



**IV JORNADAS DOCTORALES**  
**ESCUELA INTERNACIONAL DE DOCTORADO**  
**DE LA UNIVERSIDAD DE MURCIA**  
**(EIDUM)**



**2019**

1ª Edición, 2019

Reservados todos los derechos. De acuerdo con la legislación vigente, y bajo las sanciones en ella previstas, queda totalmente prohibida la reproducción y/o transmisión parcial o total de este libro, por procedimientos mecánicos o electrónicos, incluyendo fotocopia grabación magnética, óptica o cualesquiera otros procedimientos que la técnica permita o pueda permitir en el futuro, sin la expresa autorización por escrito de los propietarios del copyright.

© Universidad de Murcia, Servicio de Publicaciones, 2019



Depósito legal Mu 182-2019

I.S.B.N.: 978-84-09-09200-0

Diseño y Maquetación 42lineasdigital - 42lineasdigital@gmail.com

# EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS DENTRO DEL ENFOQUE DESIGN RESEARCH

M. Bernabeu<sup>1</sup>, M. Moreno<sup>2</sup> y S. Llinares<sup>3</sup>

<sup>1</sup>melania.bernabeu@ua.es; <sup>2</sup>mmoreno@ua.es; <sup>3</sup>sllinares@ua.es  
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

## Introducción

La comprensión de las figuras geométricas engloba diversas capacidades que se van desarrollando junto con el pensamiento geométrico. Esta comprensión se apoya en acciones mentales como reconocer atributos de las figuras geométricas y relacionarlos para categorizarlas (Battista, 2007; Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999; Elia & Gagatsis, 2003; Levenson, Tirosh & Psamir, 2011; Yesil-Dagli & Halat, 2016). Toda figura geométrica se compone de atributos críticos y no críticos. Se entiende por atributo crítico el que proporciona soporte para la definición formal del concepto y atributos no crítico, el que no determina aspectos relevantes para generar la definición (tamaño, color u orientación) (Hershkowitz & Vinner, 1983; Hershkowitz, 1989). Los atributos no críticos dificultan la comprensión de las figuras geométricas, pues son adquiridos, normalmente, antes de ir a la escuela (Clements et al., 1999; Tall & Vinner, 1981).

Investigaciones previas sobre la comprensión del concepto de las figuras geométricas muestran que se trata de un proceso progresivo que se inicia con el reconocimiento perceptual, basado en la semejanza de las imágenes, continúa con el reconocimiento de atributos críticos característicos del concepto y, termina con la consolidación del concepto basado en la definición. Según Tall y Vinner (1981), la noción de figuras geométricas, lo constituyen la imagen del concepto y la definición del concepto. Se entiende por imagen del concepto “la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, e incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados” (Tall & Vinner, 1981, p.152). Dicha imagen del concepto, al englobar diversos registros, puede incluir imágenes que son inapropiadas y contradicen la definición del concepto (Levenson et al., 2011). Por otro lado, la definición del concepto es “una descripción discursiva para definir ese concepto” (Tall & Vinner, 1981, p. 152) aceptada por la comunidad matemática. Por ello, cuando se desarrolla la comprensión de un determinado concepto geométrico, es importante partir de las imágenes del concepto que el individuo asocia a una determinada noción geométrica para generar una definición del mismo coherente y lo más próxima a la aceptada por la comunidad matemática.

Las investigaciones sobre el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas son escasas (Siew-Yin, 2003). En el ámbito nacional existen estudios que aportan información acerca de esta comprensión de la geometría, pero no son suficientes (Berciano, Jiménez-Gestal, & Salgado, 2017; Bernabeu & Llinares, 2017; Bernabeu, Llinares, & Moreno, 2017), ya que tratan sobre el razonamiento y argumentación de niños de infantil y primaria ante problemas de geometría (figuras y cuerpos geométricos), pero no de cómo es el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas. Por ello, el objetivo de nuestra/esta investigación es indagar en las características que subyacen a la comprensión del concepto de las figuras geométricas en alumnos de primaria a través de una trayectoria de aprendizaje.

### Marco teórico

Esta investigación se basa en la coordinación de las aprehensiones perceptual, discursiva y operativa para el aprendizaje de la geometría (Duval 1995, 1999). La aprehensión *perceptual* es la capacidad para reconocer o percibir las figuras, saber nombrarlas y reconocerlas dentro de un subconjunto de varias figuras; la *aprehensión discursiva* implica relacionar la figura con declaraciones sobre la denominación, definición y reconocimiento de los atributos geométricos; y la *aprehensión operativa* es la capacidad de modificar una figura, cambiando la posición u orientación de esta para resolver los problemas geométricos. La base del desarrollo del pensamiento geométrico lo constituye la conceptualización de las figuras geométricas, las cuales dependen de la coordinación de estas aprehensiones (Fischbein, 1993, 1998).

### Aproximación metodológica

el enfoque de investigación de nuestro estudio está basado en el Design Research (DR), en el que un experimento (producto, proceso o herramienta) es idealizado, diseñado, desarrollado y refinado a través de ciclos de experimentación, observación, análisis y rediseño mediante una retroalimentación sistemática de los resultados finales. El objetivo es incidir en la educación, profundizando/buscando en otras aproximaciones a la enseñanza y aprendizaje, y estudiando el impacto que esta forma de abordar el proceso de enseñanza produce en los niños (Swan, 2014).

Las características que engloban este enfoque son: (1) desarrollar teorías sobre el aprendizaje y los medios que apoyan ese aprendizaje; (2) realizar investigaciones en contextos naturales como la clase (por eso los datos son más útiles que si se realizaran en laboratorios); (3) presentar componentes prospectivos y reflexivos, pues al implementar el aprendizaje hipotético (prospectivo) los investigadores confrontan conjeturas con el aprendizaje que se produce (reflexiva) y pueden reflexionar para realizar cambios en las próximas lecciones; (4) ser un enfoque de naturaleza cíclica: fase de preparación y diseño, experimento de enseñanza y análisis retrospectivo para un nuevo experimento de enseñanza; y (5) desarrollar una teoría humilde y transferible, pues se desarrolla para un dominio específico pero suficientemente general como para desarrollarse en otros contextos, como otras aulas (Bakker & van Eerde, 2015).

Dentro de las variedades del Design Research, nos hemos decantado por el estudio de diseño de aula, donde el grupo de investigación colabora con el profesor, el cual podría ser un miembro del grupo de investigación, aunque no es necesario, para instruir a los estudiantes en un determinado dominio matemático e investigar su proceso de aprendizaje en el grupo clase. Este tipo de estudios son útiles para probar y revisar conjeturas sobre el desarrollo de las formas de razonar de los estudiantes en un dominio matemático específico. Estas intervenciones se suelen realizar con un grupo de estudiantes (como puede ser una clase) durante un periodo de tiempo, que puede ir desde unas pocas semanas hasta un año escolar entero o incluso más. Asimismo, cuando la base de la investigación sobre la que se va a estudiar es escasa, se realiza un estudio inicial que permita diseñar el próximo ciclo (Gravemeijer & Cobb, 2006; Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016).

Para nuestra investigación, dada la escasez de resultados previos sobre el tema objeto de estudio, se realizó un estudio piloto sobre la comprensión de las figuras geométricas en alumnos de tercero de primaria (8-9 años) para obtener información de la comprensión mostrada, analizarla y rediseñar la metodología empleada mediante ciclos iterativos. Esto nos permitiría volver a realizar otra prueba mejorada, y, posteriormente, construir una

trayectoria de aprendizaje de la comprensión de las figuras geométricas de los niños de tercero de primaria, a partir de todos los datos disponibles.

## ESTUDIO PILOTO

### Instrumento de recogida de datos

En el estudio piloto realizado el curso 2016-17, participaron 29 alumnos de tercero de primaria de un colegio público de la provincia de Alicante. Se diseñó e implementó una secuencia de enseñanza de 8 sesiones de una hora aproximadamente cada una para el aprendizaje de las figuras geométricas.

El experimento de enseñanza para este estudio piloto incluía: una prueba inicial, una prueba final, el cuaderno de grupo, el cuaderno del alumno y una autoevaluación. Además, se emplearon materiales como espejos, tarjetas con las representaciones de figuras, etiquetas de atributos o términos, para apoyar el aprendizaje de los alumnos. Asimismo, se tuvo en cuenta que las tarjetas incluyeran figuras prototípicas y no-prototípicas (Martin, Lukong, & Reaves, 2007; Tsamir, Tirosh, & Levenson, 2008). Las características de los diferentes elementos del experimento diseñado fueron:

- La *prueba inicial* constituida por 20 cuestiones: 6 pertenecientes a los polígonos (atributos y clases), 2 con respecto a los ejes de simetría, 4 vinculadas a los triángulos y 8 con los cuadriláteros.
- El *cuaderno de grupo* formado por 16 tareas distribuidas en: 7 pertenecientes a los polígonos (atributos y clases), 2 relacionadas con los ejes de simetría, 2 en las que se trabajaban los atributos de los triángulos y 5 de los cuadriláteros.
- El *cuaderno del alumno* contenía 11 actividades: 6 de polígonos, 2 de ejes de simetría, 1 de triángulos y 2 de cuadriláteros.
- La *prueba final* fue igual que la prueba inicial, a excepción de las tareas relacionadas con los cuadriláteros que no se realizaron.

Las tareas de la secuencia de enseñanza se diseñaron considerando los resultados de investigaciones previas sobre la comprensión de los alumnos de las figuras geométricas (Fisher, Hirsh-Pasek, Newcombe, & Golinkoff, 2013); el contenido curricular; libros digitales y el libro de texto usado en ese curso. Las tareas cubrían los objetivos de reconocer atributos de las figuras geométricas (polígonos, en general, triángulos y cuadriláteros en particular), representar y clasificar

Se organizaron 8 grupos de 3-4 alumnos cada uno de ellos incluyendo en cada uno de los grupos al menos un participante con altas competencias matemáticas y habilidades comunicativas. Todas las sesiones tuvieron un desarrollo similar: discusión de cada tarea en pequeño grupo, puesta en común de las respuestas y resolución de las tareas con el grupo clase, y realización de la tarea correspondiente del cuaderno individual. Atendiendo a las características de la metodología del DR, la secuencia de enseñanza se fue modificando durante el transcurso de las sesiones a partir de reuniones del grupo de investigación, subsanando posibles errores, rediseñando tareas y adecuándolas a las necesidades detectadas, etc.

Los datos de la investigación proceden de la implementación piloto de esta secuencia de enseñanza y son las respuestas de los alumnos a la prueba inicial, las grabaciones en vídeo de todas las sesiones, las respuestas de los diferentes grupos a las tareas del cuaderno

grupal durante la puesta en común con el grupo clase, las respuestas de los 29 alumnos a las tareas del cuaderno individual, y las respuestas a la prueba final.

### Instrumento de análisis

En un Design Research es esencial analizar todos los datos de forma sistemática, al tiempo que se documentan todas las fases de los procesos de análisis. Por eso, el análisis de estos datos está siguiendo un proceso de refinamiento progresivo: formulación de una hipótesis y búsqueda de casos discrepantes o de apoyo estudiando las respuestas de los cuadernos de los alumnos, los vídeos, las transcripciones y las anotaciones de la investigadora. Este análisis nos está ayudando a encontrar los errores en el diseño del instrumento de enseñanza y, por lo tanto, estamos modificando las tareas para poder extraer más datos que nos ayuden a caracterizar la comprensión de las figuras geométricas en niños de primaria. Por otro lado, las grabaciones de las sesiones y las transcripciones de estas, nos aportan información sobre cómo cambiar la interacción con los alumnos para poder extraer mayor información de sus respuestas, así como tener en cuenta el vocabulario empleado para denominar los conceptos matemáticos empleados en las explicaciones, que luego llegan a formar la base en el desarrollo de los conceptos geométricos.

### FUTURA INVESTIGACIÓN

Como consecuencia del estudio piloto, en la nueva investigación que realicemos:

- Se volverá a realizar un nuevo ciclo de enseñanza y aprendizaje en tercero de educación primaria (con 2 aulas, 60 niños aproximadamente), en el mismo centro, usando una secuencia de enseñanza modificada como resultado del análisis de los datos procedentes del piloto.
- Completaremos la secuencia de enseñanza o bien eliminaremos tareas, por ser repetitivas o poco productivas, para lograr el objetivo de enseñanza y aprendizaje propuesto.
- Incorporaremos la pizarra digital como una herramienta integrada en la clase, para permitir guardar el registro de toda la actividad realizada por la maestra y los alumnos durante todas las sesiones de aula.
- Para adaptarnos a las necesidades del centro educativo y mantener la línea de trabajo que el centro ha iniciado este año con el uso de tablets para el aprendizaje de las matemáticas (Snappet), tendremos en cuenta las tareas ya predefinidas o bien las adaptaremos según los objetivos propuestos.
- Potenciaremos las discusiones en pequeños grupos, por lo que incluiremos como datos del nuevo ciclo de la investigación, los audios de las discusiones de los diferentes grupos mientras resuelven las tareas del cuaderno de grupo.

### Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana) (PROMETEO/2017/135).

### Referencias

Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 429-466). Springer, Dordrecht.

- Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. En: F. K. Lester (ed). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: NCTM-IAP.
- Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2017). Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 147-156). Zaragoza: SEIEM.
- Bernabeu, M., & Llinares, S. (2017). Comprensión de las figuras geométricas en niños de 6-9 años. *Educación Matemática*, 29(2).
- Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017). Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 157-166). Zaragoza: SEIEM.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 192-212.
- Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Conducting design studies to investigate and support mathematics students' and teachers' learning. *Compendium for Research in Mathematics Education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education*. Berlin, Springer, pp. 142- 157.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*. Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE, pp. 3-26.
- Elia, I., & Gagatsis, A. (2003). Young children's understanding of geometric shapes: The role of geometric models. *European Early Childhood Education Research Journal*, 11(2), 43-61.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Fischbein, E. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211.
- Fisher, K. R., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N., & Golinkoff, R. M. (2013). Taking shape: Supporting preschoolers' acquisition of geometric knowledge through guided play. *Child Development*, 84(6), 1872-1878.
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006) Design research from the learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 17-51). London, United Kingdom: Routledge.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.
- Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1983). The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. In *Proceedings of the 7th PME International Conference* (pp. 223-228).
- Levenson, S. Tirosh, D. & Tsamir, P. (2011). *Preschool Geometry. Theory, Research and Practical Perspectives*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Martin, T., Lukong, A., Reaves, R. (2007). The Role of Manipulatives in Arithmetic and Geometry Tasks. *Journal of Education and Human Development*, 1(1), 1-14.
- Siew-Yin, H. (2003). Young Children's Concepts of Shape: Van Hiele Visualization Level of Geometric Thinking. *The Mathematics Educator*, 7(2), 71-85.

- Swan, M. (2014). Design research in mathematics education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 148-152). Springer Netherlands.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 81-95.
- Yesil-Dagli, U., & Halat, E. (2016). Young Children's conceptual Understanding of Triangle. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(2), 189-202.