



**IV JORNADAS DOCTORALES**  
**ESCUELA INTERNACIONAL DE DOCTORADO**  
**DE LA UNIVERSIDAD DE MURCIA**  
**(EIDUM)**



**2019**

1ª Edición, 2019

Reservados todos los derechos. De acuerdo con la legislación vigente, y bajo las sanciones en ella previstas, queda totalmente prohibida la reproducción y/o transmisión parcial o total de este libro, por procedimientos mecánicos o electrónicos, incluyendo fotocopia grabación magnética, óptica o cualesquiera otros procedimientos que la técnica permita o pueda permitir en el futuro, sin la expresa autorización por escrito de los propietarios del copyright.

© Universidad de Murcia, Servicio de Publicaciones, 2019



Depósito legal Mu 182-2019

I.S.B.N.: 978-84-09-09200-0

Diseño y Maquetación 42lineasdigital - 42lineasdigital@gmail.com

# LA INFLUENCIA DE LOS NATURALES EN LAS MULTIPLICACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

J. M. González-Forte, C. Fernández, S. Llinares

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante  
juanma.gonzalez@ua.es; ceneida.fernandez@ua.es; sllinares@ua.es

## Introducción y marco teórico

Durante décadas, las investigaciones han mostrado las dificultades que tienen los estudiantes de educación primaria y secundaria en la comprensión de diferentes aspectos de los números racionales, siendo una de las principales causas el uso inapropiado del conocimiento sobre los números naturales cuando se aprenden los números racionales (Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985; Ni y Zhou, 2005). En los últimos años se ha iniciado una línea de investigación basada en el fenómeno *Natural Number Bias* (Van Dooren, Lehtinen y Verschaffel, 2015) mostrando que el conocimiento sobre los números naturales facilita la resolución de tareas sobre racionales compatibles con este conocimiento, pero provoca el efecto contrario cuando las tareas no son compatibles con dicho conocimiento. En este sentido, la investigación ha mostrado que los estudiantes tienen más éxito en tareas de números racionales cuando éstas son compatibles con el conocimiento sobre los números naturales (Nunes y Bryant, 2008; Stafylidou y Vosniadou, 2004).

Estas investigaciones han considerado tres dominios: magnitud, densidad y operaciones aritméticas teniendo en cuenta diferentes representaciones de los racionales (fracciones y números decimales) (Van Dooren et al., 2015). En la presente investigación centramos nuestra atención en el dominio de las operaciones aritméticas, de manera más específica en la multiplicación. En este dominio, los estudios han mostrado que las dificultades de los estudiantes residen en la creencia propia de los números naturales de que tras una multiplicación el resultado “siempre es mayor” (Fischbein et al., 1985; Obersteiner, Van Hoof, Verschaffel y Van Dooren, 2016). En relación a las diferencias existentes entre los distintos tipos de representación de los números racionales, en el ámbito específico de las operaciones aritméticas se considera que los estudiantes desarrollan primero una buena comprensión de las operaciones con números decimales y luego con fracciones (Van Hoof et al., 2018) ya que los procedimientos utilizados en la aritmética con números decimales, a diferencia de con fracciones, se parecen mucho a los utilizados para la aritmética de números enteros, con la excepción de que la aritmética decimal requiere la colocación correcta del punto decimal (Lortie-Forgues, Tian y Siegler, 2015).

Nuestro estudio amplía estos estudios realizando (i) un análisis cualitativo de los razonamientos de los estudiantes que den evidencias del fenómeno investigado en este dominio y de las hipótesis obtenidas, ya que las investigaciones previas han confirmado las hipótesis usando cuestionarios de elección múltiple y (ii) realizando un estudio transversal examinando la evolución desde los últimos cursos de primaria hasta la finalización de secundaria. Las hipótesis son las siguientes: Hipótesis 1: las multiplicaciones con números decimales tendrán mejores resultados que las multiplicaciones con fracciones; Hipótesis 2: las multiplicaciones congruentes con el conocimiento sobre los números naturales tendrán mejores resultados que las incongruentes; Hipótesis 3: el fenómeno *natural number bias* decrecerá con la edad, persistiendo en los últimos años.

## Método

### Participantes e instrumento

Los participantes fueron 438 estudiantes de educación primaria y secundaria (Tabla 1) pertenecientes a diferentes centros de educación primaria y secundaria.

**Tabla 1.** Número de estudiantes por curso

Curso	Primaria		Secundaria				Total
	5°	6°	1°	2°	3°	4°	
Número de estudiantes	85	81	78	81	57	56	438

El instrumento de recogida de datos consistió en un cuestionario compuesto por cuatro ítems de multiplicación de un número natural por un racional, teniendo en cuenta dos variables: la congruencia con respecto al conocimiento de los números naturales (Congruente- C o Incongruente- I) y la forma de representación del número racional (fracción - F o número decimal - D). Los ítems 1 y 2 presentan una multiplicación de un número natural por una fracción ( $5 \times 1/2$  y  $10 \times 3/2$ ). El primer ítem por una fracción propia, por lo que el producto de la multiplicación resultará un número menor que el número natural multiplicado (ítem incongruente); y el segundo ítem por una fracción impropia, siendo el resultado de la operación un número mayor (ítem congruente). Los ítems 3 y 4 son multiplicaciones de un número natural por un número decimal ( $2 \times 0.5$  y  $7 \times 1.5$ ). El tercer ítem por un número decimal inferior a la unidad por lo que el resultado será un número menor al número natural multiplicado (ítem incongruente). El cuarto ítem por un número decimal mayor a la unidad (ítem congruente). En cada ítem, el estudiante tenía que contestar si el resultado de la multiplicación daría un número mayor o menor que el número natural por el que se multiplicaba, y justificar su respuesta.

### Análisis

Se llevaron a cabo dos tipos de análisis: cuantitativo (niveles de éxito) y cualitativo (razonamientos empleados por los estudiantes). En el análisis cuantitativo se examinaron los niveles de éxito de los estudiantes en cada ítem y por curso, codificándose las respuestas correctas con un 1 e incorrectas con un 0. A partir de esta codificación se realizó un análisis de regresión logística de medidas repetidas usando el método de estimación de ecuaciones generalizado (GEE), con el objetivo de indagar si las diferencias entre los ítems congruentes e incongruentes a lo largo de los cursos eran significativas y así confirmar las hipótesis.

En el análisis cualitativo se examinó el tipo de razonamiento empleado por los estudiantes en cada uno de los ítems propuestos (justificaciones dadas). Tras un análisis inductivo, se generaron categorías de razonamientos correctos e incorrectos. En relación a los razonamientos correctos se generó una categoría que consideraba si el estudiante tenía en cuenta que al multiplicar por fracciones propias o por números decimales inferiores a la unidad el producto es un número menor; y al multiplicar por fracciones impropias o por números decimales superiores a la unidad el producto es un número mayor (Figura 1).

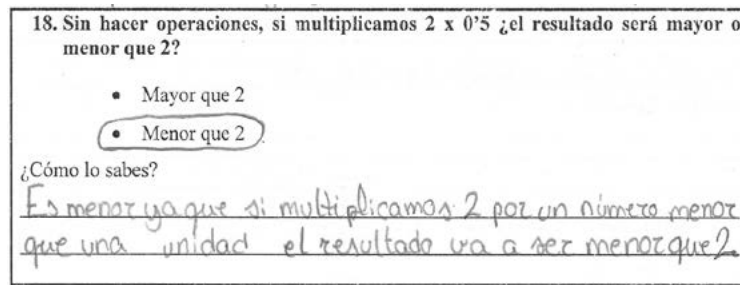


Figura 1. Respuesta de un estudiante de 6º de primaria

En relación a los razonamientos incorrectos se generaron 2 categorías. Una primera categoría se correspondía con el razonamiento basado en el *natural number bias*: razonamientos basados en la idea de que las multiplicaciones siempre dan como producto un número mayor (Figura 2); y la segunda categoría abarcaba diferentes razonamientos: respuestas en blanco y razonamientos sin sentido.

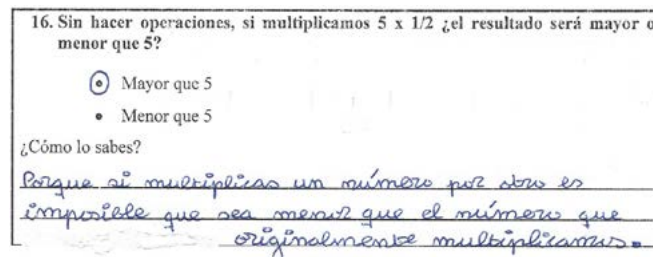


Figura 2. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO

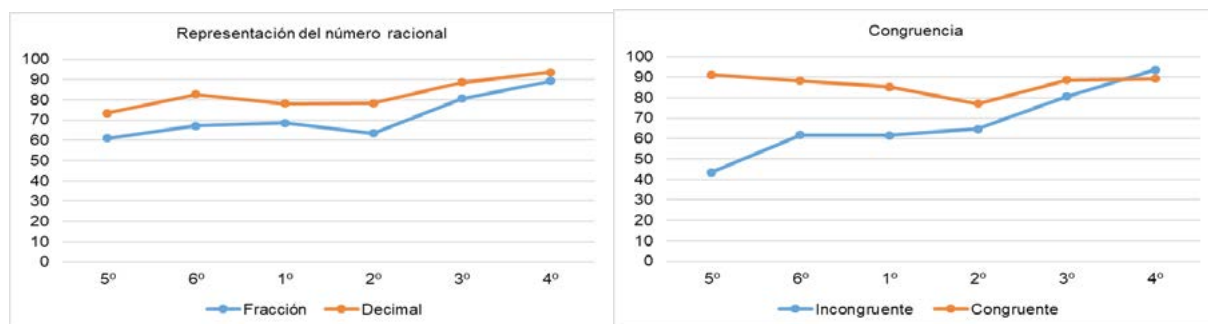
**Resultados**

La Tabla 2 muestra que, globalmente, los estudiantes tuvieron más éxito en las multiplicaciones con números decimales (82.53%) que con fracciones (71.77%). El análisis estadístico de regresión logística mostró que esta diferencia era significativa  $\chi^2(1, N=438)=38.722, p<0.001$ . En cuanto a la variable congruencia, los ítems congruentes tuvieron mayor porcentaje de éxito que los incongruentes (86.62% vs. 67.68%). El análisis de regresión logística también mostró que la diferencia era significativa  $\chi^2(1, N=438)=71.971, p<0.001$ .

**Tabla 2.** Porcentaje total de respuestas correctas en los ítems de multiplicación con fracciones (F) y números decimales (D) congruentes (C) e incongruentes (I)

Nivel de éxito			
FI	FC	DI	DC
60.30	83.24	75.06	90.01

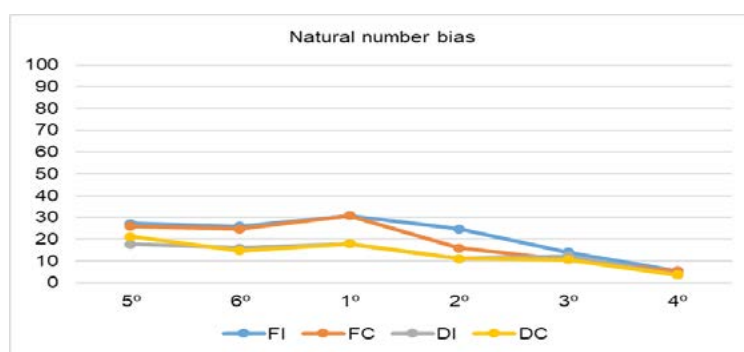
Si detallamos los resultados por curso (Figura 3 –gráfica izquierda), observamos que los estudiantes tuvieron más éxito en las multiplicaciones con números decimales que con fracciones en todos los cursos, siendo las diferencias significativas ( $\chi^2(5, N=438)=17.174, p<0.004$ ) desde 5º de educación primaria hasta 2º de educación secundaria, confirmándose la Hipótesis 1. En cuanto a la evolución del nivel de éxito a lo largo de primaria y secundaria, se observa un aumento del éxito en ambos tipos de representaciones, exceptuando de 1º a 2º de ESO en los ítems de multiplicación con fracciones y de 6º de primaria a 1º de ESO en los ítems de multiplicación con números decimales.



**Figura 3.** Nivel de éxito según la representación del número racional y según la congruencia

Por otra parte, las diferencias entre los ítems congruentes e incongruentes fueron significativas ( $\chi^2(5, N=438) = 101.849, p < 0.001$ ) desde 5º a 2º de educación primaria, teniendo más éxito en los congruentes, por lo que se confirma la Hipótesis 2. En cuanto a la evolución, se observa una disminución del éxito en los ítems congruentes de 5º de primaria a 2º de ESO (siendo las diferencias significativas de 6º a 1º y de 1º a 2º) y un posterior aumento del éxito de 2º a 4º de ESO, siendo significativo de 2º a 3º. En cuanto a los ítems incongruentes, se observa un aumento gradual del éxito, siendo las diferencias significativas en todos los cursos a excepción de 6º de primaria a 1º de ESO, y obteniéndose mayor éxito en este tipo de ítems que en los congruentes en 4º de ESO. Estos resultados muestran que los estudiantes tanto de primaria como de secundaria tuvieron más éxito en las tareas compatibles con el conocimiento sobre los números naturales, excepto en 4º de la ESO.

La Figura 4 recoge los porcentajes de uso del razonamiento basado en el *natural number bias* por curso e ítem. Se observa cómo dicho razonamiento decrece con la edad –a excepción de 1º de ESO– pues en 5º de primaria es empleado por más de un 20% y va disminuyendo con el aumento de los cursos, siendo empleado por más de un 5% en 4º de la ESO. Por lo tanto, se observa como desciende pero no desaparece, confirmándose nuestra Hipótesis 3.



**Figura 4.** Porcentaje de empleo del razonamiento basado en el *natural number bias* por curso e ítem

Centrando la atención en los porcentajes para cada una de los ítems, se observa que el porcentaje de empleo es más alto en los ítems con fracciones en todos los cursos. En cuanto a las diferencias entre ítems congruentes e incongruentes, el porcentaje es predominantemente mayor en los incongruentes (a excepción de 5º de primaria con los números decimales).

Los razonamientos de los estudiantes parecen confirmar que la causa por la cual los ítems incongruentes han obtenido niveles de éxito inferiores a los ítems congruentes se debe al *natural number bias*, puesto que su decrecimiento a lo largo de los cursos se corresponde con un aumento del nivel de éxito en los ítems donde el conocimiento sobre el número natural es incompatible.

## Discusión y conclusiones

Los resultados muestran la existencia del fenómeno *natural number bias* a lo largo de educación primaria y secundaria en el dominio de las operaciones, y en particular con la multiplicación de números racionales, evidenciada por menores porcentajes de éxito en ítems donde el conocimiento de los números naturales no era compatible para resolverlas (Obersteiner et al., 2016; Van Hoof et al., 2015; Van Hoof, et al., 2018). Estos resultados han sido confirmados por los razonamientos dados por los estudiantes ampliando estudios previos donde se confirmaban hipótesis a través de cuestionarios de elección múltiple. Además, aunque este fenómeno disminuye en los últimos años de educación secundaria, persiste.

Por otro lado, los resultados muestran que los estudiantes tuvieron más dificultades en ítems con fracciones que con números decimales, confirmando lo obtenido en estudios previos (Lortie-Forgues et al., 2015; Van Hoof et al., 2018).

## Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana) (PROMETEO/2017/135).

## Referencias

- Fschbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, 16, 3-17.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J. y Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?. *Developmental Review*, 38, 201-221.
- Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.
- Nunes, T. y Bryant, P. (2008). Rational numbers and intensive quantities: challenges and insights to pupils' implicit knowledge. *Anales de Psicología/Annals of Psychology*, 24(2), 262-270.
- Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*. 107, 537-555.
- Stafylidou, S. y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction*, 14(5), 503-518.
- Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, 37, 1-4.
- Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences*, 61, 99-108.