 - 27.5)^2 \right] = 221.667 \text{ cm}^4$$



$$y_G = \frac{30 \cdot 50 \cdot 25 + 5 \cdot 20 \cdot 20 + 20 \cdot 30 \cdot 25}{30 \cdot 50 + 5 \cdot 20 + 20 \cdot 30} = 24.5 \text{ cm}$$

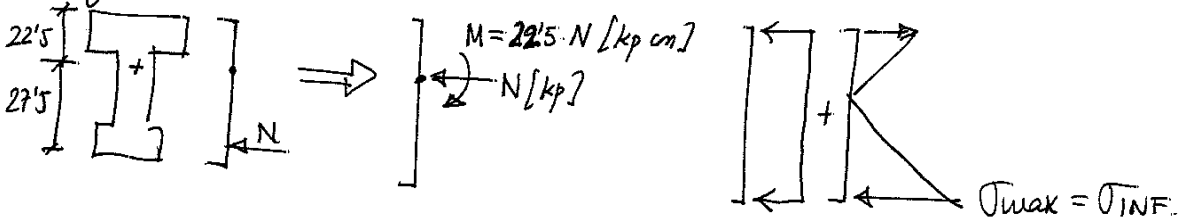
$$I_x = \left[ \frac{30 \cdot 50^3}{12} + 30 \cdot 50 \cdot (25 - 24.5)^2 \right] + \left[ \frac{5 \cdot 20^3}{12} + 5 \cdot 20 \cdot (20 - 24.5)^2 \right] + \left[ \frac{20 \cdot 30^3}{12} + 20 \cdot 30 \cdot (25 - 24.5)^2 \right]$$

$$I_x = 273.083 \text{ cm}^4$$

• LA FIGURA (B) TIENE MAYOR MOMENTO DE INERCIA

b)

Figura A

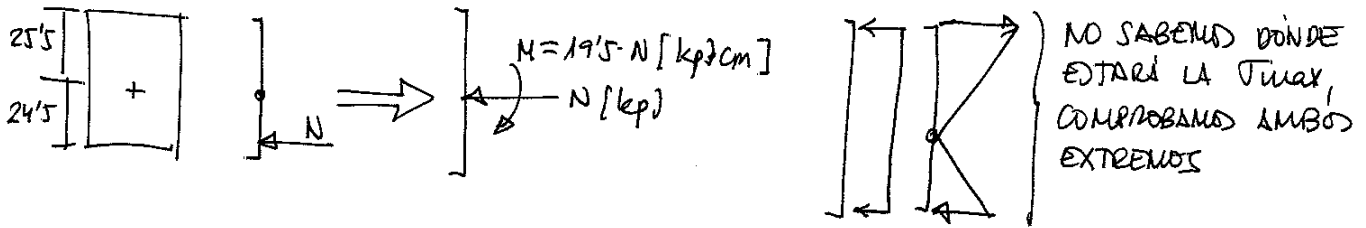


$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{A} - \frac{M}{I} \cdot y \leq \sigma_{\text{adm}}$$

$$-\frac{N}{800} - \frac{22.5 N}{221667} \cdot 27.5 \leq -200 \longrightarrow N \leq 49488 \text{ kp}$$

1/

## Figura B

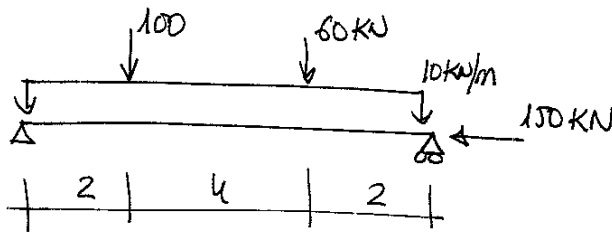


$$\sigma_{\text{sup}} = -\frac{N}{A} + \frac{M}{I} y_{\text{sup}} = -\frac{N}{1000} + \frac{19.5N}{273083} \cdot 25.5 \leq 200 \rightarrow N \leq 243642 \text{ kp}$$

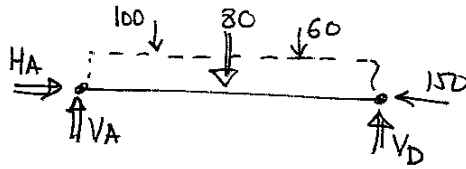
$$\sigma_{\text{inf}} = -\frac{N}{A} - \frac{M}{I} y_{\text{inf}} = -\frac{N}{1000} - \frac{19.5N}{273083} \cdot 24.5 \leq -200 \rightarrow N \leq \underline{\underline{72741 \text{ kp}}}$$

→ LA SECCION (B) SOPORTA UN AXIL SUPERIOR, LUEGO ES LA MÁS ADECUADA.

## EJERCICIO 2



### 1. ESTÁTICA



$$\sum F_H = 0 \rightarrow \boxed{H_A = 150 \text{ kN}}$$

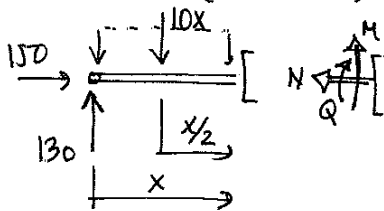
$$\sum F_V = 0 \rightarrow V_A + V_D = 100 + 80 + 60$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_D \cdot 8 = 100 \cdot 2 + 80 \cdot 4 + 60 \cdot 6 \quad \boxed{V_D = 110 \text{ kN}}$$

$$\boxed{V_A = 130 \text{ kN}}$$

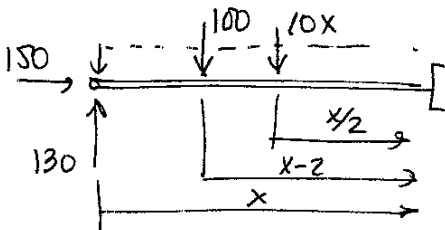
### 2. LEY DE ESFUERZO

• Tramo AB ( $0 < x < 2$ )



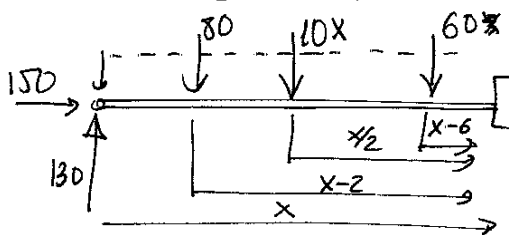
$$\left\{ \begin{array}{l} N = -150 \\ Q = 130 - 10x \\ M = 130 \cdot x - 10x \cdot \frac{x}{2} = 130x - 5x^2 \end{array} \right.$$

• Tramo BC ( $2 < x < 6$ )



$$\left\{ \begin{array}{l} N = -150 \\ Q = 130 - 10x - 100 = 30 - 10x \\ M = 130x - 5x^2 - 100(x-2) = 30x - 5x^2 + 200 \end{array} \right.$$

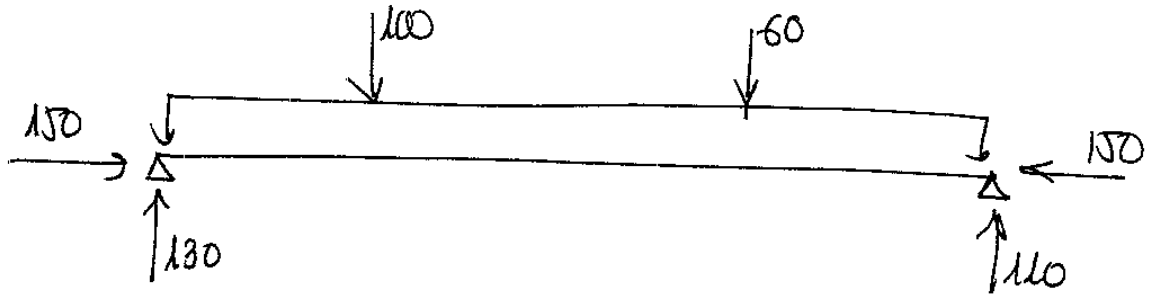
• Tramo CD ( $6 < x < 8$ )



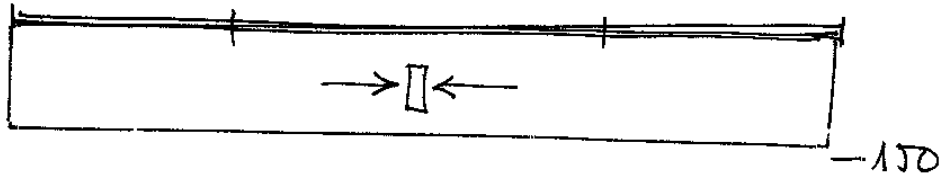
$$\left\{ \begin{array}{l} N = -150 \\ Q = 30 - 10x - 60 = -10x - 30 \\ M = 30x - 5x^2 + 200 - 60(x-6) = 560 - 30x - 5x^2 \end{array} \right.$$



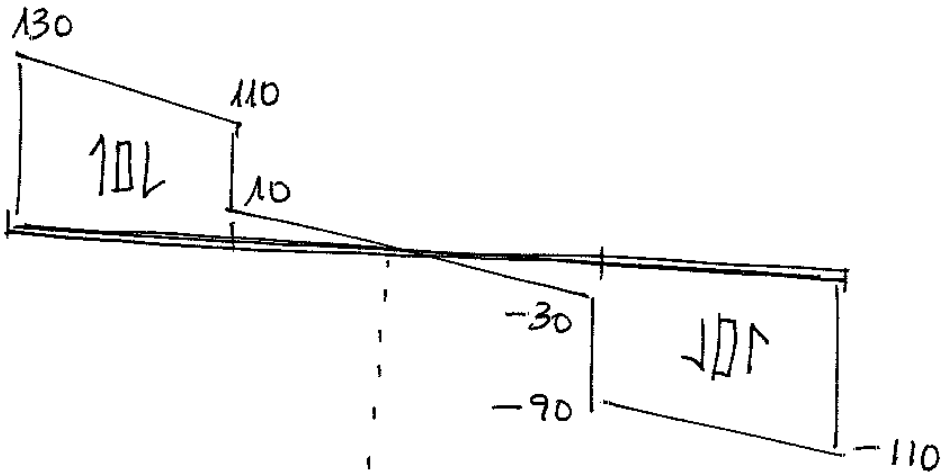
### 3. DIAGRAMAS DE EFUERZO



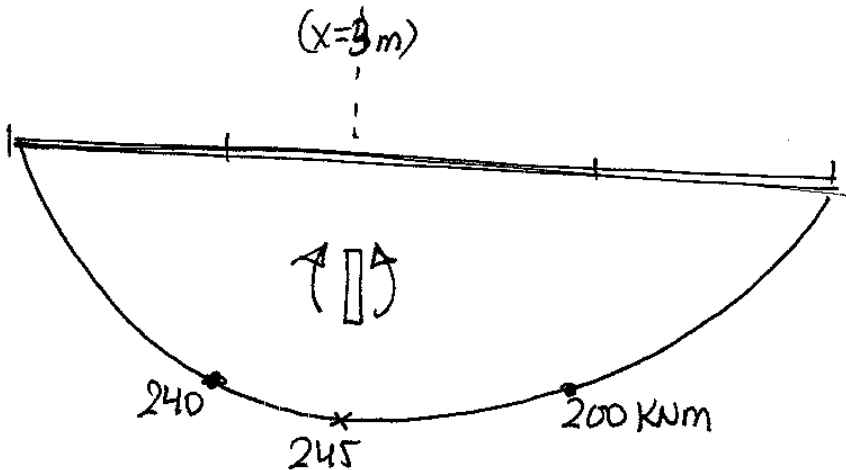
AXIL



CORT.



FLECT.



El perfil IPE deberá soportar la tensión máxima por VonMises.

Existen distintos puntos característicos  $\rightarrow M_{max}$   $\left\{ \begin{array}{l} M = 245 \text{ KNm} \\ N = 150 \text{ KN} \\ Q = 0 \end{array} \right.$

$\rightarrow \Delta P_0 P_0$   $\left\{ \begin{array}{l} M = 0 \\ N = 150 \text{ KN} \\ Q = 130 \text{ KN} \end{array} \right.$

Dimensionamos con el punto de  $M_{max}$  y luego comprobamos en todos los demás:

Supongamos que  $N=0$   $\rightarrow M=245 \text{ KNm}$   $\rightarrow \sigma_{co} = \sigma = \frac{M}{W} \leq \sigma_{adm}$ .

$$\frac{245 \cdot 10^4 \text{ [kp cm]}}{W_x} \leq 2600$$

$$\underline{\underline{W \geq 942 \text{ cm}^3}}$$

$$\underline{\underline{\text{IPE400}}}$$

COMPROBANDO IPE400

• PUNTO  $M_{max}$   $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{15000}{84'5} + \frac{245 \cdot 10^4}{1156} = 2297 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_{max} = 0 \\ \sigma_{co} = 2297 \text{ kp/cm}^2 < \sigma_{adm} \text{ (OK) CUMPLE} \end{array} \right.$

• PUNTO  $Q_{max}$   $\left\{ \begin{array}{l} \tau_{max} = \frac{Q \cdot S_x}{I_{esp}} = \frac{13000 \cdot 654}{23130 \cdot 0'86} = 427 \text{ kp/cm}^2 \\ \sigma_{max} = \frac{N}{A} + 0 = \frac{15000}{84'5} = 177'5 \text{ kp/cm}^2 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \sigma_{co} < \sigma_{adm} \text{ (OK)} \end{array} \right.$

• En el peor de los casos  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{max} = 2297 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_{max} = 427 \text{ kp/cm}^2 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \sigma_{co} = 2413 < \sigma_{adm} \end{array} \right.$

ESTA SITUACION, MÁS DEFAVORABLE QUE CUALQUIERA DE LAS QUE PUEDE OCURRIR, SE CUMPLE, LUEGO ESTE PERFIL ES VÁLIDO EN CUALQUIER PUNTO:

IPE400

S/

## EJERCICIO 3

(a) Sección  $30 \times 20$  cm (sección media)

$$T = 300 \text{ m.kN}$$

$$\sigma_{adm} = 275 \text{ N/mm}^2$$

- Aplicando la fórmula de Bredt para secciones cerradas de pared delgada, tendremos que:

$$\tau = \frac{T}{2A_e \cdot t} \Rightarrow t = \frac{T}{2 \cdot A_e \cdot \tau}, \text{ con } \begin{cases} T = 300 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} \\ A_e = 300 \times 200 \text{ mm}^2 \end{cases}$$

- Partiendo del valor de  $\sigma_{adm}$ , podemos plantear la condición de agotamiento de Von Mises en función de  $\tau$ , ya que  $\sigma = 0$  en toda la pieza:

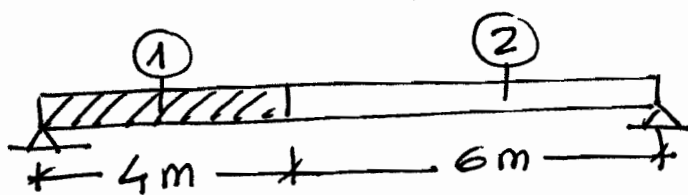
$$\sigma_{\infty} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{3} \cdot \tau \leq \sigma_{adm} \rightarrow \tau \leq \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{3}}$$

- Sustituyendo en la expresión de Bredt, tendremos que:

$$\frac{T}{2A_e t} \leq \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{3}} \rightarrow t \geq \frac{\sqrt{3} \cdot T}{2A_e \sigma_{adm}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 300 \cdot 10^6}{2 \cdot 6 \cdot 10^4 \cdot 275} = 15,75 \text{ mm}$$

- Con lo cual, podemos emplear un valor de  $t = 16 \text{ mm}$ .

(b)



$$\Delta T = -40^\circ \text{C}$$

- Podemos plantear que el movimiento en el apoyo debe ser nulo, por lo tanto:

$$\epsilon_{T1} L_1 + \epsilon_{T2} L_2 = -(\epsilon_{R1} L_1 + \epsilon_{R2} L_2) \rightarrow \Delta L_T = -\Delta L_R$$

con:

$$\epsilon_{T1} = \alpha_1 \cdot \Delta T = 1,2 \cdot 10^{-5} (-40) = -4,8 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{T2} = \alpha_2 \Delta T = 1,8 \cdot 10^{-5} (-40) = -7,2 \cdot 10^{-4}$$

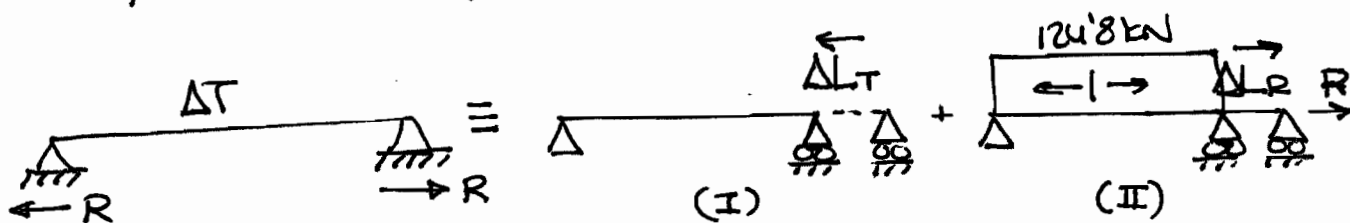
- Calculamos el alargamiento necesario para compensar la contracción por temperatura, ya que por la coacción existente la pieza no puede acortarse:

$$\epsilon_{R1} = \frac{\sigma_{R1}}{E_1} = \frac{R}{E_1 \cdot A} \quad ; \quad \epsilon_{R2} = \frac{R}{E_2 \cdot A} \quad \left. \begin{array}{l} E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\ E_2 = 1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\ A = 1600 \text{ mm}^2 \end{array} \right\}$$

Tendremos que:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\text{---} \textcircled{I} \text{---}} \quad \overbrace{\text{---} \textcircled{II} \text{---}} \\ & \epsilon_{T1} L_1 + \epsilon_{T2} L_2 = - (\epsilon_{R1} L_1 + \epsilon_{R2} L_2) \Rightarrow \\ & \Rightarrow -4.8 \cdot 10^{-4} \cdot 4000 + (-7.2 \cdot 10^{-4}) \cdot 6000 = - \frac{R}{A} \left[ \frac{4000}{2 \cdot 10^5} + \frac{6000}{1 \cdot 10^5} \right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow -1.92 - 4.32 = 6.24 = R \cdot 5 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \underline{R = 124800 \text{ N}} \end{aligned}$$

- El esquema empleado para el cálculo sería éste:



- Cálculo de la tensión resultante:

$$\sigma = \frac{R}{A} = \frac{124800}{1600} = 78 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Temperatura})$$

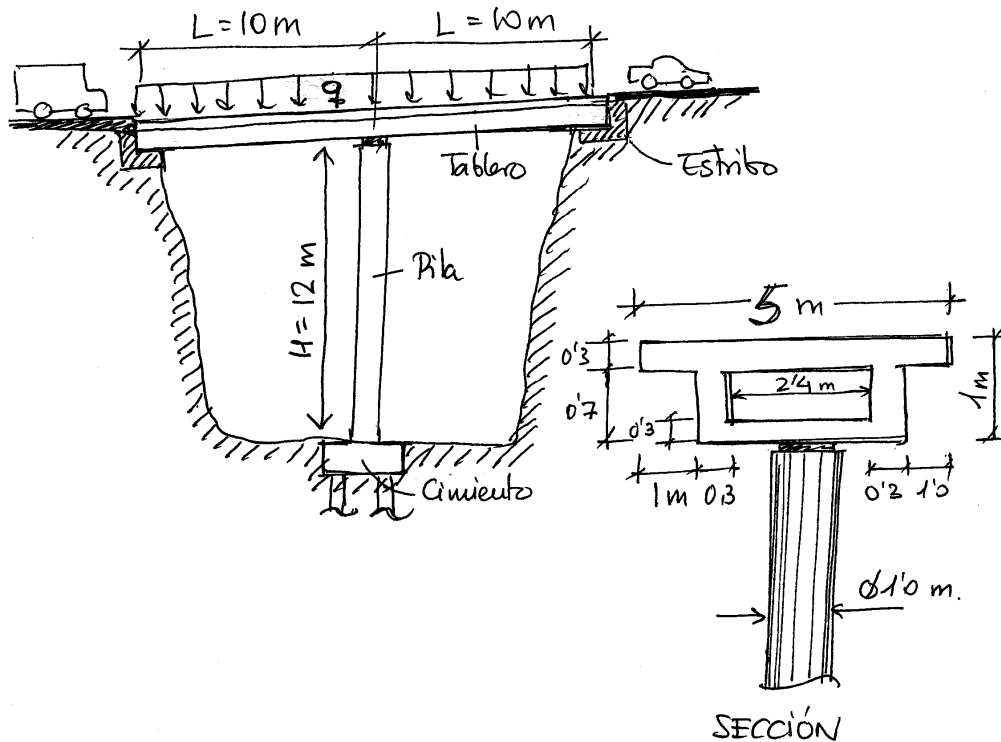
$$\tau = \frac{T}{2A\alpha t} = \frac{300 \cdot 10^6}{2 \cdot 6 \cdot 10^4 \cdot 16} = 156.25 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Torsión})$$

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{78^2 + 3 \cdot 156.25^2} = 281.6 \text{ N/mm}^2 > \sigma_{\text{adm}}$$

- Luego el material fallará para la combinación de tensión y descenso de temperatura:

<b>7502</b>	<b>TEORÍA DE ESTRUCTURAS</b>	
<b>PARTE: 1 de 2</b>	<b>EJERCICIO PRÁCTICO 1</b>	
Convocatoria: <b>Junio 2009</b>	Fecha: <b>12.06.2009</b>	Mínimo eval.: <b>30%</b>
Curso: <b>2008-2009</b>	Tiempo: <b>1 h 30 min</b>	Valor: <b>5 / 10</b>
Se permite el uso de calculadora programable, <b>NO</b> se permite ningún material escrito auxiliar. Deberán justificarse suficientemente los resultados obtenidos		

La estructura de la figura es un paso elevado para salvar un barranco existente en una obra de encauzamiento. Su modelo estructural es asimilable al de una viga continua de dos vanos de 10 m. de longitud, apoyada en dos estribos flotantes laterales y una pila central de 12 m. de altura, cimentada sobre el lecho del cauce, considerada como articulada en su parte superior y empotrada en su base.



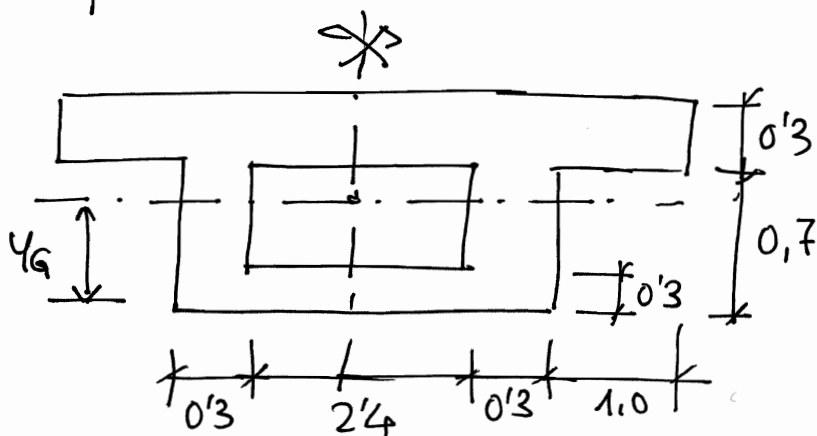
Se pide lo siguiente:

- Calcular la máxima sobrecarga uniforme  $q$  que es capaz de soportar la estructura, e indicando el elemento y sección (en su caso) donde se produzca el fallo. **(3 puntos)**
- Suponiendo que el pilar central se puede asimilar a un resorte, calcular el valor del coeficiente de proporcionalidad  $k$  entre carga y deformación. **(1 punto)**
- Determinar la línea de influencia de cortantes y flectores positivos en centro de vano, así como la distribución pésima que adoptará la sobrecarga en cada caso. **(1 punto)**

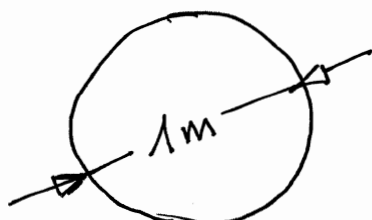
• **Datos:** Reacción en estribos:  $R_e = 3/8 q \cdot L$ ;  $\sigma_{adm} = 30 \text{ MPa}$ ;  $E = 30.000 \text{ MPa}$ ;  $G = 12.500 \text{ MPa}$

SOLUCIÓN EJERCICIO 1

(a) Necesitaremos calcular los términos de sección de la pila y el tablero:



TABLERO



SECCIÓN PILA

$$y_G = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{1.530}{2.640}$$

$$y_G = 0.58 \text{ m.}$$

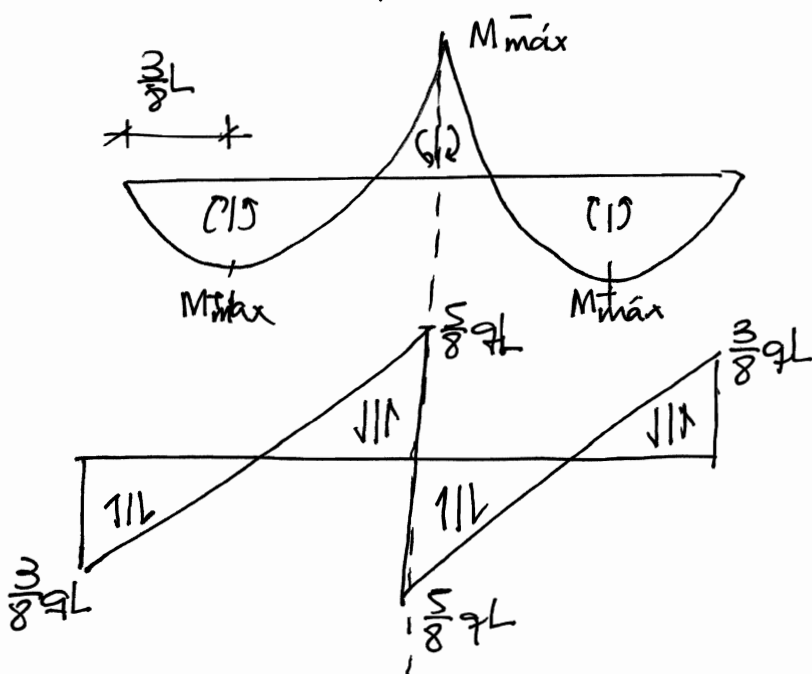
$$A_T = 2.64 \text{ m}^2$$

$$I_{yT} = \frac{1}{12} (5.0 \cdot 0.3^3 + 3.0 \cdot 0.7^3 - 2.4 \cdot 0.4^3) + 5.0 \cdot 0.3 \cdot 0.27^2 + 3.0 \cdot 0.7 \cdot 0.23^2 - 2.4 \cdot 0.4 \cdot 0.08^2 = 0.2985 \text{ m}^4$$

$$A_p = \pi \cdot \frac{1^2}{4} = 0.785 \text{ m}^2$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot 0.5^4}{4} = 0.049 \text{ m}^4$$

- Dado que se nos facilitan las reacciones en estribos, tenemos resuelto el hiperestatismo, siendo las leyes de esfuerzos:



$$R_{est} = \frac{3}{8} qL$$

$$R_{pila} = 2 \cdot \frac{5}{8} qL = \frac{5}{4} qL$$

$$M_{mín} = \frac{3}{8} qL^2 - \frac{1}{2} qL^2 = -\frac{qL^2}{8}$$

$$M_{mín}^+ \rightarrow \frac{\partial M(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow V(x) = 0$$

$$M(x) = \frac{3}{8} qLx - q \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = \frac{3}{8} qL - qx = 0 \rightarrow x = \frac{3}{8} L$$

$$M_{mín}^+ = \frac{9}{128} qL^2$$

- la carga crítica de pandeo de la pila será, aplicando la expresión teórica de Euler:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 30000 \cdot 4,908 \cdot 10^{10}}{(0,7 \cdot 12000)^2} \cong 206.000 \text{ kN}$$

lo que equivaldría a una sobrecarga de valor:

$$N_{cr} \geq R_{pila} = \frac{5}{4} qL \rightarrow q \leq \frac{4N_{cr}}{5L} = \frac{4 \cdot 206000}{5 \cdot 10} = 16480 \frac{\text{kN}}{\text{m.l.}}$$

- la carga de agotamiento para la pila será de:

$$N_u = \sigma_{adm} \cdot A_p = 30 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 785400 \text{ mm}^2 = 23562 \text{ kN}$$

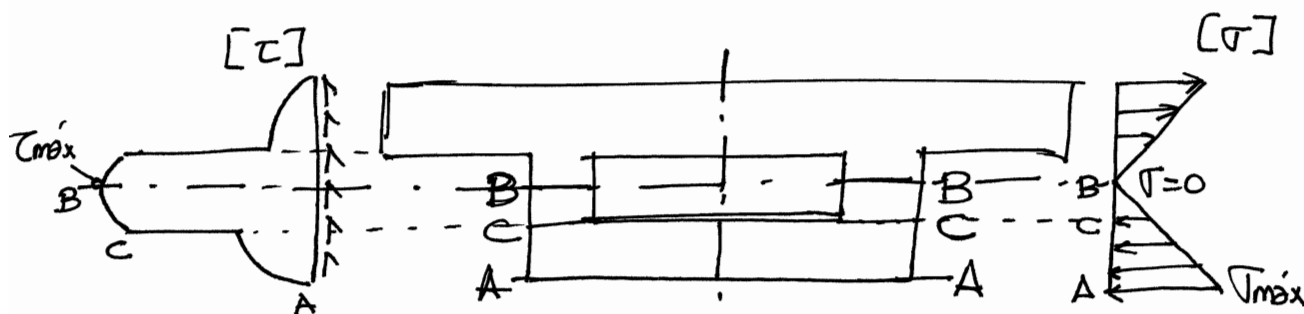
equivalente a una sobrecarga  $q$  de valor:

$$N_u \geq R_{pila} = \frac{5}{4} qL \rightarrow q \leq \frac{4N_u}{5L} = \frac{4 \cdot 23562}{5 \cdot 10} = 1885 \frac{\text{kN}}{\text{m.l.}}$$

- En cuanto al tablero, la máxima flexión y el máximo cortante se hallan en la sección de apoyo de la pila, siendo de:

$$M_{pila} = \frac{qL^2}{8} ; \quad V_{pila} = \frac{5}{8} q \cdot L \rightarrow \left. \begin{array}{l} M_{pila} = 12,5q \\ V_{pila} = 6,25q \end{array} \right\}$$

- Distribución de tensiones normales y tangenciales en la sección analizada:



En principio, las zonas críticas a analizar serán:

- Máxima flexión normal ( $\sigma_{max}$ ),  $\tau = 0$
- Máxima tensión tangencial ( $\tau_{max}$ ),  $\sigma = 0$
- Tensión normal y tensión tangencial elevadas,  $\sigma \neq 0$ ,  $\tau \neq 0$

- Evaluaremos las tres fibras de la sección mencionadas:

$$\boxed{A} \begin{cases} \sigma = \sigma_{\max} = \frac{M_{pila}}{I_{y,T}} \cdot y_G = \frac{12,5 \text{ q}}{0,2985} \cdot 0,58 = 24,29 \text{ q} \\ \tau = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{B} \begin{cases} \sigma = 0 \\ \tau = \tau_{\max} = \frac{V_{pila} \cdot S_y^I}{I_y \cdot 2b} = \frac{6,25 \text{ q} \cdot 0,4093}{0,2985 \cdot 2 \cdot 0,3} = 14,28 \text{ q} \end{cases}$$

$$[\text{con } S_y^I = 5 \cdot 0,3 \cdot 0,27 + 0,6 \cdot 0,12 \cdot 0,06 = 0,4093 \text{ m}^3]$$

$$\boxed{C} \begin{cases} \sigma = \frac{M_{pila}}{I_{y,T}} [y_G - 0,3] = 11,73 \text{ q} \\ \tau = \frac{V_{pila} \cdot S_y^{II}}{I_y \cdot 2b} = \frac{6,25 \text{ q} \cdot 0,387}{0,2985 \cdot 2 \cdot 0,3} = 13,50 \text{ q} \end{cases}$$

$$[\text{con } S_y^{II} = 3 \cdot 0,3 \cdot 0,43 = 0,387 \text{ m}^3]$$

- Planteando la condición de fallo de Von Mises  $\Rightarrow \sigma_u = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ :

$$\boxed{A} \Rightarrow \sigma_u = \sigma_{adm} = 30 \text{ N/mm}^2 = \sqrt{(24,29 \text{ q})^2} \rightarrow q_{\max}^A = 1,24 \frac{\text{MN}}{\text{m}}$$

$$\boxed{B} \Rightarrow \sigma_u = \sigma_{adm} = 30 \text{ MPa} = \sqrt{3 \cdot (14,28 \text{ q})^2} \rightarrow q_{\max}^B = 1,21 \frac{\text{MN}}{\text{m}}$$

$$\begin{aligned} \boxed{C} \Rightarrow \sigma_u = \sigma_{adm} = 30 \text{ MPa} &= \sqrt{(11,73 \text{ q})^2 + 3(13,5 \text{ q})^2} = \\ &= q \sqrt{11,73^2 + 3 \cdot 13,5^2} = 26,16 \text{ q} = 30 \text{ MPa} \rightarrow q_{\max}^C = 1,147 \frac{\text{MN}}{\text{m}} \end{aligned}$$

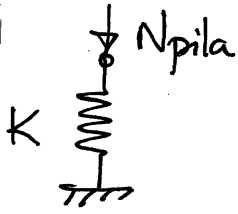
- El menor valor de todos estará en la fibra C, por lo que la máxima sobrecarga que agotará el tablero será de 1147 kN/m.

- Así, la máxima sobrecarga q que resistirá el viaducto será la menor de todas las calculadas, siendo ésta:

$$q_{\min} = q_{\max}^C = 1147 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \text{ situada en el tablero.}$$



(b) Cálculo del coeficiente  $K$  de proporcionalidad carga-deformación en la pila central:



$$N_{pila} = K \cdot S_{pila}$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \frac{N_{pila}}{A_{pila}} = E \cdot \frac{S_{pila}}{L_{pila}}$$

Así, despejando e identificando términos:

$$N_{pila} = \left[ \frac{A_{pila} \cdot E}{L_{pila}} \right] \cdot S_{pila} = k \cdot S_{pila}$$

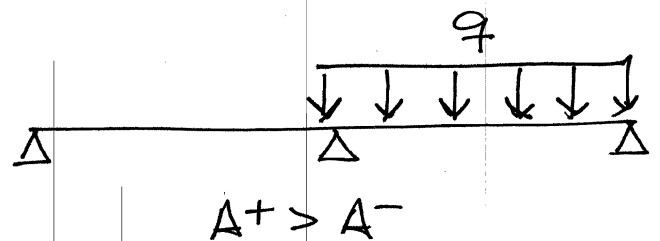
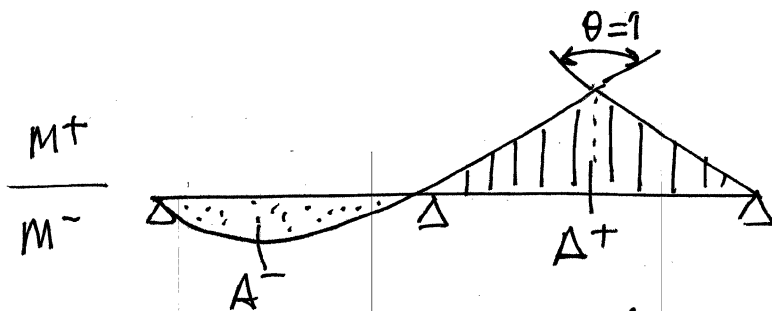
luego,

$$K = \frac{A_{pila} \cdot E}{L_{pila}} = \frac{0,785 \cdot 30000}{12} = 1962,5 \frac{MN}{m} \left[ = \frac{kN}{mm} \right]$$

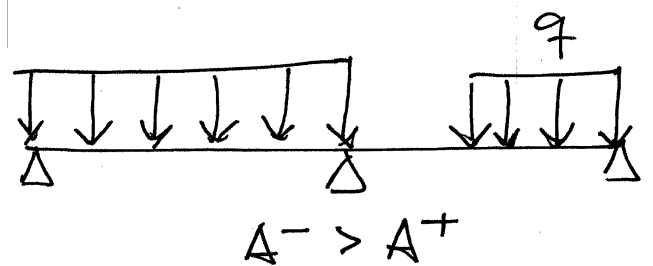
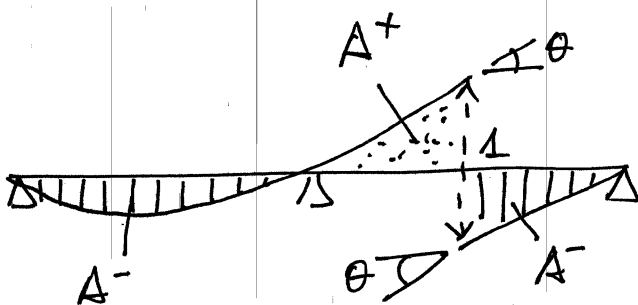
(c) Líneas de influencia en el tablero, centro de vano:

LINEA INFLUENCIA

DISTRIBUCIÓN PESIMA



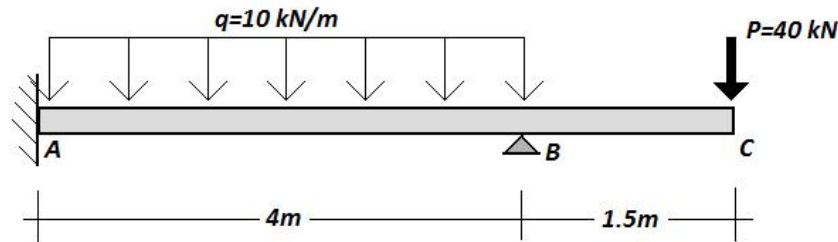
(Máximo Plector  $^+$ )



(Máximo Cortante)

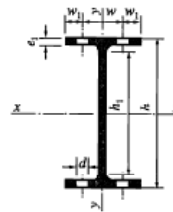
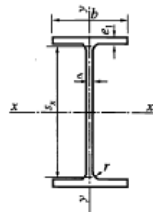
<b>7502</b>	<b>TEORÍA DE ESTRUCTURAS</b>	
<b>PARTE: 2 de 2</b>	<b>EJERCICIO PRÁCTICO 2</b>	
Convocatoria: <b>Junio 2009</b>	Fecha: <b>12.06.2009</b>	Mínimo eval.: <b>30%</b>
Curso: <b>2008-2009</b>	Tiempo: <b>2 h 00 min</b>	Valor: <b>5 / 10</b>
Se permite el uso de calculadora programable, <b>NO</b> se permite ningún material escrito auxiliar Deberán justificarse suficientemente los resultados obtenidos		

La siguiente viga, parte de una estructura más compleja, tiene la geometría y las acciones indicadas en la figura.



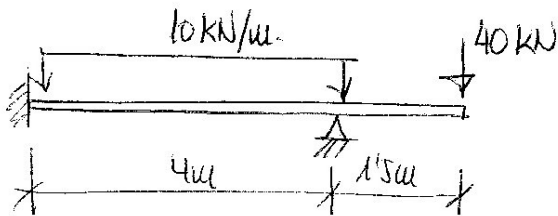
Se desea dimensionar la viga con el perfil IPE de acero más económico, de modo que se pide:

- Resolver el hiperestatismo y representar las leyes acotadas de esfuerzos cortantes y momentos flectores. **(2.5 puntos)**
  - Dimensionar la viga con perfil IPE con la condición de que la flecha en el extremo libre no supere el valor de 1 cm. **(1 punto)**
  - Representar los diagramas tensionales de las secciones más desfavorables y comprobar (o dimensionar, en su caso) si el perfil anterior cumple con la condición de tensiones, según el criterio de Von Mises. **(1.5 puntos)**
- Datos:**  $E = 210.000 \text{ MPa}$ . Tabla de características perfil IPE



$A$  = Área de la sección  
 $I$  = Momento de inercia  
 $W$  = Módulo resistente  
 $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  = Radio de giro  
 $S_x$  = Momento estático de media sección  
 $s_x = \frac{I_x}{S_x}$  = Distancia entre los centros de compresión y tracción  
 $\eta$  = Rendimiento  
 $u$  = Perímetro

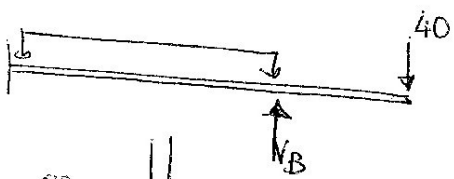
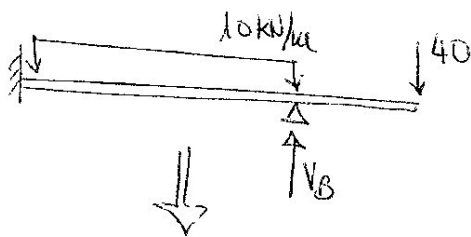
IPE	Dimensiones (mm)						Sección $A$ $\text{cm}^2$	Peso $P$ $\text{kg/m}$	Referido al eje x-x			Referido al eje y-y			$w$ mm	$w_1$ mm	$\varnothing d$ mm	$S_x$ $\text{cm}^3$	$s_x$ cm	$\eta =$ $W_z/P$	$u$ $\text{m}^2/\text{m}$	IPE
	$h$	$b$	$e$	$e_1$	$r_1$	$h_1$			$I_x$ $\text{cm}^4$	$W_x$ $\text{cm}^3$	$i_x$ cm	$I_y$ $\text{cm}^4$	$W_y$ $\text{cm}^3$	$i_y$ cm								
80	80	46	3.8	5.2	5	59	7,64	6,00	80,1	20,0	3,24	8,49	3,69	1,05	25	10,5	6,4	11,6	6,90	3,34	0,328	80
100	100	55	4,1	5,7	7	74	10,3	8,10	171	34,2	4,07	15,9	5,79	1,24	30	12,5	8,4	19,7	8,68	4,22	0,400	100
120	120	64	4,4	6,3	7	93	13,2	10,4	318	53,0	4,90	27,7	8,65	1,45	35	14,5	8,4	30,4	10,5	5,11	0,475	120
140	140	73	4,7	6,9	7	112	16,4	12,9	541	77,3	5,74	44,9	12,3	1,65	40	16,5	11	44,2	12,3	6,00	0,551	140
160	160	82	5,0	7,4	9	127	20,1	15,8	869	109	6,58	68,3	16,7	1,84	44	19	13	61,9	14,0	6,89	0,623	160
180	180	91	5,3	8,0	9	146	23,9	18,8	1320	146	7,42	101	22,2	2,05	48	21,5	13	83,2	15,8	7,78	0,698	180
200	200	100	5,6	8,5	12	159	28,5	22,4	1940	194	8,26	142	28,5	2,24	52	24	13	110	17,6	8,69	0,768	200
220	220	110	5,9	9,2	12	177	33,4	26,2	2770	252	9,11	205	37,3	2,48	58	26	17	143	19,4	9,62	0,848	220
240	240	120	6,2	9,8	15	190	39,1	30,7	3890	324	9,97	284	47,3	2,69	65	27,5	17	183	21,2	10,6	0,922	240
270	270	135	6,6	10,2	15	219	45,9	36,1	5790	429	11,2	420	62,2	3,02	72	31,5	21	242	23,9	11,9	1,041	270
300	300	150	7,1	10,7	15	248	53,8	42,2	8360	557	12,5	604	80,5	3,35	80	35	23	314	26,6	13,2	1,159	300
330	330	160	7,5	11,5	18	271	62,6	49,1	11770	713	13,7	788	98,5	3,55	85	37,5	25	402	29,3	14,5	1,254	330
360	360	170	8,0	12,7	18	298	72,7	57,1	16270	904	15,0	1040	123	3,79	90	40	25	510	31,9	15,8	1,353	360
400	400	180	8,6	13,5	21	331	84,5	66,3	23130	1160	16,5	1320	146	3,95	95	42,5	28	654	35,4	17,4	1,467	400
450	450	190	9,4	14,6	21	378	98,8	77,6	33740	1500	18,5	1680	176	4,12	100	45	28	851	39,7	19,3	1,605	450
500	500	200	10,2	16,0	21	426	116	90,7	48200	1930	20,4	2140	214	4,31	110	45	28	1130	43,9	21,3	1,744	500
550	550	210	11,1	17,2	24	467	134	106	67120	2440	22,3	2670	254	4,45	115	47,5	28	1390	48,2	23,1	1,877	550
600	600	220	12,0	19,0	24	514	156	122	92080	3070	24,3	3390	308	4,66	120	50	28	1750	52,4	25,1	2,015	600



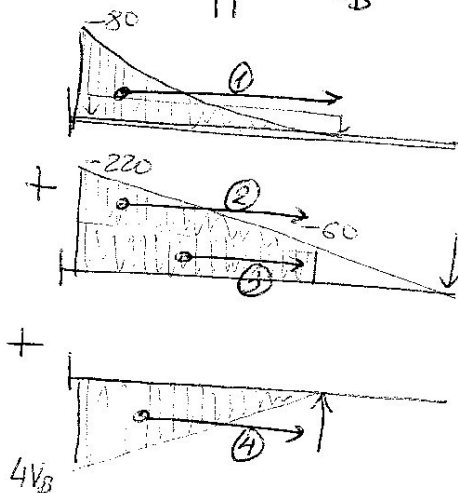
a) REPRESENTAR LAS LEYES DE CORTANTE Y FLECTORES ACOTADAS.

- Vamos a resolverlo de 2 formas (teoremas de Mohr y biapoyadas), cada una tiene sus ventajas e inconvenientes

OPCION A: teoremas de Mohr (aplicando el principio de superposición)



$V_B? \rightarrow \sum \mathcal{M}_B = 0$



$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (-80) = -106\frac{2}{3} \\ d_1 = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3\text{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-160) = -320 \\ d_2 = \frac{2}{3} \cdot 4\text{m} \end{cases} \quad \begin{cases} A_3 = 4 \cdot (-60) = -240 \\ d_3 = 2\text{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4V_B = 8V_B \\ d_4 = \frac{2}{3} \cdot 4\text{m} \end{cases}$$

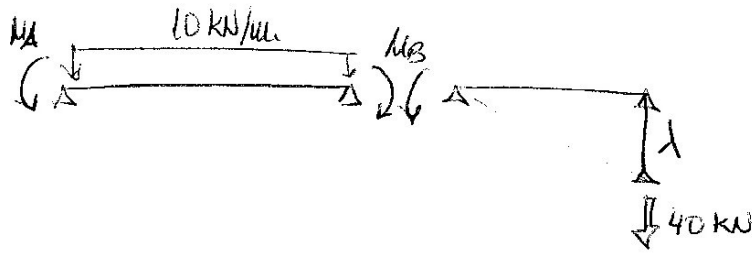
$$\sum \mathcal{M}_B = \sum \mathcal{M}_A (x_B - x_A) + \sum \text{Momentes} \int \mathcal{M}(x) dx \Big|_A^B = 0$$
  
desaparece.

$$\text{Momentes} \int \mathcal{M}(x) dx \Big|_A^B = 0; \quad -106\frac{2}{3} \cdot (3) - 320 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 4) - 240 \cdot (2) + 8V_B \cdot (\frac{2}{3} \cdot 4) = 0$$

Despejando  $V_B = \underline{\underline{77.5 \text{ kN}}}$

✓

OPCION B: Biapoyadas



$$(M_A) \rightarrow \sum \bar{M}_A = 0; \quad \frac{M_A \cdot 4}{3EI} + \frac{M_B \cdot 4}{6EI} - \frac{10 \cdot 4^3}{24EI} = 0$$

$$(M_B) \rightarrow \sum \bar{M}_B = 0; \quad -\frac{M_A \cdot 4}{6EI} - \frac{M_B \cdot 4}{3EI} + \frac{10 \cdot 4^3}{24EI} = \frac{M_B \cdot 1.5}{3EI} - \frac{1}{L} \frac{EI}{EI}$$

(A) → ESTÁTICA TRAMO PERFECTO:  $M_B = 40 \cdot 1.5 = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}$

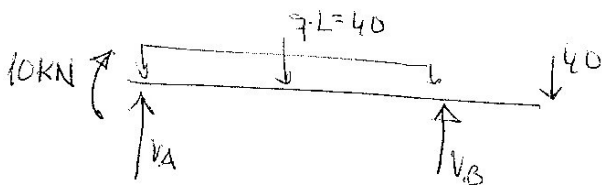
- Reordenamos las ecuaciones:

$$(M_A) \quad 1.33 M_A + 0.66 \cdot 60 - 26.67 = 0 \rightarrow M_A = -10 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(M_B) \quad -0.66 M_A - 1.33 \cdot 60 + 26.67 = 0.5 \cdot 60 - \frac{1 \cdot EI}{1.5} \rightarrow dEI = 115 \quad \left[ d = \frac{115}{EI} \right]$$

- Con este método obtenemos también el desplazamiento del extremo libre, necesario en el apartado (B).

- TANTO POR UNO COMO POR OTRO RESOLVIENDO EL HIPERESTADISMO, QUEDANDO LAS REACCIONES COMO SIGUE

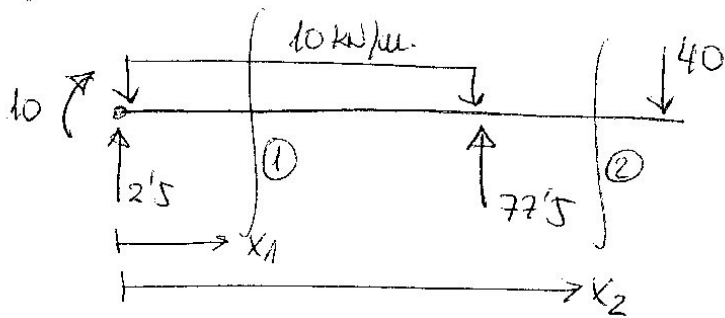


$$\sum FV = 0; \quad V_A + V_B = 80$$

$$\sum M_A = 0; \quad 4 \cdot V_B = 40 \cdot 2 + 40 \cdot 5.5 + 10$$

$$\left. \begin{array}{l} V_A = 2.5 \text{ kN} \\ V_B = 77.5 \text{ kN} \end{array} \right\}$$

— LAS LEYES DE ESFUERZOS SERÁN:



TRANSO 1 (0 < x < 4)

A free body diagram for Section 1 of length x. It shows a counter-clockwise moment of 10 at the left end, an upward reaction of 2.5, and a distributed load of 10x acting downwards. The shear force Q and bending moment M are indicated.

$$Q = 2.5 - 10 \cdot x$$

$$M = 2.5 \cdot x - 10 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \underline{2.5x - 5x^2 + 10}$$

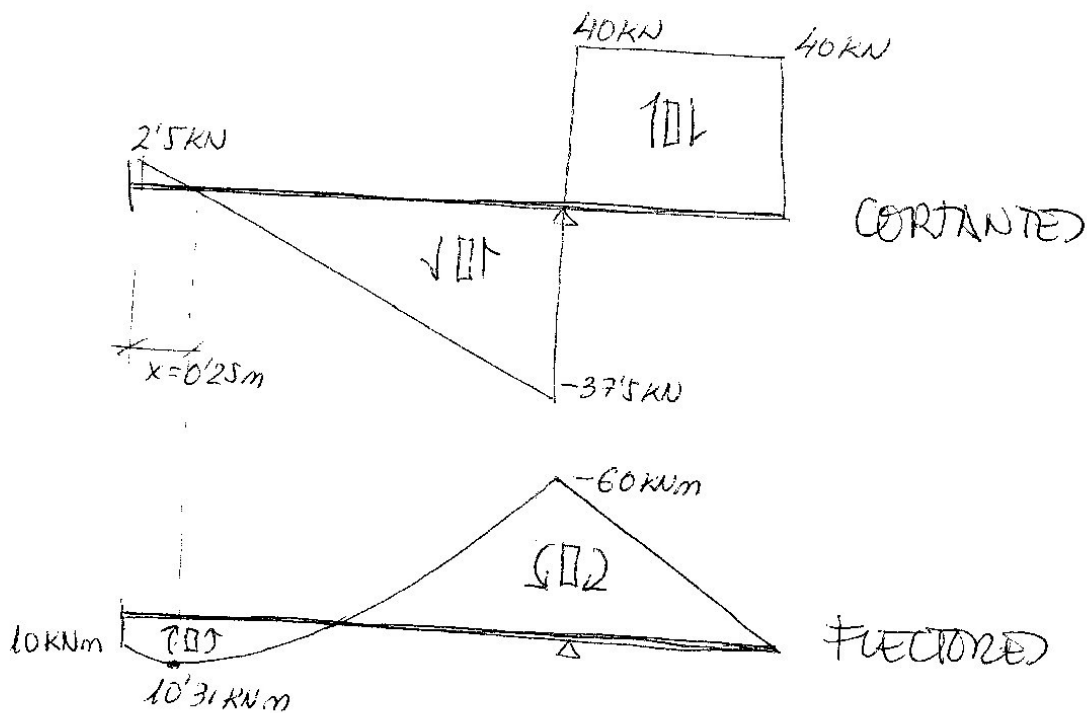
TRANSO 2 (4 < x < 5.5)

A free body diagram for Section 2 of length 5.5 - x. It shows a downward point load of 40 and an upward reaction of 77.5 at the left end. The shear force Q and bending moment M are indicated.

$$Q = 40$$

$$M = -40 \cdot (5.5 - x) = \underline{40x - 220}$$

— DIAGRAMAS DE ESFUERZOS



B) CALCULAR EL PERFIL NECESARIO PARA QUE LA FLECHA EN EL EXTREMO SEA INFERIOR A 1cm.

- Si se ha operado con brapoyadas, ya se tiene ( $f = \frac{115}{EI}$ ), pero si no la sido así, se pueden aprovechar las leyes de MF ya calculadas

$$f_{ext} = \cancel{f_A} + \cancel{\theta_A} (x_{ext} - x_A) + \frac{1}{EI} \int_0^{5.5} \frac{M(x)(5.5-x)}{EI} dx$$

$$f_{ext} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^4 (10 + 2.5x - 5x^2)(5.5-x) dx + \int_4^{5.5} (40x - 220)(5.5-x) dx \right]$$

$$f_{ext} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^4 (55 + 37.5x - 30x^2 + 5x^3) dx + \int_4^{5.5} (-1210 + 440x - 40x^2) dx \right]$$

$$f_{ext} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[ 55x + 37.5 \frac{x^2}{2} - 30 \frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^4}{4} \right]_0^4 + \left[ -1210x + 440 \frac{x^2}{2} - 40 \frac{x^3}{3} \right]_4^{5.5} \right\}$$

$$\boxed{f_{ext} = \frac{1}{EI} [-70 - 45]} = \frac{-115}{EI} \quad \text{obtenemos el mismo resultado que en las brapoyadas.}$$

$$f_{ext} \leq 1cm \rightarrow \frac{115 \text{ [kN}\cdot\text{m]}}{21 \cdot 10^6 \cdot I} \leq 0.01 \text{ [m]}; \quad I \geq \frac{115}{21 \cdot 10^6 \cdot 0.01} = 5.476 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$\boxed{\boxed{I \geq 5476 \text{ cm}^4}}$$

- EL PRIMER PERFIL QUE CUMPLE ES EL IPE 270 ( $I = 5790 \text{ cm}^4$ )

C) REPRESENTAR EL DIAGRAMA TENSIONAL EN SU PUNTO MÁS SOLICITADO

- El pto más solicitada es el apoyo B, en el que tenemos

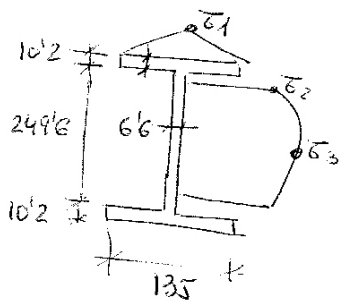
$$M = -60 \text{ kNm}$$

$$Q = 40 \text{ kN}$$

- Los diagramas de tensiones serán:

NORMAL)  $\sigma = \frac{M}{I} \cdot y$ ;  $\sigma_{\text{max}} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{60 \cdot 10^6 [\text{N} \cdot \text{mm}]}{428'9 \cdot 10^5 [\text{mm}^3]} = 139'9 \text{ N/mm}^2$

TANGENCIAL)  $\tau = \frac{Q \cdot M \cdot \alpha(y)}{I \cdot \rho(y)}$

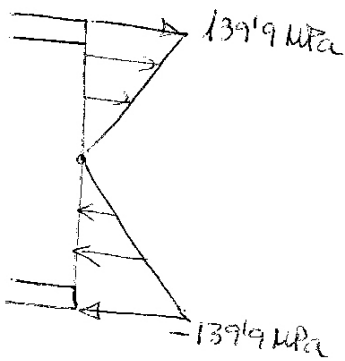


$$\sigma_1 = \frac{40 \cdot 1000 \cdot \left[ \frac{135 \cdot 10.2}{2} \cdot \left( 135 - \frac{10.2}{2} \right) \right]}{5790 \cdot 10^4 \cdot 10.2} = 6 \text{ N/mm}^2$$

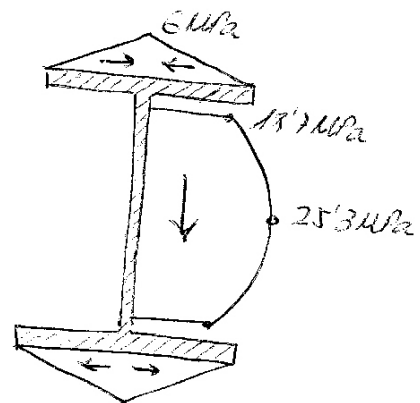
$$\sigma_2 = \frac{40 \cdot 1000 \cdot \left[ 135 \cdot 10.2 \cdot \left( 135 - \frac{10.2}{2} \right) \right]}{5790 \cdot 10^4 \cdot 6.6} = 18'7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{40 \cdot 1000 \cdot (249 \cdot 10^3)}{5790 \cdot 10^4 \cdot 6.6} = 25'3 \text{ N/mm}^2$$

TENS. NORMAL



TENS. TANGENCIALES



$$\sigma_{\text{co}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{139'9^2 + 3 \cdot 25'3^2} = 146'6 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa} = \sigma_{\text{admi.}}$$

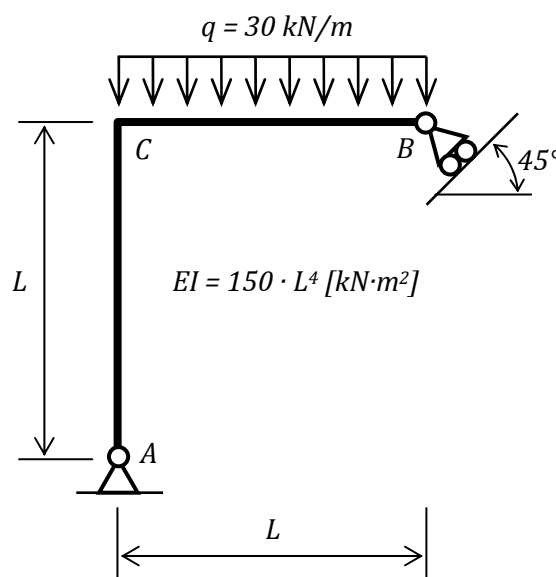
CUMPLE

<b>7502</b>	<b>TEORÍA DE ESTRUCTURAS</b>	
<b>PARTE: 1 de 2</b>	<b>EJERCICIO PRÁCTICO 1</b>	
Convocatoria: <b>Septiembre 2009</b>	Fecha: <b>10.09.2009</b>	Mínimo eval.: <b>30%</b>
Curso: <b>2008-2009</b>	Tiempo: <b>1 h 45 min</b>	Valor: <b>5 / 10</b>
Se permite el uso de calculadora programable, <b>NO</b> se permite ningún material escrito auxiliar Deberán justificarse suficientemente los resultados obtenidos		

El pórtico biapoyado de la figura es de rigidez  $EI$  constante y valor conocido, y soporta únicamente la sobrecarga uniforme del dintel. El apoyo A es fijo y el B móvil formando un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal.

Se pide lo siguiente:

- Dibujar y acotar las leyes de esfuerzos, indicando expresamente sus puntos singulares. **(1,0 puntos)**
- Determinar la magnitud de los movimientos horizontal y vertical, así como el giro en el apoyo B. **(2,0 puntos)**
- Si se dispone de chapa de acero de  $t = 10$  mm. de espesor para materializar la sección en doble T de la viga que conforma el dintel, y sabiendo que presenta una tensión admisible de 275 MPa, definir la citada sección empleando para ello la menor cantidad de acero posible, tomando un valor para  $L = 10$  m., considerando únicamente las tensiones normales generadas por la flexión. **(1,0 puntos)**
- Manteniendo el mismo espesor de la chapa, plantear de forma razonada las dimensiones óptimas de la sección en el caso de considerar también las tensiones generadas por axil y cortante, suponiendo de manera simplificada que éstas últimas se distribuyen homogéneamente por el alma **(1,0 puntos)**



**NOTAS:**

- No considerar las deformaciones inducidas por axil y cortante
- Para obtener puntuación en el apartado B es imprescindible partir de las leyes de esfuerzos correctas, calculadas en el apartado precedente.
- Supóngase para los dos últimos apartados que el valor del espesor ( $t$ ) del perfil muy inferior respecto a la altura del perfil ( $h$ ) a la hora de realizar simplificaciones de cálculo



# SOLUCIÓN EJERCICIO 1

1/6

(a) Reacciones en apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{qL^2}{2} = R_B \sqrt{2}L$$

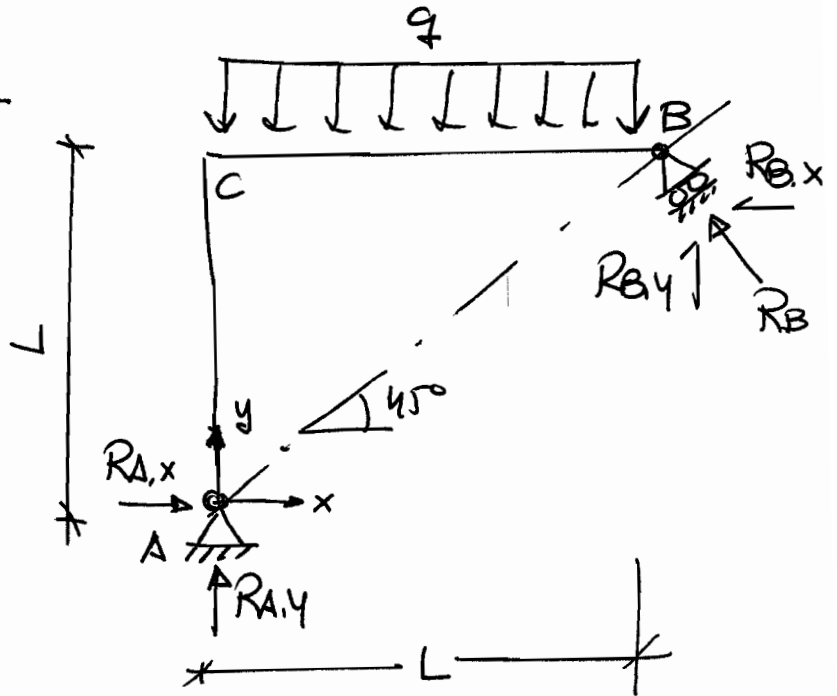
$$R_B = \frac{qL}{\sqrt{2}}$$

$$R_{B,x} = R_{B,y} = \frac{R_B}{\sqrt{2}} = \frac{qL}{4}$$

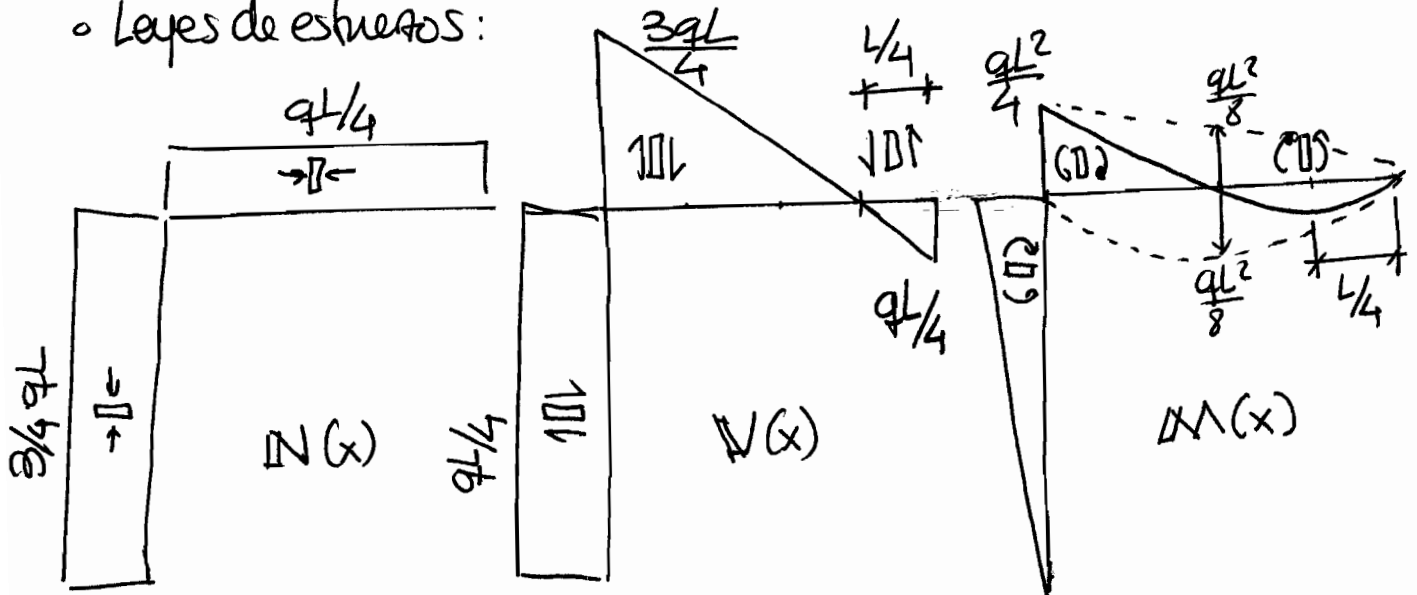
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow qL = R_{A,y} + R_{B,y}$$

$$R_{A,y} = qL - \frac{qL}{4} = \frac{3}{4}qL$$

$$R_{A,x} = R_{B,x} = \frac{qL}{4}$$



• Leyes de esfuerzos:



(b) Cálculo del movimiento en B:

2/6

- Al ser un apoyo móvil a  $45^\circ$ , los desplazamientos horizontales y verticales deben ser iguales  $\Rightarrow U_B = V_B$
- Pueden emplearse dos metodologías, la general aplicando el Tº de Mohr generalizado, o la simplificada.

(b.1) Método general:

- Mediante los Tºs de Mohr, calculamos  $U_B$  y  $V_B$ , en función de  $\theta_A$ :

$$U_B = -\theta_A L + \frac{1}{2} \frac{qL^2}{4EI} \cdot L \cdot \frac{L}{3} = -\theta_A L + \frac{qL^4}{24EI}$$

$$V_B = \theta_A L - \frac{1}{2} \frac{qL^2}{4EI} \cdot L \cdot L - \frac{1}{2} \frac{qL^2}{4EI} \cdot L \cdot \frac{2L}{3} + \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8EI} \cdot L \cdot \frac{L}{2} =$$
$$= \theta_A L - \frac{qL^4}{6EI}$$

- Pero como  $U_B = V_B$  al ser un apoyo a  $45^\circ$ , tendremos:

$$-\theta_A L + \frac{qL^4}{24EI} = \theta_A L - \frac{qL^4}{6EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{5qL^3}{48EI}$$

- Sustituyendo en las anteriores expresiones de  $U_B$  y/o  $V_B$ , hallaremos el movimiento deseado:

$$U_B = V_B = -\frac{5qL^4}{48EI} + \frac{qL^4}{24EI} = \boxed{-\frac{3qL^4}{48EI}}$$

- Si sustituimos los valores de  $q$  y  $EI$  presentes en el enunciado, resultará:

$$U_B = V_B = -\frac{3 \cdot 30 \cdot L^4}{48 \cdot 150 \cdot L^4} = 0,0125 \text{ m} = \underline{12,5 \text{ mm.}}$$

- Para el cálculo de  $\theta_B$ , podemos aplicar el 1º Teorema de Mohr:

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx \rightarrow \theta_B = \frac{5qL^3}{48EI} + \left[ \frac{1}{2} \frac{qL^3}{4} \cdot 2 + \frac{2qL^3}{24} \right] \frac{1}{EI}$$

$$\rightarrow \theta_B = \frac{qL^3}{EI} \left[ \frac{5}{48} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right] = -\frac{qL^3}{16EI} \rightarrow \boxed{\theta_B = -\frac{qL^3}{16EI}}$$

## (b.2) Método simplificado:

3/6

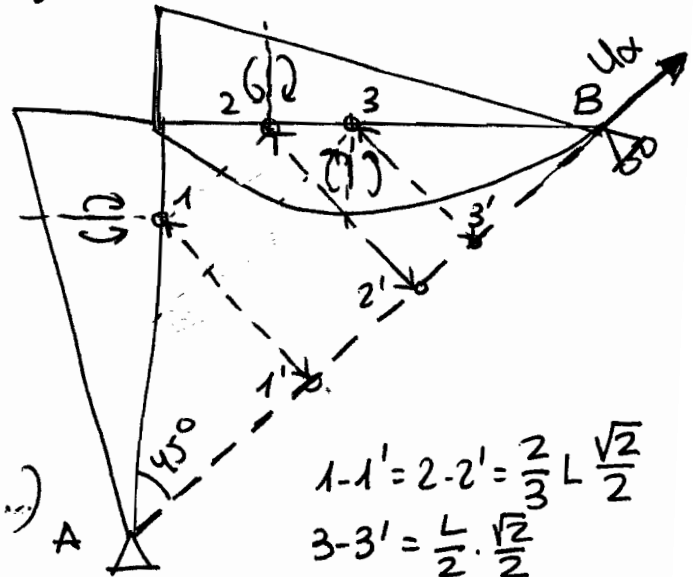
- Considerando las proyecciones de los centros de las leyes de momento sobre el segmento AB, tendremos lo siguiente:

- Al ser un movimiento en la dirección de AB, el giro  $\theta_B$  no influye:

$$U_B = -\theta_B L + \dots$$

$$V_B = \theta_B L - \dots$$

$$U_\alpha = \frac{U_B}{\sqrt{2}} + \frac{V_B}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{(-\theta_B L + \theta_B L)}_{=0} + \dots$$



$$1-1' = 2-2' = \frac{2}{3} L \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$3-3' = \frac{L}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Por tanto, podemos plantearlo como:

$$U_\alpha = -\frac{1}{2} \frac{qL^2}{4EI} \cdot L \left( \frac{2}{3} L \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{qL^2}{4EI} \cdot L \left( \frac{2}{3} L \frac{\sqrt{2}}{2} \right) +$$
$$+ \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8EI} L \left( \frac{L}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{48} \frac{qL^4}{EI} \Rightarrow U_B = V_B = \frac{U_\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{U_B = V_B = -\frac{3qL^4}{48EI}}$$

- Para calcular  $\theta_B$  podemos operar como en el caso anterior, aplicando el 1º TS de Mohr.

(c) Tomando el valor  $L = 10 \text{ m}$ , el momento máximo existente en el dintel será de:

4/6

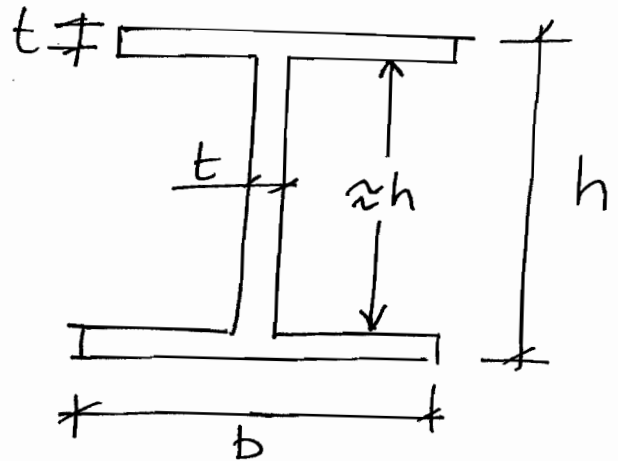
$$M_{\text{máx}} = \frac{qL^2}{4} = \frac{30 \times 10^2}{4} = 750 \text{ kN}\cdot\text{m} = 750 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}.$$

Las propiedades de la sección en doble T serán las siguientes:

$$A = t \cdot (2b + h)$$

$$I_z = t \cdot \left( \frac{h^3}{12} + \frac{bh^2}{4} \cdot 2 \right)$$

$$W_z = \frac{I_z}{h/2} = 2t \left( \frac{h^2}{12} + \frac{bh}{2} \right) = t \left( \frac{h^2}{6} + bh \right)$$



Despreciando el efecto del axil, la tensión máxima en la sección será:

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W_z} = \frac{M_{\text{máx}}}{t \left( \frac{h^2}{6} + bh \right)} \Rightarrow \text{Despejamos } b \text{ en función de } h$$

$$b = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}} \cdot t \cdot h} - \frac{h}{6}$$

Como queremos minimizar el área de la sección, debemos obtener  $\frac{dA}{dh} = 0$ , y de allí despejar el valor de  $h$ .

$$A = (2b + h) \cdot t = \left( 2 \left[ \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}} \cdot t \cdot h} - \frac{h}{6} \right] + h \right) \cdot t =$$

$$= th + \frac{2M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}} \cdot t \cdot h} \cdot t - \frac{th}{6}$$

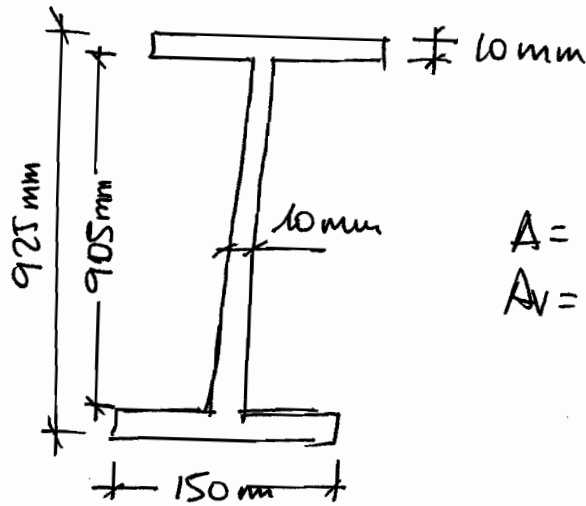
$$\frac{\partial A}{\partial h} = 0 \rightarrow t - \frac{2M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}} \cdot h^2} - \frac{t}{6} = 0 \rightarrow 1 - \frac{1}{6} = \frac{2M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}} \cdot t \cdot h^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \sqrt{\frac{3M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}} \cdot t}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 750 \cdot 10^6}{275 \cdot 10}} = \underline{\underline{905 \text{ mm}}}$$

5/6

• Como  $b = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm} \cdot t \cdot h} - \frac{h}{6} = \frac{750 \cdot 10^6}{275 \cdot 10 \cdot 905} - \frac{905}{6} = \underline{150 \text{ mm}}$ .

• Así, la sección deberá tener las siguientes dimensiones:



$$A = 10 \cdot (2 \cdot 150 + 905) = 12050 \text{ mm}^2$$

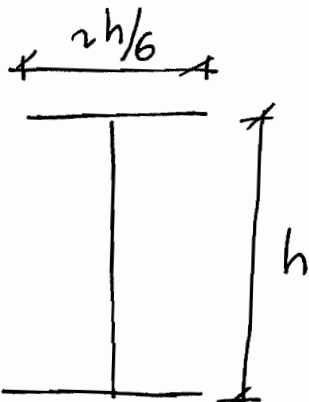
$$A_v = 10 \cdot 905 = 9050 \text{ mm}^2$$

(d) Si ahora consideramos la influencia del axil y el cortante, lo primero que podemos evaluar es el incremento de tensiones que producirán sobre la sección obtenida en el apartado anterior

$$\Delta \sigma_N = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{qL/4}{A} = \frac{30 \cdot 10/4 \cdot 10^3}{12050} = 6 \text{ N/mm}^2 \ll 275 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta \tau = \frac{V_{\max}}{A_v} = \frac{3qL/4}{A_v} = \frac{3 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10^3}{4 \cdot 9050} = 25 \text{ N/mm}^2 \ll 275 \text{ N/mm}^2$$

Como los  $\Delta \sigma$ ,  $\Delta \tau$  no suponen grandes incrementos de tensión respecto de  $\sigma_{adm}$ , podemos suponer que la sección óptima seguirá manteniendo las mismas proporciones:



luego  $A = t \cdot (h/3 + h) = \frac{4ht}{3}$ ;  $A_v = t \cdot h$

$$W = t \cdot \left( \frac{h^2}{6} + \frac{h^2}{6} \right) = \frac{th^2}{3}$$

Así,

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} + \frac{M_{\max}}{W}; \quad \tau_{\max} = \frac{V_{\max}}{A_v}$$

$$\sigma_{co} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm}$$

- Sustituyendo valores en la expresión anterior, tenemos:

$$\sqrt{\left(\frac{75 \cdot 10^3}{\frac{40}{3}h} + \frac{750 \cdot 10^6}{\frac{10}{3}h^2}\right)^2 + 3\left(\frac{225 \cdot 10^3}{10 \cdot h}\right)^2} \leq 275 \text{ N/mm}^2$$

- Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\frac{75 \cdot 10^3}{\frac{40}{3}h} + \frac{750 \cdot 10^6}{\frac{10}{3}h^2}\right)^2 + 3\left(\frac{225 \cdot 10^3}{10 \cdot h}\right)^2 \leq 275^2$$

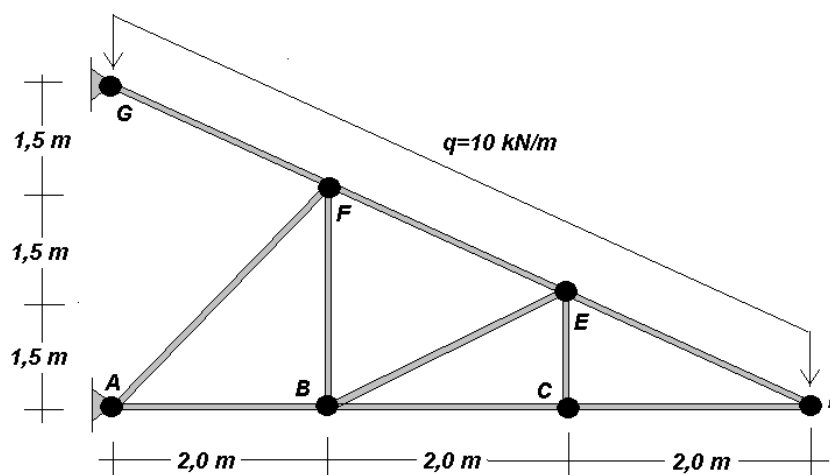
$$[10^3]^2 \cdot \left(\frac{75 \cdot 3}{40h} + \frac{750 \cdot 10^3}{\frac{10}{3}h^2}\right)^2 + [10^3]^2 \cdot 3\left(\frac{225}{10h}\right)^2 \leq 275^2$$

- Resolviendo la ecuación de 2º grado o efectuando tanteos sucesivos partiendo de  $h = 905 \text{ mm}$  con  $\Delta h = +5 \text{ mm}$ , obtenemos que:

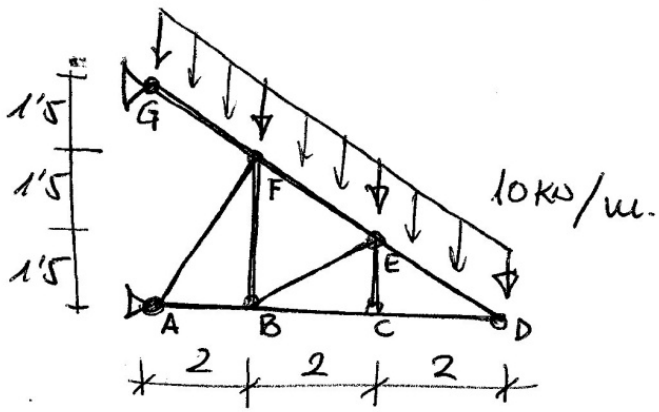
$h = 920 \text{ mm}$ $b = \frac{h}{6} \approx 155 \text{ mm}$
---

<b>7502</b>	<b>TEORÍA DE ESTRUCTURAS</b>	
<b>PARTE: 2 de 2</b>	<b>EJERCICIO PRÁCTICO 2</b>	
Convocatoria: <b>Septiembre 2009</b>	Fecha: <b>10.09.2009</b>	Mínimo eval: <b>30%</b>
Curso: <b>2008-2009</b>	Tiempo: <b>1 h 45 min</b>	Valor: <b>5 / 10</b>
Se permite el uso de calculadora programable, <b>NO</b> se permite ningún material escrito auxiliar Deberán justificarse suficientemente los resultados obtenidos		

La siguiente estructura de cubrición recibe una carga de 10 kN/m en su cordón superior. Está formada por barras biarticuladas de acero de sección circular hueca, diámetro exterior 50 mm y espesor 5 mm. Con la geometría y las acciones indicadas, se pide:



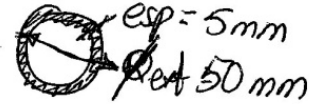
- Calcular los esfuerzos axiales de todas las barras de la estructura. **(1,5 puntos)**
  - Obtener los desplazamientos del nudo D. **(1,5 puntos)**
  - Comprobar a pandeo la barra más desfavorable de la estructura. Si la comprobación no es satisfactoria, obtener el nuevo diámetro (múltiplo de 10 mm.) necesario para el cumplimiento a pandeo, manteniendo el espesor de la barra. **(1 punto)**
  - Calcular el valor del incremento de temperatura a aplicar a la estructura para que el nudo D no se desplace horizontalmente, y obtener el desplazamiento vertical del nudo D en ese caso. Respetar los esfuerzos obtenidos en el apartado a). **(1 punto)**
- Datos:**  $E = 210.000 \text{ MPa}$   
 $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$



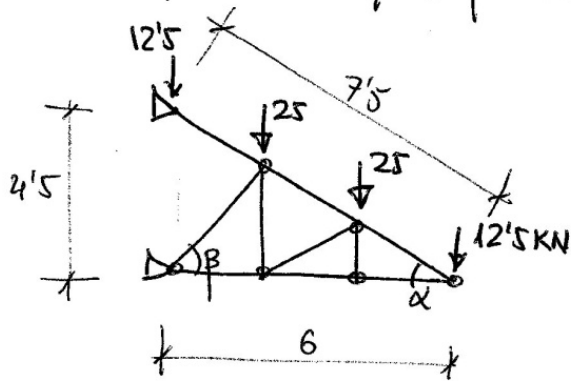
- + MOVIMIENTOS NUDO EXTREMO
- + ESFUERZOS EN TODAS LAS BARRAS
- + PAREDA BARRA MAS SOLICITADA.

$$E = 210.000 \text{ MPa}$$

PERFILES



En primer lugar, pasamos la carga distribuida a los nudos:

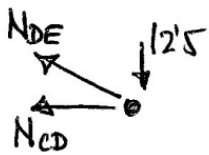


$$\alpha = \arctan \frac{4.5}{6} = 36.87^\circ$$

$$\beta = \arctan \frac{3}{2} = 56.31^\circ$$

Como la estructura es isostática, podemos resolverla por el método de las fuerzas sin problema. Calculamos los esfuerzos nudo a nudo:

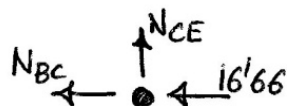
NUDO D



$$N_{CD} = -16.66 \text{ KN}$$

$$N_{DE} = 20.83 \text{ KN}$$

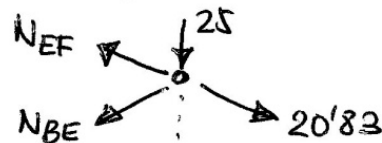
NUDO C



$$N_{BC} = -16.66 \text{ KN}$$

$$N_{CE} = 0$$

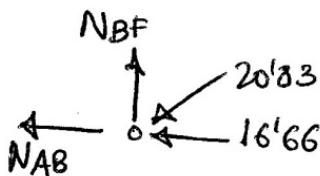
NUDO E



$$N_{BE} = -20.83 \text{ KN}$$

$$N_{EF} = 41.66 \text{ KN}$$

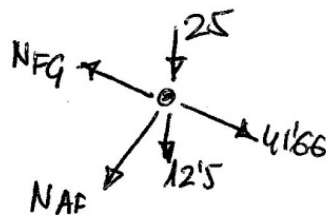
NUDO B



$$N_{AB} = -33.3 \text{ KN}$$

$$N_{BF} = 12.5 \text{ KN}$$

NUDO F

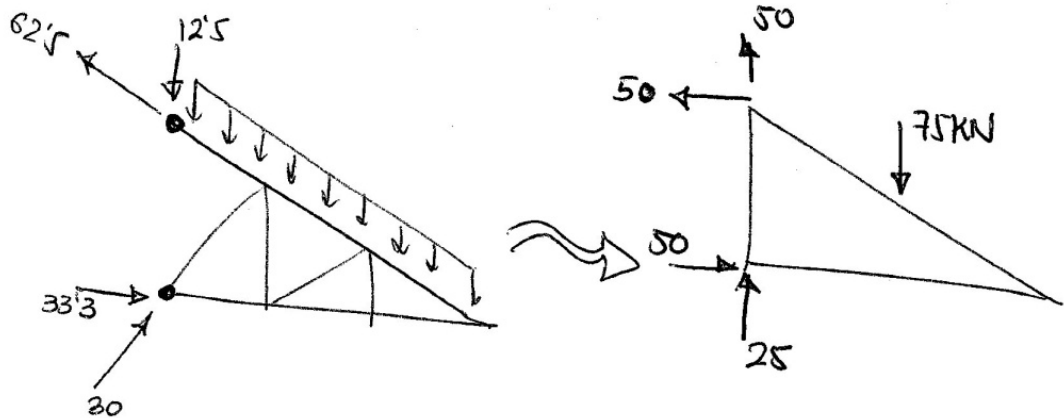


$$N_{AF} = -30.0 \text{ KN}$$

$$N_{FG} = 62.5 \text{ KN}$$



Como podemos comprobar, la estructura está en equilibrio:

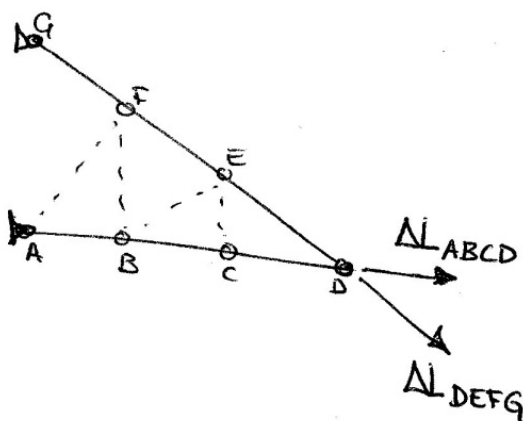


SOLUCIÓN ESTUERZOS AXIALES EN BARRAS

BARRA	AXIL [kN]	BARRA	AXIL [kN]
AB	-33'33	CD	-16'66
AF	-30'00	CE	0
BC	-16'66	DE	20'83
BE	-20'83	EF	41'66
BF	12'50	FG	62'50

\* DESPLAZAMIENTOS EXTREMO D.

Los cordones exteriores, al ser formados por barras paralelas entre sí, sólo pueden sufrir incrementos de longitud, por lo que los desplazamientos del punto D se pueden deducir así:



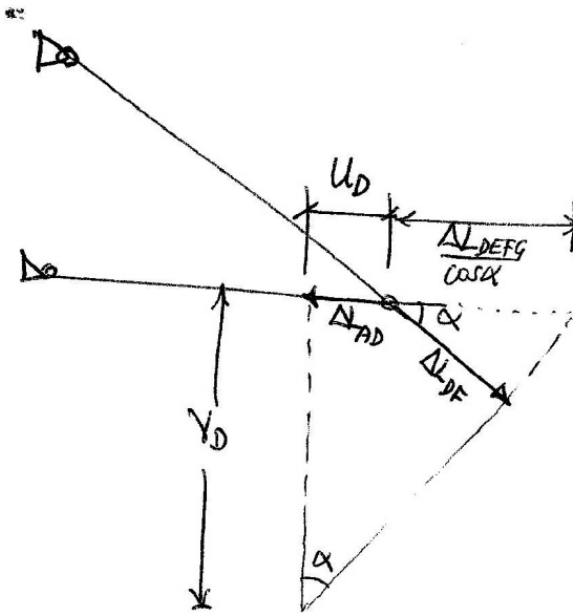
$$\Delta L_{ABCD} = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD}$$

$$\Delta L_{ABCD} = \frac{(N_{AB} + N_{BC} + N_{CD}) \cdot L}{EA}$$

$$\Delta L_{ABCD} = \frac{(-33.330 - 16.666 - 16.666) \cdot 2000}{210.000 \cdot \frac{\pi}{4} [50^2 - 40^2]}$$

$$\Delta L_{ABCD} = -0'898 \text{ mm}$$

$$\Delta L_{DEFG} = \frac{(62.500 + 41.666 + 20.833) \cdot 3000}{210.000 \cdot \frac{\pi}{4} (50^2 - 40^2)} = 2'526 \text{ mm}$$



$$* \boxed{U_D = \Delta L_{ABCD} = -0'898 \text{ mm}}$$

$$* V_D = \left( \Delta L_{ABCD} + \frac{\Delta L_{DEFG}}{\cos \alpha} \right) \cdot \cot \alpha$$

$$\boxed{V_D = \left( 0'898 + \frac{2'526}{0'8} \right) \cdot \frac{0'8}{0'6} = -5'407 \text{ mm}}$$

\* PANDEO BARRA MÁS DESFAVORABLE

- La barra más desfavorable al pandeo es la barra AF, con el mayor esfuerzo de compresión y la mayor longitud ( $L = 3'605 \text{ m}$ ), por lo que únicamente comprobamos:

$$N_{AF} < N_{CRIT} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\beta^2 \cdot L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210.000 \cdot 181132}{1^2 \cdot 3605^2} = \underline{28.887 \text{ N}}$$

$$I = \frac{\pi}{64} (D_{ext}^4 - D_{int}^4) = \frac{\pi}{64} (50^4 - 40^4) = 181132 \text{ mm}^4$$

• Como  $N_{AF} = -30 \text{ kN}$ , la barra PANDEA, NO COMPLE

\* REDIMENSIONADO BARRA.

$$N_{AF} < N_{CRIT}; \quad 30000 < \frac{\pi^2 \cdot 210000}{1^2 \cdot 3605^2} \cdot I \longrightarrow I >_{\text{min}} 188.110 \text{ mm}^4$$

Con  $\phi 60$ ,  $I = 329376 \text{ mm}^4 > I_{\text{min}} \longrightarrow \phi 60 \text{ cumple!!}$

\*  $\Delta T$  ?

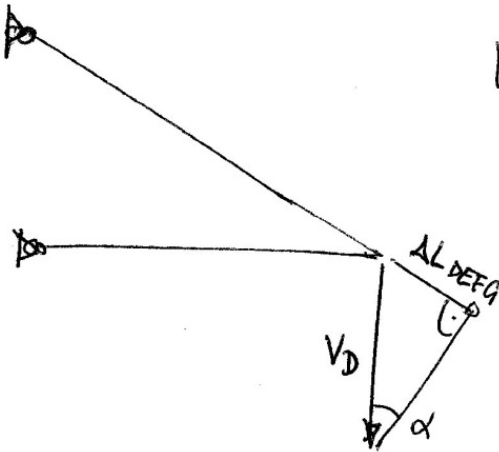
- De igual modo, las barras interiores no afectan al desplazamiento de D, por lo que el planteamiento de los movimientos es igual que en (b).

$$\Delta_{ABCD} = -0'898 + \alpha \Delta T L = -0'898 + 10^{-5} \Delta T \cdot 6000$$

Como  $U_D = \Delta_{ABCD} \rightarrow 0 = -0'898 + 10^{-5} \cdot 6000 \Delta T$

$$\boxed{\Delta T \approx 15^\circ}$$

- El descenso en este caso será:



$$V_D = \frac{\Delta L_{DEFG}}{\text{sen } 36'57''} = \frac{2'526 + 10^{-5} \cdot 7500 \cdot 15}{0'6}$$

$$\boxed{\downarrow V_D = 6'085 \text{ mm}}$$