UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE ALICANTE

DEPARTAMENTO DE FISICA APLICADA

APUNTES DE FISICA

OSCILACIONES Y ONDAS

A. Beléndez

C. Pastor

J. G. Bernabeu

A. Beléndez / C. Pastor / J. G. Bernabeu

Departamento de Física Aplicada

Sección Departamental de Alicante
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Alicante, Julio de 1988

A. Beléndez

C. Pastor

J. G. Bernabeu

APUNTES DE FISICA

OSCILACIONES Y ONDAS

DEPARTAMENTO DE FISICA APLICADA

ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE ALICANTE

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

PROLOGO

Estos apuntes de Física, relativos a " Oscilaciones y Ondas", constituyen una introducción a los conocimientos básicos necesarios para el desarrollo y comprensión de la asignatura de Física.

Su redacción corresponde a las explicaciones que venimos impartiendo estos últimos años en la Escuela Universitaria Politécnica de Alicante, en particular a los alumnos de Informática e Ingenieria Técnica de Obras Públicas.

El objeto principal de estos apuntes es la familiarización con los fenómenos ondulatorios, tanto de la ecuación matemática que los representa como de los principales fenómenos que sufren, propagación, reflexión e interferencias. El análisis del movimiento oscilatorio se incluye no solo por su gran interés en la formación básica en Física, sino por ser un movimiento que se da en un gran número de situaciones reales.

Alicante, Julio de 1.988

Los autores

INDICE

Pág.

MOVIMIENTO OSCILATORIO 1

1.-Introducción. 2
2.-Estudio del resorte elástico. 3
3.-Solución de la ecuación dinámica. Cinemática del M.A.S. 7
4.-Péndulo simple. 10
5.-Energia en el movimiento armónico simple. 14
6.-Superposición de M.A.S. de la misma dirección y la misma frecuencia. 16
7.-Superposición de M.A.S. de igual dirección y distinta frecuencia. 18
8.-Superposición de M.A.S. de direcciones perpendiculares y con misma frecuencia. 21
9.-Superposición de M.A.S. de direcciones perpendiculares y con distinta frecuencia. 26
10.-Oscilaciones amortiguadas. 28
11.- Oscilaciones forzadas. Resonancia. 32

MOVIMIENTO ONDULATORIO 38

1.- Generalidades. Ondas longitudinales y transversales. 39
2.- Propagación de una perturbación en una dirección. Ecuación de ondas. 42
3.- Propagación de una perturbación periódica. Ondas armónicas. 46
4.- Ondas en dos y tres dimensiones. 50
5.- Energía e Intensidad del movimieno ondulatorio.Absorción. 53
6.- Velocidad de grupo y velocidad de fase. 60

PROPIEDADES GENERALES DE LAS ONDAS 63

1.- Superposición de ondas. Interferencias. 64
2.- Ondas estacionarias. 71
3.- Principio de Huygens. 78
4.- Reflexión y refracción de ondas. 79
5.- Efecto Doppler. 82
6.- Ondas de choque. 85

MOVIMIENTO OSCILATORIO

1.- Introducción
2.- Estudio del resorte elástico
3.- Solución de la ecuación dinámica. Cinemática del M.A.S.
4.- Péndulo simple
5.- Energia en el movimiento armónico simple
6.- Superposición de M.A.S. de la misma dirección y la misma frecuencia
7.- Superposición de M.A.S. de igual dirección y distinta frecuencia
8.- Superposición de M.A.S. de direcciones perpendiculares y con misma frecuencia
9.- Superposición de M.A.S. de direcciones perpendiculares y con distinta frecuencia
10.- Oscilaciones amortiguadas
11.- Oscilaciones forzadas. Resonancia

1. INTRODUCCION

Uno de los movimientos más importantes observados en la naturaleza es el movimiento oscilatorio (o vibratorio). Una partícula oscila cuando se mueve periódicamente con respecto a la posición de equilibrio. El movimiento de un péndulo es oscilatorio. Un cuerpo en el extremo de un resorte estirado, una vez que se suelta, comienza a oscilar. Los átomos de un sólido están vibrando. Similarmente, los átomos en una molécula vibran unos respecto a otros. Los electrones de una antena radiante o receptora oscilan rápidamente. Una comprensión del movimiento oscilatorio es también esencial en la discursión del movimiento ondulatorio.

De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el movimiento armónico simple (MAS), debido a que, además de ser el movimiento más simple de describir matemáticamente, constituye una aproximación muy cercana de muchas oscilaciones encontradas en la naturaleza.

Un movimiento armónico simple obedece una ecuación de la forma (si la partícula se mueve en el eje X):

$$x = A \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

X: Elongación
A: Amplitud
ω: Pulsación o frecuencia angular
φ: Fase

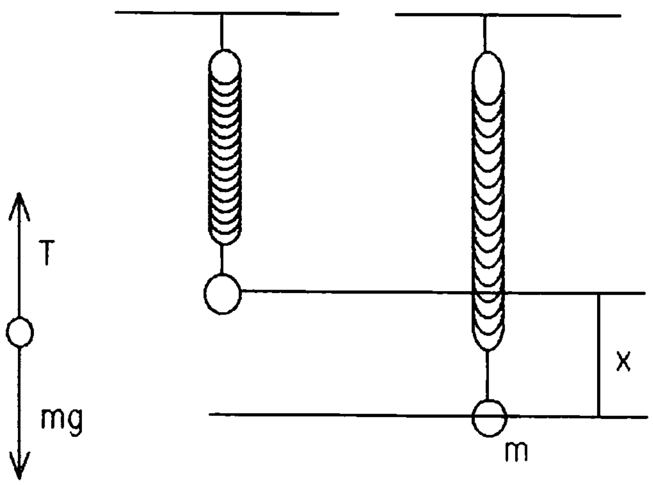
2. ESTUDIO DEL RESORTE ELASTICO

Un resorte elástico es un cuerpo que responde a la ley de Hooke:

$$F = -kx$$

de tal manera que el estiramiento producido es proporcional a la fuerza aplicada y de sentido contrario. Así una fuerza doble produce un estiramiento doble. Un ejemplo es un muelle metálico.

Si colocamos una masa en el extremo del resorte se producirá un equilibrio:



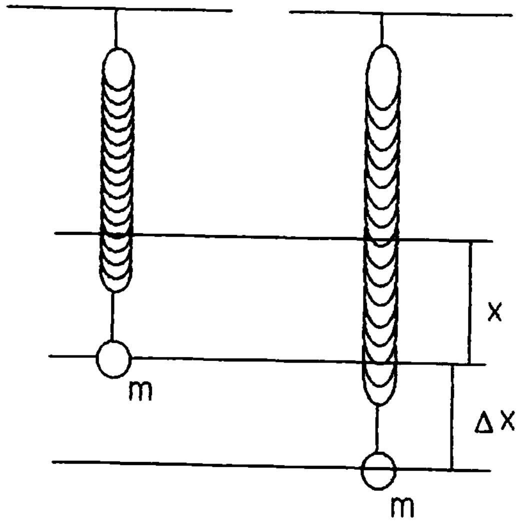
En módulo:

$$F = kx = mg$$

T: fuerza hacia arriba ejercida por el resorte sobre el cuerpo.

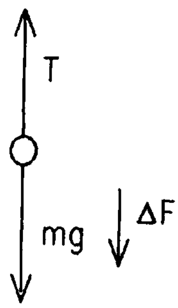
$$x = \frac{mg}{k}$$

$$\Sigma F = 0 \rightarrow mg + T = 0 \rightarrow T = -mg \rightarrow |T| = |mg|$$



Si hacemos que se estire un poco más para mantener el equilibrio es necesario efectuar una fuerza suplementaria ΔF, de modo que ahora:

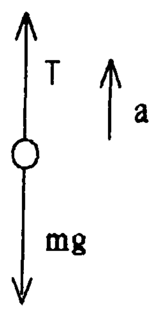
$$\Sigma F = 0 \rightarrow mg + \Delta F + T = 0 \rightarrow T = -(mg + \Delta F) \rightarrow |T| > |mg|$$



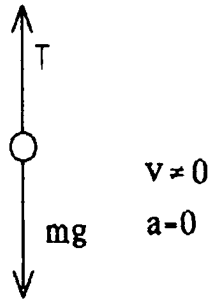
Si se suprime la fuerza para mantener el equilibrio, ya que

$$|T| > |mg|$$

$$mg + T = ma$$

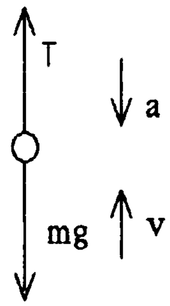


(fuerza neta que actúa sobre el cuerpo - negativa -) y aparece una aceleración dirigida hacia la posición de equilibrio, esta aceleración hace que aparezca el movimiento. Esta aceleración desaparece cuando el cuerpo pasa por su posición de equilibrio pero en dicho instante la velocidad no es nula y la inercia hace que el cuerpo sobrepase dicha posición y sigue subiendo, cuando supera dicha posición

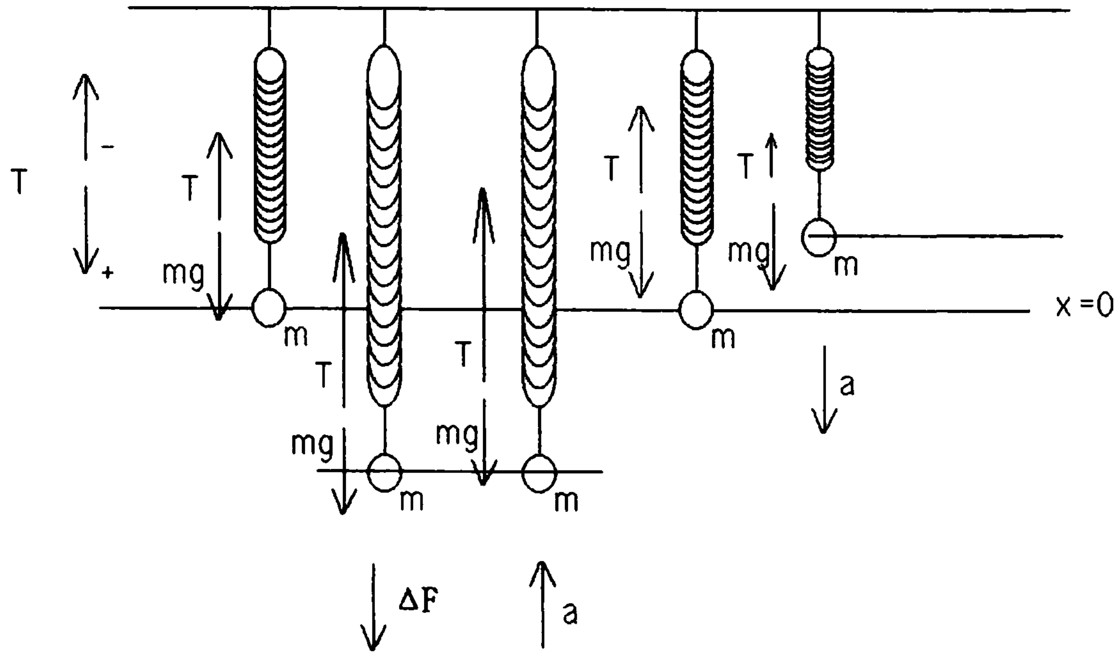


$$mg + T = ma \qquad |T| < |mg|$$

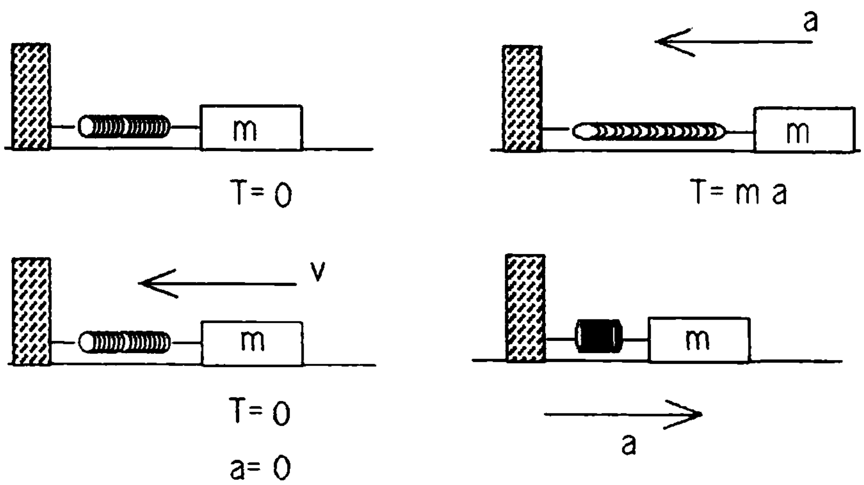
y la aceleración se dirige hacia abajo hasta que hace que el cuerpo se pare y comience a descender, y cuando vuelve a pasar por la posición central de equilibrio la aceleración se anula, pero la velocidad no, por lo que se sobrepasa y aparece una aceleración hacia arriba que acaba deteniéndolo.



T: Fuerza negativa hacia arriba, ejercida por el resorte sobre el cuerpo.

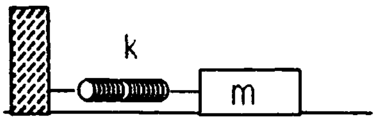


HAY SIEMPRE UNA FUERZA QUE LLEVA AL CUERPO A SU POSICION DE EQUILIBRIO Y LA INERCIA OBLIGA A SOBREPASAR DICHO ESTADO.



3. SOLUCION DE LA ECUACION DINAMICA. CINEMATICA DEL MAS

Consideremos



Aplicando las ecuaciones de la dinámica:

$$\Sigma F = ma$$

Luego:

$$-kx = ma$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow -kx = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot m$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Esta es una ecuación diferencial cuyas soluciones se conocen y son funciones senos o cosenos de la forma:

$$x = A \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Donde A y φ son constantes que determinaremos:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \Rightarrow -\omega^2 x + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

* A es la <u>amplitud</u> o elongación máxima, y corresponde a :

$$\text{sen}(\omega t + \varphi) = \pm 1$$

* φ es la <u>fase</u> y corresponde a la fase inicial en $t = 0$:

$$t = 0 \rightarrow x_0 = A \cdot \text{sen}(0 + \varphi) = A \cdot \text{sen}(\varphi)$$

Desplazamiento inicial: $x_0 = A \cdot \text{sen}(\varphi)$

* ω es la pulsación o <u>frecuencia angular</u>.

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$x(t + T) = A \cdot \text{sen}(\omega(t + T) + \varphi)$$

Si T es el <u>periodo</u>, entonces

$$x(t) = x(t + T) \Rightarrow \text{sen}(\omega t + \varphi) = \text{sen}(\omega(t + T) + \varphi)$$

luego

$$\omega t + \varphi + 2\pi = \omega t + \omega T + \varphi$$

$$2\pi = \omega T$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

T es el periodo y es el tiempo que tarda el móvil en describir una oscilación.

* La <u>frecuencia</u> υ es el número de oscilaciones por segundo:

$$T = \frac{1}{\upsilon} \quad \upsilon = \frac{1}{T} \quad \upsilon = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi\upsilon$$

* Velocidad inicial

$$v_0 = v(t = 0) = \omega \cdot A \cdot \cos(\varphi)$$

$$\frac{x_0}{v_0} = \frac{A \cdot \mathrm{sen}(\varphi)}{A \cdot \omega \cdot \cos(\varphi)} = \frac{1}{\omega} \cdot \mathrm{tg}(\varphi)$$

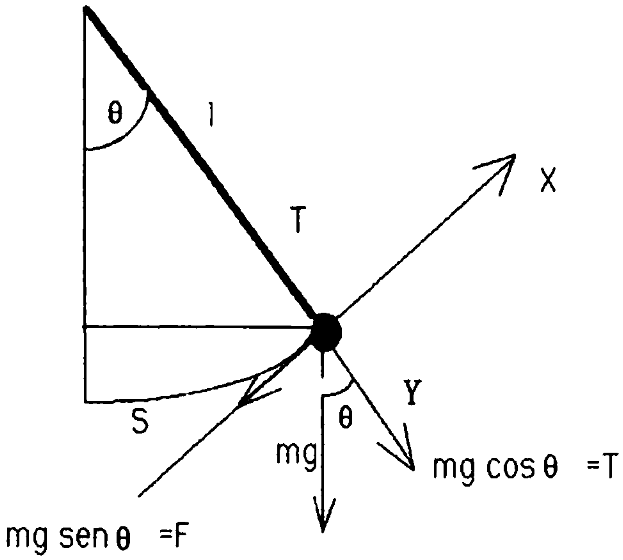
$$\mathrm{tg}(\varphi) = \omega \cdot \frac{x_0}{v_0}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

4. PENDULO SIMPLE

Péndulo es "un cuerpo cualquiera que oscila pendiente de un eje horizontal fijo que no pasa por su centro de gravedad".

Péndulo simple "es un punto material que oscila suspendido de un hilo inextensible y sin masa"



$$\left.\begin{array}{l} F_T = -mg\cdot \mathrm{sen}(\theta) \\ F_c = T - mg\cdot \cos(\theta) \end{array}\right\}$$

si ponemos

$$S = l\cdot\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = l\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Sigma F = ma \rightarrow -mg\cdot \mathrm{sen}(\theta) = m\cdot l\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

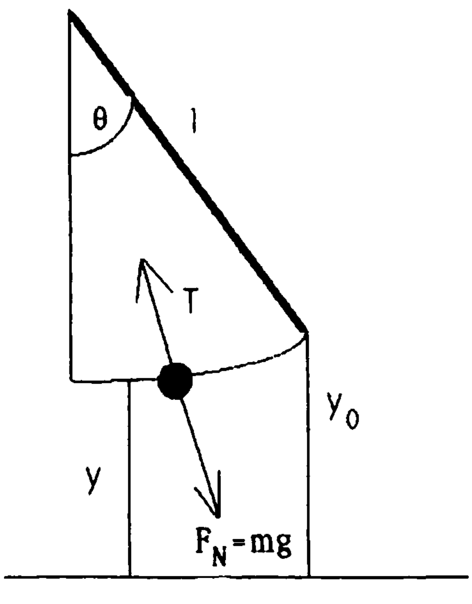
de donde, la ecuación dinámica es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - A \cdot \omega^2 \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \theta_0) = - \omega^2 \cdot \theta$$

Si las oscilaciones no son pequeñas, la aproximación $\mathrm{sen}\theta = \theta$ no es válida. Puede probarse que para el caso general el periodo depende también de θ_0:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{9}{64} \cdot \mathrm{sen}^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \ldots\right)$$

* Cálculo de la tensión en la cuerda de un péndulo en función del ángulo que hace la cuerda con la vertical.



Principio de conservación de la energía:

$$mg \cdot y_0 = mg \cdot y + \frac{1}{2} \cdot mv^2$$

$$y_0 - y = (\cos\theta - \cos\theta_0) \cdot l \rightarrow mg \cdot (\cos\theta - \cos\theta_0) \cdot l = \frac{1}{2} \cdot mv^2$$

$$v^2 = 2g \cdot l \cdot (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Por tanto

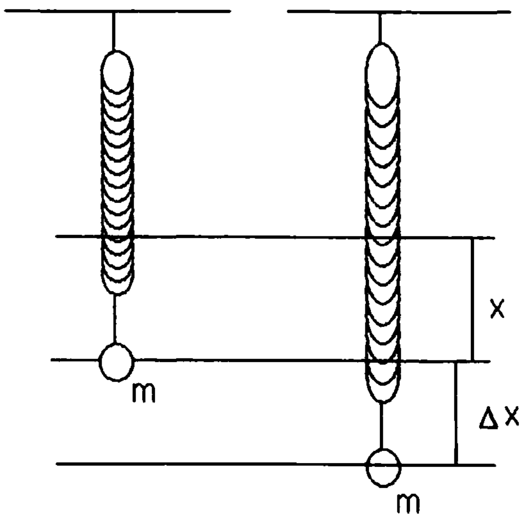
$$T = \frac{mv^2}{l} + mg \cdot \cos\theta = 2mg \cdot \cos\theta - 2mg \cdot \cos\theta_0 + mg \cdot \cos\theta$$

$$T = mg \cdot (3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

Esta expresión es válida para cualquier amplitud, ya que no hemos hecho ninguna aproximación respecto a θ:

5. ENERGIA EN EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

En cualquier instante hay una energía potencial elástica en el muelle:



$$F = -kx$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = -F \cdot dx$$

$$dU = -dW$$

$$\Delta U = W = \int_0^x -(-kx)dx = \frac{1}{2} \cdot kx^2$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \cdot kx^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi)$$

Cuando el cuerpo tiene una velocidad v:

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot mv^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$$

y como $K - \omega^2 m$, queda para la energía total:

$$E = E_c + \Delta U = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

$$E_T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

6. SUPERPOSICION DE MAS DE LA MISMA DIRECCION Y LA MISMA FRECUENCIA

"La composición de movimientos armónicos de la misma dirección y el msmo periodo producen un movimiento vibratorio armónico del mismo periodo".

Sean las ecuaciones de los movimientos:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right\}$$

Hemos puesto la misma ω, puesto que al tener los dos movimientos el mismo periodo, tienen la misma pulsación, ya que su valor es: $\omega = 2\,\pi/T$

Desarrolando las ecuaciones y sumando:

$$\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \mathrm{sen}\beta$$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1 \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_2) = \\ &= A_1 \cdot \mathrm{sen}\omega t \cdot \cos\varphi_1 + A_1 \cdot \cos\omega t \cdot \mathrm{sen}\varphi_1 + \\ &+ A_2 \cdot \mathrm{sen}\omega t \cdot \cos\varphi_2 + A_2 \cdot \cos\omega t \cdot \mathrm{sen}\varphi_2 = \\ &= \mathrm{sen}\omega t\left(A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2\right) + \cos\omega t\left(A_1 \cdot \mathrm{sen}\varphi_1 + A_2 \cdot \mathrm{sen}\varphi_2\right) \end{aligned}$$

Así pues:

$$x(t) = \mathrm{sen}\omega t\left(A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2\right) + \cos\omega t\left(A_1 \cdot \mathrm{sen}\varphi_1 + A_2 \cdot \mathrm{sen}\varphi_2\right)$$

$$x(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) = A \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\omega t + A \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\omega t$$

Existen dos números A y α que cumplen las condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot \operatorname{sen}\alpha = A_1 \cdot \operatorname{sen}\varphi_1 + A_2 \cdot \operatorname{sen}\varphi_2 \\ A \cdot \cos\alpha = A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2 \end{array}\right\}$$

Números que podemos calcular, ya que por el cociente de los anteriores, obtenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1 \cdot \operatorname{sen}\varphi_1 + A_2 \cdot \operatorname{sen}\varphi_2}{A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2}$$

además:

$$A^2 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha = A_1^2 \cdot \operatorname{sen}^2\varphi_1 + A_2^2 \cdot \operatorname{sen}^2\varphi_2 + 2A_1A_2 \cdot \operatorname{sen}\varphi_1 \cdot \operatorname{sen}\varphi_2$$
$$A^2 \cdot \cos^2\alpha = A_1^2 \cdot \cos^2\varphi_1 + A_2^2 \cdot \cos^2\varphi_2 + 2A_1A_2 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2$$

Sumando:

$$A^2 = A_1^2\left(\operatorname{sen}^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1\right) + A_2^2\left(\operatorname{sen}^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2\right) +$$
$$+ 2A_1A_2 \cdot \left(\operatorname{sen}\varphi_1 \cdot \operatorname{sen}\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2\right)$$

es decir,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Entonces

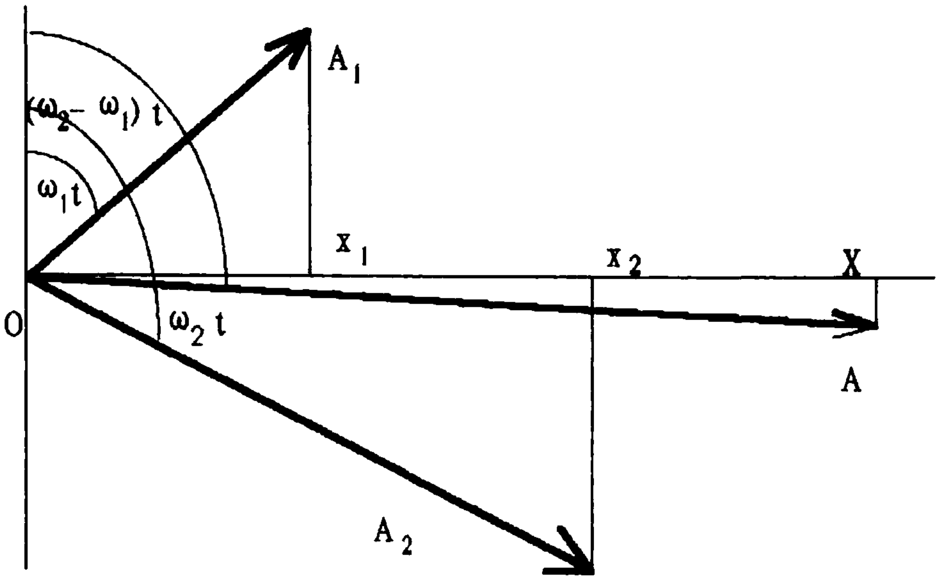
$$X = X_1 + X_2 = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

7. SUPERPOSICION DE MAS DE IGUAL DIRECCION Y DISTINTA FRECUENCIA.

Consideremos por simplicidad, el caso en el cual $\varphi_1 = 0$ y $\varphi_2 = 0$, entonces los movimientos están descritos por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = A_1 \cdot \mathrm{sen}(\omega_1 t) \\ x_2 = A_2 \cdot \mathrm{sen}(\omega_2 t) \end{array}\right\} \quad \omega_1 \neq \omega_2 \quad (\nu_1 \neq \nu_2)$$

Esto nunca puede dar $A\ \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$



$X = X_1 + X_2$ no es armónico simple. La "amplitud" del movimiento es:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 A_2 \cdot \cos(\omega_2 - \omega_1)t}$$

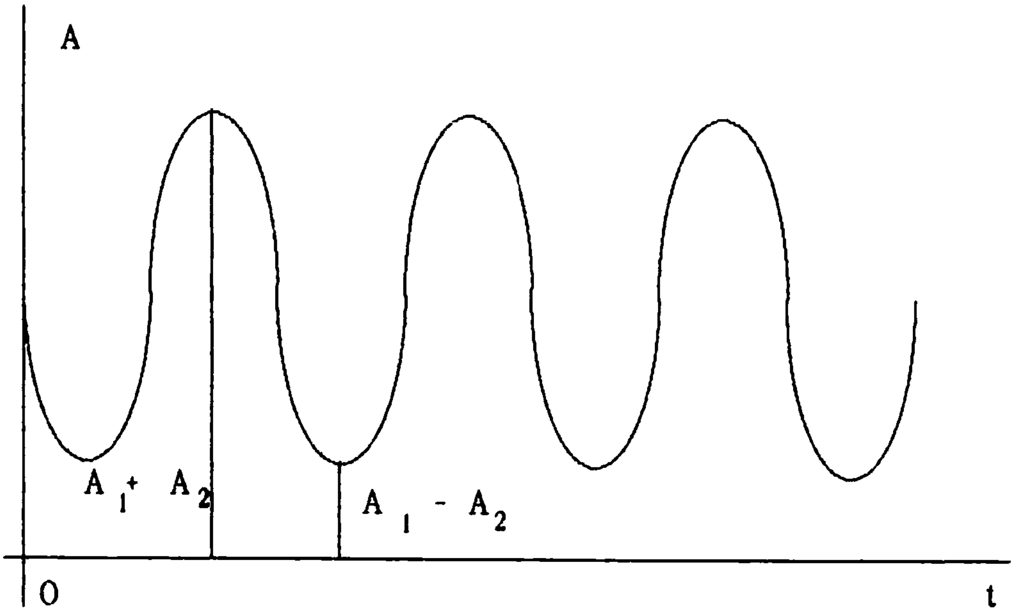
y varía entre los valores:

$A = A_1 + A_2$ cuando $(w_1 - w_2)\, t = 2n\,\pi$
$A = |A_1 - A_2|$ cuando $(w_1 - w_2)\, t = 2n\,\pi$

Se dice entonces que la amplitud es <u>modulada</u>. La frecuencia de la amplitud de oscilación se expresa por

$$\nu = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2$$

y es igual a la diferencia de las frecuencias de los movimientos que interfieren, la variación de A con t viene dada por la curva de la figura:



Esta fluctuación en amplitud se llama <u>pulsaciones</u>.

<u>Casos de interés</u>:

Cuando $A_1 = A_2$ (las amplitudes son iguales)

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

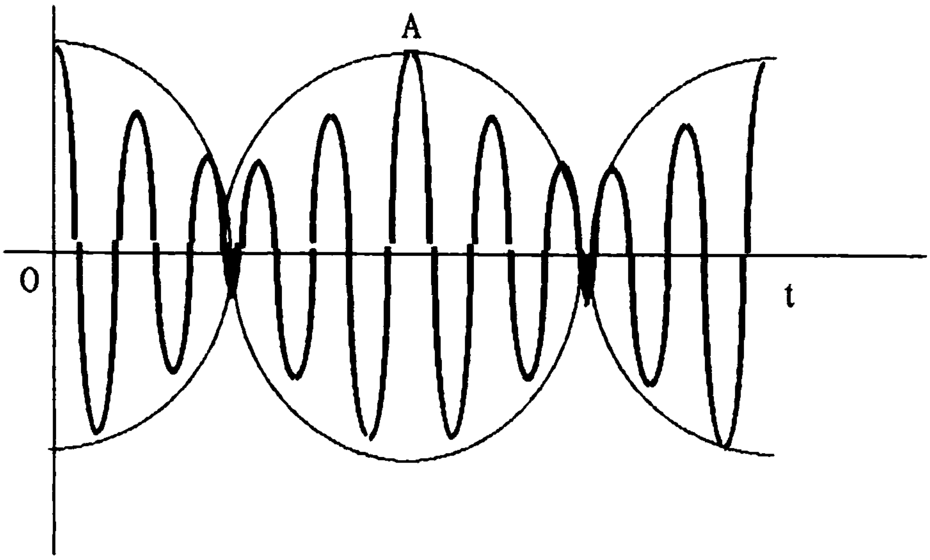
$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t) = \\ &= A_1(\operatorname{sen}(\omega_1 t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t)) = \\ &= A_1 \cdot \left(2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}\right)\right) = \\ &= \left[2 \cdot A_1 \cdot \cos\left(\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}\right)\right] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$X = 2 \cdot A_1 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right)$$

indicando que el movimiento es oscilatorio de frecuencia angular $(\omega_1 + \omega_2)/2$ y amplitud:

$$A = 2 \cdot A_1 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right)$$

En este caso, X en función de t tiene la forma



Pulasaciones cuando $A_1 = A_2$

La línea punteada representa la modulación de la amplitud.

8. SUPERPOSICION DE MAS DE DIRECCIONES PERPENDICULARES Y MISMA FRECUENCIA

En general producen en el punto material un movimiento elíptico.

Por simplicidad, elegimos:

$$\left.\begin{array}{l} x = A_1 \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \\ y = A_2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \end{array}\right\}$$

* De la segunda ecuación:

$$\frac{y}{A_2} = \operatorname{sen}(\omega t) \cdot \cos(\delta) + \cos(\omega t) \cdot \operatorname{sen}(\delta)$$

* De la primera ecuación:

$$\operatorname{sen}(\omega t) = \frac{x}{A_1} \rightarrow \cos(\omega t) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}$$

luego:

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cdot \cos\delta + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \cdot \operatorname{sen}\delta$$

$$\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cdot \cos\delta = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \cdot \operatorname{sen}\delta$$

elevando al cuadrado:

$$\frac{y^2}{A_2^2} = \frac{x^2}{A_1^2} \cdot \cos^2\delta - 2\frac{x \cdot y}{A_1 \cdot A_2} \cdot \cos\delta =$$
$$\operatorname{sen}^2\delta - \frac{x^2}{A_1^2} \cdot \operatorname{sen}^2\delta$$

de donde:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - 2 \cdot \frac{x \cdot y}{A_1 \cdot A_2} \cdot \cos\delta = \operatorname{sen}^2\delta$$

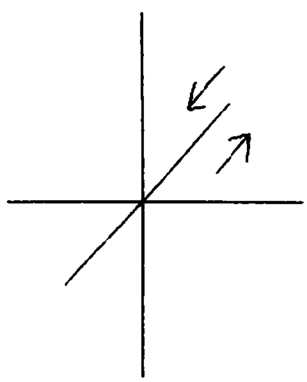
ecuación de una elipse, que nos da la forma de la trayectoria.
<u>Casos particulares</u>:

(1)

$$\delta = 2k\pi$$
$$\left.\begin{array}{l} x = A_1 \operatorname{sen}\omega t \\ y = A_2 \operatorname{sen}\omega t \end{array}\right\} \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0$$

$$\left[\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\right]^2 = 0$$

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \rightarrow y = \frac{A_2}{A_1} \cdot x$$



Ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas y de coeficiente angular positivo. El movimiento es rectilíneo en el primer y tercer cuadrante.

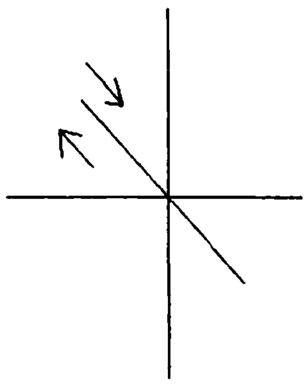
(2)

$$\left.\begin{array}{l} \delta = (2k+1)\pi \\ x = A_1 \operatorname{sen}\omega t \\ y = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \pi) = -A_2 \operatorname{sen}\omega t \end{array}\right\} \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0$$

$$\left[\frac{y}{A_2} + \frac{x}{A_1}\right]^2 = 0$$

$$\frac{y}{A_2} = \frac{-x}{A_1} \rightarrow y = -\frac{A_2}{A_1} \cdot x$$

Ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas y de coeficiente angular negativo. El movimiento es rectilíneo en el segundo y cuarto cuadrante.



(3)

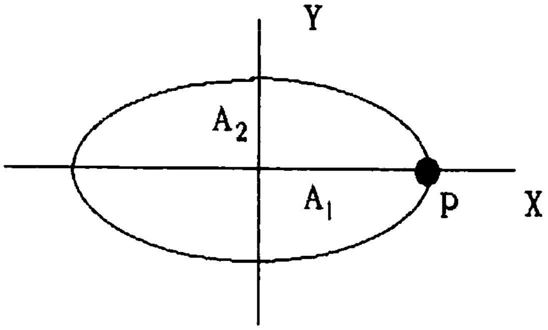
$$\delta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in Z)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1 \operatorname{sen}\omega t \\ y &= A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -A_2 \cos\omega t \end{aligned}\right\} \cos\delta = 0 \quad \operatorname{sen}\delta = +1$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} = 1$$

elipse centrada en los ejes

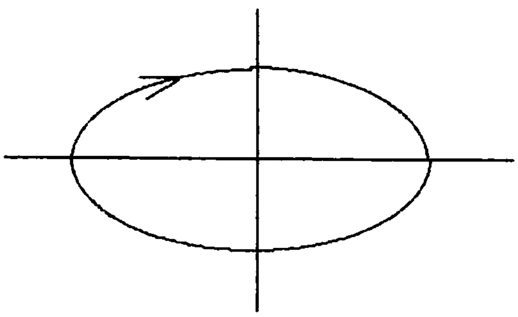
Sentido de recorrido de la elipse:



$$x(P) = A_1$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -A_2\omega \cdot \operatorname{sen}(\omega t) = -A_2\omega \cdot \operatorname{sen}\omega t = -A_2\omega\frac{x}{A_1}$$

$$v_y(P) = -A_2\omega < 0 \Rightarrow$$



(sentido de las agujas del reloj -dextrógiro -)
(4)

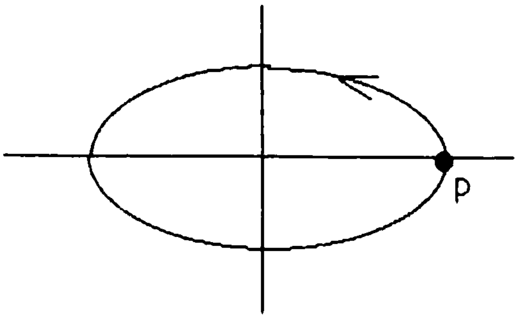
$$\delta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in Z)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = A_1 \operatorname{sen}\omega t \\ y = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -A_2 \cos\omega t \end{array}\right\} \cos\delta = 0 \quad \operatorname{sen}\delta = -1$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} = 1$$

elipse centrada en los ejes

Sentido de recorrido de la elipse:



$$x(P) = A_1$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -A_2\omega \cdot \operatorname{sen}(\omega t) = A_2\omega\frac{x}{A_1}$$

$$v_y(P) = A_2\omega > 0 \Rightarrow$$

(sentido contrario a las agujas del reloj - levógiro -)

* En (3) y (4), si $A_1 = A_2 \Rightarrow$ movimiento circular

$$x^2 + y^2 = A_1^2$$

9. SUPERPOSICION DE MAS DE DIRECCIONES PERPENDICULARES Y CON DISTINTA FRECUENCIA

Sean:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t) \\ y &= A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \delta) \end{aligned}\right\}$$

Se obtienen las curvas de Lissajous, que dependen de la relación ω_2/ω_1 (número racional) y de δ.

Si los periodos están en relación:

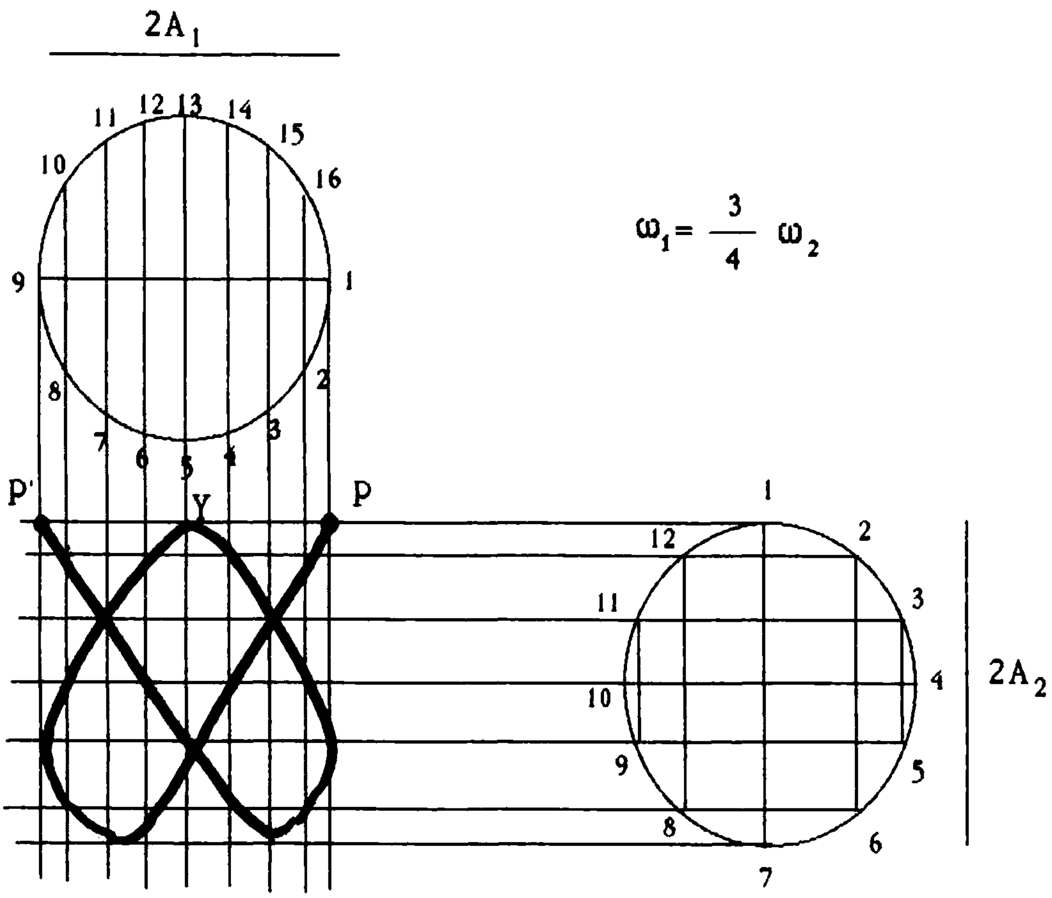
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k_1}{k_2} \quad (k_1 \text{ y } k_2 \text{ son números primos}) \Rightarrow \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{k_1}{k_2}$$

Al ser $T_1 k_2 = T_2 k_1 = T$ $(k_2\omega_2 = k_1\omega_1)$, cuando por el primer movimiento el punto haya realizado k_2 vibraciones enteras, por el segundo habrá realizado k_1 vibraciones enteras, volviendo, por tanto, al punto de partida para describir de nuevo su trayectoria en el tiempo T.

A tales trayectorias del punto material se les llama curvas de Lissajous, que se pueden dibujar fácilmente considerando las proyecciones sobre los ejes de las respectivas trayectorias circulares uniformes. La relación de periodos considerada en la figura es:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{4}{3} \qquad\qquad 3\omega_2 = 4\omega_1$$

Cada cuadrante de la circunferencia superior se ha dividido en cuatro partes iguales y es de la lateral en tres, numerando los puntos de una y otra correlativamente. La proyección de los puntos de la circunferencia superior sobre X, determina la abcisa, y la lateral sobre Y, la ordenada. Se ha supuesto en el dibujo, como punto de partida el P. El punto material recorre la trayectoria de P a P' y retorno de P' a P, en el tiempo T. Suponiendo otra relación de periodos y otras diferencias de fase se obtienen curvas muy diversas.



10. OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Hasta ahora, en la discursión del movimiento armónico simple, hemos considerado que las oscilaciones tienen amplitud constante. Sin embargo, por experiencia, sabemos que la amplitud de un cuerpo vibrante tal como un resorte o un péndulo, con una amplitud que decrece gradualmente hasta que se detiene. Esto es, el movimiento oscilatorio es amortiguado.

Para explicar dinámicamente el amortiguamiento, podemos suponer que, en adición a la fuerza elástica $F = -kx$, actúa otra fuerza, opuesta a la velocidad, $F' = -Rv$, donde R es una constante y v es la velocidad. El signo negativo se debe al hecho que F' se opone a v. La ecuación del movimiento es:

$$ma = -kx - Rv$$

es decir,

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - R \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Llamando:

$$\left.\begin{aligned} 2b = \frac{R}{m} &\rightarrow b = \frac{R}{2m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} &\rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{aligned}\right\}$$

nos queda la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Una solución es:

$$x = A_0 e^{-bt} \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Veamos que es así,

$$\frac{dx}{dt} = \left(-A_0 b \cdot e^{-bt}\right) \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi) + A_0 \cdot e^{-bt} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= A_0 e^{-bt}\left(-b \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi) + \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A_0 b \cdot e^{-bt}\left(-b \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi) + \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)\right) +$$

$$+ A_0 \cdot e^{-bt}\left(-b\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) - \omega^2 \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)\right) =$$

$$= A_0 \cdot e^{-bt}\left[\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \cdot (b^2 - \omega^2) + \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot (-\omega b - b\omega)\right] =$$

$$= A_0 \cdot e^{-bt}\left[\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \cdot (b^2 - \omega^2) + \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot (-2b\omega)\right]$$

de donde,

$$A_0 \cdot e^{-bt}\left[\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \cdot (b^2 - \omega^2) + \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot (-2b\omega)\right] +$$

$$+ 2bA_0 \cdot e^{-bt}\left(-b \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi) + \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)\right) +$$

$$+ \omega_0^2 \cdot A_0 \cdot e^{-bt} \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi) = 0$$

de donde:

$$b^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) - \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) - 2b\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) -$$
$$- 2b^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + 2b\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = 0$$
$$- b^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) - \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 = 0$$

de donde:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + b^2$$

de donde:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - b^2$$

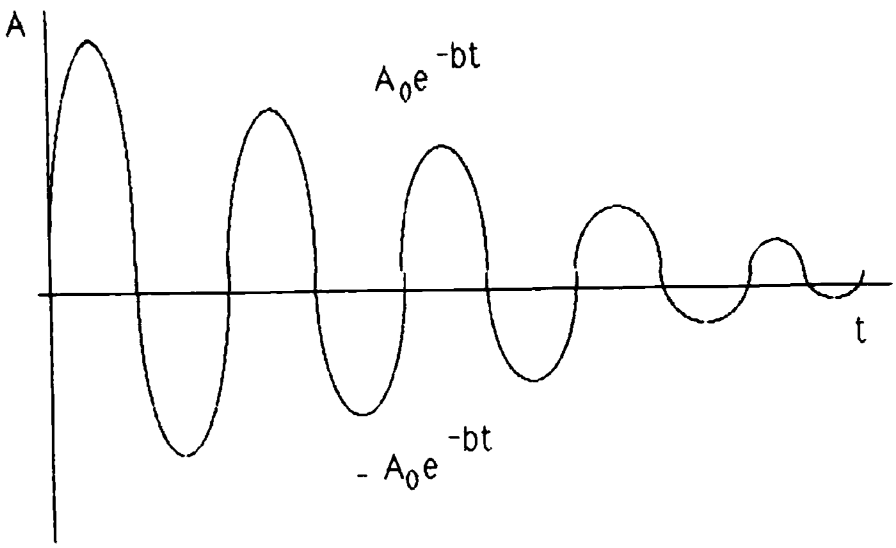
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2}}$$

A y φ son constantes arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales.

La amplitud de las oscilaciones no es constante, y está dada por:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-bt}$$

Debido al exponente negativo, la amplitud decrece a medida que el tiempo aumenta, resultando un movimiento amortiguado.



Si el amortiguamiento es muy grande, b puede ser mayor que ω_0 y ω, dada por la ecuación

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2}}$$

se vuelve imaginaria. En este caso no hay oscilaciones y la partícula si se la desplaza y se la deja libre, se aproxima gradualmente a la posición de equilibrio sin pasarla, o a lo más pasándola una sola vez. La energía perdida por la partícula en oscilaciones amortiguadas es absorbida por el medio que la rodea.

$$\omega^2 = \omega_0^2 - b^2$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{b^2}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

$$\gamma = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\text{coef.amortiguamiento}}$$

* Cuando $b^2 = \omega_0^2$, $R^2/4m^2 = k/m$, $R^2 = 4km$, nos da para $\omega = 0$ $\Rightarrow$ periodo infinito y el coeficiente de amortiguamiento, γ, se hace infinito. (Amortiguamiento crítico), el movimiento deja de ser armónico simple.

La resistencia disipa energía en forma de calor.

* Cuando $b^2 > \omega_0^2 \Rightarrow R^2 > 4km$, el amortiguamiento es tal que no hay oscilación. El movimiento se llama aperiódico.

11. OSCILACIONES FORZADAS. RESONANCIA

En un sistema que oscila con amortiguamiento, se ejerce una fuerza periódica

$$F = F_0 \cdot \cos\Omega t$$

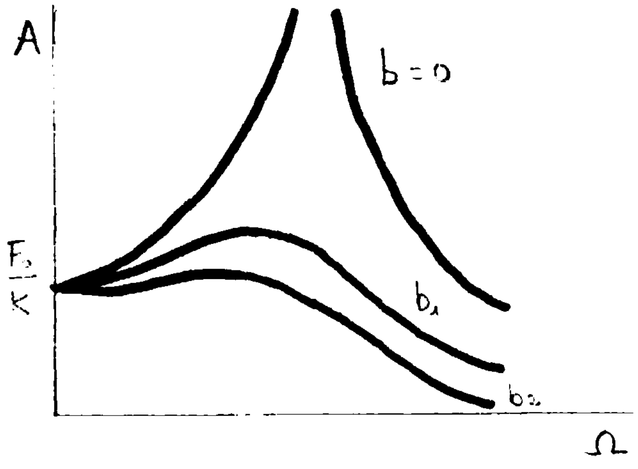
de la misma dirección que el movimiento. Al cabo de un tiempo podemos prescindir del movimiento natural del sistema, y el sistema oscilará con la frecuencia de la fuerza impulsora y las oscilaciones se llaman forzadas y el movimiento es estacionario, mientras que cuando no se puede despreciar el natural se llama transitorio.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + R \cdot \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cdot \cos\Omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \cos\Omega t$$

Llamamos:

La figura siguiente muestra la variación de la amplitud A en función de la frecuencia Ω para diversos valores del amortiguamiento b.



La velocidad del oscilador forzado es:

$$v = \frac{dx}{dt} = \Omega A \cdot \cos(\Omega t - \alpha)$$

Comparando con la expresión $F = F_0 \cos \Omega t$ de la fuerza aplicada, vemos que α representa el desfasaje de la velocidad con respecto a la fuerza. La amplitud de la velocidad v_0 es:

$$v_0 = \Omega A = \frac{\Omega F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4b^2\Omega^2}}$$

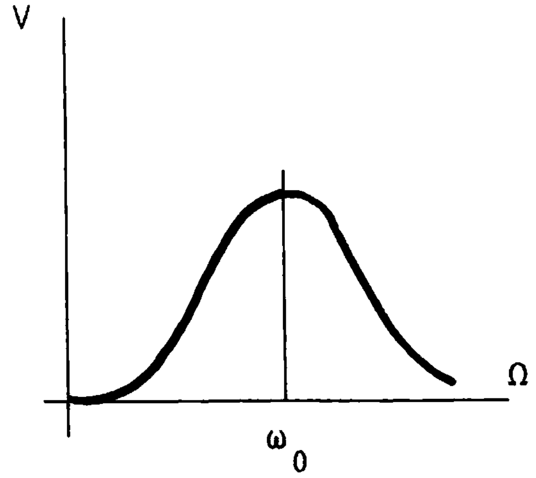
es decir,

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(m\Omega - k/\Omega)^2 + R^2}}$$

La cantidad v_0 varía con Ω y adquiere su máximo valor cuando la cantidad dentro del paréntesis del denominador es cero, $m\Omega - k/\Omega = 0$, o bien

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

A esta frecuencia de la fuerza aplicada, la velocidad e igualmente la energía cinética de las oscilaciones son máximas, y se dice que hay resonancia en la energía.



"Cuando hay resonancia en la energía, la transferencia de energía de la fuerza aplicada al oscilador forzado está al máximo."

Cuando el amortiguamiento es muy pequeño, no hay gran diferencia entre las frecuencias correspondientes a la resonancia en la amplitud y la resonancia en la energía.

Impedancia de un oscilador, Z.

$$\text{Oscilador amortiguado} \begin{cases} m \\ k \\ R \end{cases}$$

$$Z = \sqrt{(m\Omega - k/\Omega)^2 + R^2} \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{F_0}{Z}$$

R es la resistencia, y $X = m\Omega - k/\Omega$ es la reactancia.

$$Z = \sqrt{X^2 + R^2} \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{X}{R}$$

Velocidad:

$$v = \frac{F_0}{Z} \cdot \cos(\Omega t - \alpha)$$

* Quizás el ejemplo mas familiar de resonancia sea lo que sucede cuando sintonizamos una radio a una estación radioemisora. Todas las estaciones radioemisoras están produciendo todo el tiempo oscilaciones forzadas en el circuito del receptor. Pero, para cada posición del sintonizador, corresponde una frecuencia natural de oscilación del circuito eléctrico del receptor. Cuando esta frecuencia coincide con aquella de la radio emisora, la energía de absorción está al máximo, y por ello es la única estación que podemos oir. Si dos estaciones tienen frecuencias muy próximas, algunas veces las oímos simultaneamente, lo que da lugar a un efecto de interferencia.

* Podemos extender el concepto de resonancia a muchos procesos en los cuales hay consideaciones favorables para la transferencia de energía de un sistema a otro, aun si no podemos describir el proceso en función de oscilaciones forzadas. En este sentido es posible hablar de resonancia en reacciones nucleares y en procesos que tienen lugar entre partículas fundamentales. Así, considerando el concepto de resonancia en la energía, juega un papel importante en la descripción de muchos fenómenos.

MOVIMIENTO ONDULATORIO

1.- Generalidades. Ondas longitudinales y transversales.
2.- Propagación de una perturbación en una dirección. Ecuación de ondas.
3.- Propagación de una perturbación periódica. Ondas armónicas.
4.- Ondas en dos y tres dimensiones
5.- Energía e Intensidad del movimieno ondulatorio. Absorción.
6.- Velocidad de grupo y velocidad de fase.

1. GENERALIDADES. ONDAS LONGITUDINALES Y TRANSVERSALES

Supongamos una propiedad física definida en una región del espacio, lo que constituye un campo escalar o vectorial. En cada punto del espacio, en general, dicha propiedad dependerá de las coordenadas del mismo, y del instante de tiempo considerado. Si por algún motivo en un punto se produce una variación de dicha propiedad física (perturbación), la cual se transmite a otros puntos (propagación de la perturbación), nos encontramos ante un fenómeno que recibe el nombre de "movimiento ondulatorio", o, simplemente, onda.

El movimiento ondulatorio es la propagación de la onda en el medio.

Fenómenos físicos tan usuales como el sonido, la propagación de la luz, las olas producidas en superficies líquidas, etc, deben ser contemplados bajo esta punto de vista y así hablaremos de ondas acústicas, luminosas, etc. Aunque el mecanismo físico es diferente en cada uno de los ejemplos anteriores, tienen la característica común de ser "situaciones físicas producidas en un punto del espacio que se propagan a través del mismo y se reciben en otro punto".

Ondas como las acústicas o las producidas en una cuerda, necesitan de un medio material para su propagación, mientras que otras ondas, como son las electromagnéticas, pueden propagarse en el vacío.

Desde un punto de vista clásico, podemos diferenciar los fenómenos corpusculares y los ondulatorios de dos formas. En primer lugar, atendiendo a la forma mecánica que expresa la ley que rige dichos fenómenos:

- Los fenómenos corpusculares satisfacen las leyes de la Mecánica de Newton.
- Los fenómenos ondulatorios satisfacen la ecuación de ondas

En segundo lugar, en un fenómeno ondulatorio no hay transporte de materia, tal y como sucede en uno corpuscular, sino que lo que se transmite es el estado de movimiento caracterizado por el momento lineal y la energía. Es decir, se transmite energía de un punto a otro a través del medio, pero el medio en sí mismo no se transporta. Un ejemplo clásico pone esto de manifiesto. Sea un pequeño corcho situado sobre la superficie del agua, si en un punto de la citada superfície se provoca una perturbación, por ejemplo, dejando caer una piedra, la perturbación se porpaga a los diferentes puntos de la superfície, y al llegar a donde está el corcho, hace que éste se mueva en sentido vertical, subiendo y bajando, pero no en el sentido de la propagación, que es el plano horizontal de la superficie del agua.

Ondas longitudinales y transversales

Las ondas originadas por una perturbación se clasifican en:

- Ondas longitudinales: Cuando la dirección en la cual varía la magnitud que define la perturbación coincide con la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo, las ondas elásticas producidas en un resorte, al comprimir una parte de su longitud y soltarlo después libremente.

- Ondas transversales: Cuando la dirección de perturbación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo, las ondas producidas en una cuerda tensa, las producidas en la superficie de un líquido, o las ondas luminosas.

Se denomina "**pulso de onda**" a toda perturbación aislada que se propaga a través del medio. Es el caso de la onda transversal que se produce en una cuerda mediante una sacudida instantánea en uno de sus extremos.

En otros casos, el movimiento ondulatorio está constituido por pulsos de onda sucesivos que se propagan en el medio, formando lo que se denomina un "**tren de ondas**". En una cuerda se puede originar un tren de ondas sacudiendo ininterrumpidamente uno de sus extremos.

Se define el **frente de onda** como el lugar geométrico de los puntos que en cada instante tienen el mismo estado de perturbación.

2. PROPAGACION DE UNA PERTURBACION EN UNA DIRECCION. ECUACION DE ONDAS

Consideremos una onda que se propaga en un medio homogéneo e isótropo, y sea ψ una propiedad de esa propagación que recibe el nombre de función de onda, y que dependerá de las coordenadas y del tiempo.

En el caso en que la propagación se lleve a cabo en una sola dirección, podemos escribir:

$$\Psi = f(x,t)$$

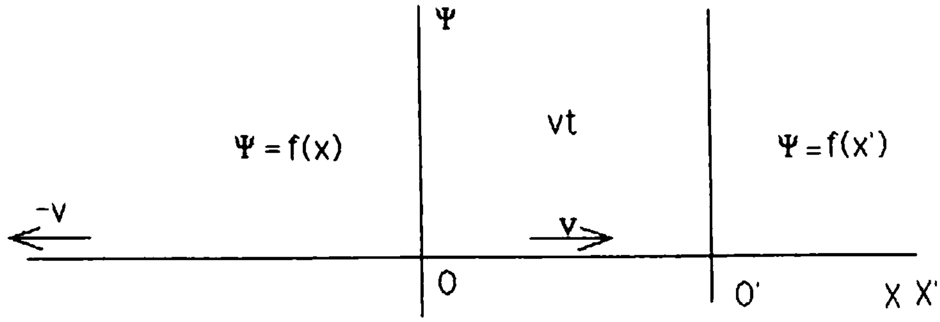
Vamos a considerar que se satisfacen las siguientes hipótesis:

(1) La perturbación se propaga con una velocidad v constante en el medio y que es totalmente independiente de la ley de variacion de ψ con el tiempo.

(2) La perturbación no va a experimentar amortiguamiento en su propagación.

En estas condiciones vamos a obtener la descripción matemática de un movimiento ondulatorio no amortiguado unidimensional, a partir de la función de onda $\psi(x,t)$ en la que ψ determina el estado de la perturbación, x la distancia al foco de la perturbación y t es el tiempo. Para un punto determinado, la perturbación es función del tiempo y para un instante dado, la perturbación es función de x.

Supongamos que en el instante inicial el estado de la perturbación está dado por la función $\psi = f(x)$. Si la perturbación se mueve con velocidad constante, v, denominada "velocidad de fase", al cabo de un tiempo t habrá recorrido un espacio vt. Como la perturbación, por la hipótesis (2), no se deforma, la forma de la curva debe ser la misma, con lo que basta trasladar el origen de coordenadas de O a O', pues la misma función que describe la onda en el instante t = 0, con origen en O, es la que describe la onda en el instante t, con origen en O': $\psi(x,t) = f(x')$



y puesto que verifica la relación $x' = x-vt$, resulta que la función que representa la propagación de la perturbación con origen en O es:

$$\Psi(x,t) = f(x - vt)$$

La perturbación también se propaga en el sentido de las x negativas, con la misma velocidad v, al ser el medio isótopo, y en este caso la función que representa la perturbación es:

$$\Psi(x,t) = f(x + vt)$$

Es evidente que el estado de perturbación de un punto en el instante t es el mismo que tenía, en el instante t = 0, el punto separado de aquél una distancia vt., si y solo si t = nT.

Análogamente, en el foco de la perturbación, la variación de éste estará dada por una función del tipo $\psi(0,t) = F(t)$. Si la velocidad de propagación es v, el tiempo que tardará en llegar a un punto situado a la distancia x del centro es, supuesto el medio homogéneo e isótropo, x/v. La perturbación llega con un retraso x/v y el estado de perturbación del punto es el que tenía el foco en el instante t-x/v. La porpagación de la perturbación queda descrita por una función del tipo:

$$\Psi(x,t) = F(t - \frac{x}{v})$$

Concluimos entonces que una expresión matemática de la forma $\psi(x,t) = f(x \pm vt)$ es adecuada para describir una situación física que "viaja" o "se propaga" sin deformación en la dirección del eje X. La cantidad ψ puede representar muy diversas cantidades físicas, tales como la deformación en un sólido, la presión en un gas, un campo eléctrico o magnético, etc.

Ecuación de onda

La ecuación que encontraremos muchas veces y que describe un movimiento ondulatorio que se propaga con velocidad v y sin distorsión según las direcciones +X ó -X, es:

$$\frac{\delta^2 \Psi}{\delta t^2} = v^2 \cdot \frac{\delta^2 \Psi}{\delta x^2}$$

o bien

$$\frac{\delta^2 \Psi}{\delta x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\delta^2 \Psi}{\delta t^2} = 0$$

llamada ecuación diferencial del movimiento ondulatorio. La solución general de esta ecuación tiene la forma:

$$\Psi(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

De este modo la solución general de la ecuación de ondas se puede expresar como la superposición de dos movimientos ondulatorios que se propagan en la misma dirección pero con sentidos opuestos. Desde luego, para una onda que se propaga en un sólo setido, aparecerá una sola de las dos funciones. Sin embargo, cuando (por ejemplo) tenemos una onda incidente que se propaga según +X, y una onda reflejada que se propaga según -X, se debe usar la forma general de ψ.

Comprobemos que una expresión de la forma:

$$\Psi(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

es una solución de la ecuación de ondas. Consideremos

$$\Psi(x,t) = f(x \pm vt)$$

y llamemos u = x±vt, entonces, derivando:

$$\frac{\delta\Psi}{\delta t} = \frac{\delta\Psi}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta t} = \pm \frac{\delta\Psi}{\delta u} \cdot v = \pm v \cdot \frac{\delta\Psi}{\delta u}$$

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta t^2} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\pm v \cdot \frac{\delta\Psi}{\delta u}\right) = \pm v \cdot \frac{\delta^2\Psi}{\delta u^2} \cdot \frac{\delta u}{\delta t} = v^2 \cdot \frac{\delta^2\Psi}{\delta u^2}$$

$$\frac{\delta\Psi}{\delta x} = \frac{\delta\Psi}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta\Psi}{\delta u}$$

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta u}\right) = \frac{\delta^2\Psi}{\delta u^2} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta^2\Psi}{\delta u^2}$$

Es decir,

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta t^2} = v^2 \cdot \frac{\delta^2\Psi}{\delta u^2}$$

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta x^2} = \frac{\delta^2\Psi}{\delta u^2}$$

Observando los dos segundos miembros, vemos que se cumple:

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\delta^2\Psi}{\delta t^2} = 0$$

que es la ecuación de ondas unidimensional.

3. PROPAGACION DE UNA PERTURBACION PERIODICA. ONDAS ARMONICAS.

Se dice que una onda es "armónica" cuando es la ecuación de onda:

$$\Psi = f(x,t)$$

f es una función del tipo seno o coseno.

Así, consideremos que en un punto O se produce una perturbación armónica:

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \operatorname{sen}\omega t$$

dicha perturbación será recibida en un punto P de abcisa x al cabo de x/v segundos, siemdo v la velocidad de propagación. Luego, el estado de vibración de P corresponde a la expresión:

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \operatorname{sen}\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

ω es la pulsación, que puede ponerse en función de una cantidad T denominada periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

luego

$$\Psi = \Psi_0 \cdot 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)$$

El producto vT recibe el nombre de longitud de onda, λ,

$$\lambda = vT$$

Se define el número de onda, k, como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La distancia mínima entre dos estados idénticos de perturbación, es decir, entre dos frentes de onda consecutivos, se denomina "periodo", y así tenemos:

-Distancia temporal o "periodo" propiamente dicho: Intervalo temporal T entre estados idénticos de perturbación sucedidos en el mismo punto:

$$\Psi(x,t) = \Psi(x,t+T)$$

- Distancia espacial o "longitud de onda". Intervalo espacial λ entre estados idénticos de perturbación sucedidos en el mismo instante:

$$\Psi(x,t) = f(x+\lambda,t)$$

Podemos definir la longitud de onda como la distancia que avanza el movimiento ondulatorio en un periodo. Por consiguiente, en el movimiento ondulatorio sinusoidal tenemos dos periodicidades: espacial y temporal, de modo que λ = vT. La función de onda puede escribirse:

$$\Psi = \Psi_0 \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\Psi = \Psi_0 \operatorname{sen}\left(kx - \frac{2\pi t}{T}\right)$$

También se tiene que:

$$\upsilon = \frac{1}{T} \rightarrow v = \lambda \cdot \upsilon$$

donde es la frecuencia.

$$b^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) - \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) - 2b\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) -$$
$$- 2b^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + 2b\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = 0$$
$$- b^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) - \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 = 0$$

de donde:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + b^2$$

de donde:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - b^2$$

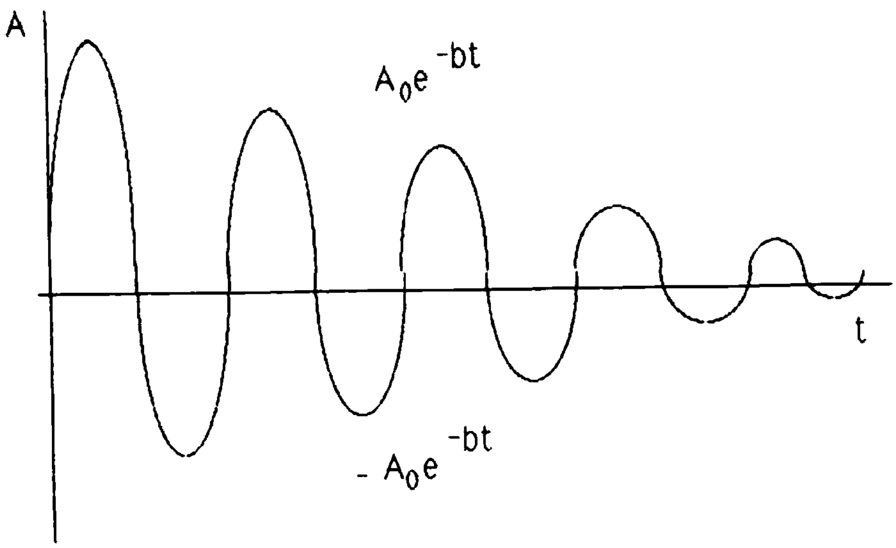
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2}}$$

A y φ son constantes arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales.

La amplitud de las oscilaciones no es constante, y está dada por:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-bt}$$

Debido al exponente negativo, la amplitud decrece a medida que el tiempo aumenta, resultando un movimiento amortiguado.



Si el amortiguamiento es muy grande, b puede ser mayor que ω_0 y ω, dada por la ecuación

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2}}$$

se vuelve imaginaria. En este caso no hay oscilaciones y la partícula si se la desplaza y se la deja libre, se aproxima gradualmente a la posición de equilibrio sin pasarla, o a lo más pasándola una sola vez. La energía perdida por la partícula en oscilaciones amortiguadas es absorbida por el medio que la rodea.

$$\omega^2 = \omega_0^2 - b^2$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{b^2}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

$$\gamma = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\text{coef.amortiguamiento}}$$

* Cuando $b^2 = \omega_0^2$, $R^2/4m^2 = k/m$, $R^2 = 4km$, nos da para $\omega = 0$ $\Rightarrow$ periodo infinito y el coeficiente de amortiguamiento, γ, se hace infinito. (Amortiguamiento crítico), el movimiento deja de ser armónico simple.

La resistencia disipa energía en forma de calor.

* Cuando $b^2 > \omega_0^2 \Rightarrow R^2 > 4km$, el amortiguamiento es tal que no hay oscilación. El movimiento se llama aperiódico.

11. OSCILACIONES FORZADAS. RESONANCIA

En un sistema que oscila con amortiguamiento, se ejerce una fuerza periódica

$$F = F_0 \cdot \cos \Omega t$$

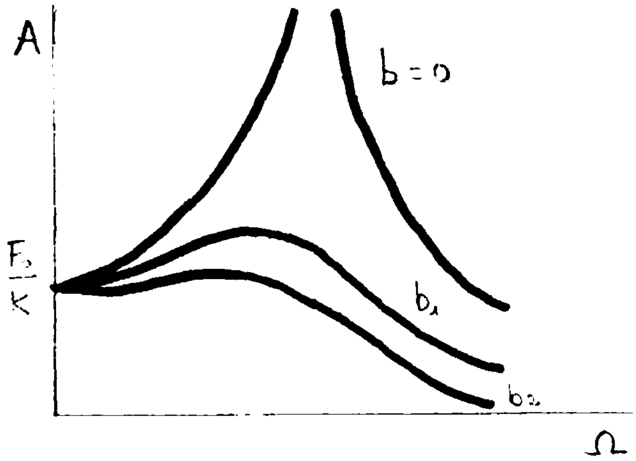
de la misma dirección que el movimiento. Al cabo de un tiempo podemos prescindir del movimiento natural del sistema, y el sistema oscilará con la frecuencia de la fuerza impulsora y las oscilaciones se llaman forzadas y el movimiento es estacionario, mientras que cuando no se puede despreciar el natural se llama transitorio.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + R \cdot \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cdot \cos \Omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \cos \Omega t$$

Llamamos:

La figura siguiente muestra la variación de la amplitud A en función de la frecuencia Ω para diversos valores del amortiguamiento b.



La velocidad del oscilador forzado es:

$$v = \frac{dx}{dt} = \Omega A \cdot \cos(\Omega t - \alpha)$$

Comparando con la expresión $F = F_0 \cos \Omega t$ de la fuerza aplicada, vemos que α representa el desfasaje de la velocidad con respecto a la fuerza. La amplitud de la velocidad v_0 es:

$$v_0 = \Omega A = \frac{\Omega F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4b^2\Omega^2}}$$

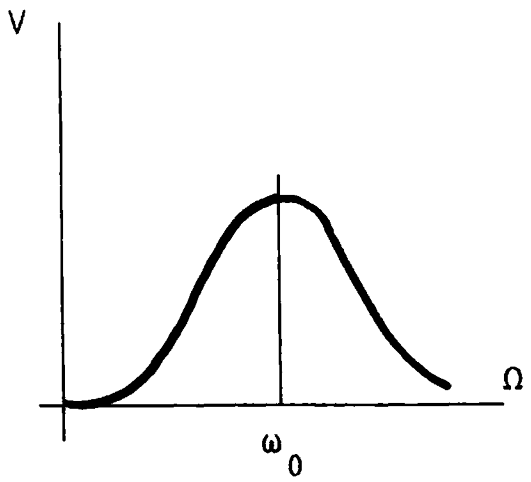
es decir,

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(m\Omega - k/\Omega)^2 + R^2}}$$

La cantidad v_0 varía con Ω y adquiere su máximo valor cuando la cantidad dentro del paréntesis del denominador es cero, $m\Omega - k/\Omega = 0$, o bien

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

A esta frecuencia de la fuerza aplicada, la velocidad e igualmente la energía cinética de las oscilaciones son máximas, y se dice que hay resonancia en la energía.



"Cuando hay resonancia en la energía, la transferencia de energía de la fuerza aplicada al oscilador forzado está al máximo."

Cuando el amortiguamiento es muy pequeño, no hay gran diferencia entre las frecuencias correspondientes a la resonancia en la amplitud y la resonancia en la energía.

Impedancia de un oscilador, Z.

Oscilador amortiguado $\begin{cases} m \\ k \\ R \end{cases}$

$$Z = \sqrt{(m\Omega - k/\Omega)^2 + R^2} \Rightarrow v_0 = \frac{F_0}{Z}$$

R es la resistencia, y $X = m\Omega - k/\Omega$ es la reactancia.

$$Z = \sqrt{X^2 + R^2} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{X}{R}$$

Velocidad:

$$v = \frac{F_0}{Z} \cdot \cos(\Omega t - \alpha)$$

* Quizás el ejemplo mas familiar de resonancia sea lo que sucede cuando sintonizamos una radio a una estación radioemisora. Todas las estaciones radioemisoras están produciendo todo el tiempo oscilaciones forzadas en el circuito del receptor. Pero, para cada posición del sintonizador, corresponde una frecuencia natural de oscilación del circuito eléctrico del receptor. Cuando esta frecuencia coincide con aquella de la radio emisora, la energía de absorción está al máximo, y por ello es la única estación que podemos oir. Si dos estaciones tienen frecuencias muy próximas, algunas veces las oímos simultaneamente, lo que da lugar a un efecto de interferencia.

* Podemos extender el concepto de resonancia a muchos procesos en los cuales hay consideaciones favorables para la transferencia de energía de un sistema a otro, aun si no podemos describir el proceso en función de oscilaciones forzadas. En este sentido es posible hablar de resonancia en reacciones nucleares y en procesos que tienen lugar entre partículas fundamentales. Así, considerando el concepto de resonancia en la energía, juega un papel importante en la descripción de muchos fenómenos.

MOVIMIENTO ONDULATORIO

1.- Generalidades. Ondas longitudinales y transversales.
2.- Propagación de una perturbación en una dirección.
Ecuación de ondas.
3.- Propagación de una perturbación periódica.
Ondas armónicas.
4.- Ondas en dos y tres dimensiones
5.- Energía e Intensidad del movimieno ondulatorio.
Absorción.
6.- Velocidad de grupo y velocidad de fase.

1. GENERALIDADES. ONDAS LONGITUDINALES Y TRANSVERSALES

Supongamos una propiedad física definida en una región del espacio, lo que constituye un campo escalar o vectorial. En cada punto del espacio, en general, dicha propiedad dependerá de las coordenadas del mismo, y del instante de tiempo considerado. Si por algún motivo en un punto se produce una variación de dicha propiedad física (perturbación), la cual se transmite a otros puntos (propagación de la perturbación), nos encontramos ante un fenómeno que recibe el nombre de "movimiento ondulatorio", o, simplemente, onda.

El movimiento ondulatorio es la propagación de la onda en el medio.

Fenómenos físicos tan usuales como el sonido, la propagación de la luz, las olas producidas en superficies líquidas, etc, deben ser contemplados bajo esta punto de vista y así hablaremos de ondas acústicas, luminosas, etc. Aunque el mecanismo físico es diferente en cada uno de los ejemplos anteriores, tienen la característica común de ser "situaciones físicas producidas en un punto del espacio que se propagan a través del mismo y se reciben en otro punto".

Ondas como las acústicas o las producidas en una cuerda, necesitan de un medio material para su propagación, mientras que otras ondas, como son las electromagnéticas, pueden propagarse en el vacío.

Desde un punto de vista clásico, podemos diferenciar los fenómenos corpusculares y los ondulatorios de dos formas. En primer lugar, atendiendo a la forma mecánica que expresa la ley que rige dichos fenómenos:

- Los fenómenos corpusculares satisfacen las leyes de la Mecánica de Newton.
- Los fenómenos ondulatorios satisfacen la ecuación de ondas

En segundo lugar, en un fenómeno ondulatorio no hay transporte de materia, tal y como sucede en uno corpuscular, sino que lo que se transmite es el estado de movimiento caracterizado por el momento lineal y la energía. Es decir, se transmite energía de un punto a otro a través del medio, pero el medio en sí mismo no se transporta. Un ejemplo clásico pone esto de manifiesto. Sea un pequeño corcho situado sobre la superficie del agua, si en un punto de la citada superfície se provoca una perturbación, por ejemplo, dejando caer una piedra, la perturbación se porpaga a los diferentes puntos de la superfície, y al llegar a donde está el corcho, hace que éste se mueva en sentido vertical, subiendo y bajando, pero no en el sentido de la propagación, que es el plano horizontal de la superficie del agua.

Ondas longitudinales y transversales

Las ondas originadas por una perturbación se clasifican en:

- Ondas longitudinales: Cuando la dirección en la cual varía la magnitud que define la perturbación coincide con la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo, las ondas elásticas producidas en un resorte, al comprimir una parte de su longitud y soltarlo después libremente.

- Ondas transversales: Cuando la dirección de perturbación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo, las ondas producidas en una cuerda tensa, las producidas en la superficie de un líquido, o las ondas luminosas.

Se denomina "**pulso de onda**" a toda perturbación aislada que se propaga a través del medio. Es el caso de la onda transversal que se produce en una cuerda mediante una sacudida instantánea en uno de sus extremos.

En otros casos, el movimiento ondulatorio está constituido por pulsos de onda sucesivos que se propagan en el medio, formando lo que se denomina un "**tren de ondas**". En una cuerda se puede originar un tren de ondas sacudiendo ininterrumpidamente uno de sus extremos.

Se define el **frente de onda** como el lugar geométrico de los puntos que en cada instante tienen el mismo estado de perturbación.

2. PROPAGACION DE UNA PERTURBACION EN UNA DIRECCION. ECUACION DE ONDAS

Consideremos una onda que se propaga en un medio homogéneo e isótropo, y sea ψ una propiedad de esa propagación que recibe el nombre de función de onda, y que dependerá de las coordenadas y del tiempo.

En el caso en que la propagación se lleve a cabo en una sola dirección, podemos escribir:

$$\Psi = f(x,t)$$

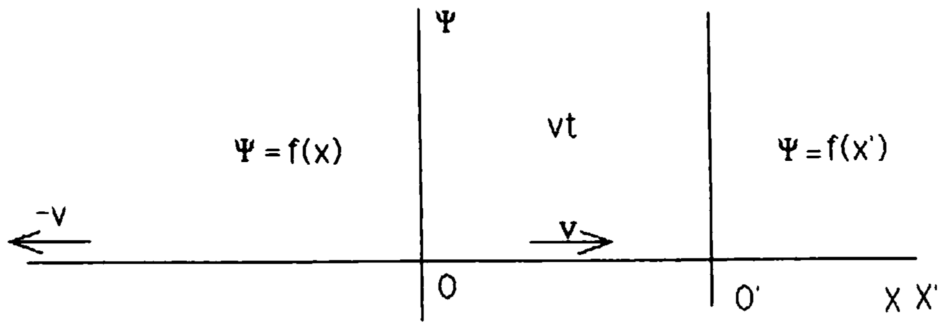
Vamos a considerar que se satisfacen las siguientes hipótesis:

(1) La perturbación se propaga con una velocidad v constante en el medio y que es totalmente independiente de la ley de variacion de ψ con el tiempo.

(2) La perturbación no va a experimentar amortiguamiento en su propagación.

En estas condiciones vamos a obtener la descripción matemática de un movimiento ondulatorio no amortiguado unidimensional, a partir de la función de onda $\psi(x,t)$ en la que ψ determina el estado de la perturbación, x la distancia al foco de la perturbación y t es el tiempo. Para un punto determinado, la perturbación es función del tiempo y para un instante dado, la perturbación es función de x.

Supongamos que en el instante inicial el estado de la perturbación está dado por la función $\psi = f(x)$. Si la perturbación se mueve con velocidad constante, v, denominada "velocidad de fase", al cabo de un tiempo t habrá recorrido un espacio vt. Como la perturbación, por la hipótesis (2), no se deforma, la forma de la curva debe ser la misma, con lo que basta trasladar el origen de coordenadas de O a O', pues la misma función que describe la onda en el instante t = 0, con origen en O, es la que describe la onda en el instante t, con origen en O': $\psi(x,t) = f(x')$



y puesto que verifica la relación $x' = x-vt$, resulta que la función que representa la propagación de la perturbación con origen en O es:

$$\Psi(x,t) = f(x - vt)$$

La perturbación también se propaga en el sentido de las x negativas, con la misma velocidad v, al ser el medio isótopo, y en este caso la función que representa la perturbación es:

$$\Psi(x,t) = f(x + vt)$$

Es evidente que el estado de perturbación de un punto en el instante t es el mismo que tenía, en el instante t = 0, el punto separado de aquél una distancia vt., si y solo si t = nT.

Análogamente, en el foco de la perturbación, la variación de éste estará dada por una función del tipo $\psi(0,t) = F(t)$. Si la velocidad de propagación es v, el tiempo que tardará en llegar a un punto situado a la distancia x del centro es, supuesto el medio homogéneo e isótropo, x/v. La perturbación llega con un retraso x/v y el estado de perturbación del punto es el que tenía el foco en el instante t-x/v. La porpagación de la perturbación queda descrita por una función del tipo:

$$\Psi(x,t) = F(t - \frac{x}{v})$$

Concluimos entonces que una expresión matemática de la forma $\psi(x,t) = f(x \pm vt)$ es adecuada para describir una situación física que "viaja" o "se propaga" sin deformación en la dirección del eje X. La cantidad ψ puede representar muy diversas cantidades físicas, tales como la deformación en un sólido, la presión en un gas, un campo eléctrico o magnético, etc.

Ecuación de onda

La ecuación que encontraremos muchas veces y que describe un movimiento ondulatorio que se propaga con velocidad v y sin distorsión según las direcciones +X ó -X, es:

$$\frac{\delta^2 \Psi}{\delta t^2} = v^2 \cdot \frac{\delta^2 \Psi}{\delta x^2}$$

o bien

$$\frac{\delta^2 \Psi}{\delta x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\delta^2 \Psi}{\delta t^2} = 0$$

llamada ecuación diferencial del movimiento ondulatorio. La solución general de esta ecuación tiene la forma:

$$\Psi(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

De este modo la solución general de la ecuación de ondas se puede expresar como la superposición de dos movimientos ondulatorios que se propagan en la misma dirección pero con sentidos opuestos. Desde luego, para una onda que se propaga en un sólo setido, aparecerá una sola de las dos funciones. Sin embargo, cuando (por ejemplo) tenemos una onda incidente que se propaga según +X, y una onda reflejada que se propaga según -X, se debe usar la forma general de ψ.

Comprobemos que una expresión de la forma:

$$\Psi(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

es una solución de la ecuación de ondas. Consideremos

$$\Psi(x,t) = f(x \pm vt)$$

y llamemos u = x±vt, entonces, derivando:

$$\frac{\delta\Psi}{\delta t} = \frac{\delta\Psi}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta t} = \pm\frac{\delta\Psi}{\delta u}\cdot v = \pm v\cdot\frac{\delta\Psi}{\delta u}$$

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta t^2} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\pm v\cdot\frac{\delta\Psi}{\delta u}\right) = \pm v\cdot\frac{\delta^2\Psi}{\delta u^2}\cdot\frac{\delta u}{\delta t} = v^2\cdot\frac{\delta^2\Psi}{\delta u^2}$$

$$\frac{\delta\Psi}{\delta x} = \frac{\delta\Psi}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta\Psi}{\delta u}$$

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta u}\right) = \frac{\delta^2\Psi}{\delta u^2}\cdot\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta^2\Psi}{\delta u^2}$$

Es decir,

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta t^2} = v^2\cdot\frac{\delta^2\Psi}{\delta u^2}$$

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta x^2} = \frac{\delta^2\Psi}{\delta u^2}$$

Observando los dos segundos miembros, vemos que se cumple:

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta x^2} - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\delta^2\Psi}{\delta t^2} = 0$$

que es la ecuación de ondas unidimensional.

3. PROPAGACION DE UNA PERTURBACION PERIODICA. ONDAS ARMONICAS.

Se dice que una onda es "armónica" cuando es la ecuación de onda:

$$\Psi = f(x,t)$$

f es una función del tipo seno o coseno.

Así, consideremos que en un punto O se produce una perturbación armónica:

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

dicha perturbación será recibida en un punto P de abcisa x al cabo de x/v segundos, siemdo v la velocidad de propagación. Luego, el estado de vibración de P corresponde a la expresión:

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \operatorname{sen} \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

ω es la pulsación, que puede ponerse en función de una cantidad T denominada periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

luego

$$\Psi = \Psi_0 \cdot 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)$$

El producto vT recibe el nombre de longitud de onda, λ,

$$\lambda = vT$$

Se define el número de onda, k, como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La distancia mínima entre dos estados idénticos de perturbación, es decir, entre dos frentes de onda consecutivos, se denomina "periodo", y así tenemos:

-Distancia temporal o "periodo" propiamente dicho: Intervalo temporal T entre estados idénticos de perturbación sucedidos en el mismo punto:

$$\Psi(x,t) = \Psi(x,t+T)$$

- Distancia espacial o "longitud de onda". Intervalo espacial λ entre estados idénticos de perturbación sucedidos en el mismo instante:

$$\Psi(x,t) = f(x+\lambda,t)$$

Podemos definir la longitud de onda como la distancia que avanza el movimiento ondulatorio en un periodo. Por consiguiente, en el movimiento ondulatorio sinusoidal tenemos dos periodicidades: espacial y temporal, de modo que $\lambda = vT$. La función de onda puede escribirse:

$$\Psi = \Psi_0 \mathrm{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\Psi = \Psi_0 \mathrm{sen}\left(kx - \frac{2\pi t}{T}\right)$$

También se tiene que:

$$\upsilon = \frac{1}{T} \longrightarrow V = \lambda \cdot \upsilon$$

donde es la frecuencia.

Dos puntos x_1 y x_2 que en un instante t están en igual estado de perturbación, se dice que están en concordancia de fase, debiendo verificarse:

$$\Psi(x_1,t) = \Psi(x_2,t)$$

es decir

$$\Psi_0 \cdot \operatorname{sen} k(x_1 - vt) = \Psi_0 \cdot \operatorname{sen} k(x_2 - vt)$$

que exige que sea:

$$k(x_2 - vt) = 2n\pi + k(x_1 - vt)$$

$$k(x_2 - x_1) = 2n\pi$$

$$x_2 - x_1 = n\lambda \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Se dice que dos puntos están en oposición de fase cuando vibran de modo que:

$$\Psi(x_1,t) = -\Psi(x_2,t)$$

es decir:

$$\Psi_0 \cdot \operatorname{sen} k(x_1 - vt) = -\Psi_0 \cdot \operatorname{sen} k(x_2 - vt)$$

luego:

$$k(x_1 - vt) = (2n + 1) \cdot \pi + k(x_2 - vt)$$

y:

$$x_2 - x_1 = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

La importancia de las ondas sinusoidales se debe al hecho de que cualquier perturbación periódica puede descomponerse en una superposición de ondas sinusoidales de frecuencias y fases adecuadas.

4. ONDAS EN DOS Y TRES DIMENSIONES

Un movimiento ondulatorio en dos dimensiones está definido por una función del tipo:

$$\Psi = f(x,y,t)$$

así son las ondas producidas en la superficie de un líquido. Las ondas bidimensionales pueden ser lineales, como son las producidas cuando se golpea periódicamente la superficie de un líquido con una varilla recta paralela a la misma y que abarca todo el líquido; circulares, como son las producidas al golpear periódicamente la superficie en un punto, y en general toman el nombre de la forma geométrica del frente de onda.

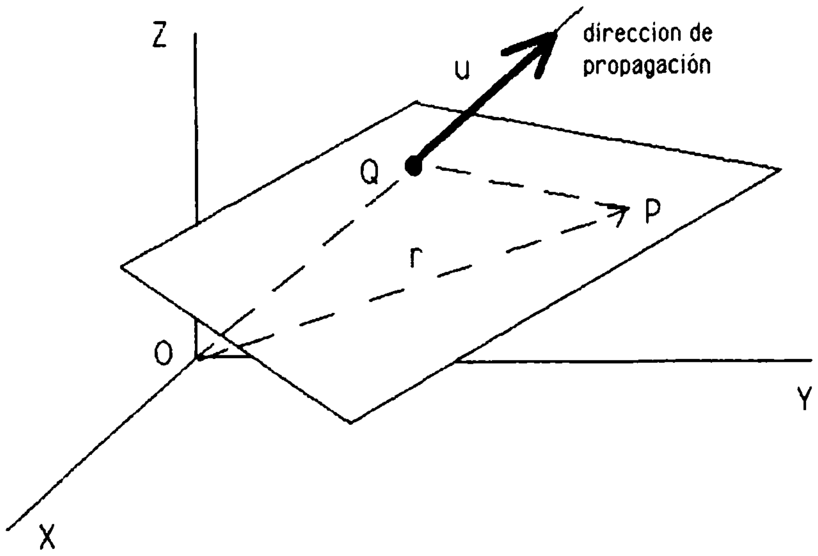
La onda que hemos estudiado como unidimensional

$$\Psi = f(x - vt)$$

en el espacio de tres dimensiones representa una onda plana, puesto que en cualquier punto del plano $x - x_1$ toma el mismo valor el estado de la perturbación ψ.

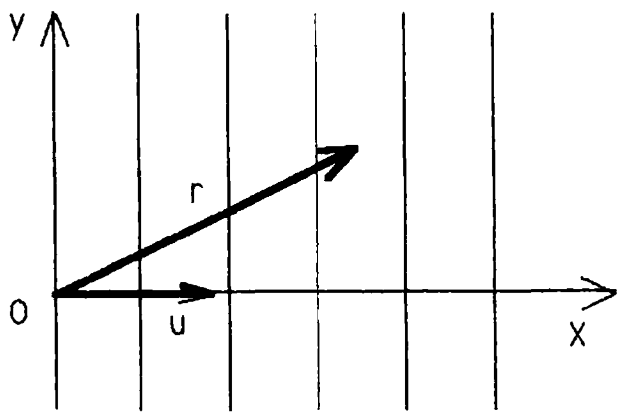
Lo característico de una onda plana es la dirección de propagación, que se indica con un vector **u** perpendicular al plano de la onda, es decir, podremos poner:

$$\Psi(x,y,z,t) = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$



Cuando la onda se propaga según el eje X,

$$\vec{u} \cdot \vec{r} = x$$



Para una onda plana armónica, se escribe:

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \operatorname{sen} k(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

Es conveniente definir un vector $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$, llamado vector de propagación o vector de onda. Su módulo es:

$$|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\upsilon}$$

Como $\omega = k\upsilon$, una onda plana armónica plana se expresa por:

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_0 \cdot \operatorname{sen} k(\vec{u} \cdot \vec{r} - \omega t) = \\ &= \Psi_0 \cdot \operatorname{sen}\left(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z - vt\right)\end{aligned}$$

donde:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{\upsilon^2}$$

Otros tipos de ondas son las cilíndricas y las esféricas, en las que los frentes de onda son, respectivamente, cilindros y esferas.

Para ondas en tres dimensiones, y si la magnitud ψ que se propaga es escalar, la ecuación de onda se escribe:

$$\frac{\delta^2 \Psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Psi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \Psi}{\delta z^2} - \frac{1}{\upsilon^2} \cdot \frac{\delta^2 \Psi}{\delta t^2} = 0$$

es decir,

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{\upsilon^2} \cdot \frac{\delta^2 \Psi}{\delta t^2} = 0$$

Si la magnitud que se propaga es vectorial:

$$\nabla^2 \vec{\Psi} = \frac{1}{\upsilon^2} \cdot \frac{\delta^2 \vec{\Psi}}{\delta t^2}$$

$$\vec{\Psi} = (\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z)$$

5. ENERGIA E INTENSIDAD DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO. ABSORCION

En el estudio del movimiento ondulatorio es imprescindible comprender qué se propaga realmente en dicho movimiento. Al considerar la descripción matemática de una onda se advertía como una situación física se desplaza a lo largo de un medio material, al tiempo que las partículas del medio vibran en torno a sus posiciones de equilibrio. Luego, lo que realmente se propaga no es la materia, sino su estado de movimiento. Ahora bien, todo estado de movimiento lleva asociado una energía y un momento lineal, luego podemos concluir que:

"en todo movimiento ondulatorio se transmite o propaga momento lineal y energía"

Así, la aparición de un pulso de onda en una cuerda puede explicarse como consecuencia del suministro de energía en uno de sus extremos durante un corto intervalo de tiempo. Si queremos que se produzca un tren continuo de ondas, habrá que suministrar energía sin interrupción.

Imaginemos que una partícula de masa m del medio propagador se ve afectada por una onda, y vibra en torno a su posición de equilibrio. Cuando está en el punto más alto, su energía potencial es máxima, siendo su energía cinética nula; pero, cuando está en su posición de equilibrio, la energía potencial es nula, siendo su energía cinética máxima. La energía total será:

$$E = E_c + E_p$$

y en la posición de equilibrio, $E_p = 0$, luego:

$$E = E_{c(max)} = \frac{1}{2} \cdot mv^2_{max}$$

Al estar sometida cada una de las partículas a un movimiento armónico, su energía máxima será:

$$E_{c(max)} = \frac{1}{2} \cdot mv^2_{max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 A^2$$

pues $v_{max} = \omega A$. Por tanto, la energía cinética máxima, igual a la energía total, será:

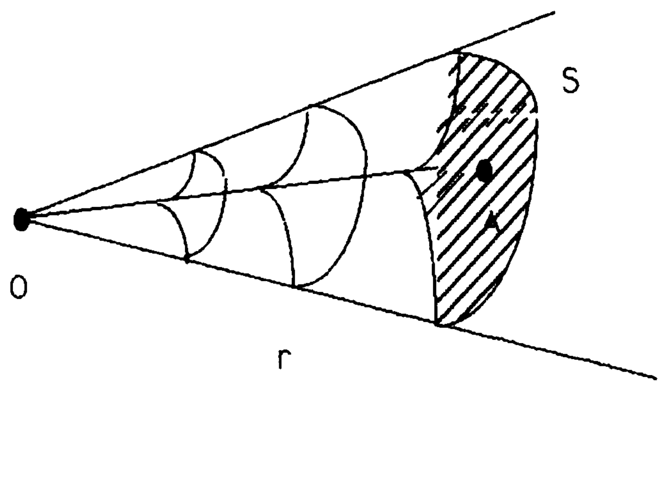
$$E = E_{c(max)} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 A^2 = \frac{2\pi^2 m}{T^2} \cdot A^2 = 2\pi^2 \cdot m \cdot \upsilon^2 A^2$$

ecuación que nos dice que la energía de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud de vibración y al cuadrado de la frecuencia. Por ello, una perturbación de alta frecuencia puede transportar gran energía, aunque su amplitud sea relativamente pequeña. Este resultado es general para todas las ondas.

Intensidad del movimiento ondulatorio

Se define la intensidad del movimiento ondulatorio como la energía transportada en la unidad de tiempo a través de la unidad de superficie normal a la dirección de propagación.

Imaginemos un foco puntual o emisor de ondas esféricas:



S es la superficie perpendicular a la dirección de propagación en el punto A. La intensidad del movimiento ondulatorio, I, será:

$$I = \frac{dE}{S \cdot dt} = \frac{P}{S} = \frac{\text{Potencia}}{S}$$

Se mide en J/sm^2, es decir W/m^2. En el caso tridimensional podemos considerar que la energía transmitida a la "masa vibrante" dm existente entre dos frentes de onda (superficies esféricas) de radios r y r+dr es igual a:

$$\begin{pmatrix} dm = \rho \cdot dV \\ V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \rightarrow dV = 4\pi \cdot r^2 dr \end{pmatrix}$$

$$dE = d\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 A^2\right) = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 A^2 dV =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot \rho \cdot r^2 dr \cdot \omega^2 A^2$$

es decir

$$dE = 2\pi \cdot \rho\omega^2 \cdot A^2 \cdot r^2 dr$$

La potencia el foco emisor, P, será:

$$P = \frac{dE}{dt} = 2\pi \cdot \rho\omega^2 \cdot A^2 \cdot r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

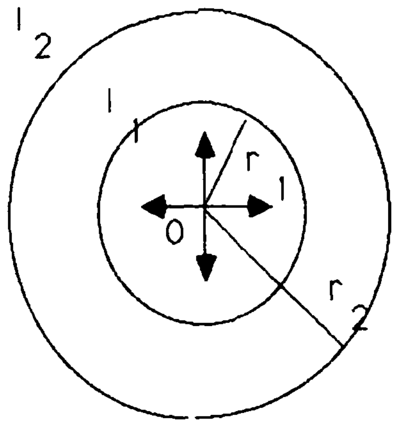
pero dr/dt = v es la velocidad de propagación, luego:

$$P = 2\pi \cdot \rho v\omega^2 \cdot A^2 \cdot r^2$$

Por tanto, para ondas esféricas, la intensidad del movimiento ondulatorio, a una distancia r del foco emisor, es:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{2\pi \cdot \rho v\omega^2 \cdot A^2 \cdot r^2}{4\pi \cdot r^2} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v\omega^2 \cdot A^2$$

Imaginemos que el foco está emitiendo ondas esféricas, y consideremos dos esferas de radios r_1 y r_2;



Suponemos que no hay pérdida de energía y que el medio es isótropo, entonces:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi \cdot r_1^2} \qquad I_2 = \frac{P}{4\pi \cdot r_2^2}$$

es decir, cada frente de onda recibe la misma energía, ademas:

$$4\pi \cdot r_1^2 \cdot I_1 = 4\pi \cdot r_2^2 \cdot I_2$$

es decir:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

La intensidad del movimiento ondulatorio propagado por ondas esféricas es inversamente proporcional al cuadrado de las distancias al foco emisor. Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud:

$$\frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

es decir,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Las amplitudes son inversamente proporcionales a la distancia al foco emisor.

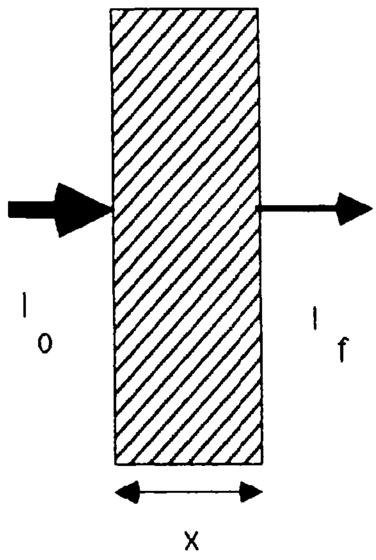
Absorción

Silas superficies de onda son planas, la intensidad y la amplitud permanecen constantes. Sin embargo, esto en general no ocurre, pues las vibraciones engendran rozamientos mecánicos que disipan energía en forma de calor y hay una absorción de energía en el medio.

Limitándonos al caso de ondas planas, la experiencia indica que la disminución, -dI, de la intensidad del movimiento ondulatorio es proporcional a la intensidad I y al espacio recorrido dx:

$$-dI = \mu I \cdot dx$$

donde μ es el coeficiente de absorción del medio.



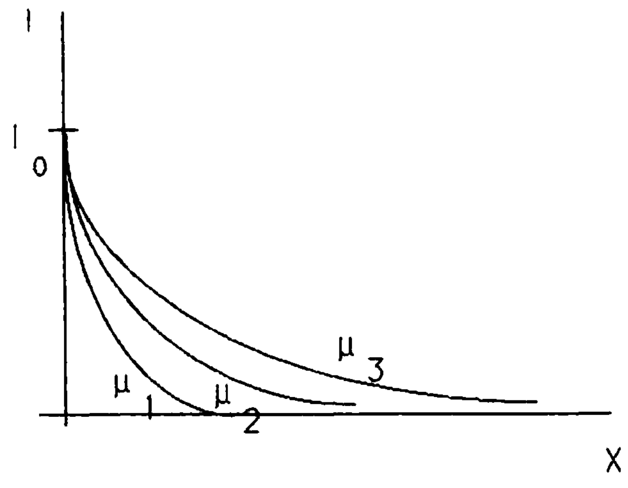
Separando variables e integrando, resulta:

$$\frac{dI}{I} = -\mu \cdot dx \qquad\qquad \ln\frac{I}{I_0} = -\mu \cdot x$$

por tanto, la ley general de la absorción del movimiento ondulatorio es:

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu x}$$

en donde I_0 es la intensidad incidente, e I la intensidad después de atravesar el espesor x del medio.



A veces se utiliza el concepto de semiespesor de absorción, $x_{1/2}$, que es el espesor del medio absorbente capaz de reducir a la mitad la intensidad incidente, es decir,

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \cdot e^{-\mu x_{1/2}}$$

simplificando y tomando logaritmos neperianos:

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0'693}{\mu}$$

Cuando las ondas son esféricas, este efecto de absorción se superpone al decrecimiento natural de la intensidad a razón inversa al cuadrado de la distancia.

El fenómeno de absorción del movimiento ondulatorio es, en general selectivo, es decir, el coeficiente de absorción μ depende de la frecuencia de la perturbación que se propaga en el medio, de tal modo que ondas de igual naturaleza, pero de frecuencia distinta, no se debilitan por igual después de atravesar el mismo espesor.

Un ejemplo de esto lo tenemos en el llamado "efecto invernadero". El vidrio es diatérmano (transparente) para las radiaciones solares que penetran en el invernadero, siendo absorbidas por las paredes y los objetos interiores, los cuales se calientan y elevan su temperatura y emiten radiación infrarroja que no puede escapar por el vidrio, pues éste es atérmano (opaco) para estas radiaciones.

En el caso del sonido puede obtenerse una sala áltamente absorbente (anecoica) recubriendo sus paredes con materiales porosos (corcho, lana de vidrio, escayolas perforadas, etc.) con un coeficiente de absorción muy elevado.

6. VELOCIDAD DE GRUPO Y VELOCIDAD DE FASE.

La velocidad $v = \omega/k$ para una onda armónica de frecuencia angular ω y longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, se llama velocidad de fase. Sin embargo, ésta no es necesariamente la velocidad que observamos cuando analizamos un movimiento ondulatorio. Si tenemos en cuaenta una onda continua (o como se dice algunas veces, un tren de ondas de longitud infinita) ésta puede constar de una sóla longitud de onda y de una sóla frecuencia. Pero una onda de estas características no es adecuada para transmitir una señal, porque una señal implica algo que empieza en un cierto instante y termina un cierto tiempo más tarde. Esto es, una onda para transmitir una señal deberá tener la forma de un puso o paquete de ondas:

Por consiguiente, si medimos la velocidad con que la señal se transmite, nos estamos refiriendo, esencialmente, a la velocidad con que este pulso viaja. De inmediato diríamos que ésta es la velocidad de fase:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

pues ésta es la velocidad de propagación de las ondas, sin embargo, aquí entra un factor importante, y es que el pulso no es una onda armónica, pues según vemos en la figura anterior, su amplitud no es constante a lo largo del eje X.

Un pulso como el de la figura anterior no está constituido por una onda única, sino por un conjunto de ondas de frecuencias y velocidades próximas cuya composición da un movimiento ondulatorio resultante que se propaga en la misma dirección y sentido que sus componentes, presentando máximos y mínimos de amplitud.

El número de ondas comprendidas entre dos valores nulos y consecutivos de esta amplitud es lo que constituye el paquete de ondas, y a la velocidad de desplazamiento de este paquete se le da el nombre de velocidad de grupo; evidentemente ésta será la misma que llevará la señal que se transmite con el paquete de ondas, y es la que se detectará.

La velocidad de grupo es:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

y como $\omega = v/k$:

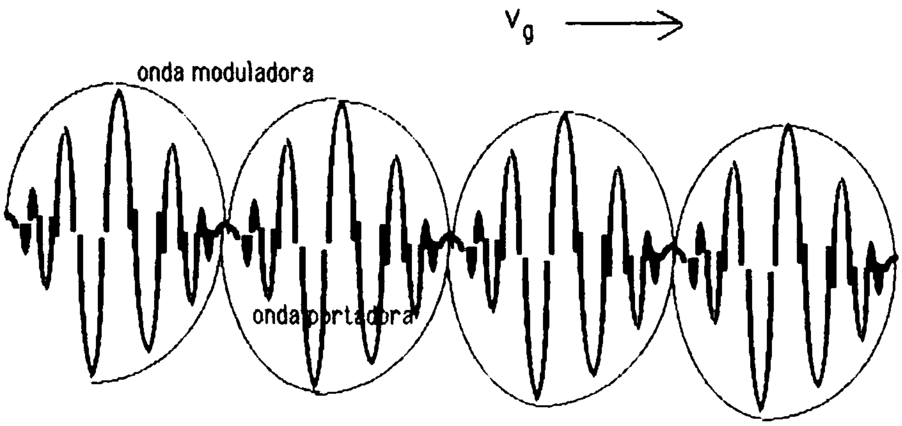
$$v_g = v + k\frac{dv}{dk}$$

sólo cuando la velocidad de fase es independiente de la longitud de onda (o sea, no hay dispersión), se cumple:

------------- Velocidad de la señal -------------

Medio no dispersivo: $v_g = v$

Medio dispersivo: $v_g = v + dv/dk$



v_g es la velocidad de la onda moduladora (la modulación de amplitud corresponde en sí a un movimiento ondulatorio) La perturbación que se propaga con la onda moduladora es la amplitud.

En cada instante la onda moduladora es envolvente de la onda portadora.

La onda portadora tiene velocidad v.

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &= \Psi_0 \cdot \operatorname{sen}(kx - \omega t) \\ \Psi_2 &= \Psi_0 \cdot \operatorname{sen}(k'x - \omega' t) \end{aligned}\right\}$$

ω y ω' casi iguales
k y k' casi iguales

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = \Psi_0 \cdot [\operatorname{sen}(kx - \omega t) + \operatorname{sen}(k'x - \omega' t)] =$$

$$= 2\Psi_0 \cdot \cos\frac{1}{2}[(k' - k)\cdot x - (\omega' - \omega)\cdot t] \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2}[(k' + k)\cdot x - (\omega' + \omega)\cdot t] \cong$$

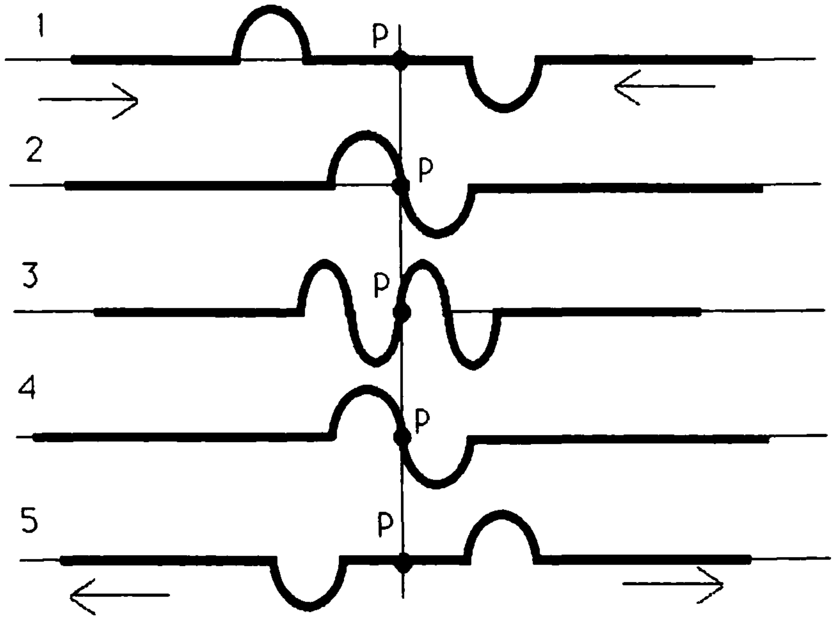
$$\cong \underbrace{2\Psi_0 \cdot \cos\frac{1}{2}[(k' - k)\cdot x - (\omega' - \omega)\cdot t]}_{\substack{\textbf{Amplitud} \\ v_g = \frac{\omega' - \omega}{k' - k} = \frac{d\omega}{dk}}} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(kx - \omega t)}_{v = \frac{\omega}{k}}$$

PROPIEDADES GENERALES DE LAS ONDAS

1.- Superposición de ondas. Interferencias
2.- Ondas estacionarias
3.- Principio de Huygens
4.- Reflexión y refracción de ondas
5.- Efecto Doppler
6.- Ondas de choque

1. SUPERPOSICION DE ONDAS. INTERFERENCIAS

Supongamos dos impulsos producidos en los extremos de una misma cuerda que se propagan en direcciones opuestas. En la figura hemos representado sus posiciones en tiempos sucesivos. En los tiempos 2, 3 y 4 se produce una interacción, y en el 5 siguen su marcha con la forma original.



Uno de los principios más importantes en el estudio del movimiento ondulatorio es el principio de superposición, por el cual dos movimientos ondulatorios que se encuentran en un punto se superponen, dando lugar a otro nuevo, pero sólamente en ese punto, continuando después independientemente uno del otro.

Según el principio de superposición el desplazamiento transversal resultante es igual a la suma algebraica de los desplazamientos de las ondas individuales. Dicho de otro modo, no hay interacción onda-onda; cada onda posee después del "choque" la misma energía y cantidad de movimiento que poseía antes del "choque".

El principio de superposición permite analizar cualquier tipo de movimiento ondulatorio periódico. En el siglo XIX, Fourier demostró que todo movimiento ondulatorio periódico puede descomponerse como suma o superposición de movimientos ondulatorios armónicos o sinusoidales. Cada onda simple, componente de la onda más complicada, se llama **armónico** de dicha onda.

Interferencias

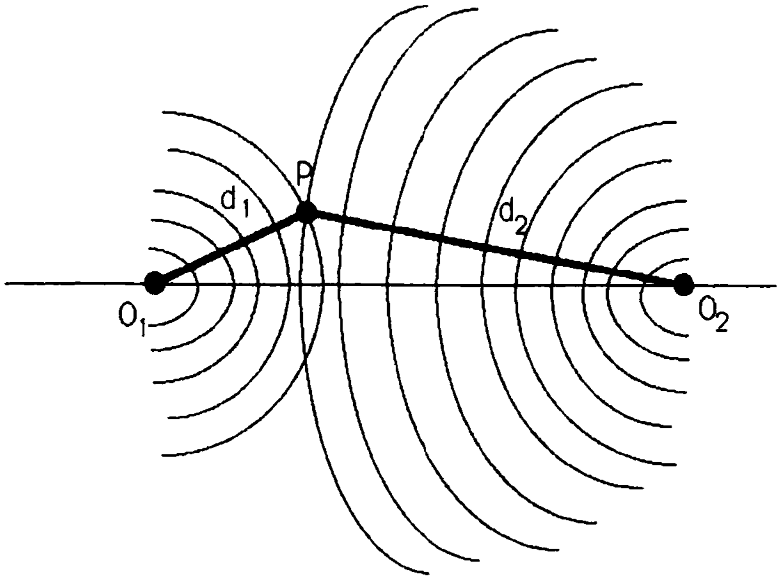
La superposición de dos movimientos ondulatorios recibe el nombre de interferencia. En cada punto del medio, la superposición es análoga a la composición de dos movimientos armónicos simples, siempre, claro está, que los movimientos ondulatorios sean armónicos.

Cuando las dos ondas poseen ambas al superponerse desplazamientos positivos (o negativos), la magnitud del desplazamiento resultante es mayor que la de cada onda componente por separado, y la interferencia se llama constructiva. Por el contrario, cuando al superponerse sus desplazamientos son opuestos, la magnitud del desplazamiento resultante es menor que el de cada onda por separado, y se dice que la interferencia es destructiva.

Como ejemplo de interferencias en dos dimensiones, consideremos lo que sucede en la superficie de un líquido cuando en dos puntos, O_1 y O_2, se producen perturbaciones síncronas de la misma amplitud y periodo.

Estas perturbaciones alcanzan el punto P situado a las distancias $O_1P = d_1$ y $O_2P = d_2$ en un instante t. La primera produce en P una vibración de elongación:

$$\Psi_1 = A \cdot \mathrm{sen}\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right)$$



mientras la segunda da lugar en P a la elongación:

$$\Psi_2 = A \cdot \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right)$$

en donde λ es la longitud de onda de las vibraciones producidas en ambas fuentes. Si la magnitud ψ es un escalar, o bien si las direcciones de vibración son las mismas en el caso de ser una magnitud vectorial, el estado de vibración del punto P será la suma de los debidos a ambos movimientos ondulatorios. En este caso, ψ es un escalar, luego:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A \cdot \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right) + A \cdot \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right)$$

es decir,

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A \cdot \left[\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right) + \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right)\right]$$

y aplicando la relación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \cdot \cos\frac{a-b}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{a+b}{2}$$

resulta:

$$\Psi = 2A \cdot \cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} \cdot \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1 + d_2}{\lambda} \right)$$

Si hacemos:

$$A_r = 2A \cdot \cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda}$$

$$\rho = - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}$$

la elongación resultante puede escribirse en la forma:

$$\Psi = A_r \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} + \rho \right)$$

que nos dice que el movimiento resultante de un punto cualquiera del medio posee:

(a) un periodo idéntico al de las fuentes O_1 y O_2;
(b) una amplitud resultante A_r, que es una función sinusoidal de la diferencia d_2-d_1 entre las distancias O_1P y O_2P
(c) una fase φ en el origen de tiempos que es proporcional a la suma d_1+d_2 de estas distancias.

La amplitud resultante A_r será máxima cuando:

$$\cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = n \cdot \pi \Rightarrow d_2 - d_1 = n\lambda$$

condición de interferencia constructiva, es decir, el movimiento resultante es máximo en aquellos puntos del medio para los cuales la diferencia de marcha es nula o igual a un múltiplo entero de la longitud de onda. En este caso:

$$\Psi_m = 2A \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} + \rho \right)$$

La amplitud resultante A_r es nula (el punto no vibra) para aquellos puntos en que:

$$\cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = 0 \Rightarrow \pi \cdot \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow d_2 - d_1 = (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

es decir, el movimiento resultante es nulo en aquellos puntos del medio para los cuales la diferencia de caminos (diferencia de marcha) es igual a un múltiplo impar de media longitud de onda.

El lugar geométrico de los puntos donde la amplitud es nula, está formado por una familia de hipérbolas fijas definidas por la relación:

$$d_2 - d_1 = (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

de focos O_1 y O_2. Igualmente, el lugar geométrico de los puntos donde la amplitud del movimiento es máxima, está formado por otra familia de hipérbolas fijas definidas por la relación:

$$d_2 - d_1 = n'\lambda$$

que poseen los mismos focos O_1 y O_2. Al valor particula $n' = 0$ corresponde la mediatriz de O_1O_2. Las hipérbolas de amplitud nula (puntos nodales) están intercaladas entre las hipérbolas de amplitud máxima (puntos ventrales). El diagrama resultante se denomina "franjas de interferencia".

Si los dos movimientos vibratorios de igual periodo y dirección que se superponen no poseen la misma amplitud, también existe interferencia, pero en los puntos de movimiento mínimo la amplitud no se anula como en el caso expuesto. Así, lo que tenemos es:

$$\Psi_1 = A_1 \cdot \operatorname{sen} 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{d_1}{\lambda} \right)$$

$$\Psi_2 = A_2 \cdot \operatorname{sen} 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{d_2}{\lambda} \right)$$

el movimiento resultante en P sería:

$$\Psi = A_r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} + \rho \right)$$

pero ahora:

$$A_r^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cdot \cos 2\pi \cdot \left(\frac{d_2 - d_1}{\lambda} \right)$$

$$\operatorname{tg} \rho = - \frac{A_1 \cdot \operatorname{sen} \frac{d_1}{\lambda} + A_2 \cdot \operatorname{sen} \frac{d_2}{\lambda}}{A_1 \cdot \cos \frac{d_1}{\lambda} + A_2 \cdot \cos \frac{d_2}{\lambda}}$$

y las amplitudes máxima y mínima serán:

$$A_{max} = A_1 + A_2$$
$$A_{min} = |A_1 - A_2|$$

Las intensidades del movimiento ondulatorio en P serían:

$$A_1 = A_2 \rightarrow I_p = 2I + 2I \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{d_2 - d_1}{\lambda} =$$
$$= 4I \cdot \cos^2 \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda}$$
$$A_1 \neq A_2 \rightarrow I_p = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{d_2 - d_1}{\lambda}$$

El fenómeno de interferencias es muy general. Se observa tanto en el dominio de las ondas mecánicas como en el dominio de las ondas luminosas. Así, por ejemplo, a partir del estudio de las interferencias, se pueden determinar longitudes de onda.

No obstante, para que se produzcan interferencias con la luz procedente de dos focos distintos, es preciso que ambos posean la misma frecuencia y que su diferencia de fase sea constante. Cuando esto ocurre, se dice que los dos focos son coherentes. Pero si los dos focos poseen frecuencias distintas, o si su diferencia de fase cambia aleatoriamente con el tiempo, no se producen fenómenos de interferencia estacionarios y los focos se dice que son incoherentes.

2. ONDAS ESTACIONARIAS

Otro tipo de interferencias tiene lugar cuando dos ondas de la misma velocidad, frecuencia y amplitud, se propagan a traves del mismo medio en direcciones opuestas. En este caso se origina un sistema de ondas estacionarias caracterizado por la existencia de regiones donde alguna característica de la onda (desplazamiento, presión, etc.) se anula y regiones donde esta característica es máxima. Las regiones de valor nulo se llaman nodos, y las de valor máximo antinodos o vientres.

Estas ondas reciben el nombre de estacionarias, porque, a diferencia de las ondas progresivas, parecen no avanzar.

Consideremos dos movimientos ondulatorios de sentidos contrarios:

$$\Psi_1 = A \cdot \operatorname{sen} 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\Psi_2 = A \cdot \operatorname{sen} 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

El valor de X representa la abcisa del punto en el que se está produciendo la superposición de los dos movimientos ondulatorios sinusoidales. La elongación resultante en X es:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A \cdot \left[\operatorname{sen} 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \operatorname{sen} 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

de donde:

$$\Psi = 2A \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

Es decir, un punto cualquiera del medio está animado de un movimiento vibratorio armónico de igual periodo que los componentes, y de una amplitud:

$$A_r = 2A \cdot \cos\frac{2\pi x}{\lambda}$$

independiente del tiempo, pero que varía según una ley sinusoidal en función de la abcisa X del punto que se considere. Recuérdese que, en las ondas progresivas, cada partícula del medio vibra con igual amplitud.

La amplitud A_r es nula para aquellos puntos en que:

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$$

o sea:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$$

es decir:

$$x = (2n+1)\cdot\frac{\lambda}{4}$$

que corresponde a los nodos de vibración.

La amplitud A_r será máxima (A_r = 2A) para los puntos en que:

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$$

o sea:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi$$

es decir:

$$x = n\cdot\frac{\lambda}{2}$$

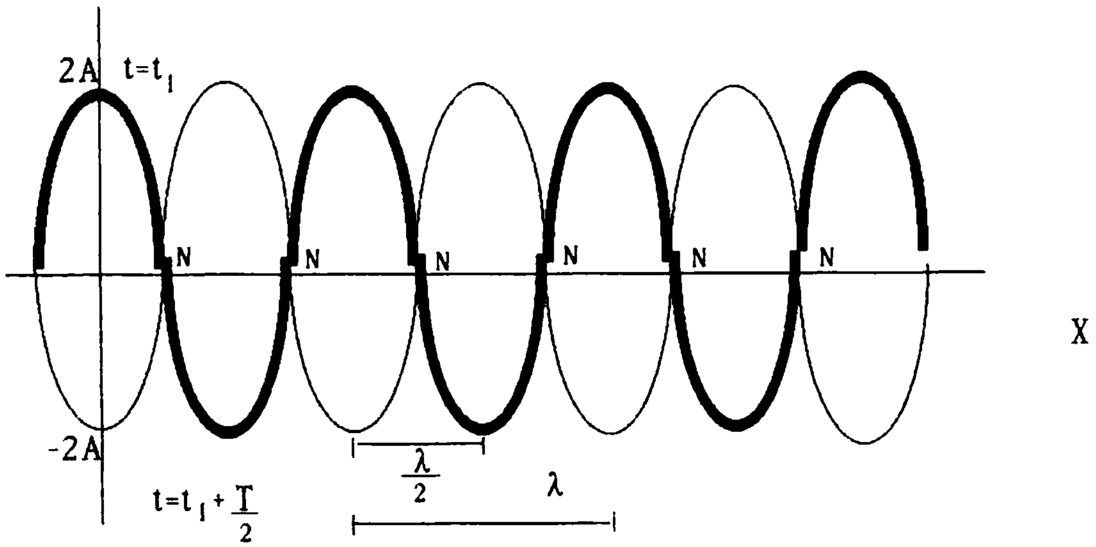
que corresponde a los vientres de la vibración. La distancia entre dos nodos o dos vientres consecutivos es:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}$$

La distancia entre un nodo y el vientre más próximo será:

$$(2n+1) \cdot \frac{\lambda}{4} - n \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}$$

En una onda estacionaria, la energía no se transporta a lo largo del medio, ya que los puntos nodales permanentemente en reposo impiden el transporte. Por ello, la energía permanece "estacionaria" y el movimiento puede considerarse como una oscilación conjunta del medio, en el cual cada partícula vibra con una amplitud que depende de la posición



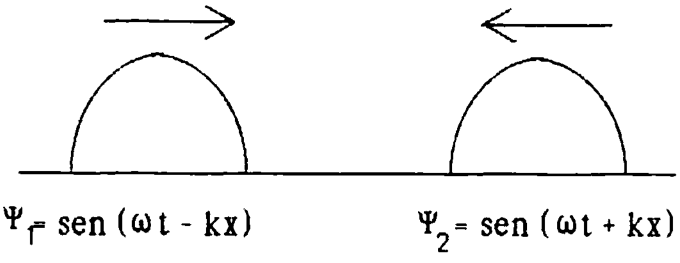
$$\Psi = A_r \cdot \text{sen}\frac{2\pi t}{T}$$

$$\Psi(t = t_1) = \Psi_1$$

$$\Psi(t = t_1 + \frac{T}{2}) = \Psi_2 = -\Psi_1$$

<u>Ondas estacionarias en una cuerda</u>

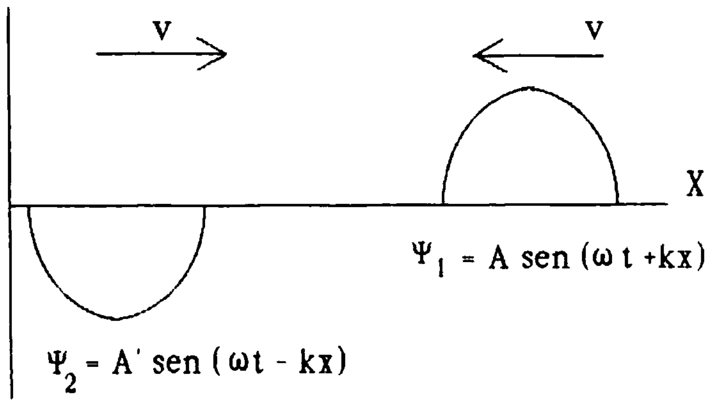
La situación antes analizada es válida en el caso, por ejemplo, de una cuerda con extremos libres en la que se producen simultáneamente dos perturbaciones armónicas coherentes.



Consideremos a continuación la situación en la cual la cuerda tiene uno de sus extremos fijos (O) y el otro libre, en el cual se produce una perturbación armónica. Esta onda se desplazará hacia la pared (onda incidente), donde dará lugar a la onda reflejada, con la que interfiere.

La onda resultante será:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A \cdot \text{sen}(\omega t + kx) + A' \cdot \text{sen}(\omega t - kx)$$



Por ser O un punto fijo en todo instante, habrá que cumplirse $\psi = 0$ para $x = 0$, es decir:

$$0 = (A + A') \cdot \text{sen}(\omega t) \rightarrow A' = -A$$

Luego la amplitud de la onda reflejada tiene signo opuesto a la amplitud de la onda incidente. Por tanto:

$$\begin{aligned}\Psi &= A \cdot \mathrm{sen}(\omega t + kx) - A \cdot \mathrm{sen}(\omega t - kx) = \\ &= A \cdot [\mathrm{sen}(\omega t + kx) - \mathrm{sen}(\omega t - kx)] = \\ &2A \cdot \mathrm{sen}(\omega t) \cdot \cos(\omega t)\end{aligned}$$

que también corresponde a una onda estacionaria. Su amplitud es:

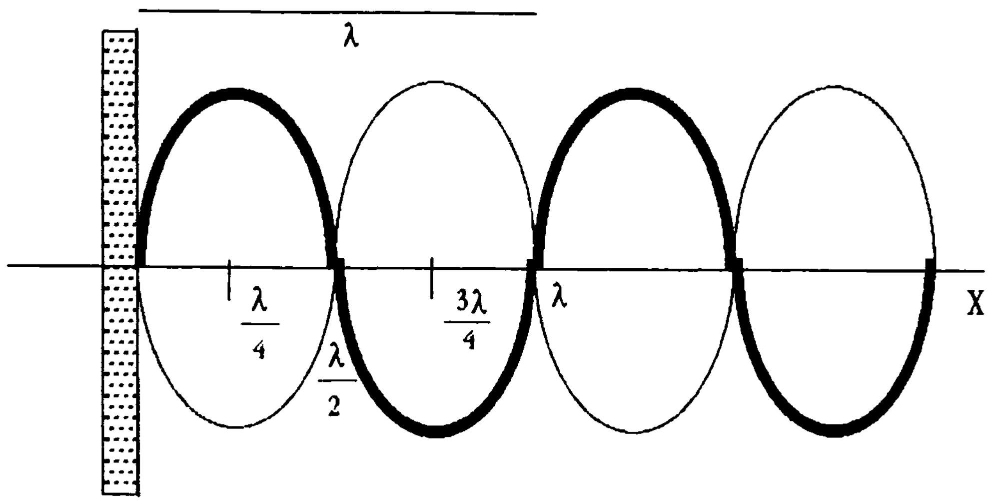
$$A_r = 2A \cdot \mathrm{sen}\, kx = 2A \cdot \mathrm{sen}\frac{2\pi x}{\lambda}$$

Los vientres corresponden a:

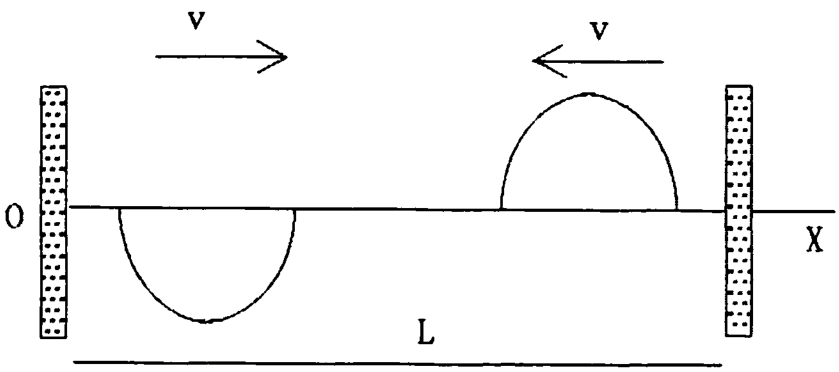
$$x = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}$$

Los nodos corresponden a:

$$x = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$



Consideremos ahora una cuerda con sus dos extremos fijos. Una onda armónica producida por cierta perturbación en uno de sus puntos se propagará a lo largo de la cuerda reflejándose en las paredes e interfiriendo con las ondas reflejadas.



La situación es matemáticamente igual al caso anterior, resultando:

$$\Psi = 2A \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}$$

onda estacionaria cuyos vientres corresponden a:

$$x = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}$$

y cuyos nodos corresponden a:

$$x = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Pero observemos que el extremo $x = L$ debe de ser un nodo, por ser fijo en todo instante, luego debe cumplirse:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$$

Es decir, sólo son posibles ondas cuya longitud de onda sea $\lambda = 2L/n$

Mientras que en los casos anteriores la frecuencia de las oscilaciones era arbitraria, $\nu = \omega/2\pi = v/\lambda$, la restricción citada para la longitud de onda restringe las frecuencias posibles en este último caso, de modo que sólo serán posibles las frecuencias que cumplan:

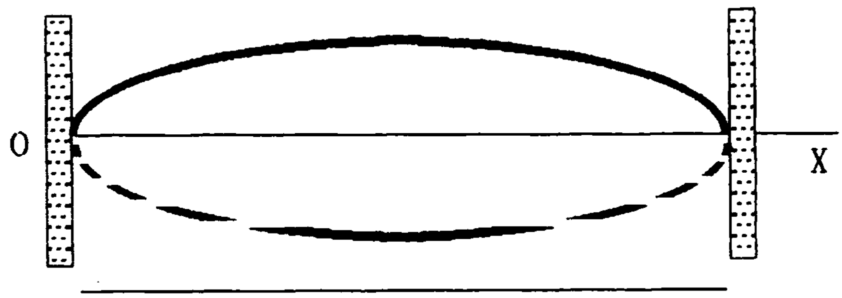
$$\upsilon_n = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}$$

La frecuencia correspondiente a n = 1 se llama "frecuencia fundamental":

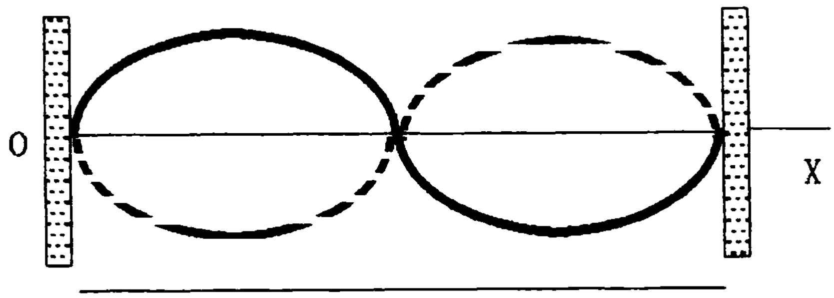
$$\upsilon_1 = \frac{v}{2L}$$

y las restantes frecuencias se denominan "armónicos".

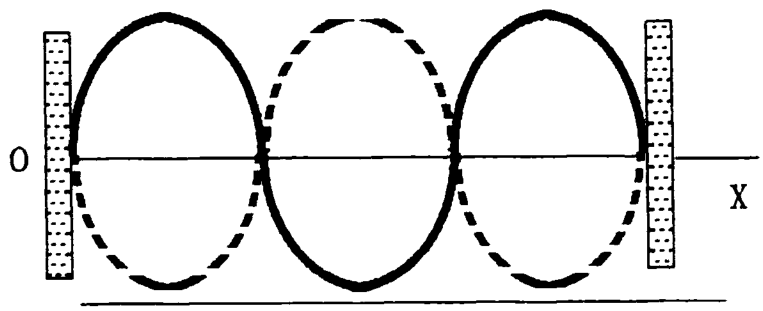
En la siguiente figura se han representado las formas de onda o "modos" de vibración correspondientes a la frecuencia fundamental o "natural" y a los dos primeros armónicos.



$$L = \frac{\lambda}{2}$$



$$L = \lambda$$



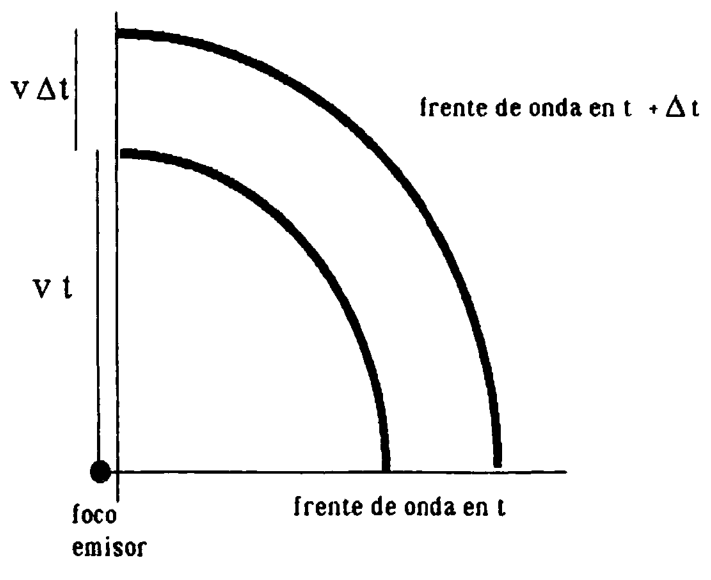
$$L = \frac{3\lambda}{2}$$

3. PRINCIPIO DE HUYGENS

Hemos visto como, al entrar en vibración una partícula de un medio elástico, se propaga a través de este un movimiento ondulatorio, haciendo que entren en vibración las partículas del medio a donde llega aquel. Cabe pensar que cada partícula del medio que vibra sea, a su vez, centro de nuevas ondas que se denominan secundarias. Esto indujo a Huygens a enunciar el principio:

"Todo punto de una superficie o frente de onda puede considerarse como fuente de ondas secundarias que se propagan con la misma velocidad que la principal. La envolvente de estas ondas secundarias es, en cada instante, un nuevo frente de ondas".

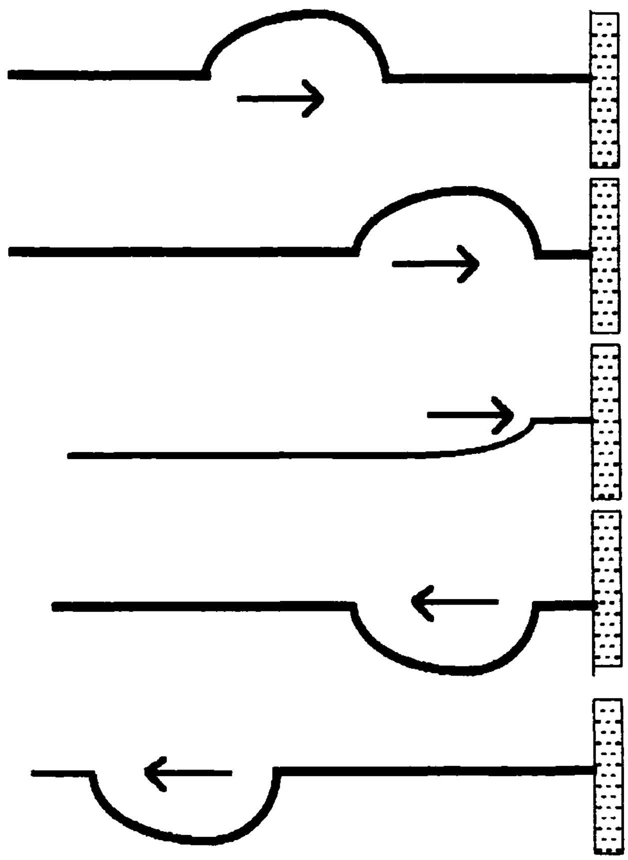
Es decir, que si en un instante t se "congela" el frente de onda principal y desde sus puntos se trazan semicircunferencias de radios $v\Delta t$, la envolvente de estos frentes de ondas secundarios es el frente de onda principal en el instante $t+\Delta t$.



4. REFLEXION Y REFRACCION DE ONDAS

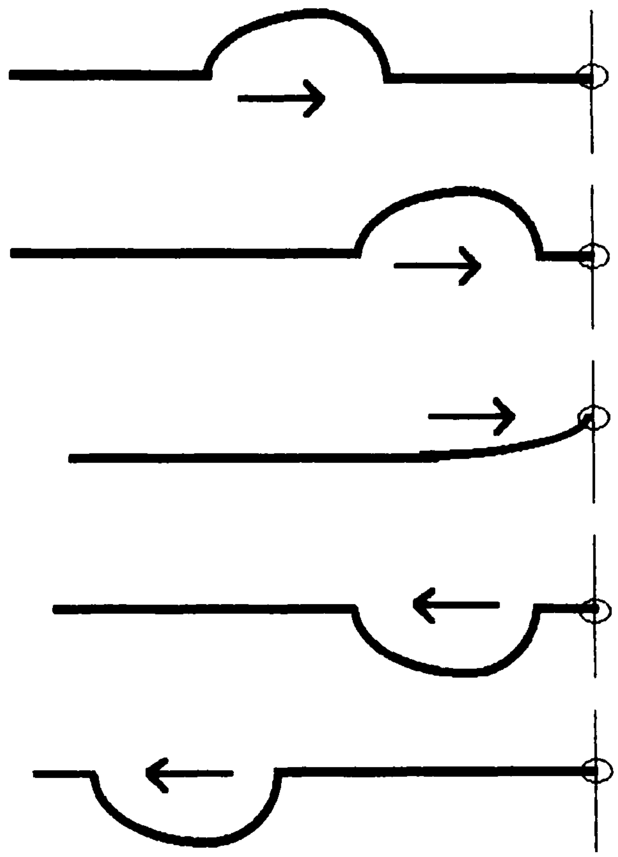
En una dimensión

Supongamos una cuerda atada por un extremo a una pared. Si en el otro extremo se produce un pulso, éste avanza por la cuerda, y al llegar a la pared, se refleja en dirección contraria. Como indica la figura, después de la reflexión el pulso se invierte, de modo que si avanzaba por la parte superior de la cuerda, ahora retrocede por la parte inferior.



Las leyes de Newton explican este comportamiento. Cuando el pulso llega al extremo fijo, la tensión de la cuerda produce una fuerza hacia arriba sobre la pared, de masa infinita y, por tanto, inmóvil. Por el principio de acción y reacción, la pared produce una fuerza igual, pero hacia abajo, sobre la cuerda, que invierte el pulso, comenzando su propagación n sentido contrario.

Supongamos ahora que el extremo de la cuerda, en lugar de estar sujeto a la pared, puede moverse libremente en dirección transversal, mediante un anillo de masa despreciable que se desliza en un vástago vertical. Al llegar el pulso al extremo deslizante, la componente de la fuerza de tensión de la cuerda no se modifica y el pulso se refleja sin cambiar de signo.



Hemos considerado dos casos extremos: Una cuerda en contacto con un medio infinitamente masivo (pared) y una cuerda en contacto con un segundo medio sin masa. Veamos ahora el caso más general en el cual una cuerda de densidad lineal ρ_1 se conecta a una segunda cuerda de densidad lineal ρ_2, siendo $\rho_2 > \rho_1$. Si la tensión es la misma en ambas cuerdas, la velocidad de propagación de un pulso será mayor en la cuerda de menor densidad:

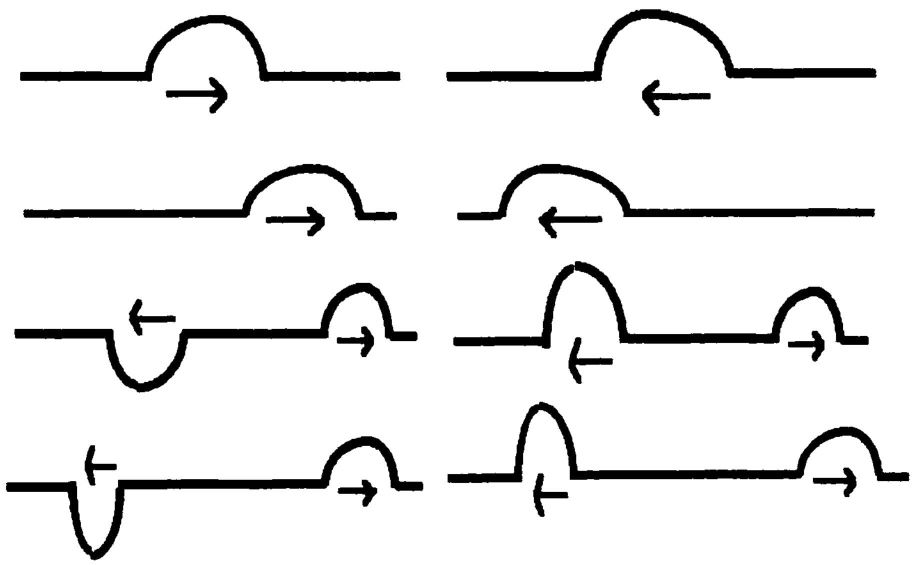
$$v_1 > v_2 \qquad (\rho_2 > \rho_1)$$

Cuando el pulso formado en la primera cuerda alcanza la segunda (caso(a)), se produce simultáneamente una reflexión y una transmisión o refracción. La onda refractada no cambia de signo, mientras que la reflejada es de signo opuesto.

Si el pulso se inicia en la cuerda de mayor densidad, cuando se alcanza el segundo medio (de menor densidad), tanto la onda transmitida como la reflejada son del mismo signo que la incidente (caso(b)). Las amplitudes relativas de las ondas reflejada y refractada dependen de la relación de velocidades v_1/v_2:

Reflexion completa: $\frac{v_1}{v_2} = 0,$

Refraccion completa: $\frac{v_1}{v_2} = 0$

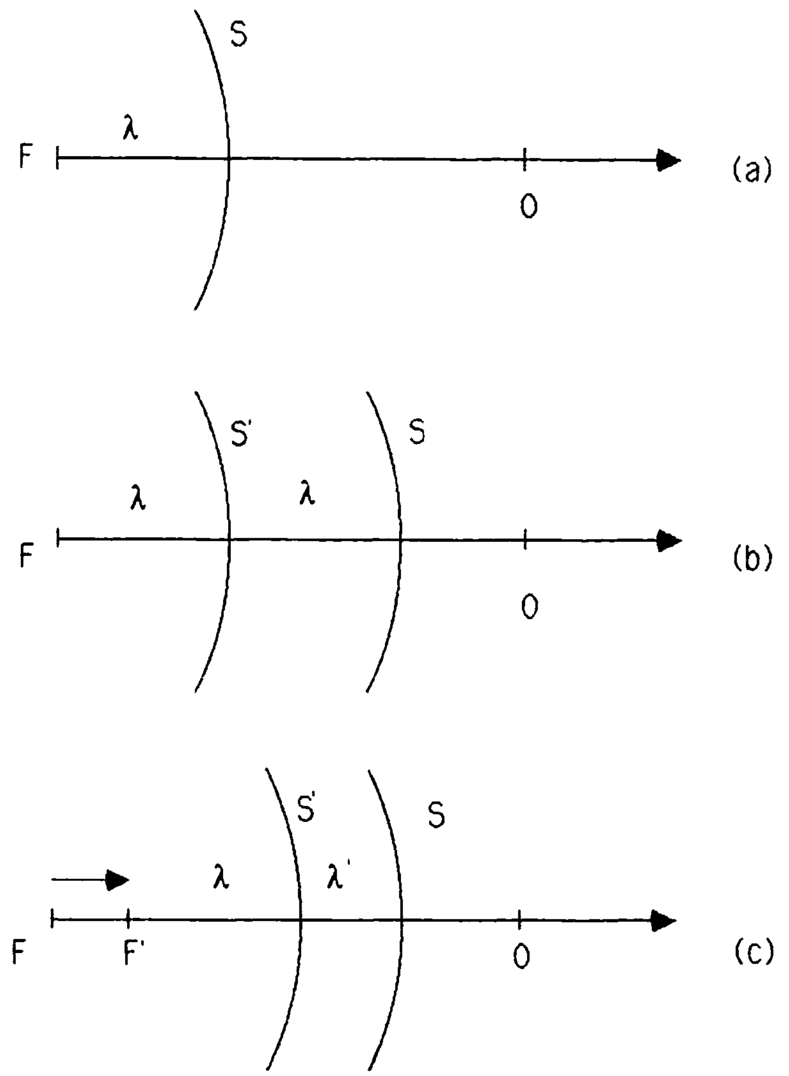


5. EFECTO DOPPLER

Cuando la fuente de ondas y el observador están en movimiento relativo con respecto al medio en el cual la onda se propaga, la frecuencia de la ondas observadas es diferente de la frecuencia de las ondas emitidas por la fuente (efecto Doppler).

Consideremos diversas situaciones:

(1) Foco emisor en movimiento y observador en reposo.



Un foco emisor (F) en su vibración, perturba el ambiente (a) y la superficie de onda originada (S) se propaga en un periodo una distancia $\lambda = v_s T$ donde v_s es la velocidad de propagación del movimiento ondulatorio en el medio. En este instante provoca el foco en el medio una perturbación que origina una superficie de onda análoga a la anterior que, por avanzar a su misma velocidad, permanece a una distancia constante (λ) de la emitida un periodo antes.

Si en el tiempo (T) transcurrido desde la emisión de la primera hasta la de la segunda, el foco emisor ha avanzado un camino FF' = $v_f T$ (v_f = velocidad del foco), la distancia entre las dos superficies quedará disminuida (c), precisamente, en tal valor, ya que la primera (S) se encuentra en la misma posición que si el foco fuese inmóvil y la S' ha recorrido el mismo camino, pero desde un lugar (F') mas avanzado que antes (F).

Para un observador exterior (0), la longitud de onda es:

$$\lambda' = \lambda - v_f T$$

y llamando v y v' a las frecuencias "real" y percibida":

$$\frac{v_s}{v'} = \frac{v_s}{v} - \frac{v_f}{v} = \frac{v_s - v_f}{v}$$

es decir:

$$v' = v \cdot \frac{v_s}{v_s - v_f}$$

Si el foco emisor se aleja del observador, un razonamiento análogo conduce a $v_s + v_f$ en el denominador de la expresión anerior, siendo la velocidad positiva según el sentido positivo del eje de las X, dando a éste el sentido del foco hacia el observador.

(2): Foco en reposo y observador en movimiento.

Un observador en reposo capta v(frecuencia) superfícies de onda idénticas por segundo. Si se aleja del foco con velocidad v_0, captará las mismas que antes (v), menos las veces que v' contiene a λ.

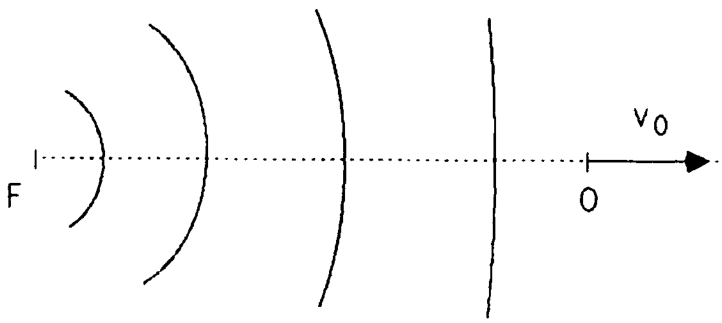
La frecuencia percibida es, por tanto,

$$v'' = v - \frac{v_0}{\lambda} = v - v \cdot \frac{v_0}{v_s} = \frac{v \cdot v_s - v \cdot v_0}{\lambda}$$

luego:

$$v'' = v \cdot \frac{v_s - v_0}{v_s}$$

Si el observador se acerca al foco, en el numerador aparece un signo positivo. Luego, utilizaremos el mismo convenio de signos que en el caso (1).



(3) El observador y el foco se mueven en la misma linea.

Sustituyendo en v del caso (2) por v' del caso (1):

$$v'' = v \cdot \frac{v_s - v_0}{v_s - v_f}$$

con el mismo convenio de signos.

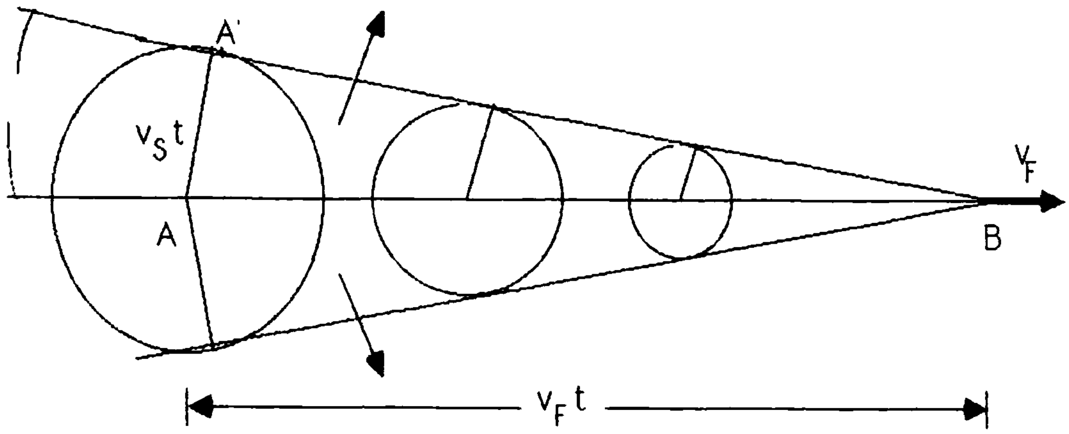
6. ONDAS DE CHOQUE

La fórmula de Doppler, cuando el foco emisor está en movimiento y el observador en reposo:

$$v' = v \cdot \frac{v_s}{v_s - v_f}$$

nos da frecuencias negativas cuando el foco emisor posee velocidades tales que $v_f > v_s$.

Entonces, en un tiempo dado la fuente avanza mas rápido que el frente de onda; por ejemplo, si en un tiempo t la fuente se mueve desde A hasta B, su onda emitida en A ha viajado sólamente desde A hasta A'.



La superficie tangente a todas las sucesivas ondas es un cono cuyo eje es la recta sobre la que se mueve la fuente, y cuya apertura α está dada por:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{v_s}{v_f}$$

El movimiento resultante es entonces una onda cónica que se propaga con las flechas de la figura. Esta onda se llama <u>onda de Mach</u> u <u>onda de choque</u>, y no es mas que el sonido repentino y violento que oimos cuando un avión supersónico pasa cerca de nosotros. Estas ondas también se observan en la estela que dejan los botes que se mueven con mayor velocidad que las ondas superficiales sobre el agua.