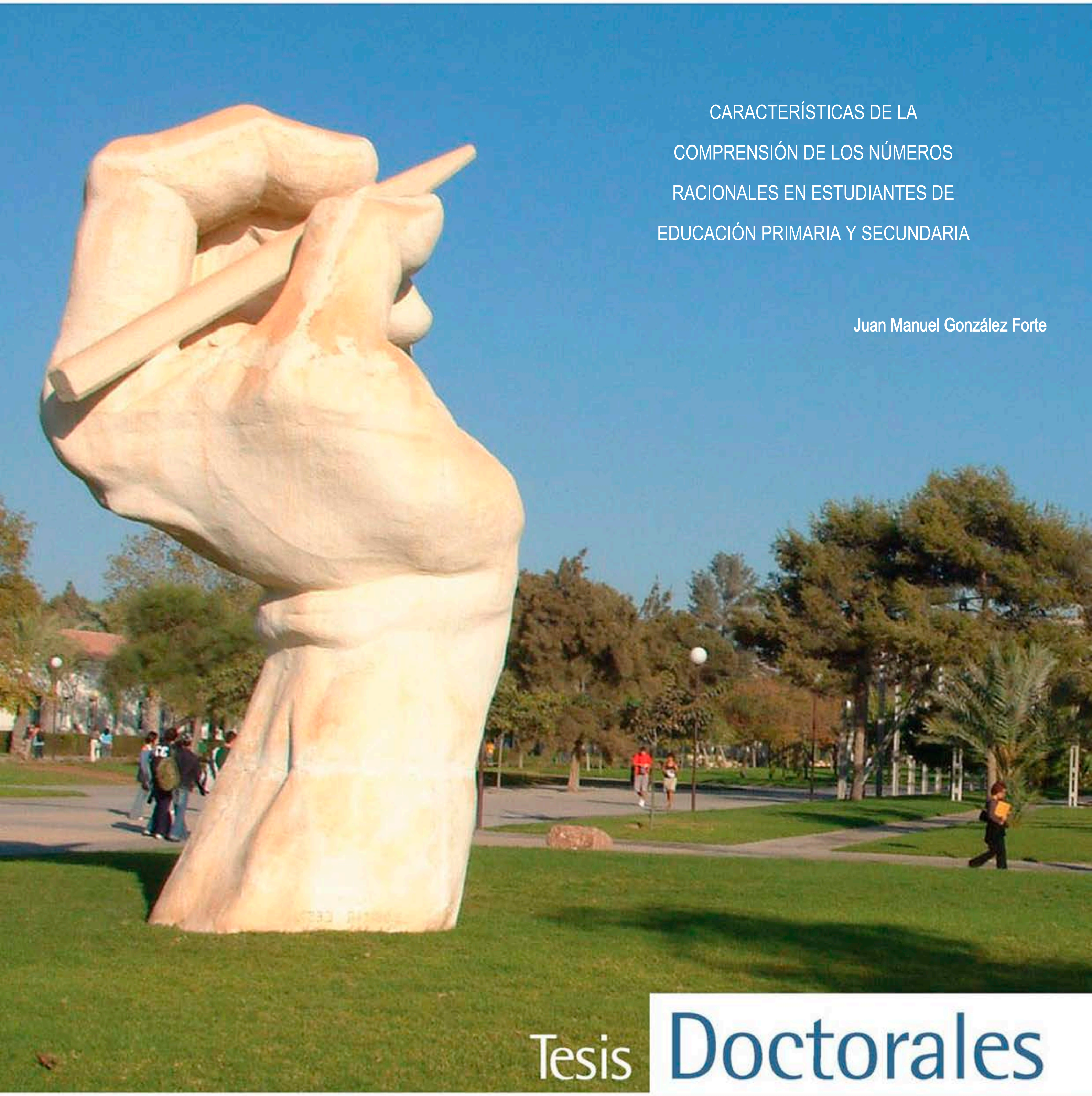
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

# CARACTERÍSTICAS DE LA COMPRENSIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA

Juan Manuel González Forte



Tesis Doctorales
UNIVERSIDAD de ALICANTE

DEPARTAMENTO DE INNOVACIÓN Y FORMACIÓN DIDÁCTICA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

# CARACTERÍSTICAS DE LA COMPRENSIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA

JUAN MANUEL GONZÁLEZ FORTE

Tesis presentada para aspirar al grado de

DOCTOR POR LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

MENCIÓN DE DOCTOR INTERNACIONAL

DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Dirigida por:
DRA. CENEIDA FERNÁNDEZ VERDÚ

Financiación:
Esta investigación ha sido respaldada por la Conselleria d’Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España) (Referencia: PROMETEO/2017/135) (Fecha: 02/03/2018 – 31/12/2018) y por la Universidad de Alicante (Referencia: UAFPU2018-035) (Fecha: 01/01/2019 - 31/12/2021).

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, mi más sincero agradecimiento a la Dra. Ceneida Fernández Verdú, directora de la tesis. Gracias por confiar en mí desde el inicio, por guiarme durante todo este trayecto como lo has hecho, y por ayudarme a crecer personal y profesionalmente. Sin lugar a dudas, no imagino un final mejor sin una dirección como la suya.

También me gustaría agradecer el apoyo recibido por todos los componentes del Grupo de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Alicante. Sus consejos y aportaciones han sido de vital importancia para el desarrollo de mi investigación, y, por tanto, mi desarrollo como investigador. Especialmente al Dr. Salvador Llinares Ciscar, por apostar por mí cuando decidí comenzar esta aventura, es un orgullo para un investigador novel aprender del mejor; y al Dr. Pere Ivars Santacreu, por su ayuda desinteresada en todo momento, aunque a veces fueras mi *hater* número uno. No me olvido de mi compañera, y sobre todo amiga, Melania Bernabeu. Juntos hemos sufrido, pero también disfrutado de este largo camino, y espero que así sea por muchos años.

Gracias al Dr. Wim Van Dooren y a la Dra. Jo Van Hoof, del Centre for Instructional Psychology and Technology de la Katholieke Universiteit Leuven (Bélgica), por sus contribuciones científicas en este trabajo. Me gustaría agradecerles también su acogida durante los cinco meses que estuve en su centro, ya que me hicieron sentir realmente como en casa. Del mismo modo, gracias a los integrantes del grupo de investigación, liderado por el Dr. Lieven Verschaffel, quienes me mostraron su interés y apoyo en todo momento. A Laure, Nore, Elke, Merel, Sandy, Sanne, Elien, Stijn, Emke, Anne-Sophie, y, sobre todo, Kelsey y Tine, gracias por amenizar mi estancia, especialmente por los buenos momentos vividos en los *Drinks after work*.

Gracias asimismo a todos los alumnos y profesores de los centros de educación primaria y secundaria por colaborar en la obtención de los datos de esta investigación: CEIP José Ramón García Antón de San Vicente del Raspeig, CEIP María Francisca Ruiz Miquel de Villajoyosa, CEIP Doña Vicenta Ruso de Santa Pola, CEIP San Vicente de Alcoy, CEIP Derramador de Ibi, IES Doctor Balmis de Alicante, IES Nou Derramador de Ibi, IES Enric Valor de Monóvar, IES Biar de Biar, e IES Mediterráneo de Torrevieja.

Por último, y por ello no menos importante, me gustaría agradecer de todo corazón a mis padres, Pepe y Conchi, porque estuvieron, están, y sé que siempre estarán a mi lado en los buenos y en los malos momentos. A mi hermano Jorge, porque no imagino otro guía mejor, gracias por allanarme el camino y conseguir que todo siempre sea más sencillo. A María, por tu apoyo incondicional en todo momento, porque siempre has creído en mí y has estado a mi lado. Hacen falta más personas como tú en este mundo.

A Antonia y Juan, porque nadie sabe lo importante que sois para mí.

# ÍNDICE

# INTRODUCTION

# INTRODUCTION

The rational number concept is one of the important mathematical ideas that children have to master during their pre-secondary school years, since it is essential to develop the understanding of a wide range of related concepts, including proportions, ratios, and percentages, as well as more advanced concepts of algebra and calculus (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Kieren, 1992).

However, understanding the representations and properties of rational numbers has been considered an obstacle in the student's mathematical development (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; Carpenter, Fennema, & Romberg, 1993), since primary and secondary school students, and even undergraduates, have difficulties in understanding some of their aspects (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Cramer, Post, & delMas, 2002; Kerslake, 1986; Merenluoto & Lehtinen, 2002; Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012). In fact, understanding rational numbers has been revealed as one of the most complex mathematical concepts to teach and learn in elementary and upper education (Behr et al., 1984; Smith, 1995).

Although different explanations of students' difficulties with rational numbers have been pointed out, one of the main reasons is students' conflicts with previous ideas acquired about natural numbers (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985; Moss & Case, 1999; Resnick et al., 1989), especially in fractions (Behr et al., 1983; Escolano, 2002; Gelman, Cohen, & Hartnett, 1989; Stafylidou & Vosniadou, 2004). In this sense, Smith (1995) considered that the pervasive difficulties with fractions "can be traced to the properties of the rational numbers they represent, and, in particular, to how rational numbers differ from natural numbers" (p. 5).

Before the learning of rational numbers, students have already formed an initial concept of number based on the act of counting, which can be characterised as a natural number concept. This initial concept of number can be a conceptual barrier in the learning of rational numbers (Gelman & Williams, 1998), and consequently, it can cause numerous errors and misconceptions that may persist over the years (Fischbein et al., 1985; Moss, 2005; Resnick et al., 1989; Smith, Salomon, & Carey, 2005; Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi et al., 2012).

Some students assume, implicitly or explicitly, that natural number rules can be applied to rational numbers (Van Dooren, Lehtinen, & Verschaffel, 2015). For example, literature has widely shown students' "temptation to deal with fractions in the same manner as with natural numbers" (Streefland, 1991, p. 70), considering that a fraction's numerical value is represented by two independent natural numbers (Behr et al., 1984; Stafylidou & Vosniadou, 2004). However, the concept of rational number is sometimes inconsistent with the properties of natural numbers (Fischbein et al., 1985), since it is not a simple extension of natural number knowledge (Kieren, 1993).



For instance, students whose reasoning is based on the natural number ordering when comparing fractions, can correctly identify that 7/8 is larger than 5/6 since 7 is larger than 5, and 8 is larger than 6, but incorrectly determine that 1/4 is larger than 1/3. Another example is students who think that "multiplications always make larger" –since this reasoning is always true in natural numbers. These students can correctly anticipate that the result of $5 \times 1.3$ is larger than 5, but they probably anticipate that the result of $5 \times 0.9$ is also larger than 5.

This tendency to *regress* to a property compatible with whole numbers was termed *whole number dominance* by Behr et al. (1984), while recent research has termed it *whole/natural number bias* (Ni & Zhou, 2005; Van Dooren et al., 2015). The whole number bias refers to the "tendency in children to use the single-unit counting scheme applied to whole numbers to interpret instructional data on fractions" (Ni & Zhou, 2005,

p. 27). However, the term was redefined to natural number bias by Vamvakoussi et al. (2012), since "it is the positive character of natural numbers that interferes with student's attempts to deal with non-natural numbers" (p. 344). Therefore, the natural number bias refers to the idea that a frequently reported reason for students' difficulties with rational numbers is the inappropriate application of the properties of natural numbers (Smith et al., 2005; Van Dooren et al., 2015; Van Hoof, Verschaffel, & Van Dooren, 2015b).

Research in this field has considered three main domains where the properties of rational numbers differ from the properties of natural numbers: arithmetic operations, density and size (Gómez & Dartnell, 2019; González-Forte, Fernández, & Llinares, 2018a; McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen, & Lehtinen, 2015; Obersteiner, Van Hoof, Verschaffel, & Van Dooren, 2016; Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018; Van Hoof, Degrande, Ceulemans, Verschaffel, & Van Dooren, 2018). In the first chapter, we have carried out a more extensive review of the literature in each domain.

The objective of this study is to characterise stages in the understanding of rational numbers in primary and secondary school students. A special attention has been paid to the possible natural number knowledge interference. To characterise these stages, we have conducted three studies regarding the three domains in which the properties of rational numbers differ from natural numbers. In each of these studies, a large number of primary and secondary school students answered a test, and a cluster analysis was carried out with the objective to identify students' answers patterns (profiles) in rational arithmetic operations (Study 1), density (Study 2) and size (Study 3A). The evolution and predominance of each profile from 5$^{th}$ grade of primary school to 4$^{th}$ grade of secondary school have been also studied in each domain. With the goal of corroborating the profiles inferred in the cluster analysis, we have conducted a qualitative study in the domain of size (Study 3B). In this qualitative study, students' reasoning and verbalisations given in an interview have been analysed. Therefore, this study provides us with qualitative evidence that supports the students' answers patterns (profiles) inferred from the quantitative study (cluster analysis). The characterisation of the stages (profiles) allows us to identify characteristics in students' understanding of rational numbers.

Next, we describe the content of each chapter and the appendixes.

In the first chapter, we present a review of literature focused on the three domains of the natural number bias phenomenon: arithmetic operations, density and size, describing the main results obtained in previous research in each domain.

In the second chapter, we formulate the general objective of our research, and the specific objectives of each of our studies, underlining how each study extends previous research in this field. Moreover, we provide information about the participants and their context.

In the third chapter, we describe our Study 1 (arithmetic operations domain). First, the instrument and the analysis performed are explained. Then, we show the profiles identified and their evolution from 5$^{th}$ grade of primary school to 4$^{th}$ grade of secondary school.

In the fourth chapter, we describe our Study 2 (density domain). First, we present the instrument and the analysis carried out. Afterwards, we show the profiles identified and their evolution.

In the fifth chapter, we describe our Study 3A (quantitative study of the size domain). First, the instrument and the analysis performed are presented. Then, we show the profiles identified and their evolution.

In the sixth chapter, we describe our Study 3B (qualitative study of the size domain). First, the participants, the instrument to collect the data (interviews) and the procedure are described. Then, we provide information about the two analysis performed: (i) an analysis of the consistency between the students' reasoning provided in the interview and their reasoning inferred in the profiles, and (ii) an analysis of students' confidence levels in their reasoning and their insecurities. Finally, we show the results obtained in each analysis.



In the seventh chapter, we, first, summarise the main conclusions of each of our studies and discuss our results. Then, some implications for the teaching of rational numbers are provided. Finally, further lines for research are formulated.

Regarding the appendixes, in the Appendix I, we show an example of the test used as an instrument to collect the data in our quantitative studies (Study 1, Study 2, and Study 3A). In the Appendixes II, III, IV, and V, we show the interview guidelines of our qualitative study (Study 3B).

# CHAPTER 1. THEORETICAL AND EMPIRICAL BACKGROUND

# CHAPTER 1. THEORETICAL AND EMPIRICAL BACKGROUND

In this chapter, we start highlighting how literature has considered the interference of natural number knowledge in the learning of rational numbers over the years (natural number bias phenomenon). Then, we present a review of the main results obtained in each of the three domains in which the natural number bias phenomenon has been studied. First, in the domain of arithmetic operations. Secondly, in the domain of density. And finally, in the domain of size.

## 1.1. NATURAL NUMBER BIAS PHENOMENON

The interference of natural number knowledge in rational number tasks, such as comparing rational numbers or operating with them, has been widely shown in research during the last decades (Fischbein et al., 1985; Ni & Zhou, 2005; Resnick et al., 1989; Stafylidou & Vosniadou, 2004). In fact, recent research from the field of the natural number bias phenomenon has analysed the appearance of this interference in primary and secondary school students (Gómez & Dartnell, 2019; McMullen et al., 2015; Meert, Grégoire, & Noël, 2010; Rinne, Ye, & Jordan, 2017), and even in undergraduates

(Barraza, Avaria, & Leiva, 2017; Depaepe et al., 2018; DeWolf & Vosniadou, 2015; Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof, & Verschaffel, 2013). These studies have exhibited that students' difficulties appear in situations in which the principles and rules of natural numbers cannot be applied, leading students to systematic errors when solving rational number tasks (Moss, 2005; Ni & Zhou, 2005; Smith et al., 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Based on this assumption, the term *bias* describes the fact that knowledge of natural numbers can facilitate students' reasoning when tasks of rational numbers are compatible with this knowledge (called *congruent items* in the literature), but it does not facilitate their reasoning when rational numbers behave differently from natural numbers (*incongruent items*) (Van Dooren et al., 2015). Previous research has repeatedly found evidence of this natural number interference, since primary and secondary school students, and even undergraduates, have performed more efficiently in congruent items than in the incongruent ones (Nunes & Bryant, 2008; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Van Hoof et al., 2015b).

We clarify the difference between congruent and incongruent items using the following examples:

- *Is the result of 6 × 1/3 smaller or larger than 6?*
- *Is the result of 6 × 8/5 smaller or larger than 6?*

The first item is an example of an incongruent item. If students relied on the knowledge that multiplication always results in a larger number, they would answer (incorrectly) that the result is larger than 6. The second item is congruent. Although students relied on the knowledge that multiplication always results in a larger number, they would correctly answer that the result is larger than 6. Therefore, students correctly solve congruent items but incorrectly solve incongruent ones using the natural number knowledge.

Studies addressing the natural number bias phenomenon have mainly considered three domains in which rational numbers differ from natural numbers: arithmetic operations with rational numbers, the density of rational numbers, and the size of rational numbers (Gómez & Dartnell, 2019; González-Forte et al., 2018a; McMullen et al., 2015; Obersteiner et al., 2016; Vamvakoussi et al., 2018; Van Hoof et al., 2015b; Van Hoof et al., 2018). A further complicating element is the fact that rational numbers have different representations (fraction and decimals). Difficulty in understanding this is an additional element that affects students' reasoning in each of these three domains (DeWolf & Vosniadou, 2011).

Following, a more extensive review of previous studies regarding the three different domains of the natural number bias phenomenon is presented.

## 1.2. NATURAL NUMBER BIAS IN THE DOMAIN OF ARITHMETIC OPERATIONS

In this section, we first review previous findings on students' difficulties regarding additions and subtractions with rational numbers. Secondly, we describe the difficulties with multiplications and divisions.

### 1.2.1. Addition and subtraction

Regarding additions and subtractions, primary and secondary school students usually operate with fractions in the same way as they do with natural numbers, adding (or subtracting) numerators and denominators separately, without taking into account the relationship between numerator and denominator (Moss, 2005; Streefland, 1991). An example of this incorrect assumption is considering that the result of the addition 1/2 + 6/7 is 7/9, or the result of the subtraction 4/5 – 2/3 is 2/2 (Bezuk & Cramer, 1989; Post, 1981; Siegler & Pyke, 2013; Siegler, Thompson, & Schneider, 2011; Streefland, 1991).

Understanding decimal number arithmetic does not require mastering as many different procedures as in the case of fractional arithmetic. However, it does pose difficulties beyond the arithmetic of natural numbers (Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015), namely because decimal arithmetic requires the correct placement of the decimal point. However, students often have difficulties when, for both addition and subtraction, the numbers involved do not have the same number of digits after the decimal point (Hiebert & Wearne, 1985). In this way, students tend to add (subtract) the decimal part as if it was an addition (subtraction) of natural numbers. For instance, they consider that the result of the addition 0.33 + 0.5 is 0.38, or that the result of the subtraction 3.477 – 0.1 is 3.476. In fact, previous research has indicated that primary and secondary school students achieve greater accuracy in additions and subtractions when the numbers involved have the same number of digits in the decimal part (e.g., 3.9 + 1.4 and 0.54 - 0.27), than in those in which the number of digits is different (e.g., 2.7 + 6.48 and 0.89 - 0.5) (Hiebert & Wearne, 1985; Lortie-Forgues et al., 2015; Van Hoof, Vandewalle, Verschaffel, & Van Dooren, 2015a).

### 1.2.2. Multiplication and division

In multiplication and division, learners have equally been found to apply natural number properties to rational numbers (Fischbein et al., 1985). The model associated with multiplication is the model of repeated addition in which the multiplier is the number of equivalent collections and the multiplicand is the size of each collection. This model leads students to the intuitive rule that the product of a multiplication must always be a larger number than the factors (Bell, Swan, & Taylor, 1981; Fischbein et al., 1985).

In division, students follow the intuitive model of a partitive division that implies sharing into *n* equal parts, whereby *n* is the divisor and the quotient is the size of such a part. This model leads students to the intuitive rule that the quotient is smaller than the dividend, which leads them to consider that the result of a division always results in a smaller number (Bell et al., 1981; Fischbein et al., 1985; Greer, 1987; Hart et al., 1981). These assumptions, acquired and developed with the learning of natural numbers, are not always correct when working with rational numbers, since they depend on the specific rational numbers involved. For example, when one of the factors in a multiplication is smaller than 1, the result will be smaller (e.g., 7 × 0.5 or 7 × 1/2).



In order to examine the interference of natural numbers that underlies these assumptions, previous research has used congruent and incongruent items showing that the interference of natural numbers is evidenced by significantly higher accuracy in congruent items compared to incongruent ones (Christou, 2015; González-Forte, Fernández, & Llinares, 2019a; Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Van Hoof et al., 2015a).

For instance, Van Hoof et al. (2015a) found that $8^{th}$, $10^{th}$ and $12^{th}$ grade students were accurate in solving algebraic expressions when knowledge of natural numbers led them to the correct answer (congruent item, e.g., *Can this expression be true?* $m < 4 \times m$, since this is true for *m* being any natural number). However, they had difficulties in expressions where natural number knowledge led them to an incorrect answer (incongruent item, e.g., *Can this expression be true?* $3 < 3 \div m$, where *m* must necessarily be a rational number smaller than one). These results have also been obtained with undergraduate students (Obersteiner et al., 2016).

In the same line, Christou (2015) observed that 5th and 6th grade students accurately solved items in which a missing number was a natural number or a rational number larger than one (congruent item, e.g., *8 ÷ __ = 5 possible or impossible?*). However, they had difficulties solving items in which a missing number was necessarily a rational number smaller than one (incongruent item, e.g., *__ × 4 = 1 possible or impossible?*). In order to correctly solve these items, they had to assume that multiplications can result in a smaller number and divisions can result in a larger number.

Fischbein et al. (1985) observed that 5th, 7th and 9th grade students chose the incorrect operation to solve word-problems that involved multiplying a natural number by a decimal number smaller than one (incongruent item, e.g., *The price of 1 m of suit fabric is 15000 lire. What is the price of 0.65 m?*). Most of them considered that the result should be obtained by dividing 15000 ÷ 0.65. The same occurred with divisions, since they incorrectly solved word-problems that involved dividing a natural number by a decimal number smaller than one (incongruent item, e.g., *I spent 900 lire for 0.75 hg of cocoa. What is the price of 1 hg?*). Most of them considered that the result should be obtained by multiplying 900 × 0.75. This research was only carried out with decimal numbers. Van Hoof et al. (2015b) included the fraction and decimal representation of rational numbers. In a study with 4th, 6th, 8th, 10th and 12th grade students, these authors also found low accuracies in incongruent word-problem items with both, fractions and decimal numbers.

Furthermore, Van Hoof et al. (2015b) found that both primary and secondary school students accurately anticipated the result of a multiplication of a natural number by a rational number larger than one (congruent item, e.g., *Is the result of 2 × 1.5 smaller or larger than 2?*), but they incorrectly anticipated the result when the rational number was smaller than one (incongruent item, e.g., *Is the result of 8 × 1/2 smaller or larger than 2?*). Similarly, in division items, students correctly anticipated the result in congruent items (e.g., *Is the result of 5 ÷ 7/4 smaller or larger than 5?*) and incorrectly anticipated the result in incongruent ones (e.g., *Is the result of 6 ÷ 0.3 smaller or larger than 6?*). Similar results have been found in undergraduate students (Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Vamvakoussi et al., 2012), showing that these difficulties persist into adulthood. Regarding the different representations, no significant differences were found between students' accuracy in fractions and decimal numbers, concluding that the natural number bias was equally strong in both representations.

These results - higher accuracy in congruent items than in incongruent items - underline that students follow the implicit model "multiplication makes larger" and "division makes smaller" when anticipating the result of multiplications and divisions with rational numbers.

Previous studies have evidenced the natural number inference, since students correctly answered congruent items and incorrectly answered the incongruent ones. Moreover, previous results have shown higher levels of success in additions and subtractions than in multiplications and divisions. In fact, these studies have pointed out that the natural number bias is stronger in divisions and multiplications (Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Van Hoof et al., 2015a). However, as far as we know, these studies have not explicitly examined individual differences among students regarding the nature of the operation, the mode of representation and the implicit reasoning involved. In addition, the evolution of the students' incorrect reasoning from primary to secondary school has not been studied yet.

## 1.3. NATURAL NUMBER BIAS IN THE DOMAIN OF DENSITY

The density of rational numbers has been considered the most difficult domain, in which the natural number bias is most persistent (McMullen et al., 2015; Smith et al., 2005). In this section, we first review previous findings on students' difficulties in understanding the dense structure of rational numbers, based on the natural number interference, and the way in which the different representations of rational numbers affect students' understanding. Then, as we are interested in individual differences in density understanding (students' stages in the understanding of density), we review previous studies on this issue. However, as we show at the end of this section, literature focused on this issue is scarce.

### 1.3.1. The role of different representations: fractions and decimal numbers

The natural number set is discrete since between two natural numbers there is a finite (possibly zero) number of numbers (e.g., only the number 4 is between the numbers

3 and 5). Therefore, natural numbers have a unique successor. On the contrary, the rational number set is dense since there is an infinite number of numbers between any two rational numbers (Smith et al., 2005). Therefore, a rational number has no successor. Hereby, the underlying difference between natural and rational numbers is the discrete and dense nature of numbers (Merenluoto & Lehtinen, 2004).

Previous research has shown that understanding the density of rational numbers is a complex task for primary and secondary school students (Hartnett & Gelman, 1998; Merenluoto & Lehtinen, 2002; Neumann, 2001; Van Hoof et al., 2015b; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007) and even for undergraduates (Giannakoulias, Souyoul, & Zachariades, 2007; Tirosh, Fischbein, Graeber, & Wilson, 1999). Students' difficulties have been explained by the overgeneralizing of the natural number properties in the field of rational numbers (Merenluoto & Lehtinen, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

The idea of discreteness, developed through experience with natural numbers, is considered by Vamvakoussi and Vosniadou (2004) as a "fundamental presupposition which constrains students' understanding of the structure of the set of rational numbers" (p. 457) causing numerous conceptual difficulties. Students believe that between two rational numbers there are no numbers, or there is a finite number of numbers. For instance, students can think that between the "pseudo-consecutive" fractions 5/7 and 6/7 there are no numbers, or that between 1/2 and 1/4 is only the number 1/3 (Merenluoto & Lehtinen, 2004; Tirosh et al., 1999). In decimal numbers, students believe that between the "pseudo-consecutive" decimals 0.59 and 0.60, it is not possible to find other numbers, or that between 1.22 and 1.24 there is only the number 1.23 (Broitman, Itzcovich, & Quaranta, 2003; Moss & Case, 1999).

Difficulties in understanding the dense structure of rational numbers are also related with the fact that rational numbers can be represented as both fractions and decimals. For example, 3/4 and 0.75 are alternative representations of the same rational number. Previous research has shown that students sometimes treat fractions and decimals numbers as unrelated sets of numbers, rather than interchangeable representations of the same numbers (Carpenter et al., 1993; Khoury & Zazkis, 1994). Markovits and Sowder (1991) have shown that a large number of middle-graders ordered separately a series with decimal numbers and fractions, or they explicitly stated that ordering them in one series could not be done.

Focusing on the different representations of rational numbers, research on the density concept has found it does not necessarily develop together for both representations. However, the literature is inconsistent on which comes first. In some studies, students were better able to explain the dense nature of decimals numbers than the dense nature of fractions (McMullen & Van Hoof, 2020; Tirosh et al., 1999; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Vamvakoussi and Vosniadou (2004) found the opposite result. The different representations affect the understanding of density also in a different way: Some students tend to believe that there are only decimals between two decimals and there are only fractions between two fractions (Vamvakoussi, Christou, Mertens, & Van Dooren, 2011; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). For instance, Neumann (1998) reported that 7th graders had difficulties accepting that there could be a fraction between 0.3 and 0.6. Therefore, students normally do not see the rational number set as a unified system of numbers, and find the nature of the relation between decimals and fractions difficult to grasp (Khoury & Zazkis, 1994; Markovits & Sowder, 1991; Mitchell, 2005; Neumann, 2001; O'Connor, 2001).

### 1.3.2. Stages in density understanding

Research has shown that understanding the density of rational numbers is a slow and gradual process, and not an all or nothing issue. In the studies of Vamvakoussi and Vosniadou (2004, 2007, 2010) and Vamvakoussi et al. (2011), some secondary school students' intermediate stages in the understanding of density were identified. These authors described several students' answers patterns that they hypothesised would occur. Then, they found examples of students' answers for these hypothesised profiles by means of interviews (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004) or a test (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007, 2010; Vamvakoussi et al., 2011).

In the study of Vamvakoussi and Vosniadou (2004), 16 ninth graders were individually interviewed. Students had to answer multiple-choice and open-ended question items focused on how many numbers are between two given rational numbers. There were five items with fractions and decimals, but only one of the items was with pseudo-consecutive numbers (0.005 and 0.006).

Vamvakoussi and Vosniadou (2007) analysed the answers of 9th and 11th graders to a test with six open-ended question and six multiple-choice items. In the open-ended question items, there were items that included the number line, and items without the number line. In both types of items students had to answer the question: *Are there any numbers larger than the number a and, at the same time, smaller than the number b? If yes, explain how many and which are these numbers*. *If no, explain why*. In multiple-choice items, there were also items with and without the number line. In both types, the question was: *How many numbers are there larger than a and, at the same time, smaller than b?* In this case, the choices were: i) *There is no such number*; ii) *There are the following numbers*: (finite number of numbers); iii) *There are infinitely many decimals (or fractions)*; iv) *There are infinitely many numbers: simple decimals, decimals with infinitely many decimal digits, fractions, square roots*; v) *None of the above. I believe that…* (open answer). There were items with fractions and decimals, and items with pseudo-consecutive numbers (e.g., 0.01 and 0.02) and items with non-pseudo-consecutive numbers (e.g., 3/8 and 5/8). Items were the same for open-ended question and multiple-choice items.

Vamvakoussi and Vosniadou (2010) analysed answers of 7$^{th}$, 9$^{th}$ and 11$^{th}$ graders to a test with 14 multiple-choice items using rational and natural numbers. Students had to answer the question: *How many numbers are there in a given interval*? The choices were: i) *There is no other number;* ii) *There is a finite number of decimals;* iii) *There is a finite number of fractions;* iv) *There are infinitely many decimals;* v) *There are infinitely many fractions;* vi) *There are infinitely many numbers and they can have various forms (e.g., fractions, decimals, decimals with infinitely many decimal digits)*; vi) *I don't agree with any of the above. I believe that…* (open answer). The items used included two natural numbers, a natural number and a decimal one, two decimals, or two fractions. Moreover, in rational numbers, there were items with pseudo-consecutive numbers (e.g., 0.005 and 0.006) and items with non-pseudo-consecutive numbers (e.g., 3.123 and 3.126). Vamvakoussi et al. (2011) replicated this study with 9$^{th}$ graders.

Using different types of instrument (test or interview) and different types of items (open-ended items or multiple-choice items), the hypothesised profiles in all these studies were:

- Students who considered that there are no numbers between two pseudo-consecutive rational numbers, and there is a finite number of numbers between two non-pseudo-consecutive rational numbers.

- Students who considered that there is a finite number of numbers between two pseudo and non-pseudo-consecutive rational numbers.
- Students who considered that decimals are dense, whereas fractions are discrete, and *vice versa*. These students answered that there are infinitely many numbers between two decimals but a finite number of numbers between two fractions, and *vice versa*.
- Students who considered that there are infinitely many numbers, both in decimals and fractions, but they were reluctant to accept that there can be decimals between two fractions, and *vice versa*. These students overcame the barrier of discreteness, but they were constrained by the belief that different symbolic representations refer to different numbers.
- Students who correctly considered that there is an infinite number of numbers between any two numbers regardless of their symbolic representation.

These previous studies have tried to determine intermediate stages of secondary school students' understanding the dense structure of rational numbers, by using open-ended question and multiple-choice items. However, these profiles are not based on students' answer patterns, since they have been previously hypothesised. An inductive analysis of students' answers to identify different ways of thinking could benefit this approach in order to show how students understand density. Moreover, these previous studies have not used items where students have to write a number between two rational numbers. This type of item could help us to find differences in students' understanding. Finally, as the previous studies only focused on secondary school students' understanding, the evolution of these stages over a large age range, from primary to secondary school, has not been studied yet.

## 1.4. NATURAL NUMBER BIAS IN THE DOMAIN OF SIZE

There are numerous investigations focused on identifying students' difficulties in determining the size of a fraction or a decimal number (McMullen et al., 2015; Meert et al., 2010; Stafylidou & Vosniadou, 2004). In this section, we have conducted a literature review on this domain. First, we focused on the natural number bias phenomenon in decimal numbers, and then, in fractions.

### 1.4.1. Natural number bias in decimal numbers

Determining decimal number size requires understanding that the digit 0 on the left of the decimal part decreases the value of the number, while this digit on the right does not increase it. Moreover, with regard to the number of digits, having more digits in the decimal part is not always related to a larger size of the number. The place value of the digits needs to be taken into account. Most of the mistakes that primary and secondary school students have in determining the size of decimal numbers can be explained by assuming that students ignore the decimal point and consider longer decimals as larger. In other words, students deal with the decimal numbers as if they were natural numbers (Hiebert & Wearne, 1986; Moss, 2005; Resnick et al., 1989).

Clear evidence of this natural number interference has been shown in research where many students struggle determining the size of decimal numbers when they have different number of digits in the decimal part (e.g., 5.628 vs. 5.7), focusing their answers on "the larger the number of digits, the larger the number" (Sackur-Grisvard & Léonard, 1985; Vamvakoussi et al., 2012; Van Dooren et al., 2015). For instance, they consider that 5.628 is larger than 5.7 because 628 is larger than 7 (Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Sackur-Grisvard & Léonard, 1985; Steinle & Stacey, 1998).

Another important factor in these errors is the role of zero. When a zero is in the tenths place, students often ignore it and treat the following digit as if it is in the tenths place (e.g., 0.09 = 0.9), as well as consider that adding a 0 at the end of a decimal number increases its size (e.g., 0.440 is larger than 0.44) (Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Resnick, Rinne, Berbieri, & Jordan, 2019; Steinle & Stacey, 1998).

### 1.4.2. Natural number bias in fractions

Determining fraction size implies an understanding of fractions in a *holistic way*, which involves access to their size as a single entity (i.e., locating fractions in a mental number line or deducing the decimal value of that fraction). In that way, determining fraction size implies to recognise that it depends on the multiplicative relationship between its numerator and denominator (Moss, 2005; Ni & Zhou, 2005; Smith et al., 2005).

However, many students fail in recognising fractions as numbers that have a magnitude on their own, and initially tend to interpret the symbol *a*/*b* as two independent natural numbers separated by a bar (Mack, 1995; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Therefore, they misunderstand fractions considering them as a pair of numbers, which behave in the same manner as natural numbers (Meert et al., 2010). This leads them to the common misconception that a fraction's numerical value increases when its numerator, denominator, or both increase (e.g., 18/24 is larger than 12/20 because 18 is larger than 12 and 24 is larger than 20) (Behr et al., 1984; Pearn & Stephens, 2004). This kind of incorrect reasoning has been shown in primary school students (Behr et al., 1984; Clarke & Roche, 2009; Mitchell & Horne, 2010), secondary school students (González-Forte, Fernández, & Van Dooren, 2020; González-Forte, Fernández, Van Hoof, & Van Dooren, 2019c, 2019d; Pearn & Stephens, 2004; Smith, 1995; Stafylidou & Vosniadou, 2004), and even, in undergraduates (Fazio, DeWolf, & Siegler, 2016).

Studies during the last decade have tested this possible interference by conducting quantitative studies with congruent and incongruent fraction comparison items. Congruent items are items compatible with the natural number knowledge, so the largest fraction has the largest numerator and denominator (e.g., 3/5 vs. 8/9), and incongruent items are items incompatible with the natural number knowledge, so the largest fraction has the smallest numerator and denominator (e.g., 2/3 vs. 4/9).

Research focused on comparing fractions with a common component has found that students tend to correctly compare fractions with common denominators (e.g., 2/5 vs. 4/5), but that they have greater difficulties in comparing fractions with common numerators (e.g., 5/9 vs. 5/7) (Gómez, Jiménez, Bobadilla, Reyes, & Dartnell, 2015; Meert et al., 2010), since they reason –based on the ordering of the natural numbers– that the fraction with the larger components is also the larger fraction.

A similar phenomenon occurs in comparing fractions without common components. Students perform better on items where the largest fraction has the largest numerator and denominator (so-called congruent items, e.g., 2/3 vs. 7/9) than on items where the largest fraction has the smallest numerator and denominator (incongruent items, e.g., 3/4 vs. 5/9). This has been shown in elementary school-aged children (Meert et al., 2010), secondary school students (Van Hoof, Lijnen, Verschaffel, & Van Dooren, 2013; Van Hoof et al., 2015b) and even adults (DeWolf & Vosniadou, 2011; Obersteiner et al., 2013; Vamvakoussi et al., 2012).

From these results, it can be inferred that students based their reasoning on the natural number ordering, considering that the largest fraction is the fraction with the largest numerator and denominator. To summarise, a high accuracy in congruent items and a low performance in the incongruent ones have been interpreted as denoting an over-reliance on natural number knowledge. These findings have been observed both for fractions (with and without common components) and for decimals.

However, research has not always pointed in the same direction. Especially for fraction comparison, research has found that some primary school students solve more accurate incongruent items than the congruent ones (Gómez & Dartnell, 2019; González-Forte, Fernández, Van Hoof, & Van Dooren, 2019b; Resnick et al., 2019; Rinne et al., 2017). Same results have been obtained with undergraduates (Barraza et al., 2017; DeWolf & Vosniadou, 2015; Obersteiner & Alibali, 2018). These results raise questions about the natural number bias as an explanatory mechanism for all errors, and highlight the need to additionally consider other explanations involving, for instance, some of the commonly used strategies for comparing fractions (Gómez, Silva, & Dartnell, 2017). In the next subsection, we review literature on other incorrect ways of thinking about fraction size.

#### *1.4.2.1. Other incorrect ways of thinking about fraction size*

A possible explanation for these opposite results could be students' reasoning based on comparing the denominator of each fraction and considering that *the smallest the denominator, the largest the fraction* (Fazio et al., 2016; Rinne et al., 2017; Stafylidou & Vosniadou, 2004).

This reasoning, called reverse bias in literature, implies that smaller denominators indicate that pieces are larger, therefore "2/3 is larger than 3/5 because 3 pieces are larger than 5 pieces" (Pearn & Stephens, 2004, p. 434). Thus, students who use this reasoning seem to recognise that larger numbers in the denominator can lead to smaller fractions, but they do not fully understand the relationship between numerator and denominator (Rinne et al., 2017). With this reasoning, students can correctly solve the incongruent items, but incorrectly solve the congruent ones, showing a contrary effect to the natural number bias. Therefore, it may explain the results obtained in some previous studies where incongruent items showed better performance than congruent items (DeWolf & Vosniadou, 2011, 2015; Obersteiner et al., 2013).

This reasoning has been attributed mostly to undergraduates and adults when solving complex fraction comparison items (Barraza et al., 2017; DeWolf & Vosniadou, 2015; Gómez & Dartnell, 2015; Obersteiner & Alibali, 2018), that is, fractions composed by two digits and without common numerators or denominators.

Furthermore, the use of gap thinking (Pearn & Stephens, 2004) when students solve fraction comparison items can also explain higher accuracies in incongruent items than in the congruent ones (Gómez et al., 2017; González-Forte, Fernández, Van Dooren, 2018b; González-Forte et al., 2020). Gap thinking is based on comparing the (absolute) difference between numerator and denominator in both fractions, interpreting this difference as the number of parts missing to complete the whole. Therefore, a fraction is considered larger than another fraction if the difference between the numerator and the denominator is smaller (e.g., 2/3 is larger than 7/9 "because from 2 to 3 there is a gap of one and from 7 to 9 there is a gap of two"). Using the same reasoning, students can consider that both fractions are equal if the difference is equal (e.g., 4/5 and 6/7 are equivalent "because both fractions have the same difference, just one gap") (Clarke & Roche, 2009; Fazio et al., 2016; Moss, 2005).

This kind of incorrect thinking evidences a students' tendency to reason in additive rather than in multiplicative terms (Clarke & Roche, 2009; Moss, 2005). In this sense, Mitchell and Horne (2010) consider that this reasoning based on the gap is due to the "influence of part-whole counting and shading activities rather than activities framed in partitioning, unit forming and equivalence actions" (p. 417). This reasoning has been observed in primary school students (Clarke & Roche, 2009; Mitchell & Horne, 2010), secondary school students (González-Forte et al., 2020; Pearn & Stephens, 2004; Smith, 1995; Stafylidou & Vosniadou, 2004), and in undergraduates (Fazio et al., 2016).

Recently, research has focused on examining whether the *gap* variable (difference between numerator and denominator) can explain why students achieve better results in incongruent than in congruent fraction comparison items. Gómez et al. (2017) carried out a research with undergraduate Engineering students who solved 180 fraction comparison items involving congruent and incongruent fraction pairs with and without common components. These authors manipulated the gap variable, making a distinction between items where gap thinking leads to a correct answer (e.g., 5/8 vs. 2/7 – gap thinking correct), items where gap thinking leads to an incorrect answer (e.g., 1/3 vs. 4/7 – gap thinking incorrect), and items where gap thinking is uninformative (e.g., 2/3 vs. 7/8 – gap thinking neutral). The results of this study showed that, in items without common components, undergrad students performed better in incongruent items than in congruent ones.

González-Forte et al. (2020) found that primary and secondary school students were more successful in congruent fraction comparison items than in incongruent ones in each grade, but differences in 8th and 9th grade between both types of items were the smallest. A qualitative analysis focused on students' justifications showed that there was a notable appearance of gap thinking reasoning in 8th and 9th grade, while it was much less present before this grade. The increase in the use of this kind of reasoning and the decrease of natural-number based reasoning explained why differences in students' success levels between congruent and incongruent items are smaller in 8th and 9th grade. Therefore, as the study of Gómez et al. (2017) concluded that gap thinking seems to influence differences between students' success levels in congruent and incongruent items.

Since we are interested in examining individual differences in understanding rational number size, in the next subsection, we have performed a review of literature regarding the identification of students' profiles when comparing fractions or decimal numbers.



#### *1.4.2.2. Stages in fraction size understanding*

Considering the existence of different ways of students' thinking about fraction comparison, research has tried to determine profiles of students according to their answers to different types of items. Gómez and Dartnell (2019) carried out a study with 5th, 6th and 7th grade students, in which reaction times and accuracy were measured in congruent and incongruent items and with and without common components. They identified six profiles of students according to the characteristics of their answers.

Besides the subgroup of students that achieved high accuracy in all types of items, results showed the existence of a subgroup of students who correctly answered congruent items but incorrectly the incongruent ones, and another subgroup who answered congruent items better compared to incongruent items in fractions with common components. This finding led them to conclude that students from both profiles were biased by their natural number ordering knowledge. The first subgroup is biased in both items (with and without common components), and the second subgroup is only biased in items with common components. Furthermore, they identified a subgroup of students who correctly answered incongruent items and incorrectly the congruent ones. This finding led them to conclude that these students were reasoning in a contrary way to the natural number bias. Finally, in addition to the subgroup of students who obtained low percentages of accuracy in all of the items, results showed a subgroup of students who accurately answered all the items, except the congruent ones without common components. This profile raised questions about the possible use of gap thinking in this kind of items, where it leads to the incorrect answer. However, since the items were not specifically designed to elicit gap thinking, their results could suggest but could not unequivocally prove that gap thinking was the reasoning used by the students.

As a summary, many studies have indicated that the natural number bias is one of the main reasons of primary and secondary school students' and even adults' difficulties in understanding fraction size, showing high levels of success in congruent items and low levels in incongruent ones. Recent studies have found opposite results –mainly with undergraduates- and pointed out that besides the natural number bias, other incorrect ways of thinking appear when students compare fractions (gap thinking and reverse bias). However, this previous research has not focused on identifying students' profiles (representing ways of thinking) in fraction and decimal number comparison items, considering the gap and the congruency conditions at the same time, and how these different ways of thinking evolve across grades, from primary to secondary school.

Furthermore, these incorrect ways of thinking above-mentioned have been inferred from quantitative results regarding students' success levels. Therefore, qualitative studies that support these inferences and provide qualitative evidence of students' ways of thinking are scarce.

# CHAPTER 2. OBJECTIVES AND CONTEXT

# CHAPTER 2. OBJECTIVES AND CONTEXT

In this chapter, we first introduce the main objective of our research and the specific objectives of each of the four studies that we have conducted, highlighting and discussing its contributions to the existing research. Secondly, we provide information about the participants and the context of the study.



## 2.1. OBJECTIVES OF OUR STUDY

The main objective of our research is to characterise stages in the understanding of rational numbers in primary and secondary school students. A special attention has been paid to the possible natural number knowledge interference. Our hypothesis is that students do not simply make a transition from a natural number biased idea of rational number to a correct understanding. Qualitatively different ways of thinking will appear that could be considered as intermediate stages from a natural number bias idea to a correct understanding.

To characterise these stages from primary to secondary school, we have performed four studies that can allow us to identify possible stages in the students' learning of rational numbers. Following, we specify the objectives of each study and the novelties and contributions of each study to this field.

### 2.1.1. Objectives of the Study 1: Arithmetic operations domain

The specific objective of the Study 1 is to characterise stages from primary to secondary school in the understanding of addition, subtraction, multiplication and division with fractions and decimal numbers.

Literature review has shown the natural number interference in this domain underlining that students were more able to solve congruent items than the incongruent ones. However, as we have mentioned in the chapter 1, these studies have not explicitly analysed students' differences regarding the nature of the operation, the mode of representation and the implicit thinking involved.

We extend the existing research by determining and characterising primary and secondary school students' profiles according to their answer patterns in addition, subtraction, multiplication and division items with decimals and fractions and by analysing profiles' evolution from 5$^{th}$ grade of primary school to 4$^{th}$ grade of secondary school. This allows us to examine different ways of students' thinking about rational arithmetic operations.

### 2.1.2. Objectives of the Study 2: Density domain

The specific objective of the Study 2 is to characterise stages from primary to secondary school in the understanding of the dense structure of rational numbers.

As we have shown in the chapter 1, the studies of Vamvakoussi and Vosniadou have hypothesised intermediate stages in students' understanding of the dense structure of rational numbers emphasising students' efforts to assimilate new information about rational numbers in their pre-existing structures of knowledge about natural numbers (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). However, while this research could show the existence of certain profiles, for some of the hypothesised profiles no or only a few students could be found. Furthermore, these authors obtained students' answer patterns that differed from the hypothesised profiles. Moreover, these profiles were investigated only in secondary school students, using multiple-choice items (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Vamvakoussi et al., 2011), or multiple-choice and open-ended question items (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007). Students may develop intermediate levels of understanding density already at a younger age. Furthermore, multiple-choice and open-ended items have the same nature, since students have to determine how many numbers there are between two rational numbers. These studies have not used items in which students have to write a number between two rational numbers.

We extend the existing research by performing a cross-sectional study with a large sample of primary and secondary school students (from 5th grade of primary school to 4th grade of secondary school) and by determining and characterising profiles after an inductive analysis of students' answers. We also combine a wider range of item types. More precisely, we include three different types of items: (i) writing a number between two given rational numbers, (ii) answering open-ended questions about how many numbers there are between two given rational numbers, and (iii) answering multiple-choice items. This allows us to examine different ways of students' understanding about the density of rational numbers.

### 2.1.3. Objectives of the Study 3A: Size domain – Quantitative

The specific objective of the Study 3A is to characterise stages from primary to secondary school in the understanding of rational number size. Particularly, in fraction and decimal comparison items.

As we have highlighted in the review of literature, many studies have indicated that besides the natural number bias, other students' incorrect ways of thinking appear when students compare fractions (reverse bias and gap thinking). Furthermore, Gómez and Dartnell (2019) identified students' profiles according to their answers to congruent and incongruent fraction comparison items with or without common components. These profiles showed different students' ways of thinking. However, since the items were not specifically designed to elicit gap thinking, they could not prove that gap thinking was the thinking used by the students.

We extend the existing research by conducting a cross-sectional study covering a wide age range (from 5th grade of primary school to 4th grade of secondary school), and by including an extended set of items (decimal number and fraction comparisons, and manipulating both natural number congruency and the gap between numerator and denominator).

### 2.1.4. Objectives of the Study 3B: Size domain – Qualitative

The specific objective of the study 3B is to support results obtained in the study 3A with qualitative evidences obtained through interviews.

In the quantitative study of the size domain different incorrect ways of students' thinking in fraction comparison items can been inferred. A qualitative study that supports these inferences is valuable.

In this study, we examine the type of reasoning (verbalisations) used by students, and the level of students' confidence in their ways of reasoning. According to Fischbein (1987), intuitive cognitions have an obvious, self-evident, and coercive character, receive great confidence and persist despite formal learning. In this way, measuring the level of confidence that students have about the correctness of their reasoning, paying special attention to those who use incorrect reasoning, can allow us to know if they are aware or not that their reasoning is incorrect, and consequently, to what extent these ways of reasoning are stable and resistant to change. Previous research has pointed out that people are often unaware of incorrect answers and that they are usually overconfident in their estimated knowledge (Lichtenstein & Fishhoff, 1981). In this way, high confidence levels in their incorrect reasoning, especially in items where it leads to the wrong answer, denotes a low self-awareness between the used of the incorrect reasoning and the mathematically correct answer (Lundeberg, Fox, & Punćcohaŕ, 1994). Therefore, confidence data can indicate the level of consolidation and rootedness of each incorrect reasoning. In other words, the more confidence in the reasoning, the more consolidated it will be.

Figure 2.1 shows an overview of the study, highlighting the main objective and the specific objectives of each study.



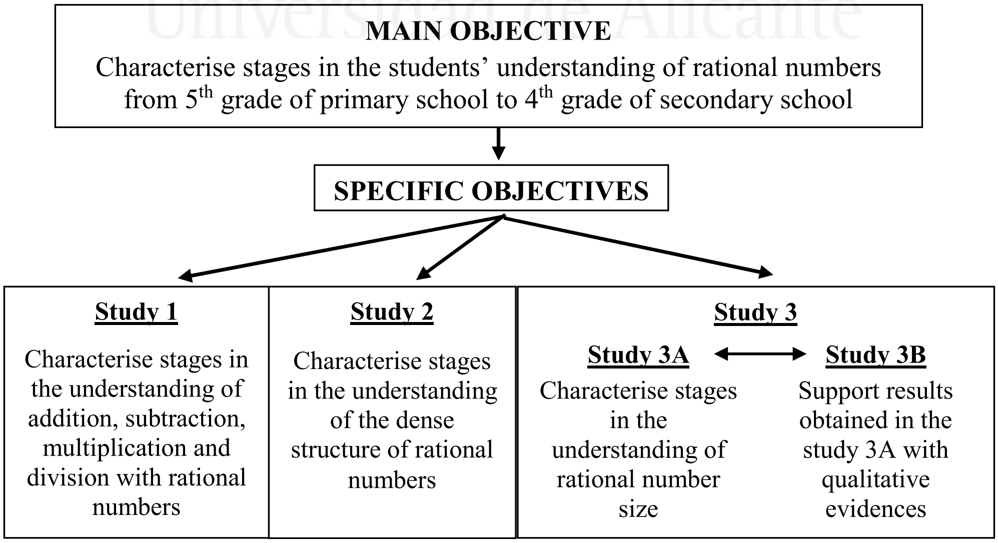



*Figure 2.1.* Overview of the study.

## 2.2. PARTICIPANTS AND CONTEXT

Participants were 1,262 Spanish primary and secondary school students distributed over 5th grade (10-11 years old), 6th grade (11-12 years old), 1st grade (12-13 years old), 2nd grade (13-14 years old), 3rd grade (14-15 years old), and 4th grade (15-16 years old). There was approximately the same number of boys and girls in each age group (Table 2.1).

Table 2.1

*Number of students per grade*

| | Primary school | | Secondary school | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Grade** | 5th | 6th | 1st | 2nd | 3rd | 4th | **Total** |
| **Number of students** | 205 | 219 | 221 | 209 | 198 | 210 | 1,262 |

Students belonged to five primary schools and five secondary schools, spread over nine cities from the province of Alicante. The participating schools are located in cities where families are from mixed socio-economic backgrounds. The main sectors are industry and services. Participants and schools were recruited randomly and parental consent was obtained for all of them.

The contents connected with rational numbers, according to Decreto 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunidad Valenciana, are part of the curriculum from 3rd to 6th grade of primary school, and they are located in the block "Números":

In 3rd grade of primary school, the contents are:

- Concepto de fracción como relación entre las partes y el todo. Vocabulario: numerador y denominador (p. 16565).

In 4th grade:

- Concepto de fracción como relación entre las partes y el todo. Comparación de números naturales y fracciones. El número decimal: relación entre la décima y la fracción decimal. Significado y utilidad de los números fraccionarios en contextos personales y sociales. Cálculo de 50%, 25% y 10% en situaciones reales. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes (p. 16568).

In 5th grade:

- Significado y utilidad de los números fraccionarios y decimales en contextos personales y sociales. El número decimal: décimas, centésimas y milésimas. Representación de números naturales, decimales, fracciones en la recta numérica. Relación entre fracción y decimal. Comparación y ordenación de números naturales, decimales y fracciones. Descomposición y composición de números decimales atendiendo al valor posicional de sus cifras. Redondeo de números decimales a la décima, centésima o milésima más cercana. Utilización de los algoritmos de multiplicación y división de números decimales. Concepto de fracción como división de números naturales. Relación entre fracciones y decimales. Correspondencia entre fracciones, decimales porcentajes. Cálculo de tantos por ciento sencillos en situaciones reales (p. 16571).

In 6th grade:

- Fracciones propias e impropias. Representación gráfica. El número decimal: descomposición y redondeo. Representación de números naturales, enteros, decimales y fracciones en la recta numérica. Comparación y ordenación de números naturales, enteros, *decimales* y fracciones. Relación decimal, fracción y porcentaje. Fracciones equivalentes, reducción de dos fracciones a común denominador utilizando las tablas de multiplicar (no pasar de 100) para compararlas. Suma y resta de fracciones. Cálculo del producto de una fracción por un número. Correspondencia entre fracciones, decimales porcentajes. Cálculo de tantos por ciento sencillos en situaciones reales. Aumentos y disminuciones porcentuales (p. 16574).

In secondary school, according to Decreto 87/2015, de 5 de junio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Valenciana, the contents linked to rational numbers are part of the curriculum in the four grades, and are located in the block “Números y álgebra":

In 1st grade of secondary school, the contents are:

- Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones y ordenación. Números decimales. Representación y ordenación. Operaciones con fracciones. Operaciones con decimales. Resolución de problemas con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales (pp. 17650-17651).

In 2nd grade:

- Relación entre fracciones y decimales. Conversión. Razón y proporción. Potencias de números enteros y fraccionarios con exponente natural. Cálculos de porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales. Resolución de problemas con números enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes (p. 17653).

In $3^{rd}$ and $4^{th}$ grade, the Mathematics subject is divided into two specialties: *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas* and *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas*.

In $3^{rd}$ grade, the contents are:

- En *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas*: Potencias de números racionales con exponente entero. Significado y uso. Números decimales y racionales. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz. Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas (p. 17657).
- En *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas*: Potencias de números racionales con exponente entero. Significado y uso. Números decimales y racionales. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz. Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Error cometido. Operaciones con números grandes y pequeños (p. 17664).

In $4^{th}$ grade, the contents are:

- En *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas*: Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales. Fracciones algebraicas. Simplificación y operaciones (p. 17660).
- En *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas*: Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales. Representación de números racionales e irracionales en la recta real (p. 17666-17667).



Students solved a paper-and-pencil test consisted of 64 items: 16 items of the arithmetic operations domain, 17 items of the density domain, and 31 items of the size domain. The test is an adaptation of the RNST (Rational Number Sense Test) developed and validated by Van Hoof et al. (2015b). The characteristics of the items are described in the chapters of each study.

The test was carried out during March and April of the 2017-2018 academic year. The test consisted of two booklets composed of 32 items each one (Appendix I). Students had to solve the items of the first booklet. Once they had finished them, they solved the items of the second booklet. Items about arithmetic operations, density and size of rational numbers were presented in a randomised order in eight different versions, except for multiple-choice items. The multiple-choice items were always at the end of the second booklet, since the word "infinitely" appears and can help them to correctly solve the other items. A strength of this study is that we combine various item types, first, asking the write and question items, and then multiple-choice items, that can elicit most reflection in students.

Students were asked to solve the paper-and-pencil test individually during a mathematics lesson at school, having approximately 50 minutes to complete it. Thus, no time limit was used, as a time limitation could encourage natural number biased reasoning (Vamvakoussi et al., 2012). There were no further test instructions except that students could not use calculators or mobile devices.

# CAPÍTULO 3. ESTUDIO 1

# CAPÍTULO 3. ESTUDIO 1

En este capítulo se describe el instrumento de recogida de datos y el proceso de análisis seguido en el Estudio 1 (estudio en el dominio de las operaciones aritméticas). Además, se describen los resultados obtenidos.



## 3.1. INSTRUMENTO

Los 1262 estudiantes resolvieron 16 ítems sobre operaciones con números racionales. Los 16 ítems se dividían en dos tipos: 12 ítems conceptuales y cuatro ítems procedimentales. Los ítems conceptuales permitieron conocer si los estudiantes usaban el conocimiento de los números naturales cuando resolvían multiplicaciones y divisiones con fracciones y números decimales, considerando ideas como "la multiplicación siempre da como resultado un número mayor que los factores" y "la división siempre da como resultado un número menor que el dividendo". Los ítems procedimentales permitieron conocer cómo los estudiantes resolvían sumas y restas con fracciones y números decimales.

De los 12 ítems conceptuales, ocho ítems consistían en anticipar si el resultado de una multiplicación o división era mayor o menor que el multiplicando y dividendo respectivamente (les llamamos ítems de pregunta), y cuatro ítems consistían en elegir la operación pertinente para resolver un problema (les llamamos ítems de problema).

Para el diseño de los ocho ítems de pregunta, se tuvo en cuenta la compatibilidad o no del ítem con el conocimiento del número natural. De este modo, se diseñaron cuatro ítems congruentes y cuatro ítems incongruentes. En los ítems congruentes, el multiplicador y divisor son mayores que la unidad (Tabla 3.1). Por lo tanto, un razonamiento basado en el conocimiento del número natural, afirmando que "las multiplicaciones siempre dan como resultado un número mayor" y "las divisiones siempre dan como resultado un número menor", permitiría resolver correctamente estos ítems. De los cuatro ítems, dos ítems eran de multiplicación –uno con fracciones y otro con números decimales-, y dos ítems eran de división –uno con fracciones y otro con números decimales.

Tabla 3.1

*Ítems de pregunta congruentes*

| | **Multiplicación (M)** | **División (Dv)** |
|---|---|---|
| **Fracción (F)** | *Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 50 × 3/2 es mayor o menor que 50?*<br>o Mayor<br>o Menor | *Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 20 ÷ 7/4 es mayor o menor que 20?*<br>o Mayor<br>o Menor |
| **Decimal (D)** | *Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 36 × 1.5 es mayor o menor que 36?*<br>o Mayor<br>o Menor | *Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 37 ÷ 1.2 es mayor o menor que 37?*<br>o Mayor<br>o Menor |

En los ítems incongruentes, el multiplicador y divisor son menores que la unidad (Tabla 3.2). En estos casos, un razonamiento basado en el conocimiento del número natural, no permitiría resolver correctamente los ítems. De los cuatro ítems, dos ítems eran de multiplicación -uno con fracciones y otro con números decimales-, y dos ítems eran de división -uno con fracciones y otro con números decimales.

Tabla 3.2

*Ítems de pregunta incongruentes*

| | **Multiplicación (M)** | **División (Dv)** |
|---|---|---|
| **Fracción (F)** | *Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 35 × 2/5 es mayor o menor que 35?*<br>o Mayor<br>o Menor | *Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 40 ÷ 7/8 es mayor o menor que 40?*<br>o Mayor<br>o Menor |
| **Decimal (D)** | *Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 72 × 0.99 es mayor o menor que 72?*<br>o Mayor<br>o Menor | *Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 21 ÷ 0.7 es mayor o menor que 21?*<br>o Mayor<br>o Menor |

Los cuatro ítems de problema (Tabla 3.3) son incongruentes ya que el multiplicador (o factor de la multiplicación) y divisor implicado siempre eran menores que la unidad. De este modo, se trata de ítems no compatibles con el conocimiento del número natural.

Tabla 3.3

*Ítems de problema*

| | **Multiplicación (M)** | **División (Dv)** |
|---|---|---|
| **Fracción (F)** | *1 kilogramo de oro cuesta 15000 euros, ¿cuál es el precio de 1/5 kilogramo de oro?*<br>A) 15000 ÷ 1/5<br>B) 1/5 ÷ 15000<br>C) 15000 × 1/5 | *Tuve que pagar 9 euros por 3/4 kilos de dulces, ¿cuál es el precio de 1 kilo de dulces?*<br>A) 9 ÷ 3/4<br>B) 9 × 3/4<br>C) 3/4 ÷ 9 |
| **Decimal (D)** | *De 1 litro de zumo podemos hacer 15 litros de limonada. ¿Cuántas limonadas se pueden hacer con 0.75 litros de zumo?*<br>A) 0.75 ÷ 15<br>B) 15 × 0.75<br>C) 15 ÷ 0.75 | *Las paredes de mi baño tienen 3 metros de alto, ¿cuántas filas de azulejos necesito para cubrir esta pared si sabes que 1 azulejo tiene 0.15 metros de alto?*<br>A) 3 ÷ 0.15<br>B) 0.15 × 3<br>C) 0.15 ÷ 3 |

De los cuatro ítems, dos ítems eran de multiplicación -uno con fracciones y otro con números decimales-, y dos ítems eran de división -uno con fracciones y otro con números decimales. El enunciado del ítem era el siguiente: *Rodea la operación que tienes que realizar para llegar a la respuesta correcta*.

En los cuatro ítems procedimentales, los estudiantes tenían que resolver dos sumas y dos restas, con fracciones y con números decimales (Tabla 3.4). Se trata de ítems no compatibles con el conocimiento del número natural (ítem incongruentes), ya que el conocimiento sobre los procedimientos de suma y resta con números naturales no se pueden aplicar para resolver correctamente los ítems. Los estudiantes podían hacer los cálculos necesarios, siempre y cuando escribieran las operaciones realizadas. El enunciado del ítem era el siguiente: *Haz las operaciones siguientes*.

Tabla 3.4
*Ítems procedimentales*

| | **Suma (A)** | **Resta (S)** |
|---|---|---|
| **Fracción (F)** | 2/6 + 1/3 = | 7/8 – 1/4 = |
| **Decimal (D)** | 0.46 + 0.3 = | 0.36 – 0.2 = |

Con relación al formato de los ítems, en un primer recuadro se les presentaba el enunciado del ítem, y en un segundo recuadro tenían que resolver cada uno de los ítems. La Figura 3.1 muestra ejemplos de estos ítems.

| **Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 50 x 3/2 es mayor o menor que 50?** |
|---|
| Mayor<br>Menor |
| **Rodea la operación que tienes que realizar para llegar a la respuesta correcta:** |
| *Tuve que pagar 9 euros por 3/4 kilos de dulces, ¿cuál es el precio de 1 kilo de dulces?*<br>A. 9 : 3/4<br>B. 9 x 3/4<br>C. 3/4 : 9 |
| **Haz las operaciones siguientes:** |
| 2/6 + 1/3 =<br>0’36 – 0’2 = |

*Figura 3.1*. Ejemplos de ítems del cuestionario.

## 3.2. ANÁLISIS

Los datos se analizaron en dos fases. En una primera fase, las respuestas de los estudiantes a los 16 ítems se codificaron según el siguiente criterio: (1) si la respuesta era correcta y (0) si la respuesta era incorrecta. Para ello, cada ítem se codificó con una variable (Tabla 3.5), de manera que las respuestas de cada alumno a los ítems se registraban con un vector de 16 componentes formados por 0 o 1 dependiendo de si la respuesta era correcta o no en cada uno de los ítems. La Figura 3.2 muestra un ejemplo de la codificación de las respuestas de los estudiantes.

En la segunda fase, los datos se analizaron mediante un Análisis de Conglomerados Bietápico, también llamado análisis de conglomerados en dos fases (*TwoStep Cluster Analysis*), con el fin de encontrar grupos de estudiantes (perfiles) con patrones de respuesta cualitativamente similares. El software estadístico utilizado fue SPSS versión 25. El clúster es una técnica de clasificación que sirve para identificar y describir subgrupos de sujetos homogéneos en función de los valores observados de un conjunto de datos que puede ser heterogéneo. Se basa en las distancias entre ellos, por lo que permite cuantificar el grado de similitud (cuando hay proximidades) o el grado de diferencia (cuando hay distancias). Como resultado de este tipo de análisis aparecen agrupaciones o clústeres homogéneos.

El análisis de Conglomerados Bietápico, desarrollado por Chiu, Fang, Chen, Wang y Jeris (2001) es una técnica en dos fases. En la primera fase, el algoritmo realiza un procedimiento que es muy similar al análisis clúster de K-medias. Este análisis asigna los casos a un número de grupos. Es decir, tiene el objetivo de separar las observaciones en K clústeres, de manera que cada dato pertenezca a un grupo y sólo a uno. Este algoritmo busca con un método iterativo: los centroides (medias, medianas…) de los K clústeres y asigna cada individuo a un clúster. De esta primera fase se forman pre-clústeres que se utilizarán en la segunda fase en lugar de las filas de datos (observaciones) originales. En la segunda fase, los pre-clústeres se agrupan utilizando un algoritmo de agrupamiento jerárquico aglomerativo. Este algoritmo comienza con los pre-clústeres, y en cada paso se recalculan las distancias entre los grupos existentes y se unen los dos grupos más similares o menos disimilares, obteniendo finalmente un clúster con grupos homogéneos.

Tabla 3.5

*Características de los ítems y codificación en variables*

| Variable | Características del ítem | Ítems |
|---|---|---|
| CFCM | Ítem conceptual de pregunta congruente de multiplicación con fracción | *¿El resultado de 50 × 3/2 es mayor o menor que 50?* |
| CFCDv | Ítem conceptual de pregunta congruente de división con fracción | *¿El resultado de 20 ÷ 7/4 es mayor o menor que 20?* |
| CDCM | Ítem conceptual de pregunta congruente de multiplicación con número decimal | *¿El resultado de 36 × 1.5 es mayor o menor que 36?* |
| CDCDv | Ítem conceptual de pregunta congruente de división con número decimal | *¿El resultado de 37 ÷ 1.2 es mayor o menor que 37?* |
| IDCWDv | Ítem conceptual de problema incongruente de división con número decimal | *Las paredes de mi baño tienen 3 metros de alto, ¿cuántas filas de azulejos necesito para cubrir esta pared si sabes que 1 azulejo tiene 0.15 metros de alto?* |
| IDCQDv | Ítem conceptual de pregunta incongruente de división con número decimal | *¿El resultado de 21 ÷ 0.7 es mayor o menor que 21?* |
| IDCWM | Ítem conceptual de problema incongruente de multiplicación con número decimal | *De 1 litro de zumo podemos hacer 15 litros de limonada. ¿Cuántas limonadas se pueden hacer con 0.75 litros de zumo?* |
| IDCQM | Ítem conceptual de pregunta incongruente de multiplicación con número decimal | *¿El resultado de 72 × 0.99 es mayor o menor que 72?* |
| IFCWDv | Ítem conceptual de problema incongruente de división con fracción | *Tuve que pagar 9 euros por 3/4 kilos de dulces, ¿cuál es el precio de 1 kilo de dulces?* |
| IFCQDv | Ítem conceptual de pregunta incongruente de división con fracción | *El resultado de 40 ÷ 7/8 es mayor o menor que 40?* |
| IFCWM | Ítem conceptual de problema incongruente de multiplicación con fracción | *1 kilogramo de oro cuesta 15000 euros, ¿cuál es el precio de 1/5 kilogramo de oro?* |
| IFCQM | Ítem conceptual de pregunta incongruente de multiplicación de fracción | *¿El resultado de 35 × 2/5 es mayor o menor que 35?* |
| IDPA | Ítem procedimental incongruente de suma de números decimales | *0.46 + 0.3* |
| IDPS | Ítem procedimental incongruente de resta de números decimales | *0.36 – 0.2* |
| IFPA | Ítem procedimental incongruente de suma de fracciones | *2/6 + 1/3* |
| IFPS | Ítem procedimental incongruente de resta de fracciones | *7/8 – 1/4* |

| Estudiante | Curso | CFCM | CFCDv | CDCM | CDCDv | IDCWDv | IDCQDv | IDCWM | IDCQM | IFCWDv | IFCQDv | IFCWM | IFCQM | IDPA | IDPS | IFPA | IFPS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Q001 | 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Q002 | 5 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Q003 | 5 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Q004 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Q005 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Q006 | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Q007 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Q008 | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Q009 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Q010 | 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Q011 | 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Q012 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

*Figura 3.2*. Codificación de las respuestas de los estudiantes.

Este análisis tiene características únicas con respecto a otros métodos de clúster jerárquicos o no jerárquicos (Rubio-Hurtado & Vilà-Baños, 2016). En primer lugar, es eficaz para analizar conjuntos de datos grandes mediante la construcción de un árbol de características de conglomerados (como la muestra de nuestro estudio). En segundo lugar, permite manejar variables categóricas y continuas simultáneamente. Finalmente, permite determinar automáticamente el número óptimo de conglomerados mediante la comparación de los valores de un criterio de selección del modelo para diferentes soluciones de conglomerados: *Criterio de Información de Akaike* (AIC) o el *Criterio de Información Bayesiano* (BIC) (Sarstedt & Mooi, 2004).

El valor BIC indica un equilibrio óptimo entre el ajuste del modelo y la complejidad del modelo, en términos del número de parámetros estimados (= fp). Este valor se calcula de la siguiente manera: BIC = -2logL + log (I) × fp. Schwarz (1978) propuso el uso del criterio BIC, ya que a diferencia del criterio AIC, tiene en cuenta el tamaño de la muestra. Debido al gran tamaño de nuestra muestra ($n$ = 1262), hemos elegido este valor.

Aunque se ha utilizado una codificación dicotómica de las respuestas para realizar el estudio (1 – correcto y 0 – incorrecto), el análisis clúster proporciona información sobre el tipo de razonamiento utilizado por los estudiantes. Por ejemplo, si un estudiante responde correctamente los tipos de ítems congruentes, pero resuelve incorrectamente los ítems incongruentes, podemos inferir que este estudiante usa un razonamiento basado en el conocimiento del número natural.

## 3.3. RESULTADOS

Los resultados de este primer estudio se dividen en tres secciones: en primer lugar, determinamos el número de clústeres (perfiles); en segundo lugar, describimos los perfiles obtenidos; y finalmente, analizamos la evolución de estos perfiles desde 5º de educación primaria hasta el final de la educación secundaria (4º de ESO).

### 3.3.1. Determinación del número de clústeres (perfiles)

Como resultado del Análisis de Conglomerados Bietápico, se han determinado siete clústeres (perfiles) de estudiantes. En esta decisión se tuvo en cuenta un bajo valor del BIC (Tabla 3.6), y la interpretación de la Figura 3.3, que muestra las características de los clústeres.

Tabla 3.6

*Medidas de ajuste de la solución de cuatro a ocho clústeres*

| Número de clústeres | Criterio bayesiano de Schwarz (BIC) | Cambio BIC | Razón de cambios BIC | Razón de medidas de distancia |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 11995.273 | -297.067 | .242 | 1.606 |
| 5 | 11896.484 | -98.788 | .081 | 1.190 |
| 6 | 11849.903 | -46.582 | .038 | 1.194 |
| 7 | 11847.980 | -1.923 | .002 | 1.085 |
| 8 | 11864.161 | 16.180 | -.013 | 1.013 |

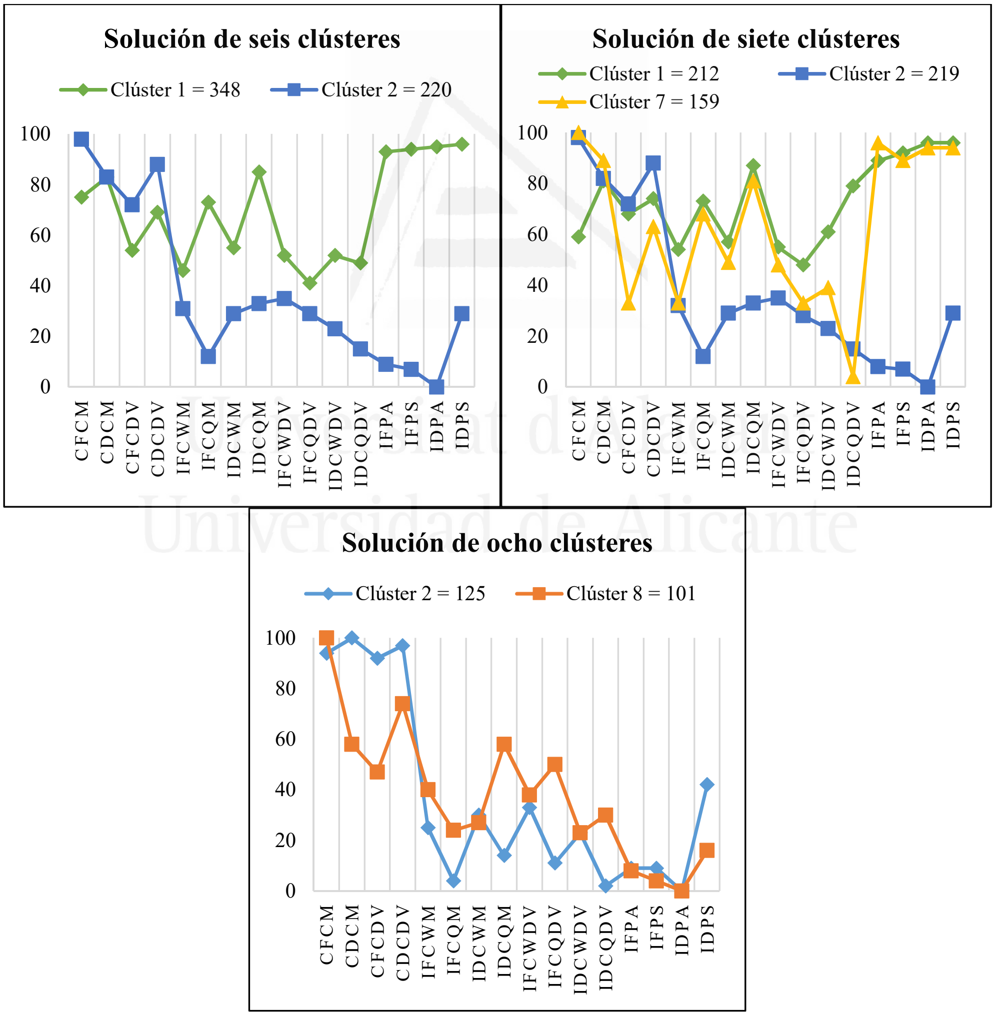



*Figura 3.3*. Características de los clústeres adicionales en la solución de siete y ocho clústeres en comparación con la solución de seis y siete clústeres, respectivamente.

Esta figura muestra el porcentaje de éxito medio en los 16 tipos de ítems de los estudiantes que formaban cada clúster, en la solución de seis, siete y ocho clústeres. Para facilitar su interpretación, solo se han representado en los gráficos los clústeres adicionales que aparecían en la solución de siete y ocho con respecto al de seis y siete, respectivamente. El clúster adicional (representado en amarillo) que apareció en la solución de siete clústeres en comparación con la solución de seis (Clúster 1 = 348), es interesante desde el punto de vista interpretativo. Este clúster permite diferenciar entre los estudiantes que, en ítems conceptuales incongruentes con fracciones, resolvieron mejor los ítems de problema que los ítems de pregunta (Clúster 1 = 212), y los estudiantes que, en ítems conceptuales incongruentes, resolvieron mejor los ítems de problema que los ítems de pregunta, tanto con fracciones como con números decimales (Clúster 7 = 159).

Sin embargo, el clúster adicional que apareció en la solución de ocho perfiles (representado en naranja), no es muy interesante desde el punto de vista interpretativo en comparación con la solución de siete clústeres (Clúster 2 = 219). Únicamente hace una distinción entre un grupo de estudiantes que resuelven correctamente los ítems congruentes e incorrectamente los ítems incongruentes (Clúster 2 = 125), y un grupo de estudiantes que resuelven correctamente los ítems congruentes e incorrectamente los ítems incongruentes, pero con mayor nivel de éxito en los ítems incongruentes que el clúster anterior (Clúster 8 = 101).

### 3.3.2. Características de los perfiles (clústeres) identificados

Con respecto a los perfiles identificados, los hemos nombrado *Correct, Full NNB, Conceptual and fraction procedural NNB, Conceptual NNB, Fraction procedural and fraction conceptual multiplication NNB, Word-problem multiplication NNB* y *Remainder*. La Figura 3.4 muestra el porcentaje de éxito en cada ítem por perfil.

A continuación, describimos las características de cada uno de los siete perfiles e indicamos el porcentaje de estudiantes en cada perfil.

- *Correct* (16.8%, $n$ = 212): Estudiantes que resolvieron correctamente la mayoría de los ítems. Por tanto, resolvieron correctamente los ítems conceptuales congruentes e incongruentes (sin utilizar un razonamiento basado en el número natural). Los ítems procedimentales también los resolvieron correctamente.

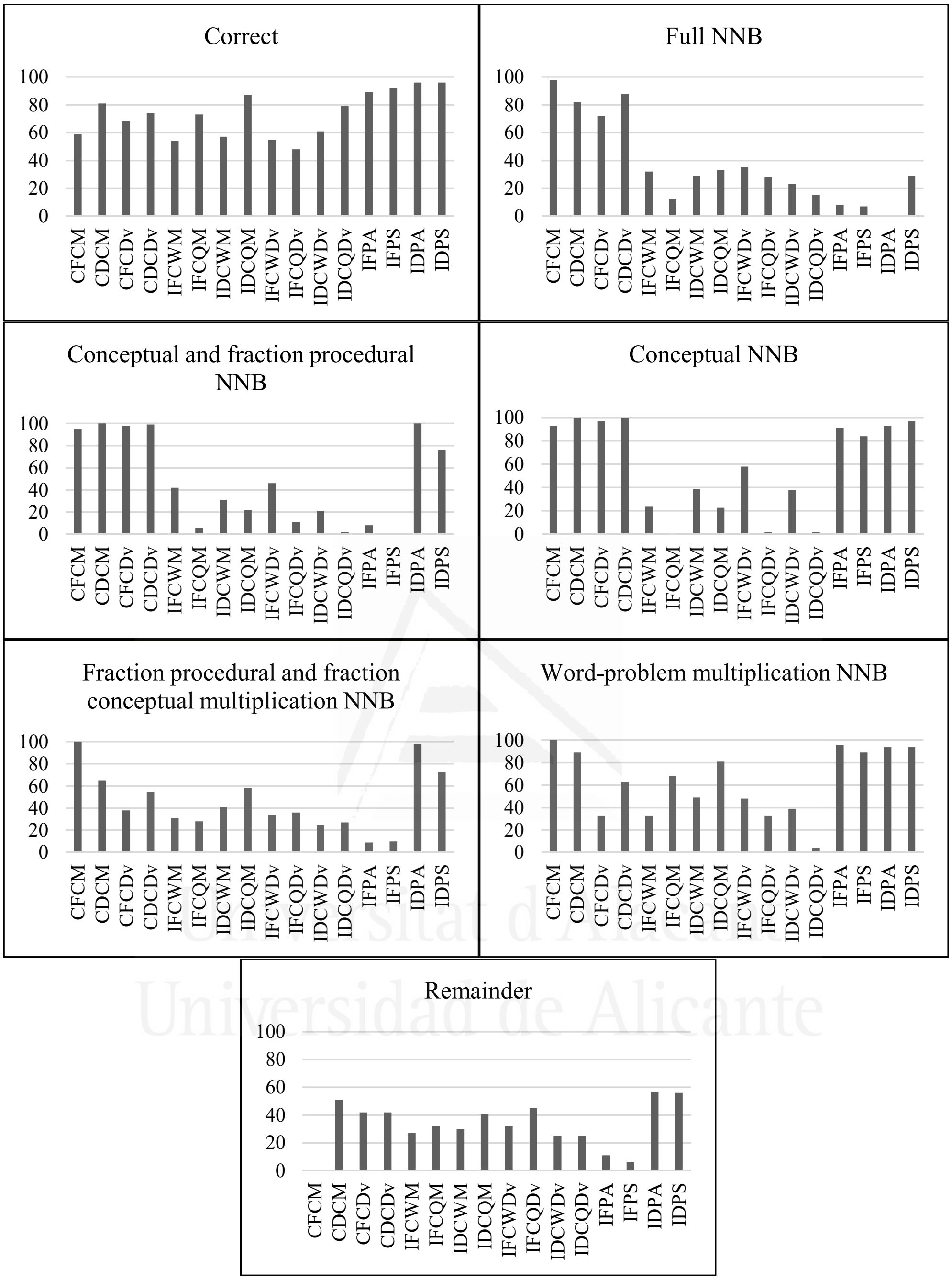



*Figura 3.4.* Características de los clústeres.

- *Full NNB* (17.4%, $n$ = 219): Estudiantes que resolvieron incorrectamente casi todos los ítems incongruentes, tanto con fracciones como con decimales. Sin embargo, en ítems congruentes el porcentaje de éxito fue muy alto. Se infiere que estos estudiantes resolvieron estos ítems basándose en el conocimiento del número natural "el resultado de una multiplicación siempre es un número mayor" y "el resultado de una división siempre es un número menor". Además, en ítems procedimentales, sumaron y restaron los números decimales y las fracciones de la misma manera que con los números naturales (sumando numerador y denominador por separado en las fracciones y no teniendo en cuenta el valor de posición en los números decimales).

- *Conceptual and fraction procedural NNB* (16.8%, $n$ = 212): Estudiantes que, en ítems conceptuales, resolvieron correctamente los congruentes e incorrectamente los incongruentes tanto con números decimales como con fracciones. Por tanto, al igual que en el perfil anterior, se infiere que estos estudiantes resolvieron estos ítems basándose en el conocimiento del número natural. Sin embargo, a diferencia del anterior perfil, en los ítems procedimentales, resolvieron correctamente los ítems con números decimales, pero incorrectamente los ítems con fracciones, sumando numeradores y denominadores por separado.
- *Conceptual NNB* (10.1%, $n$ = 127): Estudiantes que resolvieron correctamente los ítems procedimentales con fracciones y números decimales. Sin embargo, de los ítems conceptuales, resolvieron correctamente los ítems congruentes e incorrectamente los ítems incongruentes. Por lo tanto, se infiere que estos estudiantes basaron sus respuestas en el conocimiento del número natural en ítems conceptuales, pero no en ítems procedimentales.
- *Fraction procedural and fraction conceptual multiplication NNB* (13.9%, $n$ = 176): Estudiantes que, en los ítems de multiplicación con fracciones, tuvieron mayor porcentaje de éxito en los ítems congruentes que en los incongruentes. Sin embargo, en los ítems de multiplicación con números decimales, tuvieron un alto porcentaje de éxito tanto en ítems congruentes como en incongruentes. Se infiere, por tanto, que en los ítems de multiplicación con fracciones, los estudiantes se basaron en el conocimiento sobre el número natural. En cuanto a los ítems de división, tuvieron un bajo porcentaje de éxito tanto en ítems congruentes como en incongruentes con fracciones y con números decimales. En los ítems procedimentales, tuvieron un bajo porcentaje de éxito en ítems con fracciones, sumando y restando numeradores y denominadores por separado. Sin embargo, resolvieron correctamente los ítems con números decimales.
- *Word-problem multiplication NNB* (12.6%, $n$ = 159): Estudiantes que resolvieron correctamente los ítems procedimentales, pero mostraron diferencias en los ítems conceptuales. En los ítems conceptuales congruentes, resolvieron correctamente

los de multiplicación, pero mostraron dificultades en los de división. En los ítems incongruentes de multiplicación, resolvieron los ítems de pregunta con mayor porcentaje de éxito que los ítems de problema. Además, este perfil evidencia diferencias entre ambos tipos de operaciones dependiendo de la naturaleza del ítem, ya que los estudiantes tuvieron mayor porcentaje de éxito en el ítem de multiplicación cuando tenían que anticipar el resultado de una operación, pero tuvieron mayor porcentaje de éxito en el ítem de división cuando tenían que anticipar la operación en un problema.

- *Remainder* (12.4%, $n = 157$): Estudiantes con un éxito generalmente bajo en todos los ítems. No se pudo identificar ningún patrón de resolución en sus respuestas.

### 3.3.3. Evolución de los perfiles por curso

En términos de evolución (Figura 3.5), los resultados muestran que el porcentaje de estudiantes en el perfil *Correct* aumentó a lo largo de los cursos (desde un 0.49% en 5º de educación primaria hasta un 37.62% en 4º de ESO). Sin embargo, aproximadamente un 60% de los alumnos de 4º de ESO todavía no estaban en este perfil.

El porcentaje del perfil *Full NNB* fue mayor en los primeros cursos, y disminuyó sin desaparecer al final de la educación secundaria (desde un 33.66% en 5º de educación primaria hasta un 8.10% en 4º de ESO). El porcentaje del perfil *Conceptual and fraction procedural NNB* también fue menor en los últimos cursos, y tampoco desapareció al final de la educación secundaria (desde un 26.83% en 5º de educación primaria hasta un 8.10% en 4º de ESO). Por lo tanto, la influencia del conocimiento sobre el número natural parece que no desaparece en los últimos cursos de la educación secundaria, ni con fracciones ni con números decimales, siendo mayor esta influencia con las fracciones.

El porcentaje de estudiantes del perfil *Conceptual NNB* aumentó en 6º de educación primaria (desde un 0.98% en 5º de educación primaria hasta un 11.42% en 6º de educación primaria) y luego permaneció constante en el resto de cursos (alrededor de un 10%). El porcentaje de estudiantes en el perfil *Fraction procedural and fraction conceptual multiplication NNB* es mayor en 1º de ESO (18.55%) que en 5º de educación primaria (13.66%), pero disminuyó después de este curso, obteniendo el porcentaje más bajo en 4º de ESO (9.05%).

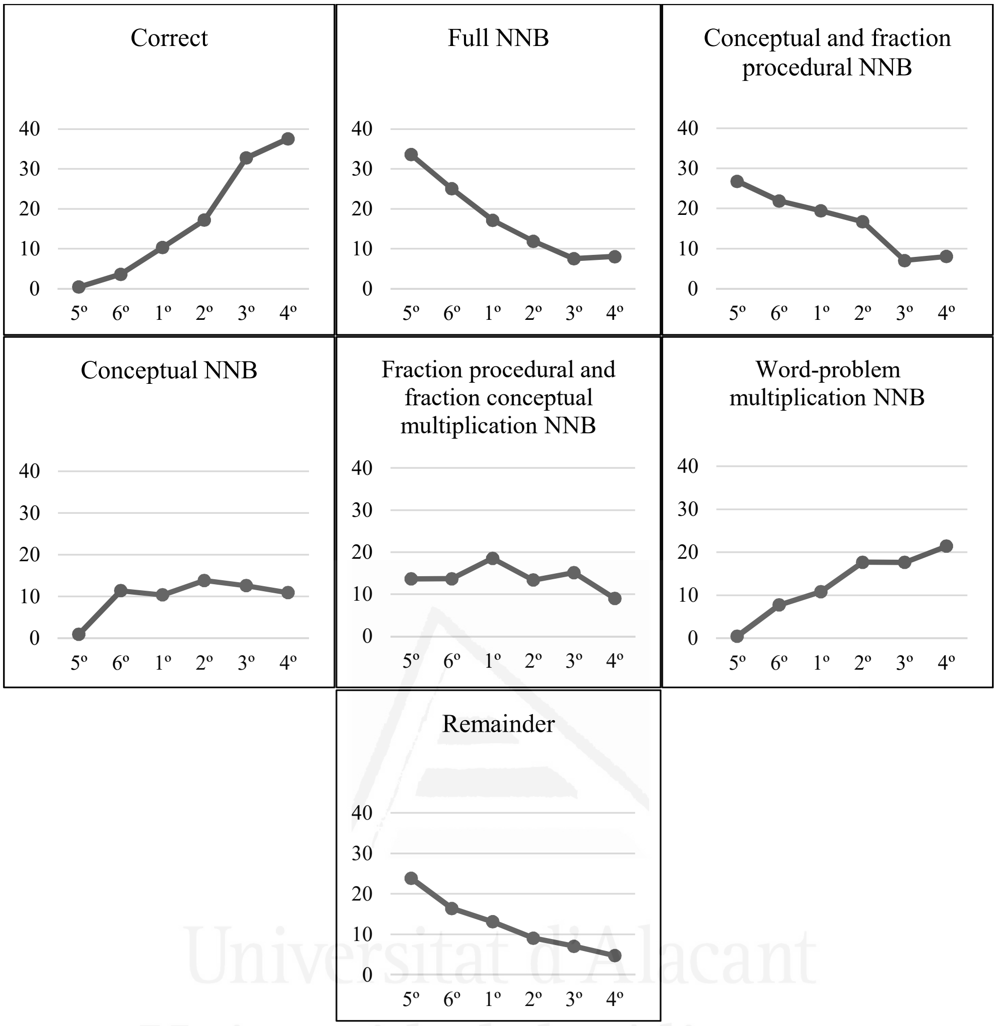



*Figura 3.5*. Evolución de los perfiles desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO.



El porcentaje de estudiantes en el perfil *Word-problem multiplication NNB* aumentó a lo largo de los cursos (desde un 0.49% en 5º de educación primaria hasta un 21.43% en 4º de ESO). Según estos resultados, parece que, con el aumento de los cursos, los estudiantes están más influenciados por el conocimiento sobre el número natural en los ítems de multiplicación, especialmente cuando tienen que anticipar la operación que resuelve un problema. Sin embargo, en los ítems de división presentan un bajo rendimiento tanto en ítems congruentes como en incongruentes, teniendo más dificultades cuando tienen que anticipar el resultado de una operación que cuando tienen que anticipar la operación en un problema. Por lo tanto, el conocimiento de los números naturales no parece ser la razón de sus dificultades en la división con números racionales. Finalmente, el porcentaje de estudiantes del perfil *Remainder* disminuyó a lo largo de los cursos (desde un 23.9% en 5º de educación primaria hasta un 4.8% en 4º de ESO).

Estos resultados muestran que, aunque la influencia del conocimiento sobre el número natural todavía está presente al final de la educación secundaria, los estudiantes parecen superar este sesgo en primer lugar en los ítems procedimentales (sumas y restas). Sin embargo, existen diferencias con respecto a las operaciones de multiplicación y división. Nuestros resultados muestran que los estudiantes siguen influenciados por el conocimiento sobre el número natural en multiplicaciones hasta el final de la educación secundaria, resolviendo correctamente los ítems congruentes, pero incorrectamente los incongruentes. Sin embargo, el bajo porcentaje de éxito presentado en los ítems de división (tanto en ítems congruentes como en incongruentes) parece no estar relacionado con la interferencia del número natural. La evolución de los perfiles sugiere, además, que los estudiantes primero superan la influencia del conocimiento sobre el número natural con los números decimales, y después con fracciones.

# CAPÍTULO 4. ESTUDIO 2

# CAPÍTULO 4. ESTUDIO 2



En este capítulo se describe, en primer lugar, el instrumento de recogida de datos y el proceso de análisis seguido en el Estudio 2 (estudio en el dominio de la densidad). Posteriormente, se describen los resultados obtenidos.

## 4.1. INSTRUMENTO

Los 1262 estudiantes resolvieron 17 ítems sobre la densidad de los números racionales. Estos ítems eran de tres tipos: siete ítems de escribir un número entre dos números racionales dados, seis ítems de determinar la cantidad de números que hay entre dos números racionales dados y cuatro ítems de elección múltiple.

Para el diseño de los ítems de escribir un número, se tuvo en cuenta la compatibilidad o no del ítem con el conocimiento del número natural. De este modo, se diseñaron cuatro ítems congruentes y tres ítems incongruentes.

De los cuatro ítems congruentes, dos ítems eran con fracciones y dos ítems eran con números decimales (Tabla 4.1). Se consideran ítems congruentes, ya que al tratarse de números no pseudo-consecutivos, se pueden resolver correctamente aplicando un razonamiento basado en el conocimiento de los números naturales. Por ejemplo, las fracciones 1/4 y 3/4 o los números decimales 2.5 y 2.7 no son pseudo-consecutivos, y se podría encontrar un número entre ellos, 2/4 y 2.6, respectivamente, usando el conocimiento sobre los números naturales. Estos ítems se incluyeron, en este estudio, únicamente con el objetivo de comprobar si los estudiantes tenían un conocimiento básico sobre números decimales y fracciones.

Tabla 4.1

*Ítems congruentes de escribir un número*

| **Enunciado** | **Ítems** |
|---|---|
| *A continuación, puedes ver parejas de números. Para cada pareja, escribe un número que se encuentre entre esos dos números. Si crees que ese número no existe, escribe "imposible".* | 2.5 y 2.7<br>5.3 y 5.8<br>1/4 y 3/4<br>2/7 y 6/7 |

De los ítems incongruentes, dos ítems eran con fracciones y un ítem era con números decimales (Tabla 4.2). Los números racionales usados en estos ítems son pseudo-consecutivos, como por ejemplo 1/3 y 2/3 o 3.49 y 3.50. Estos ítems son incongruentes porque usando un conocimiento sobre los números naturales el estudiante consideraría que no hay ningún número entre ellos. La diferencia entre los dos ítems con fracciones es que en 1/3 y 2/3 ambas fracciones tienen el mismo denominador, y en 1/8 y 1/9 ambas fracciones tienen el mismo numerador.

Tabla 4.2

*Ítems incongruentes de escribir un número*

| **Enunciado** | **Ítems** |
|---|---|
| *A continuación, puedes ver parejas de números. Para cada pareja, escribe un número que se encuentre entre esos dos números. Si crees que ese número no existe, escribe "imposible".* | 3.49 y 3.50<br>1/3 y 2/3<br>1/8 y 1/9 |

De los seis ítems de determinar la cantidad de números entre dos números racionales dados, tres ítems eran con fracciones y tres ítems eran con números decimales (Tabla 4.3).

De los tres ítems con fracciones, un ítem era con fracciones pseudo-consecutivas (2/5 y 3/5), otro ítem era con fracciones no pseudo-consecutivas con el mismo denominador (2/5 y 4/5), y otro ítem era con fracciones no pseudo-consecutivas con el mismo numerador (5/9 y 5/6). De los tres ítems con números decimales, un ítem era con números decimales pseudo-consecutivos (1.42 y 1.43), y dos ítems eran con números decimales no pseudo-consecutivos (1.9 y 1.40, y 2.3 y 2.6).

Tabla 4.3

*Ítems de determinar la cantidad de números*

| **Enunciado** | **Ítems** |
|---|---|
| *¿Cuántos números hay entre…?* | 1.42 y 1.43 |
| | 1.9 y 1.40 |
| | 2.3 y 2.6 |
| | 2/5 y 4/5 |
| | 2/5 y 3/5 |
| | 5/9 y 5/6 |

Por último, de los cuatro ítems de elección múltiple, dos ítems eran con fracciones y dos ítems eran con números decimales (Tabla 4.4).

De los dos ítems con fracciones, un ítem era con fracciones pseudo-consecutivas (1/3 y 2/3) y otro ítem era con fracciones no pseudo-consecutivas (1/6 y 4/6). De los dos ítems con números decimales, un ítem era con números decimales pseudo-consecutivos (3.72 y 3.73) y otro ítem era con números decimales no pseudo-consecutivos (0.7 y 0.9).

Tabla 4.4

*Ítems de elección múltiple*

| **Enunciado** | **Ítems** |
|---|---|
| *¿Cuántos números hay entre los siguientes números? Rodea la respuesta más correcta.*<br>▪ *Ningún número*<br>▪ *Un número finito de números decimales*<br>▪ *Un número finito de fracciones*<br>▪ *Infinitos números decimales*<br>▪ *Infinitas fracciones*<br>▪ *Infinitos números, que se pueden representar tanto en forma decimal como fracción*<br>▪ *Ninguna de las anteriores, creo que…* | 0.7 y 0.9<br>3.72 y 3.73<br>1/3 y 2/3<br>1/6 y 4/6 |

Los ítems de elección múltiple se diferencian de los ítems de determinar la cantidad de números entre dos números racionales dados o escribir un número entre dos números racionales dados, ya que se les proporcionaba la respuesta correcta entre las elecciones. Estos ítems se presentaron siempre en la parte final del cuestionario, con el objetivo de evitar una posible influencia de la respuesta correcta.

Con relación al formato de los ítems, en un primer recuadro se les presentaba el enunciado del ítem, y en un segundo recuadro tenían que resolver cada uno de los ítems. La Figura 4.1 muestra ejemplos de estos ítems.

**¿Cuántos números hay entre 2/5 y 4/5?**

__________________________________________________

**A continuación, puedes ver parejas de números. Para cada pareja, escribe un número que se encuentre entre esos dos números. Si crees que ese número no existe, escribe 'imposible':**

1/4 y 3/4 ________________________________________

1/8 y 1/9 ________________________________________

5’3 y 5’8 ________________________________________

**¿Cuántos números hay entre los siguientes números? Rodea la respuesta más correcta:**

1/6 y 4/6

a) Ningún número
b) Un número finito de números decimales
c) Un número finito de fracciones
d) Infinitos números decimales
e) Infinitas fracciones
f) Infinitos números, que se pueden representar tanto en forma decimal como fracción
g) Ninguna de las anteriores, creo que ________________________

__________________________________________________

*Figura 4.1*. Ejemplos de ítems del cuestionario.

## 4.2. ANÁLISIS

El análisis de los datos se dividió en dos fases. En una primera fase, las respuestas de los estudiantes a los tres tipos de ítems fueron analizadas de manera inductiva por cuatro investigadores, con el objetivo de identificar categorías según su naturaleza.

Para los ítems de escribir un número, se identificaron seis categorías:

- *Correct*: Estudiantes que escribieron correctamente un número entre los dos números dados.
- *Naïve*: Estudiantes que dijeron que era imposible encontrar un número.
- *Consecutiveness:* Estudiantes que consideraron que hay otros números, pero mostraron una idea incorrecta de la fracción "siguiente". Por ejemplo, consideraron que la siguiente fracción de 1/3 es 1/4, la siguiente es 1/5, etc.
- *Difference*: Estudiantes que calcularon la diferencia entre los dos números dados. Por ejemplo, 0.01 está entre 3.49 y 3.50.
- *Rest*: Estudiantes que escribieron un número no incluido entre los dos números dados.
- *Blank*: Respuestas en blanco.

Una vez determinadas las categorías, las respuestas de los estudiantes fueron codificadas atendiendo a estas categorías. La Figura 4.2 muestra un ejemplo de la codificación de las respuestas de los estudiantes en los tres ítems incongruentes de escribir un número.

| Estudiante | Curso | 1/3 y 2/3 | 1/8 y 1/9 | 3.49 y 3.50 |
|---|---|---|---|---|
| Q021 | 5 | Naïve | Naïve | Naïve |
| Q022 | 5 | Consecutiveness | Naïve | Naïve |
| Q023 | 5 | Naïve | Naïve | Naïve |
| Q025 | 5 | Rest | Naïve | Naïve |
| Q028 | 5 | Naïve | Naïve | Naïve |
| Q029 | 5 | Naïve | Naïve | Naïve |
| Q030 | 5 | Consecutiveness | Naïve | Naïve |

*Figura 4.2.* Codificación de las respuestas de los estudiantes en los ítems de escribir un número.

Para los ítems de determinar la cantidad de números, se identificaron siete categorías:

- *Infinite*: Estudiantes que respondieron que hay un número infinito de números entre los dos dados.
- *Difference*: Estudiantes que calcularon la diferencia entre los dos números dados. Por ejemplo, 0.3 está entre 2.3 y 2.6.
- *Naïve consecutive*: Estudiantes que respondieron que no hay números entre dos números pseudo-consecutivos (por ejemplo, entre 1.42 y 1.43 o entre 2/5 y 3/5) y entre dos números no pseudo-consecutivos dieron una lista finita de números

pseudo-consecutivos (por ejemplo, estudiantes que respondieron que únicamente los números 2.4 y 2.5 están entre 2.3 y 2.6 o entre 2/5 y 4/5 únicamente está 3/5) o la cantidad de números de esta lista (por ejemplo, hay dos números entre 2.3. y 2.6 o hay un número entre 2/5 y 4/5).

- *Finite consecutive*: Estudiantes que dieron una lista finita de números pseudo-consecutivos entre los números dados, añadiendo un decimal en los números decimales (por ejemplo, los números 1.421, 1.422, 1.423..., 1.429 están entre 1.42 y 1.43) o añadiendo un decimal al numerador de las fracciones (por ejemplo, los números 2.1/5, 2.2/5, 2.3/5..., 2.9/5 están entre 2/5 y 3/5), o dijeron la cantidad de números de estas listas (por ejemplo, hay nueve números entre 1.42 y 1.43 o hay nueve números entre 2/5 y 3/5).
- *Finite*: Estudiantes que especificaron otros números incluidos entre los números dados.
- *Rest*: Estudiantes que especificaron otros números no incluidos entre los números dados.
- *Blank*: Respuestas en blanco.

Una vez determinadas las categorías, al igual que en el anterior tipo de ítem, las respuestas de los estudiantes fueron codificadas atendiendo a estas categorías. La Figura 4.3 muestra un ejemplo de la codificación de las respuestas de los estudiantes en estos ítems.

Para los ítems de elección múltiple, se identificaron nueve categorías:

- *Naïve*: Estudiantes que respondieron que no hay números entre los dos números dados (opción A).
- *Decimal Finite*: Estudiantes que respondieron que hay un número finito de números decimales entre los dos números dados (opción B).
- *Fraction Finite*: Estudiantes que respondieron que hay un número finito de fracciones entre los dos números dados (opción C).
- *Decimal Infinite*: Estudiantes que respondieron que hay infinitos números decimales entre los dos números dados (opción D).
- *Fraction Infinite*: Estudiantes que respondieron que hay infinitas fracciones entre los dos números dados (opción E).

| Estudiante | Curso | 5/9 y 5/6 | 2.3 y 2.6 | 1.42 y 1.43 | 2/5 y 4/5 | 1.9 y 1.40 | 2/5 y 3/5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Q004 | 5 | Rest | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Finite | Naïve consecutive |
| Q009 | 5 | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive |
| Q012 | 5 | Naive consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Finite consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive |
| Q016 | 5 | Blank | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Finite consecutive | Blank | Finite consecutive |
| Q019 | 5 | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Finite | Naïve consecutive | Finite |
| Q020 | 5 | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Finite consecutive |
| Q021 | 5 | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive |
| Q022 | 5 | Rest | Naïve consecutive | Difference | Naïve consecutive | Blank | Naïve consecutive |
| Q023 | 5 | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive |
| Q025 | 5 | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Finite consecutive | Naïve consecutive | Finite consecutive |
| Q028 | 5 | Rest | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive | Naïve consecutive |

*Figura 4.3*. Codificación de las respuestas de los estudiantes en los ítems de determinar la cantidad de números.

- *Infinite*: Estudiantes que respondieron que hay infinitos números que pueden representarse mediante varias representaciones diferentes, como números decimales y fracciones (opción F).
- *Finite*: Estudiantes que respondieron que hay un número finito de números entre los dos números dados, sin una distinción explícita entre fracciones o números decimales (opción G).
- *Difference*: Estudiantes que calcularon la diferencia entre los dos números dados (opción G).
- *Blank*: Respuestas en blanco.

Al igual que en los dos tipos de ítem anteriores, una vez determinadas las categorías, las respuestas de los estudiantes fueron codificadas atendiendo a estas categorías. La Figura 4.4 muestra un ejemplo de la codificación de las respuestas de los estudiantes en estos ítems.

| **Estudiante** | **Curso** | **1/6 y 4/6** | **3.72 y 3.73** | **0.7 y 0.9** | **1/3 y 2/3** |
|---|---|---|---|---|---|
| Q004 | 5 | Fraction Finite | Naïve | Decimal Finite | Fraction Finite |
| Q009 | 5 | Fraction Finite | Naïve | Decimal Finite | Fraction Finite |
| Q012 | 5 | Naïve | Decimal Infinite | Fraction Infinite | Fraction Finite |
| Q016 | 5 | Finite | Naïve | Decimal Finite | Finite |
| Q019 | 5 | Fraction Finite | Naïve | Decimal Finite | Fraction Finite |
| Q020 | 5 | Finite | Naïve | Decimal Finite | Finite |
| Q021 | 5 | Fraction Finite | Naïve | Decimal Finite | Naïve |

*Figura 4.4*. Codificación de las respuestas de los estudiantes en los ítems de elección múltiple.

En la segunda fase, con esta codificación, se realizó un Análisis de Conglomerados Bietápico con datos categóricos, con el fin de identificar grupos de estudiantes (perfiles) con patrones de respuesta cualitativamente similares (estudiantes con las mismas respuestas a los mismos ítems). Dada la complejidad de nuestro esquema de codificación, cabe esperar una gran diversidad de perfiles que representen estados intermedios en la comprensión de la densidad de los números racionales. Por ello, analizamos los datos por separado para cada tipo de ítem, y por cursos, obteniendo perfiles de estudiantes en 5º y 6º de educación primaria, en 1º y 2º de ESO, y 3º y 4º de ESO. El software estadístico utilizado fue SPSS versión 25.

Previo a realizar el Análisis de Conglomerados Bietápico, 309 estudiantes fueron eliminados porque resolvieron incorrectamente al menos tres de los cuatro ítems congruentes de escribir un número (Tabla 4.1). Por ejemplo, estos estudiantes no fueron capaces de escribir un número entre 5.3 y 5.8. Consideramos que, si los estudiantes se equivocan en estos ítems, no tenemos suficientes evidencias de que tengan un conocimiento básico sobre los números racionales, o de que hayan entendido correctamente los ítems, por lo que tiene poco sentido investigar sus respuestas en el resto de ítems. Por lo tanto, los participantes de este estudio fueron finalmente 953 estudiantes distribuidos en 5º de educación primaria (*n* = 115), 6º de educación primaria (*n* = 139), 1º de ESO (*n* = 162), 2º de ESO (*n* = 173), 3º de ESO (*n* = 174), y 4º de ESO (*n* = 190); y los ítems fueron 13, pues se eliminaron los cuatro ítems congruentes de escribir un número.

## 4.3. RESULTADOS

Los resultados de este estudio se dividen en dos secciones. En primer lugar, determinamos el número de clústeres (perfiles) en cada tipo de ítem, y posteriormente los describimos. En segundo lugar, analizamos la evolución de estos perfiles desde 5º de educación primaria hasta el final de la educación secundaria (4º de ESO).

### 4.3.1. Determinación del número de clústeres (perfiles) y descripción en cada tipo de ítem

#### *4.3.1.1. Perfiles en ítems de escribir un número*

En 5º y 6º de educación primaria, la solución de cinco clústeres (perfiles) proporcionó la mejor descripción de las respuestas de los estudiantes. En esta decisión se tuvo en cuenta un bajo valor del BIC (Tabla 4.5), y la interpretación de la Figura 4.5, que muestra las características de los clústeres. En el eje X se representan los tres ítems, y en el eje Y se representan las frecuencias porcentuales de las categorías más empleadas por los estudiantes, identificadas en el análisis inductivo.

Tabla 4.5

*Medidas de ajuste de la solución de cuatro a siete clústeres en 5º y 6º de educación primaria*

| Número de clústeres | Criterio bayesiano de Schwarz (BIC) | Cambio BIC | Razón de cambios BIC | Razón de medidas de distancia |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3732.061 | -57.086 | .149 | 1.191 |
| 5 | 3716.164 | -15.897 | .042 | 1.476 |
| 6 | 3769.717 | 53.552 | -.140 | 1.042 |
| 7 | 3829.178 | 59.461 | -.155 | 1.152 |

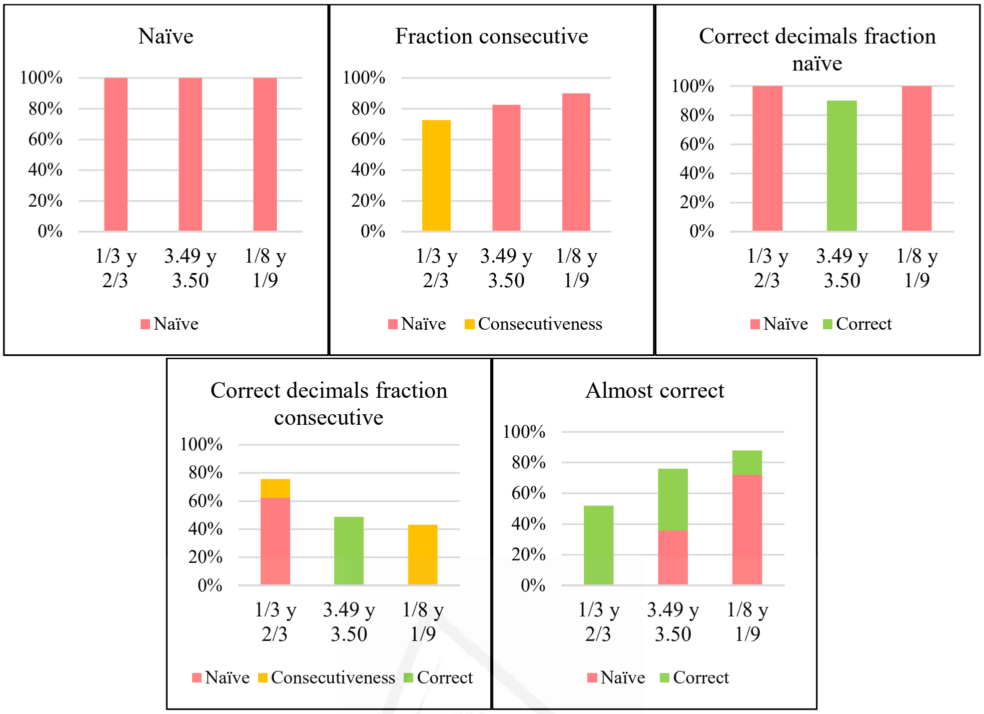



*Figura 4.5*. Características de los clústeres en ítems de escribir un número en 5º y 6º de educación primaria.

Las características de los perfiles identificados son las siguientes:

- *Naïve*: Estudiantes que consideraron que es imposible escribir un número entre dos números racionales pseudo-consecutivos.
- *Fraction consecutive*: Estudiantes que consideraron que es imposible escribir un número entre dos números racionales pseudo-consecutivos. Pero en fracciones con el mismo denominador (1/3 y 2/3), consideraron que podría haber otros números, aunque evidenciaron una idea incorrecta de "siguiente número". Es decir, 1/4, 1/5, 1/6....
- *Correct decimals fraction naïve*: Estudiantes que escribieron correctamente un número entre dos números decimales pseudo-consecutivos, pero consideraron que es imposible escribir un número entre dos fracciones pseudo-consecutivas.
- *Correct decimals fraction consecutive*: Estudiantes que escribieron correctamente un número entre dos números decimales pseudo-consecutivos. En fracciones, consideraron que es imposible escribir un número (naïve), con la excepción de algunos estudiantes que respondieron utilizando una idea incorrecta de "siguiente número". Es decir, entre 1/3 y 2/3 respondieron 1/4, 1/5, 1/6..., y entre 1/8 y 1/9 respondieron 2/8, 3/8, 4/8....

- *Almost correct*: Estudiantes que escribieron correctamente un número entre dos números decimales pseudo-consecutivos. En fracciones, escribieron correctamente un número entre dos fracciones pseudo-consecutivas con el mismo denominador (1/3 y 2/3), pero en fracciones con el mismo numerador (1/8 y 1/9), consideraron que es imposible escribir un número.

En 1º y 2º de ESO, se han determinado cinco clústeres (perfiles) de estudiantes. En esta decisión se tuvo en cuenta un bajo valor del BIC (Tabla 4.6), y la interpretación de la Figura 4.6, que muestra las características de los clústeres. Los perfiles identificados son los mismos que en 5º y 6º de educación primaria.

Tabla 4.6

*Medidas de ajuste de la solución de cuatro a siete clústeres en 1º y 2º de ESO*

| **Número de clústeres** | **Criterio bayesiano de Schwarz (BIC)** | **Cambio BIC** | **Razón de cambios BIC** | **Razón de medidas de distancia** |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 4371.346 | -139.507 | .119 | 1.400 |
| 5 | 4331.437 | -39.909 | .034 | 1.202 |
| 6 | 4333.428 | 1.991 | -.002 | 1.248 |
| 7 | 4376.646 | 43.218 | -.037 | 1.034 |

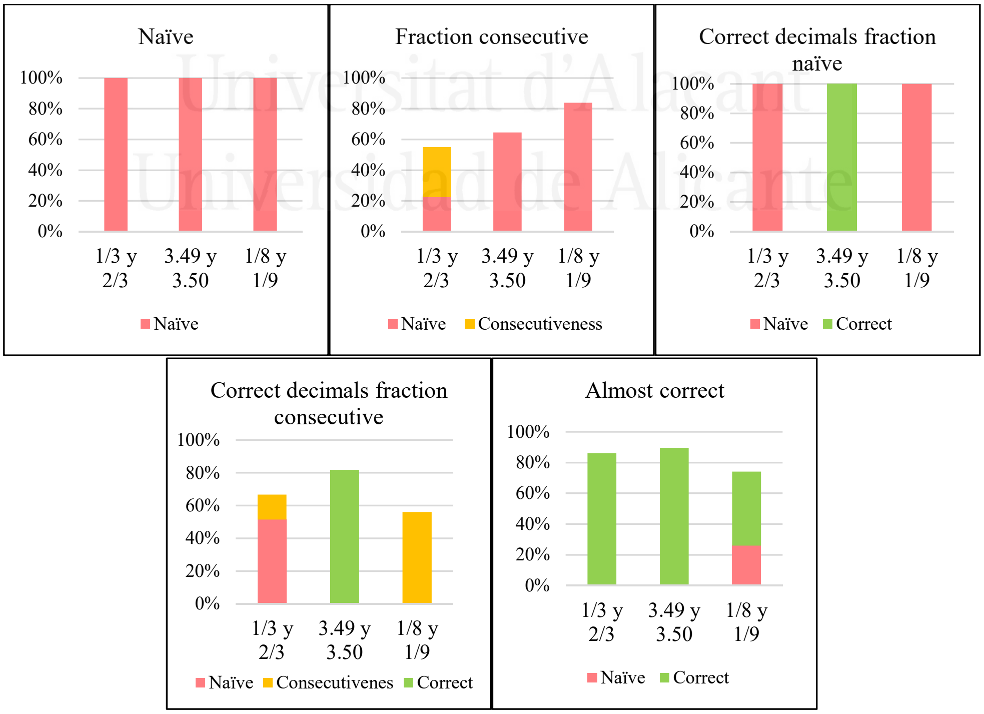



*Figura 4.6*. Características de los clústeres en ítems de escribir un número en 1º y 2º de ESO.

En 3º y 4º de ESO, se han determinado cinco clústeres (perfiles) de estudiantes. En esta decisión se tuvo también en cuenta un bajo valor del BIC (Tabla 4.7), y la interpretación de la Figura 4.7, que muestra las características de los clústeres.

Tabla 4.7

*Medidas de ajuste de la solución de cuatro a siete clústeres en 3º y 4º de ESO*

| Número de clústeres | Criterio bayesiano de Schwarz (BIC) | Cambio BIC | Razón de cambios BIC | Razón de medidas de distancia |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3433.072 | -201.025 | .098 | 1.372 |
| 5 | 3342.558 | -90.514 | .044 | 1.730 |
| 6 | 3377.299 | 34.740 | -.017 | 1.037 |
| 7 | 3418.234 | 40.935 | -.020 | 1.066 |

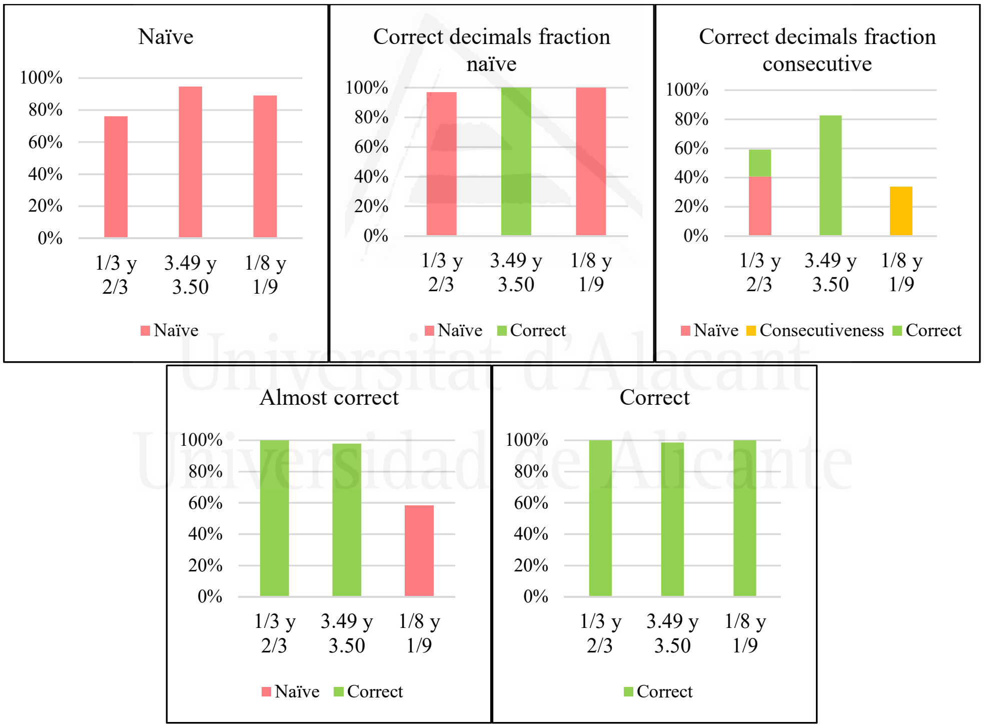





*Figura 4.7*. Características de los clústeres en ítems de escribir un número en 3º y 4º de ESO.

En estos cursos no se identificó el perfil *Fraction consecutive*, pero identificamos un nuevo perfil:

- *Correct*: Estudiantes que escribieron correctamente un número entre dos números racionales pseudo-consecutivos.

### *4.3.1.2. Perfiles en ítems de determinar la cantidad de números*

En 5º y 6º de educación primaria, se han determinado cinco clústeres (perfiles) de estudiantes. En esta decisión se tuvo en cuenta un bajo valor del BIC (Tabla 4.8), y la interpretación de la Figura 4.8, que muestra las características de los clústeres. En el eje X se representan los seis ítems, y en el eje Y se representan las frecuencias porcentuales de las categorías más empleadas por los estudiantes, identificadas en el análisis inductivo.

Tabla 4.8

*Medidas de ajuste de la solución de cuatro a siete clústeres en 5º y 6º de educación primaria*

| Número de clústeres | Criterio bayesiano de Schwarz (BIC) | Cambio BIC | Razón de cambios BIC | Razón de medidas de distancia |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3732.061 | -57.086 | .149 | 1.191 |
| 5 | 3716.164 | -15.897 | .042 | 1.476 |
| 6 | 3769.717 | 53.552 | -.140 | 1.042 |
| 7 | 3829.178 | 59.461 | -.155 | 1.152 |

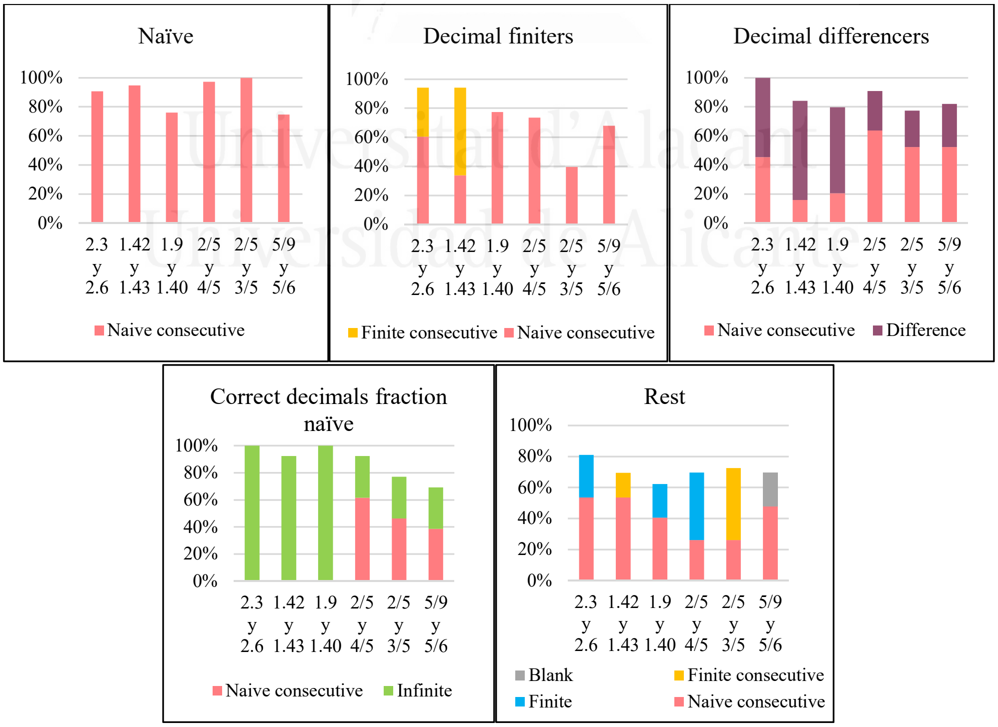



*Figura 4.8*. Características de los clústeres en ítems de determinar la cantidad de números en 5º y 6º de educación primaria.

Las características de los perfiles identificados son las siguientes:

- *Naïve*: Estudiantes que consideraron que no hay ningún número entre dos números racionales pseudo-consecutivos, y que hay un número finito de números entre dos números racionales no pseudo-consecutivos.
- *Decimal finiters*: Estudiantes que consideraron que hay un número finito de números entre dos números decimales pseudo-consecutivos (1.42 y 1.43) y no pseudo-consecutivos (2.3 y 2.6). Sin embargo, hay un subgrupo de estudiantes que todavía considera que entre dos números decimales pseudo-consecutivos no hay ningún número. En fracciones, consideraron que no hay ningún número entre dos fracciones pseudo-consecutivas y que hay un número finito de números entre dos fracciones no pseudo-consecutivas.
- *Decimal differencers*: Estudiantes que calcularon la diferencia entre dos números decimales, pero consideraron que no hay ningún número entre dos fracciones pseudo-consecutivas, y hay un número finito de números entre dos fracciones no pseudo-consecutivas. Un subgrupo de estudiantes también calculó la diferencia en fracciones.
- *Correct decimals fraction naïve*: Estudiantes que consideraron que hay un número infinito de números entre dos números decimales, pero que no hay ningún número entre dos fracciones pseudo-consecutivas, y un número finito de números entre dos fracciones no pseudo-consecutivas. Sin embargo, hay un subgrupo de estudiantes que reconocieron que hay un número infinito de números entre dos fracciones.
- *Rest*: Estudiantes con un éxito generalmente bajo en todos los ítems. No se pudo identificar ningún patrón de resolución en sus respuestas.

En 1º y 2º de ESO, se han determinado seis clústeres (perfiles) de estudiantes. En esta decisión se tuvo en cuenta un bajo valor del BIC (Tabla 4.9), y la interpretación de la Figura 4.9, que muestra las características de los clústeres.

Tabla 4.9

*Medidas de ajuste de la solución de cuatro a siete clústeres en 1º y 2º de ESO*

| **Número de clústeres** | **Criterio bayesiano de Schwarz (BIC)** | **Cambio BIC** | **Razón de cambios BIC** | **Razón de medidas de distancia** |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 4371.346 | -139.507 | .119 | 1.400 |
| 5 | 4331.437 | -39.909 | .034 | 1.202 |
| 6 | 4333.428 | 1.991 | -.002 | 1.248 |
| 7 | 4376.646 | 43.218 | -.037 | 1.034 |

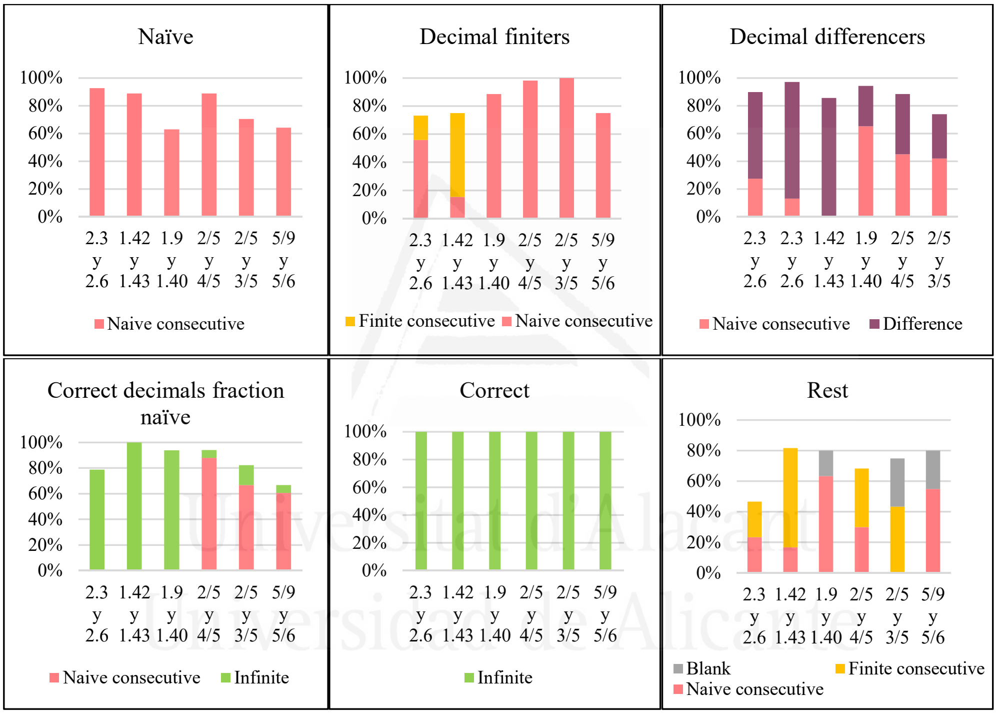



*Figura 4.9*. Características de los clústeres en ítems de determinar la cantidad de números en 1º y 2º de ESO.

En estos cursos se identificaron los mismos perfiles que en 5º y 6º de educación primaria, e identificamos un nuevo perfil:

- *Correct*: Estudiantes que consideraron que hay un número infinito de números entre dos fracciones y entre dos números decimales.

En 3º y 4º de ESO, se han determinado seis clústeres (perfiles) de estudiantes. En esta decisión, al igual que en los anteriores, se tuvo en cuenta un bajo valor del BIC (Tabla 4.10), y la interpretación de la Figura 4.10, que muestra las características de los clústeres.

Tabla 4.10

*Medidas de ajuste de la solución de cuatro a siete clústeres en 3º y 4º de ESO*

| **Número de clústeres** | **Criterio bayesiano de Schwarz (BIC)** | **Cambio BIC** | **Razón de cambios BIC** | **Razón de medidas de distancia** |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3433.072 | -201.025 | .098 | 1.372 |
| 5 | 3342.558 | -90.514 | .044 | 1.730 |
| 6 | 3377.299 | 34.740 | -.017 | 1.037 |
| 7 | 3418.234 | 40.935 | -.020 | 1.066 |

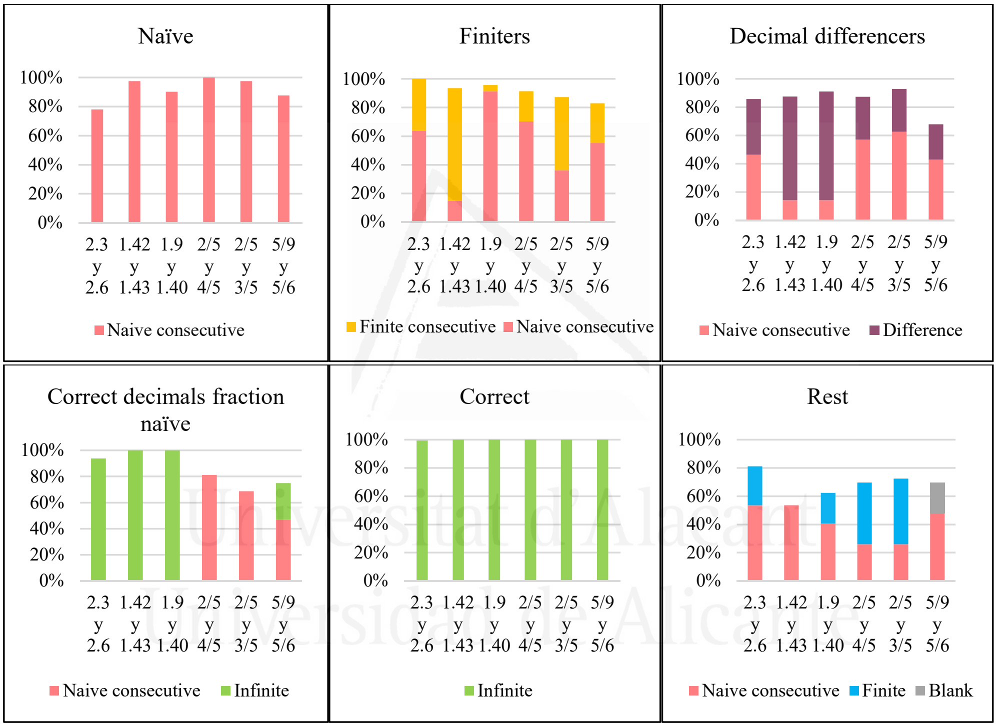



*Figura 4.10*. Características de los clústeres en ítems de determinar la cantidad de números en 3º y 4º de ESO.

En estos cursos no se identificó el perfil *Decimal finiters*, pero identificamos un nuevo perfil:

- *Finiters*: Estudiantes que consideraron que hay un número finito de números entre dos números decimales y entre dos fracciones, sean números pseudo-consecutivos o no pseudo-consecutivos.

*4.3.1.3. Perfiles en ítems de elección múltiple*

En 5º y 6º de educación primaria, se han determinado cinco clústeres (perfiles) de estudiantes. En esta decisión se tuvo en cuenta un bajo valor del BIC (Tabla 4.11), y la interpretación de la Figura 4.11, que muestra las características de los clústeres. En el eje X están representados los cuatro ítems, y en el eje Y se representan las frecuencias porcentuales de las categorías más empleadas por los estudiantes, identificadas en el análisis inductivo.

Tabla 4.11

*Medidas de ajuste de la solución de cuatro a siete clústeres en 5º y 6º de educación primaria*

| Número de clústeres | Criterio bayesiano de Schwarz (BIC) | Cambio BIC | Razón de cambios BIC | Razón de medidas de distancia |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 2734.588 | -57.365 | .328 | 1.515 |
| 5 | 2756.982 | 22.394 | -.128 | 1.155 |
| 6 | 2800.187 | 43.205 | -.247 | 1.139 |
| 7 | 2859.753 | 59.565 | -.341 | 1.018 |

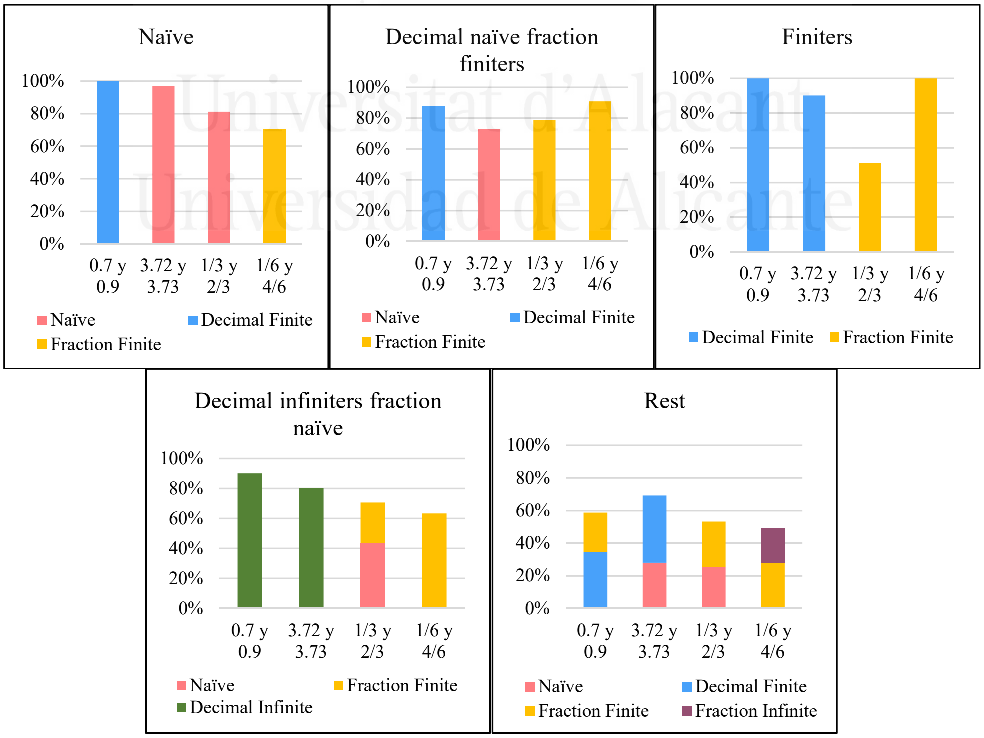



*Figura 4.11*. Características de los clústeres en ítems de elección múltiple en 5º y 6º de educación primaria.

Las características de los perfiles identificados son las siguientes:

- *Naïve*: Estudiantes que consideraron que no hay ningún número entre dos números racionales pseudo-consecutivos, y que hay un número finito de números entre dos números racionales no pseudo-consecutivos.
- *Decimal naïve fraction finiters*: Estudiantes que consideraron que no hay ningún número entre dos números decimales pseudo-consecutivos, y que hay un número finito de números decimales entre dos números decimales no pseudo-consecutivos. En fracciones, consideraron que hay un número finito de fracciones entre dos fracciones.
- *Finiters*: Estudiantes que consideraron que hay un número finito de números entre dos fracciones y entre dos números decimales.
- *Decimal infiniters fraction naïve*: Estudiantes que consideraron que hay un número infinito de números decimales entre dos números decimales, pero en fracciones consideraron que no hay ningún número entre dos fracciones pseudo-consecutivas, y un número finito de fracciones entre dos fracciones no pseudo-consecutivas. Un subgrupo de estudiantes reconoció que hay un número finito de fracciones entre dos fracciones pseudo-consecutivas.
- *Rest*: Estudiantes con un éxito generalmente bajo en todos los ítems. No se pudo identificar ningún patrón de resolución en sus respuestas.

En 1º y 2º de ESO, se han determinado seis clústeres (perfiles) de estudiantes. En esta decisión se tuvo en cuenta un bajo valor del BIC (Tabla 4.12), y la interpretación de la Figura 4.12, que muestra las características de los clústeres.



Tabla 4.12

*Medidas de ajuste de la solución de cuatro a siete clústeres en 1º y 2º de ESO*

| **Número de clústeres** | **Criterio bayesiano de Schwarz (BIC)** | **Cambio BIC** | **Razón de cambios BIC** | **Razón de medidas de distancia** |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3525.842 | -83.838 | .163 | 1.094 |
| 5 | 3464.786 | -61.056 | .119 | 1.309 |
| 6 | 3460.695 | -4.091 | .008 | 1.050 |
| 7 | 3465.345 | 4.651 | -.009 | 1.169 |

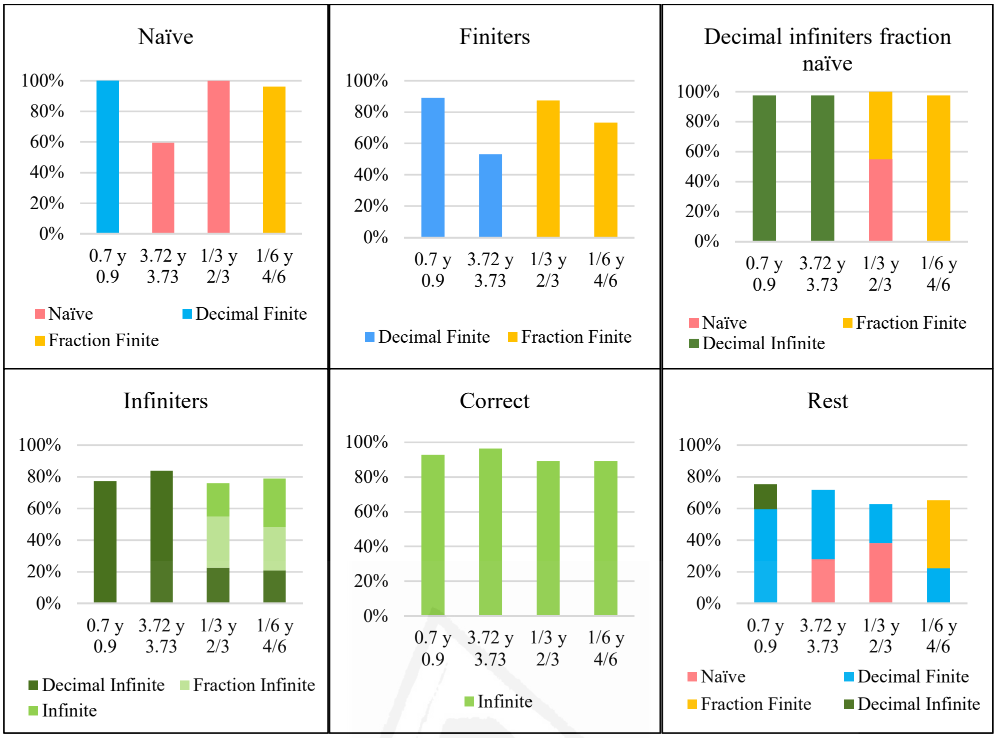



*Figura 4.12*. Características de los clústeres en ítems de elección múltiple en 1º y 2º de ESO.

En estos cursos no se obtuvo el perfil *Decimal naïve fraction finiters*, pero identificamos dos nuevos perfiles:

- *Infiniters*: Estudiantes que consideraron que hay un número infinito de números decimales entre dos números decimales. Entre fracciones, hubo estudiantes que consideraron que hay un número infinito de números decimales, estudiantes que consideraron que hay un número infinito de fracciones; y estudiantes que consideraron que hay un número infinito de números que pueden representarse mediante varias representaciones diferentes, como números decimales y fracciones.
- *Correct*: Estudiantes que consideraron que entre dos fracciones y dos números decimales hay un número infinito de números que pueden representarse mediante varias representaciones diferentes, como números decimales y fracciones.

En 3º y 4º de ESO, se han determinado seis clústeres (perfiles) de estudiantes. En esta decisión también se tuvo en cuenta un bajo valor del BIC (Tabla 4.13), y la interpretación de la Figura 4.13, que muestra las características de los clústeres.

Tabla 4.13

*Medidas de ajuste de la solución de cuatro a siete clústeres en 3º y 4º de ESO*

| Número de clústeres | Criterio bayesiano de Schwarz (BIC) | Cambio BIC | Razón de cambios BIC | Razón de medidas de distancia |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 2982.446 | -160.843 | .189 | 1.460 |
| 5 | 2926.111 | -56.335 | .066 | 1.122 |
| 6 | 2894.474 | -31.637 | .037 | 1.207 |
| 7 | 2897.583 | 3.109 | -.004 | 1.184 |

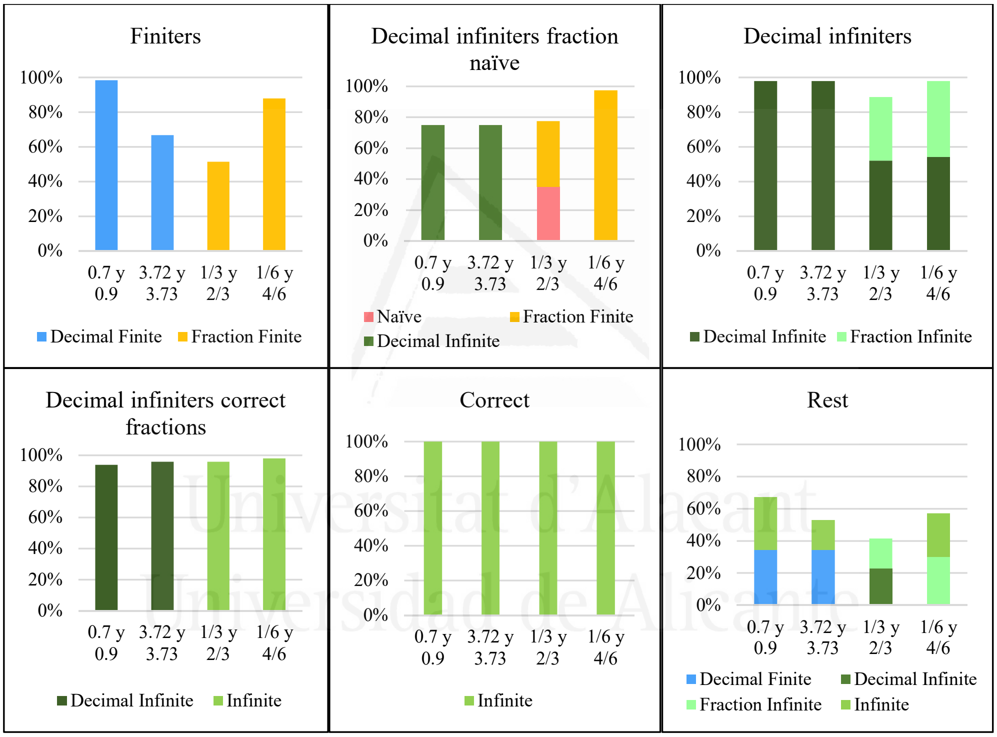



*Figura 4.13*. Características de los clústeres en ítems de elección múltiple en 3º y 4º de ESO.



En estos cursos no se obtuvieron los perfiles *Naïve* e *Infiniters*, pero identificamos dos nuevos perfiles:

- *Decimal infiniters*: Estudiantes que consideraron que hay un número infinito de números decimales entre dos fracciones y entre dos números decimales. Hay un subgrupo de estudiantes que consideraron que entre dos fracciones hay un número infinito de fracciones.

- *Decimal infiniters correct fractions*: Estudiantes que consideraron que hay un número infinito de números decimales entre dos números decimales. Entre dos fracciones, consideraron hay un número infinito de números que pueden representarse mediante varias representaciones diferentes, como números decimales y fracciones.

Los perfiles obtenidos para cada uno de los tres tipos de ítems muestran algunas similitudes. Por un lado, siempre hay un grupo de estudiantes que respondió basándose en el conocimiento del número natural (perfil *Naïve*). Estos estudiantes consideraron que no hay ningún número entre dos números racionales pseudo-consecutivos. Por otro lado, siempre hay un grupo de estudiantes que resolvió correctamente los ítems con números decimales, pero consideró que es imposible encontrar un número entre dos fracciones pseudo-consecutivas (el perfil *Correct decimals fraction naïve* en ítems de escribir un número y de determinar una cantidad de números, y el perfil *Decimal infiniters fraction naïve* en ítems de elección múltiple). Estos estudiantes identificaron la densidad en los números decimales, pero tuvieron dificultades en identificar la densidad en las fracciones. Por último, también aparece en los tres tipos de ítems un grupo de estudiantes que resolvió correctamente los ítems (perfil *Correct*).

Además, algunos perfiles muestran la transición desde un pensamiento centrado en el conocimiento del número natural hasta una correcta idea de densidad. En los ítems de escribir un número, esta transición se muestra a través de un pensamiento centrado en la idea de "*consecutiveness*". Esta idea corresponde con un pensamiento en el que se considera que entre las fracciones hay números, pero se usa una idea incorrecta de "siguiente número" (perfiles *Fraction consecutive* y *Correct decimals fraction consecutive*). En ítems de determinar la cantidad de números y en ítems de elección múltiple, esta transición se muestra en las ideas de "finiters" (perfiles *Finiters* y *Decimal finiters*) y "differencers" (perfil *Decimal differencers*). La idea de "finiters" corresponde con un pensamiento centrado en que hay una cantidad finita de números entre dos racionales dados, y la idea de "differencers" corresponde con un pensamiento centrado en el cálculo de la diferencia entre los números racionales dados. Además, en los ítems de elección múltiple, aparece la idea de "infiniters" (perfiles *Infiniters*, *Decimals infiniters* y *Decimals infiniters correct fractions*). Esta idea se centra en un pensamiento en el que se considera que hay infinitos números decimales entre números decimales o infinitas fracciones entre fracciones. Los estudiantes que se centraron en esta idea, tuvieron dificultades en reconocer que también podía haber infinitas fracciones entre dos números decimales o infinitos números decimales entre dos fracciones. Es decir, estos estudiantes todavía no consideraron que hay una cantidad infinita de números que pueden representarse mediante varias representaciones diferentes, como números decimales y fracciones.

### 4.3.2. Evolución de los perfiles por curso

La Figura 4.14 muestra la evolución de cada perfil desde 5° de educación primaria hasta 4º de ESO en los ítems de escribir un número. Los resultados muestran que el porcentaje de estudiantes en el perfil *Naïve* disminuyó a lo largo de los cursos (desde un 48.0% en 5º y 6º de educación primaria hasta un 25.0% en 3º y 4º de ESO). Sin embargo, este resultado también indica que la influencia del conocimiento del número natural en los números racionales parece que no desaparece en los últimos cursos de la educación secundaria, ni en fracciones ni en números decimales. El porcentaje del perfil *Fraction consecutive* también disminuyó a lo largo de los cursos (desde un 15.7% en 5º y 6º de educación primaria hasta un 9.3% en 1º y 2º de ESO), desapareciendo al final de la educación secundaria. Este perfil muestra que hubo un grupo de estudiantes que comenzaron a identificar números entre dos dados, pero se centraron en una idea incorrecta de “siguiente número”.

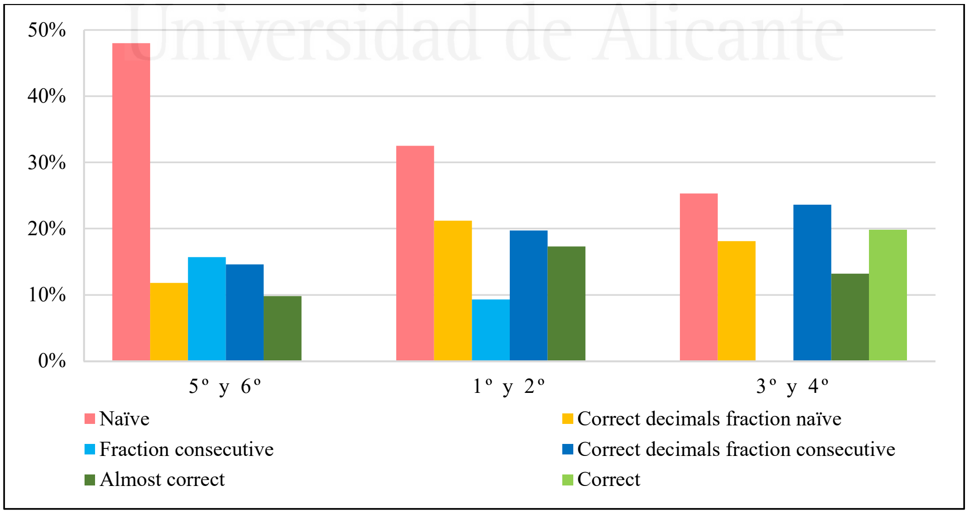



*Figura 4.14.* Evolución de los perfiles en ítems de escribir un número desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO.

El porcentaje del perfil *Correct decimals fraction naïve* aumentó desde 5º y 6º de educación primaria (18.8%) hasta 1º y 2º de ESO (21.2%), y luego disminuyó en 3º y 4º de ESO (18.1%), mientras que el porcentaje del perfil *Correct decimals fraction consecutive* aumentó a lo largo de los cursos (desde un 14.6% en 5º y 6º de educación primaria hasta un 23.6% en 3º y 4º de ESO). Ambos perfiles evidencian diferencias entre las representaciones del número racional. Estos grupos de estudiantes fueron capaces de escribir números entre dos números decimales dados, pero no fueron capaces de escribir números entre dos fracciones dadas, o proporcionaron fracciones usando una idea incorrecta de siguiente número.

Finalmente, el porcentaje del perfil *Almost correct* aumentó desde 5º y 6º de educación primaria (9.8%) hasta 1º y 2º de ESO (17.3%), y luego disminuyó en 3º y 4º de ESO (13.2%), cuando apareció el perfil *Correct* (19.8%). Este resultado muestra, en primer lugar, las diferencias entre los dos ítems con fracciones. Escribir un número entre dos fracciones con el mismo denominador (1/3 y 2/3) fue más fácil que escribir un número entre dos fracciones con el mismo numerador (1/8 y 1/9). En segundo lugar, el hecho de que al final de la educación secundaria (4º de ESO) solo un 20% de los estudiantes resolvieron correctamente estos ítems muestra las dificultades de estos estudiantes con la densidad de los números racionales.

La Figura 4.15 muestra la evolución de cada perfil desde 5° de educación primaria hasta 4º de ESO en los ítems de determinar la cantidad de números. Los resultados muestran que el porcentaje en el perfil *Naïve* disminuyó a lo largo de los cursos (desde un 29.5% en 5º y 6º de educación primaria hasta un 11.3% en 3º y 4º de ESO). Al igual que con el tipo de ítems de escribir un número, parece que la influencia del conocimiento del número natural no desaparece en los últimos cursos de la educación secundaria, ni en fracciones ni en números decimales. El porcentaje de estudiantes en el perfil *Decimal finiters* también disminuyó desde 5º y 6º de educación primaria (20.9%) hasta 1º y 2º de ESO (15.5%), y desapareció en 3º y 4º de ESO, donde fue reemplazado por el perfil *Finiters* (12.9%). Este resultado parece mostrar que los estudiantes comenzaron a reconocer que hay una cantidad finita de números, en primer lugar, entre dos números decimales, y posteriormente, entre dos fracciones.

La disminución del porcentaje de estudiantes en los perfiles *Naïve* y *Decimal finiters* correspondió con un aumento del porcentaje de estudiantes en el perfil *Correct* (desde un 0.0% en 5º y 6º de educación primaria hasta un 42.6% en 3º y 4º de ESO) y del perfil *Correct decimals fraction naïve* (desde un 5.1% en 5º y 6º de educación primaria hasta un 8.8% en 3º y 4º de ESO). Este resultado muestra de nuevo diferencias entre los distintos tipos de representación de los números racionales, ya que hubo un grupo de estudiantes que únicamente reconoció una cantidad infinita de números entre dos números decimales, teniendo dificultades con las fracciones. Por otro lado, aunque el porcentaje del perfil *Correct* en 3º y 4º de ESO no fue muy alto (42.6%), fue superior al de los ítems de escribir un número. Finalmente, los resultados con respecto al perfil *Decimal differencers* mostraron una tendencia constante a lo largo de los cursos (alrededor de un 20% de los estudiantes en todos los cursos).

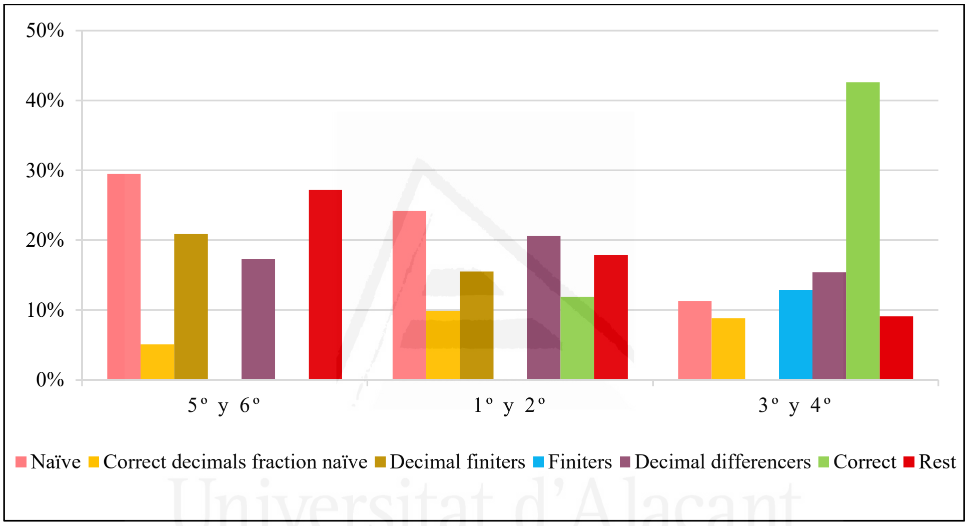



*Figura 4.15*. Evolución de los perfiles en ítems de determinar la cantidad de números desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO.



La Figura 4.16 muestra la evolución de cada perfil desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO en los ítems de elección múltiple. El porcentaje de estudiantes en el perfil *Naïve* disminuyó a lo largo de los cursos (desde un 25.2% en 5º y 6º de educación primaria hasta un 15.5% en 1º y 2º de ESO), desapareciendo en 3º y 4º de ESO (0.0%). Este resultado indica que la influencia del conocimiento del número natural parece que desaparece en los últimos cursos de la educación secundaria en este tipo de ítem. Además, el perfil *Decimal naïve fraction finiters* solo apareció en 5º y 6º de educación primaria (13.0%). El porcentaje de estudiantes del perfil *Finiters* se mantuvo contante a lo largo de los cursos (un 16.1% en 5º y 6º de educación primaria, un 19.1% en 1º y 2º de ESO, y un 18.1% en 3º y 4º de ESO). Este perfil parece mostrar la transición desde la idea centrada en el conocimiento del número natural (conjunto discreto) hasta una idea más avanzada (hay una cantidad finita de números).

El porcentaje de estudiantes del perfil *Decimal infniters fraction naïve* (estudiantes que reconocieron que había infinitos números, pero solo entre números decimales) disminuyó a lo largo de los cursos (desde un 16.1% en 5º y 6º de educación primaria hasta un 11.0% en 3º y 4º de ESO). Este resultado muestra de nuevo diferencias entre las representaciones de los números racionales, ya que parece ser que los estudiantes reconocieron antes la densidad en los números decimales que en las fracciones. Además, este perfil incluye un subgrupo de estudiantes que comenzaron a reconocer que hay un número finito de fracciones entre dos fracciones pseudo-consecutivas. Este resultado parece indicar que previo al reconocimiento de la densidad, los estudiantes parecen reconocer que hay una cantidad finita de números entre dos números dados.

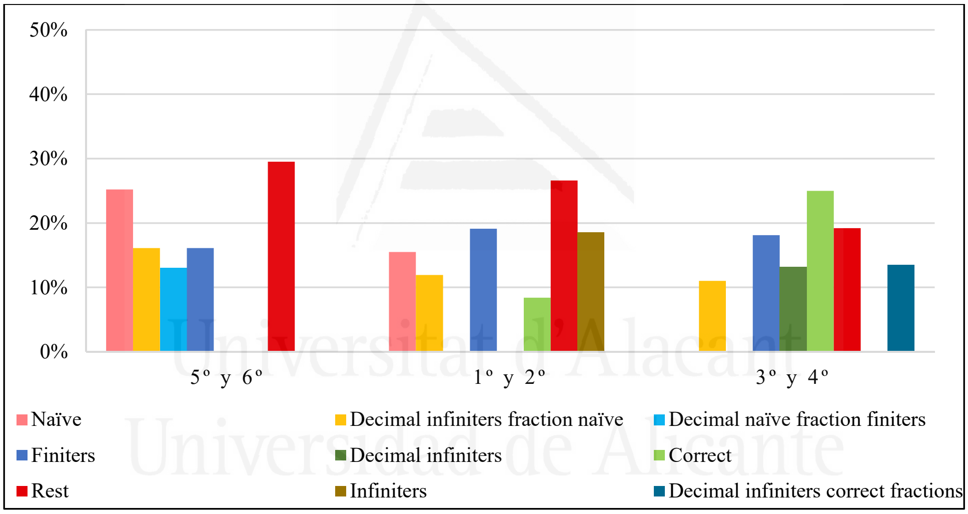



*Figura 4.16.* Evolución de los perfiles en ítems de elección múltiple desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO.



El perfil *Infiniters* apareció solo en 1º y 2º de ESO (18.5%). En 3º y 4º de ESO, aparecieron nuevos perfiles *Decimals infiniters* (13.2%) y *Decimals infiniters correct fractions* (13.5%). Esto muestra diferencias de nuevo con respecto a la representación del número racional. Mientras que los estudiantes fueron más capaces de considerar que entre números decimales hay un número infinito de números decimales, algunos de ellos consideraron que entre fracciones hay un número infinito de fracciones; otros que hay un número infinito de números decimales, y otros que hay un número infinito de números racionales que se pueden representar como fracciones y como números decimales.

Por último, el porcentaje de estudiantes del perfil *Correct* aumentó desde 1º y 2º de ESO (8.4%) hasta 3º y 4º de ESO (25.0%). Este resultado muestra que los estudiantes de educación primaria y secundaria tuvieron dificultades en reconocer la estructura densa de los números racionales, incluso cuando se les presentó la opción correcta (ítems de elección múltiple).

Considerando de manera conjunta la evolución de los perfiles de cada uno de los tres tipos de ítems, podemos destacar los siguientes resultados. En primer lugar, el perfil *Naïve* disminuyó a medida que los cursos aumentaron en los tres tipos de ítems. Sin embargo, este perfil solo desapareció en 3º y 4º de ESO en los ítems de elección múltiple (donde tenían la respuesta correcta como opción). Por lo tanto, los estudiantes todavía estaban influenciados por el conocimiento del número natural al final de la educación secundaria. Además, esta influencia fue mayor en ítems de escribir un número que en ítems de determinar la cantidad de números y en ítems de elección múltiple.

En segundo lugar, el perfil *Correct* no apareció en 5º y 6º de educación primaria. En 1º y 2º de ESO, los estudiantes no fueron capaces de escribir números entre fracciones y números decimales pseudo-consecutivos, pero comenzaron a reconocer que hay un número infinito de números entre ellos. En los ítems de elección múltiple, el porcentaje del perfil *Correct* es menor que en los ítems de determinar la cantidad de números, debido a que un grupo de estudiantes reconoció que había infinitos números, pero solo entre fracciones o entre números decimales (pero no en ambos). En 3º y 4º de ESO, algunos estudiantes escribieron un número entre dos números racionales dados, y también respondieron correctamente que hay un número infinito de números entre dos números racionales dados. En estos cursos, el porcentaje de estudiantes fue menor en ítems de escribir un número que en los otros dos.

Finalmente, la disminución del perfil *Naïve* correspondió con la aparición de otros perfiles (diferentes al *Correct*) que muestran otras formas de razonar previas a la idea de densidad. Es decir, muestra formas de razonar en la transición desde la idea de conjunto discreto hasta la idea de conjunto denso. Estas formas de razonar ya se han descrito en el anterior apartado.

# CAPÍTULO 5. ESTUDIO 3A

# CAPÍTULO 5. ESTUDIO 3A

En este capítulo se describe, en primer lugar, el instrumento de recogida de datos y el proceso de análisis seguido en el Estudio 3A (estudio cuantitativo en el dominio de la magnitud, González-Forte et al., 2019b). Finalmente, se describen los resultados obtenidos.



## 5.1. INSTRUMENTO

Los 1262 estudiantes resolvieron 31 ítems de comparación de fracciones y números decimales. De los 31 ítems, 25 ítems eran de comparación de fracciones y seis ítems eran de comparación de números decimales. El enunciado en cada uno de los ítems era el siguiente: *Rodea el número más grande en cada apartado. Si crees que los dos son igual de grandes, rodea los dos*.

De los 25 ítems de fracciones, 15 ítems eran congruentes y diez ítems eran incongruentes. En los ítems congruentes, la fracción mayor tiene un numerador y denominador mayor. Por lo tanto, un razonamiento basado en el conocimiento sobre la ordenación de los números naturales, afirmando que "la fracción es mayor porque el numerador y el denominador son mayores", permitiría resolver correctamente el ítem. En cambio, en los ítems incongruentes, la fracción mayor tiene un numerador y denominador menor, por lo que un razonamiento centrado en el conocimiento sobre el número natural no permitiría resolver el ítem correctamente.

De los 15 ítems congruentes, cinco ítems presentaban una comparación de dos fracciones con componentes comunes (fracciones con el mismo numerador o el mismo denominador) (Congruente CC), y diez ítems estaban formados por la comparación de dos fracciones sin componentes comunes (fracciones con diferentes numeradores y denominadores). Además, los diez ítems sin componentes comunes eran de dos tipos teniendo en cuenta la variable *gap* (diferencia entre numerador y denominador). De este modo, había cinco ítems donde la fracción mayor tenía menor diferencia entre numerador y denominador (ítems en los que un pensamiento centrado en diferencias- gap thinking llevaba a la respuesta correcta) (Congruente WCC GTc), y cinco ítems donde la fracción mayor tenía mayor diferencia entre numerador y denominador (ítems donde el gap thinking llevaba a la respuesta incorrecta) (Congruente WCC GTi).

De los diez ítems de comparación de fracciones incongruentes, cinco ítems tenían componentes comunes (Incongruente CC) y cinco ítems no tenían componentes comunes. Además, en estos últimos, el gap thinking llevaba a los estudiantes a una respuesta correcta, ya que la fracción mayor tenía menor diferencia entre numerador y denominador (Incongruente WCC GTc). No se incluyeron ítems incongruentes sin componentes comunes donde el gap thinking llevaba a la respuesta incorrecta (Incongruente WCC GTi), ya que es imposible diseñar parejas de fracciones que cumplan estas condiciones (a excepción de las fracciones impropias que no se utilizaron en esta investigación). La Tabla 5.1 muestra los ítems de comparación de fracciones utilizados.

Por tanto, en los ítems congruentes donde el gap thinking lleva a la respuesta correcta (ej. 5/8 vs. 2/7), tanto un razonamiento basado en el conocimiento del número natural "la fracción 5/8 es mayor porque 5 es mayor que 2 y 8 es mayor que 7" como un razonamiento basado en diferencias- gap thinking "la fracción 5/8 es mayor porque la diferencia entre 5 y 8 es 3 y la diferencia entre 2 y 7 es 4, por lo tanto, es menor" llevaría a una respuesta correcta.

En los ítems congruentes donde el gap thinking lleva a la respuesta incorrecta (ej. 1/3 vs. 5/8), un razonamiento basado en el conocimiento del número natural "5/8 es mayor porque 5 es mayor que 1 y 8 es mayor que 3", induciría a una respuesta correcta. Sin embargo, el uso del gap thinking "1/3 es mayor porque de 1 a 3 hay una diferencia de 2 y de 5 a 8 de 3", llevaría a una respuesta incorrecta.

Tabla 5.1

*Ítems de comparación de fracciones*

| | CC | WCC GTc | WCC GTi |
|---|---|---|---|
| **Congruente** | 1/7 vs. 3/7 | 5/8 vs. 2/7 | 1/3 vs. 5/8 |
| | 3/8 vs. 5/8 | 5/7 vs. 2/5 | 2/3 vs. 7/9[1] |
| | 4/9 vs. 7/9 | 3/7 vs. 7/9 | 4/7 vs. 1/3 |
| | 3/7 vs. 5/7 | 1/7 vs. 4/9 | 1/3 vs. 5/9 |
| | 2/5 vs. 4/5 | 7/9 vs. 4/7 | 7/9 vs. 2/3 |
| **Incongruente** | 3/8 vs. 3/4 | 4/7 vs. 3/4 | - |
| | 2/5 vs. 2/9 | 2/3 vs. 3/7 | - |
| | 1/7 vs. 1/4 | 5/9 vs. 2/3 | - |
| | 4/5 vs. 4/7 | 4/9 vs. 3/5 | - |
| | 5/6 vs. 5/9 | 4/5 vs. 5/8 | - |

Por último, en los ítems incongruentes donde el gap thinking conduce a la respuesta correcta (ej. 4/7 vs. 3/4), un razonamiento basado en el conocimiento del número natural (4/7 es mayor porque 4 es mayor que 3 y 7 es mayor que 4), llevaría a una respuesta incorrecta, pero el uso del gap thinking induciría a la respuesta correcta (3/4 es mayor porque de 3 a 4 hay una diferencia de 1 y de 4 a 7 hay una diferencia de 3).

Para el diseño de los ítems de comparación de números decimales, también se tuvo en cuenta la compatibilidad o no del ítem con el conocimiento del número natural. De este modo, se diseñaron tres ítems congruentes y tres ítems incongruentes. En los ítems congruentes, la parte decimal del número decimal mayor tiene mayor cantidad de dígitos (ej. 0.400 vs. 0.25). En estos ítems una comparación únicamente centrada en la parte decimal, tal y como si fuesen números naturales, conduciría a la obtención de una respuesta correcta, ya que, a mayor número de cifras en la parte decimal, mayor es el número "0.400 es mayor que 0.25 porque 400 es mayor que 25". Sin embargo, en los

[1] El ítem 2/3 vs. 7/9 aparece dos veces. Dado que los ítems se presentaron aleatoriamente en dos bloques separados y en ocho versiones con diferentes órdenes, parece imposible que los estudiantes se dieran cuenta de que este ítem aparece duplicado.

ítems incongruentes (ej. 0.36 vs. 0.5), un razonamiento centrado únicamente en la parte decimal conduciría a una respuesta incorrecta, ya que el número mayor tiene en la parte decimal la menor cantidad de cifras "0.36 es mayor que 0.5 porque 36 es mayor que 5". Además, se incluyó un ítem específico sobre el rol del cero (2.621 vs. 2.0621). Es un ítem incongruente, ya que un razonamiento centrado en el conocimiento sobre los números naturales "ambos números son iguales, ya que el 0 a la izquierda no tiene ningún valor" les conduciría a una respuesta incorrecta. La Tabla 5.2 muestra los ítems de comparación de números decimales.

Tabla 5.2

*Ítems de comparación de números decimales*

| **Congruente** | **Incongruente** |
|---|---|
| 0.400 vs. 0.25 | 0.36 vs. 0.5 |
| 4.4 vs. 4.50 | 0.3 vs. 0.30 |
| 5.3 vs. 5.7 | 2.621 vs. 2.0621 |

Con relación al formato de los ítems, en un primer recuadro se les presentaba el enunciado del ítem, y en un segundo recuadro tenían que resolver cada uno de los ítems. La Figura 5.1 muestra ejemplos de estos ítems.



**Rodea el número más grande en cada apartado. Si crees que los dos son igual de grandes, rodea los dos:**

a) 5/8 o 2/7
b) 1/3 o 5/8
c) 3/8 o 3/4
d) 5/7 o 2/5

**Rodea el número más grande en cada apartado. Si crees que los dos son igual de grandes, rodea los dos:**

a) 0’400 o 0’25
b) 0’36 o 0’5
c) 0’3 o 0’30

*Figura 5.1.* Ejemplos de ítems del cuestionario.

## 5.2. ANÁLISIS

El análisis de los datos en este dominio fue similar al del dominio de las operaciones aritméticas. En una primera fase, las respuestas de los estudiantes se codificaron en función de si la respuesta era correcta (1) o incorrecta (0). Para ello, cada ítem era una variable de manera que las respuestas de cada alumno a los ítems se registraban en vectores de 31 componentes formados por 0 o 1, dependiendo de si la respuesta era correcta o incorrecta, en cada uno de los ítems.

En la segunda fase, se analizaron los datos con el fin de encontrar patrones de respuestas entre estudiantes cualitativamente similares, llevando a cabo un Análisis de Conglomerados Bietápico. El software estadístico utilizado fue SPSS versión 25.

Para llevar a cabo el Análisis de Conglomerados Bietápico, se agruparon las 31 variables en siete tipos y se obtuvieron las medias:

- Ítems congruentes de fracciones con componentes comunes (*FCCC)*.
- Ítems incongruentes de fracciones con componentes comunes (*FICC*).
- Ítems congruentes de fracciones sin componentes comunes donde el gap thinking lleva a la respuesta correcta (*FCWCCGC)*.
- Ítems congruentes de fracciones sin componentes comunes donde el gap thinking lleva a la respuesta incorrecta (*FCWCCGI)*.
- Ítems incongruentes de fracciones sin componentes comunes donde el gap thinking lleva a la respuesta correcta (*FIWCCGC)*.
- Ítems congruentes de números decimales (*DC)*.
- Ítems incongruentes de números decimales (*DI)*.

La Figura 5.2 muestra un ejemplo del registro de medias obtenidas en los siete tipos de ítems.

| Estudiante | Curso | FCCC | FICC | FCWCCGC | FCWCCGI | FIWCCGC | DC | DI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Q001 | 5 | 1 | 0 | 0.8 | 0.8 | 0 | 1 | 0 |
| Q002 | 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0.67 |
| Q003 | 5 | 1 | 0.8 | 1 | 0.6 | 0.8 | 1 | 1 |
| Q004 | 5 | 0.8 | 0.2 | 0.4 | 0.4 | 0 | 0.67 | 0.67 |
| Q005 | 5 | 0.8 | 0 | 0.4 | 0.8 | 0 | 1 | 0.33 |
| Q006 | 5 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0.33 |
| Q007 | 5 | 0.8 | 0 | 0.6 | 0.8 | 0 | 1 | 0.33 |
| Q008 | 5 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0.33 |

*Figura 5.2*. Medias obtenidas en los siete tipos de ítems.

En la Tabla 5.3 se muestran los ítems que formaban parte de cada uno de estos tipos de variables.

Tabla 5.3

*Ítems clasificados por tipo en el Análisis de Conglomerados Bietápico*

| **Tipo** | **Ítems** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *FCCC* | 1/7 vs. 3/7 | 3/7 vs. 5/7 | 2/5 vs. 4/5 | 3/8 vs. 5/8 | 4/9 vs. 7/9 |
| *FICC* | 4/5 vs. 4/7 | 5/6 vs. 5/9 | 1/7 vs. 1/4 | 2/5 vs. 2/9 | 3/8 vs. 3/4 |
| *FCWCCGC* | 1/7 vs. 4/9 | 5/8 vs. 2/7 | 3/7 vs. 7/9 | 7/9 vs. 4/7 | 5/7 vs. 2/5 |
| *FCWCCGI* | 1/3 vs. 5/8 | 5/9 vs. 1/3 | 2/3 vs. 7/9 | 4/7 vs. 1/3 | 2/3 vs. 7/9 |
| *FIWCCGC* | 2/3 vs. 3/7 | 4/7 vs. 3/4 | 5/9 vs. 2/3 | 4/9 vs. 3/5 | 4/5 vs. 5/8 |
| *DC* | 5.3 vs. 5.7 | 4.4 vs. 4.50 | 0.400 vs. 0.25 | | |
| *DI* | 0.36 vs. 0.5 | 0.3 vs. 0.30 | 2.621 vs. 2.0621 | | |

Aunque se ha utilizado una codificación dicotómica de las respuestas para realizar el estudio (1 – correcto y 0 – incorrecto), el análisis clúster utilizando las medias de los siete tipos de ítems proporciona información sobre el tipo de razonamiento utilizado por los estudiantes. Por ejemplo, si un estudiante responde correctamente los tipos de ítems congruentes (FCCC, FCWCCGC, FCWCCGI, DC) pero resuelve incorrectamente los ítems incongruentes, podemos inferir que este estudiante usa un razonamiento basado en el conocimiento del número natural. O si un estudiante resuelve incorrectamente los ítems donde el gap thinking lleva a la respuesta incorrecta (FCWCCGI), pero resuelven correctamente el resto de ítems, podemos inferir que este estudiante usa un razonamiento basado en la diferencia entre numerador y denominador (gap thinking).

## 5.3. RESULTADOS

Los resultados de este estudio se dividen en tres secciones: en primer lugar, determinamos el número de clústeres (perfiles); en segundo lugar, describimos los perfiles obtenidos; y finalmente, analizamos la evolución de estos perfiles desde 5º de educación primaria hasta el final de la educación secundaria (4º de ESO).

### 5.3.1. Determinación del número de clústeres (perfiles)

Como resultado del Análisis de Conglomerados Bietápico, se han determinado seis clústeres (perfiles) de estudiantes. En esta decisión se tuvo en cuenta un bajo valor del BIC (Tabla 5.4), y la interpretación de la Figura 5.3, que muestra las características de los clústeres.

Tabla 5.4

*Medidas de ajuste de la solución de tres a siete clústeres*

| Número de clústeres | Criterio bayesiano de Schwarz (BIC) | Cambio BIC | Razón de cambios BIC | Razón de medidas de distancia |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4010.103 | -969.391 | .782 | 2.082 |
| 4 | 3596.556 | -413.547 | .333 | 1.587 |
| 5 | 3372.957 | -223.598 | .180 | 1.214 |
| 6 | 3206.450 | -166.507 | .134 | 1.271 |
| 7 | 3096.827 | -109.622 | .088 | 1.398 |

Esta figura muestra el porcentaje de éxito medio en los siete tipos de ítems de los estudiantes que formaban cada clúster, en la solución de cinco, seis y siete clústeres. El clúster adicional (representado con círculos) que apareció en la solución de seis clústeres, en comparación con la solución de cinco clústeres (Clúster 1 = 336), es interesante desde el punto de vista interpretativo. Este clúster permite diferenciar entre los estudiantes que se basan en el conocimiento sobre el número natural en fracciones pero no en números decimales (porcentaje de éxito medio en ítems incongruentes con fracciones: 12%, porcentaje de éxito medio en ítems incongruentes con números decimales: 89%) (Clúster 3 = 220), y los estudiantes que se centran en el conocimiento sobre el número natural tanto en fracciones como en números decimales (porcentaje de éxito medio en ítems incongruentes con fracciones: 5%, porcentaje de éxito medio en ítems incongruentes con números decimales: 33%) (Clúster 6 = 132).

Sin embargo, el perfil adicional que apareció en la solución de siete clústeres (representado con signos más), no es muy interesante desde el punto de vista interpretativo, en comparación con la solución de seis clústeres (Clúster 2 = 296). Únicamente hace una distinción entre un grupo de estudiantes con un bajo nivel de éxito en ítems de comparación de fracciones donde el gap thinking lleva a la respuesta incorrecta (Clúster 2 = 243), y un grupo con bajo nivel de éxito en esos ítems y también en los ítems de comparación de números decimales (Clúster 7 = 88).

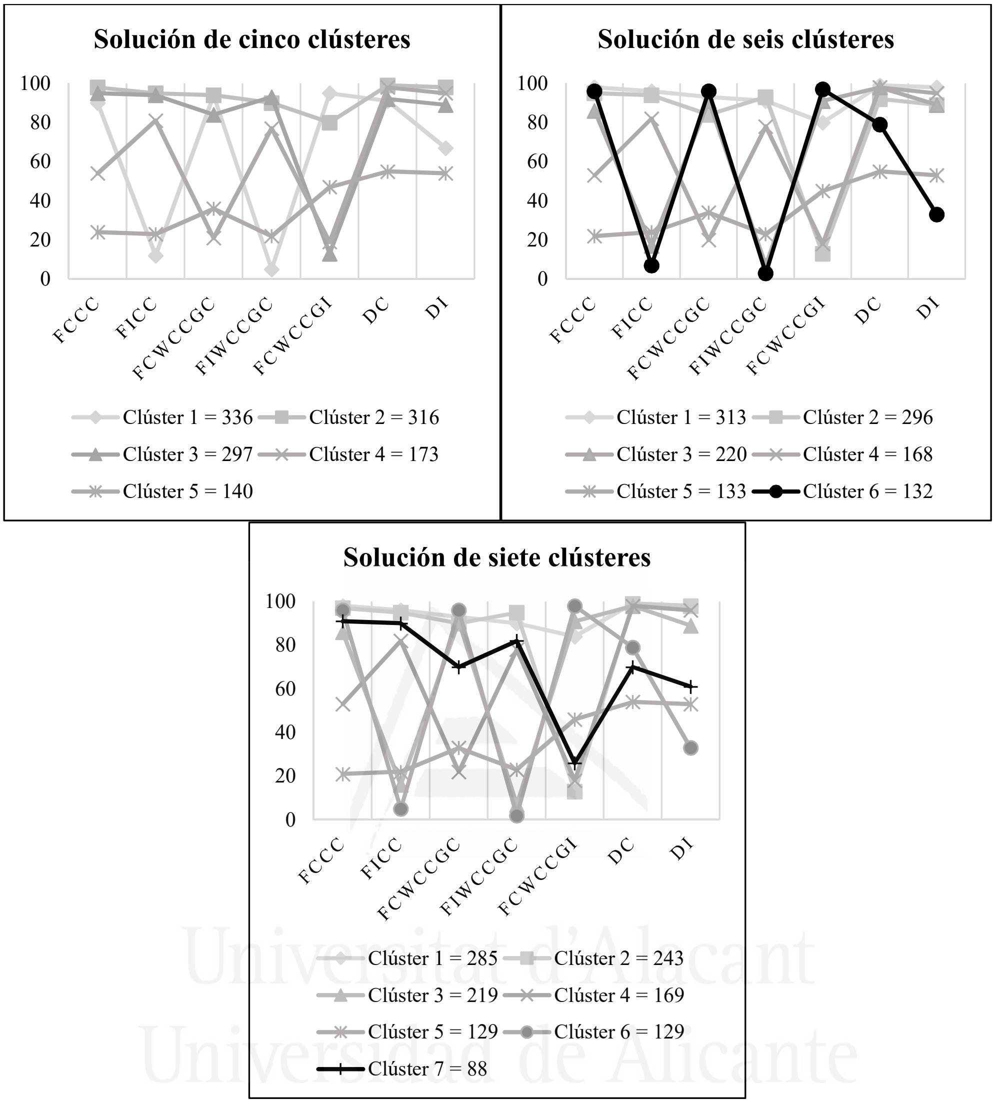





*Figura 5.3*. Características de los clústeres en las soluciones de cinco, seis y siete clústeres.

### 5.3.2. Características de los perfiles (clústeres) identificados

Con respecto a los perfiles identificados, los hemos nombrado *All Correct*, *Gap Thinker*, *Fraction NNB*, *Full NNB*, *Reverse Bias* y *Remainder*. La Figura 5.4 muestra las características de cada uno de los perfiles. En esta figura, *CC* corresponde a los ítems de comparación de fracciones con componentes comunes, *GTi* a los ítems de comparación de fracciones sin componentes comunes donde el gap thinking lleva a la respuesta incorrecta, *GTc* a los ítems de comparación de fracciones sin componentes comunes donde el gap thinking lleva a la respuesta correcta; y *Decimal* a los ítems con números decimales.

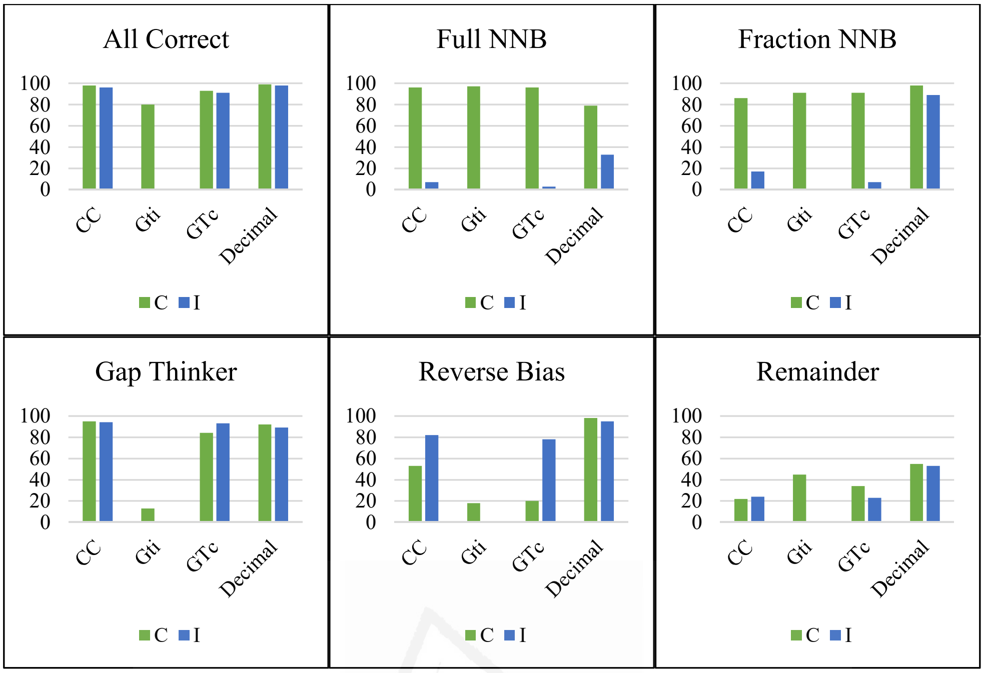



*Figura 5.4.* Características de los perfiles.

A continuación, explicamos las características de los seis perfiles y mostramos el porcentaje de estudiantes en cada perfil.

- *All Correct* (24.8%, $n$ = 313): Estudiantes que respondieron correctamente todos o casi todos los ítems (más del 90%), tanto con fracciones como con números decimales.
- *Full NNB* (10.5%, $n$ = 132): Estudiantes que resolvieron incorrectamente casi todos los ítems incongruentes, tanto con fracciones como con números decimales. Sin embargo, tuvieron un porcentaje de éxito muy alto en los ítems congruentes. Se infiere que estos estudiantes resolvieron los ítems de comparación de fracciones basándose en la ordenación de los números naturales y los ítems de comparación de números decimales basándose en el número de dígitos de la parte decimal.
- *Fraction NNB* (17.4%, $n$ = 220): Estudiantes que resolvieron incorrectamente los ítems de comparación de fracciones incongruentes y resolvieron correctamente los ítems de comparación de fracciones congruentes. Sin embargo, resolvieron correctamente los ítems congruentes e incongruentes con números decimales. Se infiere que estos estudiantes usaron su conocimiento sobre los números naturales únicamente para comparar fracciones.

- *Gap Thinker* (23.5%, *n* = 296): Estudiantes que resolvieron incorrectamente solo los ítems de comparación de fracciones en los que el gap thinking llevaba a la respuesta incorrecta, resolviendo correctamente el resto de ítems (ítems congruentes e incongruentes con componentes comunes y sin componentes comunes). Se puede deducir que estos estudiantes no basaron sus respuestas en el orden de los números naturales para comparar fracciones, sino que se basaron en la diferencia entre el numerador y el denominador (cuanto menor es la diferencia, mayor es la fracción). En los ítems con números decimales, tuvieron un alto porcentaje de éxito tanto en ítems congruentes como en incongruentes.
- *Reverse Bias* (13.3%, *n* = 168): Estudiantes que resolvieron incorrectamente los ítems de comparación de fracciones congruentes, donde el conocimiento sobre el orden de los números naturales lleva a la respuesta correcta, y resolvieron correctamente los ítems incongruentes. Se infiere que estos estudiantes usaron un razonamiento contrario a la ordenación del número natural, es decir, consideraron que la fracción mayor es aquella con el numerador y denominador menores. En los ítems con números decimales, tuvieron un alto porcentaje de éxito tanto en ítems congruentes como en incongruentes.
- *Remainder* (10.5%, *n* = 133): Estudiantes con un éxito generalmente bajo en todos los ítems. No se pudo identificar ningún patrón de resolución en sus respuestas.



### 5.3.3. Evolución de los perfiles por curso

En términos de evolución (Figura 5.5), los resultados muestran que el porcentaje de estudiantes en el perfil *All Correct* aumentó a lo largo de los cursos (desde un 10.7% en 5º de educación primaria hasta un 38.6% en 4º de ESO). Por lo tanto, los estudiantes de los últimos cursos de educación secundaria obtuvieron mejores resultados en ítems de comparación de fracciones y números decimales. Sin embargo, es destacable que un 60% de los alumnos de 4º de ESO aproximadamente todavía no estaban en este perfil.

El porcentaje de estudiantes del perfil *Full NNB* fue mayor en los primeros cursos, y disminuyó hasta casi desaparecer al final de la educación secundaria (21.5% en 5º de educación primaria y 3.3% en 4º de ESO). El porcentaje del perfil *Fraction NNB* también fue menor en los últimos cursos, pero no desapareció al final de la educación secundaria (26.8% en 5º de educación primaria y 10.0% en 4º de ESO). Esto nos lleva a subrayar que al final de la educación secundaria, la influencia del conocimiento sobre el número natural en ítems de números decimales casi desaparece, aunque todavía aparece este sesgo en los ítems con fracciones.

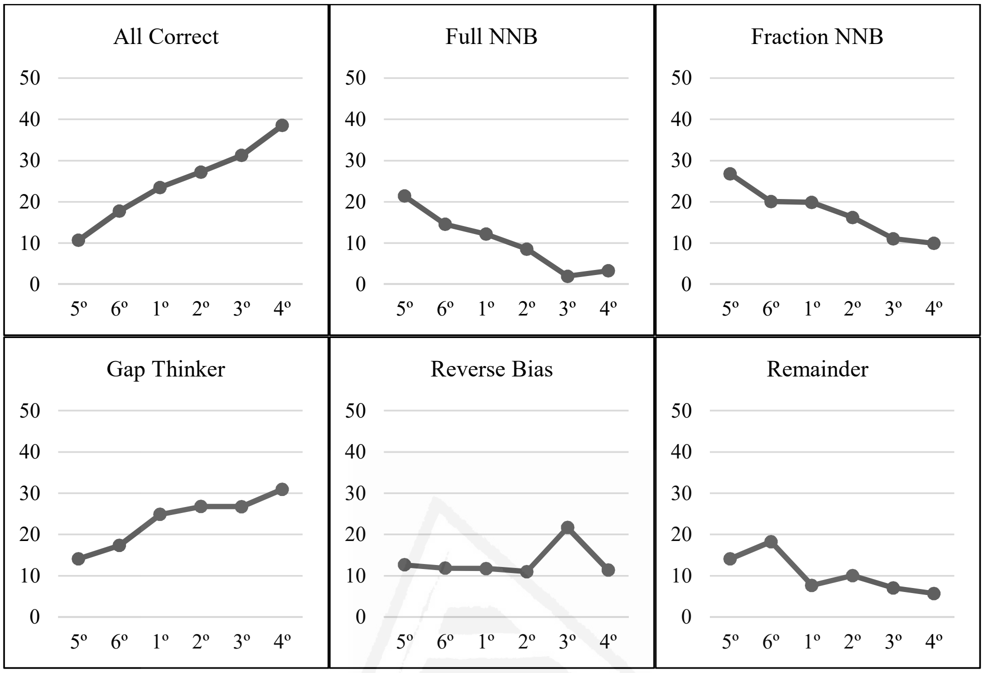



*Figura 5.5*. Evolución de los perfiles desde 5º de educación primaria hasta 4º de ESO.

El porcentaje de estudiantes del perfil *Gap Thinker* aumentó a lo largo de los cursos (desde un 14.1% en 5º de educación primaria hasta un 31.0% en 4º de ESO). A partir de 2º de ESO, el gap thinking se usó con más frecuencia que el razonamiento centrado en el orden de los números naturales. Este resultado parece mostrar que en los últimos años de la educación secundaria (2º, 3º y 4º de ESO), los estudiantes confiaron en la idea de que la diferencia (*gap*) entre el numerador y el denominador determinaba la magnitud de una fracción.

Con respecto al perfil *Reverse Bias*, los resultados mostraron una tendencia constante (aproximadamente el 10% de los estudiantes en cada curso usaron este razonamiento), excepto en 3º de ESO, donde el porcentaje fue considerablemente más alto que en los otros cursos (21.7%). Por lo tanto, parece que el razonamiento "si el denominador es menor, la fracción es mayor", estuvo presente en todos los cursos. Finalmente, el porcentaje de estudiantes del perfil *Remainder* fue bajo en todos los cursos, disminuyendo en los últimos cursos de la educación secundaria (14.1% en 5º de educación primaria y 5.7% en 4º de ESO).

Estos resultados indican que, aunque el uso de un razonamiento basado en el orden de los números naturales fue menor en los últimos años de la educación secundaria, y el porcentaje de estudiantes del perfil *All Correct* fue mayor, también hubo un uso constante del razonamiento reverse bias durante todos los cursos (con un aumento entre 2º y 3º de ESO), y un mayor uso de un razonamiento basado en la diferencia entre numerador y denominador (gap thinking) durante los últimos cursos de educación secundaria.

# CAPÍTULO 6. ESTUDIO 3B

# CAPÍTULO 6. ESTUDIO 3B

En este capítulo se describen los participantes, el instrumento de recogida de datos y el proceso de análisis seguido en el Estudio 3B (González-Forte et al., 2019c, 2019d). El objetivo de este estudio es aportar evidencias cualitativas a las inferencias realizadas (distintos tipos de razonamientos- perfiles identificados) en el estudio cuantitativo del dominio de la magnitud (Estudio 3A). Finalmente, se describen los resultados obtenidos.

## 6.1. SELECCIÓN DE LOS PARTICIPANTES

Los participantes fueron 52 estudiantes de 1º de ESO, pertenecientes a diversos perfiles obtenidos en el estudio cuantitativo: 15 estudiantes pertenecientes al perfil *All Correct*, 14 estudiantes pertenecientes al perfil *Gap Thinker*, 15 estudiantes pertenecientes al perfil *NNB*[1], y 8 estudiantes pertenecientes al perfil *Reverse Bias*. Los estudiantes fueron seleccionados del primer curso de educación secundaria porque se trataba del curso con más estudiantes por perfil.

[1] El perfil *NNB* está formado por estudiantes de los perfiles *Fraction NNB* y *Full NNB*.

## 6.2. INSTRUMENTO: ENTREVISTA

La entrevista se dividía en dos partes. La Parte 1 comenzaba con la siguiente introducción:

*Buenos días. ¿Te acuerdas del cuestionario que respondiste sobre fracciones y decimales? Pues ahora quiero aprender más acerca de cómo piensas sobre las fracciones. Para ello, en primer lugar, te voy a ir enseñando algunas tareas del cuestionario. Me gustaría que me explicaras cómo identificaste la fracción más grande, en qué te fijaste, por qué no elegiste la otra fracción, etc. Después, me gustaría que marcases en la siguiente escala cuánto de seguro estás de que la respuesta marcada es la correcta.*

Posteriormente, el investigador mostraba al estudiante las respuestas que había dado a cuatro ítems de comparación de fracciones del cuestionario resuelto previamente. El estudiante, tras observar su respuesta, debía de explicar cómo había obtenido la fracción mayor. Si por el contrario consideraba que se había equivocado, podía cambiar su respuesta, justificando su razonamiento.

Los ítems de comparación de fracciones utilizados para la entrevista fueron: 2/3 vs. 7/9, 4/7 vs. 1/3, 4/5 vs. 5/8 y 2/3 vs. 3/7. Los ítems 2/3 vs. 7/9 y 4/7 vs. 1/3 son compatibles con un razonamiento basado en el conocimiento del número natural (ej. 7/9 es mayor que 2/3 y además 7/9 tiene numerador y denominador mayores), e incompatibles con razonamientos basados en el gap thinking (ej. 7/9 es mayor que 2/3; sin embargo, hay menor diferencia entre 2 y 3 –diferencia de 1– que entre 7 y 9 –diferencia de 2–) o reverse bias (ej. 7/9 es mayor que 2/3; sin embargo, el denominador de 2/3 es menor). En cambio, los ítems 4/5 vs. 5/8 y 2/3 vs. 3/7 son compatibles con razonamientos basados en el gap thinking (ej. 2/3 es mayor que 3/7 y además hay menor diferencia entre 2 y 3 –diferencia de 1– que entre 3 y 7 –diferencia de 4–) y reverse bias (ej. 2/3 es mayor que 3/7 y además el denominador de 2/3 es menor), e incompatibles con un razonamiento basado en el conocimiento del número natural (ej. 2/3 es mayor que 3/7; sin embargo, 3/7 tiene numerador y denominador mayores).

De este modo, se espera que los estudiantes que respondieron correctamente los ítems congruentes e incorrectamente los incongruentes en el cuestionario (perfil *NNB)*, razonen en la entrevista basándose en el conocimiento sobre el número natural, considerando que la fracción mayor es aquella con numerador y denominador mayores. En el caso de los estudiantes que respondieron de forma correcta los ítems donde un razonamiento centrado en el gap thinking lleva a la respuesta correcta e incorrectamente los ítems donde el gap thinking lleva a una respuesta incorrecta (perfil *Gap Thinker*), se espera que en la entrevista razonen basándose en la diferencia entre numerador y denominador, considerando que la fracción mayor es aquella con menor diferencia entre ambos. Por último, se espera que los estudiantes que respondieron correctamente los ítems incongruentes (donde el razonamiento reverse bias lleva a la respuesta correcta) e incorrectamente los ítems congruentes (donde el razonamiento reverse bias lleva a la respuesta incorrecta) (perfil *Reverse Bias*), razonen basándose en el tamaño de los denominadores, considerando como fracción mayor aquella con el denominador menor.

Además, en esta parte de la entrevista, estamos interesados en indagar en el grado de confianza que los estudiantes tienen en su razonamiento. Conocer la confianza que los estudiantes tienen en su razonamiento, prestando especial atención a la de los estudiantes que usan un razonamiento incorrecto, nos puede dar información sobre si son conscientes o no de que su razonamiento es incorrecto (Lichtenstein & Fishhoff, 1981) y, por lo tanto, obtener información sobre si estas formas incorrectas de razonar son estables y resistentes al cambio (Lundeberg et al., 1994).

De este modo, tras justificar por qué habían seleccionado una fracción como la mayor, cada estudiante tenía que decir cuánta seguridad tenía de que su respuesta fuera correcta. Para ello, se les proporcionaba una escala (Figura 6.1) y debían de elegir una respuesta: Dudo bastante, Dudo, Casi seguro, y Muy seguro. Si los estudiantes no estaban muy seguros, tenían que explicar sus razones.

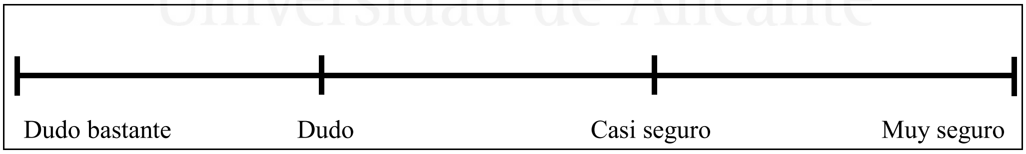



*Figura 6.1.* Escala de confianza.

En la Parte 2 de la entrevista se les proporcionó dos ítems de comparación de fracciones con tres respuestas ficticias. Se comenzó la Parte 2 de la entrevista con las siguientes instrucciones:

> *A continuación, te voy enseñar otra tarea del cuestionario y tres respuestas de otros estudiantes donde explican cómo encontraron sus respuestas. Léelas tranquilamente y dime si estás de acuerdo con alguna de las explicaciones. En caso de que no estés de acuerdo con ninguna, explícame por qué crees que no son explicaciones correctas.*

Se utilizó el ítem 1/3 vs. 5/8, que es compatible con un razonamiento basado en el conocimiento del número natural, e incompatible con razonamientos basados en el gap thinking y reverse bias; y el ítem 4/7 vs. 3/4, que es compatible con razonamientos basados en el gap thinking y reverse bias, e incompatible con un razonamiento basado en el conocimiento del número natural.

Las respuestas ficticias proporcionadas en los dos ítems incluían la elección de la fracción mayor y el razonamiento escrito del estudiante. Las respuestas de los tres estudiantes en cada ítem fueron: una respuesta de un estudiante que usó un razonamiento basado en el conocimiento de los números naturales, una respuesta de un estudiante que usó el gap thinking y una respuesta de un estudiante que utilizó un razonamiento centrado en el reverse bias (Tabla 6.1). Tal y como aparece en las instrucciones, los estudiantes tenían que indicar y justificar con cuáles de ellas estaban de acuerdo (o si no estaban de acuerdo con ninguna) y explicar por qué no estaban de acuerdo con las otras.

Tabla 6.1

*Ítems y respuestas ficticias de estudiantes mostradas en la Parte 2*

| **Ítem** | **Respuesta** |
|---|---|
| 1/3 vs. 5/8 | **Pere** (Gap thinking): Es 1/3 porque de 1 a 3 hay 2 y de 5 a 8 hay 3, por lo que en 1/3 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. |
| | **Marta** (Natural number bias): Es 5/8 porque 5 es más grande que 1 y 8 es más grande que 3. Es decir, los números son más grandes y por tanto 5/8 es mayor. |
| | **Andrés** (Reverse Bias): Es 1/3 porque 3 es más pequeño que 8, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor. |
| 4/7 vs. 3/4 | **María** (Gap thinking): Es 3/4 porque de 3 a 4 hay 1 y de 4 a 7 hay 3, por lo que en 3/4 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. |
| | **Roberto** (Natural number bias): Es 4/7 porque 4 es más grande que 3 y 7 es más grande que 4. Es decir, los números son más grandes y por tanto 4/7 es mayor. |
| | **Alicia** (Reverse Bias): Es 3/4 porque 4 es más pequeño que 7, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor. |

El guion de la entrevista dependía del perfil de estudiante entrevistado, ya que siempre se empezaba con un ítem compatible con el razonamiento que el estudiante había seguido en el cuestionario en ambas partes de la entrevista. Es decir, los estudiantes del perfil *NNB*, comenzaron la Parte 1 de la entrevista con un ítem compatible con un razonamiento basado en el conocimiento del número natural (2/3 vs. 7/9), y en la Parte 2 se les mostró en primer lugar el ítem 1/3 vs. 5/8 (compatible con su razonamiento). En cambio, los perfiles *Gap Thinker* y *Reverse Bias* comenzaron la Parte 1 de la entrevista con un ítem compatible con los razonamientos centrados en el gap thinking y reverse bias (2/3 vs. 3/7), y en la Parte 2 se les mostró en primer lugar el ítem 4/7 vs. 3/4 (compatible con sus razonamientos). En el caso del perfil *All Correct*, no se tuvo en cuenta el orden de presentación de los ítems. Consideramos que comenzar con ítems donde el razonamiento incorrecto seguido era compatible, podía favorecer que los estudiantes manifestaran y justificaran su forma de razonar. En los Anexos II, III, IV y V se muestran los cuatro protocolos de entrevista completos para cada uno de los perfiles de estudiante entrevistados: *All Correct*, *Gap Thinker*, *NNB* y *Reverse Bias*.

Las entrevistas se llevaron a cabo durante los meses de mayo y junio del curso 2017-2018 (dos meses después de haber resuelto los ítems del cuestionario). Se realizaron de manera individual y fueron grabadas en vídeo, tras previo consentimiento de los padres y tutores de los estudiantes. No hubo tiempo límite en la duración de la entrevista, y en ella el estudiante podía realizar todo tipo de cálculos, anotaciones y dibujos que considerase oportunos. En general, las entrevistas tuvieron una duración aproximada de entre 10 y 15 minutos.



## 6.3. ANÁLISIS

En primer lugar, se transcribieron las respuestas dadas por los estudiantes en ambas partes de la entrevista. Una vez se tenían las transcripciones, cuatro investigadores, individualmente, analizaron éstas identificando el razonamiento seguido por los estudiantes en ambas partes. Los desacuerdos fueron discutidos hasta llegar a un consenso.

Posteriormente, se analizó la consistencia entre el razonamiento inferido del estudiante en el cuestionario (perfil) y el razonamiento empleado durante la entrevista. Este análisis proporcionó evidencias cualitativas que sustentan las diferentes formas de razonar acerca de la magnitud de las fracciones obtenidas en el anterior estudio.

Finalmente, se analizó el nivel de confianza en las respuestas de los estudiantes que se mantuvieron consistentes, es decir, que razonaron en la entrevista acorde al perfil al que fueron identificados. Con las puntuaciones obtenidas en la escala de confianza, asignando valores del 1 al 4: (1) Dudo bastante, (2) Dudo, (3) Casi seguro y (4) Muy seguro, se calcularon las puntuaciones medias de cada uno de los perfiles (calculando porcentajes sobre 10). Además, las explicaciones de los estudiantes sobre sus inseguridades se analizaron de manera inductiva, de nuevo por cuatro investigadores, con el fin de identificar categorías. Las dos categorías identificadas fueron: inseguridad en la estrategia y conocimiento insuficiente sobre las fracciones. La primera categoría se corresponde con una inseguridad sobre la adecuación de la estrategia empleada en un ítem específico, mientras que la segunda se corresponde con una baja auto-consideración sobre su conocimiento matemático para resolver el ítem. Se mostrarán ejemplos de ambas categorías en la sección de resultados.

## 6.4. RESULTADOS

En primer lugar, presentamos los resultados sobre la consistencia entre el razonamiento inferido de los estudiantes en el estudio cuantitativo (perfiles) y el proporcionado durante la entrevista. En segundo lugar, mostramos los porcentajes de confianza y las explicaciones de los estudiantes sobre sus inseguridades en cada perfil.

### 6.4.1. Resultados sobre la consistencia entre los razonamientos



La mayoría de los estudiantes entrevistados de cada perfil utilizaron un razonamiento en la entrevista consistente con las respuestas que habían dado en el cuestionario. A continuación, se muestran ejemplos de razonamientos de estudiantes pertenecientes a cada uno de los perfiles entrevistados.

Trece de los 15 estudiantes del perfil *All Correct* fueron consistentes con su razonamiento en la entrevista. Es decir, estos estudiantes utilizaron un razonamiento correcto en la Parte 1 y no eligieron como correcta ninguna de las respuestas de los estudiantes proporcionadas en la Parte 2. Las tablas 6.2 y 6.3 muestran las explicaciones dadas por uno de estos estudiantes (P196) en ambas partes. En la parte 1, en el primer ítem, utiliza las dos terceras partes como punto de referencia, y en el resto de ítems utiliza la mitad. Utilizar puntos de referencia como "supera las dos terceras partes" o "es menos que la mitad" es una estrategia correcta para resolver este tipo de ítems. En respuesta a las opciones proporcionadas en la Parte 2, el estudiante P196 explicó por qué cada uno de los razonamientos que proporcionaron los estudiantes era incorrecto.

Tabla 6.2

*Respuestas del estudiante P196 del perfil All Correct durante la Parte 1*

| **Ítem** | **Razonamiento** |
|---|---|
| 2/3 vs. 7/9 | 7/9 es mayor porque 2/3 es dos terceras partes y 7/9 supera las dos terceras partes, que serían 6/9. |
| 4/5 vs. 5/8 | 4/5 es mayor porque 4/5 supera mucho la mitad y 5/8 muy poco. Utilizo la mitad para comparar. |
| 4/7 vs. 1/3 | 4/7 es mayor porque 1/3 es menos que la mitad y 4/7 es más que la mitad. |
| 2/3 vs. 3/7 | 2/3 es mayor porque 2/3 es más que la mitad y 3/7 es menos que la mitad. |

Tabla 6.3

*Respuestas del estudiante P196 del perfil All Correct durante la Parte 2*

| **Ítem** | **Respuesta** | **Razonamiento** | |
|---|---|---|---|
| 1/3 vs. 5/8 | Ninguno | Pere | No tiene por qué… Cada trozo que sobra tiene un tamaño. |
| | | Marta | Yo no usaría esta estrategia. Si en vez de 1/3 fuera 2/3, no valdría. Es una estrategia que sirve solamente para algunas fracciones. |
| | | Andrés | Esta es incorrecta. No hay que tener en cuenta solo el denominador, sino también el numerador. |
| 4/7 vs. 3/4 | Ninguno | María | Esta estrategia es incorrecta. Yo no le diría a nadie que se fijara en lo que le queda al numerador para llegar al denominador. |
| | | Roberto | Es incorrecta. Es posible que una fracción tenga numerador y denominador bajos, y la fracción sea mayor. |
| | | Alicia | Es incorrecta. Porque puede ser 1/4 y 4/7 y seguiría siendo mayor 4/7. Es una estrategia que no siempre sirve. |

Nueve de los 14 estudiantes del perfil *Gap Thinker* fueron consistentes con su razonamiento en la entrevista. Estos estudiantes utilizaron un razonamiento basado en el gap thinking en la Parte 1 y eligieron la respuesta de Pere y María en la Parte 2. Por lo tanto, siempre consideraron que la fracción mayor era aquella con la menor diferencia entre el numerador y el denominador. Las tablas 6.4 y 6.5 muestran las explicaciones dadas por uno de estos estudiantes (P079) en ambas partes. En los cuatro ítems de la Parte 1, el estudiante hizo referencia a la diferencia entre numerador y denominador, lo que le permitió resolver correctamente el segundo y el cuarto ítem, pero incorrectamente el primer y el tercer ítem. En respuesta a las opciones proporcionadas en la Parte 2, el estudiante P079 reconoció que las otras respuestas eran incorrectas (ya que no estuvo de acuerdo con estos razonamientos) e identificó y justificó que la respuesta basada en el gap thinking era correcta.

Tabla 6.4

*Respuestas del estudiante P079 del perfil Gap Thinker durante la Parte 1*

| **Ítem** | **Razonamiento** |
|---|---|
| 2/3 vs. 7/9 | 2/3 es mayor porque a 2/3 le quedaría 1 y a 7/9 le quedaría 2. Me basé en la distancia para marcar la fracción mayor. |
| 4/5 vs. 5/8 | 4/5 es mayor porque de 4 a 5 va 1, y de 5 a 8 va 3. Como en 4/5 hay menos distancia, esa es la fracción mayor. |
| 4/7 vs. 1/3 | 1/3 es mayor porque en 1/3 hay 2 y en 4/7 hay 3. Como hay menos en 1/3, esa es la fracción mayor. |
| 2/3 vs. 3/7 | 2/3 es mayor porque de 2 a 3 sólo hay 1, y en cambio de 3 a 7 hay 4. Es decir, a 2/3 le quedaría 1, y a 3/7 le quedaría 4. Cuanto menos quede, mayor es la fracción. |

Tabla 6.5

*Respuestas del estudiante P079 del perfil Gap Thinker durante la Parte 2*

| **Ítem*** | **Respuesta** | **Razonamiento** |
|---|---|---|
| 1/3 vs. 5/8 | Pere | Estoy de acuerdo con Pere porque yo también habría marcado 1/3, ya que la distancia es menor que en 5/8. |
| 4/7 vs. 3/4 | María | Marta dice lo mismo que he dicho yo. Cuanta menos distancia haya entre los números, mayor es la fracción. |

*El estudiante P079 no dijo nada acerca del resto de respuestas. Únicamente indicó y justificó que estaba de acuerdo con las respuestas de Pere y María.

Once de los 15 estudiantes del perfil *NNB* fueron consistentes con su razonamiento durante la entrevista. Es decir, estos estudiantes usaron el conocimiento de los números naturales para comparar las fracciones en la Parte 1 y eligieron la respuesta de Marta y Roberto en la Parte 2. Siempre consideraron que la fracción mayor es aquella con un numerador y denominador mayor. Las tablas 6.6 y 6.7 muestran las explicaciones dadas por uno de estos estudiantes (P074) en ambas partes. En los cuatro ítems de la Parte 1, el estudiante verbalizó que la fracción mayor es aquella con numerador y denominador mayores. Este razonamiento le permitió resolver correctamente el primer y el tercer ítem, pero incorrectamente el segundo y el cuarto ítem. En respuesta a las opciones proporcionadas en la Parte 2, el estudiante P074 reconoció que las otras respuestas eran incorrectas (ya que no estuvo de acuerdo con estos razonamientos) e identificó y justificó que la respuesta basada en el conocimiento del número natural era correcta.

Tabla 6.6

*Respuestas del estudiante P074 del perfil NNB durante la Parte 1*

| **Ítem** | **Razonamiento** |
|---|---|
| 2/3 vs. 7/9 | 7/9 es mayor porque el 7 y 9 son números mayores. Me guío por los números, por el numerador y el denominador. |
| 4/5 vs. 5/8 | 5/8 es mayor porque el 5 y el 8 son números mayores que los otros. Siempre comparo los números. |
| 4/7 vs. 1/3 | 4/7 es mayor porque mi criterio es que, si el numerador y el denominador son números mayores, la fracción es mayor. Entonces, cuanto mayor sea el numerador y el denominador, mayor es la fracción. |
| 2/3 vs. 3/7 | 3/7 es mayor porque el 3 y el 7 son números mayores. |

Tabla 6.7

*Respuestas del estudiante P074 del perfil NNB durante la Parte 2*

| **Ítem*** | **Respuesta** | **Razonamiento** |
|---|---|---|
| 1/3 vs. 5/8 | Marta | Este razonamiento es el que yo he hecho. Estaría de acuerdo con Marta. 5/8 es mayor porque los números son mayores. |
| 4/7 vs. 3/4 | Roberto | Estaría de acuerdo con Roberto. La fracción mayor es la que tiene números mayores. Por ejemplo, si en vez de 4/7 fuera 7/4 también sería mayor, porque los números son mayores. Si tuviera que decir una fracción mayor que 4/7 diría 5/7, o 5/8. Porque el 5 es mayor que el 4 y el 8 es mayor que el 7. |

*El estudiante P074 no dijo nada acerca del resto de respuestas. Únicamente indicó y justificó que estaba de acuerdo con las respuestas de Marta y Roberto.

Seis de los 8 estudiantes del perfil *Reverse Bias* también fueron consistentes con su razonamiento en la entrevista. Estos estudiantes se basaron en el reverse bias en la

Parte 1 y eligieron las respuestas de Andrés y Alicia en la Parte 2. Estos estudiantes siempre consideraron que la fracción mayor es aquella con el denominador menor. Las tablas 6.8 y 6.9 muestran las explicaciones dadas por uno de estos estudiantes (P022) en ambas partes. En los cuatro ítems de la Parte 1, el estudiante verbalizó que la fracción mayor es aquella con el denominador menor, lo que le permitió resolver correctamente el segundo y el cuarto ítem, pero incorrectamente el primer y el tercer ítem. En respuesta a la Parte 2, el estudiante P022 reconoció que las otras respuestas eran incorrectas (de nuevo este estudiante no estuvo de acuerdo con estos razonamientos), e identificó y justificó que la respuesta basada en el reverse bias era correcta.

Tabla 6.8

*Respuestas del estudiante P022 del perfil Reverse Bias durante la Parte 1*

| **Ítem** | **Razonamiento** |
|---|---|
| 2/3 vs. 7/9 | 2/3 es mayor porque el 3 es más pequeño que el 9. |
| 4/5 vs. 5/8 | 4/5 es mayor porque el 5 es más pequeño que el 8. |
| 4/7 vs. 1/3 | 1/3 es mayor porque me fijo en el denominador, es decir, en el 3 y en el 7. Como el 3 es más pequeño que el 7, marco 1/3. Es decir, si el denominador es más pequeño que el otro, marco la fracción que tenga el denominador más pequeño. |
| 2/3 vs. 3/7 | 2/3 es mayor porque me fijo en el denominador. Miro si el denominador es mayor o menor. La fracción con el denominador más pequeño es la fracción mayor. Es decir, como en 2/3 el denominador es más pequeño que en 3/7, la fracción es mayor. |

Tabla 6.9

*Respuestas del estudiante P022 del perfil Reverse Bias durante la Parte 2*

| **Ítem*** | **Respuesta** | **Razonamiento** |
|---|---|---|
| 1/3 vs. 5/8 | Andrés | Esta es la misma que he dicho yo. Es como pienso yo. La fracción con el denominador más pequeño es la fracción mayor. |
| 4/7 vs. 3/4 | Alicia | Esta es la que he hecho yo. Cuanto más pequeño sea el denominador, mayor será la fracción. Yo creo que esta estaría bien. |

*El estudiante P022 no dijo nada acerca del resto de respuestas. Únicamente indicó y justificó que estaba de acuerdo con las respuestas de Andrés y Alicia.

De los 13 estudiantes que fueron inconsistentes con su razonamiento durante la entrevista, cinco de ellos respondieron la primera parte de la entrevista de la misma manera que en el cuestionario, pero en la segunda parte, cuando vieron otros razonamientos diferentes cambiaron su forma de razonar. Los ocho estudiantes restantes respondieron ambas partes de la entrevista con un razonamiento diferente al inferido en el cuestionario (perfil).

Los razonamientos de los estudiantes durante las entrevistas muestran evidencias que apoyan los resultados obtenidos en el estudio cuantitativo (Estudio 3A). Existen tres formas incorrectas de razonar acerca de la magnitud de las fracciones: razonamiento basado en la ordenación del número natural (natural number bias), razonamiento basado en la diferencia entre numerador y denominador (gap thinking), y razonamiento basado en el tamaño del denominador (reverse bias).

### 6.4.2. Nivel de confianza de los estudiantes en sus razonamientos

La Tabla 6.10 muestra el porcentaje medio de confianza de cada perfil en los cuatro ítems. Únicamente se tuvieron en cuenta las puntuaciones de los estudiantes que fueron consistentes con su razonamiento durante las entrevistas (es decir, aquellos estudiantes que razonaron en la entrevista de la misma manera que en el cuestionario). Esta tabla muestra que los estudiantes del perfil *All Correct*, quienes resolvieron los ítems del cuestionario y de la entrevista correctamente, tienen más confianza en sus razonamientos que los estudiantes del resto de los perfiles. Sin embargo, los porcentajes de confianza de los perfiles *Gap Thinker*, *NNB* y *Reverse Bias* (aproximadamente un 80%), también muestran una gran seguridad de estos estudiantes en su razonamiento. Una gran confianza en su razonamiento indica que, para estos estudiantes, el razonamiento utilizado es totalmente correcto, incluso en situaciones en las que les lleva a una respuesta incorrecta.

Tabla 6.10

*Porcentaje medio de confianza de los perfiles en cada ítem*

| | **2/3 vs. 7/9** | **4/5 vs. 5/8** | **4/7 vs. 1/3** | **2/3 vs. 3/7** |
|---|---|---|---|---|
| **All Correct** | 94.3 | 94.3 | 100 | 98.0 |
| **Gap Thinker** | 86.0 | 83.3 | 80.5 | 83.3 |
| **NNB** | 79.6 | 77.3 | 81.8 | 77.3 |
| **Reverse Bias** | 75.0 | 75.0 | 75.0 | 79.3 |

A continuación, analizamos el nivel de confianza de estos perfiles de forma independiente, para indagar en las explicaciones dadas por los estudiantes sobre sus inseguridades.

Los estudiantes del perfil *All Correct* que fueron consistentes con su razonamiento (*n* = 13) mostraron una alta autoconfianza general (Tabla 6.11), ya que un gran número respondieron “Muy seguro”. De hecho, ocho de ellos estuvieron absolutamente seguros de sus cuatro respuestas.

Tabla 6.11

*Número de respuestas de los estudiantes del perfil All Correct en la escala de confianza*

| | Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|---|
| **2/3 vs. 7/9** | | | 3 | 10 |
| **4/5 vs. 5/8** | | | 3 | 10 |
| **4/7 vs. 1/3** | | | 0 | 13 |
| **2/3 vs. 3/7** | | | 1 | 12 |

Todos los estudiantes que se mostraron inseguros dudaron sobre la estrategia utilizada (categoría de inseguridad en la estrategia). En este caso particular, dudaron de la forma en que obtuvieron el mínimo común múltiplo para comparar fracciones, o comentaron la necesidad de tener una representación gráfica para asegurar su respuesta. Por ejemplo, el estudiante P157 dudaba de la forma en que comparaba las fracciones usando el mínimo común múltiplo.

> P157: (2/3 vs. 7/9) *Transformé los tercios en novenos. Quiero decir, multipliqué el numerador 2 y el denominador 3 de la fracción 2/3 por 3. Luego, comparé 6/9 y 7/9.*
>
> Entrevistador: *¿Cuánto de seguro estás de que es la fracción mayor?*
>
> P157: *Creo que sí, pero a lo mejor me equivoqué.*

Los estudiantes del perfil *Gap Thinker* que fueron consistentes con su razonamiento (*n* = 9) mostraron bastante confianza en sus respuestas, ya que la mayoría de ellos respondieron “Muy seguro” o “Casi seguro”. Pocos estudiantes dudaron, dando como respuesta “Dudo” (Tabla 6.12). Solo dos estudiantes estuvieron absolutamente seguros de todas sus respuestas. Los resultados no mostraron diferencias en la confianza entre los ítems donde el gap thinking lleva a la respuesta correcta (4/5 vs. 5/8 y 2/3 vs. 3/7) y los ítems donde el gap thinking lleva a la respuesta incorrecta (2/3 vs. 7/9 y 4/7 vs. 1/3).

Tabla 6.12

*Número de respuestas de los estudiantes del perfil Gap Thinker en la escala de confianza*

| | Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|---|
| **2/3 vs. 7/9** | | 1 | 3 | 5 |
| **4/5 vs. 5/8** | | 2 | 2 | 5 |
| **4/7 vs. 1/3** | | 1 | 5 | 3 |
| **2/3 vs. 3/7** | | 1 | 4 | 4 |

Las dudas de estos estudiantes se centraron tanto en la inseguridad en la estrategia utilizada como en la auto-consideración de un conocimiento insuficiente sobre fracciones. Por ejemplo, el estudiante P011 consideró que “a veces, me equivoco cuando utilizo esta estrategia” (refiriéndose al gap thinking).

> P011: (2/3 vs. 3/7) *2/3 es mayor que 3/7 porque en 2/3 hay una diferencia de 1, y en 3/7 hay una diferencia de 4. Siempre observo la diferencia.*
>
> Entrevistador: *¿Cuánto de seguro estás de que es la fracción mayor?*
>
> P011: *Tengo algunas dudas. A veces, me equivoco cuando uso esta estrategia. En este caso, no sé si funciona o no.*

Mientras que el estudiante P014 consideró que “me cuestan un poco las fracciones”.

> P014: (2/3 vs. 3/7) *2/3 es mayor que 3/7 porque en 3/7, para llegar a 7 le faltan todavía 4; y en 2/3, de 2 a 3 solo le falta 1. Entonces… como a 2/3 le falta menos que a 3/7, 2/3 es mayor.*
>
> Entrevistador: *¿Cuánto de seguro estás de que es la fracción mayor?*
>
> P014: *Estoy casi seguro. Me cuestan un poco las fracciones.*

Los estudiantes del perfil *NNB* que fueron consistentes con su razonamiento ($n$ = 11) mostraron bastante confianza en sus respuestas, ya que la mayoría de las respuestas fueron "Casi seguro" (Tabla 6.13). Además, solo dos estudiantes estuvieron absolutamente seguros de sus cuatro respuestas. Los resultados no mostraron diferencias en la confianza entre los ítems donde el conocimiento de los números naturales lleva a la respuesta correcta (2/3 vs. 7/9 y 4/7 vs. 1/3) y los ítems donde el conocimiento de los números naturales lleva a la respuesta incorrecta (4/5 vs. 5/8 y 2/3 vs. 3/7).

Tabla 6.13

*Número de respuestas de los estudiantes del perfil NNB en la escala de confianza*

| | **Dudo bastante** | **Dudo** | **Casi seguro** | **Muy seguro** |
|---|---|---|---|---|
| **2/3 vs. 7/9** | | 2 | 5 | 4 |
| **4/5 vs. 5/8** | | 2 | 6 | 3 |
| **4/7 vs. 1/3** | | 1 | 6 | 4 |
| **2/3 vs. 3/7** | | 2 | 6 | 3 |

En cuanto a las explicaciones dadas por estos estudiantes a sus inseguridades, se basaron en tener un conocimiento insuficiente sobre fracciones y en la inseguridad en la estrategia utilizada. El estudiante P076 es un ejemplo de un estudiante con una baja consideración sobre su conocimiento matemático.

> P076: (4/7 vs. 1/3) *4/7 es mayor que 1/3. Vi que los dos números de 4/7 son más grandes que los dos números de 1/3. Es decir, el 4 es mayor que el 1 y el 7 es mayor que el 3.*
>
> Entrevistador: *¿Cuánto de seguro estás de que es la fracción mayor?*
>
> P076: *Estoy casi seguro. Pero no sé demasiado sobre fracciones.*

El estudiante P125 es un ejemplo de un estudiante que atribuyó sus dudas a la estrategia empleada (refiriéndose a basarse en el tamaño de los términos).



> P125: (4/7 vs. 1/3) *4/7 es mayor que 1/3. Primero miro los numeradores y luego los denominadores. Es decir, el 4 y el 1, y el 7 y el 3. Como en 4/7 y 1/3, el 4 el más grande que el 1, y el 7 es más grande que el 3, entonces 4/7 es mayor.*
>
> Entrevistador: *¿Cuánto de seguro estás de que es la fracción mayor?*
>
> P125: *Estoy casi seguro. Pero no estoy muy seguro de mi estrategia.*

Los estudiantes del perfil *Reverse Bias* que fueron consistentes con su razonamiento ($n$ = 6) mostraron poca confianza en sus respuestas, ya que es el perfil con los estudiantes más dudosos (Tabla 6.14). Solo dos estudiantes estuvieron absolutamente seguros de sus cuatro respuestas. Los resultados no mostraron diferencias en la confianza entre los ítems donde el reverse bias lleva a la respuesta correcta (4/5 vs. 5/8 y 2/3 vs. 3/7) y los ítems donde el reverse bias conduce a la respuesta incorrecta (2/3 vs. 7/9 y 4/7 vs. 1/3).

Tabla 6.14

*Número de respuestas de los estudiantes del perfil Reverse Bias en la escala de confianza*

| | Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|---|
| **2/3 vs. 7/9** | | 2 | 2 | 2 |
| **4/5 vs. 5/8** | | 2 | 2 | 2 |
| **4/7 vs. 1/3** | | 2 | 2 | 2 |
| **2/3 vs. 3/7** | | 2 | 1 | 3 |

Los estudiantes explicaron su desconfianza por la inseguridad en la estrategia empleada. A continuación, hay un ejemplo de una de estas explicaciones (estudiante P131).

> P131*:* (4/5 vs. 5/8) *4/5 es mayor que 5/8 porque 4/5 son trozos más grandes, y 5/8 son más trozos, pero más pequeños. Yo siempre me fijo en el denominador. Si el denominador es menor, como son menos porciones, los trozos deben de ser más grandes.*
>
> Entrevistador: *¿Cuánto de seguro estás de que es la fracción mayor?*
>
> P131: *Casi seguro. Tal vez la estrategia que estoy utilizando sea errónea.*

Los resultados sobre la confianza muestran que la mayoría de los estudiantes pertenecientes a los perfiles *NNB*, *Gap Thinker* y *Reverse Bias* tienen una gran seguridad en su respuesta a pesar de estar utilizando un razonamiento incorrecto.

# CHAPTER 7. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

# CHAPTER 7. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

As we formulated in chapter 2, the main objective of this study is to characterise stages in the understanding of rational numbers in primary and secondary school students. A special attention has been paid to the possible natural number knowledge interference. In this chapter, we first show the conclusions of each of the four studies performed separately regarding the three domains studied (arithmetic operations, density and size), and then, a general discussion of these results. From this discussion, we infer possible educational implications for the teaching of rational numbers in primary and secondary school. Finally, further lines of research have been underlined.

## 7.1. DISCUSSION AND CONCLUSIONS OF THE STUDY 1

The specific objective of this study is to characterise stages from primary to secondary school in the understanding of addition, subtraction, multiplication and division with fractions and decimal numbers.

Our results have shown different ways of students' thinking (profiles) when solving rational number operations. These ways of thinking indicate different intermediate stages in the transition from a natural number biased idea of rational number arithmetic operations to a correct understanding.

Students whose thinking is based on their natural number knowledge both in fractions and decimal numbers (*Full NNB* profile) solved additions and subtractions with fractions adding or subtracting numerators and denominators separately (Moss, 2005; Streefland, 1991), and additions and subtractions with decimal numbers without considering the correct placement of the decimal point (Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015). Furthermore, these students solved multiplications and divisions following the intuitive rules that “the product of a multiplication must be always a larger number than the factors” and “the result of a division always results in a smaller number” (Bell et al., 1981; Fischbein et al., 1985; Greer, 1987; Hart et al., 1981).

An intermediate stage in this transition is shown through the group of students who are natural number biased except in decimal procedural items (*Conceptual and fraction procedural NNB* profile). These students achieved to solve addition and subtractions with decimal numbers using the correct placement of the decimal point. Another group of students is natural number biased only in conceptual items (*Conceptual NNB* profile). These students solved correctly additions and subtractions with fractions and decimal numbers. These two profiles show differences in students’ understanding –or misunderstanding– of arithmetic operations with rational numbers regarding the type of arithmetic operation (addition, subtraction, multiplication or division). In fact, these two profiles show that students’ accuracies in addition and subtraction items –procedural items– were higher than students’ accuracies in multiplication and division items –conceptual items. Therefore, it suggests that the natural number bias is first overcome in addition and subtraction and later, in multiplication and division. This result is in line with previous research that has shown higher levels of success in additions and subtractions than in multiplications and divisions, pointing out that the natural number bias is stronger in divisions and multiplications (Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Van Hoof et al., 2015a). However, we are aware that the nature of the items of our study (procedural vs. conceptual) could also affect these differences.

Other intermediate stages are shown through the group of students who are not natural number biased in decimal items, but show a generally low understanding of divisions (*Fraction procedural and fraction conceptual multiplication NNB* profile), and the group of students who are natural number biased only in multiplications when they have to choose the operation in a word-problem (*Word-problem multiplication NNB* profile). The first ones solved the addition, subtraction and multiplication fraction items using the knowledge of natural numbers, but they incorrectly solved all division items. The second ones only were biased in word-problem multiplication items. These profiles show differences in students' understanding of arithmetic operations with rational numbers with regard to the type of arithmetic operation (multiplication or division), the representation (fraction or decimal number), or the nature of the item (question/word-problem).

Regarding the type of operation, differences were found in students' accuracies between multiplication and division. This issue was pointed out by Van Hoof et al. (2015b), who found that secondary school students were more natural number biased in divisions than in multiplications. However, Christou (2015) found the opposite with primary school students. Our results show that division is generally more difficult than multiplication since students' accuracies in those items were lower. However, our results indicate that difficulties in division items are not necessarily related with the natural number bias, since students' performance in both congruent and incongruent items is generally low. In multiplication items, students' difficulties are predominantly related with natural number interference, since students accurately solved congruent items and inaccurately the incongruent ones.

With regard to the representation (decimal number or fraction), differences in students' performance have also been shown. As can be observed from the profiles obtained, students' accuracies in both procedural and conceptual items were predominantly greater in decimal numbers than in fractions. Therefore, there is a bigger difference between students' accuracy levels in congruent items compared to the incongruent ones with fractions compared to decimal numbers. These differences show that the natural number bias in students' understanding of arithmetic operations is stronger in fractions. This result differs from previous studies that had not found differences in the natural number bias between fractions and decimal numbers (Fischbein et al., 1985; Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Van Hoof et al., 2015b).

Finally, the existence of a *Word-problem multiplication NNB* profile evidences differences in students' understanding of rational number multiplication depending on the nature of the item. In other words, for a subgroup of students, anticipating the operation to be applied in a word-problem is harder than anticipating the result of a numerical expression. Therefore, our research extends previous research (Van Hoof et al., 2015b) showing that some students correctly anticipate the result of a multiplication when a rational number smaller than one is involved (accepting that multiplications can make smaller), but incorrectly choose the operation for solving a word-problem when the same kind of rational number is involved.

Concerning the evolution of the profiles by grade, although the natural number bias phenomenon decreases along grades, it does not disappear in the last grades of secondary school, neither in fractions nor in decimal numbers. In fact, although the percentage of the *Correct* profile increases, it does not reach a 40% in 4$^{th}$ grade of secondary school. Furthermore, some profiles remain stable along grades (*Conceptual NNB* and *Fraction procedural and fraction conceptual multiplication NNB*) and one profile increases from primary to secondary school: *Word-problem multiplication NNB*. This indicates that as grades increase, students are more natural number biased in multiplication, especially when having to anticipate the operation in a word-problem.

## 7.2. DISCUSSION AND CONCLUSIONS OF THE STUDY 2

The specific objective of this study is to characterise stages from primary to secondary school in the understanding of the dense structure of rational numbers.

Our results have shown different students' ways of understanding (profiles) about the dense structure of rational numbers. The profiles that we could identify showed intermediate stages that evidence the transition from the most naïve idea of the dense structure of rational numbers (the clearest natural number bias), to the most sophisticated one.

The clearest natural number bias, denoted as *Naïve* profile, represented students who are still hampered by the discrete idea of natural numbers. This profile was frequent in 5$^{th}$ and 6$^{th}$ grade of primary school and decreased along grades, but it only disappeared towards the end of the secondary school in the multiple-choice items. Thus, the idea of discreteness remains strong even in the last grades of secondary school (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007, 2010). The correct stage, denoted as *Correct* profile, is observed when students considered that there is an infinite number of numbers between two rational numbers, and were able to write a number between two fractions and decimal numbers given. This profile did not appear in 5th and 6th graders, but it was present in 1st and 2nd grade and more frequent in 3rd and 4th grade of secondary school. However, at the end of secondary school, still less than half of the students were in this profile. Therefore, understanding the density is a complex task for primary and secondary school students (Hartnett & Gelman, 1998; Merenluoto & Lehtinen, 2002; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007).

A characteristic in the transition from discreteness to infinity is the presence of profiles that show that students had more difficulties in understanding the density with fractions than with decimal numbers (*Correct decimals fraction naïve* profile in write and question items and *Decimals infiniters fraction naïve* profile in multiple-choice items). Students from these profiles found a number between two pseudo-consecutive decimal numbers and considered that there is an infinite number of numbers between two decimal numbers (or an infinite number of decimal numbers between two decimal numbers in multiple-choice items). However, these students had difficulties with fractions. This result shows differences between the rational number representations: Students first understood the dense nature of decimal numbers and later the density of fractions (McMullen & Van Hoof, 2020; Tirosh et al., 1999; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Furthermore, some intermediate stages have been shown regarding the type of item. In the write items, the idea of consecutiveness clearly appeared. These students considered that there are numbers between fractions, but they applied a naïve idea of the next number (*Fraction consecutive* and *Correct decimals fraction consecutive* profiles). The *Fraction consecutive* profile decreased as the grades advanced, disappearing in 3rd and 4th grade of secondary school, but increased the *Correct decimals fraction consecutive* profile. Therefore, the idea of consecutiveness remains at the end of secondary school. Moreover, the *Almost correct* profile has shown the existence of a group of students who recognised that it is possible to find a number between two rational numbers, except when both fractions have the same numerator where it is considered impossible. This result shows differences between fraction items. Some students were able to write a number between two fractions with the same denominator (1/3 and 2/3), but they considered that it is impossible to find a number between two fractions with the same numerator (1/8 and 1/9). These difficulties may be due to the *distance effect* (DeWolf & Vosniadou, 2015). In the item 1/8 and 1/9 the distance effect is higher, since the numerical value of both fractions is really close. Some students could consider that it is impossible to find a number between them, especially in the case that they would try to find the decimal number representation.

In the question items, intermediate stages have been shown through the ideas of "finiters" (*Finiters* and *Decimal finiters* profiles) and the idea of "differencers" (*Decimal differencers* profile). The *Decimal finiters* profile (identified from 5$^{th}$ grade of primary school to 2$^{nd}$ grade of secondary school) represented students who had overcome the naïve idea of discreteness in decimal numbers, considering that there is a finite number of numbers between two decimal numbers. This profile was not identified in 3$^{rd}$ and 4$^{th}$ grade of secondary school, where the *Finiters* profile appeared. These last students had overcome the naïve idea of discreteness both in fractions and decimal numbers, considering that there is a finite number of numbers between two decimal numbers and two fractions. This result shows also differences between the rational number representations. Students, first, recognised that it is possible to find a finite number of numbers between two pseudo-consecutive decimals, and then between fractions. Moreover, the *Decimal differencers* profile, which was present to approximately the same extent in each grade, evidenced a group of students who determined the number of numbers between the two given fractions or decimal numbers by subtracting both numbers.

In the multiple-choice items, there was a group of students who considered possible to find a finite number of numbers between fractions in 5$^{th}$ and 6$^{th}$ grade of primary school (*Decimal naïve fraction finiters*). However, this profile did not appear in the rest of the grades. Another group was the *Finiters*, who considered that there is a finite number of numbers, both in fractions and decimals. This profile was present to approximately the same extent in each grade. Finally, there were some profiles closer to the most sophisticated idea of density. In 1$^{st}$ and 2$^{nd}$ grade of secondary school, the *Infiniters* represented a group of students who recognised an infinite number of numbers, but they believed that between fractions there are only fractions and between decimals there are only decimals (Vamvakoussi et al., 2011; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). However, this profile was not shown in 3$^{rd}$ and 4$^{th}$ grade of secondary school, where a group of students appeared who considered that between two fractions and two decimals there are infinitely many decimal numbers (*Decimal infiniters*), and a group of students who did not recognise that between two decimal numbers there can be fractions (*Decimal infiniters correct fractions*). These three last profiles evidence the transition to the density understanding, showing difficulties with the rational number representations: Students treat fractions and decimal numbers as more or less unrelated sets of numbers, rather than as completely interchangeable representations of the same numbers (Khoury & Zazkis, 1994).

The profiles identified in our study confirm and extend the hypothesised profiles proposed in Vamvakoussi and Voniadou (2004, 2007, 2010) and Vamvakoussi et al. (2011) studies in three ways. First, we determine and characterise intermediate stages of students' understanding the dense structure of rational numbers after an inductive analysis of a large sample of students' answers. Secondly, our research has considered a large age range (from primary to secondary school) that allows us to examine the evolution of profiles. Previous research has found learner' profiles in secondary school students (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007, 2010; Vamvakoussi et al., 2011). Finally, we have combined different item types. In previous research only items with the same nature (multiple-choice and open-ended question items) have been used (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007, 2010; Vamvakoussi et al., 2011).

## 7.3. DISCUSSION AND CONCLUSIONS OF THE STUDY 3A

The specific objective of this study is to characterise stages from primary to secondary school in the understanding of rational number size. Particularly, in fraction and decimal comparison items.

Our results have shown different students' ways of thinking (profiles) about rational number size: students whose thinking is based on their natural number knowledge (*Full NNB* and *Fraction NNB* profiles), students whose thinking is based on the difference between numerator and denominator (*Gap Thinker* profile), students whose thinking is based on the smaller denominator size (*Reverse Bias* profile), and students whose thinking shows an understanding of the rational number size (*All Correct* profile). This result extends previous research in two ways. On the one hand, it characterises different students' incorrect ways of thinking in primary and secondary school, extending profiles obtained by Gómez and Dartnell (2019) with fifth, sixth and seventh grade Chilean students. On the other hand, the evolution of the different ways of thinking (profiles) from fifth to tenth grade is examined.

As in the study of Gómez and Dartnell (2019), the current study has identified six profiles of students. The *All Correct* profile corresponds with the subgroup of students that achieved high success levels in all types of items in their study. *Full NNB* and *Fraction NNB* profiles correspond with students biased by the knowledge about the ordering of natural numbers. The first one is biased with fractions and decimals, and the second one only with fractions. Gómez and Dartnell (2019) took into account only fraction items, obtaining two subgroups of students: students biased on items with common components and students biased both on items with common components and without common components. In our study, NNB students were biased by their natural number knowledge both on items with common components and without common components. The *Reverse Bias* profile includes students who considered that the largest fraction is the fraction with the smallest denominator (DeWolf & Vosniadou, 2015; Fazio et al., 2016; Rinne et al., 2017). This profile corresponds with a subgroup of students who showed a behaviour contrary to the natural number bias in Gómez and Dartnell's study, solving the incongruent items better than the congruent ones. *Remainder* corresponds with the group of students who answered all the items with a low accuracy.

Gómez and Dartnell (2019) obtained a group of learners who incorrectly answered congruent items without common components. In our study, as we have taken into account gap condition, we have obtained the *Gap Thinker* profile: students who answered correctly only the items where gap thinking leads to the correct answer. Therefore, it is possible that in the study of Gómez and Dartnell, the items used were congruent with the natural number ordering, but where gap thinking leads to an incorrect answer.

The different students' profiles obtained extend previous research on natural number bias, since the existence of other incorrect ways of thinking, such as gap thinking and reverse bias, indicates that the phenomenon natural number bias is not the unique reason of primary and secondary school students' difficulties in determining the rational number size. In that sense, our results could explain the controversial results obtained in previous research, where incongruent items reached higher levels of accuracy than the congruent ones (Barraza et al., 2017; DeWolf & Vosniadou, 2015; Gómez et al., 2015; Obersteiner & Alibali, 2018; Obersteiner et al., 2013).

Finally, our results provide information about the evolution of the different ways of thinking from 5th grade of primary school to 4th grade of secondary school, suggesting that students change their ways of thinking along these grades. Natural number bias reasoning (*Full NNB* and *Fraction NNB*) is the predominant way of thinking in 5th and 6th grade of primary school. An explanation is that the first contact of students with rational numbers is in 3rd grade, therefore in primary school, students have a strong knowledge about natural numbers. Despite of the fact that it is the most predominant way of thinking in primary school, its use decreases along grades, almost disappearing at the end of secondary school with decimal numbers. This decrease corresponds with an increase of a correct reasoning along grades, but also with an increase of other incorrect reasoning, gap thinking and reverse bias (this last reasoning between 2nd and 3rd grade of secondary school). This result seems to indicate that when the reliance on natural number is overcome, it is followed by qualitatively different errors before the stage of correct understanding is reached.

## 7.4. DISCUSSION AND CONCLUSIONS OF THE STUDY 3B

Despite recent research has focused on examining fraction size understanding by measuring accuracies and reaction times (DeWolf & Vosniadou, 2011, Gómez & Dartnell, 2019; Meert et al., 2010; Obersteiner & Alibali, 2018; Van Hoof et al., 2015b), qualitative studies based on students' verbalisations when solving fraction comparison items, in order to provide qualitative evidence of their reasoning, are scarce. The specific objective of this study is to support results obtained in the study 3A, with qualitative evidence obtained through interviews. Particularly, we analysed the consistency between the students' answers given in the test (profile) and the reasoning used by the students in an interview. Furthermore, the level of confidence that students had in their reasoning was examined, in order to identify to what extent the incorrect reasoning is resistant to change.

The high consistency between the students' reasoning (verbalisations) given during the interview and their profile, clearly supports and validates the existence of different students' ways of thinking about the size of fractions. Therefore, students use other incorrect ways of thinking that are not based on the natural number knowledge, such as gap thinking and reverse bias thinking. The use of these ways of thinking can explain the contrary results obtained in previous studies with regard to the congruency effect: While many studies found higher accuracy rates on congruent compared to incongruent items (DeWolf & Vosniadou, 2011; González-Forte et al., 2020; Meert et al., 2010), other studies found high accuracies in incongruent items and low accuracies in the congruent ones (DeWolf & Vosniadou, 2015; Gómez & Dartnell, 2019; Obersteiner & Alibali, 2018; Rinne et al., 2017).

Verbalisations given by students confirm the use of a reasoning based on gap thinking "a fraction is larger if the difference between the numerator and the denominator is smaller" (Pearn & Stephens, 2004; Stafylidou & Vosniadou, 2004) and the use of a reverse bias thinking "a fraction is larger if the denominator is smaller" (Fazio et al., 2016; Rinne et al., 2017; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Our results also show that reverse bias thinking and gap thinking are present in secondary school when students solve simple fraction comparison items (proper fractions with one-digit numerator and denominator), which had been previously attributed mostly to undergraduates and adults when solving complex fractions (DeWolf & Vosniadou, 2015; Gómez & Dartnell, 2015; Obersteiner & Alibali, 2018).

Results of the second part of the interview shows that the incorrect ways of thinking are resistant to change (they are not random errors) since students did not change their answer when they saw other ways of thinking. In other words, students were largely persistent in the choice of the same way of thinking they had used both in the test and in the first part of the interview. This result can lead us to consider the possible intuitive character of these incorrect ways of thinking, since intuitions "are taken to be necessarily true beyond the need for any further justification while any possible alternatives are readily discarded as unacceptable" (Vamvakoussi et al., 2012, p. 347) and are characterised by perseverance (i.e., once established they are robust and therefore not easily eradicated by instruction) (Vamvakoussi et al., 2012).

Data collected from students' confidence give us also information about the resistance to change of these incorrect ways of thinking. Students of the *All Correct* profile showed a high confidence in their answers. Moreover, although the confidence percentages of the other three profiles (*Gap thinker*, *NNB* and *Reverse Bias*) were lower, these percentages were still high –about 80% approximately. These high levels of confidence in students' reasoning indicate that, for students, the reasoning used is totally correct, even in items where it leads them to an incorrect answer. In this sense, the fact that students are not aware that their thinking is incorrect can lead them to be overconfident in their estimated knowledge (Lichtenstein & Fishhoff, 1981), becoming a consolidated way of thinking and difficult to change during learning (Fischbein, 1987).

Students' explanations about insecurities show us certain differences between profiles. Results have shown that students whose reasoning was based on the natural number ordering (*NNB* profile) doubted about their mathematical knowledge of fractions. Students who based their reasoning on the smaller size of the denominator (*Reverse Bias* profile) referred their doubts to the suitability of their strategy. Finally, students whose reasoning was based on the gap between numerator and denominator (*Gap thinker* profile) showed doubts related with both the strategy and the low fraction knowledge. Therefore, although we need to be careful to generalise our results, they seem to indicate differences between *NNB* and *Reverse Bias* profiles. Insecurities regarding low mathematical knowledge could mean that students are in their first steps of the learning of fractions. Therefore, they could be related to a naïve way of thinking that is formed in the first steps of the learning process (natural number bias). While insecurities about the strategy used seem to show that students consider a strategy they know or they have learned as a way to solve a situation.

## 7.5. GENERAL DISCUSSION

Considering the four studies, we can highlight three important aspects. First, the natural number bias was present in the three domains, decreasing from primary to secondary school. The percentage of students biased by natural number knowledge was always higher in the density domain, followed by the domain of arithmetic operations, and finally by the size domain. These results seem to show that students first overcome the reliance on the natural number knowledge in the size domain, then in the arithmetic operations domain, and finally in the density domain. This result is in line with the studies of McMullen et al. (2015), McMullen and Van Hoof (2020) and Van Hoof et al. (2018).

Secondly, differences have been observed regarding the rational number representation. In all three domains, the natural number bias was always higher in fractions items than in decimal number items. Therefore, it seems that learners first develop an understanding of decimal numbers (Van Hoof et al., 2018). For example, the natural number bias in decimal numbers disappeared at the end of secondary school in the size domain, but not in fractions. Thus, the results show that (i) comparing decimal numbers is an easier task than comparing fractions, (ii) writing a number between two pseudo-consecutive decimal numbers is an easier task than writing a number between two pseudo-consecutive fractions, (iii) determining how many numbers are between two decimal numbers is an easier task than determining how many numbers are between two fractions, and (iv) adding and subtracting decimal numbers is an easier task than adding and subtracting fractions.

Finally, it is also a remarkable finding that in the domains of arithmetic operations and density, the intermediate stages (profiles) identified show the transition from the naïve knowledge (based on natural number knowledge) to the correct stage. However, in the size domain, the profiles identified from the most naïve knowledge (*Full NNB* and *Fraction NNB* profiles) to a correct understanding (*All Correct* profile) did not show the same. The *Gap Thinker* and *Reverse Bias* profiles, evidenced during the secondary school, indicate that when the reliance on natural number is overcome, it is followed by other incorrect ways of thinking. Moreover, the results from the qualitative study show that these incorrect ways of thinking are difficult to change, which can prevent students from using correct reasoning.

## 7.6. IMPLICATIONS FOR THE TEACHING OF RATIONAL NUMBERS

Our results have some educational implications. According to the results obtained in the three domains, the natural number bias does not seem to disappear towards the end of secondary school. There is a group of students that is still clearly affected in the arithmetic operations, density and "fraction" size domains. Therefore, not only primary school teachers but also secondary school teachers should be aware of this bias. In fact, instructional efforts are necessary to supress this natural number bias in secondary school (Van Hoof et al., 2015a).

The intermediate stages (profiles) obtained in each domain have shown that the transition from a natural number biased idea to a correct understanding is not an easy task. In fact, the naïve knowledge based on natural number properties can be followed by different incorrect ways of thinking. This information could benefit primary and secondary school teachers to be aware of the students' incorrect ways of thinking when they are teaching the rational numbers. Hence, it is important that teachers are aware of the existence of the profiles found, as well as the individual differences in strategy use between learners of the same age. Being aware of these ways of thinking can help teachers introduce examples during teaching that are incompatible with each of the ways of thinking found. In other words, using situations in which the use of one of these ways of thinking is not always valid, can favour that the students do not generalise its use.

Particularly, in the domain of arithmetic operations, as the natural number bias has been more frequently observed in multiplication and division items than in addition and subtraction ones, a stronger awareness of the possible negative consequences of introducing multiplication through the repeated addition model and introducing division through the equal sharing model may help to prevent students' later conceptual difficulties with these operations (Van Hoof et al., 2015a). The model of repeated addition in which the multiplier is the number of equivalent collections and the multiplicand is the size of each collection can lead students to the intuitive rule that the product of a multiplication must always be a larger number than the factors (Bell et al., 1981; Fischbein et al., 1985). In division, the intuitive model of a partitive division that implies sharing into *n* equal parts, whereby *n* is the divisor and the quotient is the size of such a part can lead students to the intuitive rule that the quotient is smaller than the dividend, which leads them to consider that the result of a division always results in a smaller number (Bell et al., 1981; Fischbein et al., 1985; Greer, 1987; Hart et al., 1981).

In the domain of density, some of students' difficulties in understanding the dense structure of rational numbers are related with the fact that rational numbers can be represented as both fractions and decimals (Carpenter et al., 1993; Khoury & Zazkis, 1994). Teachers should emphasise the issue that decimal numbers and fractions are representations of the same rational number. Students need to understand that it is possible to find a fraction between two decimal numbers (as well as its decimal representation), and a decimal between two fractions (as well as its fraction representation).

Finally, our results have also implications for the design of learning trajectories of rational numbers. These learning trajectories are useful information for both the development of the curriculum in primary and secondary school, and the design of courses for initial or in-service teachers' training. Regarding the development of the curriculum, the learning trajectories of rational numbers provide primary and secondary school teachers with information about stages in the development of the mathematical competence in the different domains considered (arithmetic operations, density, and size).

The learning trajectories of rational number can also be used in teacher training programs to provide pre-service or in-service teachers with a frame or guide to focus on relevant mathematical aspects of students' understanding. Therefore, learning trajectories can be used by pre-service or in-service teachers as a guide to structure their attention to students' mathematical thinking. They could help them to anticipate and interpret student's mathematical understanding and respond, with an appropriate instruction, to help students' progress in their understanding (Edgington, Wilson, Sztajn, & Webb, 2016; Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls, & Callejo, 2018; Ivars, Fernández, & Llinares, 2020; Sztajn, Confrey, Wilson, & Edgington, 2012)

## 7.7. FURTHER LINES OF RESEARCH

Future research would benefit from longitudinal designs to examine how learners' individual understanding of rational numbers progresses over time. This type of study could clarify possible transitions between profiles identified.

Furthermore, although our results evidenced different students' profiles (ways of thinking) related to their understanding of rational numbers in the different domains, a qualitative study focusing on different student's reasoning would also be valuable in the domains of arithmetic operations and density, to build a deeper understanding of the profiles we have identified. It would be worth conducting interviews with students belonging to the different profiles (as we have done in the size domain) not only to support our results, but also to gain clearer insights into students' different ways of thinking.

In the arithmetic operations study, a qualitative study could also lead to explaining the differences observed in our study regarding the items in which students have to anticipate the result of a multiplication or a division, and the items in which they have to anticipate an operation in a word-problem. It could also contribute to advance our comprehension of students' knowledge about division, since a group of students had a low performance in both congruent and incongruent items. As it has previously mentioned, difficulties are not necessarily related with the natural number bias phenomenon.

With regard to size domain, the existence of other incorrect ways of thinking that are not based on the natural number knowledge raises questions about when and why these incorrect ways of thinking appear in students. It is widely assumed that natural number bias is due to students' interference with their prior knowledge about natural numbers when they are working with rational numbers, and thus mainly occurs at the beginning of the learning process. In addition, our results about insecurity reasons from students who reasoning in that way (*NNB* profile) seem to show that it is a naïve way of thinking. However, gap thinking and reverse bias thinking seem to be learned during the middle school (González-Forte et al., 2019b). In this sense, a longitudinal approach (as we have mentioned before) would be very valuable. A longitudinal study along the same age range could focus on the emergence and development of these types of thinking, clarifying whether students who at some point in time stop relying on natural number knowledge can immediately make a transition to a correct answering pattern, or instead, whether they (first) develop into using other incorrect ways of thinking, such as gap thinking or reverse bias.

Furthermore, further research on gap thinking is also necessary. The current research has included fraction comparison items with different gap between numerator and denominator. However, the inclusion of fraction comparison items with the same gap, where gap thinking leads to the incorrect answer ("both fractions are equal"), could help to find differences between students who use gap thinking only when the gap is different and students who use gap thinking in both cases. Furthermore, gap thinking strategy is an "additive" way of looking at fractions instead of a multiplicative one, and therefore comes close to the correct way of thinking (it is a relational way of reasoning) but at the same time reflects a typical and resistant error in multiplicative reasoning (Clark & Kamii, 1996; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2012; Hart et al., 1981; Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2010). Further research about the origin of this "additive" reasoning and its transition to multiplicative –and correct- reasoning could be valuable.

Finally, although our study has provided some relationships between domains, a research focused on determining general profiles regarding the three domains could provide more information about the stages in the understanding of rational numbers.

# REFERENCIAS

## REFERENCIAS

Barraza, P., Avaria, R., & Leiva, I. (2017). The role of attentional networks in the access to the numerical magnitude of fractions in adults/El rol de las redes atencionales en el acceso a la magnitud numérica de fracciones en adultos. *Estudios de Psicología*, *38*(2), 495-522. https://doi.org/10.1080/02109395.2017.1295575

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. A Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296–333). New York: Macmillan.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post T., & Lesh R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323-341. https://doi.org/10.2307/748423

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(4), 399-420. https://doi.org/10.1007/BF00308139

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how? En P. Trafton (Ed.), *National council of teachers of mathematics 1989 yearbook: New directions for elementary school mathematics* (pp. 156–167). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Broitman, C., Itzcovich, H., & Quaranta, M. E. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(1), 5-26.

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Romberg, T. A. (Eds.) (1993). *Studies in mathematical thinking and learning. Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Chiu, T., Fang, D., Chen, J., Wang, Y., & Jeris, C. (2001). A robust and scalable clustering algorithm for mixed type attributes in large database environment. En *Proceedings of the seventh ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining* (pp. 263-268). ACM. https://doi.org/10.1145/502512.502549

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, *47*(5), 747-758. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0675-6

Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 41–51. https://doi.org/10.2307/749196

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127-138. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9198-9

Cramer, K., Post, T., & delMas, R. (2002). Initial fraction learning by fourth-and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 111-144. https://doi.org/10.2307/749646

Depaepe, F., Van Roy, P., Torbeyns, J., Kleickmann, T., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2018). Stimulating pre-service teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(2), 197-216. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9822-7

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2011). The whole number bias in fraction magnitude comparisons with adults. En L. Carlson, C. Hoelscher, & T. F. Shipley (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 1751-1756). Austin, TX: Cognitive Science Society.

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *37*, 39-49. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.07.002

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction*, *37*, 21-29. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.08.003

Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P., & Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator, 5*(1), 65-80. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.5.1.0065

Escolano, R. (2002). Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: un estudio desde el modelo cociente. En M. F. Moreno, F. Gil; M. Socas, & J. D. Godino (Eds.), *Investigación en Educación Matemática V* (pp. 149-158). Almería: SEIEM.

Fazio, L. K., DeWolf, M., & Siegler, R. S. (2016). Strategy use and strategy choice in fraction magnitude comparison. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *42*(1), 1-16. https://doi.org/10.1037/xlm0000153

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2012). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *European Journal of Psychology of Education*, *27*(3), 421-438. https://doi.org/10.1007/s10212-011-0087-0

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39–61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. *An educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*, 3-17. https://doi.org/10.2307/748969

Gelman, R., & Williams, E. (1998). Enabling constraints for cognitive development and learning: Domain specificity and epigenesis. En W. Damon, D. Kuhn, & R. S. Siegler (Eds.), *Handbook of child psychology: Cognition, perception, and language* (Vol. 2, pp. 575-630). New York: Wiley.

Gelman, R., Cohen, M., & Hartnett, P. (1989). To know mathematics is to go beyond thinking that "fractions aren't numbers". En C. Maher, G. Goldin, & R. Davis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 29–67). New Brunswick, NJ: Center for Mathematics, Science, and Computer Education at Rutgers–The State University of New Jersey.

Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. En D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (ERME)* (pp. 416-425). Nicosia, Cyprus: Department of Education, University of Cyprus.

Gómez, D. M., & Dartnell, P. (2015). Is there a natural number bias when comparing fractions without common components? A meta-analysis. En K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 1-8). Hobart, Australia: PME.

Gómez, D. M., & Dartnell, P. (2019). Middle schoolers' biases and strategies in a fraction comparison task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(6), 1233-1250. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9913-z

Gómez, D. M., Jiménez, A., Bobadilla, R., Reyes, C., & Dartnell, P. (2015). The effect of inhibitory control on general mathematics achievement and fraction comparison in middle school children. *ZDM*, *47*(5), 801-811. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0685-4

Gómez, D. M., Silva, E., & Dartnell, P. (2017). Mind the gap: congruency and gap effects in engineering students' fraction comparison. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 353-360). Singapore: PME.

González-Forte, J. M., Fernández, C., & Llinares, S. (2018a). La influencia del conocimiento de los números naturales en la comprensión de los números racionales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, & A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 241-250). Gijón: SEIEM.

González-Forte, J. M., Fernández, C., & Llinares, S. (2019a). El fenómeno *natural number bias*: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales. *Quadrante*, *28*(2), 32-52.

González-Forte, J. M., Fernández, C., & Van Dooren, W. (2018b). Gap and congruency effect in fraction comparison. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 459-466). Umeå, Sweden: PME.

González-Forte, J. M., Fernández, C., & Van Dooren, W. (2020). Is there a gap or congruency effect? A cross-sectional study of students' performance in fraction comparison. *Studia Psychologica*.

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2019b). Various ways to determine rational number size: an exploration across primary and secondary education. *European Journal of Psychology of Education*. https://doi:10.1007/s10212-019-00440-w

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2019c). Estudio cualitativo de los razonamientos de los estudiantes de primaria y secundaria sobre la magnitud de las fracciones. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-

Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 363-372). Valladolid: SEIEM.

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2019d). Exploring students' reasoning about fraction magnitude. En M. Graven, H. Venkat, A. Essien & P. Vale (Eds.). *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 272-279). Pretoria, South Africa: PME.

Greer, B. (1987). Nonconservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), 37-45. https://doi.org/10.2307/749535

Hart, K. M., Brown, M. L., Kuchemann, D. E., Kerslake, D., Ruddock, G., & McCartney, M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.

Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction*, *8*(4), 341-374. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00026-1

Hiebert, J., & Wearne, D. (1985). A model of students' decimal computation procedures. *Cognition and Instruction*, *2*(3-4), 175-205. https://doi.org/10.1080/07370008.1985.9648916

Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 199-223). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2020). A learning trajectory as a scaffold for pre-service teachers' noticing of students' mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*, 529–548. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor: NFER-NELSON.

Khoury, H. A., & Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Preservice teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(2), 191–204. https://doi.org/10.1007/BF01278921

Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En G. Leinhardt, R. Putnam, & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323–372). Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lichtenstein, S., & Fischhoff, B. (1981). *The effects of gender and instructions on calibration* (Tech. Rep. PTR-1092-81-7). Eugene, OR: Decision Research.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, *38*, 201-221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Lundeberg, M. A., Fox, P. W., & Punćcohaŕ, J. (1994). Highly confident but wrong: Gender differences and similarities in confidence judgments. *Journal of Educational Psychology*, *86*(1), 114-121. https://doi.org/10.1037/0022-0663.86.1.114

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(5), 422-441. https://doi.org/10.2307/749431

Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1991). Students' understanding of the relationship between fractions and decimals. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *13*(1), 3-11.

McMullen, J., & Van Hoof, J. (2020). The role of rational number density knowledge in mathematical development. *Learning and Instruction, 65.* https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.101228

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction*, *37*, 14-20. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.12.004

Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2010). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representations are used by 10-and 12-year-olds? *Journal of Experimental Child Psychology*, *107*(3), 244-259. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2010.04.008

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. En M. Limon, & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 233-258). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction*, *14*(5), 519-534. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.016

Mitchell, A. (2005). Measuring fractions. En P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building connections: Research, theory, and practice. Proceedings of the 28th Conference of the Mathematics Research Group of Australasia* (pp. 545–552). Melbourne: MERGA.

Mitchell, A., & Horne, M. (2010). Gap thinking in fraction pair comparisons is not whole number thinking: Is this what early equivalence thinking sounds like? En L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education* (Vol. 2, pp. 414–421). Freemantle: MERGA.

Moss, J. (2005). Pipes, tubs, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. En Donovan, M. S., & Bransford, J. D. (Eds.), *How students learn: History, Math, and Science in the classroom* (pp. 309-349). Washington DC: National Academies Press.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 122-147. https://doi.org/10.2307/749607

Neumann, R. (1998). Students' ideas on the density of fractions. En H.G. Weigand, A. Peter- Koop, N.Neil, K.Reiss, G. Torner & B. Wollring (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik on Didactics of Mathematics* (pp. 97–104). Munich: Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik.

Neumann, R. (2001). Students' ideas on the density of fractions. En H. G. Weigand, A. Peter-Koop, N. Neil, K. Reiss, G. Torner, & B. Wollring (Eds.), *Developments in mathematics education in German-speaking countries: Selected papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Munich, 1998* (pp. 97–104). Hildesheim, Germany: Gesellschaft f¨ur Didaktik der Mathematik.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Nunes, T., & Bryant, P. (2008). Rational numbers and intensive quantities: challenges and insights to pupils' implicit knowledge. *Anales de Psicología/Annals of Psychology*, *24*(2), 262-270.

O'Connor, M. C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 143–185. https://doi.org/10.1023/A:1014041308444

Obersteiner, A., & Alibali, M. W. (2018). Are adults biased in complex fraction comparison, and can benchmarks help? En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 427-434). Umeå, Sweden: PME.

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J., & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction*, *28*, 64-72. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.05.003

Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*, *107,* 537-555. https://doi.org/10.1111/bjop.12161

Pearn, C., & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. En I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millenium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 430–437). Sydney, Australia: MERGA.

Post, T. R. (1981). Fractions: Results and implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher, 28*(9), 26-31.

Resnick, I., Rinne, L., Barbieri, C., & Jordan, N. C. (2019). Children's reasoning about decimals and its relation to fraction learning and mathematics achievement. *Journal of Educational Psychology*, *111*(4), 604-618. https://doi.org/10.1037/edu0000309

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 8-27. https://doi.org/10.2307/749095

Rinne, L. F., Ye, A., & Jordan, N. C. (2017). Development of fraction comparison strategies: A latent transition analysis. *Developmental Psychology*, *53*(4), 713-730. https://doi.org/10.1037/dev0000275

Rubio-Hurtado, M. J., & Vilà-Baños, R. (2017). El análisis de conglomerados bietápico o en dos fases con SPSS. *REIRE. Revista d'Innovació i Recerca en Educació*, *10*(1), 118-126. http://doi.org/10.1344/reire2017.10.1101

Sackur-Grisvard, C., & Léonard, F. (1985). Intermediate cognitive organizations in the process of learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers. *Cognition and Instruction*, *2*(2), 157-174. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0202_3

Sarstedt, M., & Mooi, E. (2014). *A concise guide to market research. The process, data, and methods using IBM SPSS Statistics.* Berlin: Springer.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, *107*(3), 909-918. https://doi.org/10.1037/edu0000025

Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, *49*(10), 1994-2004. https://doi.org/10.1037/a0031200

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Smith, C. L., Solomon, G. E., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, *51*(2), 101-140. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2005.03.001

Smith, J. P. (1995). Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction*, *13*(1), 3-50. https://doi.org/10.1207/s1532690xci1301_1

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503-518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Steinle, V., & Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in Grades 5 to 10. En C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), *Teaching mathematics in new times* (pp. 548–555). Brisbane, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: toward a theory of teaching. *Educational Researcher, 41*(5), 147–156. https://doi.org/10.3102/0013189X12442801

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Retrieved May 05, 2005 from http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. En S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 265-282). Amsterdam, The Netherlands: Elsevier.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181-209. https://doi.org/10.1080/07370001003676603

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2018). Bridging Psychological and Educational Research on Rational Number Knowledge. *Journal of Numerical Cognition*, *4*(1), 84-106. https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.82

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction*, *21*(5), 676-685. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.03.005

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344-355. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Van Dooren, V., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, *28*(3), 360-381. https://doi.org/10.1080/07370008.2010.488306

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1-4. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences*, *61*, 99-108. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.11.010

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education, 12*(2), 154-164. https://doi.org/10.1080/14794802.2013.797747

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015a). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, *37*, 30-38. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.004

Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015b). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: Characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(1), 39-56. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9613-3

# ANEXOS

# ANEXO I. CUESTIONARIO

# Anexo I. Cuestionario

A continuación, se muestra una de las ocho versiones del cuestionario. En primer lugar, se les proporcionó el Bloque 1.

| **Nombre** | | **Bloque 1A** | |
|---|---|---|---|
| **Curso** | | **Nº de clase** | |

| **¿Cuántos números hay entre 2/5 y 4/5?** |
|---|
| ______________________________ |

| **Rodea la operación que tienes que realizar para llegar a la respuesta correcta:** |
|---|
| *De 1 litro de zumo podemos hacer 15 litros de limonada. ¿Cuántas limonadas se pueden hacer con 0'75 litros de zumo?*<br>A) 0'75 : 15<br>B) 15 x 0'75<br>C) 15 : 0'75 |

| **Rodea el número más grande en cada apartado. Si crees que los dos son igual de grandes, rodea los dos:** |
|---|
| a) 5/8 o 2/7<br>b) 1/3 o 5/8<br>c) 3/8 o 3/4<br>d) 5/7 o 2/5 |

| **Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 72 x 0'99 es mayor o menor que 72?** |
|---|
| Mayor<br>Menor |

**A continuación, puedes ver parejas de números. Para cada pareja, escribe un número que se encuentre entre esos dos números. Si crees que ese número no existe, escribe 'imposible':**

2’5 y 2’7 ________________________________

2/7 y 6/7 ________________________________

3’49 y 3’50 ________________________________

1/3 y 2/3 ________________________________

**¿Cuántos números hay entre 1’9 y 1’40?**

________________________________

**Rodea la operación que tienes que realizar para llegar a la respuesta correcta:**

*Tuve que pagar 9 euros por 3/4 kilos de dulces, ¿cuál es el precio de 1 kilo de dulces?*

a) 9 : 3/4
b) 9 x 3/4
c) 3/4 : 9

**¿Cuántos números hay entre 1’42 y 1’43?**

________________________________



**Haz las operaciones siguientes:**

2/6 + 1/3 =

0’36 – 0’2 =

**Rodea el número más grande en cada apartado. Si crees que los dos son igual de grandes, rodea los dos:**

a) 0’400 o 0’25
b) 0’36 o 0’5
c) 0’3 o 0’30

| **Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 50 x 3/2 es mayor o menor que 50?** |
|---|
| Mayor |
| Menor |

| **Rodea el número más grande en cada apartado. Si crees que los dos son igual de grandes, rodea los dos:** |
|---|
| a) 1/7 o 1/4 |
| b) 2/3 o 7/9 |
| c) 4/9 o 7/9 |
| d) 4/7 o 3/4 |
| e) 4/7 o 1/3 |

| **Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 37 : 1'2 es mayor o menor que 37?** |
|---|
| Mayor |
| Menor |

| **¿Cuántos números hay entre 2/5 y 3/5?** |
|---|
| ________________________________________ |



| **Rodea el número más grande en cada apartado. Si crees que los dos son igual de grandes, rodea los dos:** |
|---|
| a) 3/7 o 7/9 |
| b) 2/5 o 2/9 |
| c) 3/8 o 5/8 |
| d) 2/3 o 3/7 |

| **Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 40 : 7/8 es mayor o menor que 40?** |
|---|
| Mayor |
| Menor |

Al finalizar el Bloque 1, los estudiantes lo entregaban y comenzaban a completar el Bloque 2. Como se puede observar, en la parte final del Bloque 2, se incluyen los cuatro ítems de elección múltiple del dominio de la densidad (Estudio 2). Esto evitaba que los estudiantes pudieran estar influenciados por haber visto la respuesta correcta o la palabra infinito en estos ítems.

| **Nombre** | | **Bloque 2A** | |
|---|---|---|---|
| **Curso** | | **Nº de clase** | |

| **Rodea el número más grande en cada apartado. Si crees que los dos son igual de grandes, rodea los dos:** |
|---|
| a) 1/7 o 3/7<br>b) 4/5 o 4/7<br>c) 5/9 o 2/3<br>d) 1/7 o 4/9 |

| **Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 21 : 0’7 es mayor o menor que 21?** |
|---|
| Mayor<br>Menor |

| **¿Cuántos números hay entre 5/9 y 5/6?** |
|---|
| ________________________________________ |

| **Rodea la operación que tienes que realizar para llegar a la respuesta correcta:** |
|---|
| *Las paredes de mi baño tienen 3 metros de alto, ¿cuántas filas de azulejos necesito para cubrir esta pared si sabes que 1 azulejo tiene 0’15 metros de alto?*<br>a) 3 : 0’15<br>b) 0’15 x 3<br>c) 0’15 : 3 |

| **¿Cuántos números hay entre 2'3 y 2'6?** |
|---|
| ______________________________________________ |

| **Rodea el número más grande en cada apartado. Si crees que los dos son igual de grandes, rodea los dos:** |
|---|
| a) 3/7 o 5/7<br>b) 4/9 o 3/5<br>c) 7/9 o 4/7<br>d) 5/9 o 1/3 |

| **Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 36 x 1'5 es mayor o menor que 36?** |
|---|
| Mayor<br>Menor |

| **A continuación, puedes ver parejas de números. Para cada pareja, escribe un número que se encuentre entre esos dos números. Si crees que ese número no existe, escribe 'imposible':** |
|---|
| 1/4 y 3/4 ______________________________<br>1/8 y 1/9 ______________________________<br>5'3 y 5'8 ______________________________ |

| **Rodea el número más grande en cada apartado. Si crees que los dos son igual de grandes, rodea los dos:** |
|---|
| a) 4'4 o 4'50<br>b) 2'621 o 2'0621<br>c) 5'3 o 5'7 |

**Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 35 x 2/5 es mayor o menor que 35?**

Mayor

Menor

**Rodea la operación que tienes que realizar para llegar a la respuesta correcta:**

*1 kilogramo de oro cuesta 15000 euros, ¿cuál es el precio de 1/5 kilogramo de oro?*

A) 15000 : 1/5

B) 1/5 : 15000

C) 15000 x 1/5

**Haz las siguientes operaciones:**

0’46 + 0’3 =

7/8 – 1/4 =



**Rodea el número más grande en cada apartado. Si crees que los dos son igual de grandes, rodea los dos:**

a) 2/5 o 4/5
b) 4/5 o 5/8
c) 2/3 o 7/9
d) 5/6 o 5/9

**Sin hacer el cálculo, ¿el resultado de 20 : 7/4 es mayor o menor que 20?**

Mayor

Menor

**¿Cuántos números hay entre los siguientes números? Rodea la respuesta más correcta:**

1/6 y 4/6

a) Ningún número
b) Un número finito de números decimales
c) Un número finito de fracciones
d) Infinitos números decimales
e) Infinitas fracciones
f) Infinitos números, que se pueden representar tanto en forma decimal como fracción
g) Ninguna de las anteriores, creo que ______________________________
______________________________________________________________

3’72 y 3’73

a) Ningún número
b) Un número finito de números decimales
c) Un número finito de fracciones
d) Infinitos números decimales
e) Infinitas fracciones
f) Infinitos números, que se pueden representar tanto en forma decimal como fracción
g) Ninguna de las anteriores, creo que ______________________________
______________________________________________________________

0’7 y 0’9

a) Ningún número
b) Un número finito de números decimales
c) Un número finito de fracciones
d) Infinitos números decimales
e) Infinitas fracciones
f) Infinitos números, que se pueden representar tanto en forma decimal como fracción
g) Ninguna de las anteriores, creo que ______________________________
______________________________________________________________

1/3 y 2/3

a) Ningún número
b) Un número finito de números decimales
c) Un número finito de fracciones
d) Infinitos números decimales
e) Infinitas fracciones
f) Infinitos números, que se pueden representar tanto en forma decimal como fracción
g) Ninguna de las anteriores, creo que ______________________________
______________________________________________________________

# ANEXO II. PROTOCOLO DE ENTREVISTA A ESTUDIANTE DEL PERFIL *ALL CORRECT*

# Anexo II. Protocolo de entrevista a estudiante del perfil *All Correct*

A continuación, se muestra el protocolo seguido en la entrevista realizada en el Estudio 3B a los estudiantes del perfil *All Correct*. La entrevista estaba dividida en dos partes.

**PRIMERA PARTE DE LA ENTREVISTA:**

*Buenos días. ¿Te acuerdas del cuestionario que respondiste sobre fracciones y decimales? ¡Pues ahora quiero aprender más acerca de cómo piensas sobre las fracciones!*

*Para ello, en primer lugar, te voy a ir enseñando algunas tareas del cuestionario. Me gustaría que me explicaras cómo identificaste la fracción más grande, en qué te fijaste, por qué no elegiste la otra fracción…*

*La primera es:*

| 2/3 o 7/9 |
|---|

*En el cuestionario indicaste que 7/9 es la fracción más grande. ¿Puedes explicarme cómo has encontrado que 7/9 es la fracción más grande?*

*Vale, ahora me gustaría que marcases en la siguiente escala cuánto de seguro estás de que la respuesta marcada es la correcta. ¿Por qué has seleccionado esa respuesta?*



| Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|

*Ahora vas a hacer lo mismo con la siguiente comparación. En esta comparación, marcaste que 5/8 es la fracción mayor. ¿Puedes explicarme cómo descubriste que 5/8 es la fracción mayor?*

| 4/5 o 5/8 |
|---|

*¿Y cuánto de seguro estás de que es la fracción mayor?*

| Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|

*Y en esta. Indicaste que 4/7 es la fracción más grande. ¿Cómo lo descubriste?*

| 4/7 o 1/3 |
|---|

*¿Cuánto de seguro estás?*

| Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|

*Y en esta última, lo mismo. ¿Me puedes decir cómo encontraste la fracción mayor?*

| 2/3 o 3/7 |
|---|

*¿Y cuánto de seguro estás de que es la fracción mayor?*

| Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|

**SEGUNDA PARTE DE LA ENTREVISTA:**

*A continuación, te voy enseñar otra tarea del cuestionario y tres respuestas de otros estudiantes donde explican cómo encontraron sus respuestas. Léelas tranquilamente y dime si estás de acuerdo con alguna de las explicaciones. En caso de que no estés de acuerdo con ninguna, explícame por qué crees que no son explicaciones correctas.*

*¿Cuál eliges?*

**(Le enseñamos el ítem 1/3 vs 5/8, junto con tres respuestas ficticias de estudiantes en cartulinas plastificadas, basadas en NNB (Marta), Reverse bias (Andrés) y Gap thinking (Pere))*

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | PERE<br>Es 1/3 porque de 1 a 3 hay 2 y de 5 a 8 hay 3, por lo que en 1/3 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | MARTA<br>Es 5/8 porque 5 es más grande que 1 y 8 es más grande que 3. Es decir, los números son más grandes y por tanto 5/8 es mayor. |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | ANDRÉS<br>Es 1/3 porque 3 es más pequeño que 8, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor. |

*Ahora haremos lo mismo con la siguiente tarea. Aquí tienes las respuestas de los estudiantes. ¿Qué opinas? ¿Cuál eliges? ¿Estás de acuerdo con alguna? ¿Por qué?*

**(Le enseñamos el ítem 4/7 vs 3/4, junto con tres respuestas ficticias de estudiantes en cartulinas plastificadas, basadas en NNB (Roberto), Reverse bias (Alicia) y Gap thinking (María))*

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | ALICIA<br>Es 3/4 porque 4 es más pequeño que 7, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor. |

| Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor. | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | MARÍA<br>Es 3/4 porque de 3 a 4 hay 1 y de 4 a 7 hay 3, por lo que en 3/4 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. |

| Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor. | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | ROBERTO<br>Es 4/7 porque 4 es más grande que 3, y 7 es más grande que 4. Es decir, los números son más grandes y por tanto 4/7 es mayor. |

*Muchas gracias por participar. ¡Lo has hecho muy bien!*

# ANEXO III. PROTOCOLO DE ENTREVISTA A ESTUDIANTE DEL PERFIL *GAP THINKER*

## Anexo III. Protocolo de entrevista a estudiante del perfil *Gap Thinker*

A continuación, se muestra el protocolo seguido en la entrevista realizada en el Estudio 3B a los estudiantes del perfil *Gap Thinker*. La entrevista estaba dividida en dos partes.

**PRIMERA PARTE DE LA ENTREVISTA:**

*Buenos días. ¿Te acuerdas del cuestionario que respondiste sobre fracciones y decimales? ¡Pues ahora quiero aprender más acerca de cómo piensas sobre las fracciones!*

*Para ello, en primer lugar, te voy a ir enseñando algunas tareas del cuestionario. Me gustaría que me explicaras cómo identificaste la fracción más grande, en qué te fijaste, por qué no elegiste la otra fracción…*

*La primera es:*

| 2/3 o 3/7 |
| --- |

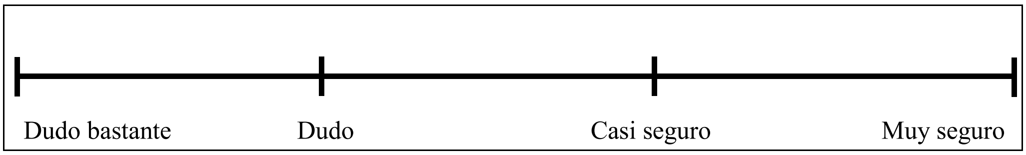
*En el cuestionario indicaste que 2/3 es la fracción más grande. ¿Puedes explicarme cómo has encontrado que 2/3 es la fracción más grande?*

*Vale, ahora me gustaría que marcases en la siguiente escala cuánto de seguro estás de que la respuesta marcada es la correcta. ¿Por qué has seleccionado esa respuesta?*


*Ahora vas a hacer lo mismo con la siguiente comparación. En esta comparación, marcaste que 1/3 es la fracción mayor. ¿Puedes explicarme cómo descubriste que 1/3 es la fracción mayor?*

| 4/7 o 1/3 |
| --- |

*¿Y cuánto de seguro estás de que es la fracción mayor?*



*Y en esta. Indicaste que 4/5 es la fracción más grande. ¿Cómo lo descubriste?*

| 4/5 o 5/8 |
|---|

*¿Cuánto de seguro estás?*

| Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|

*Y en esta última, lo mismo. ¿Me puedes decir cómo encontraste la fracción mayor?*

| 2/3 o 7/9 |
|---|

*¿Y cuánto seguro estás de que es la fracción mayor?*

| Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|

**SEGUNDA PARTE DE LA ENTREVISTA:**

*A continuación, te voy enseñar otra tarea del cuestionario y tres respuestas de otros estudiantes donde explican cómo encontraron sus respuestas. Léelas tranquilamente y dime si estás de acuerdo con alguna de las explicaciones. En caso de que no estés de acuerdo con ninguna, explícame por qué crees que no son explicaciones correctas.*



*¿Cuál eliges?*

******(Le enseñamos el ítem 4/7 vs 3/4, junto con tres respuestas ficticias de estudiantes en cartulinas plastificadas, basadas en NNB (Roberto), Reverse bias (Alicia) y Gap thinking (María))*

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | ALICIA<br>Es 3/4 porque 4 es más pequeño que 7, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor. |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | MARÍA<br>Es 3/4 porque de 3 a 4 hay 1 y de 4 a 7 hay 3, por lo que en 3/4 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | ROBERTO<br>Es 4/7 porque 4 es más grande que 3, y 7 es más grande que 4. Es decir, los números son más grandes y por tanto 4/7 es mayor. |

*Ahora haremos lo mismo con la siguiente tarea. Aquí tienes las respuestas de los estudiantes. ¿Qué opinas? ¿Cuál eliges? ¿Estás de acuerdo con alguna? ¿Por qué?*

**(Le enseñamos el ítem 1/3 vs 5/8, junto con tres respuestas ficticias de estudiantes en cartulinas plastificadas, basadas en NNB (Marta), Reverse bias (Andrés) y Gap thinking (Pere))*

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | PERE<br>Es 1/3 porque de 1 a 3 hay 2 y de 5 a 8 hay 3, por lo que en 1/3 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | MARTA<br>Es 5/8 porque 5 es más grande que 1 y 8 es más grande que 3. Es decir, los números son más grandes y por tanto 5/8 es mayor. |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | ANDRÉS<br>Es 1/3 porque 3 es más pequeño que 8, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor. |

*Muchas gracias por participar. ¡Lo has hecho muy bien!*

# ANEXO IV. PROTOCOLO DE ENTREVISTA A ESTUDIANTE DEL PERFIL *NNB*

## Anexo IV. Protocolo de entrevista a estudiante del perfil *NNB*

A continuación, se muestra el protocolo seguido en la entrevista realizada en el Estudio 3B a los estudiantes del perfil *NNB*. La entrevista estaba dividida en dos partes.

**PRIMERA PARTE DE LA ENTREVISTA:**

*Buenos días. ¿Te acuerdas del cuestionario que respondiste sobre fracciones y decimales? ¡Pues ahora quiero aprender más acerca de cómo piensas sobre las fracciones!*

*Para ello, en primer lugar, te voy a ir enseñando algunas tareas del cuestionario. Me gustaría que me explicaras cómo identificaste la fracción más grande, en qué te fijaste, por qué no elegiste la otra fracción…*

*La primera es:*

2/3 o 7/9

*En el cuestionario indicaste que 7/9 es la fracción más grande. ¿Puedes explicarme cómo has encontrado que 7/9 es la fracción más grande?*

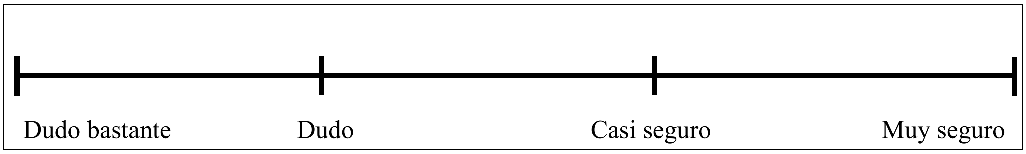
*Vale, ahora me gustaría que marcases en la siguiente escala cuánto de seguro estás de que la respuesta marcada es la correcta. ¿Por qué has seleccionado esa respuesta?*




*Ahora vas a hacer lo mismo con la siguiente comparación. En esta comparación, marcaste que 5/8 es la fracción mayor. ¿Puedes explicarme cómo descubriste que 5/8 es la fracción mayor?*

4/5 o 5/8

*¿Y cuánto de seguro estás de que es la fracción mayor?*



*Y en esta. Indicaste que 4/7 es la fracción más grande. ¿Cómo lo descubriste?*

| 4/7 o 1/3 |
|---|

*¿Cuánto de seguro estás?*

Dudo bastante  Dudo  Casi seguro  Muy seguro

*Y en esta última, lo mismo. ¿Me puedes decir cómo encontraste la fracción mayor?*

| 2/3 o 3/7 |
|---|

*¿Y cuánto seguro estás de que es la fracción mayor?*

Dudo bastante  Dudo  Casi seguro  Muy seguro

**SEGUNDA PARTE DE LA ENTREVISTA:**



*A continuación, te voy enseñar otra tarea del cuestionario y tres respuestas de otros estudiantes donde explican cómo encontraron sus respuestas. Léelas tranquilamente y dime si estás de acuerdo con alguna de las explicaciones. En caso de que no estés de acuerdo con ninguna, explícame por qué crees que no son explicaciones correctas.*

*¿Cuál eliges?*

**(Le enseñamos el ítem 1/3 vs 5/8, junto con tres respuestas ficticias de estudiantes en cartulinas plastificadas, basadas en NNB (Marta), Reverse bias (Andrés) y Gap thinking (Pere))*

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | PERE<br>Es 1/3 porque de 1 a 3 hay 2 y de 5 a 8 hay 3, por lo que en 1/3 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | MARTA<br>Es 5/8 porque 5 es más grande que 1 y 8 es más grande que 3. Es decir, los números son más grandes y por tanto 5/8 es mayor. |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | ANDRÉS<br>Es 1/3 porque 3 es más pequeño que 8, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor. |

*Ahora haremos lo mismo con la siguiente tarea. Aquí tienes las respuestas de los estudiantes. ¿Qué opinas? ¿Cuál eliges? ¿Estás de acuerdo con alguna? ¿Por qué?*

**(Le enseñamos el ítem 4/7 vs 3/4, junto con tres respuestas ficticias de estudiantes en cartulinas plastificadas, basadas en NNB (Roberto), Reverse bias (Alicia) y Gap thinking (María))*

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | ALICIA<br>Es 3/4 porque 4 es más pequeño que 7, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor. |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | MARÍA<br>Es 3/4 porque de 3 a 4 hay 1 y de 4 a 7 hay 3, por lo que en 3/4 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | ROBERTO<br>Es 4/7 porque 4 es más grande que 3, y 7 es más grande que 4. Es decir, los números son más grandes y por tanto 4/7 es mayor. |

*Muchas gracias por participar. ¡Lo has hecho muy bien!*

# ANEXO V. PROTOCOLO DE ENTREVISTA A ESTUDIANTE DEL PERFIL *REVERSE BIAS*

## Anexo V. Protocolo de entrevista a estudiante del perfil *Reverse Bias*

A continuación, se muestra el protocolo seguido en la entrevista realizada en el Estudio 3B a los estudiantes del perfil *Reverse Bias*. La entrevista estaba dividida en dos partes.

**PRIMERA PARTE DE LA ENTREVISTA:**

*Buenos días. ¿Te acuerdas del cuestionario que respondiste sobre fracciones y decimales? ¡Pues ahora quiero aprender más acerca de cómo piensas sobre las fracciones!*

*Para ello, en primer lugar, te voy a ir enseñando algunas tareas del cuestionario. Me gustaría que me explicaras cómo identificaste la fracción más grande, en qué te fijaste, por qué no elegiste la otra fracción…*

*La primera es:*

| 2/3 o 3/7 |
|---|

*En el cuestionario indicaste que 2/3 es la fracción más grande. ¿Puedes explicarme cómo has encontrado que 2/3 es la fracción más grande?*

*Vale, ahora me gustaría que marcases en la siguiente escala cuánto de seguro estás de que la respuesta marcada es la correcta. ¿Por qué has seleccionado esa respuesta?*

| Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|

*Ahora vas a hacer lo mismo con la siguiente comparación. En esta comparación, marcaste que 1/3 es la fracción mayor. ¿Puedes explicarme cómo descubriste que 1/3 es la fracción mayor?*

| 4/7 o 1/3 |
|---|

*¿Y cuánto de seguro estás de que es la fracción mayor?*

| Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|

*Y en esta. Indicaste que 4/5 es la fracción más grande. ¿Cómo lo descubriste?*

| 4/5 o 5/8 |
|---|

*¿Cuánto de seguro estás?*

| Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|

*Y en esta última, lo mismo. ¿Me puedes decir cómo encontraste la fracción mayor?*

| 2/3 o 7/9 |
|---|

*¿Y cuánto seguro estás de que es la fracción mayor?*

| Dudo bastante | Dudo | Casi seguro | Muy seguro |
|---|---|---|---|

**SEGUNDA PARTE DE LA ENTREVISTA:**

*A continuación, te voy enseñar otra tarea del cuestionario y tres respuestas de otros estudiantes donde explican cómo encontraron sus respuestas. Léelas tranquilamente y dime si estás de acuerdo con alguna de las explicaciones. En caso de que no estés de acuerdo con ninguna, explícame por qué crees que no son explicaciones correctas.*

*¿Cuál eliges?*

**(Le enseñamos el ítem 4/7 vs 3/4, junto con tres respuestas ficticias de estudiantes en cartulinas plastificadas, basadas en NNB (Roberto), Reverse bias (Alicia) y Gap thinking (María))*

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | ALICIA<br>Es 3/4 porque 4 es más pequeño que 7, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor. |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | MARÍA<br>Es 3/4 porque de 3 a 4 hay 1 y de 4 a 7 hay 3, por lo que en 3/4 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 4/7 o 3/4 | ROBERTO<br>Es 4/7 porque 4 es más grande que 3, y 7 es más grande que 4. Es decir, los números son más grandes y por tanto 4/7 es mayor. |

*Ahora haremos lo mismo con la siguiente tarea. Aquí tienes las respuestas de los estudiantes. ¿Qué opinas? ¿Cuál eliges? ¿Estás de acuerdo con alguna? ¿Por qué?*

**(Le enseñamos el ítem 1/3 vs 5/8, junto con tres respuestas ficticias de estudiantes en cartulinas plastificadas, basadas en NNB (Marta), Reverse bias (Andrés) y Gap thinking (Pere))*



| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | |

| **Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor.** | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | PERE<br>Es 1/3 porque de 1 a 3 hay 2 y de 5 a 8 hay 3, por lo que en 1/3 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. |

| Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor. | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | MARTA<br>Es 5/8 porque 5 es más grande que 1 y 8 es más grande que 3. Es decir, los números son más grandes y por tanto 5/8 es mayor. |

| Rodea el número más grande y explica por qué crees que el número que has marcado es el mayor. | |
|---|---|
| a) 1/3 o 5/8 | ANDRÉS<br>Es 1/3 porque 3 es más pequeño que 8, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor. |

*Muchas gracias por participar. ¡Lo has hecho muy bien!*