



UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE ALICANTE
DEPARTAMENTO DE FISICA APLICADA

Temas de Física para Ingeniería

CORRIENTE ALTERNA

Augusto Beléndez Vázquez
Alicante, 1989

CORRIENTE ALTERNA

- Generación de una corriente alterna (CA) sinusoidal. f.e.m. alterna
- Números complejos
- f.e.m. e intensidad complejas. Valores eficaces y medios
- Circuito resistivo puro
- Circuito inductivo puro . Inductancia
- Circuito capacitivo puro . Capacitancia
- Circuito RLC serie . Asociación de impedancias
- Potencia de la corriente alterna
- Resolución de circuitos de corriente alterna

CORRIENTE ALTERNA

Generación de una corriente alterna sinusoidal. f.e.m. alterna

Sé conoce con el nombre de corriente alterna a toda corriente que invierte su sentido periódicamente. Aquí nos limitaremos al estudio más sencillo e interesante, que es aquél en el cual la intensidad de la corriente es una función sinusoidal del tiempo:

$$I = I_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

en la que I_0 es la intensidad máxima; ω es la pulsación, $\omega t + \varphi$ es la fase, y φ , la fase inicial.

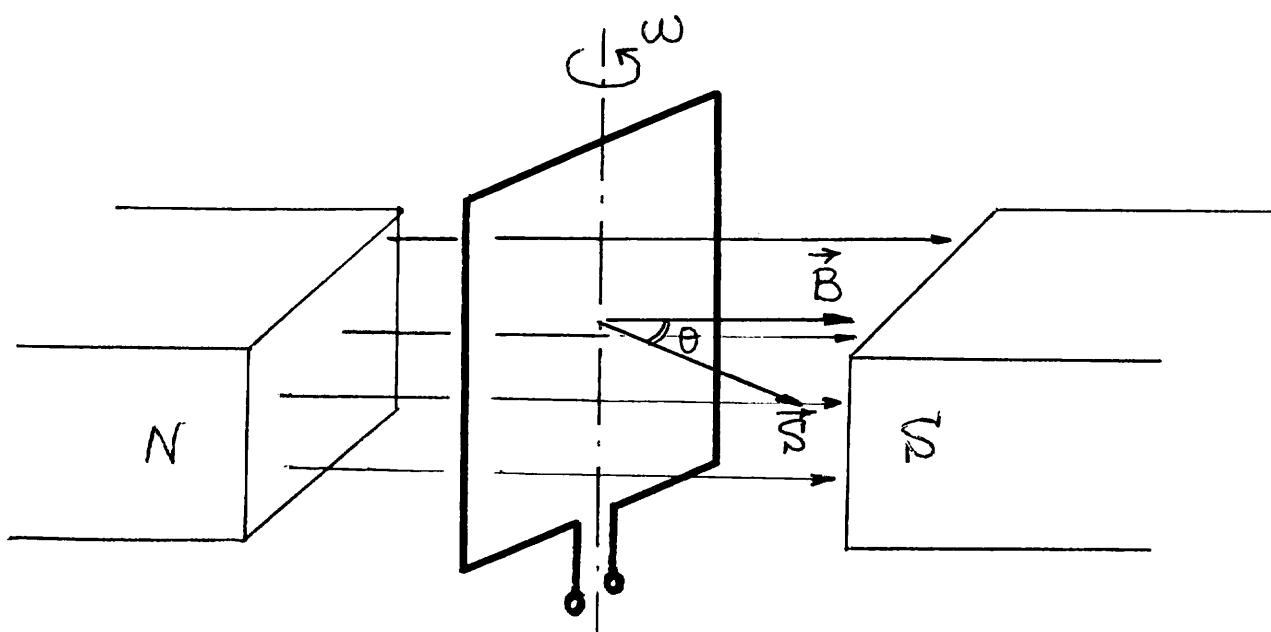
Veamos como es posible generar una corriente alterna sinusoidal. Supongamos un cuadro o espira rectangular que gira con velocidad angular ω constante en el interior de un campo magnético constante \vec{B} , perpendicular al eje de giro. Los extremos del cuadro están conectados con dos anillos, sobre los cuales se apoyan unas escobillas metálicas que toman la corriente y la conducen al circuito de utilización. El vector \vec{s} representa la superficie que presenta la espira ante las líneas del campo.

Al girar el cuadro, el flujo del campo magnético, a través de la superficie limitada por el cuadro, experimenta una variación periódica

con el tiempo, según la ecuación:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \theta$$

siendo θ el ángulo que forman el vector campo \vec{B} y el vector superficie \vec{S} del cuadro.



En un momento determinado el vector \vec{S} tiene la misma orientación de \vec{B} y el flujo es máximo, cuando sigue girando, el flujo disminuye y aparece, por la Ley de inducción de Faraday, una fuerza electromotriz inducida en la espira. Como

$$\theta = \omega t$$

queda:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \omega t$$

es decir, el flujo varía sinusoidalmente con el tiempo. El valor de la f.e.m. inducida será:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

es decir,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot S \cdot w \cdot \sin \omega t$$

o bien,

$$\mathcal{E} = E_0 \cdot \sin \omega t$$

donde $E_0 = B \cdot S \cdot w$ es el valor máximo de la f.e.m. inducida. Esta f.e.m. inducida es sinusoidal.

La situación analizada corresponde al caso en que para $t=0$, $\theta=0$. Si existe un ángulo inicial φ para $t=0$, entonces podemos escribir $\theta = \omega t + \varphi$, con lo cual:

$$\mathcal{E} = E_0 \cdot \sin (\omega t + \varphi)$$

La f.e.m. variará sinusoidalmente con el tiempo y recibe el nombre de f.e.m. alterna instantánea.

Sabemos que la velocidad angular w está relacionada con el período T y la frecuencia ν :

$$w = \frac{2\pi}{T} ; \quad T = \frac{1}{\nu} ; \quad \omega = 2\pi\nu$$

El período T indica el tiempo que tarda la

espira en dar una vuelta completa, es decir, en girar 2π radianes. v representa el número de vueltas por segundo.

La frecuencia de la corriente alterna utilizada en España es de 50 Hz.

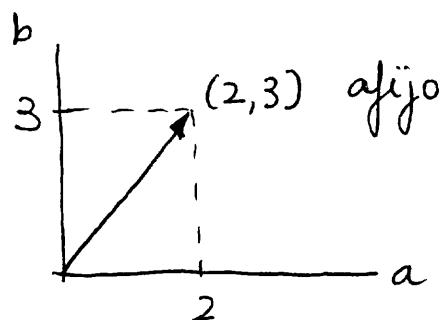
Un generador de corriente alterna se representa mediante el símbolo:



Números complejos

(a, b) par ordenado de números reales

$$(a, b) \equiv a + jb \quad (\text{forma binómica})$$

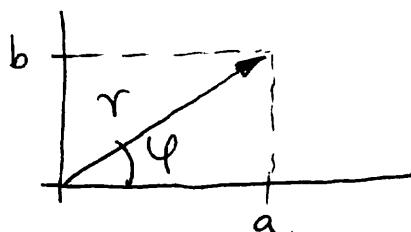


- Conjugado de un número complejo :

$$(2, 3)^* = (2, -3)$$

$$(2+3j)^* = (2-3j)$$

- Número complejo en forma polar :



$$r_\varphi \equiv r \angle \varphi \quad (\text{notación de Steinmetz})$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}$$

- Operaciones con números complejos:

$$\text{Suma: } (a+jb) + (c+jd) = (a+c) + j(b+d)$$

$$\text{Producto: } (a+jb) \cdot (c+jd) = ac + adj + bcj + bdj^2 =$$

$$(j^2 = -1) \quad = (ac - bd) + (ad + bc)j$$

$$\begin{aligned} \text{Cociente: } \frac{a+jb}{c+jd} &= \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{ac - adj + bcj - bdj}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

En forma polar:

$$\text{Producto: } (A \angle \varphi)(B \angle \alpha) = AB \angle \varphi + \alpha$$

$$\text{Cociente: } \frac{(A \angle \varphi)}{(B \angle \alpha)} = \frac{A}{B} \angle \varphi - \alpha$$

$$\sqrt{A \angle \varphi} = \sqrt{A} \angle \varphi/2$$

$$(\sqrt{A} \angle \frac{\varphi}{2})^2 = A \angle \varphi$$

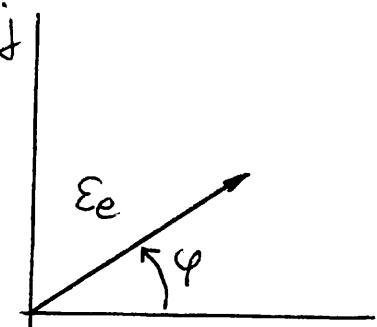
f.e.m. e intensidad complejas . Valores eficaces y medios

Se define la f.e.m. compleja \vec{E} como el número complejo cuyo módulo es la f.e.m. eficaz, E_e , y cuyo argumento es la fase inicial, φ :

$$\vec{E} = E_e \angle \varphi$$

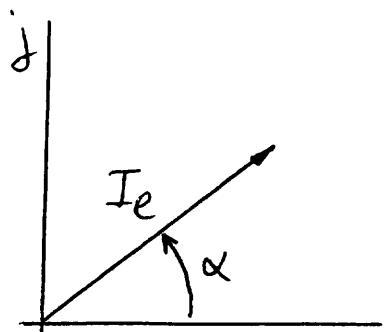
es decir,

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \angle \varphi$$



De igual modo , se define la intensidad compleja ,

$$\vec{I} = I_e \angle \alpha$$



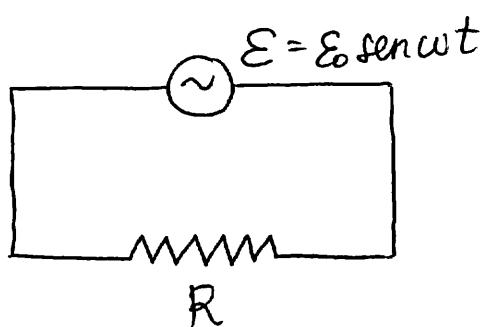
(a) Valores eficaces

Se llama valor eficaz de una magnitud sinusoidal a la raíz cuadrada del valor medio de su cuadrado.

Si conectamos a los extremos del generador de corriente alterna una resistencia R , se establecerá una corriente eléctrica de intensidad:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{E_0 \operatorname{sen} \omega t}{R} = I_0 \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

es decir, varía periódicamente con el tiempo.



El efecto térmico de la corriente es proporcional, según la ley de Joule, al producto $I^2 R$ y, por tanto, independiente de que I sea positivo o negativo.

Por definición, se llama intensidad eficaz de una corriente alterna al valor I_e de una corriente continua que produce en una resistencia la misma cantidad de calor por unidad

de tiempo que aquella corriente alterna.

El valor eficaz será:

$$\begin{aligned} I_e &= \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt \right)^{1/2} = \\ &= I_0 \left(\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt \right)^{1/2} = I_0 \left(\frac{1}{2T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt \right)^{1/2} = \\ &= I_0 \left(\frac{1}{2T} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T \right)^{1/2} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Es decir,

$$I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0'707 I_0$$

Análogamente, para la f.e.m. alterna, el valor eficaz será:

$$\mathcal{E}_e = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} = 0'707 \mathcal{E}_0$$

Se define el factor de amplitud de una magnitud sinusoidal como el cociente entre sus valores máximo y eficaz. Tanto para la intensidad como para la f.e.m. alternas, el factor de amplitud es:

$$\frac{I_0}{I_e} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_e} = \sqrt{2}$$

(b) Valores medios

Para definir la f.e.m. media y la intensidad media, se toma el valor medio de estas magnitudes (f.e.m. e intensidad instantáneas) en un semiperíodo, $T/2$, pues su valor medio durante un período es nulo.

La intensidad media, $\langle I \rangle$, será:

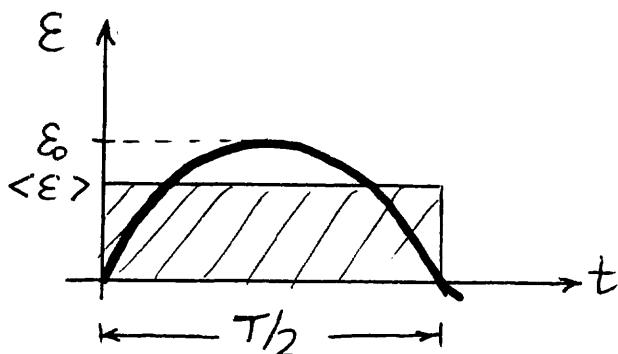
$$\begin{aligned}\langle I \rangle &= \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I \cdot dt = \frac{1}{T/2} I_0 \int_0^{T/2} \sin \omega t \, dt = \\ &= \frac{2 I_0}{\pi} \left[-\frac{1}{\omega} \cos \omega t \right]_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} I_0\end{aligned}$$

así pues,

$$\langle I \rangle = \frac{2}{\pi} I_0 = 0'637 I_0$$

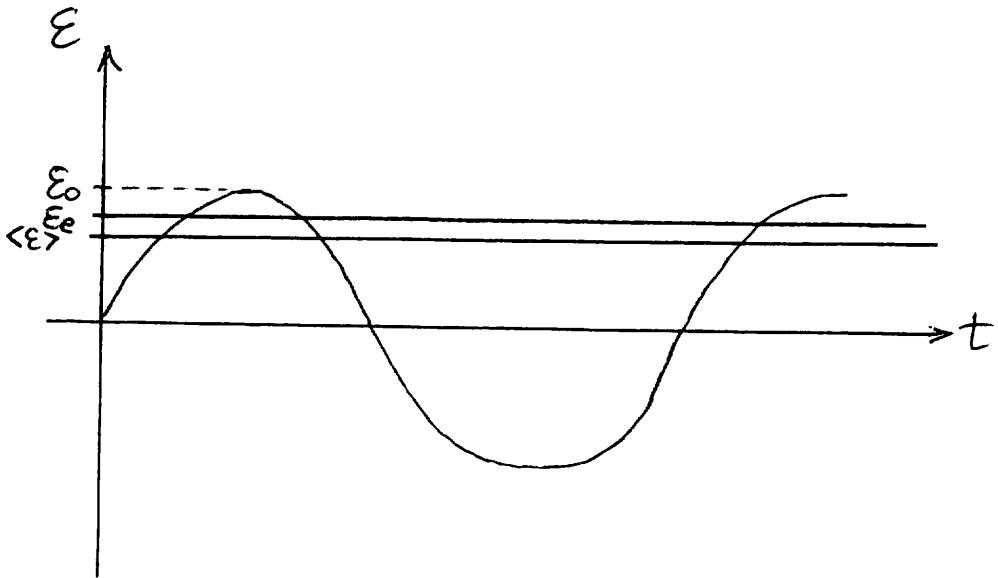
Análogamente,

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{2}{\pi} \mathcal{E}_0 = 0'637 \mathcal{E}_0$$



Se define el factor de forma de una magnitud sinusoidal como el cociente entre el valor eficaz y el valor medio en un semiperíodo, es decir,

$$\frac{I_e}{\langle I \rangle} = \frac{\mathcal{E}_e}{\langle \mathcal{E} \rangle} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1'1107$$



Podemos introducir un número complejo giroscópico correspondiente a la f.e.m. alterna instantánea:

$$E = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

de modo que:

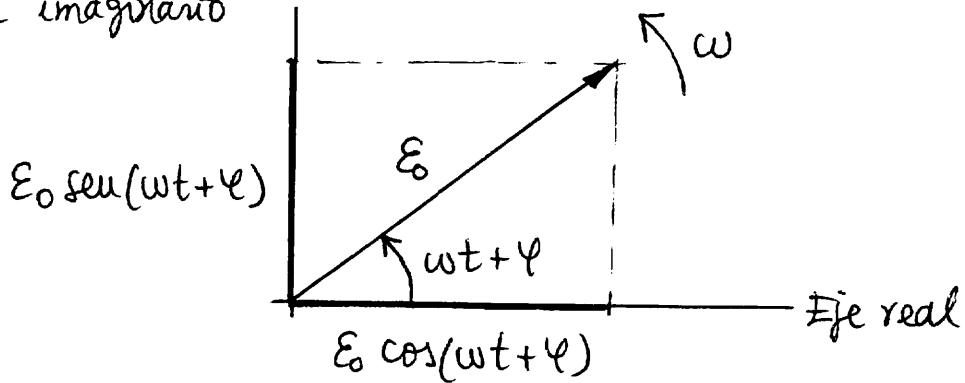
forma binómica: $\bar{E} = E_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) + j E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$

forma polar: $\bar{E} = E_0 \angle \omega t + \varphi$

Se tendrá que:

$$E = \operatorname{Im} \bar{E}$$

Eje imaginario

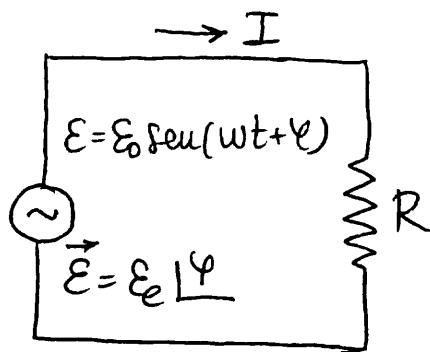


Círculo resistivo puro

En el circuito de la figura, la ley de Ohm para valores instantáneos es:

$$\mathcal{E} = IR$$

y puesto que R es constante (y real), la intensidad que circula por el circuito es:



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{E_0}{R} \operatorname{sen}(wt + \varphi)$$

$$I_0 = \frac{E_0}{R}$$

es decir,

$$I = I_0 \cdot \operatorname{sen}(wt + \varphi)$$

Podemos escribir en forma compleja:

$$\mathcal{E} = E_0 \cdot \operatorname{sen}(wt + \varphi) \rightarrow \vec{\mathcal{E}} = E_0 \angle \varphi$$

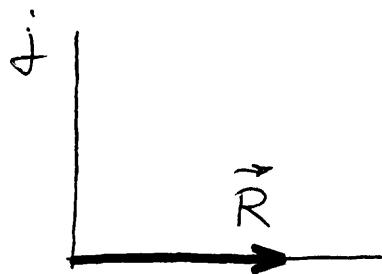
$$I = I_0 \cdot \operatorname{sen}(wt + \varphi) \rightarrow \vec{I} = I_0 \angle \varphi$$

Se puede asignar a R un número complejo de modo que:

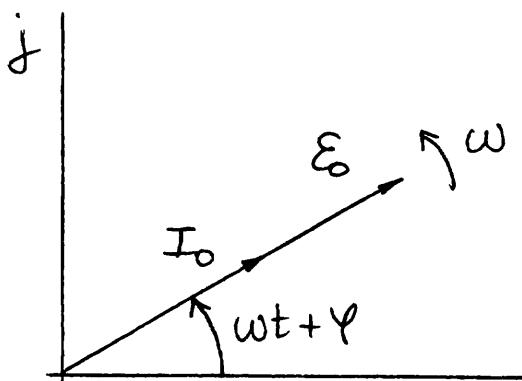
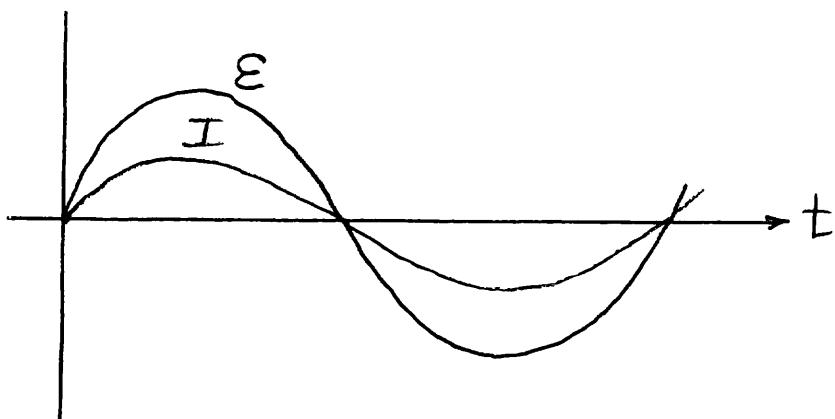
$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{\vec{\mathcal{E}}}{\vec{I}} = \frac{E_0 \angle \varphi}{I_0 \angle \varphi} = \frac{E_0}{I_0} \angle 0^\circ = \frac{E_0 / \sqrt{2}}{I_0 / \sqrt{2}} \angle 0^\circ = \\ &= R \angle 0^\circ\end{aligned}$$

es decir,

$$\vec{R} = R \angle 0^\circ$$

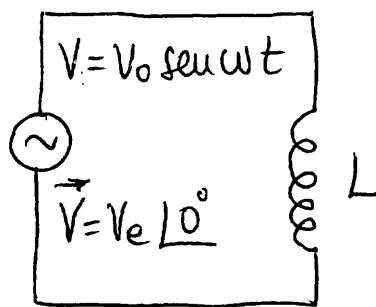


Por otra parte, la f.e.m. y la tensión se encuentran en fase, pues ambos varían sinusoidalmente con $\omega t + \varphi$.



Círculo inductivo puro. Inductancia

La tensión entre los extremos de la bobina es:



$$V = L \frac{dI}{dt}$$

$$dI = \frac{1}{L} V dt$$

luego:

$$dI = \frac{1}{L} V_0 \operatorname{sen} \omega t dt$$

Integrandos:

$$I = \frac{1}{L} V_0 \int_0^t \operatorname{sen} \omega t dt =$$

$$= \frac{V_0}{\omega L} (-\cos \omega t)$$

es decir,

$$I = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$$

como:

$$-\cos \omega t = \operatorname{sen}(\omega t - 90^\circ)$$

Así pues,

$$I = \frac{V_0}{\omega L} \operatorname{sen}(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

se cumple que:

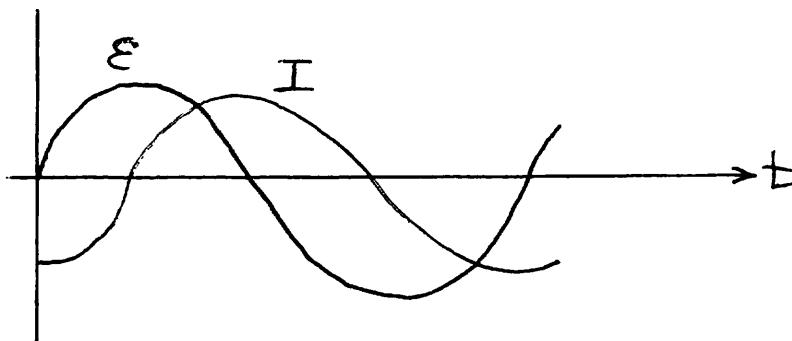
$$I_0 = \frac{V_0}{\omega L}$$

con lo que ωL juega el papel de una resistencia y se denomina reactancia inductiva o inductancia, X_L :

$$X_L = \omega L$$

y se expresa en ohmios.

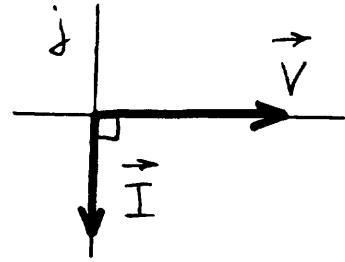
Por otra parte, la intensidad está retrasada, respecto a la tensión aplicada, 90° .



Si la inductancia es muy grande, el circuito presenta una gran oposición al paso de la corriente.

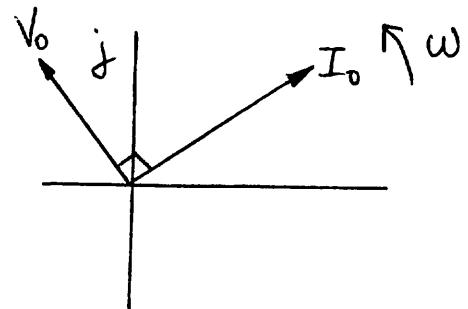
La intensidad compleja se escribe:

$$\vec{I} = I_e \angle -90^\circ$$



y la tensión compleja:

$$\vec{V} = V_e \angle 0^\circ$$

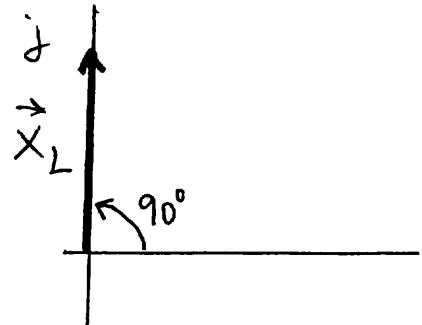


Se tiene que:

$$\frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{V_e \angle 0^\circ}{I_e \angle -90^\circ} = \frac{V_0 / \sqrt{2}}{I_0 / \sqrt{2}} \angle 90^\circ = X_L \angle 90^\circ$$

Se puede introducir una inductancia compleja, \vec{X}_L , de modo que:

Forma polar: $\vec{X}_L = X_L \angle 90^\circ$



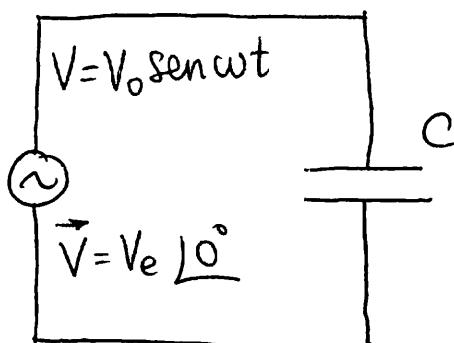
Forma binómica: $\vec{X}_L = j X_L = j \omega L$

con lo que se escribe:

$$\vec{X}_L = \frac{\vec{V}}{\vec{I}}$$

Círculo capacitivo puro. Capacidad

La d.d.p. entre los extremos del condensador es:



Derivando respecto al tiempo teniendo en cuenta que C es constante:

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$

pero dq/dt es la intensidad de corriente I :

$$I = C \frac{dV}{dt}$$

y puesto que $V = V_0 \operatorname{sen} \omega t$:

$$I = C \omega V_0 \cos \omega t = \omega C V_0 \operatorname{sen}(\omega t + 90^\circ)$$

es decir:

$$I = I_0 \cdot \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

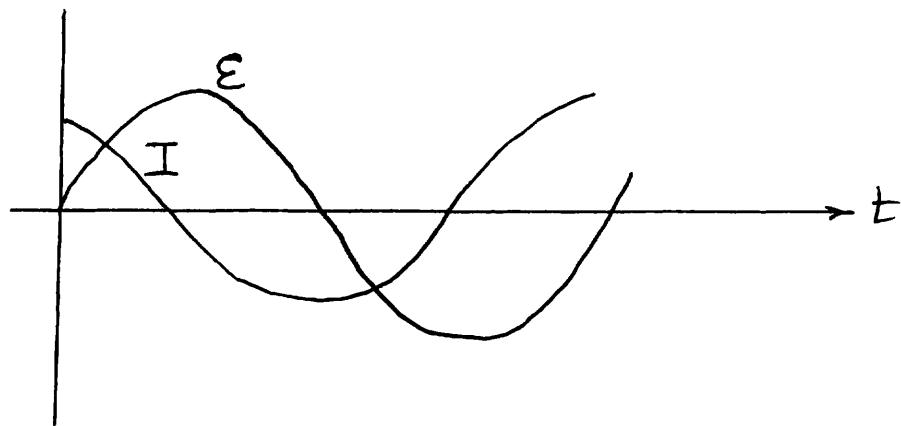
donde:

$$I_0 = \frac{V_0}{\frac{1}{\omega C}}$$

$\frac{1}{\omega C}$ es la reactancia capacitiva o capacidad, X_C , y se mide en ohmios:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

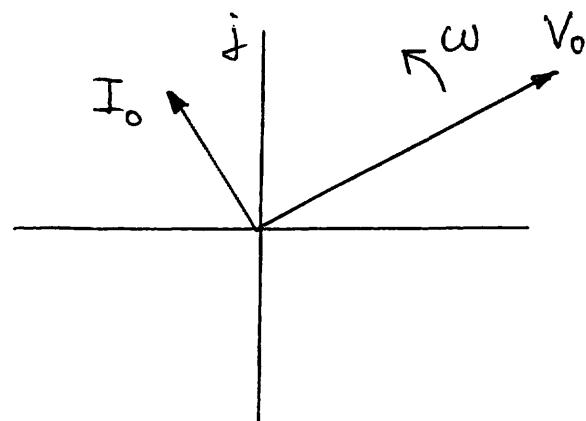
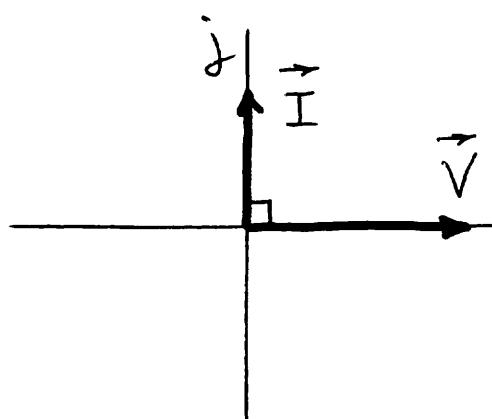
Por otra parte, la intensidad está adelantada, respecto a la tensión aplicada, 90° .



Para los valores complejos:

$$\vec{I} = I_e \angle 90^\circ$$

$$\vec{V} = V_e \angle 0^\circ$$



Se tiene que:

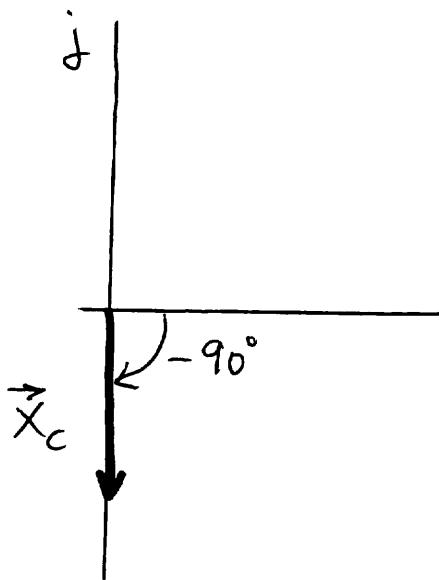
$$\frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{V_e \angle 0^\circ}{I_e \angle 90^\circ} = \frac{V_0 / \sqrt{2}}{I_0 / \sqrt{2}} \angle -90^\circ = X_c \angle -90^\circ$$

Puede introducirse una capacitancia compleja, \vec{X}_c , de modo que:

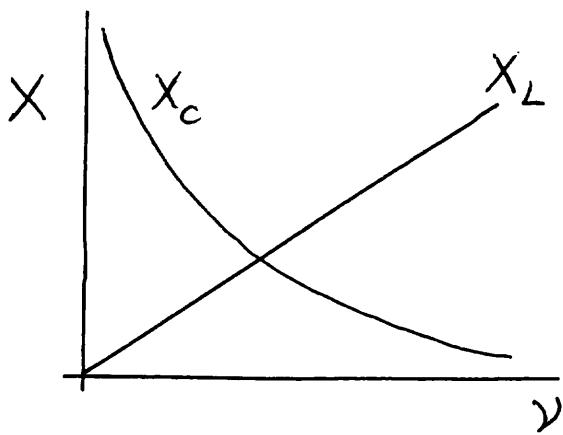
Forma polar: $\vec{X}_c = X_c \angle -90^\circ$

Forma binómica: $\vec{X}_c = -jX_c = -j \frac{1}{\omega C}$
con lo que se escribe:

$$\vec{X}_c = \frac{\vec{V}}{\vec{I}}$$



- Como $X_L = \omega L$ y $X_C = \frac{1}{\omega C}$, y $\omega = 2\pi\nu$, depende de la frecuencia de la corriente alterna:

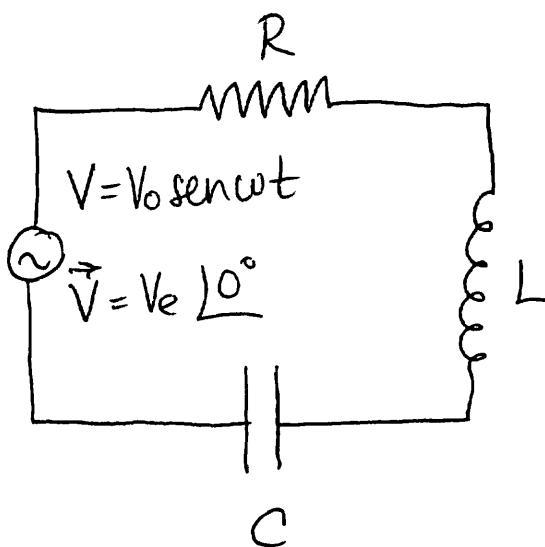


$$X_L = \omega L = 2\pi\nu L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C}$$

Para ν muy grande, X_C es muy pequeña y para ν muy pequeña, X_C es muy grande.

Circuito RLC serie. Asociación de impedancias



En cada instante :

$$V = V_R + V_L + V_C$$

donde :

$$V_R = IR$$

$$V_L = L \frac{dI}{dt}$$

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt$$

por tanto :

$$V_0 \sin \omega t = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt$$

La solución es de la forma

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

que es sinusoidal. Calculamos :

$$\frac{dI}{dt} = I_0 \omega \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\int I dt = -\frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \varphi)$$

y además:

$$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

con lo cual:

$$\operatorname{sen}(\omega t - \varphi) = \operatorname{sen} \omega t \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \omega t$$

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varphi$$

Sustituyendo en la ecuación del circuito:

$$V_o \operatorname{sen} \omega t = R I_o [\operatorname{sen} \omega t \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \omega t] +$$

$$+ \omega L I_o [\cos \omega t \cos \varphi + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varphi] -$$

$$- \frac{I_o}{\omega C} [\cos \omega t \cos \varphi + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varphi]$$

es decir,

$$V_o \operatorname{sen} \omega t = \left[R \cos \varphi + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \operatorname{sen} \varphi \right] I_o \operatorname{sen} \omega t -$$

$$- \left[R \operatorname{sen} \varphi - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \varphi \right] I_o \cos \omega t$$

Identificando los términos de los dos miembros de esta ecuación, resulta:

$$\mathcal{E}_o = \left[R \cos \varphi + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \varphi \right]$$

$$0 = R \sin \varphi - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \varphi$$

De esta última se despeja:

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

pero $X_L = \omega L$ y $X_C = \frac{1}{\omega C}$, con lo cual:

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Eliminando el ángulo φ entre las dos ecuaciones resulta:

$$V_o = I_o \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Por tanto:

$$I_o = \frac{\mathcal{E}_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$I_o = \frac{\mathcal{E}_o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Se llama impedancia del circuito al denominador de esta última ecuación, designándose por Z :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

con lo que puede escribirse:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z}$$

la impedancia tiene dimensiones de resistencia y se mide en ohmios. Se representa por ~~████████~~
Se llama reactancia del circuito, X , a la expresión:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

es decir,

$$X = X_L - X_C$$

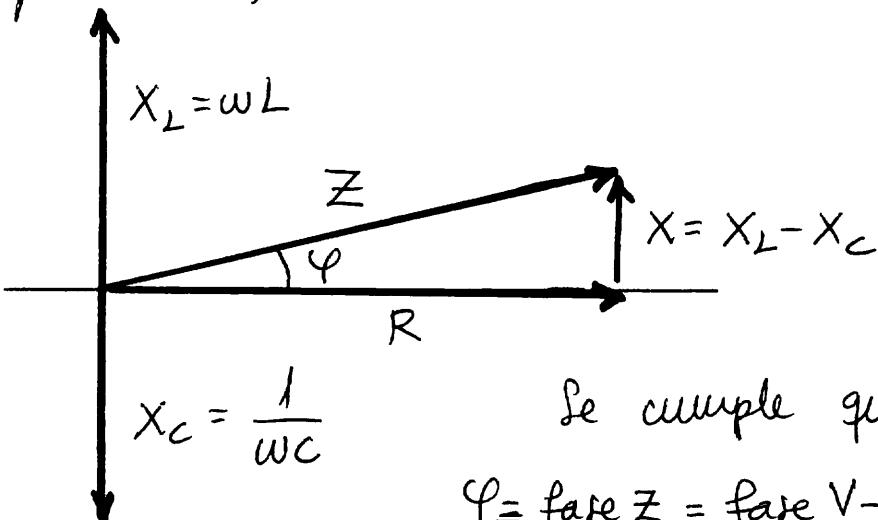
con lo cual, puede escribirse:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

A la vista de la estructura de esta última ecuación puede construirse el triángulo denominado

de la impedancia, como se indica en la figura:



Se cumple que:

$$\underline{\varphi = \text{fase } Z = \text{fase } V - \text{fase } I}$$

$$(\arg Z = \arg V - \arg I)$$

- * Si $X_L > X_C$, es $\varphi > 0$ y la intensidad está retrasada respecto de la tensión.
- * Si $X_L < X_C$, es $\varphi < 0$ y la intensidad está adelantada respecto a la tensión.

Se define la impedancia compleja de un circuito RLC , \vec{Z} , como:

$$\vec{Z} = \vec{R} + \vec{X}_L + \vec{X}_C$$

donde $\vec{X} = \vec{X}_L + \vec{X}_C$ es la reactancia compleja.

Se cumple que:

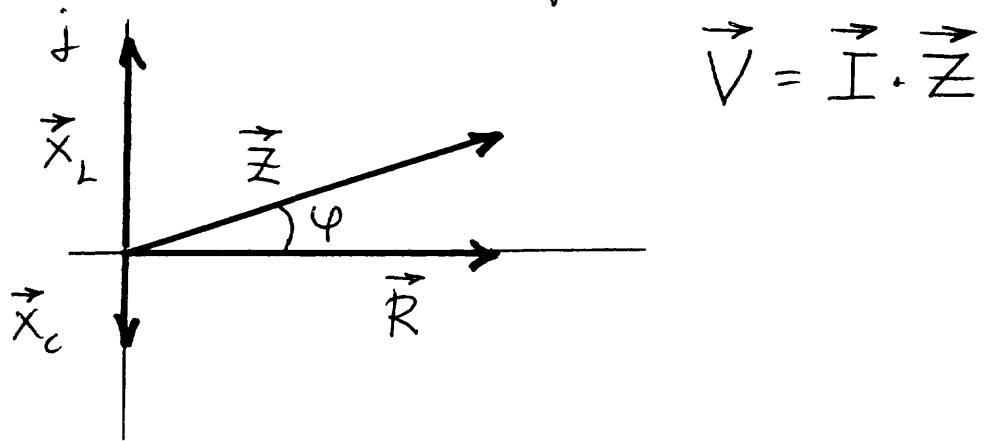
$$\vec{Z} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{V e^{10^\circ}}{I_0 | -\varphi |} = Z \angle \varphi$$

es decir,

$$\vec{Z} = Z \angle \varphi \quad (\text{forma polar})$$

$$\vec{Z} = R + jX \quad (\text{forma binómica})$$

La ley de Ohm en forma compleja se escribe:



El papel de la impedancia en un circuito de corriente alterna es el mismo que el de la resistencia en uno de corriente continua.

Se llama admitancia, Y , a la inversa de la impedancia:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

la admitancia compleja, \vec{Y} , será:

$$\vec{Y} = \frac{1}{\vec{Z}}$$

Poniendo $\vec{Z} = Z \angle \varphi$, queda $\vec{Y} = \frac{1}{Z} \angle -\varphi$.

Pero además, $\vec{Z} = R + jX$, luego:

$$\vec{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+jX} = \frac{(R-jX)}{R^2+X^2} = \frac{R}{R^2+X^2} - j \frac{X}{R^2+X^2}$$

es decir,

$$\vec{Y} = \frac{R}{R^2+X^2} + j \frac{-X}{R^2+X^2}$$

Impedancias y ángulos de fase para distintas combinaciones de los elementos R, L, C

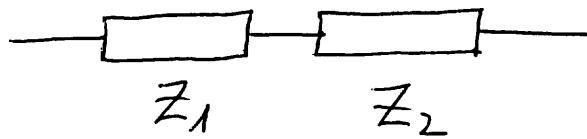
ELEMENTOS	IMPEDANCIA, Z	ANGULO DE FASE, φ
R	R	0°
L	$X_L = \omega L$	$+90^\circ$ (I retratada)
C	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	-90° (I adelantada)
RL (serie)	$\sqrt{R^2 + X_L^2}$	$\arctg\left(+\frac{\omega L}{R}\right)$
RC (serie)	$\sqrt{R^2 + X_C^2}$	$\arctg\left(\frac{-1}{\omega CR}\right)$
LC (serie)	$X_L - X_C$	$\pm 90^\circ$
RLC (serie)	$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	$\arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{V} = V_e \angle 0^\circ \\ \vec{I} = I_e \angle \varphi \end{array} \right\} \vec{Z} = Z \angle \varphi \quad \tan \varphi = \frac{X}{R}$$

$$Y = Z \cdot I$$

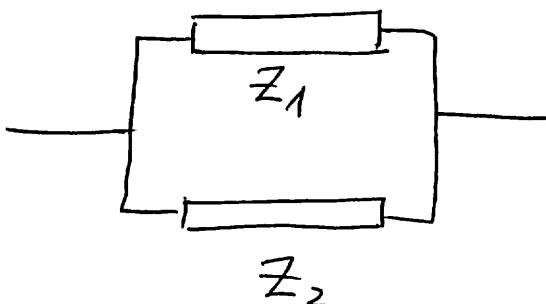
Asociación de impedancias

Serie



$$\vec{Z} = \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2$$

Paralelo



$$\frac{1}{\vec{Z}} = \frac{1}{\vec{Z}_1} + \frac{1}{\vec{Z}_2}$$

la parte real se llama conductancia, G , y la parte imaginaria susceptancia, S ,

$$\vec{Y} = G + j S$$

donde:

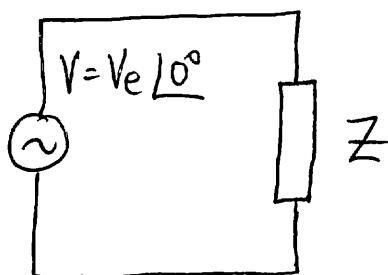
$$G = \frac{R}{X^2 + R^2} = \frac{R}{Z^2}$$

$$S = \frac{-X}{R^2 + X^2} = -\frac{X}{Z^2}$$

Potencia de la corriente alterna

La potencia instantánea se calcula como:

$$P = V \cdot I$$



$$V = V_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

de donde:

$$P = V_0 I_0 \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

De la relación:

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

Llamando:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A+B}{2} = \omega t \\ \frac{A-B}{2} = \omega t - \varphi \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} A+B = 2\omega t \\ A-B = 2\omega t - 2\varphi \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} A = 2\omega t - \varphi \\ B = \varphi \end{array} \right\}$$

de donde:

$$P = \frac{1}{2} V_0 I_0 [-\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi] =$$

$$= V_0 I_0 [-\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi]$$

El valor de la potencia media se calcula como:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P \cdot dt = \frac{V_e I_e}{T} \int_0^T [-\cos(\omega t - \varphi) + \cos \varphi] dt$$
$$= V_e I_e \cos \varphi$$

es decir,

$$\langle P \rangle = V_e I_e \cos \varphi$$

Al producto de la tensión eficaz por la intensidad eficaz se le denomina potencia aparente, P_a ,

$$P_a = I_e V_e$$

denominándose factor de potencia a $\cos \varphi$.

El factor de potencia no es otra cosa que:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

Se puede definir una potencia compleja \vec{S} del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{V} = V_e \angle 0^\circ \\ \vec{I} = I_e \angle \varphi \end{array} \right\} \quad \vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{I}^*$$

la potencia compleja se define mediante la relación:

$$\vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{I}^*$$

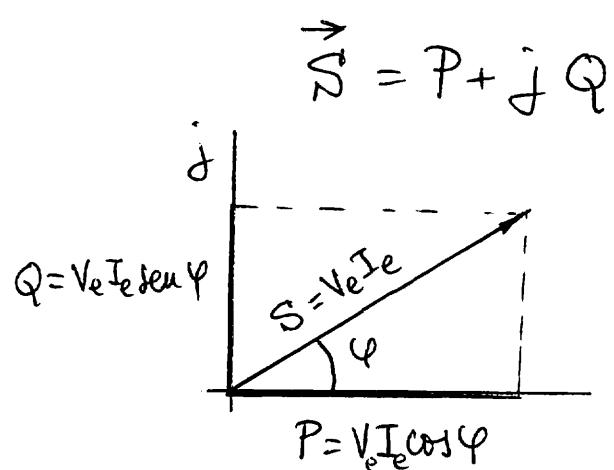
es decir,

$$\vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{I}^* = (V_e \angle 0^\circ) \cdot (I_e \angle \varphi) = V_e I_e \angle \varphi$$

o sea,

$$\vec{S} = V_e I_e \angle \varphi$$

En forma binómica:



$P (= V_e I_e \cos \varphi)$ se llama potencia activa y se expresa en W. $Q (= V_e I_e \sin \varphi)$ se llama potencia reactiva y se expresa en VAR (voltios-amperios-reactivos)

S es la potencia aparente (P_a) y se expresa en VA (voltios-amperio). A $\cos\varphi$ se le llama factor de potencia.

$$\left. \begin{array}{l} P = V_e I_e \cos\varphi \\ Q = V_e I_e \operatorname{sen}\varphi \\ S = P_a = V_e I_e \end{array} \right\} \cos\varphi = \frac{P}{S}$$

Se cumple que:

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Si la intensidad adelanta el factor de potencia está en adelanto, si retraza, está en retraso.

De la expresión de la ley de Ohm:

$$\vec{V} = \vec{I} \cdot \vec{Z}$$

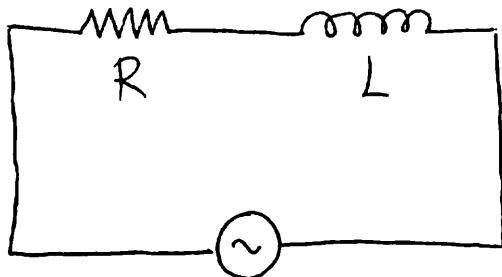
Luego:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{V} \cdot \vec{I}^* = (\vec{I} \cdot \vec{Z}) \vec{I}^* = (I_e \angle -\varphi) (Z \angle \varphi) (I_e \angle \varphi) \\ &= I_e^2 Z \angle \varphi = I_e^2 R + j I_e^2 X \end{aligned}$$

con lo cual:

$$\left. \begin{array}{l} P = I_e^2 R \\ Q = I_e^2 X \end{array} \right\}$$

En un circuito serie RL , $L = 20 \text{ mH}$ y $R = 10 \Omega$, circula una corriente de intensidad $I = 2 \cdot \sin 500t \text{ A}$. Hallar la tensión total aplicada.



$$I = 2 \cdot \sin 500t$$

$$I = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\vec{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ$$

$$\text{En forma compleja: } \vec{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$$

La Ley de Ohm en corriente alterna se escribe:

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}} \quad \left\{ \vec{Z} = R + jX \rightarrow X = X_L - X_C \right.$$

En nuestro caso, al ser un circuito RL serie:

$$\vec{Z} = R + jX_L ; \quad X_L = \omega L = 500 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 10 \Omega$$

$$\text{por tanto: } \vec{Z} = 10 + j10$$

$$\text{Pasándolo a forma polar: } \vec{Z} = Z \angle \alpha$$

$$\begin{aligned} Z &= |\vec{Z}| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \\ \alpha &= \arctan \frac{10}{10} = 45^\circ \end{aligned} \quad \left\{ \vec{Z} = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ \right.$$

$$\vec{V} = \vec{I} \cdot \vec{Z} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \right) \cdot \left(10\sqrt{2} \angle 45^\circ \right) = 20 \angle 45^\circ \text{ V}$$

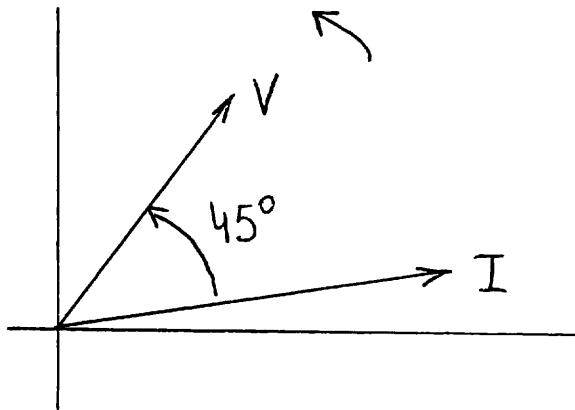
$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \beta^\circ$$

$$V = V_m \cdot \sin(\omega t + \beta)$$

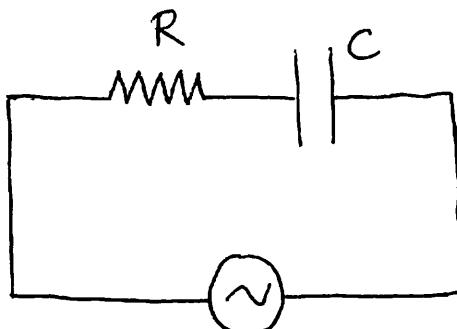
Es decir,

$$\underline{V = 20\sqrt{2} \cdot \sin(50\pi t + 45^\circ) \text{ V}}$$

V está en adelanto respecto a I .



En un circuito RC serie, con $C = 20 \mu F$ y $R = 5 \Omega$, circula una corriente de intensidad $I = 2 \cdot \sin 5000t$ A. Hallar la tensión total aplicada.



$$\vec{Z} = R - jX_C$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{5000 \times 20 \times 10^{-6}} = 10 \Omega$$

$$\vec{Z} = 5 - j10 \rightarrow |\vec{Z}| = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11'18$$

$$\vec{Z} = Z \angle \alpha \rightarrow \alpha = \arctg \frac{-10}{5} = -63'43^\circ$$

$$\vec{Z} = 11'18 \angle -63,43^\circ$$

Además:

$$I = 2 \cdot \sin 5000t \rightarrow \vec{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$$

Ley de Ohm: $\vec{Z} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}}$

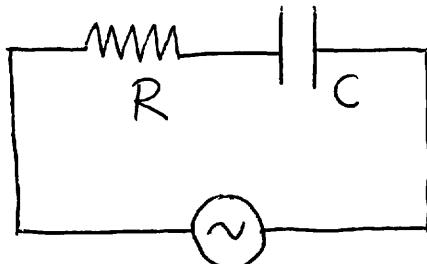
$$\vec{V} = \vec{Z} \cdot \vec{I} = (11'18 \angle -63,43^\circ) \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \right) = 15'81 \angle -63,43^\circ V$$

es decir, $V = 15'81 \sqrt{2} \cdot \sin(5000t - 63,43^\circ) V$

$$\underline{V = 22'36 \cdot \sin(5000t - 63,43^\circ) V}$$

V está en retraso respecto a la intensidad I .

A un circuito serie RC, con $R=10\Omega$ y $C=40\mu F$, se le aplica una tensión $V=500 \cdot \sin(2500t - 20^\circ) V$. Hallar la intensidad de la corriente que circula.



$$V = 500 \cdot \sin(2500t - 20^\circ)$$

$$\vec{V} = \frac{500}{\sqrt{2}} \angle -20^\circ$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2500 \times 40 \times 10^{-6}} = 10\Omega$$

$$\vec{Z} = R - jX_C = 10 - j10 \rightarrow \vec{Z} = 10\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

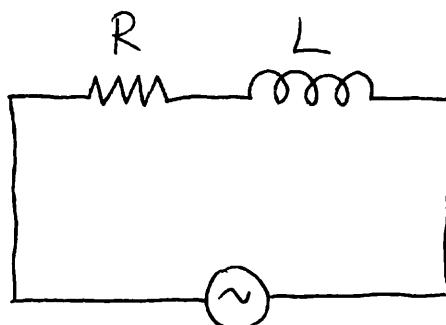
Ley de Ohm para corriente alterna:

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}} \rightarrow \vec{I} = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}} = \frac{\frac{500}{\sqrt{2}} \angle -20^\circ}{10\sqrt{2} \angle -45^\circ} = 25 \angle 25^\circ$$

$$\vec{I} = 25 \angle 25^\circ \rightarrow I = 25\sqrt{2} \cdot \sin(2500t + 25^\circ)$$

La intensidad está en adelanto respecto a la tensión.

Una corriente alterna de 50 Hz atraviesa un circuito donde hay una resistencia de $15\ \Omega$ y una autoinducción colocada en serie de $0'15\text{ mH}$. ¿Cuál es la intensidad eficaz cuando se aplica al circuito una tensión eficaz de 200 V?



$$\vec{Z} = R + jX_L$$

$$X_L = \omega L = 2\pi \times 50 \times 0'15 \times 10^{-3} = \\ = 0'047\ \Omega$$

$$\vec{Z} = 15 + j0'047 \rightarrow Z = \sqrt{15^2 + 0'047^2} = 15,000073\Omega$$

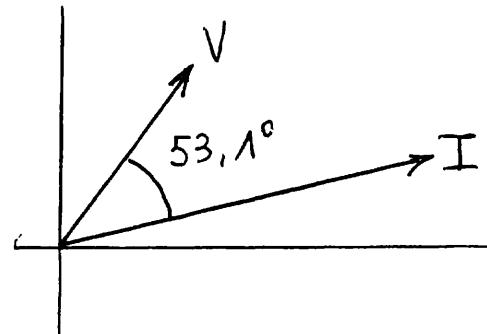
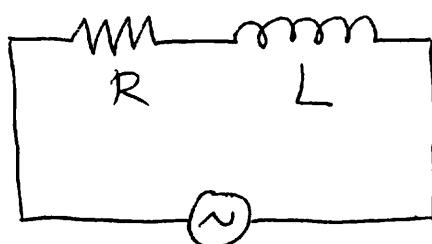
Ley de Ohm:

$$Z = \frac{V_e}{I_e} \rightarrow I_e = \frac{V_e}{Z} = \frac{200}{15,000073} = 13'33\text{ A}$$

$$\underline{\underline{I_e = 13'33\text{ A}}}$$

En un circuito serie RL la autoinducción es $L = 21,1 \text{ mH}$. A la frecuencia de 60Hz la corriente está retrasada $53,1^\circ$ respecto a la tensión.

Calcular el valor de R .

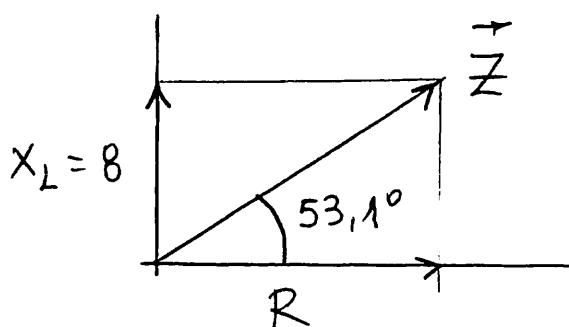


$$X_L = \omega L = 2\pi \times 60 \times 21,1 \times 10^{-3} = 8 \Omega$$

Además, si $\vec{Z} = Z \angle \alpha$; $\vec{V} = V_e \angle \varphi$ y $\vec{I} = I_e \angle \beta$

$$\vec{Z} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{V_e}{I_e} \angle \varphi - \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \varphi - \beta = 53,1^\circ$$

Con lo cual:



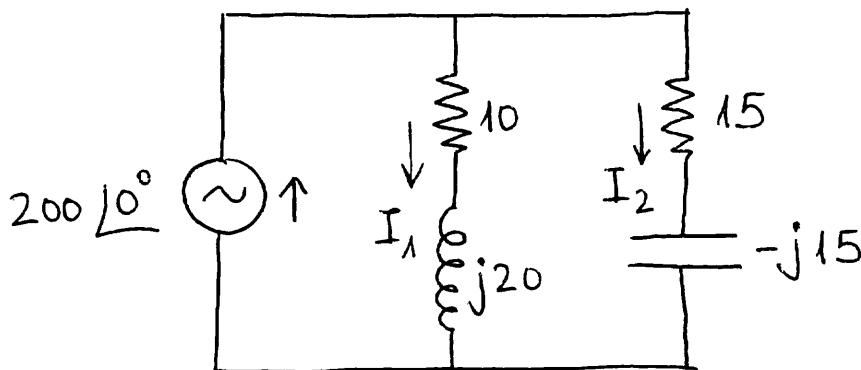
$$\operatorname{tg} 53,1^\circ = \frac{8}{R}$$

$$R = 8 \cdot \operatorname{tg} 53,1^\circ = 6 \Omega$$

es decir,

$$\underline{\underline{R = 6 \Omega}}$$

Hallar la impedancia equivalente y la intensidad de corriente que circula por cada rama del circuito de la figura.



$$(I_1) \quad \vec{Z}_1 = 10 + j20 \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22,36 \Omega \\ \alpha = \arctg \frac{20}{10} = 63,43^\circ \end{array} \right.$$

$$\vec{Z}_1 = 22,36 \angle 63,43^\circ \Omega$$

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}_1} = \frac{200 \angle 10^\circ}{22,36 \angle 63,43^\circ} = 8,94 \angle -63,43^\circ A$$

Luego:

$$\underline{\underline{\vec{I}_1 = 8,94 \angle -63,43^\circ A}}$$

$$(I_2) \quad \vec{Z}_2 = 15 - j15 \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_2 = \sqrt{15^2 + 15^2} = 22,21 \Omega \\ \alpha = \arctg -\frac{15}{15} = -45^\circ \end{array} \right.$$

$$\vec{Z}_2 = 22,21 \angle -45^\circ \Omega$$

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}_2} = \frac{200 \angle 10^\circ}{22,21 \angle -45^\circ} = 9,43 \angle 45^\circ A$$

$$\underline{\underline{\vec{I}_2 = 9,43 \angle 45^\circ A}}$$

$$\frac{1}{\vec{Z}_e} = \frac{1}{\vec{Z}_1} + \frac{1}{\vec{Z}_2}$$

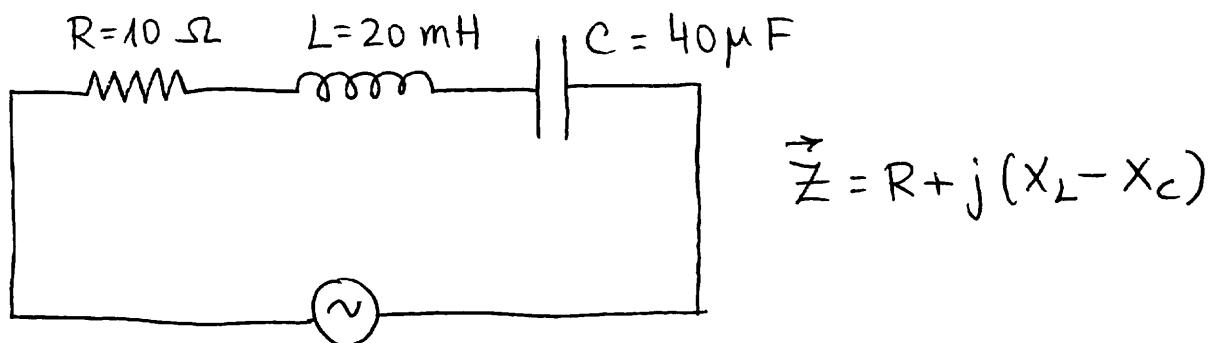
$$\begin{aligned}\vec{Z}_e &= \frac{\vec{Z}_1 \cdot \vec{Z}_2}{\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2} = \frac{(22,36 \angle 63,43^\circ) \cdot (21,21 \angle -45^\circ)}{(10+j20) + (15-j15)} = \\ &= \frac{474'25 \angle 18,43^\circ}{25+j5} = \frac{474'25 \angle 18'43^\circ}{25,49 \angle 11,3^\circ} = \downarrow\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Diagram of a right-angled triangle with legs 5 and 25, hypotenuse } \sqrt{25^2+5^2} = 25,49 \\ \alpha = \arctg \frac{5}{25} = 11,3^\circ \end{array} \right]$$

$$\downarrow = 18'60 \angle 7,13^\circ \Omega$$

$$\underline{\underline{\vec{Z}_e = 18,60 \angle 7,13^\circ \Omega}}$$

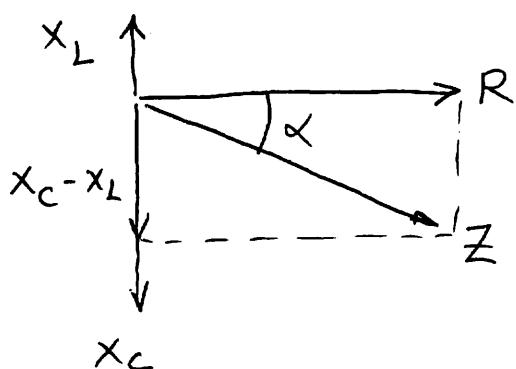
En un circuito RLC serie, $R = 10 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$, $C = 40 \mu\text{F}$, se aplica la tensión $V = 300 \cdot \text{sen}(500t - 10^\circ)$.
V. Hallar: (a) Impedancia equivalente. (b) Intensidad de la corriente que circula.



(a)

$$\left. \begin{aligned} X_L &= \omega L = 500 \times 20 \times 10^{-3} = 10 \Omega \\ X_C &= \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500 \times 40 \times 10^{-6}} = 50 \Omega \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{Z} = 10 + (10 - 50)j = 10 - j40$$



$$Z = \sqrt{10^2 + 40^2} = 41,23 \Omega$$

$$\alpha = \text{artg} \frac{-40}{10} = -75,96^\circ$$

$$\underline{\vec{Z} = 41,23 \angle -75,96^\circ \Omega}$$

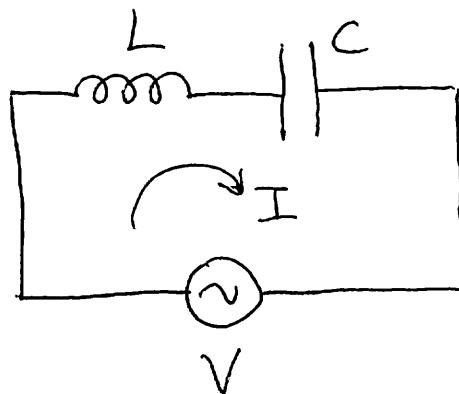
(b) Ley de Ohm: $\vec{Z} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}}$; $\vec{V} = \frac{300}{\sqrt{2}} \angle -10^\circ$

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}} = \frac{\frac{300}{\sqrt{2}} \angle -10^\circ}{41,23 \angle -75,96^\circ} = 5,145 \angle 65,96^\circ \text{ A}$$

luego:

$$\underline{\underline{I = 7,276 \cdot \text{sen}(500t + 65,96^\circ) \text{ A}}}$$

Calcular la frecuencia de resonancia de un circuito con una autoinducción de 2 mH y una capacidad de 150 pF .



El circuito entrará en resonancia cuando la impedancia sea mínima, lo que corresponde a una intensidad máxima.

La impedancia de este circuito serie LC es:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= |X_L - X_C| \\ &= |\omega L - \frac{1}{\omega C}| = \left| \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} \right| \end{aligned}$$

$$\text{Para } Z(\omega_r) = 0 \Rightarrow \omega_r^2 LC = 1$$

luego, la frecuencia de resonancia corresponde a:

$$\underline{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\underline{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 10^{-3} \times 150 \times 10^{-12}}} = 18,26 \times 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$\underline{\omega_r = 18,26 \times 10^5 \text{ rad/s}}$$

Hallar la impedancia de un circuito que consume 5040 VA con un factor de potencia 0'894 en adelanto respecto de una tensión $V = 150 \angle 45^\circ$ V.

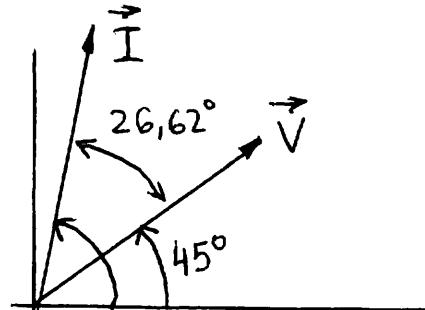
$$\text{Potencia compleja: } \vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{I}^*$$

$$\vec{S} = P + jQ \quad \left\{ \begin{array}{l} P = V_e I_e \cdot \cos \varphi \\ Q = V_e \cdot I_e \cdot \operatorname{sen} \varphi \end{array} \right.$$

$$\cos \varphi = 0'894 \rightarrow \underline{\varphi = 26,62^\circ} \quad (\text{I en adelanto respecto a } V)$$

$$\vec{V} = 150 \angle 45^\circ \text{ V}$$

$$\vec{I} = I_e \angle 71,62^\circ \text{ A}$$



La potencia aparente es:

$$S = V_e I_e = 5040 \text{ VA} \Rightarrow I_e = \frac{5040}{V_e} = \frac{5040}{150} = 33,6 \text{ A}$$

por tanto: $\underline{\vec{I} = 33,6 \angle 71,62^\circ \text{ A}}$

La Impedancia equivalente \vec{Z} , será:

$$\vec{Z} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{150 \angle 45^\circ}{33,6 \angle 71,62^\circ} = 4,46 \angle -26,62^\circ \Omega$$

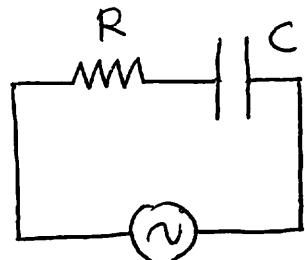
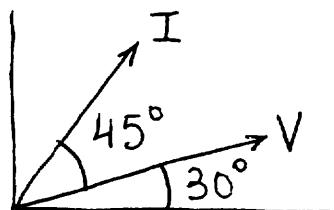
$$\underline{\vec{Z} = 4,46 \angle -26,62^\circ \Omega}$$

La potencia consumida por un circuito serie de dos elementos vale 940 W, siendo el factor de potencia de 0'707 en adelanto. Hallar las constantes del circuito sabiendo que la tensión aplicada a éste es de $V = 99 \cdot \sin(6000t + 30^\circ) V$.

$\cos \varphi = 0'707$ en adelanto, lo que significa que la intensidad adelanta a la tensión. Como el circuito es de dos elementos en serie deberá ser RC:

$$\cos \varphi = 0'707$$

$$\varphi = 45^\circ$$



La potencia compleja se escribe: $(\vec{V} = \frac{99}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ)$

$$\vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{I}^* = P + jQ$$

donde P es la potencia activa y Q la potencia reactiva. Además:

$$\left. \begin{array}{l} P = V_e I_e \cdot \cos \varphi \\ Q = V_e I_e \cdot \sin \varphi \end{array} \right\} \quad 940 \text{ W} = \frac{99}{\sqrt{2}} \cdot I_e \cdot 0'707$$

de donde, la intensidad eficaz es:

$$I_e = 19 \text{ A}$$

y el argumento es 75° :

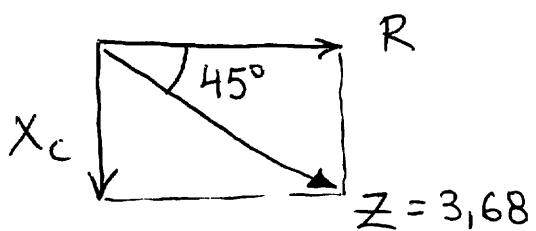
$$\underline{\underline{\vec{I} = 19 \angle 75^\circ \text{ A}}}$$

$$\underline{I = 19\sqrt{2} \cdot \sin(6000t + 75^\circ) A}$$

Conocidas \vec{V} e \vec{I} , podemos calcular \vec{Z} mediante la ley de Ohm:

$$\vec{Z} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{99/\sqrt{2} \angle 30^\circ}{19\sqrt{2} \angle 75^\circ} = 3,68 \angle -45^\circ \Omega$$

Siempre se cumple que el factor de potencia nos da el módulo del argumento de \vec{Z} .



$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

$$\tan(-45^\circ) = -1 = \frac{-X_C}{R}$$

Luego: $R = X_C \rightarrow Z^2 = 2R^2 \rightarrow R = \frac{Z}{\sqrt{2}} = 2,6 \Omega$

Así pues:

$$\underline{R = 2,6 \Omega}$$

Además, $X_C = 2,6 \Omega$ y:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{6000 \times 2,6} = 6,4 \times 10^{-5} F$$

Luego:

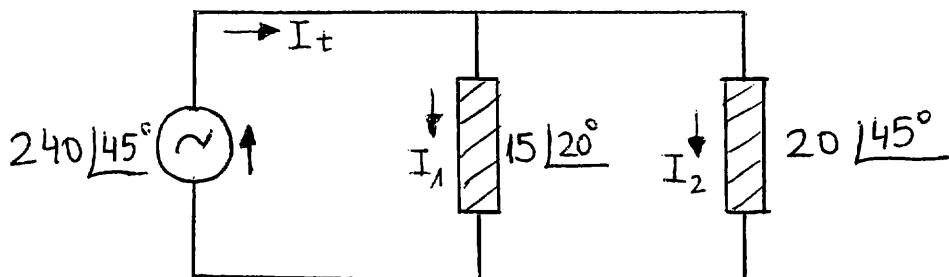
$$\underline{C = 64 \mu F}$$

Además, $Q = V_e I_e \cos \varphi = 940 \text{ VAR}$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{940^2 + 940^2} = 1329,4 \text{ VA}$$

$$\underline{S = 1329,4 \text{ VA}}; \quad \underline{P = 940 \text{ W}}; \quad \underline{Q = 940 \text{ VAR}}$$

Dado el circuito de la figura determinar: (a) Impedancia equivalente . (b) Intensidad de corriente en cada rama . (c) Potencia total consumida .



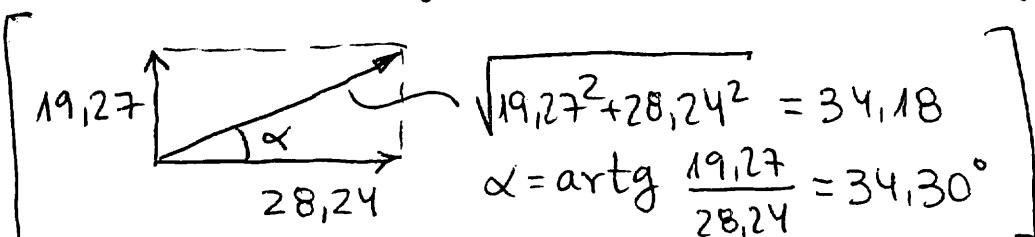
(a) La impedancia equivalente será :

$$\frac{1}{\vec{Z}} = \frac{1}{\vec{Z}_1} + \frac{1}{\vec{Z}_2} \rightarrow \vec{Z} = \frac{\vec{Z}_1 \vec{Z}_2}{\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2}$$

$$\vec{Z}_1 = 15 \angle 20^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} R = 15 \cdot \cos 20^\circ = 14,09 \\ X = 15 \cdot \sin 20^\circ = 5,13 \end{array} \right\} \vec{Z}_1 = 14,09 + j 5,13$$

$$\vec{Z}_2 = 20 \angle 45^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} R = 20 \cdot \cos 45^\circ = 10\sqrt{2} \\ X = 20 \cdot \sin 45^\circ = 10\sqrt{2} \end{array} \right\} \vec{Z}_2 = 10\sqrt{2} + j 10\sqrt{2}$$

$$\vec{Z} = \frac{(15 \angle 20^\circ) \cdot (20 \angle 45^\circ)}{(14,09 + j 5,13)(10\sqrt{2} + j 10\sqrt{2})} = \frac{300 \angle 65^\circ}{28,24 + j 19,27} = \downarrow$$



$$\downarrow = \frac{300 \angle 65^\circ}{34,18 \angle 34,40^\circ} = 8,777 \angle 30,7^\circ \Omega$$

$$\vec{Z} = 8,777 \angle 30,7^\circ \Omega$$

(b)

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}_1} = \frac{240 \angle 45^\circ}{15 \angle 20^\circ} = 16 \angle 25^\circ A$$

$$\underline{\underline{\vec{I}_1 = 16 \angle 25^\circ A}}$$

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}_2} = \frac{240 \angle 45^\circ}{20 \angle 45^\circ} = 12 \angle 0^\circ A$$

$$\underline{\underline{\vec{I}_2 = 12 \angle 0^\circ A}}$$

$$\vec{I}_t = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}} = \frac{240 \angle 45^\circ}{8,777 \angle 30,7^\circ} = 27,36 \angle 14,3^\circ A$$

(c)

$$\vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{I}_t^* = (240 \angle 45^\circ) (27,36 \angle -14,3^\circ) =$$

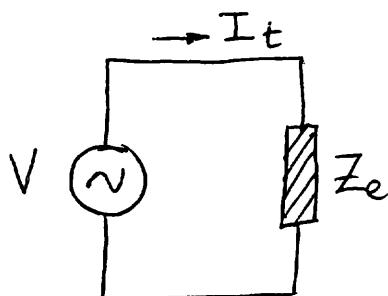
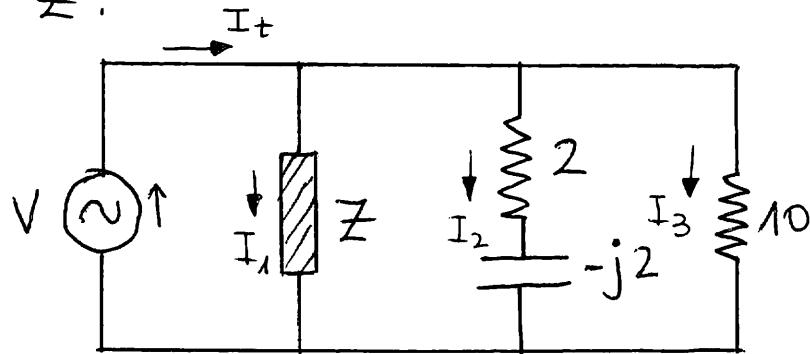
$$= 6561,6 \angle 30,7^\circ VA$$

$$\vec{S} = P + jQ \left\{ \begin{array}{l} P = S \cdot \cos \varphi = 6561,6 \cdot \cos 30,7^\circ = 5642,3 W \\ Q = S \cdot \sin \varphi = 6561,6 \cdot \sin 30,7^\circ = 3349,7 VAR \end{array} \right.$$

$$\underline{\underline{S = 6561,6 VA ; P = 5642,3 W ; Q = 3349,7 VAR}}$$

Como $\vec{Z} = 8,777 \angle 30,7^\circ \Omega$, el argumento es positivo, quiere decir que I va por detrás de V , luego el factor de potencia es 0,8599 en retraso.

En el circuito de la figura $I_t = 50,2 \angle 102,5^\circ$ A y $V = 100 \angle 90^\circ$ A. Hallar el valor de la impedancia Z .



$$\vec{I}_t = 50,2 \angle 102,5^\circ \text{ A}$$

$$= 50,2 \cdot \cos 102,5^\circ + j 50,2 \cdot \sin 102,5^\circ \\ = -10,86 + j 49,01$$

Calculamos \vec{I}_2 e \vec{I}_3 :

$$\vec{I}_2 = \frac{100 \angle 90^\circ}{2 - j 2} = \frac{100 \angle 90^\circ}{2\sqrt{2} \angle -45^\circ} = \frac{50}{\sqrt{2}} \angle 135^\circ = \\ = \frac{50}{\sqrt{2}} \cos 135^\circ + j \frac{50}{\sqrt{2}} \sin 135^\circ = -25 + j 25 \text{ A}$$

$$\vec{I}_3 = \frac{100 \angle 90^\circ}{10} = \frac{100 \angle 90^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 10 \angle 90^\circ = \\ = 10 \cdot \cos 90^\circ + j 10 \sin 90^\circ = j 10$$

Entonces, como $\vec{I}_t = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3$:

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_t - \vec{I}_2 - \vec{I}_3 = (-10,86 + j 49,01) - (-25 + j 25) - j 10 = \\ = 14,14 + j 14,01 \text{ A}$$

$$\vec{I}_1 = 14,14 + j 14,01 \quad \left\{ \begin{array}{l} I_e = \sqrt{14,14^2 + 14,01^2} = 19,9 \\ \theta = \arctg \frac{14,01}{14,14} = 44,7^\circ \end{array} \right.$$

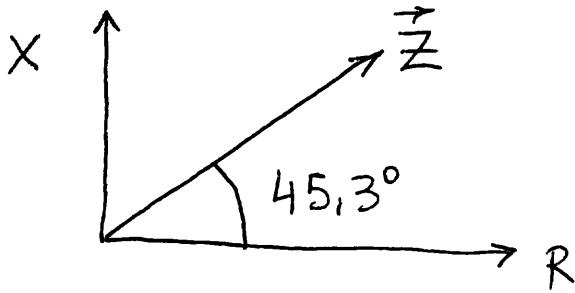
luego:

$$\underline{\vec{I}_1 = 19,9 \angle 44,7^\circ \text{ A}}$$

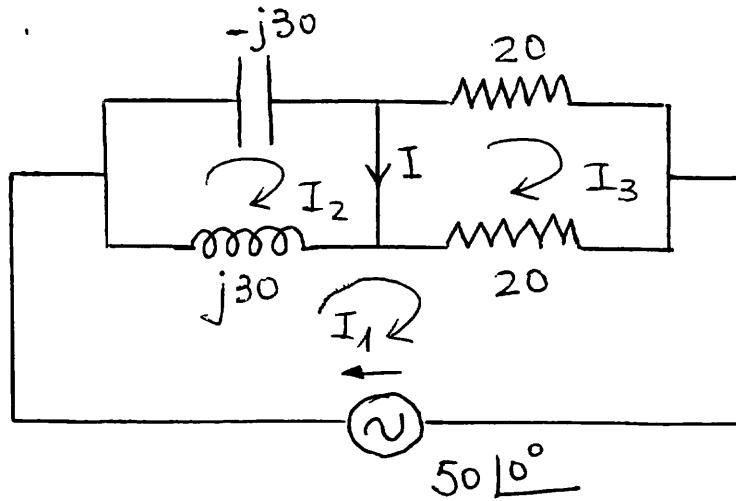
con lo cual, \vec{Z} será:

$$\vec{Z} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}_1} = \frac{100 \angle 90^\circ}{19,9 \angle 44,7^\circ} = 5,025 \angle 45,3^\circ \Omega$$

$$\underline{\underline{\vec{Z} = 5,025 \angle 45,3^\circ \Omega}}$$



Calcular la intensidad I en el circuito de la figura.



Aplicamos el método de las mallas:

$$\begin{pmatrix} 0 & -j30 & -20 \\ -j30 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -j30 & -20 \\ -j30 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 40 \end{vmatrix} = j30 \begin{vmatrix} -j30 & 0 \\ -20 & 40 \end{vmatrix} =$$

$$= 30j (-1200j)$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 50 & -20 \\ -30j & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 40 \end{vmatrix} = -\frac{50}{\Delta} \begin{vmatrix} -30j & 0 \\ -20 & 40 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{50}{30j(-1200j)} (-1200j) = +\frac{50}{30} j = \underline{\underline{5j}}$$

$$\underline{\underline{I_2 = 5/3 j}}$$

$$I_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & -j30 & 50 \\ -j30 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underline{\underline{I_3 = 0}}$$

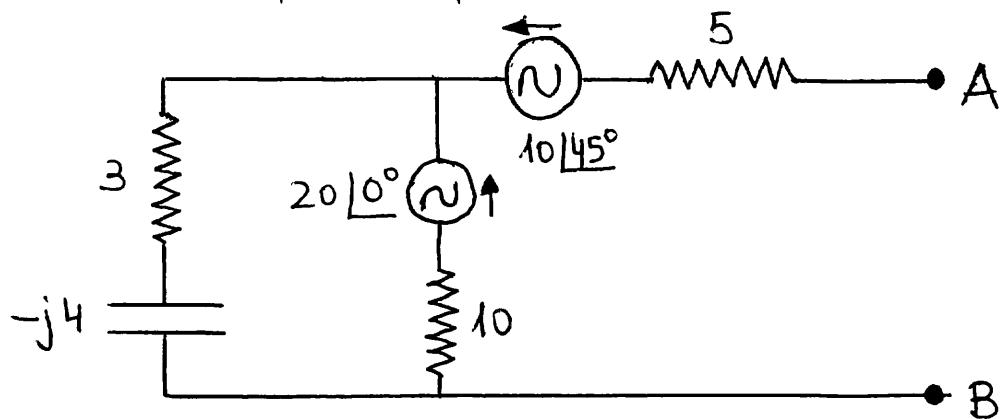
Por lo tanto, como: $I = I_2 - I_3$:

$$I = \frac{5}{3} j$$

es decir,

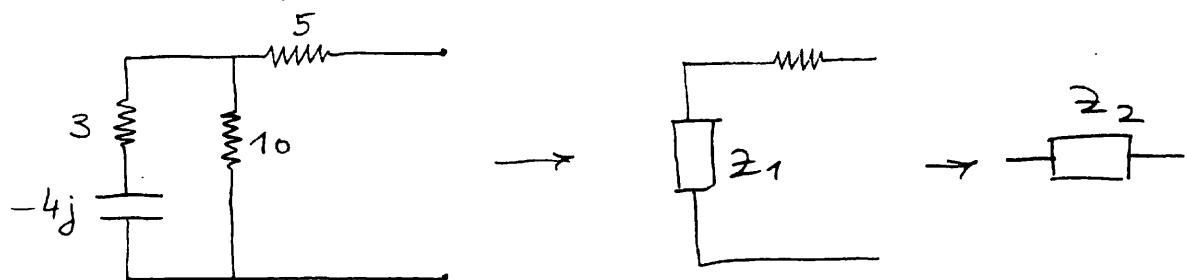
$$\underline{\underline{\overrightarrow{I} = 5/3 \angle 90^\circ A}}$$

Hallar la fuente equivalente de la red de la figura.



Aplicamos el Teorema de Thevenin:

- (1) Supresión de todos los generadores internos, dejando únicamente un generador introducido



$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{3-4j} + \frac{1}{10} = \frac{10+3-4j}{30-40j} = \frac{13-4j}{30-40j}$$

$$Z_1 = \frac{30-40j}{13-4j} = \frac{(30-40j)(13+4j)}{185} = \frac{390+120j-520j+160}{185}$$

$$= \frac{550-400j}{185} = \frac{110-80j}{37}$$

$$Z_2 = Z_1 + 5 = \frac{110-80j}{37} + 5 = \frac{110-80j+185}{37} = \frac{295-80j}{37}$$

$$Z_2 = \frac{295 - 80j}{37}$$

El generador que ponemos es tal que:

$$E = -(V_A - V_B)$$

Circulará por la rama una intensidad I_1 .

(2) Supresión del generador adicional dejando como circuito exterior la resistencia R y la red original inalterada.

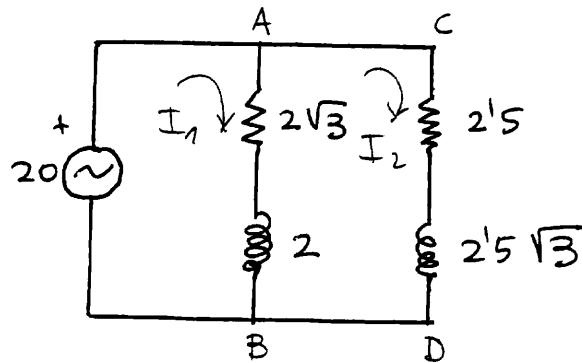
Circulará una corriente I_2 :

$$I_2 + I_1 = 0$$

$$I = \frac{20 \angle 10^\circ}{13 - 4j}$$

$$\begin{aligned} V_{CB} &= 20 \angle 10^\circ - \frac{200 \angle 10^\circ}{13 - 4j} = 20 - \frac{200}{13 - 4j} = \\ &= \frac{260 - 200 + 80j}{13 - 4j} = \frac{60 + 80j}{13 - 4j} \end{aligned}$$

Hallar las potencias activa, reactiva y aparente para cada una de las ramas del circuito y comprobar la relación que existe entre ellas. Determinar la potencia consumida por el circuito.



$$\text{Se cumple que: } V_{AB} = V_{CD} = V = 20 \angle 0^\circ$$

Las impedancias equivalentes para cada rama son:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = 2\sqrt{3} + 2j \\ Z_2 = 2 \\ Z_3 = 2'5 + 2'5\sqrt{3}j \end{array} \right.$$

Las intensidades que circulan por cada rama son:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_{AB}}{Z_1} = \frac{V}{Z_1} = \frac{20}{2\sqrt{3} + 2j} = \frac{10(\sqrt{3} - j)}{(\sqrt{3} + j)(\sqrt{3} - j)} = \frac{10\sqrt{3} - j}{3 + 1} \\ &= \frac{10}{4} (\sqrt{3} - j) = \frac{5}{2} (\sqrt{3} - j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{V_{CD}}{Z_2} = \frac{V}{Z_2} = \frac{20}{2'5 + 2'5\sqrt{3}j} = \frac{8}{1 + \sqrt{3}j} = \frac{8(1 - \sqrt{3}j)}{(1 + \sqrt{3}j)(1 - \sqrt{3}j)} \\ &= \frac{8}{4} (1 - \sqrt{3}j) = 2 - 2\sqrt{3}j \end{aligned}$$

Así pues:

$$I_1 = \frac{5}{2} (\sqrt{3} - j)$$

$$I_2 = 2 - 2\sqrt{3}j$$

y en forma módulo-argumento:

$$|I_1| = \sqrt{\frac{25}{4} \cdot 3 + \frac{25}{4} \cdot 1} = \frac{5}{2} \sqrt{3+1} = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$$

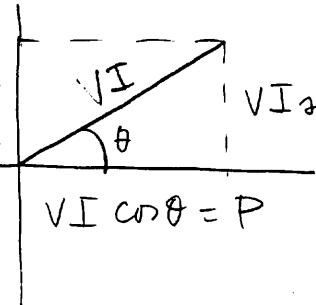
$$\arg I_1 = \arctg \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -30^\circ \rightarrow I_1 = 5 \underline{|-30^\circ|}$$

$$|I_2| = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4$$

$$\arg I_2 = \arctg \left(-\sqrt{3} \right) = -60^\circ \rightarrow I_2 = 4 \underline{|-60^\circ|}$$

Potencia compleja:

$$\underline{S} = \bar{V} \cdot \bar{I}^*$$



$$\begin{aligned} \bar{V} &= V_{ef} \angle \beta \\ \bar{I} &= I_{ef} \angle \alpha \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \bar{S} = V_{ef} I_{ef} \angle \beta - \alpha \\ = V_{ef} I_{ef} \angle \theta \end{array} \right.$$

$$P = VI \cos \theta : \text{potencia activa. (Wattos)}$$

$$Q = VI \sin \theta : \text{potencia reactiva. (Volttios-Ampereos-reativos)}$$

$$S = VI : \text{potencia aparente (Volttios-Ampereos)}$$

$$\cos \theta : \text{factor de potencia.}$$

Rama 1 :

$$\overline{P}_1 = \overline{V} \cdot \overline{I}_1^* = \left(\frac{20}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \right) \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ \right) = \underline{50 \angle 30^\circ}$$

$$P_1 = V \cdot I_1 \cos \theta = VI_1 \cos 30^\circ = \frac{20}{\sqrt{2}} \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ = \underline{25\sqrt{3} \text{ W.}}$$

$$Q_1 = V \cdot I_1 \sin \theta = 50 \sin 30^\circ = \underline{25 \text{ VAR.}}$$

$$S_1 = V I_1 = \underline{50 \text{ VA.}}$$

Rama 2 :

$$\overline{P}_2 = \overline{V} \cdot \overline{I}_2^* = \left(\frac{20}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \right) \left(\frac{4}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ \right) = \underline{40 \angle 60^\circ}$$

$$P_2 = V \cdot I_2 \cos 60^\circ = \frac{40}{2} = \underline{20 \text{ W}}$$

$$Q_2 = V \cdot I_2 \sin 60^\circ = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{20\sqrt{3} \text{ VAR.}}$$

$$S_2 = V \cdot I_2 = \underline{40 \text{ VA.}}$$